REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université ABOU-BEKR BELKAID Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Mémoire de fin d'études

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Statistiques et Probabilités approfondies

Estimation paramétrique dans un processus de type diffusion

Réalisé par :

- Mlle.ABDERRAHIM Fatima Zohra

Présenté devant le jury composé de :

- Président :	A. Allam	MC	Université de Tlemcen
- Examinatrice :	W.Benyelles	MC	Université de Tlemcen
- Rapporteur :	M.Korso Feciane	MC	Université de Tlemcen

Année Universitaire : 2022/2023

Dédicace

A ma très chère mère...

A mon très cher père...

A mes chers frères Ismail et Khaled...

A ma chère soeur Imen...

Remerciements

Je remercie Dieu Tout Puissant Miséricordieux qui grâce à sa Clémence m'a donné la volonté nécessaire pour clôturer ce modeste travail après de longues années d'arrêt.

Je tiens à remercier et à exprimer ma plus grande gratitude Mr **A.ALLAM**, Maître de Conférence à l'université de TLEMCEN de l'honneur qu'il me fait de présider le jury de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Mme **W.Benyelles**, Maître de Conférence à l'université de TLEMCEN d'avoir accepté d'être membre du jury et d'être l'examinatrice de mon travail.

Je tiens à remercier en particulier mon Encadrante Mme **M.Korso Feciane**, Maître de Conférence à l'université de TLEMCEN pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide permanente durant toute la période de la conception de ce travail.

Ainsi que Toutes les Personnes qui m'ont soutenue et aidée dans la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Introduction générale **1**

1 Quelques notions de probabilités et statistiques utiles **3**
1.1 Généralités . . . 3
1.2 Théorème de Radon-Nikodym . . . 4
1.3 Information de Fisher . . . 4
1.4 Processus de Markov . . . 5
1.5 Mouvement Brownien . . . 5
1.5.1 MB en tant que processus gaussien . . . 5
1.6 Intégrale stochastique . . . 7
1.6.1 Motivation . . . 7
1.6.2 Processus d'Itô . . . 8
1.6.3 Formule d'Itô . . . 9
1.7 Equations différentielles stochastiques . . . 9
1.7.1 Existence et unicité de solution d'EDS . . . 10

2 Estimation d'un retard dans une petite diffusion non linéaire **11**
2.1 Introduction . . . 11
2.2 Hypothèse de régularité . . . 12
2.3 Processus de rapport de vraisemblance . . . 12
2.4 Estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) . . . 13
2.5 Normalité asymptotique locale . . . 13
2.6 Propiétés de l'EMV . . . 21

3 Etude d'un cas particulier **30**
3.1 Introduction . . . 31
3.2 Hypothèse de régularité . . . 32
3.3 Normalité asymptotique locale . . . 33
3.4 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance . . . 38

4 Simulation numérique **48**
4.1 Trajectoires d'un mouvement Brownien 48
4.2 Trajectoires du processus cas particulier 51
4.3 Comportement EMV 53

Bibliographie **56**

Introduction générale

Dans ce travail, nous étudions le problème de la théorie de l'estimation paramétrique de retard d'ans un processus de type diffusion non linéaire

$$\begin{cases} dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t \quad 0 \leq t \leq T \\ X_s = x_0 \quad s \leq 0 \end{cases}$$

où $\{W_t\}$ est un processus de Wienner standard et $S(.)$ est une fonction régulière donnée qui dépend d'un paramètre $\theta \in \Theta$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Le coefficient de diffusion ε est supposé connu. Notre estimation est basée sur les observations trajectorielles complètes $X^T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ avec T fixé dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. La méthode d'estimation employée s'appuie sur des techniques statistiques introduites par J. Hajek , L. Le Cam, Ibragimov, R. Has'minskii et Y. Kutoyants et d'autres auteurs. En particulier la borne minimax des risques associés aux estimateurs dans un cadre général est due à J.Hajek et L. Le Cam et la théorie d'estimation paramétrique en statistique asymptotique est due à I. Ibragimov,R. Has'minskii.

Dans le premier chapitre, nous essayons de donner des rappels de base de probabilités et de statistiques utiles.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons l'hypothèse de régularité et nous présentons en détail la condition de normalité asymptotique locale en suivant [4]. Nous étudions enfin la construction de l'estimateur de maximum de vraisemblance ainsi que le comportement asymptotique de celui ci lorsque $\varepsilon \to 0$ pour une fonction $S(.)$ quelconque.

Dans le troisième chapitre, on reprend les mêmes calculs que dans le chapitre précédent pour l'equation differentielle stochastique, suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -\gamma X_{t-\theta} dt + \varepsilon dW_t \quad 0 \leq t \leq T \\ X_s = x_0 \quad s \leq 0 \end{cases}$$

Nous adaptons alors là des techniques de raisonnement et de calculs développés dans le chapitre 2 à ce cas particulier et nous obtenons, au travers de ces calculs de nouvelles estimations et constantes de majoration. Ce travail nous permet de bien comprendre et évaluer les techniques utilisées dans [4] et constitue un apport personnel.

Chapitre 1

Quelques notions de probabilités et statistiques utiles

Dans ce chapitre nous rapelons quelques notions de base en probabilités et statistiques, nous rappelons en particulier une définition probabiliste de l'integrale stochastique et nous introduisons des équations différentielles ordinaires perturbées par ce type d'intégrales stochastiqes.

1.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré complet. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ étant une filtration c'est à dire une suite croissante de sous tribue de $\mathscr{F}$ et $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité définie sur Ω.

Définition 1.1 Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T, en général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$.

Le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit **adapté** à la filtration$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0, X_t$ est $\mathscr{F}_t$ -mesurable .

Définition 1.2 le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit gaussien si pour tout entier strictement positif et pour tous $t_1, ...t_n$ dans T, $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur gaussien(Ses lois de dimensions finies sont gaussiennes).

Nous rappelons le théorème de Radon-Nikodym.

1.2 Théorème de Radon-Nikodym

Soit ν une mesure définie positive sur $B_{\mathbb{R}}$ ($B_{\mathbb{R}}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$). Une mesure de probabilité $\mathbb{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à la mesure ν et on note $\mathbb{P}_\theta << \nu$ si et seulement si $\mathbb{P}_\theta$ admet une densité f par rapport à ν ($\forall A \in B_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}_\theta << \nu \Longleftrightarrow [\nu(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_\theta(A) = 0]$) c'est à dire :

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\nu} = f(x, \theta)$$

ou $x = (x_1, ...x_n) \in \mathscr{X}$ (l'espace des observations).

Nous rappelons également la définition de l'information de Fisher qui est d'un intérêt capital dans les problèmes d'estimation statistique de paramètres inconnus (ici θ).

1.3 Information de Fisher

Définition 1.3 Si $x = (x_1, ...x_n)$ est une n observation d'une v.a. X on note $f(x, \theta)$ la fonction de vraisemblance associée à la variable X.
On suppose que f est dérivable par rapport à θ (réel ou vecteur à n composantes inconnues).

$$\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{f(x, \theta)} \cdot \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$$

L'information de Fisher notée $I(\theta)$ est définie par l'éspérance mathématique.(voir [1] page 62)

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{1}{f(x, \theta)} \cdot \frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= \int_{\{\mathscr{X} : f(x,\theta) \neq 0\}} \frac{1}{f^2(x, \theta)} \cdot \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \cdot f(x, \theta) dx \\ &= \int_{\{\mathscr{X} : f(x,\theta) \neq 0\}} \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \cdot f^{-1}(x, \theta) dx \end{aligned}$$

Nous rappelons aussi la propriété de Markov pour un processus.

1.4 Processus de Markov

Définition 1.4 Un processus est **de Markov** si son comportement dans le futur ne dépend pas du passé qu'à travers le présent (voir [2]).
Un processus X est dit **de Markov**, si pour tout t, pour toute variable aléatoire bornée $Y \in \mathscr{F}_\infty$ ($\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 1} \mathscr{F}_t)$) l'égalité

$$\mathbb{E}(Y \circ \varphi_s / \mathscr{F}_t) = \mathbb{E}(Y \circ \varphi_s / X_t)$$

où φ est l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par $X_u \circ \varphi_s = X_{u+s}$.

En particulier pour toute fonction f borélienne bornée

$$\forall t > s, \quad \mathbb{E}(f(X_t)/\mathscr{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s)$$

Dans le paragraphe qui suit nous rappelons quelques définitions et propriétés relatives au mouvement brownien.

1.5 Mouvement Brownien

Définition 1.5 Un MB standard (où un processus de Wiener) $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un le processus stochastique vérifiant :

1. $B_0 = 0$ P.p.s (ie : $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$).
2. $(B_t, t \geq 0)$ est à accroissements gaussiens centrés de variance $(t - s)$
   (ie : $\forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \hookrightarrow N(0, t - s)$).
3. $(B_t, t \geq 0)$ a des accroissements indépendants. (ie :pour tout n entier naturel non nul et pour toute subdivision $0 < t_1 < .. < t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2 - t_1}, ..., B_{t_n - t_{n-1}}$ sont indépendantes).

1.5.1 MB en tant que processus gaussien

Définition 1.6 Un MB standard réel est un processus gaussien centré $(B_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues et de fonction de covariance

$$K(s, t) = \min(s, t) = s \wedge t$$

Remarque : les deux définitions 1.5 et 1.6 sont équivalentes (voir (voir [2])).

Dans tout ce qui suit nous notons un M.B standard par W_t. Nous rappelons une propriété utile dans ce travail dans le lemme suivant.

Lemme 1.1 Pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right\} \leq 1+\lambda\sqrt{8\pi T}e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}$$

preuve : notons $F(x)$ la fonction de répartition de la v.a. $\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|$, alors par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right\} &= \int_0^\infty e^{\lambda x}dF(x) = -\int_0^\infty e^{\lambda x}d[1-F(x)]\\ &= 1+\lambda\int_0^\infty e^{\lambda x}(1-F(x))dx\end{aligned}$$

Nous appliquons le principe de réflexion (il y a une bijection entre les trajectoires browniennes vérifiant $\{\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x, W_t < x\}$ et celles vérifiants $\{W_t > 2x-x\}$ et donc le principe de réflexion est une formalisation de cette bijection) à la v.a $\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x) &= \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x, W_t < x) + \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x, W_t > x)\\ &= 2\mathbb{P}(W_t > x)\end{aligned}$$

$\{W_t \geq x\} \subset \{\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x\}$ alors $\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x, W_t \geq x) = \mathbb{P}(W_t > x)$.
ainsi que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}|W_t| > x) &< \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x) + \mathbb{P}(\inf_{0\leq t\leq T}W_t < -x)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x) + \mathbb{P}(-\inf_{0\leq t\leq T}W_t > x)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}W_t > x) + \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}(-W_t) > x)\end{aligned}$$

par la symétrie de W_t on a alors :

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}|W_t| > x) < 4\mathbb{P}(W_t > x)$$

de plus on a (voir [4] p.28)

$$\mathbb{P}(W_t > x) < \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{x\sqrt{2\pi T}})e^{-\frac{x^2}{2T}}.$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\le t\le T}|W_t|\right\} &= 1+\lambda\int_0^\infty e^{\lambda x}(1-F(x))dx \le 1+4\lambda\int_0^\infty e^{\lambda x}\mathbb{P}(W_t>x)dx \\
&\le 1+2\lambda\int_0^\infty e^{\lambda x-\frac{x^2}{2T}}dx \\
&= 1+2\lambda e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2T}(x-\lambda T)^2}dx \\
&\le 1+2\lambda e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2T}y^2}dy \\
&= 1+\lambda\sqrt{8\pi T}e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}
\end{aligned}$$

car $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2T}y^2}dy = \sqrt{2\pi T}$

1.6 Intégrale stochastique

1.6.1 Motivation

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations différentielles de la forme

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \tag{1.1}$$

de sorte que si $\mu_t = 1$ et $\sigma_t = 0$, on retrouve une équation différentielle ordinaire (EDO) ($X_t = Ce^{\int_0^t \mu_s ds}$) où C est une constante non nulle. Si nous voulons ajouter à cette dernière équation une perturbation stochastique, nous avons un problème de non différentiabilité du MB. On commence donc par définir l'intégrale stochastique (intégration par rapport à un MB), puis nous introduisons et rappelons le concept d'équation différentielle stochastique .

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des processus élémentaires.

