

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Automatique

Spécialité : Automatique et Informatique Industriel

Par : Guenfoud Assia et Boudghene Stambouli Dalila

Sujet

Contrôle d'un système non linéaire: application au double pendule inversé sur chariot

Soutenu publiquement, le 10/06/2024, devant le jury composé de :

Mme. CHOUKCHOU BRAHAM Amal	Professeure	Université de Tlemcen	Présidente
Mr. BENYAHIA Boumediene	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mme. SAIDI Farah	MAB	Université de Tlemcen	Encadrante

Année universitaire : 2023 /2024.

Remerciement

Au seuil de ce travail, Nous tenons à remercier Allah, le Tout-Puissant, pour la volonté, la santé et la patience dont Il nous a gratifiés tout au long de ces années.

En premiers lieu, nous souhaitons exprimer notre reconnaissance la plus sincère envers notre encadrante **Mme. SAIDI Farah** pour son accompagnement attentif, sa disponibilité, son soutien encourageant et ses conseils avisés durant tout le processus de réalisation de notre mémoire.

Nous remercions les membres du jury qui nous accordent leur temps et leur expertise pour évaluer ce travail.

À tous nos enseignants en Automatique qui ont été des guides précieux tout au long de notre parcours académique, nous exprimons notre respect le plus profond et notre gratitude la plus sincère.

Enfin, nous témoignons notre appréciation envers toutes les personnes qui ont contribué, que ce soit de près ou de loin, à notre Projet.

Dédicaces

Nous sommes honorés de dédier humblement ce travail en guise de respect et d'appréciation :

À nos précieux parents, Même les expressions les plus raffinées pâliraient face à l'ampleur de notre reconnaissance et à l'immensité de notre bonheur de vous avoir comme parents . Merci pour votre amour indéfectible, votre attention constante et vos encouragements sans faille. Nous vous sommes reconnaissants pour tout ce que vous avez apporté à nos vies.

À nos familles respectives, à nos frères et soeurs et à nos amis qui ont été à nos côtés et nous ont apporté leur soutien inestimable tout au long du processus de réalisation de ce mémoire.

Dalila et Assia

Dédicace spéciale,

À mon cher mari, pour ton amour inconditionnel, ton soutien constant et ta patience infinie tout au long de cette aventure académique. Merci de croire en moi et de m'encourager chaque jour. À ma belle-mère, pour ta bienveillance, tes conseils avisés et ton soutien inestimable. Vos encouragements et votre amour m'ont été d'une aide précieuse.

Assia

Table des Matières

Introduction Générale	6
1 État de l'Art	7
1.1 Introduction	7
1.2 Les types de pendules inversés	7
1.2.1 Le pendule inversé simple	7
1.2.2 Le double pendule inversé	8
1.3 L'objectif d'étude du <i>DPIC</i>	9
1.3.1 En Médecine	9
1.4 Conclusion	12
2 La modélisation de <i>DPIC</i>	13
2.1 Introduction	13
2.2 La représentation de <i>DPIC</i>	13
2.2.1 L'équation de Lagrange	14
2.2.2 La détermination des équations de mouvement du système	15
2.2.3 La simulation du système en boucle ouverte	17
2.3 Conclusion	21
3 Le contrôle de <i>DPIC</i>	22
3.1 Introduction	22
3.2 La linéarisation du système	22
3.3 La représentation d'état du système	23
3.4 La commande par placement de Pôles	24
3.4.1 Le principe de la commande	24
3.5 La commande par Backstepping	27
3.5.1 Le principe de la commande	27
3.5.2 La commande par Backstepping adaptative	27
3.5.3 La méthode directe de Lyapunov	28
3.5.4 La fonction de Lyapunov	28
3.5.5 La méthode générale de synthèse récursive par Backstepping	29
3.6 L'application de commande par Backstepping sur le <i>DPIC</i>	30
3.7 Conclusion	36
Conclusion Générale	37

Liste de Figures

1.1	Le schéma du pendule inversé simple sur chariot [1].	7
1.2	Le schéma du double pendule inversé en cascade sur chariot [2].	8
1.3	Le schéma du double pendule inversé en parallèle sur chariot [3].	8
1.4	Robot Biped [4].	9
1.5	Analogie entre le double pendule inversé et le corps humain [5].	9
1.6	La représentation de la stabilité et de l'instabilité du corps humain [5]. . .	10
1.7	Volting-utilisateur modélisé comme un double pendule inversé [6].	10
1.8	Exemples d'exosquelettes [7].	11
1.9	Robot opératoire pour chirurgie cardio-vasculaire "R-ONE de ROBOCATH" [8].	12
1.10	Le robot Mako leader de la chirurgie robotique en orthopédie [9].	12
2.1	Le schéma du double pendule inversé sur chariot.	14
2.2	La réponse du système en BO pour la vitesse avec $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$. . .	18
2.3	La réponse du système en BO pour la position avec $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$. . .	19
2.4	La réponse du système en BO pour la vitesse avec $q_0 = (0, 50^\circ, 50^\circ, 0, 0, 0)$. . .	19
2.5	La réponse du système en BO pour la position avec $q_0 = (0, 50^\circ, 50^\circ, 0, 0, 0)$. . .	20
3.1	Le schéma du placement de pôles.	24
3.2	Vitesse de DPIC par placement de pôles.	26
3.3	Position de DPIC par placement de pôles.	26
3.4	Schéma de commande par Backstepping sous Simulink.	32
3.5	Position de DPIC par la commande Backstepping pour $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$. . .	32
3.6	Vitesse de DPIC par la commande Backstepping pour $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$. . .	33
3.7	La régulation de vitesse par Backstepping.	35
3.8	La régulation de position par Backstepping.	35

Introduction générale

En raison du développement technologique rapide et d'augmentation constante des exigences en matière de précision et de robustesse, les systèmes automatisés n'ont cessé de progresser, conduisant inévitablement à des structures de commande de plus en plus complexes.

L'automatique, domaine spécialisé dans l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques, voit dans l'étude des systèmes non linéaire un vaste champ d'exploration et de recherche. Cela est dû au fait que notre monde réel est essentiellement constitué d'éléments non linéaires. La maîtrise de ces éléments ne peut pas toujours se faire à travers des simplifications ou des approximations, qui consistent souvent à établir une hypothèse de linéarité.

Le *DPIC* est l'un des problèmes de contrôle non linéaire qui a fait l'objet de nombreux travaux de recherche et notamment ceux liés à la commande de systèmes non linéaires. Cet intérêt est également attribué au caractère très instable de ce système.

L'instabilité du *DPIC* fait qu'il est très compliqué de le maintenir dans sa position verticale vu que les deux pendules inversées tombent systématiquement à moins qu'une force de contrôle appropriée ne soit appliquée.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres résumés de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, nous présenterons le *DPIC* et décrirons brièvement divers types de pendules inversés. Ensuite, nous mettrons en évidence leur importance dans le domaine médical.

Le deuxième chapitre sera dédié à l'utilisation des lois cinématiques et de mouvement pour la modélisation de notre système *DPIC* et à l'observation de leur comportement libre.

Dans le chapitre final, nous développerons une loi de commande visant à stabiliser le système étudié. Deux approches de contrôle seront considérées : la première reposera sur un placement de pôles après linéarisation du système autour du point d'équilibre, tandis que la seconde sera basée sur la méthode de Backstepping, une technique de commande non linéaire efficace.

Ce mémoire aborde les défis de la stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires, en mettant en évidence l'importance de la modélisation précise et de l'élaboration de stratégies de contrôle robustes. Nous passerons en revue les principes théoriques fondamentaux, présenterons des méthodes de contrôle linéaires et non linéaires, et discuterons de leurs applications pratiques. À travers cette étude, nous visons à contribuer à l'avancement des techniques de commande pour les systèmes complexes, en fournissant des solutions efficaces pour leur stabilisation et leur optimisation.

Chapitre 1

État de l'Art

1.1 Introduction

Le pendule inversé est un système qui suscite un vif intérêt dans de nombreux domaines. Pour maintenir son équilibre, il nécessite l'utilisation de techniques de contrôle sophistiquées. Il est largement reconnu pour son importance dans les domaines de la robotique et de l'ingénierie en raison de son rôle crucial dans le développement de technologies avancées.

1.2 Les types de pendules inversés

1.2.1 Le pendule inversé simple

Le pendule inversé monté sur chariot est un système non linéaire instable. Il se compose d'un chariot supportant un pendule articulé (voir Fig.1.1). Le chariot peut se déplacer le long d'un rail à l'aide d'un moteur, comme le montre la figure suivante [1]:

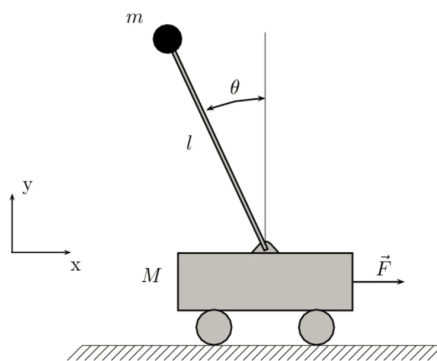


Figure 1.1: Le schéma du pendule inversé simple sur chariot [1].

1.2.2 Le double pendule inversé

En cascade

Son fonctionnement est basé sur le même principe que celui du pendule simple, mais avec une différenciation clé: il dispose de deux tiges en rotation libre. Une tige oscille autour du pivot à la base, formant un angle $\theta_1(t)$ tandis que l'autre oscille autour de la seconde articulation entre les deux tiges avec l'angle $\theta_2(t)$ (voir Fig.1.2).

L'objectif de contrôle est d'assurer la stabilité des deux tiges en position verticale et de les maintenir constamment autour de ce point d'équilibre instable [2].

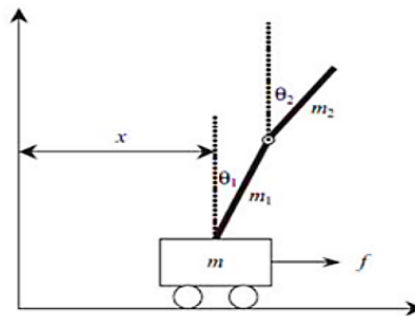


Figure 1.2: Le schéma du double pendule inversé en cascade sur chariot [2].

