

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Automatique

**Spécialité** : Automatique et Informatique Industrielle

**Par** : Benallal Asma et Belhouari Zouleykha Aya

**Sujet** :

Analyse et commande d'un double pendule inversé sur chariot

Soutenu publiquement, le /06/2025, devant le jury composé de :

Mr. Bensalah Choukri    MCA    Université de Tlemcen (Président)  
Mme. Borsali Salima    MCA    Université de Tlemcen (Examinatrice)  
Mme. SAIDI Farah    MCB    Université de Tlemcen (Encadrante)

Année universitaire : 2024 /2025

# Remerciements

Tout d'abord, nous exprimons notre gratitude envers Dieu, Le Tout-Puissant, pour nous avoir donné la santé, la patience et la force requises pour réaliser ce travail avec succès.

Nous souhaitons témoigner notre sincère reconnaissance à notre encadrante, Madame **SAIDI Farah**, pour son aide inestimable, sa compréhension, ses recommandations avisées et sa présence continue. Son aide a été cruciale pour l'achèvement de notre travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux membres du jury et aux examinateurs pour avoir accepté d'évaluer ce travail, mais aussi pour tout ce que vous offrez à vos étudiants, soyez certains de notre profond respect.

Nous désirons également exprimer notre gratitude envers tous nos enseignants de la filière Automatique qui ont été des guides précieux durant notre parcours académique, nous témoignons notre respect le plus sincère et notre reconnaissance la plus profonde.

Enfin, nous exprimons notre gratitude à toutes les personnes qui, de manière proche ou éloignée, ont aidé à la réussite de ce projet.

## Dédicaces

Je dédie ce mémoire tout particulièrement a mes chers parents, pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices, leurs prières et leur soutien indéfectible tout au long de mon parcours. Ce travail est avant tout le fruit de leur confiance et de leurs encouragements.

À mon frère et à mes sœurs, pour leur présence constante , leurs encouragements, et pour avoir toujours cru en moi.

À mes amis, pour leur soutien moral, leur écoute et les moments de partage qui ont allégé les périodes difficiles.

Et à toute ma famille, proche ou lointaine, qui m'a toujours entouré de bienveillance, de fierté et de motivation.

Merci à vous tous du fond du cœur.

**Asma**

Je dédie ce mémoire à ma précieuse famille :

À mes chers parents pour votre amour inconditionnel, vos encouragements constants et vos innombrables sacrifices. Vous êtes ma plus grande source d'inspiration et de force.

À mes grands-parents pour votre tendresse, vos prières et votre sagesse. Votre présence bienveillante a toujours été un pilier dans ma vie.

À mon mari pour ta patience, ton soutien, ton appui inconditionnel et ta présence rassurante dans chaque étape de ce parcours. Merci d'avoir été à mes côtés dans les moments difficiles comme dans les réussites .

À ma sœur pour ton soutien et ta confiance. Merci d'avoir toujours cru en moi.

À mes amies pour votre amitié loyale , vos encouragements et tous les moments partagés qui ont allégé ce chemin parfois difficile.

**Zouleykha Aya**

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction :	9
1.2 Les différents types de pendules inversés :	9
1.2.1 Le pendule inversé simple :	9
1.2.2 Pendule inversé sur deux roues :	11
1.2.3 Le double pendule inversé :	11
1.3 Intérêt de l'étude d'un double pendule inversé sur chariot :	12
1.3.1 La médecine :	12
1.3.2 La robotique :	13
1.4 Conclusion :	14
<b>2 Modélisation du DPIC</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction :	15
2.2 Représentation Du Système :	15
2.2.1 Notions De Degré De Liberté :	16
2.3 Méthodes de modélisation du système :	17
2.3.1 Principe de conservation d'énergie :	17
2.3.2 Formalisme d'Euler Lagrange :	18
2.4 Comportement de DPIC en boucle ouverte :	22
2.5 Conclusion :	22
<b>3 Commandes linéaires d'un DPIC</b>	<b>23</b>
3.1 Introduction :	23
3.2 La linéarisation du système :	23
3.3 La représentation d'état du système :	24
3.4 La commande par placement de pôles :	26
3.4.1 Principe de la commande :	27
3.4.2 Application du placement de pôle sur DPIC :	28
3.5 La commande par PID :	31
3.5.1 Principe de la commande :	31
3.5.2 Application du PID sur DPIC :	32
3.6 Comparaison entre le PID et le placement de pôle :	35
3.7 Conclusion :	36