Définition 1.8 On appelle intégrale stochastique d'un processus élémentaire $\theta \in \mathscr{E}$, le processus $\mathscr{I}_t(\theta)_{0\le t\le T}$.

$$\mathscr{I}_t(\theta) := \sum_{i=0}^{k-1}\theta_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}) + \theta_k(W_t - W_{t_k}), \quad t \in]t_k, t_{k+1}]$$

Une écriture équivalente serait :

$$\mathscr{I}_t(\theta) = \sum_{i=0}^{n}\theta_i(W_{t\wedge t_{i+1}} - W_{t\wedge t_i})$$

Lemme 1.2 Soit W_t un MB et f un processus stochastique, pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $\delta > 0$, $\lambda > 0$, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^T f_s(w)dW_s \mid > \delta\right) \leq \frac{\lambda}{\delta^2} + \mathbb{P}\left(\|f\|^2 > \lambda\right)$$

On note $M = \{f_t(w), 0 \leq t \leq T\}$ la classe des processus aléatoires progressivement mesurables définie pour $t \in [0,T]$.

Lemme 1.3 Soit $f \in M$, pour tout $n \geq 1$, si $\int_0^T \mathbb{E} \mid f_t(w) \mid^{2n} dt < \infty$, alors nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)^{2n} \leq (n(2n-1))^n \cdot T^{n-1} \int_0^T \mathbb{E}_\theta(f^{2n}(t))dt.$$

D'autre part, pour tout processus aléatoire f progressivement mesurable sur $[0,T]$ nous avons l'estimation

$$\mathbb{E}\exp\left\{\int_0^T f_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T f_t^2 dt\right\} \leq 1.$$

1.6.2 Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, tout processus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \qquad P.p.s$$

où

1. X_0 est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

2. $(\mu_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ sont $\mathscr{F}_t$-mesurables.

3. $\int_0^t |\mu_s| ds < \infty$ P.p.s et$\int_0^t |\sigma_s|^2 ds < \infty P.p.s.$

1.6.3 Formule d'Itô

Notre question centrale est : si X satisfait l'EDS (1.1) et $Y_t = f(t, X_t)$ où f est une fonction déterministe $f : [0, +\infty[\times\mathbb{R}$, quelle est la formule infinitésimale du processus $Y = \{Y_t\}$?

Théorème 1.1

$$\text{Soit} \qquad dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad \text{et} \quad Y_t = f(t, X_t)$$

avec f deux fois continuellement différentiable sur $[0, \infty[\times C^2(\mathbb{R})$. Alors le processus $\{Y_t\}$ est aussi d'Itô et admet une intégrale stochastique par rapport au même processus de Wiener.

$$dY_t = \left[f_t(t, X_t) + f'_X(t, X_t)\mu(t, X_t) + \frac{1}{2}f''_{XX}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t)\right] dt + f'_X(t, X_t)\sigma(t, X_t)dW_t$$

Exemples :
a/ Soit $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ et $Y_t = X_t^2$ par le théorème (1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} dY_t &= [2\mu(t, X_t)X_t + \sigma^2(t, X_t)]dt + 2\sigma(t, X_t)X_t dB_t \\ &= \sigma^2(t, X_t)dt + 2X_t dX_t \end{aligned}$$

b/ Soit $Y_t = W_t^2$. En appliquant la partie (a) avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, nous avons

$$dY_t = dt + 2W_t dW_t \quad \text{ou encore} \quad \int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

1.7 Equations différentielles stochastiques

Dans cette partie nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'équations différentielles stochastiques (EDS). On appelle EDS toute équation de type

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

ou encore

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \qquad (*)$$

où dW_t est la différentielle d'un MB standard et μ, σ deux fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et X_0 est une valeur initiale, μ de coefficient de dérive et σ de coefficient de diffusion .

Quand les coefficients ne dépendent pas du temps, on dit que l'équation est homogène . De plus, le processus qui résout EDS (1.2) est appelé **processus de diffusion**.

1.7.1 Existence et unicité de solution d'EDS

Définition 1.14 Un processus X est solution de l'EDS (1.2) si c'est un processus $\{\mathscr{F}_t\}$-adapté satisfaisant :

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s)ds < \infty, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

et vérifiant l'équation $(*)$

Théorème 1.2 Sous les conditions

(1) condition de Lipschitz : il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|,$$

(2) condition de croissance : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$|\mu(t, x))|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq C(1 + |x|^2),$$

(3) X_0 est $\mathscr{F}_0$-mesurable et $\mathbb{E}(X_0^2) < \infty$,

l'EDS $(*)$ admet une solution forte unique à trajectoires presque sûrement continues.

Chapitre 2

Estimation d'un retard dans une petite diffusion non linéaire

Nous considérons le problème de l'estimation d'un retard à partir de l'observation trajectorielle complète d'un processus de type diffusion, avec un petit coefficient de diffusion. Nous étudions sous certaines conditions de régularité le comportement asymptotique de cet estimateur lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0.

Dans ce qui suit nous adoptons quelques notations.
Notations

— Θ l'ensemble des valeurs prises par le paramètre de retard inconnu est un intervalle borné de $\mathbb{R}$
— $W_{e,2}$ est l'ensemble des fonctions de perte à majorant exponentiel.
— S' est la dérivée par rapport à x de la fonction S.

2.1 Introduction

Nous nous proposons d'estimer le paramètre du retard $\theta \in \Theta$, par l'observation trajectorielle complète $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ solution de l'EDS.

$$\begin{cases} dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_s = x_0 \quad s \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Notons par $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ la solution de l'EDO associée à (2.1)

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta}) & 0 \leq t \leq T \\ x_0 \end{cases}$$

où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu et S :$\Theta \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction connue continue.

2.2 Hypothèse de régularité

Nous étudions l'existence et le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) sous l'hypothèse

condition de régularité : $S(.)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable et non nulle sur un compact $[\alpha, \beta] \subset [\min_{t\in[0,T]} x_t, \max_{t\in[0,T]} x_t]$.

Comme S admet une dérivée bornée sur un compact de la forme $[\min_{t\in[0,T]} x_t, \max_{t\in[0,T]} x_t]$ alors elle est lipschitzienne. Le problème donc admet une solution unique forte .

2.3 Processus de rapport de vraisemblance

Notons par $L(\theta, X^T)$ le processus de rapport de vraisemblance (RV)

$$L(\theta, X^T) := \frac{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}}$$

où $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ est la loi de probabilité de l'observation $(X_t, t \in [0, T])$ et $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}$ la loi de W_t s'appelle aussi la mesure de Wiener sur [0,T].
D'aprés le théorème de Girsanov pour tout θ, les lois $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ et $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}$ sont équivalentes ($\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)} \sim \mathbb{P}^{(\varepsilon)}$, ssi elles sont absolument continues l'une par rapport à l'autre), et le processus rapport de vraisemblance pour ce modèle est défini par

$$L(\theta, X^T) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S(X_{t-\theta})dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S^2(X_{t-\theta})dt\right\}$$

En effet, considérons la variable aléatoire

$$Z_T = \exp\left\{\frac{-1}{\varepsilon}\int_0^T S(X_{t-\theta})dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S^2(X_{t-\theta})dt\right\}$$

est strictement positive et $\mathbb{E}(Z_T) = 1$ de sorte que $\mathbb{P}^{(\varepsilon)} = Z_T \mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$.

Or $dW_t = \frac{1}{\varepsilon}(dX_t - S(X_{t-\theta})dt)$, donc :

$$Z_T = \exp\left\{\frac{-1}{\varepsilon^2}\int_0^T S(X_{t-\theta})dX_t + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S^2(X_{t-\theta})dt\right\}$$

Ceci démontre que

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}} = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S(X_{t-\theta})dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S^2(X_{t-\theta})dt\right\}$$

2.4 Estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)

Le EMV, $\hat{\theta}_\varepsilon$ est défini comme la solution de l'équation

$$L(\hat{\theta}_\varepsilon, X^T) = \sup_{\theta\in\overline{\Theta}} L(\theta, X^T)$$

où $L(\theta_\varepsilon, X^T)$ le RV défini plus haut

Dans notre problème $L(\theta, X^T)$ est continu en θ, donc la solution existe toujours. Mais en général, on ne peut pas calculer effectivement cette solution, il faut donc employer des méthodes numériques.

Nous donnons la condition LAN de Hajek voir [4]

2.5 Normalité asymptotique locale

Définition 2.1 (Condition LAN) Une famille de lois $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ est dite LAN au point $\theta \in \Theta$ quand $\varepsilon \to 0$, s'il existe une fonction non identiquement nulle, positive notée $\varphi_\varepsilon(\theta)$ définie pour $\theta \in \Theta$, telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$, le rapport de vraisemblance normalisée pour deux valeurs du paramètre $\theta_1 = \theta$ et $\theta_2 = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u$, $Z_\varepsilon(u) = L(\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u, \theta, X)$

admet la représentation

$$Z_\varepsilon(u) = \frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}} = \exp\left\{u\Delta_{\varepsilon,t} - \frac{1}{2}u^2 + \psi_\varepsilon(u,\theta)\right\}.$$

où

$$\Delta_{\varepsilon,t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(u,\theta) = 0.$$

Si une famille de lois $\{\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ satisfait la condition LAN en tout point θ avec une fonction de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta)$, alors pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$, toute fonction de perte $\ell \in W_{e,2}$ et $\delta > 0$, nous avons l'inégalité de **Hajek-Le Cam** .

$$\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta}\mathbb{E}_\theta\ell(\varphi_\varepsilon(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta)) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\ell(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Les estimateurs qui réalisent cette égalité sont dits estimateurs asymptotiquement efficace. Ainsi l'inégalité est valable pour tout estimateurs $\hat{\theta}_\varepsilon$ et toute $\delta > 0$.

Nous introduisons la quantité suivante comme Information de Fisher :

$$I(\theta) = \int_0^T S^2(x_{t-2\theta})S'^2(x_{t-\theta})dt$$

Le théorème suivant donne la condition LAN uniforme de la famille de lois $\{\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ et la convergence des lois de dimensions finies.

Théorème 2.1 :

Sous la condition de régularité la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN (ULAN) de constante de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-1/2}(\theta)$ et sous $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ la variable aléatoire

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon(\theta, X) &= \varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon(\theta)\cdot\int_0^T S(x_{t-2\theta})\cdot S'(x_{t-\theta})dW_t \\ &= \varepsilon^{-1}I^{-1/2}(\theta)\cdot\int_0^T S(x_{t-2\theta})\cdot S'(x_{t-\theta})[dX_t - S(X_{t-\theta})dt]\end{aligned}$$

admet la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Nous avons besion d'établir les deux lemmes suivantes, pour démontrer ce théorème .