En parallèle

Le système se compose de deux pendules inversés disposés dans le même plan (voir Fig.1.3). Le premier pendule comporte une tige de longueur l_L et le deuxième a une tige de longueur l_B . Le déplacement $x(t)$ va causer un angle $\theta_L(t)$ et la deuxième tige donne un angle $\theta_B(t)$.

L'objectif de la commande repose sur la stabilisation des deux tiges près de la verticale (même en présence de perturbation externe), au point d'équilibre instable [3].

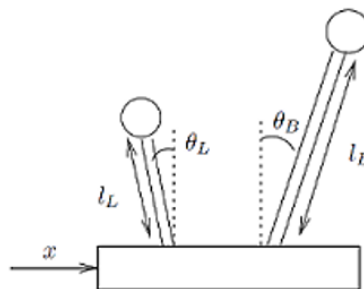


Figure 1.3: Le schéma du double pendule inversé en parallèle sur chariot [3].

Le Robot BIPED

A propos de ce robot on peut envisager de **DPI** connectés en série. Tel que, les deux pendules sont couplés par une tige munie de deux articulations (voir Fig.1.4).

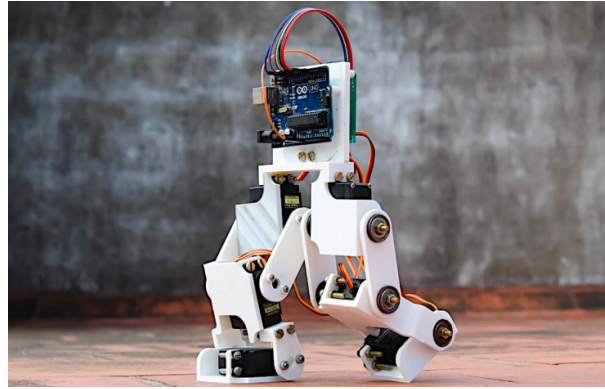


Figure 1.4: Robot Biped [4].

1.3 L'objectif d'étude du *DPIC*

L'étude du *DPIC* est d'une grande importance, étant donné son potentiel applicabilité dans divers domaines. Dans notre travail, nous avons décidé de nous concentrer spécifiquement sur son utilisation dans le domaine médical.

1.3.1 En Médecine

Le système de *DPI* en série peut être assimilé à la structure anatomique d'un être humain, où les points de rotation des chevilles et des hanches trouvent leur équivalent dans les articulations du pendule (voir Fig.1.5).

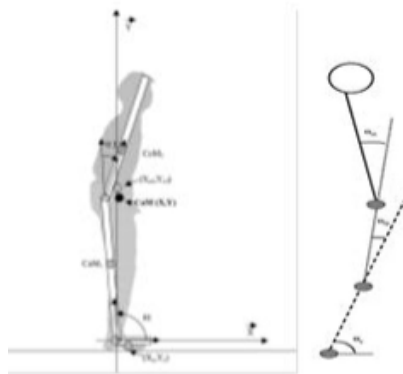


Figure 1.5: Analogie entre le double pendule inversé et le corps humain [5].

L'étude de ce modèle est particulièrement intéressante en raison de ses nombreuses utilisations notamment :

Dans l'analyse

Les mouvements humains peuvent être examinés en étudiant la façon dont le pendule inversé monté sur un chariot se déplace et se comporte (voir Fig.1.6). Cette analyse est cruciale pour élaborer des dispositifs médicaux et des méthodes de rééducation pour les gens ayant des problèmes de marche [5].

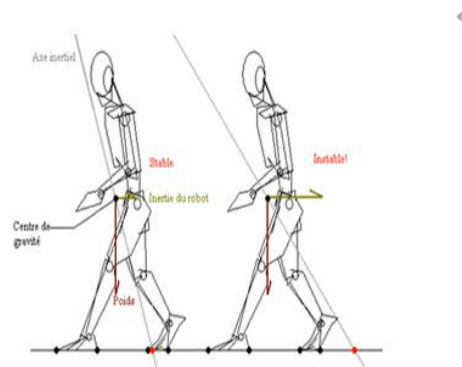


Figure 1.6: La représentation de la stabilité et de l'instabilité du corps humain [5].

- Comme exemple :

La dynamique du double pendule inversé peut être observée dans des projets tels que Volting, qui visent à étendre les possibilités de déplacement des utilisateurs de fauteuils roulants en leur offrant de nouvelles façons de se déplacer, directement depuis leur fauteuil (voir Fig.1.7). Ces avancées sont le fruit d'une analyse approfondie des mouvements humains [6].

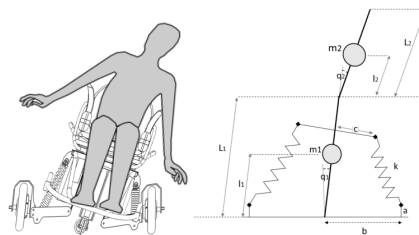


Figure 1.7: Volting-utilisateur modélisé comme un double pendule inversé [6].

Dans la rééducation

Les robots thérapeutiques offrent un soutien précieux dans la rééducation post-AVC, les cas de paralysie, de lésion cérébrale traumatique, ainsi que dans la gestion des déficiences résultant de la sclérose en plaques [10].

- Comme exemple on présente Exosquelettes (voir Fig.1.8), qui aide les personnes souffrant de paralysie à réapprendre à marcher, aussi pour les gens qui souffre de limitation de mobilité et qui ont des maladies neurologiques, et ils peuvent être utilisés par les chirurgiens pour accroître leur précision et leur stabilité pendant des opérations complexes, en diminuant les tremblements involontaires et en offrant un soutien ergonomique [7].

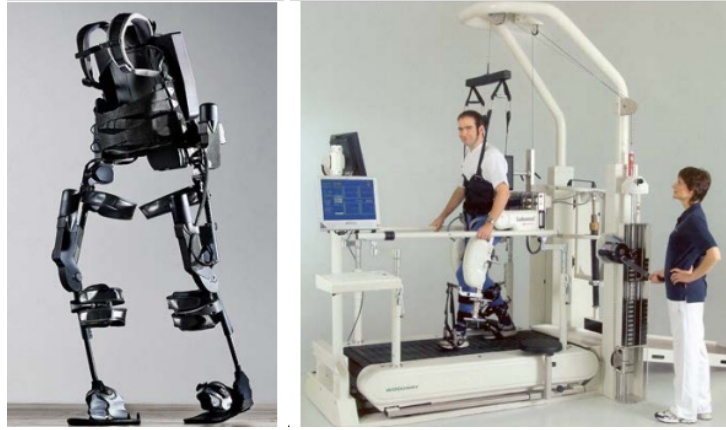


Figure 1.8: Exemples d'exosquelettes [7].

Dans l'assistance chirurgicale

Grâce à l'évolution des technologies de contrôle des mouvements, les robots d'assistance chirurgicale ont atteint un niveau de précision sans précédent. En tirant parti des technologies d'intelligence artificielle et de vision par ordinateur, ces robots offrent aux chirurgiens la possibilité de mener des opérations complexes avec une rapidité et une précision supérieures.

Certains sont même capables de mener des interventions de façon autonome, tandis que les chirurgiens surveillent les procédures depuis une console [10]. Il y a deux principales catégories d'opérations chirurgicales réalisées avec l'appui de la robotique (voir Fig.1.9 et Fig.1.10).

- Chirurgies peu invasives pour le torse



Figure 1.9: Robot opératoire pour chirurgie cardio-vasculaire "R-ONE de ROBOCATH" [8].

- Chirurgies orthopédiques



Figure 1.10: Le robot Mako leader de la chirurgie robotique en orthopédie [9].

1.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons parlé du *DPIC* et présenté de manière concise les différents types de pendule inversé ainsi que leur importance dans le monde actuel. Ensuite, nous avons souligné l'influence positive de ce système dans le domaine médical et sur la santé des personnes handicapées.

Chapitre 2

La modélisation de *DPIC*

2.1 Introduction

Les mathématiques sont souvent décrites comme "le langage de l'univers", car elles nous permettent de décrire et de prédire avec précision le comportement des phénomènes qui nous entourent. C'est ainsi que l'on comprend la nécessité d'un modèle mathématique pour les systèmes étudiés. La modélisation est essentielle pour permettre une étude approfondie par simulation.

Dans notre travail sur le *DPIC*, nous prenons en considération les équations de mouvement en fonction des masses des deux pendules et de la force de gravité [11].

2.2 La représentation de *DPIC*

Le système *DPIC* se caractérise par son instabilité, sa non-linéarité et sa rapidité. Il se compose d'un chariot positionné sur un rail, auquel sont reliés deux bras. Une force appliquée permet de déplacer le chariot à gauche et à droite le long du plan horizontal (voir Fig.2.1).

Degré de liberté : Le degré de liberté (Dll) est défini comme le nombre minimum de paramètres indépendants nécessaires pour décrire complètement l'état d'un système physique. En mécanique, chaque degré de liberté correspond à un mouvement indépendant, tel que la translation ou la rotation, que le système peut effectuer.

Le Dll est le nombre de coordonnées dépendantes \mathbf{N} moins le nombre de relation reliant ces coordonnées entre elles \mathbf{R} [12].

$$Dll = \mathbf{N} - \mathbf{R} = 3$$

Cela signifie que notre système dispose de trois degrés de liberté, tels que :

$$Dll = 7 - 4 = 3$$

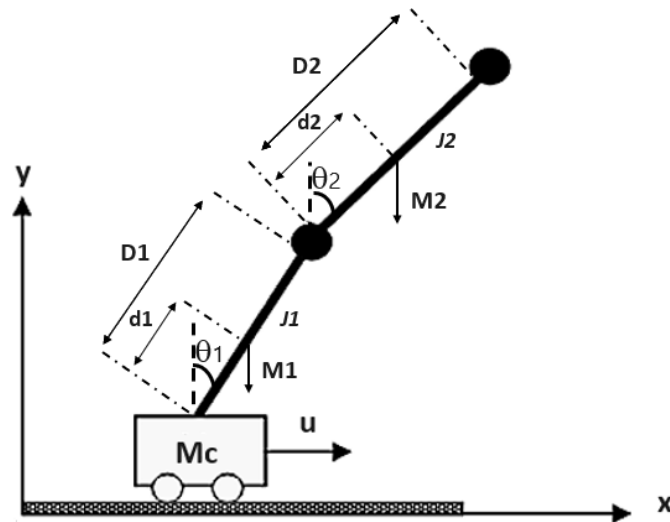


Figure 2.1: Le schéma du double pendule inversé sur chariot.