<b>4</b>	<b>Commande non linéaire d'un DPIC :</b>	<b>37</b>
4.1	Introduction : . . . . .	37
4.2	Commande par mode glissant (SMC) : . . . . .	37
4.2.1	Principe de la commande : . . . . .	38
4.3	Application du SMC sur le DPIC : . . . . .	41
4.4	La commande adaptative : . . . . .	43
4.5	Conclusion : . . . . .	47
	<b>Conclusion générale</b>	<b>48</b>

# Liste des figures

1.1	chariot-pendule inversé . . . . .	9
1.2	Pendule inversé sur table oscillante . . . . .	10
1.3	Pendule inversé rotatif [4] . . . . .	10
1.4	Pendule inversé sur deux roues . . . . .	11
1.5	Double pendule inversé en cascade . . . . .	11
1.6	Double pendule inversé en parallèle [6] . . . . .	12
1.7	Le corps de l'être humain vu comme un double pendule [8] . . . . .	13
1.8	Le robot Bipède . . . . .	13
2.1	Le schéma du double pendule inversé sur chariot [11] . . . . .	16
3.1	Principe du placement de pôle [16] . . . . .	27
3.2	Schéma de commande par Placements de pôles sous Simulink . . . . .	29
3.3	Position d'un double pendule inversé sur chariot par placement de pôle . . . . .	29
3.4	Vitesse d'un double pendule inversé sur chariot par placement de pôle . . . . .	30
3.5	Réponse de la commande U sous régulation par placement de pôles . . . . .	31
3.6	Schéma de commande par PID sous Simulink . . . . .	33
3.7	Position d'un double pendule inversé sur chariot par contrôle PID . . . . .	33
3.8	Vitesse d'un double pendule inversé sur chariot par contrôle PID . . . . .	34
3.9	Réponse de la commande U sous régulation PID . . . . .	35
4.1	Le phénomène de glissement [18] . . . . .	38
4.2	Position du chariot pour un premier essai . . . . .	42
4.3	Position du chariot pour un deuxième essai . . . . .	42
4.4	Position d'un <b>DPIC</b> par la commande mode glissant adaptatif pour $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$ . . . . .	44
4.5	Vitesse d'un <b>DPIC</b> par la commande mode glissant adaptatif pour $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$ . . . . .	44
4.6	Position d'un <b>DPIC</b> par la commande mode glissant adaptatif pour $\eta_0 = (0, 0, 20^\circ, 0, 20^\circ, 0)$ . . . . .	45
4.7	Vitesse d'un <b>DPIC</b> par la commande mode glissant adaptatif pour $\eta_0 = (0, 0, 20^\circ, 0, 20^\circ, 0)$ . . . . .	46
4.8	Réponse de la commande U sous régulation par mode glissant adaptatif . . . . .	46

## Liste des tableaux

2.1	Notations et unités des constantes du système <b>DPIC</b> . . . . .	16
3.1	Paramètres du double pendule inversé sur chariot . . . . .	26

# Introduction générale

Dans le domaine de l'automatique, reconnue pour l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques, l'exploration des systèmes non linéaires représente un domaine de recherche et d'études extrêmement riche. Cela s'explique par le fait que le monde réel est uniquement peuplé d'objets non linéaires.

Les systèmes à pendule inversé jouent un rôle crucial dans le champ de l'automatique et de la robotique, en raison de leur dynamique complexe et de leur instabilité naturelle. Parmi ces systèmes, le **DPIC** constitue un défi considérable, tant en ce qui concerne la modélisation que le contrôle.

Un double pendule inversé sur chariot est un système sous-actionné, puisqu'il possède un nombre de sorties supérieur à l'entrée commandée. La maîtrise des systèmes sous-actionnés représente actuellement un domaine de recherche dynamique en raison de leurs nombreuses applications en plusieurs domaines .

L'instabilité du **DPIC** rend très difficile son maintien dans la position verticale des pendules et garder le chariot à sa position initial , car ce dernier tombe invariablement à moins qu'une force de contrôle adéquate ne soit appliquée sur le chariot .

À travers cette recherche, notre objectif est de modéliser et contrôler le **DPIC**, participer à l'évolution des méthodes de contrôle pour le système complexe linéaire et non linéaire, en offrant des solutions performantes pour leur stabilisation et leur optimisation.

Dans ce mémoire nous avons abordé quatre chapitres résumés de la façon suivante :

Dans le premier chapitre , Nous examinerons les différents types de pendules, en donnant leurs définitions, et nous présenterons le chariot à double pendule inversé ainsi que leur utilité dans plusieurs domaines .