Lemme 2.1 :(lemme de Grönwall)
Soient u, v deux fonctions continues positives telles que, pour tout $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq K + \int_0^t v(s)u(s)ds$$

où K est une constante, alors

$$u(t) \leq K \exp \int_0^t v(s)ds$$

Lemme 2.2 : Sous l'hypothèse de régularité, nous avons $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ p.s les majorations suivantes :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s|$$

$$\mathbb{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2 \qquad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration : on a

$$X_t = \int_0^t S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon W_t \ , \quad x_t = \int_0^t S(x_{s-\theta})ds$$

$$\begin{aligned}
|X_t - x_t| &= |\int_0^t S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})ds + \varepsilon W_t| \\
&\leq \int_0^t |S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})|ds + \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \\
&= \int_{-\theta}^{t-\theta} |S(X_s) - S(x_s)|ds + \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \\
&\leq K \int_{-\theta}^{t-\theta} |X_s - x_s|ds + \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \\
&\leq K \int_0^{t-\theta} |X_s - x_s|ds + \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \\
&\leq K \int_0^T |X_s - x_s|ds + \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \\
&\leq \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \exp \int_0^T K ds = \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \exp\{KT\}
\end{aligned}$$

avec $K_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \exp\{KT\}$

Pour la seconde inégalité, en utilisant la forme intégrale de l'EDS et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta|X_t - x_t|^2 &= \mathbb{E}_\theta|\int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta}))ds + \varepsilon W_t|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}_\theta\left|\int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta}|ds)^2\right| + 2\varepsilon^2\mathbb{E}_\theta|W_t|^2 \\
&\leq 2K^2t \cdot \int_0^t \mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|^2 ds + 2\varepsilon^2 t \\
&= 2k^2t \cdot \int_{-\theta}^{t-\theta} \mathbb{E}_\theta|X_s - x_s|^2 ds + 2\varepsilon^2 T \\
&\leq 2K^2T \cdot \int_0^T \mathbb{E}_\theta|X_s - x_s|^2 ds + 2\varepsilon^2 T \\
&\leq 2\varepsilon^2 T \exp\left\{2TK^2 \int_0^T ds\right\}
\end{aligned}$$

avec $K_2 = 2T\exp\{2K^2T^2\}$

Montrons le théorème

Pour tout $\theta \in \mathscr{K} \subset \Theta$,$\theta + \varepsilon u \in \Theta$ et (u_ε) une suite réelle telle que $u_\varepsilon \to u$.
notons $\theta_{\varepsilon,u} = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon$
Le rapport de vraisemblance normalisé est

$$\ln Z_\varepsilon(u) = \ln \frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_{(\varepsilon)}(\theta)u_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_\theta} = \int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{1}{2}\|\Delta S(u)\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_{(\varepsilon)}(\theta)u_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_\theta} = \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T [S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T [S^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S^2(X_{t-\theta})]dt\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T [S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})](S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t) - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T [S^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S^2(X_{t-\theta})]dt\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T [S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]dW_t + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}})S(X_{t-\theta})dt - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S^2(X_{t-\theta})dt \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T [S^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S^2(X_{t-\theta})]dt\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T [S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]dW_t \right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T [S^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S^2(X_{t-\theta}) + 2S^2(X_{t-\theta}) - 2S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}})S(X_{t-\theta})]dt\right]\right\}\\
&= \exp\left\{\int_0^T \varepsilon^{-1}[S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}[S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]^2 dt\right\}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\Delta S_t = \varepsilon^{-1}[S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]$$

De plus, on a

$$\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-1/2}(\theta) = \varepsilon\left(\int_0^T S^2(x_{t-2\theta})S'^2(x_{t-\theta})dt\right)^{-1/2}$$

Pour le terme $\|\Delta S(u)\|^2$ nous montrons la convergence en probabilité ie :

$$\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}\|S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(x_{t-\theta})S(x_{t-2\theta})\varphi_\varepsilon(\theta)u)\|^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\|\Delta S(u)\|^2 &= \int_0^T \varepsilon^{-2}[S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta})]^2 dt\\
&= \int_0^T \varepsilon^{-2}S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt\\
&\quad + \int_0^T \varepsilon^{-2}\left\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}))\right\}^2 dt\\
&+ 2\int_0^T \varepsilon^{-2}S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) \times \left\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})\right\} dt
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Par le théorème des accroissements finis, nous avons :

$$S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta}) = S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})$$

•Pour le second terme, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\left[\int_0^T \left\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}))\right\}^2 dt\right] \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\left[\int_0^T \varepsilon^{-2}\left\{S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}))\right\}^2 dt\right] \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T (S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S'(X_{t-\theta}))^2 (X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T (S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S'(X_{t-\theta}))^2 C\varepsilon^2 dt \\
&\leq CT \sup_{\theta\in\mathscr{K}} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\theta \left|S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S'(X_{t-\theta})\right|
\end{aligned}$$

Le second membre de le majoration précédente tend vers 0, il est donc de même pour le premier membre.

• D'autre part, le dernier terme de (2.2) converge aussi vers 0 car :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) \times \left\{S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})\right\} dt \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T S'(X_{t-\theta})(S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S'(X_{t-\theta}))(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt \\
&\leq \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T |S'(X_{t-\theta})| \cdot |(S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S'(X_{t-\theta}))|(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt \\
&\leq KC\,\mathbb{E}_\theta \int_0^T |(S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S'(X_{t-\theta}))| dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}
\end{aligned}$$

• Pour le premier terme de (2.2),

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\left(\int_0^T S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt - \int_0^T \left(u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})\right)^2 dt\right) \\
&\qquad + \varepsilon^{-2}\left(\int_0^T \left(u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})\right)^2 dt\right)
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \left[S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 - (u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta}))^2\right] dt\right) \\
&\leq \left(\int_0^T \left[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})\right]^2 dt\right)^{1/2} \\
&\times \left(\int_0^T \left[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) + u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})\right]^2 dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Le second terme est borné car S et S' sont bornées ainsi que φ. Pour le premier terme, on utilise la forme intégrale de l'EDS et nous avons

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \left[\int_0^T \left[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})\right]^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq K\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \left[\int_0^T [\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,u}} (S(X_{s-\theta}) - S(x_{t-2\theta}))ds]^2 dt\right]^{1/2} + \varepsilon o(u_\varepsilon) \\
&\leq K^2\varepsilon^{-2} \left[\int_0^T [\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,u}} \mathbb{E}_\theta |X_{s-\theta} - x_{t-2\theta}|^2 ds dt\right]^{1/2} + \varepsilon o(u_\varepsilon)
\end{aligned}$$

Pour l'éspérance

$$\mathbb{E}_\theta |X_{s-\theta} - x_{t-2\theta}|^2 = \mathbb{E}_\theta |X_{s-\theta} - x_{s-\theta} + x_{s-\theta} - x_{t-2\theta}|^2$$

$$\begin{aligned}
\sup_{-\theta \leq s \leq t-\theta_{\varepsilon,u}} \mathbb{E}_\theta |X_{s-\theta} - x_{t-2\theta}|^2 &\leq \sup_{-\theta \leq s \leq t-\theta_{\varepsilon,u}} 2\mathbb{E}_\theta |X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|^2 + \sup_{-\theta \leq s \leq t-\theta_{\varepsilon,u}} 2\mathbb{E}_\theta |x_{s-\theta} - x_{t-2\theta}|^2 \\
&\leq K_2\varepsilon^2 + 2C\varepsilon^2 = C\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\theta \in \mathscr{K}} \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \left[\int_0^T \left[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta) S(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})\right]^2 dt\right]^{1/2} = 0$$

Nous déduisons que pour toute suite (u_ε) qui converge vers u

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\theta \in \mathscr{K}} \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \|S(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(x_{t-\theta}) S(x_{t-2\theta}) \varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon\| = 0$$

Finalement

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T (\Delta S_t(u))^2 dt = u^2, \qquad \text{uniformément en } \theta$$

De plus, pour l'intégrale stochastique :

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^T (\Delta S_t(u))dW_t$$

D'aprés le lemme (1.2), nous avons également

$$\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}\left(\left|\int_0^T [\Delta S_t(u) - uI^{-1/2}(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})]dW_t\right| > \delta\right)$$
$$\leq \frac{\lambda}{\delta^2} + \mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}\left(\|\Delta S_t(I(u)^{-1/2}u_\varepsilon) - uI^{-1/2}(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\|^2 > \lambda\right)$$

D'aprés les calculs précédents, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to} \mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}\left(\|\Delta S_t(I(u)^{-1/2}u_\varepsilon) - uI^{-1/2}(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\|^2 > \lambda\right) = 0$$

nous choisissons λ et δ assez petits de sorte que $\lambda\delta^{-2}$ tend vers zero donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}\left(\left|\int_0^T [\Delta S_t(u) - uI^{-1/2}(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})]dW_t\right| > \delta\right) = 0$$

alors

$$\int_0^T \Delta S_t(u)dW_t$$

tend vers

$$uI^{-1/2}(\theta)\int_0^T S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})dW_t$$

Soit $\mathscr{I} = \int_0^T S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})dW_t$ un integrale de Wiener, donc $\mathscr{I} \Longrightarrow I^{1/2}(\theta)\xi$ où $\xi \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$

on peut conclure que $\Delta_\varepsilon \Longrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ uniformément en θ.

2.6 Propiétés de l'EMV

Le Théorème suivant donne la convergence de l'estimateur, la normalité asymptotique, la convergence des moments et l'efficacité asymptotique de l'estimateur.

Théorème 2.2 Si l'hypothèse de régularité est satisfaite, alors uniformément sur tout compact $\mathscr{K}$ de Θ, l'estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ vérifie :

1. $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta$

2. $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \Longrightarrow N(0,1)$

3. $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}_\theta \left|\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)\right|^p = \mathbb{E}_\theta |\Delta|^p$ pour tout $p > 0$,où $\Delta \hookrightarrow N(0,1)$

4. l'estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ est localement asymptotiquement efficace, au sens Hajek ie :pour tout fct de perte $\ell \in W_{e,2}$

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbb{E}_\theta \ell(\varphi_\varepsilon(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \ell(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ce théorème représente en réalité le principal outil mathématique utilisé dans la démarche de l'article [4] pour établir les résultats de convergence de l'EMV. Cet outil est le fruit des thèses d'Etat de [1] et il est démontré et explicité en détail dans [1] théorème 1.1 p 174.

lemme 2.3
Soit Θ un ouvert convexe de $\mathbb{R}$, pour tout compact $\mathscr{K} \subset \Theta$ et pour tout $R > 0$ nous obtenons la majoration suivante

$$\sup_{\Theta \in \mathscr{K}} \sup_{|u_1|<R, |u_2|<R} |u_2 - u_1|^{-2} \mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C(1 + R^6)$$

où C est une constante qui dépend de $\mathscr{K}$

preuve
posons $\theta_i = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta) u_i, \quad i = 1, 2$ $\Delta S_t = \varepsilon^{-1}[S(X_{t-\theta_1}) - S(X_{t-\theta_2})]$

On considère le processus :

$$Y_t = \exp\left\{\frac{1}{4}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{8}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds\right\} = \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X)\right)^{1/4}$$

Posons alors

$$V_t = \ln Y_t = \frac{1}{4}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{8}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds$$

En appliquant la formule d'Itô à $f(V_t) = \exp V_t$ nous avons

$$Y_T = 1 - \frac{3}{32}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt + \frac{1}{4}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dW_t$$

Ainsi $Y_0 = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &= \int_\Omega |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 d\mathbb{P}_\theta \\
&= \int_\Omega \left| \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_2}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}\right)^{1/4} - \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_1}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}\right)^{1/4} \right|^4 d\mathbb{P}_\theta \\
&= \int_\Omega \left| \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}} \cdot \frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}\right)^{1/4} - \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}\right)^{1/4} \right|^4 d\mathbb{P}_\theta \\
&= \int_\Omega \frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_\theta} \left| \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}\right)^{1/4} - 1 \right|^4 d\mathbb{P}_\theta
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_{\theta_1}|L^{1/4}(\theta_2,\theta_1,X)-1|^4 = \mathbb{E}_{\theta_2}|1-L^{1/4}(\theta_2,\theta_1,X)|^4 = \mathbb{E}_{\theta_2}|1-Y_T|^4$$

En utilisant l'expression de Y_T et l'inégalité $(a+b)^4 \leq 2^3(a^4+b^4)$

$$\mathbb{E}_{\theta_2}|1-L^{1/4}(\theta_2,\theta_1,X)|^4 = \mathbb{E}_{\theta_2}|1-Y_T|^4$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_2}|1-Y_T|^4 &= \mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T(\Delta S_t)^2Y_tdt-\frac{1}{4}\int_0^T(\Delta S_t)^2Y_tdW_t\right|^4\\ &\leq 2^3\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T(\Delta S_t)^2Y_tdt\right|^4+2^3\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{1}{4}\int_0^T(\Delta S_t)^2Y_tdW_t\right|^4\end{aligned}$$

Pour le premier intégrale en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T(\Delta S_t)^2Y_tdt\right|^4 \leq \left(\frac{3}{32}\right)^4T^3\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_2}[(\Delta S_t)^8Y_t^4]dt$$

et pour le deuxième intégrale, par le lemme (1.3) nous avons :

$$\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{1}{4}\int_0^T(\Delta S_t)^2Y_tdW_t\right|^4 \leq 8\frac{1}{4^4}(2(4-1))^2T\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_2}[(\Delta S_t)^4Y_t^4]dt$$

Finalement

$$\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_2}[(\Delta S_t)^8Y_t^4]dt+C_2\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_2}[(\Delta S_t)^4Y_t^4]dt$$

Ensuite par un changement des mesures, nous avons :

$$\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_1}[(\Delta S_t)^8]dt+C_2\int_0^T\mathbb{E}_{\theta_1}[(\Delta S_t)^4]dt$$

Faisons une majoration de $\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8$

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8 \leq \frac{1}{\varepsilon^8}\mathbb{E}_{\theta_1}(S(X_{t-\theta_1}) - S(X_{t-\theta_2}))^8$$

Par le théorème des accroissements finis, nous avons :