- Les notations sont les suivantes :

M_c : Masse du chariot (en Kg).

M_1, M_2 : Les masses du pendule inversé 1 et 2 (en Kg).

D_1, D_2 : Les longueurs du pendule inversé 1 et 2 (en m).

d_1, d_2 : Distance entre les articulations pivotantes et le centre de gravité des pendules (en m).

J_1, J_2 : Les moments d'inertie des deux pendules (en Kg m^2).

θ_1, θ_2 : L'angle du pendule (en rad) .

$U(t)$: La commande appliqué sur le chariot .

2.2.1 L'équation de Lagrange

Les équations de Lagrange sont les équations du mouvement du système dans le cadre de la mécanique de Lagrange. Pour un système à \mathbf{n} degrés de liberté, ça peut être écrit sous la forme $L(q, \dot{q}, t)$. Ces équations forment un ensemble de \mathbf{n} équations différentielles du second ordre donné par [13] :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{dL}{dq_\alpha} = 0 \quad (2.1)$$

avec $(\alpha = 1, \dots, \mathbf{n})$

Les équations de Lagrange sont une reformulation des équations du mouvement de Newton faisant intervenir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système via le lagrangien et s'exprimant en fonction des coordonnées généralisées [13].

Équation de Lagrange en présence de forces non conservatrices

En présence de forces appliquées non conservatrices $\vec{F}^i \equiv \vec{F}^i(q, \dot{q}, t)$. Les équations de Lagrange (eq.(2.1)) deviennent [13] :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{dL}{dq_\alpha} = Q_\alpha \quad (2.2)$$

Dans eq.(2.2) on a:

- Q_α est la force généralisée (la somme des forces extérieures).
- $L = Ec - Ep$ (Ec : Énergie Cinétique, Ep : Énergie Potentielle).

2.2.2 La détermination des équations de mouvement du système

On utilisant l'équation de Lagrange on peut décrire le mouvement du pendule inversé par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = Q_i \quad (2.3)$$

D'où :

$$q(t) = [x(t) \Theta_1(t) \Theta_2(t)]$$

Donc on aura trois équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = U - Q_1 \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} \right) - \frac{dL}{d\Theta_1} = -Q_2 \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} \right) - \frac{dL}{d\Theta_2} = -Q_3 \quad (2.6)$$

- Q_1 : est le coefficient de frottement entre le chariot et le plan horizontal.
- Q_2, Q_3 : sont les constantes d'amortissement du premier et du deuxième pendule.

Les forces de frottement sont définies par des fonctions linéaires associées à chaque coordonnée, telle que :

$$Q_1 = R_1 x_0$$

$$Q_2 = R_2 \dot{\Theta}_1$$

$$Q_3 = R_3 \dot{\Theta}_2$$

Notre système comprend trois éléments structurels (le chariot et les deux pendules). Les énergies de ces derniers sont présentées comme suit [1]:

- **Énergie cinétique :**

$$Ec = Ec_1 + Ec_2 + Ec_3$$

D'où :

$$Ec_1 = \frac{1}{2}M_c\dot{x}_0$$

$$Ec_2 = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}(M_1d_1^2 + J_1)\dot{\Theta}_1^2 + M_1d_1\dot{x}_0\dot{\Theta}_1\cos(\Theta_1)$$

$$Ec_3 = \frac{1}{2}M_2\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}(M_2D_1\dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2}(M_2d_2^2 + J_2)\dot{\Theta}_2^2 + M_2\dot{x}_0(D_1\dot{\Theta}_1\cos(\Theta_1) + d_2\dot{\Theta}_2\cos(\Theta_2))) \\ + (M_2D_1D_2\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2))$$

- **Énergie potentielle :**

$$Ep = Ep_1 + Ep_2 + Ep_3$$

D'où :

$$Ep_1 = 0 \quad (\text{Aucun déplacement le long de l'axe vertical})$$

$$Ep_2 = M_1gd_1\cos(\Theta_1)$$

$$Ep_3 = M_2g(D_1\cos(\Theta_1) + d_2\cos(\Theta_2))$$

On applique le Lagrangien, ça donne :

$$L = Ec - Ep$$

$$L = (Ec_1 + Ec_2 + Ec_3) - (Ep_1 + Ep_2 + Ep_3)$$

$$L = (M_c + M_1 + M_2)\dot{x}_0^2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(M_1d_1^2 + M_2D_1^2 + J_1)\dot{\Theta}_1^2 + \\ \frac{1}{2}(M_2d_2^2 + J_2)\dot{\Theta}_2^2 + (M_1d_1 + M_2D_1)\cos(\Theta_1)\dot{x}_0\dot{\Theta}_1 + M_2d_2\cos(\Theta_2)\dot{x}_0\dot{\Theta}_2 + \\ M_2D_1D_2\cos(\Theta_1\Theta_2)\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 - (M_1d_1 + M_2D_1)g\cos(\Theta_1) - M_2d_2g\cos(\Theta_2)$$

Et d'après les équations 2.4, 2.5 et 2.6 on a :

$$(M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x}_0 + (M_1d_1 + M_2D_1)\cos(\Theta_1)\ddot{\Theta}_1 + M_2d_2 \\ \cos(\Theta_2)\ddot{\Theta}_2 - (M_1d_1 + M_2D_1)\sin(\Theta_1)\dot{\Theta}_1^2 - M_2d_2\sin(\Theta_2)\dot{\Theta}_2^2 + R_1\dot{x}_0 = U \quad (2.7)$$

$$(M_1d_1^2 + M_2D_1^2 + J_1)\ddot{\Theta}_1 + (M_1d_1 + M_2D_1)\cos(\Theta_1)\ddot{x}_0 + M_2D_1D_2 \\ \cos(\Theta_1 - \Theta_2)\ddot{\Theta}_2 + M_2D_1d_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\dot{\Theta}_2^2 - (M_1d_1 + M_2D_1)g\sin(\Theta_1) + R_2\dot{\Theta}_1 = 0 \quad (2.8)$$

$$M_2d_2\cos(\Theta_2)\ddot{x}_0 + M_2D_1d_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)\ddot{\Theta}_1 + (M_2d_2^2 + J_2)\ddot{\Theta}_2 - M_2d_2g\sin(\Theta_2) \\ - M_2D_1d_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\dot{\Theta}_1^2 + R_3\dot{\Theta}_2 = 0 \quad (2.9)$$

Ces équations peuvent être représentées sous la forme matricielle comme suite :

$$\mathbb{T}_1(q)\ddot{q} + \mathbb{T}_2(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbb{T}_3(q) = \mathbb{T}_4 U \quad (2.10)$$

$$\mathbb{T}_1 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \cos(\Theta_1) & V_3 \cos(\Theta_2) \\ V_2 \cos(\Theta_1) & V_4 & V_5 \cos(\Theta_1 - \Theta_2) \\ V_3 \cos(\Theta_2) & V_5 \cos(\Theta_1 - \Theta_2) & V_6 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbb{T}_2 = \begin{bmatrix} R_1 & -V_2 \sin(\Theta_1)\dot{\Theta}_1 & -V_3 \sin(\Theta_2)\dot{\Theta}_2 \\ 0 & R_2 & V_5 \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\dot{\Theta}_2 \\ 0 & V_5 \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\dot{\Theta}_1 & R_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbb{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_1 \sin(\Theta_1) \\ -F_2 \sin(\Theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbb{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Avec :

$$V_1 = M_c + M_1 + M_2$$

$$V_2 = M_1 d_1 + M_2 D_1$$

$$V_3 = M_2 d_2$$

$$V_4 = M_1 d_1^2 + M_2 D_1^2 + J_1$$

$$V_5 = M_2 D_1 d_2$$

$$V_6 = M_2 d_1^2 + J_2$$

$$V_7 = g(M_1 d_1 + M_2 D_1)$$

$$V_8 = M_2 d_2 g$$

$$F_1 = M_1 d_1 g + M_2 D_1 g$$

$$F_2 = M_2 d_2 g$$

2.2.3 La simulation du système en boucle ouverte

Dans cette section, nous allons analyser les caractéristiques du système lorsqu'il évolue librement, c'est à dire sans aucune contrainte. Nous commençons par noter que les équations d'Euler-Lagrange créent le modèle dynamique non linéaire qui suit :

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{T}_1^{-1}(\mathbb{T}_4 U - \mathbb{T}_2 \dot{q} - \mathbb{T}_3) \quad (2.15)$$

Ceci implique que la matrice \mathbb{T}_1 est symétrique et non singulière.

Afin de mettre en œuvre l'équation (2.15) pour simuler la dynamique du système, nous devons également intégrer les valeurs des paramètres spécifiées :

$$\begin{aligned} M_c &= 0.4 \text{ Kg} \\ M_1 &= 0.2 \text{ Kg} \\ M_2 &= 0.2 \text{ Kg} \\ D_1 &= 0.5 \text{ m} \\ D_2 &= 0.5 \text{ m} \\ d_1 &= 0.25 \text{ m} \\ d_2 &= 0.25 \text{ m} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Avec J_1 et J_2 donnés par la relation suivante :

$$J_i = \frac{M_c D_i^2}{2}$$

telle que $i = 1, 2$.