Dans le deuxième chapitre , nous aborderons la représentation du système analysé ainsi qu'une modélisation mathématique basée sur les lois des énergies cinétique et potentielle plus le formalisme d'Euler-Lagrange sera mise en œuvre.

Dans le troisième chapitre , nous débiterons par la linéarisation du modèle non linéaire autour du point d'équilibre stable. deux types de commandes linéaires seront appliquées la première commande est la commande par placement de pôles tandis que la seconde sera basée sur le contrôle par PID .

Dans le dernier chapitre , nous établirons une loi de contrôle destinée à stabiliser le système non linéaire par une commande robuste de mode glissant (SMC).

Enfin, une conclusion générale sera établie avec une discussion sur les résultats obtenus.

# Chapitre 1

## État de l'art

### 1.1 Introduction :

Le pendule inversé est un exemple marquant dans le domaine de l'automatique et de la robotique. Ce dispositif offre une plateforme d'essai de qualité pour la théorie du contrôle, la modélisation non linéaire et les expérimentations en laboratoire.

### 1.2 Les différents types de pendules inversés :

Il y a de nombreux aspects et variations du pendule inversé, car il représente un système instable à dynamique non linéaire, ce qui le rend très captivant pour la communauté des experts en automatisation.

#### 1.2.1 Le pendule inversé simple :

Le pendule inversé simple est un système mécanique sous actionné et il existe différents types incluant :

- Chariot-pendule inversé :

Ce modèle se compose d'un chariot portant un pendule mobile. Ce chariot a la capacité de se déplacer de manière horizontale et libre sur une voie de guidage grâce à un moteur d'entraînement, comme le montre la figure (1.1) [1].

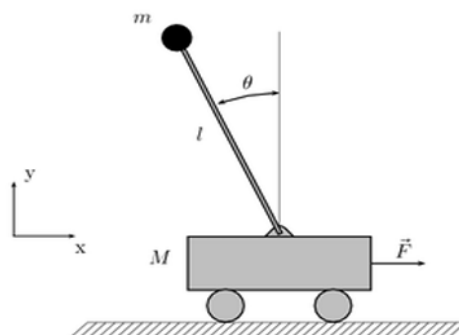


FIGURE 1.1 – chariot-pendule inversé

- **Pendule inversé sur table oscillante :**

Un pendule de masse  $m$  est fixé à l'extrémité d'une tige rigide de longueur  $l$  (de masse négligeable) . L'autre extrémité de la tige est solidement fixée à une table vibrante orientée verticalement, dont le mouvement est de nature sinusoïdale et se caractérise par la forme :  $A\cos(\omega t)$  [2].

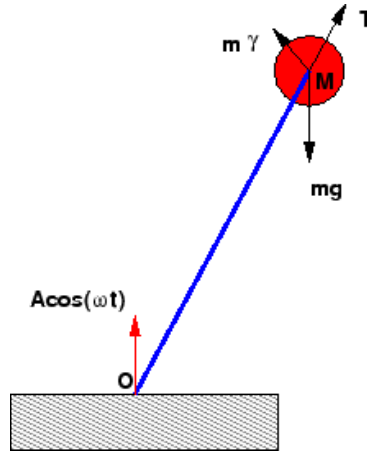


FIGURE 1.2 – Pendule inversé sur table oscillante

- **Pendule inversé rotatif :**

Ce pendule est constitué d'un bras en rotation dans le plan horizontal, à son extrémité vient s'ajouter un pendule inversé monté en équilibre instable. La rotation continue du bras garantit la stabilisation et le maintien du pendule autour de la verticale au niveau du point d'équilibre instable [3].

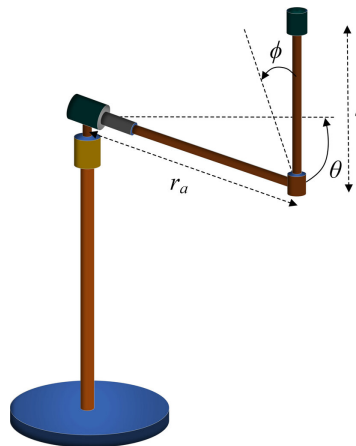


FIGURE 1.3 – Pendule inversé rotatif [4]



- **En parallèle :**

Dans cette situation, les deux tiges évoluent de manière indépendante, comme l'illustre la figure (1.6) Le mouvement du chariot provoque des déviations par rapport à la verticale d'un angle de  $\theta_{p_1}$  et  $\theta_{p_2}$  pour la première et la deuxième tige, respectivement [5].