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8 \leq \frac{1}{\varepsilon^8}K^8\mathbb{E}_{\theta_1}(X_{t-\theta_1} - X_{t-\theta_2})^8$$

par la formule intégrale de l'EDS

$$X_{t-\theta_1} - X_{t-\theta_2} = \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon(W_{t-\theta_1} - W_{t-\theta_2})$$

donc

$$\mathbb{E}_{\theta_1}\left|X_{t-\theta_1} - X_{t-\theta_2}\right|^8 = \mathbb{E}_{\theta_1}\left|\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon(W_{t-\theta_1} - W_{t-\theta_2})\right|^8$$

Par l'inégalité de Hölder et l'inégalité $(a+b)^{2n} \leq 2^{2n-1}(a^{2n} + b^{2n})$, nous avons

$$\frac{1}{\varepsilon^8}\mathbb{E}_{\theta_1}\left|X_{t-\theta_1} - X_{t-\theta_2}\right|^8 \leq C\frac{K^8}{\varepsilon^8}\left\{|\theta_2 - \theta_1|^7\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1}\mathbb{E}_{\theta_1}S^8(X_{s-\theta})ds + \varepsilon^8K^8|\theta_2 - \theta_1|^4\right\}$$

Montrons que $\mathbb{E}_{\theta_1}S^8(X_{s-\theta})$ reste bornée, par le lemme (2.2), nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_1}\left[S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta}) + S(x_{s-\theta})\right]^8 &\leq 2^7\mathbb{E}_{\theta_1}\left[S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})\right]^8 + 2^7S^8(x_{s-\theta})\\ &\leq 2^7K_2K^8\varepsilon^8 + \sup_{0\leq s\leq t}S^8(x_{s-\theta})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_1}S^8(X_{s-\theta}) &\leq \frac{K^8}{\varepsilon^8}C|\theta_2 - \theta_1|^7\left(|\theta_2 - \theta_1|(2^7K_2K^8\varepsilon^8 + \sup_{0\leq s\leq t}S^8(x_{s-\theta}))\right) + CK^8|\theta_2 - \theta_1|^4\\ &\leq C2^7K_2k^{16}|\theta_2 - \theta_1|^8 + \frac{K^8}{\varepsilon^8}C|\theta_2 - \theta_1|^8\sup_{0\leq s\leq t}S^8(x_{s-\theta}) + CK^8|\theta_2 - \theta_1|^4.....(\star)\end{aligned}$$

Or $|\theta_2 - \theta_1| = \varphi_\varepsilon(\theta)|u_2 - u_1| \qquad et \qquad \varphi_{\varepsilon(\theta)} = \varepsilon I^{-1/2}\theta)$

$$\begin{aligned}(\star) &\leq C\left(K_2K^{16} + \frac{K^8}{\varepsilon^8}\sup_{0\leq s\leq t}S^8(x_{s-\theta})\right)\varphi_\varepsilon^8(\theta)|u_2 - u_1|^8 + CK^8\varphi_\varepsilon^4(\theta)|u_2 - u_1|^4\\ &\leq C_1|u_2 - u_1|^8\varepsilon^8 + C_2|u_2 - u_1|^4\varepsilon^4\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t^4) \leq C_3|u_2-u_1|^4\varepsilon^4 + C_4|u_2-u_1|^2\varepsilon^2$$

Finalement, nous obtenons

$$\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1|u_2-u_1|^8 + C_2|u_2-u_1|^4 + C_3|u_2-u_1|^4 + C_4|u_2-u_1|^2$$

$$\begin{aligned}\sup_{|u_i|<R} |u_2-u_1|^{-2}\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &\leq C_1|u_2-u_1|^6 + C_2|u_2-u_1|^2 + C_3|u_2-u_1|^4 + C_4 \\ &\leq C_1(2R)^6 + (C_1+C_2)(2R)^2 + C_4 \\ &\leq C(1+R^6)\end{aligned}$$

Lemme 2.4 : Si l'hypothèse de régularité est satisfaite, alors pour tout $p \in (0,1)$ et pour tout compact $\mathscr{K} \subset \Theta$, il existe une fonction $g \in \mathscr{G}$, telle que

$$\sup_{\theta\in\mathscr{K}} \mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \exp\{-g(u)\}$$

où $\mathscr{G} = \big\{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \lim_{y\to 0} y^N \exp\{-g(u)\}, \textit{pour tout } N > 0\big\}$.

Preuve :
d'aprés l'inégalité élémentaire : $a^2 \geq b^2 - 2|b(a-b)|$, nous pouvons d'écrire l'inégalité

$$\begin{aligned}&[S(X_{t-\theta-u}) - S(X_{t-\theta})]^2 \\ &\geq [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 - 2|S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})(S(X_{t-\theta-u}) - S(X_{t-\theta}) + S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})) \\ &\geq [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 - 2|S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})|(|S(X_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta-u})| + |S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})|)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Par un développement de Taylor d'ordre 1 de $S(x)$ au voisinage de $t-\theta$ pour $|u| \to 0$, nous avons pour le premier terme du majorant

$$\int_0^T [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt = \int_0^T (S'(x_{t-\theta})\dot{x}_{t-\theta}u)^2 dt + o(u^2).$$

Or

$$\dot{x}_t := \frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta}) \qquad \dot{x}_{t-\theta} = S(x_{t-2\theta})$$

et

$$I(\theta) = \int_0^T S^2(x_{t-2\theta})S'^2(x_{t-\theta})dt.$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^T [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt &= u^2 I(\theta) + o(u^2) \\ &\geq u^2(\inf_{\theta\in\mathscr{K},|\lambda|=1} I(\theta)\lambda^2 + o(1)) = C_{\mathscr{K}}u^2\end{aligned}$$

où $C_{\mathscr{K}} > 0$. D'autre part, grâce à l'hypothèse de régularité

$$\begin{aligned}\int_0^T [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt &\leq K^2 \int_0^T |x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta}|^2 dt \\ &\leq K^2 T \sup_{0\leq t\leq T} |x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta}|^2 \\ &= \gamma^2 T u^2 \sup_{0\leq t\leq T} \dot{x}_{t-\theta}^2 = A^2u^2\end{aligned}$$

nous obtenons donc la double inégalité :

$$C_{\mathscr{K}}u^2 \leq \int_0^T [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt \leq A^2u^2 \tag{2.4}$$

Pour le dernier terme de (2.3), nous appliquons l'inégalité de Cauchy schwartz

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})||S(X_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta-u})|dt\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})|^2 dt\right)\left(\int_0^T |S(X_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta-u})|^2 dt\right) \\ &\leq A^2u^2K^2T \sup_{t\in[0,T]} |X_{t-\theta-u} - x_{t-\theta-u}|^2 \\ &\leq A^2u^2K^2T \sup_{t\in[0,T]} |X_t - x_t|^2 \\ &\leq A^2u^2K^2K_1^2T\varepsilon^2 \left(\sup_{t\in[0,T]} |W_t|\right)^2\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})||S(X_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta-u})|dt \leq A|u|KK_1\sqrt{T}\varepsilon\left(\sup_{t\in[0,T]}|W_t|\right) \tag{2.5}$$

et de la même façon, nous avons la majoration

$$\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})||S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})|dt \leq A|u|KK_1\sqrt{T}\varepsilon\left(\sup_{t\in[0,T]}|W_t|\right) \tag{2.6}$$

Enfin, on note $\Delta S_t(u) = \varepsilon^{-1}\left[S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta})\right]$ et par l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}(\beta\xi) \leq (\mathbb{E}|\beta|^{p_1})^{1/p_1}(\mathbb{E}|\xi|^{p_2})^{1/p_2}, \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \quad p_1 > 1$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) &= \mathbb{E}_\theta \exp\left\{p\int_0^T \Delta S_t(u)dW_t - \frac{1}{2}p\int_0^T \Delta S_t(u)^2dt\right\} \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(-\frac{(p-q)}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))^2dt\right)\right. \\
&\qquad \times \exp\left(p\int_0^T \varepsilon^{-1}(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))dW_t\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. -\frac{q}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))^2dt\right)\right] \\
&\leq \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left(-\frac{(p-q)}{2}p_1\int_0^T \varepsilon^{-2}\cdot(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))^2dt\right)\right]^{1/p_1} \\
&\times \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left(pp_2\int_0^T \varepsilon^{-1}(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))dW_t\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. -\frac{qp_2}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))^2dt\right)\right]^{1/p_2}
\end{aligned}$$

Si, l'on choisit q et p_2 tels que :

$$p_2 = \frac{q}{p^2} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{q-p^2}{q}$$

par le lemme (1.3), nous avons

$$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left(-\frac{(p-q)}{2}\frac{q}{q-p^2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\cdot(S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))^2dt\right)\right]^{q-p^2/q}$$

posons

$$\lambda = \frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}$$

puis par (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \exp\left(-\lambda \int_0^T \varepsilon^{-2} \cdot (S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta}))^2 dt\right) \\
&\leq \mathbb{E}_\theta \exp\left(-\lambda\varepsilon^{-2} \int_0^T (S(x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(x_{t-\theta}))^2 dt\right) \\
&\qquad \times \mathbb{E}_\theta \exp\left(4\lambda\varepsilon^{-2}\sqrt{T}AK^2K_1\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)|u| \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right) \\
&\leq \exp\left\{-\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\} \times \mathbb{E}_\theta \exp\left(4\lambda\sqrt{T}AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u| \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right)
\end{aligned}$$

Par le lemme (1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \exp\left(4\lambda\sqrt{T}AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u| \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right) \\
&\qquad \leq 1 + 4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\exp(8\lambda^2A^2k^4K_1^2T^2I^{-1}(\theta)|u|^2)
\end{aligned}$$

choisissant :

$$\lambda = \frac{C_{\mathscr{K}}}{16T^2K^4K_1^2A^2}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \\
&\leq \left[\exp\left\{-\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\}\left(1 + 4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\exp(\frac{1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2)\right)\right]^{q-p^2/q} \\
&= \left[\exp\left\{-\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\} + 4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\}\right]^{q-p^2/q} \\
&\leq \left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\} + 4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\}\right]^{q-p^2/q} \\
&= \left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\}\left(1 + 4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\right)\right]^{q-p^2/q} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}\frac{q-p^2}{q}C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\}\left(1 + 4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\right)^{q-p^2/q} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{1}{4}(p-q)C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)|u|^2\right\}\exp\left\{4\lambda AK^2K_1 I^{-1/2}(\theta)|u|T\sqrt{8\pi}\frac{q-p^2}{q}\right\}
\end{aligned}$$

Où nous appliquons l'inégalité : $1 + x \leq \exp x$.

Le théorème suivant donne le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Théorème 2.3 Soit l'ensemble des paramètre $\Theta \subset \mathbb{R}$, les fonctions $Z_\varepsilon(u)$ soient continues avec une probabilité 1 possèdent les propriétés suivantes :

1. Pour tout compact $\mathscr{K} \subset \Theta$

   — Il existe $\alpha > 1$ et $m > \alpha$ tels que pour tout $\theta \in \mathscr{K}$

   $$\sup_{\Theta \in \mathscr{K}} \sup_{|u_1|<R, |u_2|<R} |u_2 - u_1|^{-\alpha} \mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/m}(u_1)|^m \leq C(1 + R^a)$$

   où C et a deux constantes qui dépendentes de K

   — Pour tout $u \in U_\varepsilon$ et $\theta \in \mathscr{K}$

   $$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^{1/2}(u) \leq \exp\{-g(u)\}$$

   où $g(.)$ est une fonction positive.

2. Uniformement en $\theta \in \mathscr{K}$, pour $\varepsilon \to 0$, les distributions à dimension finie des fonctions aléatoires $Z_\varepsilon(u)$ convergent vers les distributions des fonctions aléatoires $Z(u)$.

3. Les fonctions limites $Z(u)$ atteignent le maximum en un point unique $\hat{u}(\theta)$.

alors uniformement en $\theta \in \mathscr{K}$, la distribution de la v.a $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)$ converge vers la distribution de $\hat{u}(\theta)$ et pour toute fonction de perte nous avons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}_\theta \ell \left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \right) = \mathbb{E}\ell(\hat{u}(\theta))$$

preuve : voir [1] théorème(10.1) page 103

Chapitre 3

Etude d'un cas particulier

Dans ce chapitre, on reprend les mêmes calculs que dans le chapitre précédent sauf que ici il y aura quelques simplifications puisque la dérive est un cas particulier.