Après la simulation du *DPIC* en BO, réalisée sous MATLAB, nous avons obtenu les résultats suivants :

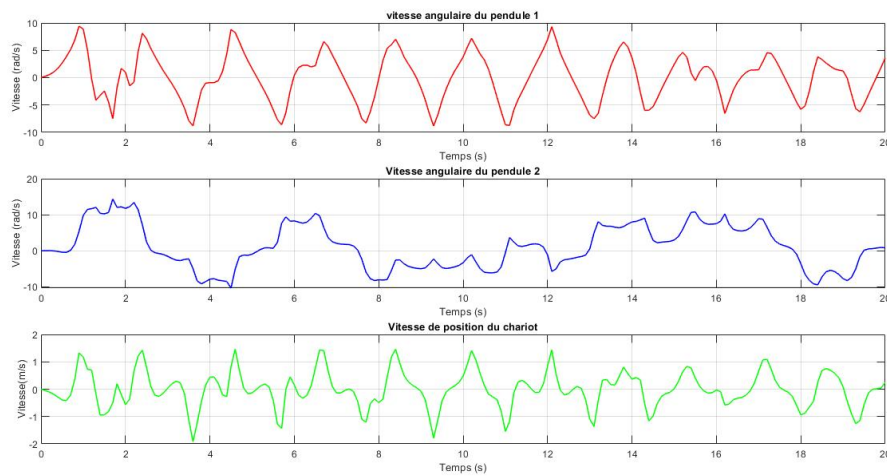


Figure 2.2: La réponse du système en BO pour la vitesse avec $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$.

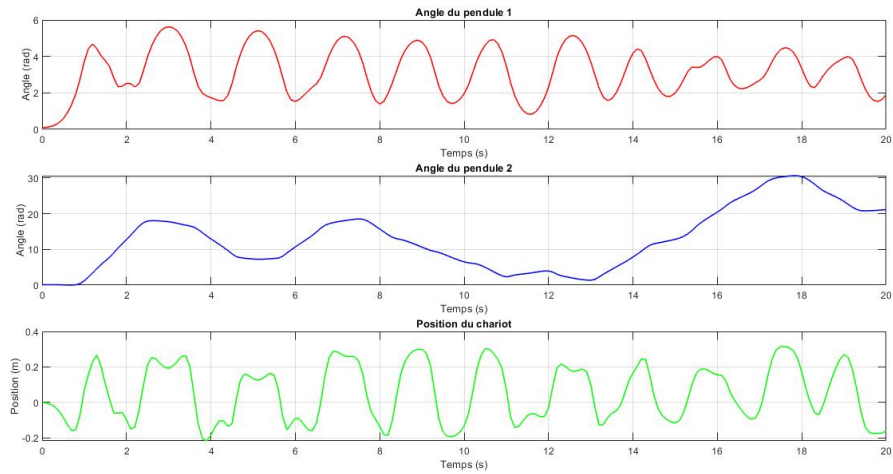


Figure 2.3: La réponse du système en BO pour la position avec $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$.

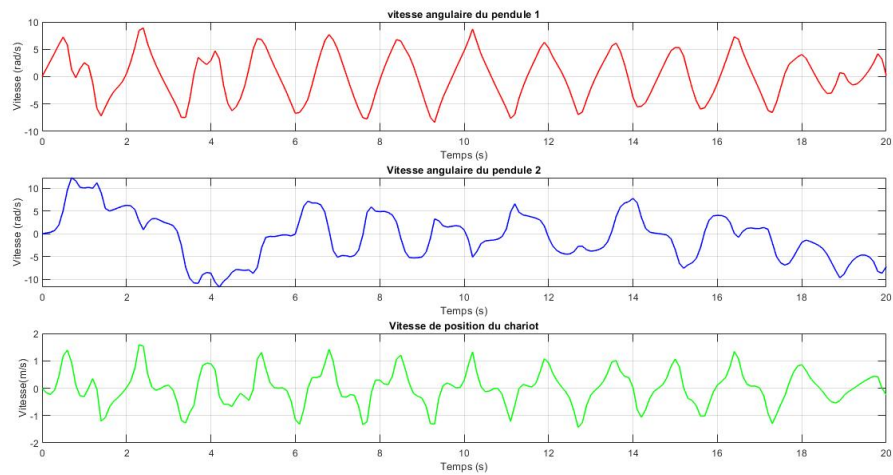


Figure 2.4: La réponse du système en BO pour la vitesse avec $q_0 = (0, 50^\circ, 50^\circ, 0, 0, 0)$.

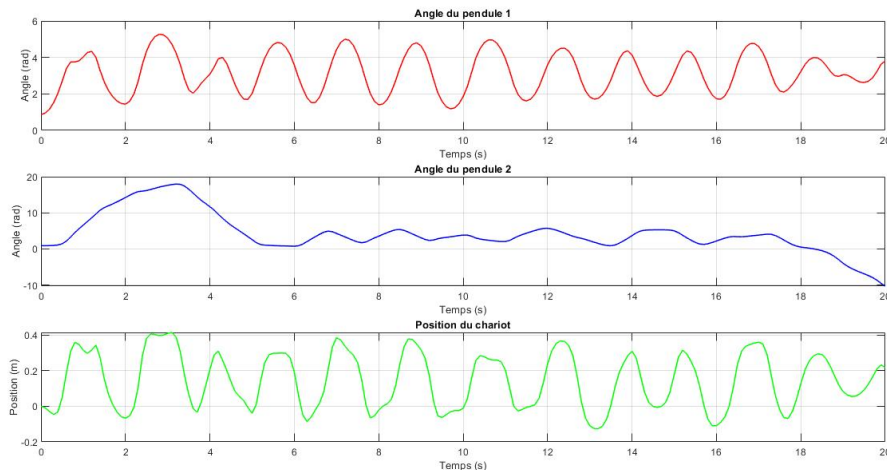


Figure 2.5: La réponse du système en BO pour la position avec $q_0 = (0, 50^\circ, 50^\circ, 0, 0, 0)$.

Pour les conditions initiales $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$, et $q_0 = (0, 50^\circ, 50^\circ, 0, 0, 0)$ c'est notable que le système n'est pas stable. Dans les figures de vitesses (Fig.2.2 et Fig.2.4), on remarque que la solution ne converge pas vers l'origine et reste oscillante. Les figures de positions (Fig.2.3 et Fig.2.5) démontrent la divergence de la solution.

1. Le comportement des pendules:

- Les angles des deux pendules présentent des oscillations initialement plus larges qui tendent à se réduire vers la fin de la période observée.
- Les vitesses angulaires sont également oscillatoires. Les pics dans la vitesse angulaire correspondent aux points où le pendule change de direction, ce qui est typique pour un système en rotation.

2. Le mouvement du Chariot:

- La position du chariot fluctue significativement, oscillant d'avant en arrière entre des valeurs maximales et minimales, ce qui indique un effort pour équilibrer les pendules en mouvement.
- Comme le montre la variation de la vitesse du chariot, le mouvement est également marqué par des oscillations en vitesse, avec des inversions qui correspondent aux changements de position. Cependant, en l'absence de commandes correctives ou de rétroaction, il ne parvient pas à stabiliser les pendules, ce qui entraîne des oscillations continues.

2.3 Conclusion

Ce chapitre se concentre sur l'élaboration d'un modèle pour le *DPIC*. En l'absence de mécanismes de contrôle, ce système présente des signes évidents d'instabilité, témoignés par les oscillations croissantes des pendules et les mouvements réactifs du chariot. Les interactions entre les pendules et leur impact sur le chariot nécessitent l'implémentation de techniques de contrôle telles que le retour d'état, le placement de pôles et le backstepping. Ces méthodes nous aident à obtenir une stabilisation efficace et précise, ainsi qu'à maintenir l'équilibre du système.

Chapitre 3

Le contrôle de *DPIC*

3.1 Introduction

Depuis le début des années 2000, la théorie de la commande non linéaire continue d'évoluer rapidement, soutenue par les progrès en modélisation mathématique, en algorithmes de contrôle avancés et en technologies numériques. Les avancées dans ce domaine ont donné lieu à des techniques utilisées pour concevoir et mettre en œuvre des modèles de commande dans les systèmes non linéaires. Cette progression a conduit à des systèmes mieux structurés dans le monde d'aujourd'hui [14].

Parmi les commandes les plus connues figure la commande par Backstepping, qui repose sur l'élaboration récursive de la loi de commande basée sur la théorie de Lyapunov.

Dans ce chapitre, nous présenterons deux méthodes de correction. La première implique un placement de pôles, et la deuxième se fonde sur la commande non linéaire Backstepping.

3.2 La linéarisation du système

L'équation du mouvement de notre système, qui a été établie, présente une non-linéarité. Pour la linéariser autour du point d'équilibre, nous avons :

$$\begin{aligned}\Theta_1 = \Theta_2 &= 0 \\ \sin(\Theta_1) &= \Theta_1 \quad \text{et} \quad \sin(\Theta_2) = \Theta_2 \\ \cos(\Theta_1) &= 1 \quad \text{et} \quad \cos(\Theta_2) = 1 \\ \cos(\Theta_1 - \Theta_2) &= 1\end{aligned}$$

Donc, pour chaque terme de \mathbb{T}_1 , \mathbb{T}_2 et \mathbb{T}_3 devient :

$$\mathbb{T}_1 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ V_2 & V_4 & V_5 \\ V_3 & V_5 & V_6 \end{bmatrix} \quad \mathbb{T}_2 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad \mathbb{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_1\Theta_1 \\ -F_2\Theta_2 \end{bmatrix}$$

3.3 La représentation d'état du système

Notre système de **DPIC** peut être représenté sous forme matricielle, connue sous le nom de représentation d'état. La forme générale de l'espace d'état est la suivante [15]:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}U \quad (3.1)$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}U \quad (3.2)$$

$x(t) \in R^n$: le vecteur d'état.

$u(t) \in R^m$: le vecteur d'entrée.

$y(t) \in R^p$: le vecteur de sortie.

$\mathbf{A} \in R^{n \times n}$: la matrice d'état ou matrice dynamique.

$\mathbf{B} \in R^{n \times m}$: la matrice d'entrée ou de commande.

$\mathbf{C} \in R^{p \times n}$: la matrice de sortie ou d'observation.

$\mathbf{D} \in R^{p \times m}$: la matrice de couplage ou matrice de liaison entrée-sortie [15].