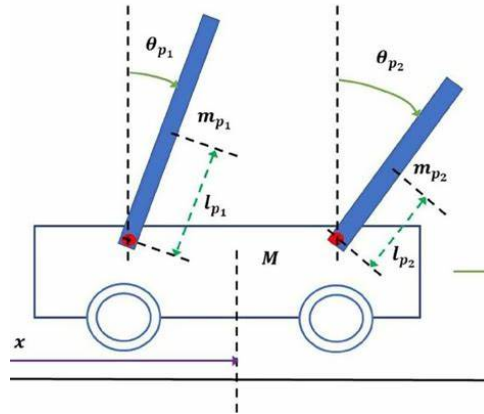


FIGURE 1.6 – Double pendule inversé en parallèle [6]

### 1.3 Intérêt de l'étude d'un double pendule inversé sur chariot :

L'analyse des systèmes à double pendule inversé suscite un vif intérêt de la part des chercheurs et des ingénieurs, dans la mesure où celui-ci présente des similitudes avec de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques [7] .

L'étude des double pendules inversés revêt une importance considérable dans divers domaines, en particulier :

#### 1.3.1 La médecine :

L'être humain est en réalité un pendule inversé double dont les deux axes de rotation sont les chevilles et les hanches, comme le démontre la figure. Pour maintenir une position debout, les articulations fonctionnent en continu, et l'analyse de ce modèle revêt une importance capitale pour la constitution de prothèses [8].

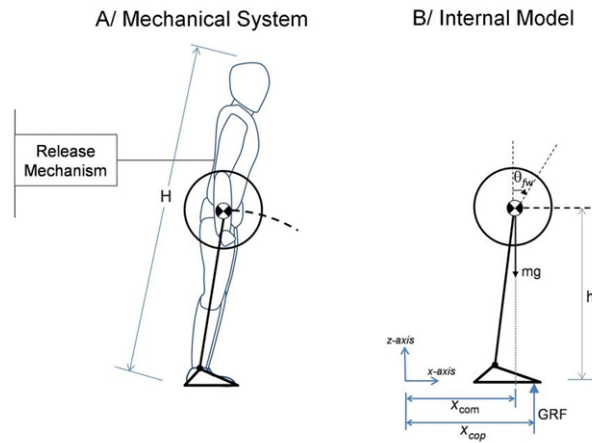


FIGURE 1.7 – Le corps de l'être humain vu comme un double pendule [8]

### 1.3.2 La robotique :

Dans la même logique, un robot est considéré comme un pendule inversé, et ainsi pour garder le robot en équilibre, il suffit de stabiliser le pendule inversé associé à sa position verticale élevée durant son mouvement et face à d'autres perturbations. Nous mentionnons à cette occasion l'exemple d'un robot qui est considéré comme un double pendule inversé [9].

- **Le robot Bipède :**

Peut être représenté par deux doubles pendules inversés disposés en série, où les deux pendules sont reliés par une tige comportant deux articulations [9].

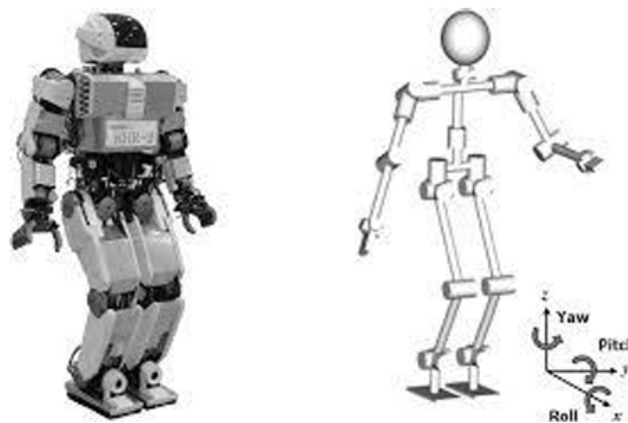


FIGURE 1.8 – Le robot Bipède

## 1.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté le **DPIC** et décrit brièvement les divers types de pendule inversé ainsi que leur signification dans le monde contemporain. Par la suite, nous avons mis en avant l'impact favorable de ce système dans plusieurs domaines.

## Chapitre 2

### Modélisation du DPIC

#### 2.1 Introduction :

La création d'une commande efficace exige d'abord la mise en place d'un modèle mathématique précis du système à réguler. Cette phase initiale de modélisation est cruciale pour permettre une analyse approfondie via simulation.