3.1 Introduction

On considère le processus de type diffusion où $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{cases} dX_t = -\gamma X_{t-\theta} dt + \varepsilon dW_t \quad 0 \leq t \leq T \\ X_s = x_0 \quad s \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Notons par $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ la solution de EDO.

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = -\gamma x_{t-\theta} \quad 0 \leq t \leq T \\ x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution, il suffit de montrer que la dérive vérifie les conditions de lipschitz.
Si $\theta = 0$, on récupère l'EDO simple dont la solution générale, $x_t = x_0 e^{-\gamma t}$

Si $0 \leq t \leq \theta$, $\qquad \frac{dx_t}{dt} = -\gamma x_0$

Et donc

$$x_t = x_0 + \int_0^t \gamma x_0 ds = x_0 - \gamma x_0 t, \qquad 0 \leq t \leq \theta$$

sur $\theta \leq t \leq 2\theta$, nous avons $0 \leq t - \theta \leq \theta$ donc d'aprés(3.2) nous avons

$$\frac{dx_t}{dt} = -\gamma x_{t-\theta} = -\gamma \left[x_0 - \gamma x_0 (t - \theta)\right]$$

Et donc

$$\begin{aligned} x_t &= x_\theta + \int_\theta^t -\gamma \left[x_0 - \gamma x_0 (s - \theta)\right] ds \\ &= x_0 - \gamma x_0 \theta + \left[-\gamma x_0 s + \frac{\gamma x_0}{2}(s - \theta)^2\right]_\theta^t \end{aligned}$$

Plus généralement comme il est expliqué dans le livre [3]

$$x_t = x_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \gamma x_0 \frac{[t-(k-1)\theta]^k}{k!}, \qquad (n-1)\theta \leq t \leq n\theta, \quad n \geq 1$$

Nous proposons d'estimer le paramètre du retard θ par l'observation des trajectoires complètes $X^T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ et d'etudier dans le cadre des petites diffusion ($\varepsilon \to 0$) les propriétes asymptotiques de l'estimateurs de maximum du vraisemblance .
Nous motrons finalement que cet estimateurs est consistent, asymptotiquement normal et efficace.

3.2 Hypothèse de régularité

Comme la dérive est une fonction deux fois continûment dérivable de dérivée non nulle sur l'intervalle $[\alpha, \beta] \subset [\min_{t\in[0,T]} x_t, \max_{t\in[0,T]} x_t]$ et bornée sur $\mathbb{R}$ (ie : la dérive est 2 fois dérivable par rapport à x et que la dérivée deuxième est continue par rapport à x et θ de plus la dérivée est une fonction constante, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$), alors elle vérifie l'hypothèse de régularité indiquée dans le chapitre précédent. De plus, la dérive est une fonction lipschitzienne alors le problème admet une solution unique forte.

Nous rappelons que pour l'observation des trajectoires complètes, le rapport de vraisemblance est défini pour deux valeurs du paramètre θ, $\theta_0 \in \Theta$ par :

$$L(\theta, \theta_0, X) = \exp\left\{ \frac{-\gamma}{\varepsilon^2} \int_0^T (X_{t-\theta} - X_{t-\theta_0}) dX_t - \frac{\gamma^2}{2\varepsilon^2} \int_0^T ((X_{t-\theta})^2 - (X_{t-\theta_0})^2) dt \right\}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\epsilon$ est défini comme solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_0, X) &= \sup_{\theta \in \overline{\Theta}} \frac{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} \\ &= \sup_{\theta \in \overline{\Theta}} \exp\left\{ \frac{-\gamma}{\varepsilon^2} \int_0^T (X_{t-\theta} - X_{t-\theta_0}) dX_t - \frac{\gamma^2}{2\varepsilon^2} \int_0^T ((X_{t-\theta})^2 - (X_{t-\theta_0})^2) dt \right\} \end{aligned}$$

où $\overline{\Theta}$ est l'adhérence de Θ, θ_0 est une valeur fixée dans Θ.

Nous introduisons la quantité suivante comme Information de Fisher dans ce problème.

$$I(\theta) = \gamma^4 \int_0^T x_{t-2\theta}^2 dt$$

3.3 Normalité asymptotique locale

Le théorème suivant accorde la condition LAN uniforme de la famille de lois $\{\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ et la convergence des lois de dimensions finies.

Théorème 3.1 : Comme la dérive vérifie la condition de régularité, alors la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN (ULAN) de constante de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta)$ et sous $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ la variable aléatoire

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon(\theta, X) &= \varepsilon^{-1} \left(\gamma^4 \int_0^T x_{t-2\theta}^2 dt \right)^{-1/2} \cdot \int_0^T -\gamma x_{t-2\theta} \cdot -\gamma [dX_t - (-\gamma X_{t-\theta}) dt] \\ &= \varepsilon^{-1} \left(\int_0^T x_{t-2\theta}^2 dt \right)^{-1/2} \cdot \int_0^T x_{t-2\theta} \cdot [dX_t - (-\gamma X_{t-\theta}) dt] \end{aligned}$$

admet la loi $\mathscr{N}(0,1)$
où

$$\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon \left[\gamma^4 \int_0^T x_{t-2\theta}^2 dt \right]^{-1/2}$$

De plus pour tous les estimateurs $\hat{\theta}_\varepsilon$, on a l'inégalité de Hajek Le Cam

$$\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta}\mathbb{E}_\theta\ell\left(\varepsilon^{-1}(\gamma^4\int_0^T x_{t-2\theta}^2dt)^{1/2}(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta)\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\ell(x)\exp^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Pour démontrer ce théorème, nous suivons les mêmes étapes que le chapitre 2 .

Lemme 3.1 : Seulement dans le cas où la dérive satisfait la condition de régularité, on a $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ p.s les majorations suivantes :

$$\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-x_t|\leq K_1\varepsilon\sup_{0\leq s\leq T}|W_s|$$
$$\mathbb{E}_\theta|X_t-x_t|^2\leq K_2\varepsilon^2\qquad\forall t\in[0,T]$$

Démonstration : nous avons

$$X_t=\int_0^t-\gamma X_{s-\theta}ds+\varepsilon W_t\qquad\qquad x_t=\int_0^t-\gamma x_{s-\theta}ds$$

$$\begin{aligned}|X_t-x_t|&=|\int_0^t-\gamma(X_{s-\theta}-x_{s-\theta})ds+\varepsilon W_t|\\&\leq\gamma\int_0^t|X_{s-\theta}-x_{s-\theta}|ds+\varepsilon\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|\\&=\gamma\int_{-\theta}^{t-\theta}|X_s-x_s|ds+\varepsilon\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|\\&\overset{\text{par le lemme 2.1}}{\leq}\varepsilon\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|\exp\{\int_0^{t-\theta}\gamma ds\}\\&\leq\varepsilon\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|\exp\{\int_0^t\gamma ds\}\\&\leq\varepsilon\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|\exp\{\gamma T\}\qquad K_1=\varepsilon\sup_{0\leq s\leq t}|W_s|\end{aligned}$$

En effet,

$$\int_{-\theta}^{t-\theta}|X_s-x_s|ds=\underbrace{\int_{-\theta}^0|X_s-x_s|ds}_{=0}+\int_0^{t-\theta}|X_s-x_s|ds\leq\int_0^t|X_s-x_s|ds\qquad(\star)$$

Pour la deuxième inégalité, en utilisant la forme intégrale de EDS (3.1) et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta|X_t - x_t|^2 &= \mathbb{E}_\theta|\int_0^t -\gamma(X_{s-\theta} - x_{s-\theta})ds + \varepsilon W_t|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^t |-\gamma||X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|ds)^2\right) + 2\varepsilon^2\mathbb{E}_\theta|W_t|^2 \\
&\overset{par\,Holder}{\leq} 2\gamma^2\mathbb{E}_\theta\left(t\cdot\int_0^t |X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|^2 ds\right) + 2\varepsilon^2 t \\
&\overset{par\,Fatou}{\leq} 2\gamma^2 t\cdot\int_0^t \mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|^2 ds + 2\varepsilon^2 t \\
&= 2\gamma^2 t\cdot\int_{-\theta}^{t-\theta} \mathbb{E}_\theta|X_s - x_s|^2 ds + 2\varepsilon^2 t \\
&\overset{par\,(\star)}{\leq} 2\gamma^2 T\cdot\int_0^T \mathbb{E}_\theta|X_s - x_s|^2 ds + 2\varepsilon^2 T \\
&\overset{\text{par le lemme 2.1}}{\leq} 2\varepsilon^2 T\exp\left\{2T\gamma^2\int_0^T ds\right\}
\end{aligned}$$

pour $K_2 = 2T\exp\{2T^2\gamma^2\}$, nous avons aussi les inégalités suivantes :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\theta|X_t - x_t|^2 \leq K_2\varepsilon^2, \qquad \sup_{\theta\in\Theta}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\theta|X_t - x_t|^2 \leq K_2\varepsilon^2$$

Démonstration(Théorème 3.1)
Pour tout $\theta \in \mathscr{K} \subset \Theta$, $\theta + \varepsilon u \in \Theta$ et (u_ε) une suite réelle telle que $u_\varepsilon \to u$.
posons $\theta_{\varepsilon,u} = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon$
Le rapport de vraisemblance normalisé est

$$\begin{aligned}
\ln Z_\varepsilon(u) &= \ln\frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_{(\varepsilon)}(\theta)u_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_\theta} \\
&= \int_0^T \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})dW_t - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt}_{(\#)}
\end{aligned}$$

et

$$\varphi_\varepsilon(\theta) := \varepsilon I^{-1/2}(\theta) = \varepsilon\cdot\gamma^{-2}(\int_0^T x_{t-2\theta}^2 dt)^{-1/2}$$

Pour le terme(#) nous montrons la convergence

$$\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}\|-\gamma(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - (-\gamma)(-\gamma x_{t-2\theta})\varphi_\varepsilon(\theta)u)\|^2 = 0$$

Nous pouvons écrire

$$\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt =$$

$$= \varepsilon^{-2}[\int_0^T (-\gamma)^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 dt - \int_0^T (u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma))^2 dt + \int_0^T (u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma))^2 dt]$$

$$= \varepsilon^{-2}[\int_0^T \{(-\gamma)^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})^2 - (u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma))^2\} dt + \int_0^T (u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma))^2 dt]$$

$$= \underbrace{\varepsilon^{-2}\int_0^T \{(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) + u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma)\} dt}_{\underbrace{\times\{(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma)\} dt}_{(1)}} + \varepsilon^{-2}\int_0^T (u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma))^2 dt$$

Pour le premier terme (1), en appliquant l'inégalité de Cauchy schwartz.

$$(1) \leq \varepsilon^{-2}\left[\int_0^T \{(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - \gamma u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}^2 dt\right]^{1/2} \times \left[\int_0^T \{(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) + \gamma u_\varepsilon \varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}^2 dt\right]^{1/2}$$

Le premier terme est borné car γ une constante et $-\gamma x$ est bornée de plus $I(\theta)$ est définie positive et pour le second terme, on utilise la forme intégrale de l'EDS .

$$\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\left[\int_0^T(-\gamma)^2\{(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}-X_{t-\theta})-u_\varepsilon\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}^2dt\right]^{1/2}$$

$$\leq \varepsilon^{-2}\gamma^2\mathbb{E}_\theta\left[\int_0^T\left(\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,u}}-\gamma X_{s-\theta}ds+\varepsilon(W_{t-\theta_{\varepsilon,u}}-W_{t-\theta})-u_\varepsilon\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\right)^2dt\right]^{1/2}$$

$$\leq \varepsilon^{-2}\gamma^2\mathbb{E}_\theta[\int_0^T(\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,u}}(-\gamma X_{s-\theta}-(-\gamma)x_{t-2\theta})ds)^2dt]^{1/2}+\varepsilon o(u_\varepsilon)$$

$$\leq \varepsilon^{-2}\gamma^2\mathbb{E}_\theta\left[\int_0^T(-\gamma)^2[\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,u}}(X_{s-\theta}-x_{t-2\theta})ds]^2dt\right]^{1/2}+\varepsilon o(u_\varepsilon)$$

$$\leq \varepsilon^{-2}\gamma^4\left[\int_0^T[\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,u}}\mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2ds]dt\right]^{1/2}+\varepsilon o(u_\varepsilon)$$