On pose les variables d'état suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_0 = x_4 \\ x_2 &= \Theta_1 \rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\Theta}_1 = x_5 \\ x_3 &= \Theta_2 \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\Theta}_2 = x_6 \\ x_4 &= \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{x}_0 \\ x_5 &= \dot{\Theta}_1 \rightarrow \dot{x}_5 = \ddot{\Theta}_1 \\ x_6 &= \dot{\Theta}_2 \rightarrow \dot{x}_6 = \ddot{\Theta}_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La représentation d'état devient ainsi :

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ \hline -\frac{\partial \mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_3}{\partial x} & -\mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_2 \end{array} \right] x + \left[\begin{array}{c} 0_{3 \times 1} \\ -\mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_4 \end{array} \right] U \quad (3.4)$$

Telle que I est la matrice d'identité (3×3).

On trouve les résultats suivants :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.144 & -1508 & -0.0048 & 0.0016 & 0.0061 \\ 0 & 8.947 & -2.845 & 0.0023 & -0.0122 & 0.0116 \\ 0 & -8.537 & 32.669 & 0.0092 & 0.0116 & -0.1332 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.588 \\ 0.774 \\ 3.075 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.4 La commande par placement de Pôles

3.4.1 Le principe de la commande

Cette méthode repose sur la localisation des pôles du système afin de satisfaire les critères de performance souhaités. Il est essentiel d'implémenter une approche de contrôle qui déplace tous les pôles vers une zone stable du plan complexe. La stabilisation peut être réalisée en employant une matrice de gain appropriée pour la rétroaction d'état [16].

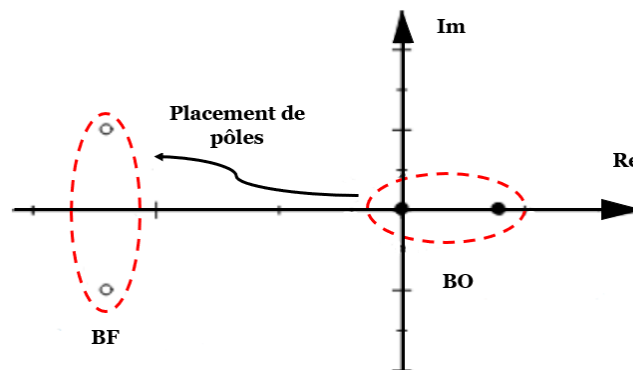


Figure 3.1: Le schéma du placement de pôles.

Pour accomplir cela, nous suivrons ces deux étapes [16] :

- Étape 1 : Placer les pôles à la position correcte.
- Étape 2 : Trouver une matrice de gain de rétroaction d'état κ qui réponde aux critères requis.

La dynamique souhaitée en boucle fermée sera déterminée par les pôles précis en BF.

$$P = \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n \quad (3.5)$$

Avec le polynôme caractéristique en BF suivant :

$$\mathcal{F}_{BF} = \prod_{i=1}^n (P - \Lambda_i) = P^n + \beta_{n-1}P^{n-1} + \dots + \beta_1P + \beta_0 \quad (3.6)$$

Le retour d'état est donnée par :

$$U = -\kappa X \quad (3.7)$$

Le κ est une matrice de gain de dimension $(1 \times n)$.

Alors, le modèle en boucle fermée devient :

$$\dot{X} = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\kappa)X \quad (3.8)$$

Sa solution est la suivante :

$$X = e^{\mathcal{A} - \mathcal{B}\kappa} X(0) \quad (3.9)$$

Les valeurs propres de la matrice d'état du système en BF $(\mathcal{A} - \mathcal{B}\kappa)$ déterminent la dynamique du système bouclé. Les pôles de l'équation caractéristique sont :

$$\text{Det}(PI - (\mathcal{A} - \mathcal{B}\kappa)) \quad (3.10)$$

Le calcul du gain par placement de pôles:

On va utiliser le polynôme caractéristique pour trouver la matrice de gain:

$$\kappa = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \dots \quad \kappa_n]$$

Telle que :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A} - \mathcal{B}\kappa}(P) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^F(P) = |PI - (\mathcal{A} - \mathcal{B}\kappa)| \quad (3.11)$$

L'application du placement de pôles sous Matlab

Avant de démarrer, il est important de vérifier si notre système est commandable en examinant la matrice de commandabilité.

Et on trouve :

$$\text{Rang}([\mathbf{A} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = \text{rang complet}$$

Dans notre cas le rang = 6, donc notre système est complètement commandable. Les pôles du système non corrigé sont les suivants:

$$\text{Pole} = [0 \quad -6.0414 \quad 5.5459 \quad -2.9137 \quad 2.6771 \quad 0.5818]$$

On constate qu'il y a 3 pôles situés dans le demi-plan positif, ce qui signifie l'instabilité du système. Pour corriger la position de ces pôles et assurer la stabilité du système, nous avons choisi les pôles suivants :

$$\text{Pole}_d = [-2 + 3j \quad -2 - 3j \quad -4 \quad -6 \quad -5 \quad -2]$$

On a obtenu le gain de placement de pôles comme suit:

$$\kappa = [-1.9344 \quad 76.5701 \quad -86.8716 \quad -2.7628 \quad 4.8835 \quad -12.7701] \quad (3.12)$$

On a pris comme condition initiales $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$ et on a trouvé les résultats suivant :

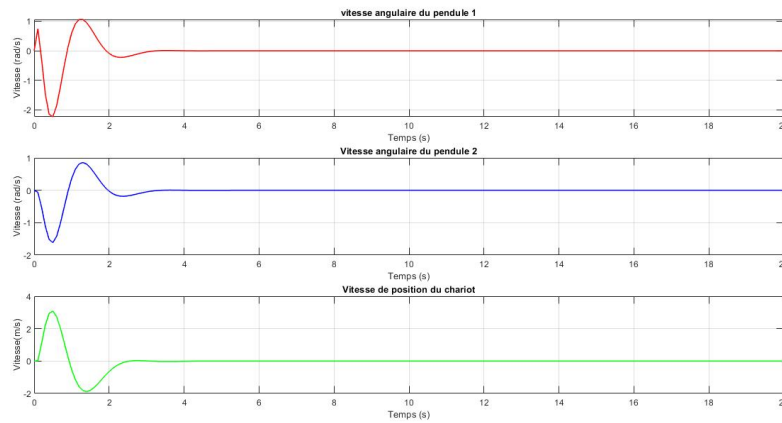


Figure 3.2: Vitesse de *DPIC* par placement de pôles.

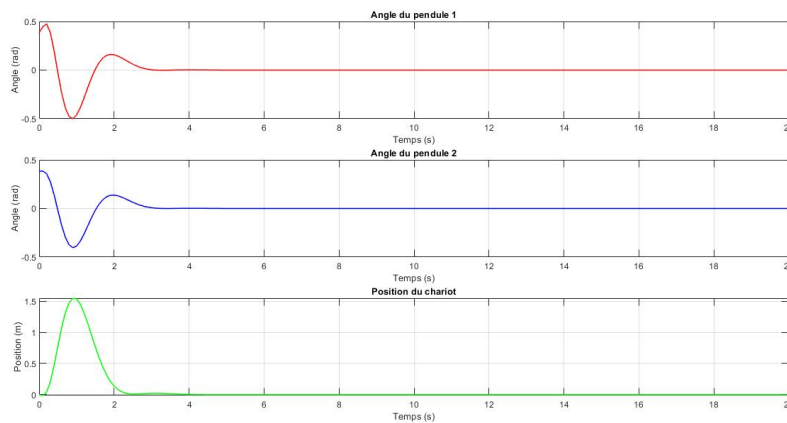


Figure 3.3: Position de *DPIC* par placement de pôles.

L'interprétation:

Les deux figures (Fig.3.2 et Fig.3.3) présentes le comportement de *DPIC* en position et en vitesse.

Nous observons que le chariot, contrôlé par une commande de placement de pôles, retrouve rapidement sa position d'équilibre, ce qui se traduit par une convergence vers le point d'équilibre pour sa position et sa vitesse. De même, les angles θ_1 et θ_2 , pour des conditions initiales de 22° , présentent une réponse similaire.

Cette efficacité suggère que le placement des pôles du système a été optimisé pour maximiser la rapidité de la réponse tout en minimisant les oscillations excessives.

3.5 La commande par Backstepping

3.5.1 Le principe de la commande

La commande par backstepping est une approche récursive de conception de lois de commande qui assure la stabilité des systèmes. Cette technique est spécifiquement adaptée aux systèmes non linéaires présentant une structure triangulaire. Elle repose sur la division du système de commande global, souvent multivariable et de haut ordre, en une série de sous-systèmes de premier ordre. Pour chacun de ces sous-systèmes, une loi de commande virtuelle est établie, qui sert ensuite de référence pour le sous-système suivant, jusqu'à ce que la loi de commande complète soit formulée pour l'ensemble du système. Contrairement aux méthodes de linéarisation, cette technique maintient les non-linéarités bénéfiques pour la performance et la robustesse du système. L'élaboration des lois de commande utilise les fonctions de Lyapunov pour la commande, ce qui garantit une approche systématique et efficace [17].

3.5.2 La commande par Backstepping adaptative

La commande par backstepping adaptative propose une démarche itérative et méthodique pour élaborer de manière récursive trois composantes essentielles à une stratégie de contrôle adaptative guidée par les principes de Lyapunov [17]:

- **La loi de commande**, qui est ajustée pour satisfaire les exigences spécifiques relatives au comportement du système contrôlé [17].

- **La loi d'adaptation**, qui régule la dynamique d'estimation des paramètres non connus pour assurer leur convergence vers des valeurs cibles tout en préservant le bon fonctionnement global et la stabilité du système [17].

- **La fonction de Lyapunov**, qui est utilisée pour sélectionner judicieusement les lois de commande et d'adaptation, assurant ainsi la convergence et la stabilité continues de l'approche adaptative [17].

La construction de ces trois éléments est réalisée simultanément, en intégrant les interactions entre eux pour contrer tout effet potentiellement déstabilisant. Cette méthode entrelace les approches adaptatives et non adaptatives pour maintenir la stabilité systémique.