La modélisation implique de saisir les caractéristiques essentielles du système en formalisant, à l'aide d'équations mathématiques, les relations entre ses diverses variables. L'ensemble de ces relations constitue ainsi le modèle représentatif du système.

Dans le cadre de notre recherche sur le double pendule inversé monté sur un chariot, nous nous basons sur les équations du mouvement et le formalisme d'Euler-Lagrange pour élaborer le modèle dynamique du système.

Cette méthode de modélisation permet de décrire de façon rigoureuse les interactions mécaniques entre les différents corps en mouvement, tout en respectant les principes fondamentaux de la dynamique [10].

#### 2.2 Représentation Du Système :

Le système examiné illustré par la figure (2.1) est composé d'un chariot mobile se déplaçant horizontalement, doté de deux pendules rigides liés en série, maintenus en position verticale instable (équilibre inversé). Ce système représente un cas d'étude classique en automatique en raison de sa dynamique non linéaire complexe et de son important couplage entre les variables.

Le système possède trois degrés de liberté, englobant le mouvement dans le plan horizontal ( $\mathbf{x}$ ), l'angle ( $\theta_1$ ) du premier pendule, et l'angle ( $\theta_2$ ) du second pendule.

Les masses des pendules sont désignées par ( $m_{p1}$ ) pour le premier pendule et ( $m_{p2}$ ) pour le second, tandis que la masse du chariot est indiquée par ( $m_{ch}$ ).

La longueur du premier pendule inversé est identifiée par ( $L_{p1}$ ), et celle du second pendule est mentionnée par ( $L_{p2}$ ).

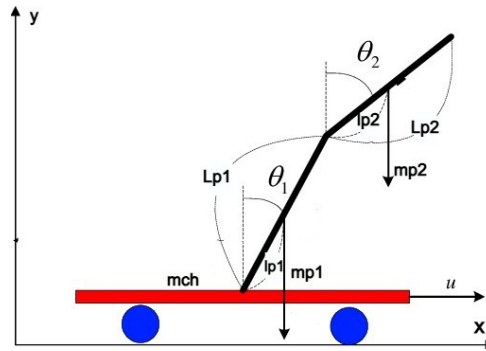


FIGURE 2.1 – Le schéma du double pendule inversé sur chariot [11]

### 2.2.1 Notions De Degré De Liberté :

Le degré de liberté (ddl) d'un système mécanique constitue une évaluation du nombre de mouvements indépendants qu'un système est capable d'exécuter. Autrement dit, il indique le nombre minimal de coordonnées nécessaires pour décrire entièrement l'état du système.

Pour un système constitué de (  $n$  ) coordonnées généralisées et de (  $r$  ) contraintes, le degré de liberté peut être déterminé par la formule :  $\text{ddl} = n - r$  [12]

où :

( $n$ ) représente le nombre global de coordonnées généralisées.

( $r$ ) correspond au nombre de contraintes appliquées au système.

Le nombre de degrés de liberté ainsi que les coordonnées généralisées du système sont déterminés respectivement :

$$\text{ddl} = 7 - 4 = 3$$

$$\eta(t) = [x(t), \theta_1(t), \theta_2(t)]$$

Le tableau ci-dessous récapitule les notations et les unités des constantes associées au système **DPIC**.

Paramètres	Unités	Description
$m_{ch}$	[Kg]	La masse du chariot
$m_{p1}, m_{p2}$	[Kg]	La masse des pendules 1 et 2
$L_{p1}, L_{p2}$	[m]	La longueur des pendules 1 et 2
$l_{p1}, l_{p2}$	[m]	Distance pivot-centre de gravité
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	Accélération gravitationnelle
$x$	[m]	La position du chariot
$\theta_1, \theta_2$	[rad]	L'angle des pendules 1 et 2

TABLE 2.1 – Notations et unités des constantes du système **DPIC**

## 2.3 Méthodes de modélisation du système :

### 2.3.1 Principe de conservation d'énergie :

L'énergie d'un système isolé ne peut ni être créée ni être détruite : elle se conserve. Elle peut se transformer en d'autres formes au sein du système, cependant sa valeur totale reste constante [13].

La loi du principe de la conservation d'énergie est donné par :

$$\mathbf{E}_{mec} = \mathbf{E}_{cin} + \mathbf{E}_{pot} = \mathbf{constante}$$

Avec :

$E_{mec}$  : Énergie mécanique du système

$E_{cin}$  : Énergie cinétique du système donné par :

$$\mathbf{E}_{cin} = \frac{1}{2}m\dot{p}^2$$

Où :

$\dot{p}$  : est la vitesse du chariot .