Pour l'éspérance $\mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2=\mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{s-\theta}+x_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2$ et d'aprés l'inégalité $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{-\theta\leq s\leq t-\theta_{\varepsilon,u}}\mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2 &\leq \sup_{-\theta\leq s\leq t-\theta_{\varepsilon,u}}2\mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{s-\theta}|^2+\sup_{-\theta\leq s\leq t-\theta_{\varepsilon,u}}2\mathbb{E}_\theta x_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2\\ &\leq K_2\varepsilon^2+2C\varepsilon^2=C\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathscr{K}}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\left[\int_0^T(-\gamma)^2\{(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}-X_{t-\theta})-u_\varepsilon\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}^2dt\right]^{1/2}=0$$

Nous déduisons que pour toute suite (u_ε) qui converge vers u.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathscr{K}}\mathbb{E}_\theta(\varepsilon^{-2}\|(-\gamma)\{(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}-X_{t-\theta})-u_\varepsilon\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}\|)=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathscr{K}}\mathbb{E}_\theta(\|\varepsilon^{-1}(-\gamma)\{(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}}-X_{t-\theta})-u_\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}\|)=0$$

comme

$$\|\varepsilon^{-1}(-\gamma)\{(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}\| \\ \leq \|\varepsilon^{-1}(-\gamma)\{(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - uI^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})\}\| + \|u_\varepsilon - u\|$$

nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T [\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})]^2 dt = u^2 \qquad uniformement\, en\, \theta.$$

De plus, pour l'intégrale stochastique $\Delta_\varepsilon = \int_0^T \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta})dW_t$, nous utilisons le lemme (1.2).

$$\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}(|\int_0^T [\varepsilon^{-1}(-\gamma)(_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma)]dW_t| > \delta) \\ \leq \frac{\lambda}{\delta^2} + \mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}(\|\varepsilon^{-1}(-\gamma)(_{t-\theta_{\varepsilon,u}} - X_{t-\theta}) - u_\varepsilon I^{-1/2}(\theta)(-\gamma x_{t-2\theta})(-\gamma)\|^2 > \lambda)$$

on choisissant λ et δ assez petits de sorte que $\delta\lambda^{-2}$ reste petit et par suite $\Delta_\varepsilon \Rightarrow N(0,1)$ la convergence en loi uniformément en $\theta \in \mathscr{K}$.

3.4 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Comme l'hypothèse de régularité est satisfaite, alors l'estimateur est consistant, asymptotiquement normal ,convergent en moyenne d'ordre p et localement asymptotiquement efficace.

lemme 3.2

Soit Θ un ouvert convexe de $\mathbb{R}$, pour tout compact $\mathscr{K} \subset \Theta$ et pour tout $R > 0$ nous avons la majoration suivante :

$$\sup_{\Theta\in\mathscr{K}} \sup_{|u_1|<R,|u_2|<R} |u_2 - u_1|^{-2}\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C(1 + R^6)$$

où C est une constante qui dépend de $\mathscr{K}$

preuve

posons $\theta_i = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_i, \quad i = 1, 2$

On considère le processus :

$$\begin{aligned} Y_t &= \exp\left\{\frac{1}{4}\int_0^t \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})dW_s - \frac{1}{8}\int_0^t [\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})]^2 ds\right\} \\ &= \left(\frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta_1}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta_2}}(X)\right)^{1/4} \end{aligned}$$

Posons alors

$$V_t = lnY_t = \frac{1}{4}\int_0^t \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})dW_s - \frac{1}{8}\int_0^t [\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})]^2 ds$$

En appliquant la formule d'Itô à $f(V_t) := \exp V_t$, on obtient

$$\begin{aligned} dY_t = \left\{\exp V_t \frac{-1}{8}(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^2 + \frac{1}{32}\exp V_t(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^2\right\} dt \\ + \exp V_t \cdot \frac{1}{4}\left(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})\right) dW_t \end{aligned}$$

Ainsi $Y_0 = 1$

Donc

$$Y_T = 1 - \frac{3}{32}\int_0^T (\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^2 Y_t dt + \frac{1}{4}\int_0^T \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})Y_t dW_t$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &= \int_\Omega \left|\left(\frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta_2}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta_1}}\right)^{1/4} - 1\right|^4 d\mathbb{P}_{\theta_1} \\ &= \mathbb{E}_{\theta_1}|L^{1/4}(\theta_2,\theta_1,X) - 1|^4 \\ &= \mathbb{E}_{\theta_2}|1 - L^{1/4}(\theta_2,\theta_1,X)|^4 \\ &= \mathbb{E}_{\theta_2}|1 - Y_T|^4 \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de Y_T et l'inégalité $(a+b)^4 \leq 2^3(a^4+b^4)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\theta_2}|1-L^{1/4}(\theta_2,\theta_1,X)|^4 = \mathbb{E}_{\theta_2}|1-Y_T|^4 \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^2Y_t dt + \frac{1}{4}\int_0^T \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})Y_t dW_t\right|^4 \\
&\leq 2^3\cdot\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^2Y_t dt\right|^4 \\
&+ 2^3\cdot\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{1}{4}\int_0^T \varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})Y_t dW_t\right|^4 \\
&\leq 2^3\left(\frac{3}{32}\right)^4 T^3\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}[(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})^8Y_t^4]dt + 2^3\left(\frac{1}{4}\right)^4 T \\
&\times\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}[(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^4Y_t^4]dt
\end{aligned}$$

pour le premier intégrale nous avons utilisé l'inégalité de hölder

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\theta_2}\left[\frac{3}{32}\int_0^T(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^2Y_t dt\right]^4 \\
&\leq \left(\frac{3}{32}\right)^4\mathbb{E}_{\theta_2}\left[\int_0^T(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^8Y_t^4 dt\right]^{\frac{1}{4}\cdot 4}\cdot\mathbb{E}_{\theta_2}\left[\int_0^T dt\right]^{\frac{3}{4}\cdot 4} \\
&= \left(\frac{3}{32}\right)^4 T^3\cdot\mathbb{E}_{\theta_2}\int_0^T(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^8Y_t^4 dt
\end{aligned}$$

et pour le deuxiéme intégrale nous avons utilisé l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}_\theta\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)^{2n} \leq (n(2n-1))^n\cdot T^{n-1}\int_0^T \mathbb{E}_\theta(f^{2n}(t))dt$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \\
&\leq C_1\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}[(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})^8Y_t^4]dt + C_2\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}[(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^4Y_t^4]dt
\end{aligned}$$

Par un changement des mesures, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \\
&\leq C_1\cdot\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1}[(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^8]dt + C_2\cdot\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1}[(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^4]dt
\end{aligned}$$

on a, $\mathbb{E}_{\theta_1}(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2}))^8 \leq \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^8}\gamma^8\mathbb{E}_{\theta_1}(X_{s-\theta_1}-X_{s-\theta_2})^8}_{(*)}$

puis en utilisant la forme intégrale de l'EDS (3.1)

$$\begin{cases} X_{t-\theta_1} = \int_0^{t-\theta_1} -\gamma X_{s-\theta}ds + \varepsilon W_{t-\theta_1} \\ X_{t-\theta_2} = \int_0^{t-\theta_2} -\gamma X_{s-\theta}ds + \varepsilon W_{t-\theta_2} \end{cases}$$

$$X_{t-\theta_1} - X_{t-\theta_2} = \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} -\gamma X_{s-\theta}ds + \varepsilon(W_{t-\theta_1} - W_{t-\theta_2})$$

et l'inégalité $(a+b)^{2n} \leq 2^{n-1}(a^{2n}+b^{2n})$ ainsi la propriété du processus de Wiener $\mathbb{E}|W_t - W_s|^2 = |t-s|$, nous déduisons

$$(*) = \gamma^8\frac{1}{\varepsilon^8}\cdot\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} -\gamma X_{s-\theta}ds + \varepsilon(W_{t-\theta_1} - W_{t-\theta_2})\right)^8$$

$$\leq C\cdot\frac{1}{\varepsilon^8}\gamma^8\left\{|\theta_2-\theta_1|^7\cdot\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1}\mathbb{E}_{\theta_1}(-\gamma X_{s-\theta})^8ds + \varepsilon^8|\theta_2-\theta_1|^4\right\}$$

$$= C\cdot\frac{1}{\varepsilon^8}\gamma^8|\theta_2-\theta_1|^7\cdot\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1}\mathbb{E}_{\theta_1}(-\gamma X_{s-\theta})^8ds + C\gamma^8|\theta_2-\theta_1|^4$$

Montrons que $\mathbb{E}_{\theta_1}(-\gamma X_{s-\theta})^8$ reste bornée :

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(-\gamma X_{s-\theta})^8 = \gamma^8\mathbb{E}_{\theta_1}(X_{s-\theta})^8 = \gamma^8\mathbb{E}_{\theta_1}(|X_{s-\theta} - x_{s-\theta} + x_{s-\theta}|)^8$$

$$\leq (2^7\cdot\mathbb{E}_{\theta_1}(|X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|)^8 + 2^7x_{s-\theta}^8)\gamma^8$$

$$\leq 2^7K_2\varepsilon^8\gamma^8 + 2^7\gamma^8x_{s-\theta}^8$$

$$\leq 2^7K_2\varepsilon^8\gamma^8 + 2^7\gamma^8\sup_{0\leq s\leq T}x_{s-\theta}^8$$

Alors

$$\gamma^8 \frac{1}{\varepsilon^8} \cdot \mathbb{E}_{\theta_1} \left(\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} -\gamma X_{s-\theta} ds + \varepsilon (W_{t-\theta_1} - W_{t-\theta_2}) \right)^8 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \frac{\gamma^8}{\varepsilon^8} |\theta_2 - \theta_1|^7 \left\{ |\theta_2 - \theta_1| (2^7 K_2 \varepsilon^8 \gamma^8 + \gamma^8 2^7 \sup_{0 \leq s \leq T} x_{s-\theta}^8) \right\} + C\gamma^8 |\theta_2 - \theta_1|^4 \\
&= \left(C\gamma^{16} K_2 + \frac{\gamma^{16}}{\varepsilon^8} 2^7 \sup_{0 \leq s \leq T} x_{s-\theta}^8 \right) |\theta_2 - \theta_1|^8 + C\gamma^8 |\theta_2 - \theta_1|^4 \\
&\leq \left(C\gamma^{16} K_2 \varepsilon^8 + \gamma^{16} 2^7 \sup_{0 \leq s \leq T} x_{s-\theta}^8 \right) I^{-4}(\theta) |u_2 - u_1|^8 + C\gamma^8 I^{-2}(\theta) \varepsilon^4 |u_2 - u_1|^4 \\
&\leq C_1 |u_2 - u_1|^8 \varepsilon^8 + C_2 |u_2 - u_1|^4 \varepsilon^4
\end{aligned}$$

En effet, $|\theta_2 - \theta_1| = \varphi_\varepsilon(\theta) |u_2 - u_1|$ $\qquad \varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon \cdot I^{-1/2}(\theta)$

de la même façon :

$$\mathbb{E}_{\theta_1} [(\varepsilon^{-1}(-\gamma)(X_{s-\theta_1} - X_{s-\theta_2}))^4] \leq C_3 |u_2 - u_1|^4 \varepsilon^4 + C_4 |u_2 - u_1|^2 \varepsilon^2$$

Finalement, pour $C_i > 0, i = 1, ..., 4$ nous obtenons

$$\mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1 |u_2 - u_1|^8 + C_2 |u_2 - u_1|^4 + C_3 |u_2 - u_1|^4 + C_4 |u_2 - u_1|^2$$

$$\begin{aligned}
\sup_{|u_i| < R} |u_2 - u_1|^{-2} \mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &\leq C_1 |u_2 - u_1|^6 + C_2 |u_2 - u_1|^2 + C_3 |u_2 - u_1|^4 + C_4 \\
&\leq C_1 (2R)^6 + (C_1 + C_2)(2R)^2 + C_4 \\
&\leq C(1 + R^6)
\end{aligned}$$