3.5.3 La méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov, aussi connue par la deuxième méthode de Lyapunov, permet d'évaluer la stabilité d'un système sans recourir à la résolution explicite de ses équations différentielles non linéaires. La méthode de base est de créer une fonction "d'énergie", appelée fonction de Lyapunov, pour le système dynamique, puis à analyser sa dérivée temporelle le long d'une trajectoire.

Physiquement, cela implique que si l'énergie totale d'un système se dissipe de manière continue, alors le système finira par converger vers un point d'équilibre. Autrement dit, la stabilité d'un système est caractérisée par une diminution de son énergie, et elle atteint un minimum à l'équilibre [18].

3.5.4 La fonction de Lyapunov

- **Theorème[3.5.1]**

L'origine du système (G) est stable s'il existe une fonction de Lyapunov qui est un candidat valide $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que :

1. V est définie positive.
2. $\dot{V}(t) = h\langle V(x), f(x) \rangle$ est semi-définie négative [18].

La stabilité asymptotique:

- **Theorème[3.5.2]**

L'origine du système (G) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$ et telle que :

1. V est définie positive.
2. $\dot{V}(x) = h\langle V(x), f(x) \rangle$ est définie négative [18].

- **Remarque :**

Dans les domaines de la mécanique et des systèmes électriques, l'énergie totale est souvent employée comme fonction de Lyapunov. Il n'existe pas de méthode générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cette approche est largement utilisée dans ces domaines spécifiques [18].

3.5.5 La méthode générale de synthèse récursive par Backstepping

Cette commande est adaptée aux systèmes ayant une structure triangulaire [17], comme le montre la représentation suivante :

$$\dot{X}_1 = F_1(X_1) + G_0(X_1)X_2 \quad (3.13)$$

$$\dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2) + G_1(X_1, X_2)X_3 \quad (3.14)$$

$$\vdots \quad (3.15)$$

$$\cdot \quad (3.16)$$

$$\dot{X}_n = F_n(X_1, \dots, X_n) + G_n(X_1, \dots, X_n)U \quad (3.17)$$

Avec : $X = [X_1, X_2, \dots, X_n] \in \mathfrak{R}^n, U \in \mathfrak{R}$.

Le système étant d'ordre n , donc cette méthode se déroule en n étapes :

•Étape n :

La référence désirée est notée :

$$(X_n)_d = \gamma_{n-1} \quad (3.18)$$

D'où l'erreur de régulation est :

$$\xi_n = X_n - \gamma_{n-1} \quad (3.19)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{\xi}_n = \dot{X}_n - \dot{\gamma}_{n-1} = F_n(X_1, \dots, X_n) + G_{n-1}(X_1, \dots, X_n)U - \dot{\gamma}_{n-1} \quad (3.20)$$

Pour le système (3.6) la fonction de Lyapunov étendue est :

$$V_n = V_1 + V_2 + \dots + \frac{1}{2}\xi_n^2 = \frac{1}{2}[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2] \quad (3.21)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V}_n = \dot{V}_1 + \dots + \xi_n \dot{\xi}_n = -\underline{k}_1 \xi_1^2 + \dots + \xi_n [F_n(X_1, \dots, X_n) + G_{n-1}(X_1, \dots, X_n)U - \dot{\gamma}_{n-1}] \quad (3.22)$$

Dans cette dernière étape, nous sommes parvenus à déduire la loi de commande pour l'ensemble du système.

Un bon choix doit satisfaire cette équation :

$$F_n(X_1, \dots, X_n) + G_{n-1}(X_1, \dots, X_n)U - \dot{\gamma}_{n-1} = -\underline{k}\xi_n \quad (3.23)$$

Où $\underline{k} > 0$ est une constante de conception.

Ainsi, la loi de commande pour l'ensemble du système sera donnée par :

$$U = \frac{1}{G_{n-1}(x_1, \dots, x_n)} [-\underline{k}\xi_n + \dot{\gamma}_{n-1} - F_n(x_1, \dots, x_n)] \quad (3.24)$$

Ce qui garantit la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov étendue :

$$\dot{V} = -\underline{k}_1 \xi_1^2 - \dots - \underline{k}_n \xi_n^2 \leq 0 \quad (3.25)$$

3.6 L'application de commande par Backstepping sur le DPIC

Pour appliquer cette commande il faut passer par des étapes, alors on présente notre système non linéaire suivant:

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ \hline -\frac{\partial \mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_3}{\partial x} & -\mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_2 \end{array} \right] x + \left[\begin{array}{c} 0_{3 \times 1} \\ -\mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_4 \end{array} \right] U \quad (3.26)$$

Tel que

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ \hline -\frac{\partial \mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_3}{\partial x} & -\mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_2 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} 0_{3 \times 1} \\ -\mathbb{T}_1^{-1} \mathbb{T}_4 \end{array} \right]$$

Avec les variables d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 \\ \dot{x}_2 &= \dot{\Theta} \\ \dot{x}_3 &= \dot{\Theta}_2 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{x}_0 \\ \dot{x}_5 &= \ddot{\Theta}_1 \\ \dot{x}_6 &= \ddot{\Theta}_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les non-linéarités dans notre système proviennent principalement de la nature des équations de mouvement, qui sont dérivées des lois de la dynamique de Lagrange (eq.2.15). Les termes trigonométriques (sin et cos) et les produits des vitesses angulaires sont des sources majeures de non-linéarités (voir les équations \mathbb{T}_1 eq.2.11, \mathbb{T}_2 eq.2.12, \mathbb{T}_3 eq.2.13). Notre système a une seule entrée de contrôle, la force appliquée au chariot U (voir Fig.2.1). Puisque Θ_1 et Θ_2 ne reçoivent pas directement de force extérieure, nous devons utiliser les dynamique couplées du système. La commande backstepping se concentre sur l'entrée U du chariot pour stabiliser l'ensemble du système en décomposant le problème de contrôle en sous-problèmes hiérarchiques, permettant ainsi de gérer les non-linéarités et les interactions complexes entre les pendules et le chariot. En intégrant la techniques de backstepping non linéaire adaptatif on a :

- Étape 1 :

On commence par l'équation (3.26) du système ou x_4 sera considérée comme une commande virtuelle intermédiaire. La première référence désirée est notée :

$$(x_1)_d = \gamma_0$$

Et la variable d'erreur de régulateur :

$$\xi_1 = x_1 - \gamma_0 \quad (3.28)$$

Ainsi sa dérivée est :

$$\dot{\xi}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\gamma}_0 = \dot{x}_4 - \dot{\gamma}_0 \quad (3.29)$$

Et la fonction de Lyapunov v_1 sous une forme quadratique :

$$v_1 = \frac{1}{2} \xi_1^2 \quad (3.30)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{v}_1 = \xi_1 \dot{\xi}_1 = \xi_1 [x_4 - \dot{\gamma}_0] \quad (3.31)$$

Un choix judicieux de x_4 rendrait \dot{v}_1 négative et assurerait la stabilité pour la dynamique de (3.32), prenons $x_4 = \gamma_1$ telle que :

$$x_4 - \dot{\gamma}_0 = -k_1 \xi_1 \quad (3.32)$$

Où $k_1 > 0$ est une constante de conception.

Ainsi, la loi de commande pour le système (3.32) sera donnée par :

$$\gamma_1 = \dot{\gamma}_0 - k_1 \xi_1 \quad (3.33)$$

Avec : $\dot{\gamma}_0 = 0$

Ce qui implique :

$$\dot{v}_1 = \xi_1 \dot{\xi}_1 = -k_1 \xi_1^2 \leq 0 \quad (3.34)$$

D'où l'on conclut que la stabilité à l'origine est asymptotique.

• Étape 2 :

On a :

$$\gamma_1 = \dot{\gamma}_0 - k_1 \xi_1 \quad (3.35)$$

$$\dot{\gamma}_1 = -k_1 \dot{\xi}_1 \quad (3.36)$$

D'où la nouvelle erreur de régulation sera :

$$\xi_2 = x_4 - \gamma_1 \quad (3.37)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{\xi}_2 = \dot{x}_4 - \dot{\gamma}_1 \quad (3.38)$$

Pour le système (3.41), la fonction de Lyapunov étendue est :

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{2} \xi_2^2 = \frac{1}{2} [\xi_1^2 + \xi_2^2] \quad (3.39)$$

Donc sa dérivée devient :

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2 = \dot{v}_1 + \xi_2 [\dot{x}_4 + k_1 \dot{\xi}_1] \quad (3.40)$$

Alors, on sait bien que \dot{v}_1 est asymptotiquement stable. Nous voulons voir si le deuxième terme est également asymptotiquement stable.

En substituant :

$$\xi_2 [\dot{x}_4 + k_1 \dot{\xi}_1] = 0 \quad (3.41)$$

Nous obtenons :

$$\dot{x}_4 + k_1 \dot{\xi}_1 = 0 \quad (3.42)$$

D'après la représentation d'état eq.3.26 on peut écrire:

$$\dot{x}_4 = \mathbf{A}(4, :)x + \mathbf{B}(4, 1)U \quad (3.43)$$

Ce qui donne:

$$\mathbf{A}(4, :)x + \mathbf{B}(4, 1)U + k_1 x_4 = 0 \quad (3.44)$$

Le résultat de la commande de translation donne :

$$U = \frac{-\mathbf{A}(4, :)\underline{x} - k_1 x_4}{\mathbf{B}(4, 1)} \quad (3.45)$$

Pour que $\dot{y}_2 \leq 0$ et le système soit asymptotiquement stable on peut mettre :

$$U = \frac{-\mathbf{A}(4, :)\underline{x} - k_1 x_4}{\mathbf{B}(4, 1)} - k_1 (x_1 - \gamma_1)^2 \leq 0 \quad (3.46)$$

Nous avons appliqué la commande étudiée sur notre système sous MATLAB-SIMULINK voir(Fig.3.4).