$E_{pot}$  : Énergie potentiel du système donné par :

$$\mathbf{E}_{pot} = mgh$$

Calculs de l'énergie cinétique :

- Calculs positions et vitesses du système :

#### 1. Positions :

$$\begin{aligned} p_0 &= x\vec{i} + 0\vec{j} \\ p_1 &= (x + l_{p_1}\sin\theta_1)\vec{i} + (l_{p_1}\cos\theta_1)\vec{j} \\ p_2 &= (x + L_{p_1}\sin\theta_1 + l_{p_2}\sin\theta_2)\vec{i} + (L_{p_1}\cos\theta_1 + l_{p_2}\cos\theta_2)\vec{j} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$\vec{i}, \vec{j}$  : Vecteurs unitaires du repère x et y .

#### 2. Vitesses :

Les équations de vitesse sont obtenues en prenant les dérivées des équations précédentes ( équations de positions ) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= v_0 = \dot{x}\vec{i} + 0\vec{j} \\ \dot{p}_1 &= v_1 = (\dot{x} + l_{p_1}\dot{\theta}_1\cos\theta_1)\vec{i} - (l_{p_1}\dot{\theta}_1\sin\theta_1)\vec{j} \\ \dot{p}_2 &= v_2 = (\dot{x} + L_{p_1}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_{p_2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\vec{i} - (L_{p_1}\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_{p_2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\vec{j} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E_{cin} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (2.3)$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m_{c_h}v_0^2 + \frac{1}{2}m_{p_1}v_1^2 + \frac{1}{2}m_{p_2}v_2^2 \quad (2.4)$$

D'où :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}m_{c_h}\dot{x}^2 \\ C_2 &= \frac{1}{2}m_{p_1}[(\dot{x} + l_{p_1}\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (l_{p_1}\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2] \\ C_3 &= \frac{1}{2}m_{p_2}[(\dot{x} + L_{p_1}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_{p_2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (L_{p_1}\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_{p_2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2] \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'énergie cinétique total du système vaut :

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}(m_{c_h} + m_{p_1} + m_{p_2})\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_{p_1}l_{p_1}^2 + m_{p_2}L_{p_1}^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_{p_2}l_{p_2}^2)\dot{\theta}_2^2 \\ &+ (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + m_{p_2}l_{p_2}\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + m_{p_2}L_{p_1}l_{p_2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Calculs de l'énergie potentiel :**

$$E_{pot} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (2.7)$$

$$E_{pot} = m_{c_h}gh + m_{p_1}gh_1 + m_{p_2}gh_2 \quad (2.8)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \quad (\text{aucun déplacement au long de l'axe verticale}) \\ P_2 &= m_{p_1}gl_{p_1}\cos\theta_1 \\ P_3 &= m_{p_2}g(L_{p_1}\cos\theta_1 + l_{p_2}\cos\theta_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'énergie potentiel total du système vaut :

$$E_{pot} = (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})g\cos\theta_1 + m_{p_2}l_{p_2}g\cos\theta_2 \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Formalisme d'Euler Lagrange :

Le formalisme de Lagrange constitue une méthode efficace en mécanique analytique qui permet de représenter le mouvement d'un système dynamique en se basant sur une fonction désignée sous le nom de lagrangien.

Ce formalisme repose sur les énergies du système, en particulier l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, plutôt que sur les forces comme c'est le cas dans la mécanique newtonienne classique.

### Le Lagrangien :

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  est défini comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système d'après les équations (2.6) et (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_{cin} - E_{pot} \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(m_{ch} + m_{p_1} + m_{p_2})\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_{p_1}l_{p_1}^2 + m_{p_2}L_{p_1}^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_{p_2}l_{p_2}^2)\dot{\theta}_2^2 \\ &+ (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + m_{p_2}l_{p_2}\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + m_{p_2}L_{p_1}l_{p_2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &- (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})g\cos\theta_1 + m_{p_2}l_{p_2}g\cos\theta_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

### Les coordonnées généralisées du système :

On désigne par coordonnées généralisées tout ensemble de (i) variables indépendantes, notées  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i$ , qui permettent de représenter les positions des (N) corps solides formant le système. La nature et la dimension de ces coordonnées n'importent pas. Les vitesses généralisées  $\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dots, \dot{\eta}_i$  sont les dérivées temporelles des coordonnées généralisées.