Lemme 3.3 :Pour tout $p \in (0,1)$ et pour tout compact $\mathscr{K} \subset \Theta$, il existe une fonction $g \in \mathscr{G}$, telle que

$$\sup_{\theta \in \mathscr{K}} \mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \exp\{-g(u)\}$$

où $\mathscr{G} = \big\{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \lim_{y\to 0} y^N \exp\{-g(u)\}, \textit{pour tout } N > 0\big\}$.
Preuve :
En suivant [4] page 49, posons :
$a = -\gamma(X_{t-\theta-u} - X_{t-\theta}), \qquad b = -\gamma(x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})$

d'aprés l'inégalité élémentaire : $a^2 \geq b^2 - 2|b(a-b)|$, nous permet d'écrire l'inégalité :

$$\begin{aligned}
&[-\gamma(X_{t-\theta-u} - X_{t-\theta})|]^2 \\
&\geq [-\gamma(x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})]^2 - 2| - \gamma(x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})(-\gamma)(X_{t-\theta-u} - X_{t-\theta} + x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})| \\
&\geq (-\gamma)^2(x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})^2 - 2|(-\gamma)^2||(x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})|(|X_{t-\theta-u} - x_{t-\theta-u}| + |X_{t-\theta} - x_{t-\theta}|)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Par un développement de Taylor d'ordre 1 de $-\gamma X_{t-\theta}$ au voisinage de $t-\theta$ pour $|u| \to 0$, nous avons pour le premier terme du majoration

$$\begin{aligned}
(-\gamma x_{t-\theta-u} - (-\gamma)x_{t-\theta}) &= (x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})(-\gamma) + o(u) \\
&= \dot{x}_{t-\theta} u(-\gamma) + o(u)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T (-\gamma)^2(x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta})^2 dt &= \int_0^T (-\gamma \dot{x}_{t-\theta} u)^2 dt + o(u^2) \\
&= \int_0^T (-\gamma)^2(-\gamma x_{t-2\theta})^2 u^2 dt + o(u^2) \\
&= u^2\gamma^4 \int_0^T x_{t-2\theta}^2 dt + o(u^2) \\
&= u^2 I(\theta) + o(u^2) \\
&> u^2(\inf_{\theta \in \mathscr{K} \subset \Theta} I(\theta) + o(1))
\end{aligned}$$

Comme $I(\theta)$ est défini positive, pour certain constante non nulle $C_{\mathscr{K}}$, nous avons :

$$\inf_{\theta\in\mathscr{K}}\inf_{|u|<\delta,\theta+u\in\Theta}\int_0^T(-\gamma)^2(x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta})^2dt > C_{\mathscr{K}}u^2$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_0^T(-\gamma)^2(x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta})^2dt &\leq \gamma^2\int_0^T|x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta}|^2dt\\ &\leq \gamma^2T\sup_{0\leq t\leq T}|x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta}|^2\\ &= \gamma^2Tu^2\sup_{0\leq t\leq T}\dot{x}_{t-\theta} = A^2u^2\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la double inégalité :

$$C_{\mathscr{K}}u^2 \leq \int_0^T(-\gamma)^2(x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta})^2dt \leq A^2u^2 \tag{3.4}$$

Pour le dernier terme de la majoration (3.3), nous appliquons l'inégalité de Cauchy schwartz :

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^T|(-\gamma)^2||x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta}||X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|dt\right)^2\\ &\quad\leq \gamma^4\cdot\left(\int_0^T|x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta}|^2dt\right)\cdot\left(\int_0^T|X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|^2dt\right)\\ &\quad\leq \gamma^4A^2u^2\int_0^T|X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|^2dt\\ &\quad\leq \gamma^4A^2u^2T\sup_{0\leq t\leq T}|X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|^2\\ &\quad\leq \gamma^4A^2u^2TC\varepsilon^2\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T|(-\gamma)^2||x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta}||X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|dt\\ &\qquad\qquad\leq \gamma^2A|u|\sqrt{T}C\varepsilon\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\end{aligned} \tag{3.5}$$

De la même façon, nous avons la majoration

$$\begin{aligned}&\int_0^T|(-\gamma)^2||x_{t-\theta-u}-x_{t-\theta}||X_{t-\theta-u}-x_{t-\theta-u}|dt\\ &\qquad\qquad\leq \gamma^2A|u|\sqrt{T}C\varepsilon\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\end{aligned} \tag{3.6}$$

Enfin, par l'inégalité de Hölder, pour tout p_1 et p_2 tels que $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) = \\
&= \mathbb{E}_\theta \exp\left\{p\int_0^T \varepsilon^{-1}-\gamma(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})dW_t - \frac{1}{2}p\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\} \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(-\frac{(p-q)}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right)\right. \\
&\quad \left.\times \exp\left(p\int_0^T \varepsilon^{-1}-\gamma(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})dW_t - \frac{q}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right)\right] \\
&\overset{par\ Holder}{\leq} \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left\{-\frac{(p-q)}{2}p_1\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\}\right]^{1/p_1} \\
&\qquad \times\left[\mathbb{E}_\theta \exp\left\{pp_2\int_0^T \varepsilon^{-1}-\gamma(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})dW_t\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.-\frac{qp_2}{2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\}\right]^{1/p_2}
\end{aligned}$$

Si l'on choisit q et p_2 tels que :

$$p_2=\frac{q}{p^2}>1 \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{p_1}=\frac{q-p^2}{q}$$

alors

$$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left\{-\frac{(p-q)}{2}\frac{q}{q-p^2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\cdot(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\}\right]^{\frac{q-p^2}{q}}$$

$$\times\left[\mathbb{E}_\theta \exp\left\{\frac{q}{p}\int_0^T \varepsilon^{-1}-\gamma(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})dW_t - \frac{q^2}{2p^2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\}\right]^{p^2/q}$$

et par la propriétés de l'intégrale stochastique (voir Kutoyants [4]page 15), nous avons

$$\mathbb{E}_\theta \exp\left\{\frac{q}{p}\int_0^T \varepsilon^{-1}-\gamma(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})dW_t - \frac{q^2}{2p^2}\int_0^T \varepsilon^{-2}(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\} \leq 1$$

Alors

$$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \left[\mathbb{E}_\theta \exp\left\{-\frac{(p-q)}{2}\frac{q}{q-p^2}\int_0^T \varepsilon^{-2}\cdot(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\}\right]^{\frac{q-p^2}{q}}$$

posons :

$$\lambda = \frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}$$

puis, selon (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) nous aurons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \exp\left\{-\lambda\int_0^T \varepsilon^{-2}\cdot(-\gamma)^2(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-X_{t-\theta})^2dt\right\}\\
&\leq \mathbb{E}_\theta \exp\left\{-\lambda\varepsilon^{-2}\int_0^T [(-\gamma)^2(x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta})^2 - 2|(-\gamma)^2||x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta}|\right.\\
&\qquad\qquad \left.\times(|X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}|+|X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|)]dt\right\}\\
&\leq \exp\left\{-\lambda\varepsilon^{-2}\int_0^T(-\gamma)^2(x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta})^2dt\right\}\\
&\quad\times \mathbb{E}_\theta \exp\left\{2\lambda\varepsilon^{-2}\int_0^T|(-\gamma)^2||x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta}||X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}|dt\right\}\\
&\quad\times \mathbb{E}_\theta \exp\left\{2\lambda\varepsilon^{-2}\int_0^T|(-\gamma)^2||x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}-x_{t-\theta}||X_{t-\theta}-x_{t-\theta}|dt\right\}\\
&\leq \exp\{-\lambda\varepsilon^{-2}C_{\mathscr{K}}\varphi_\varepsilon^2(\theta)u^2\}\times \mathbb{E}_\theta \exp\left\{2\lambda\varepsilon^{-2}\gamma^2A\varphi_\varepsilon(\theta)|u|\sqrt{T}C\varepsilon\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right\}\\
&\quad\times \mathbb{E}_\theta \exp\left\{2\lambda\varepsilon^{-2}\gamma^2A\varphi_\varepsilon(\theta)|u|\sqrt{T}C\varepsilon\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right\}\\
&= \exp\{-\lambda C_{\mathscr{K}}I^{-1}(\theta)u^2\}\mathbb{E}_\theta \exp\left\{4\lambda\gamma^2AI^{-1/2}(\theta)|u|\sqrt{T}C\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right\}
\end{aligned}$$

nous appliquons à ce niveau le lemme (1.1), nous obtenons

$$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \exp\{-\lambda C_{\mathscr{K}}I^{-1}(\theta)u^2\}(1+4\lambda\gamma^2AI^{-1/2}(\theta)|u|TC\sqrt{8\pi}\exp\{8T^2\lambda^2\gamma^4A^2I^{-1}(\theta)|u|^2C^2\})$$

posons

$$\lambda = \frac{C_{\mathscr{K}}}{16T^2\gamma^4A^2C^2}$$

Enfin

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) &\leq \left[\exp\{-\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\}(1+4\lambda A\gamma^2 I^{-1/2}(\theta)|u|TC\sqrt{8\pi}\exp\{\frac{1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\})\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&= \left[\exp\{-\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\} + 4\lambda A\gamma^2 I^{-1/2}(\theta)|u|TC\sqrt{8\pi}\exp\left\{\frac{-1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\right\}\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&\leq \left[\exp\left\{\frac{-1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\right\} + 4\lambda A\gamma^2 I^{-1/2}(\theta)|u|TC\sqrt{8\pi}\exp\left\{\frac{-1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\right\}\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&= \left[\exp\left\{\frac{-1}{2}\lambda C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\right\}\left(1+4\lambda A\gamma^2 I^{-1/2}(\theta)|u|TC\sqrt{8\pi}\right)\right]^{\frac{q-p^2}{q}} \\
&\leq \exp\left\{\frac{-1}{2}\frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}\cdot\frac{q-p^2}{q}C_{\mathscr{K}} I^{-1}(\theta)u^2\right\}\exp\left\{4\lambda A\gamma^2 I^{-1/2}(\theta)|u|TC\sqrt{8\pi}\frac{q-p^2}{q}\right\} \\
&= \exp\{-g(-|u|)\}
\end{aligned}
$$

Chapitre 4

Simulation numérique

Dans ce chapitre nous simulons les trajectoires du processus de type diffusion dans le cas régulier par la méthode d'Euler-Maruyama pour plusieurs retard, de plus nous nous illustrons le comportement asymptotique de l'estimateur de maximum du vraisemlbance dans une petite diffusion, pour cela nous utilisons le langage de programmation Python (Spyder comme interface de développement).

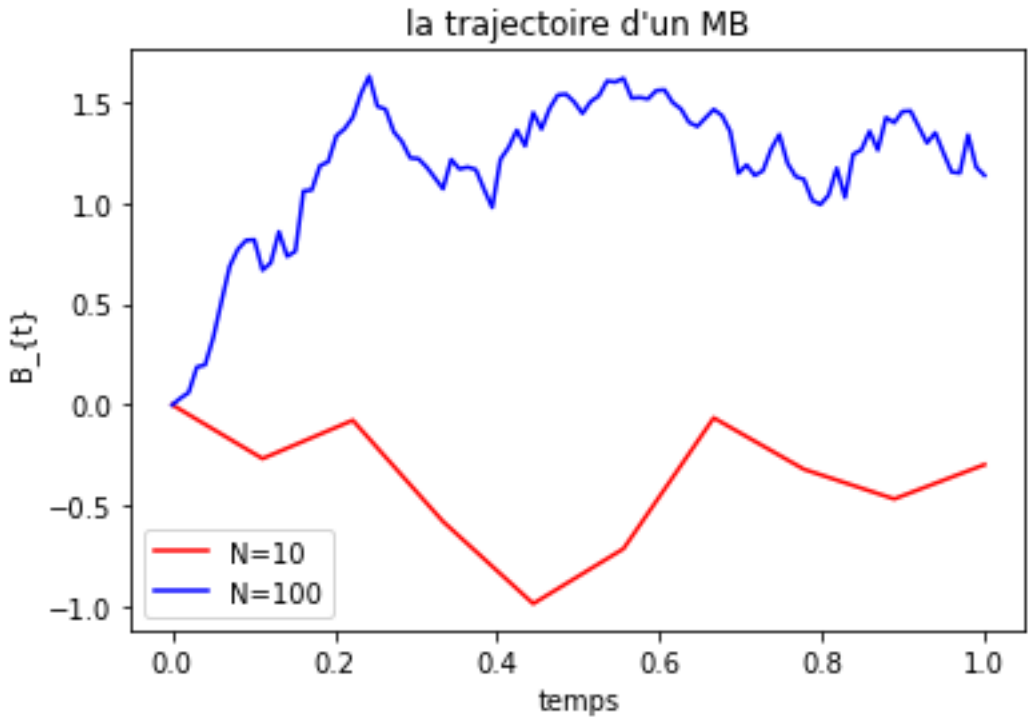
4.1 Trajectoires d'un mouvement Brownien

Le **MB** est une limite d'échelle universelle pour les marches chaotiques (aléatoires) à accroissements **i.i.d**. Notons $dW_{n+1} := W_{(n+1)h} - W_{nh}$, représentant des variables aléatoires indépendantes de distribution gaussienne. C'est à dire $W_{(n+1)h} - W_{nh} \hookrightarrow N(0,h)=\sqrt{h} * \xi$ où $\xi \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, h est le pas dans l'intervalle [0,T].