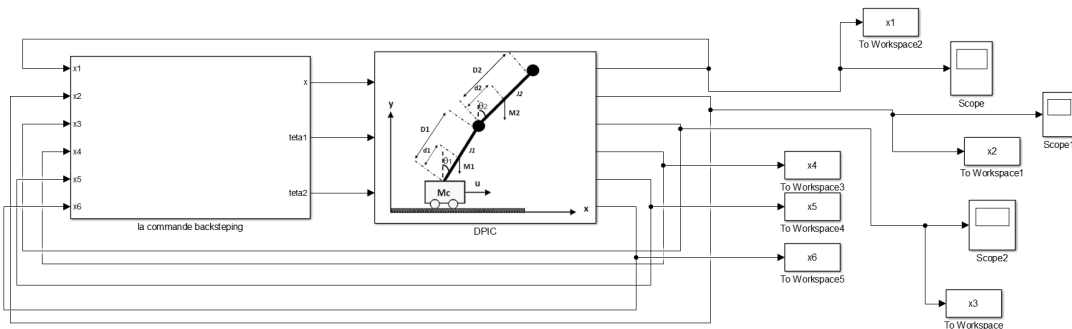


Figure 3.4: Schéma de commande par Backstepping sous Simulink.

Nous avons pris les conditions initiales $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$ et le gain $k_1 = 6.5$.

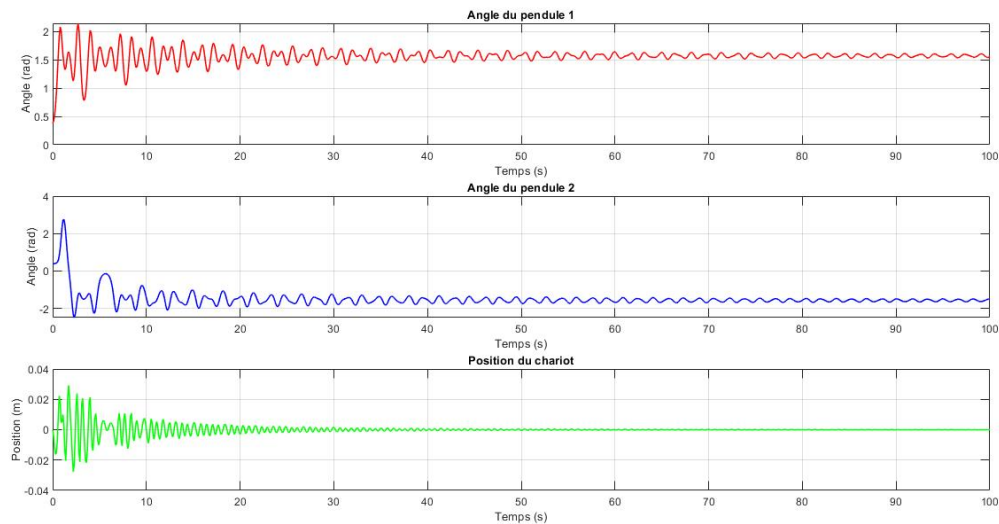


Figure 3.5: Position de *DPIC* par la commande Backstepping pour $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$.

Les deux figures (Fig.3.5 et Fig.3.6) présentent le comportement de *DPIC* en position et en vitesse. Nous constatons que la position du chariot avec la commande de backstepping converge vers l'origine mais pour les rotations des pendules converge vers des valeurs constantes (1.5 et 1.7) avec des oscillations entretenues pour garder l'équilibre du système.

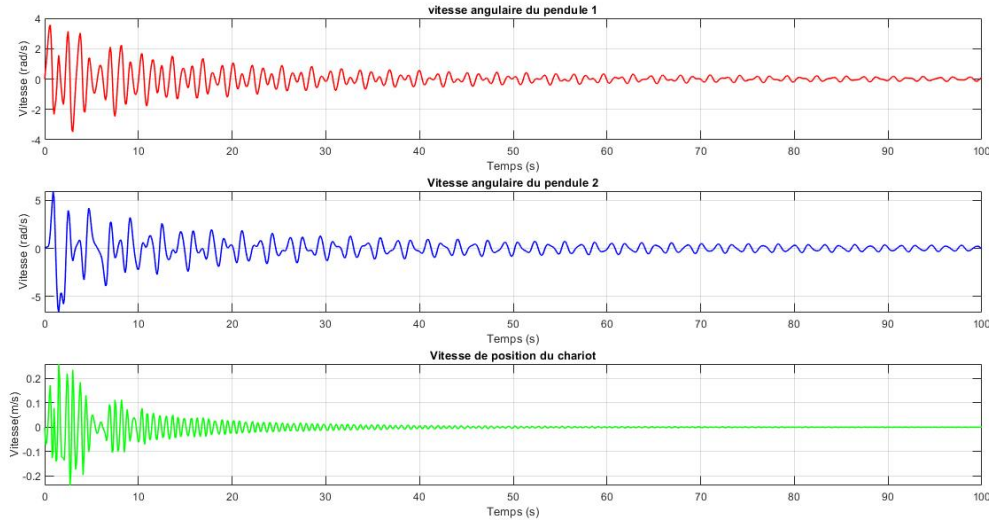


Figure 3.6: Vitesse de *DPIC* par la commande Backstepping pour $q_0 = (0, 22^\circ, 22^\circ, 0, 0, 0)$.

Ce qui signifie que la commande n'est pas assez précise. Avec la dynamiques couplées, la commande backstepping doit prendre en compte l'influence réciproque entre x , Θ_1 et Θ_2 . Bien que la commande backstepping utilisée dans notre étude n'ait pas donné les résultats escomptés, nous sommes conscients de ses limitations. Nous envisageons d'améliorer cette approche dans nos futurs travaux de recherche pour obtenir de meilleures performances.

Adaptation de la Commande pour des Pendules Actionnés

Dans cette section, nous examinons le cas où les pendules du système sont actionnés, c'est-à-dire qu'ils disposent d'une entrée de commande similaire à celle du chariot. Cette capacité supplémentaire ouvre des possibilités pour améliorer la stratégie de contrôle. En intégrant les actionneurs des pendules dans la commande, il est possible de mieux gérer les dynamiques non linéaires du système et de potentiellement améliorer les performances globales de la stabilisation et du suivi de trajectoire. Nous explorerons comment la commande backstepping peut être adaptée pour tirer parti de ces entrées supplémentaires et présenterons les résultats préliminaires de cette approche.

Nous avons appliqué les même étapes étudié dans la section 3.6 pour trouver les commandes de la translation du chariot et les rotations des deux pendules. Ainsi, nous avons introduit des gains proportionnels afin d'assurer la convergence vers l'origine des solutions, tout en minimisant le temps de convergence. À ce stade, nous avons proposé des commandes plus efficaces pour la stabilité et la convergence des solutions avec un temps optimisé du *DPIC*.

Les commandes U_x , U_{Θ_1} et U_{Θ_2} sont définies comme suit :

- Pour la translation du chariot:

$$U_x = \frac{-\mathbf{A}(4, :)x - \underline{k}_1 x_4}{\mathbf{B}(4, 1)} - \underline{k}_1 (x_1 - \gamma_1)^2 - \underline{k}_{p_1} (x_1 - \gamma_1) - \underline{k}_{p_2} x_2 - \underline{k}_{p_3} x_3 \quad (3.47)$$

- Pour la rotation du premier pendule:

$$U_{\theta_1} = \frac{-\mathbf{A}(5, :)x - \underline{k}_2 x_5}{\mathbf{B}(5, 1)} - \underline{k}_2 (x_2 - \gamma_2)^2 - \underline{k}_{p_2} x_2 \quad (3.48)$$

- Pour la rotation du deuxième pendule:

$$U_{\theta_2} = \frac{-\mathbf{A}(6, :)x - \underline{k}_3 x_6}{\mathbf{B}(6, 1)} - \underline{k}_3 (x_3 - \alpha_4)^2 - \underline{k}_{p_3} x_3 \quad (3.49)$$

En intégrant les actionneurs des pendules dans la commande, il est possible de mieux gérer les dynamiques non linéaires du système et de potentiellement améliorer les performances globales de la stabilisation et du suivi de trajectoire. Nous explorerons comment la commande backstepping peut être adaptée pour tirer parti de ces entrées supplémentaires et présenterons les résultats préliminaires de cette approche. Lors de la partie de simulation, nous avons déterminé les gains par la méthode d'essai-erreur :

- Pour les gains \underline{k} :

$$\begin{aligned} \underline{k}_1 &= 4.7 \\ \underline{k}_2 &= 0.4 \\ \underline{k}_3 &= 0.35 \end{aligned}$$

- Pour les constantes γ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.2775 \\ \gamma_2 &= 0 \\ \gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

- Pour les gains proportionnelle:

$$\begin{aligned} \underline{k}_{p_1} &= 1.3195 \\ \underline{k}_{p_2} &= 0.4 \\ \underline{k}_{p_3} &= 0.4 \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales identiques, voici les résultats obtenus :

Les figures (Fig.3.8 et Fig.3.7) démontrent que les solutions convergent vers l'origine en moins de 20 secondes, avec une réduction minimale des oscillations. Cette capacité de convergence rapide reflète l'efficacité de l'approche adoptée, renforçant ainsi la capacité du contrôleur à faire face aux imprécisions de modélisation et aux fluctuations des paramètres du système. En permettant une meilleure adaptation aux conditions initiales, cette méthode améliore significativement la précision et la stabilité du système.

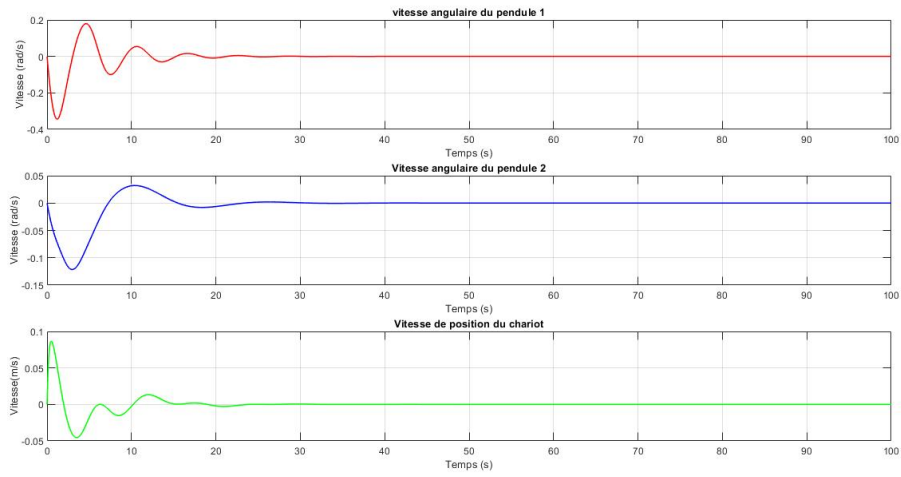


Figure 3.7: La régulation de vitesse par Backstepping.