Dans notre système on a 3ddl donc les coordonnées généralisées sont données par :

$$\eta(t) = [x(t), \theta_1(t), \theta_2(t)] \quad (2.12)$$

### Équations de Lagrange :

Pour un système décrit par des coordonnées généralisées  $\eta_i$  (avec  $i = 1, \dots, n$ ) et leurs vitesses généralisées  $\dot{\eta}_i$ , on définit le lagrangien  $\mathcal{L}$  comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

Les équations de Lagrange pour chaque  $\eta_i$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} = 0 \quad (2.13)$$

Ces équations représentent des équations différentielles du deuxième ordre qui établissent l'évolution au cours du temps des coordonnées généralisées du système.

- Dans le cas de forces non conservatives, une extension des équations de Lagrange

intègre les forces généralisées  $F_i$  du système :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} = F_i \quad (2.14)$$

### La détermination des équations de mouvement du système :

Les équations du mouvement du système peuvent être obtenues à partir de :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = U - F_1 \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -F_2 \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -F_3 \quad (2.17)$$

D'où :

- $F_1$ : le coefficient de la force de frottement entre le chariot et le plan horizontal.
- $F_2$  : la constante d'amortissement du premier pendule.
- $F_3$  : la constante d'amortissement du deuxième pendule.

Les forces de frottements sont représentées comme étant en proportion avec les vitesses de chaque coordonnée, selon une relation linéaire telle que :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 \dot{x} \\ F_2 &= f_2 \dot{\theta}_1 \\ F_3 &= f_3 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Avec :  $f_1, f_2, f_3$  sont les coefficients de frottements.

D'après les équations (2.15) , (2.16) et (2.17) on obtient :

- **L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $x(t)$  :**

$$\begin{aligned} (m_{c_h} + m_{p_1} + m_{p_2})\ddot{x} + (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 + m_{p_2}l_{p_2}\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\ - (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 - m_{p_2}l_{p_2}\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + f_1\dot{x} = U \end{aligned} \quad (2.18)$$

- **L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $\theta_1(t)$  :**

$$\begin{aligned} (m_{p_1}l_{p_1}^2 + m_{p_2}L_{p_1}^2)\ddot{\theta}_1 + (m_{p_1}l_{p_1} + m_{p_2}L_{p_1})\ddot{x} \cos\theta_1 + m_{p_2}L_{p_1}l_{p_2}\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_{p_2}L_{p_1}l_{p_2}\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_{p_1}l_{p_1}^2 + m_{p_2}L_{p_1}^2)g \sin\theta_1 + f_2\dot{\theta}_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

• L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $\theta_2(t)$  :

$$m_{p_2} l_{p_2} \ddot{x} \cos \theta_2 + (m_{p_2} l_{p_2}^2) \ddot{\theta}_2 + m_{p_2} L_{p_1} l_{p_2} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_{p_2} L_{p_1} l_{p_2} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_{p_2} l_{p_2} g \sin \theta_2 + f_3 \dot{\theta}_2 = 0 \quad (2.20)$$

Les équations sont un système couplé de trois équations différentielles non linéaires du second ordre, qui peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$M_1(\eta) \ddot{\eta} + M_2(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} + M_3(\eta) = M_4 \mathbf{U} \quad (2.21)$$

D'où :

$\eta = (x, \theta_1, \theta_2)$  : vecteur des coordonnées généralisées.

$M_1(\eta)$  : matrice d'inertie dépendant des angles.

$M_2(\eta, \dot{\eta})$  : termes de Coriolis et forces centrifuges.

$M_3(\eta)$  : vecteur des forces gravitationnelles.

$M_4$  : vecteur des forces/couples externes.

$$M_1(\eta) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \cos \theta_1 & b_3 \cos \theta_2 \\ b_2 \cos \theta_1 & b_4 & b_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ b_3 \cos \theta_2 & b_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) & b_6 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$M_2(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} f_1 & -b_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & -b_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 & f_2 & b_5 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & -b_5 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) & f_3 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$M_3(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b_7 \sin \theta_1 \\ -b_8 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Avec :