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
N1= 10
N2= 100
T=1
t1=np.linspace(0., T, N1)
t2=np.linspace(0., T, N2)
h1=t1[1]-t1[0] #le pas
#print(dt1)
h2=t2[1]-t2[0]
```

```
dW1=np.sqrt(h1)*np.random.normal(size=(N1-1)) #np.random.randn(n)
W0=np.zeros(shape=(1,)) #W0=0
#print(W0)
W1=np.concatenate((W0, np.cumsum(dW1))) #La fonction cumsum calcule les sommes
cumulées et permet de générer une trajectoire (integration) la fonction np.concatenate
oncatène plusieurs tableaux sur un axe spécifié.
#print(W1)
dW2=np.sqrt(h2) *np.random.normal(size=(N2-1,))
W2=np.concatenate((W0, np.cumsum(dW2)))

plt.plot(t1, W1 ,'r', label="N=10")
plt.plot(t2, W2 ,'b', label="N=100")
plt.title("la trajectoire d'un MB")
plt.xlabel("temps")
plt.ylabel("B_t")
plt.legend()
```


la trajectoire d'un MB
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
B_{t}
N=10
N=100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
temps

4.2 Trajectoires du processus cas particulier

Nous simulons la trajectoire du processus de type diffusion défini par l'équation différentielle stochastique

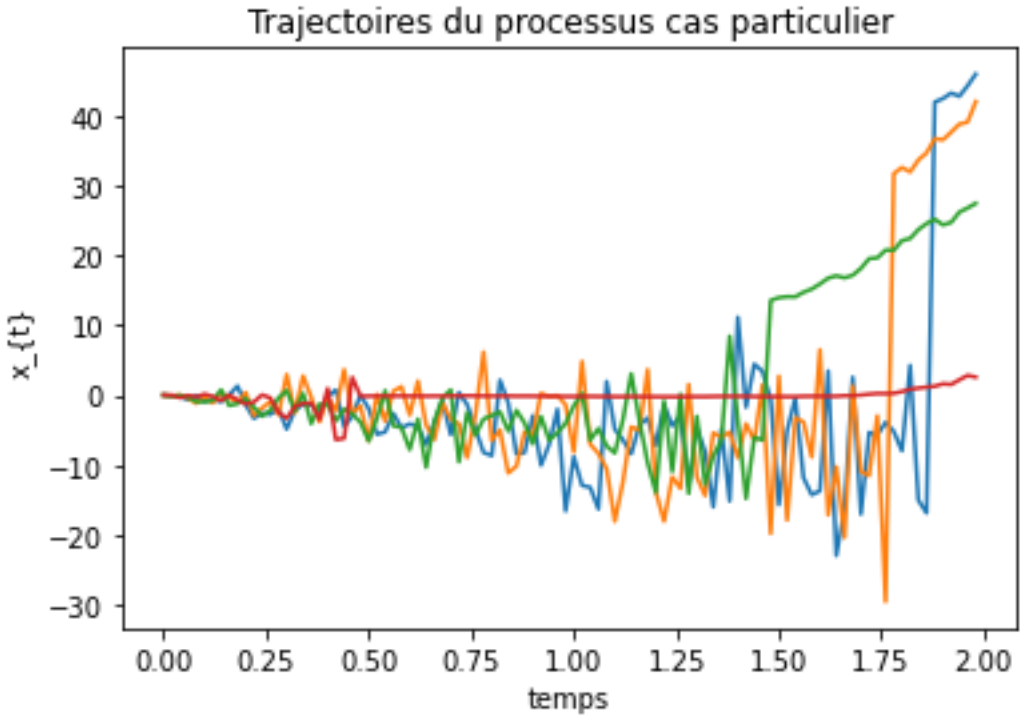
$$\begin{cases} dX_t = -\gamma X_{t-\theta} dt + \varepsilon dW_t & 0 \leq t \leq T \\ X_s = x_0 & s \leq 0 \end{cases}$$

par la méthode d'Euler-Maruyama.

$$X_{n+1} = X_n + (-\gamma) X_{n-N_\theta}(t_{n+1} - t_n) + \varepsilon \sqrt{t_{n+1} - t_n} W_t$$

```
x0=0.02
T=2
N=100
h=T/N     # step
#print(h)
epsilon=0.1
gamma=5
t=np.arange(0,T,h)
#N_theta=50
#theta=N_theta*h      #retard
#x=np.zeros(len(t))
#print(theta)
def dx_t(x0, t) :
    x=np.zeros(len(t))
    for n in range(N-1) :
        t_n=n*h
        if n − N_theta <= 0 :
            x[n − N_theta]=x0
            #print("x_t = x0")
            x[n+1]=x[n]+h*(-gamma)*x[n − N_theta]+epsilon*np.sqrt(h)*␣
↪ np.random.normal(0,1,None)
```

```
        else :
            x[n-N_theta]=-gamma*(n-N_theta)*x0+epsilon*np.random.␣
↪ normal(0,n-N_theta,None)
            x[n+1]=x[n]+h*(-gamma)*x[n-N_theta]+epsilon*np.sqrt(h)*np.random.␣
↪ normal(0,1,None)
    return x
N_Theta=[5,10,25,75] #theta1=0.1, #theta2=0.2, #theta3=0.5, #theta4=1.5
for N_theta in N_Theta :
    z=dx_t(x0,t)
    plt.plot(t,z)
plt.xlabel("temps")
plt.ylabel("x_t")
plt.title("euler Maruyama")
```



-Trajectoires du processus cas particulier pour $\theta = 0.1$
-Trajectoires du processus cas particulier pour $\theta = 0.2$
-Trajectoires du processus cas particulier pour $\theta = 0.5$
-Trajectoires du processus cas particulier pour $\theta = 1.5$

4.3 Comportement EMV

Soit le rapport de vraisemblace pour l'EDS (3.1)

$$L(\theta, X^T) = \exp\left\{\frac{-\gamma}{\varepsilon^2}\int_0^T X_{t-\theta}dX_t - \frac{\gamma^2}{2\varepsilon^2}\int_0^T X_{t-\theta}^2 dt\right\}$$

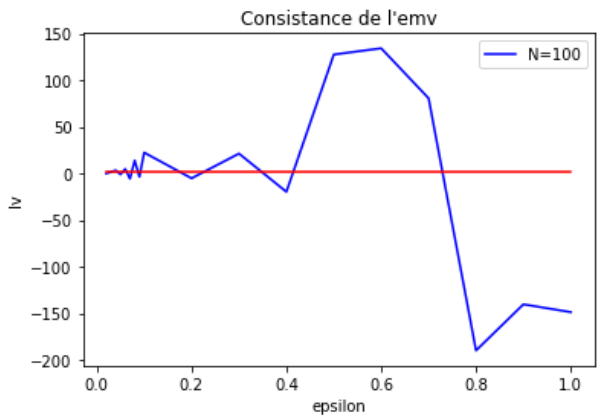
L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\epsilon$ est défini comme solution de l'équation suivante :

$$L(\hat{\theta}_\varepsilon, X^T) = \sup_{\theta\in\overline{\Theta}} L(\theta, X^T)$$

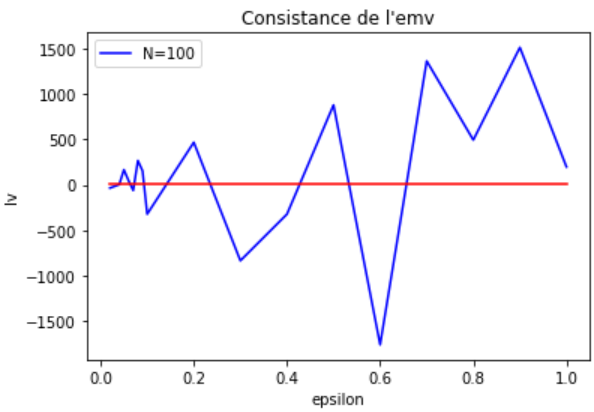
```
T=2
N=100
h=T/N
x0=#0.002, #0.02
print(h)     # step
gamma=1
t=np.arange(0,T,h)
x=np.zeros(len(t))
y=0
```

```
def X(s) :
    if s<=0 :
        return x0
    else :
        y=-gamma*s*x0+E*np.random.normal(0,s,None)
        return y
```

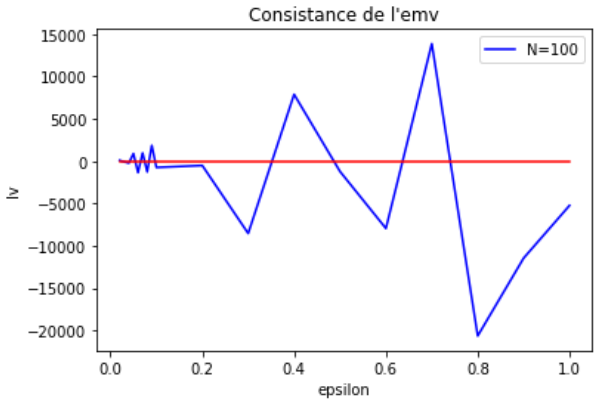
```
def log-vraisemblance(E,x0) :

    s1,s2=0,0
    for n in range(N-1) :
        s1+=X(n-N_theta)*(X(n+1)-X(n))
        s2+=(X(n-N_theta))**2 *h
    y=((-gamma/(E))*s1 - ((gamma**2)/(2*(E**2)))*s2)
    return y

lv=[]
Theta=[]
N_theta=90
theta=N_theta*h      #retard
#print(theta)
epsilon=[0.02,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1]
for E in epsilon :
     z=vraisemblance(E,x0)
     lv.append(np.max(z))
     Theta.append(N_theta*h)
plt.plot(epsilon,lv,'b',label="N=100")
plt.plot(epsilon,Theta,'r')
plt.xlabel("epsilon")
plt.ylabel("lv")
plt.title("Consistance de l'emv")
plt.legend()
```



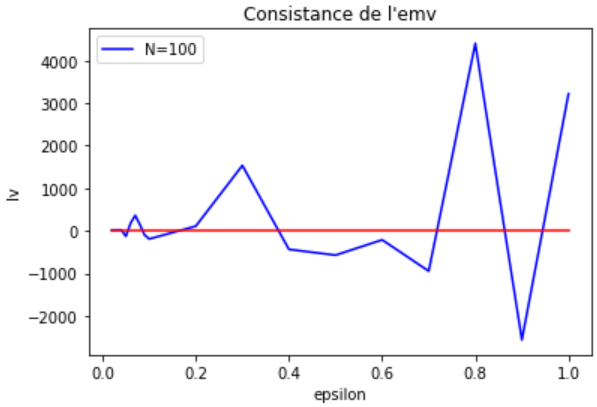
gamma=0.1, x0=0.02, N_{theta}=90



gamma=1, x0=0.02, N_{theta}=90



gamma=2, x0=0.002, N_{theta}=70



gamma=0.2, x0=0.02, N_{theta}=70

Conclusion

Ce travail consiste à établir les conditions qui nous permet d'utiliser le théorème de I.A-Ibragimov, R. Z-Has'minskii. Yu. Kutoyants le fait dans un cadre général dans l'article, nous avons établi tous les calculs intermédiaires non établis en détail par Yu. Kutoyants.
Ensuite, en suivant la même démarche, nous établissons les mêmes conditions pour utiliser le théorème de I.A-Ibragimov dans un cas pacticulier. où certaines estimations sont établies en utilisant des "racourcis" ou d'autres conditions que dans le problème général. Enfin nous étayons notre travail par des simulations numériques en utilisant le langage de programmation Python pour essayer de visualiser les résultats de ce dernièr travail.

Bibliographie

[1] Ibragimov, I.A., Khasminskii, R.Z., 1981. Statistical Estimation : Asymptotic Theory. Springer-Verlag, New York.

[2] Jeanblanc Monique, Cours de calcul stochastique.

[3] Smith H, 2011. -An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life.New York Dordrecht Heidelberg London.

[4] Kutoyants Yu. A., 1994. Identification of Dynamical Systems with Small Noise. Dordrecht : Kluwer.