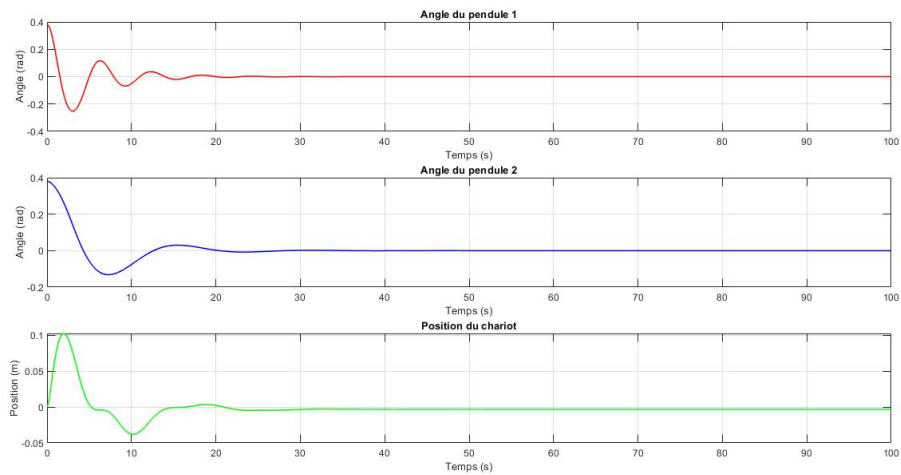


Figure 3.8: La régulation de position par Backstepping.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord examiné la commande par placement de pôles, une méthode linéaire efficace pour réguler le système *DPIC* linéarisé en optimisant le temps de réponse et la précision par la sélection stratégique des pôles. Ensuite, nous avons exploré le backstepping, une méthode non linéaire efficace pour gérer la complexité et l'instabilité du système. Cette approche structurée en sous-systèmes améliore la rapidité du temps de réponse, la précision et la stabilité globale du système. En résumé, la commande par placement de pôles offre une approche linéaire, tandis que le backstepping propose une stratégie non linéaire efficace et adaptative pour le contrôle des systèmes dynamiques complexes.

Conclusion générale

Ce mémoire a exploré en détail le *DPIC*, un système dynamique complexe qui constitue un défi significatif dans le domaine de l'automatique.

La phase initiale du travail a impliqué l'établissement des définitions nécessaires afin d'acquiescer une bonne compréhension des doubles pendules inversés, et leur application, en particulier dans le domaine médicale.

Par la suite, dans la deuxième phase, nous avons effectué une modélisation dynamique de notre système, et analysé leur comportement en boucle ouverte. Cette analyse a mis en évidence les défis de stabilisation de ce système instable et sa non linéarité.

La dernière phase de notre étude vise à élaborer des stratégies de commande qui répondent de manière essentielle aux objectifs spécifiques, notamment le mouvement du chariot tout en assurant la stabilité des deux pendules inversés, et en respectant des contraintes de performance, de rapidité et de précision.

Pour cette raison, nous avons mené une étude théorique sur les commandes classiques telles que le placement de pôles, qui demeure une option simple et efficace pour les systèmes linéarisés. D'autre part, la commande Backstepping utilisée dans notre étude n'a pas atteint les résultats attendus, nous prévoyons d'améliorer cette approche dans nos recherches futures pour obtenir de meilleures performances. Le choix de la technique de commande doit donc être guidé par la nature du système et les exigences spécifiques de l'application. Cependant, pour qu'une méthode de commande remplisse efficacement son rôle, il est crucial de sélectionner judicieusement les paramètres de la commande et de vérifier les conditions de convergence.

En conclusion, ce mémoire a mis en lumière les défis et les solutions possibles pour le contrôle du *DPIC*. Les résultats obtenus suggèrent que l'intégration de techniques de commande avancées pourraient encore améliorer la performance et la robustesse des systèmes non linéaires. Les perspectives futures incluent l'exploration de la commande adaptative et efficace, ainsi que l'application de ces méthodes à d'autres systèmes dynamiques complexes.

Bibliographie

- [1] M. Aissou, “Etude de la commande d’un double pendule inversé,” Master’s thesis, Université M’Hamed Bougara-Boumerdes, 2020.
- [2] W. Zhong and H. Rock, “Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart,” in *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA’01)(Cat. No. 01CH37204)*, pp. 896–901, IEEE, 2001.
- [3] K. H. Lundberg and J. K. Roberge, “Classical dual-inverted-pendulum control,” in *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, vol. 5, pp. 4399–4404, IEEE, 2003.
- [4] Hackaday, “Robotic biped walks on inverse kinematics,” 2020. Accessed: 2024-05-20.
- [5] J. Ma, *Application à l’analyse de l’équilibre et à la rééducation*. PhD thesis, UPMC PARIS UNIVERSITAS.
- [6] C. Luna and J. Jhonathan, *Étude du fauteuil roulant Volting: interaction, commande et assistance*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2023.
- [7] B. Allouche, *Modélisation et commande des robots: nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2016.
- [8] Robocath, “Robocath homepage,” 2024. Accessed: 2024-05-20.
- [9] Futura-Sciences, “Futura-sciences homepage,” 2024. Accessed: 2024-05-20.
- [10] B. Allouche, *Modélisation et commande des robots: nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2016.
- [11] plusadmin, “Plus teacher and student package: Mathematical modelling,” *PLUS MAGAZINE*, Sept. 2007. 1 September 2007.
- [12] E. J. Haug, *Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems*, vol. 1. Allyn and Bacon Boston, 1989.
- [13] S. Teber, “Element de mécanique analytique,” master de science et technologie, Université Pierre et Marie Curie, 2019.
- [14] A. Djoudi and T. Benabdellah, “Synthèse et application des lois de commande non linéaires sur un pendule inverse,” Master’s thesis, Ecole Nationale Polytechnique, 2007.

- [15] S. Djenoune, “Note de cours de master en automatique.” Université de Jijel, 2014.
- [16] M. DERRADJI and A. MEKIDECHE, “Commande d’un double pendule inversé monté sur un chariot,” mémoire de master, 2022.
- [17] A. Benmiçia, O. Houas, and A. E. Zibra, *Commande par Backstepping adaptative d’un système de suspension active avec saturation à l’entrée*. PhD thesis, Université de Jijel, 2019.
- [18] K. Manel, “Master en mathématique,” Master’s thesis, Université Mohamed Khider, Biskra, 2020.

Résumé

Le double pendule inversé monté sur chariot (**DPIC**) est un système non linéaire complexe, souvent utilisé pour tester des techniques de contrôle avancées. Le **DPIC** est modélisé par des équations différentielles non linéaires, prenant en compte les forces gravitationnelles, de friction et les couples d'inertie. Deux techniques de contrôle sont étudiées : le placement de pôles et la commande backstepping. Le placement de pôles positionne les pôles du système linéarisé autour d'un point d'équilibre pour stabiliser le **DPIC**, tandis que le backstepping stabilise chaque sous-système non linéaire avant de les combiner. Les simulations montrent que le placement de pôles est efficace près de l'équilibre mais peut échouer face à de grandes perturbations, alors que le backstepping, plus complexe, offre une plus grande stabilité même loin de l'équilibre. Ces résultats montrent l'efficacité des deux méthodes pour stabiliser le **DPIC** et leur potentiel pour les systèmes robotiques et véhicules autonomes.

Mots Clés: Double pendule inversé (DPI), Backstepping, Placement de pôles, Lagrange, Lyapunov.

Abstract

The inverted double pendulum on a cart **DPIC** is a complex nonlinear system, often used to test advanced control techniques. The **DPIC** is modeled by nonlinear differential equations, taking into account gravitational, frictional forces, and inertia torques. Two control techniques are studied: pole placement and backstepping control. Pole placement positions the poles of the linearized system around an equilibrium point to stabilize the **DPIC**, while backstepping stabilizes each nonlinear subsystem before combining them. Simulations show that pole placement is effective near equilibrium but may fail in the face of large disturbances, whereas backstepping, though more complex, offers greater stability even far from equilibrium. These results demonstrate the effectiveness of both methods for stabilizing the **DPIC** and their potential for robotic systems and autonomous vehicles.

Key Words : Dual inverted pendulum, Pole placement, Backstepping, Lagrange, Lyapunov.

المخلص

يعد النواس المزدوج المقلوب المثبت على عربة (**DPIC**) نظام غير خطي معقد، يُستخدم غالبًا لاختبار تقنيات التحكم المتقدمة. يتم نمذجة الـ **DPIC** بواسطة معادلات تفاضلية غير خطية، تأخذ في الاعتبار القوى الجاذبية، الاحتكاك وعزوم القصور الذاتي. يتم دراسة تقنيتين للتحكم: وضع الأقطاب والتحكم بالـ **Backstepping**. تقوم تقنيّة وضع الأقطاب بتحديد مواقع الأقطاب للنظام الخطي حول نقطة توازن لتثبيت الـ **DPIC**، بينما يقوم التحكم بالـ **Backstepping** بتثبيت كل نظام فرعي غير خطي قبل دمجها. تُظهر المحاكاة أن وضع الأقطاب يكون فعالًا بالقرب من التوازن ولكنه قد يفشل في مواجهة الاضطرابات الكبيرة، بينما يوفر الـ **Backstepping**، رغم تعقيده، استقرارًا أكبر حتى بعيدًا عن التوازن. تُظهر هذه النتائج فعالية كلتا الطريقتين في تثبيت الـ **DPIC** وإمكانيتهما في الأنظمة الروبوتية والمركبات الذاتية القيادة.

الكلمات المفتاحية : النواس المزدوج المقلوب، تقنيّة باكستيبينغ، تحديد أماكن الأقطاب، لاغرانج، ليابونوف.