$$b_1 = m_{c_h} + m_{p_1} + m_{p_2}$$

$$b_2 = m_{p_1} l_{p_1} + m_{p_2} L_{p_1}$$

$$b_3 = m_{p_2} l_{p_2}$$

$$b_4 = m_{p_1} l_{p_1}^2 + m_{p_2} L_{p_1}^2$$

$$b_5 = m_{p_2} L_{p_1} l_{p_2}$$

$$b_6 = m_{p_2} l_{p_2}^2$$

$$b_7 = g(m_{p_1} l_{p_1} + m_{p_2} L_{p_1})$$

$$b_8 = m_{p_2} l_{p_2} g$$

## 2.4 Comportement de **DPIC** en boucle ouverte :

Le **DPIC** constitue un système dynamique instable en boucle ouverte. En l'absence de commande, ses deux pendules oscillent librement autour de leurs points d'articulation, entraînant une divergence rapide de leurs angles par rapport à la position verticale d'équilibre. Cette instabilité résulte de la nature sous-actionnée et non linéaire du système : le chariot à lui seul ne peut pas stabiliser les pendules sans une intervention de contrôle adéquate. En boucle ouverte, le système n'a pas de mécanisme intrinsèque pour regagner la position d'équilibre, ce qui rend nécessaire l'emploi d'un contrôle robuste pour garantir la stabilité et la régulation des angles des pendules. Les simulations en boucle ouverte démontrent donc que le **DPIC** est instable et que ses variables d'état (position du chariot et angles des pendules) tendent vers des valeurs indésirables sans intervention de contrôle.

Dont le modèle non linéaire du système s'écrit sous cette forme :

$$\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = M_1(\eta)^{-1}(M_4\mathbf{U} - M_2(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - M_3(\eta)) \quad (2.26)$$

- la matrice  $M_1$  est symétrique et non singulière.

Donc le système non linéaire générale :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ (M_1(\eta)^{-1}(M_4\mathbf{U} - M_2(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - M_3(\eta))) \text{Ligne1} \\ \dot{\theta}_1 \\ (M_1(\eta)^{-1}(M_4\mathbf{U} - M_2(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - M_3(\eta))) \text{Ligne2} \\ \dot{\theta}_2 \\ (M_1(\eta)^{-1}(M_4\mathbf{U} - M_2(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - M_3(\eta))) \text{Ligne3} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

## 2.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une modélisation du **DPIC**. Après avoir expliqué la configuration physique du système et précisé ses degrés de liberté, nous avons formulé les équations du mouvement à l'aide du formalisme d'Euler-Lagrange. Cette méthode nous a permis d'élaborer un modèle dynamique complet, prenant en considération les différentes énergies du système ainsi que les principaux paramètres physiques. Les équations différentielles dérivées, bien que compliquées et fortement non linéaires, représentent une base fondamentale pour l'analyse du comportement du système et la conception des lois de commande. La représentation matricielle finale fournit une vision intégrée des interactions entre les diverses variables et souligne le couplage intrinsèque du système. La modélisation présentée dans ce chapitre constituera le socle pour le développement et la mise en œuvre des stratégies de commande, qui seront abordées dans le chapitre suivant.

## Chapitre 3

### Commandes linéaires d'un DPIC

#### 3.1 Introduction :

Le **DPIC** est un système non linéaire complexe, caractérisé par des comportements instables et sensibles aux conditions initiales. Avant d'appliquer des lois de commande efficaces, une première approche consiste à linéariser le système autour d'un point d'équilibre stable.

Il existe différentes commandes linéaires pour contrôler un système linéarisé, parmi celles-ci, les deux méthodes de correction que nous allons présenter dans ce chapitre, la première concerne le placement de pôles et la deuxième un correcteur PID.

#### 3.2 La linéarisation du système :

La linéarisation se réalise autour d'un point d'équilibre, habituellement à la position verticale instable où les angles des pendules sont presque nuls. Elle repose sur une approximation par la série de Taylor des équations non linéaires [14].

Notant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}\theta_1 &\approx \theta_2 \approx 0 \\ \sin(\theta_1) &\approx \theta_1 \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) \approx \theta_2 \\ \cos(\theta_1) &\approx 1 \quad \text{et} \quad \cos(\theta_2) \approx 1 \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &\approx 1\end{aligned}$$

Donc les matrices (2.22), (2.23) et (2.24) devient :

$$M_1(\eta) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_4 & b_5 \\ b_3 & b_5 & b_6 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$M_2(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$M_3(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b_7\theta_1 \\ -b_8\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.3 La représentation d'état du système :

Pour une évaluation plus détaillée, le modèle mathématique du système doit être converti en modèle d'espace d'état [16].

La forme générale de l'espace d'état d'un système est représentée ci-dessus :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BU} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{DU} \end{cases} \quad (3.4)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= x \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{x} = \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 &= \dot{x} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_2 = \ddot{x} \\ \mathbf{x}_3 &= \theta_1 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_3 = \dot{\theta}_1 = \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_4 &= \dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_4 = \ddot{\theta}_1 \\ \mathbf{x}_5 &= \theta_2 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_5 = \dot{\theta}_2 = \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{x}_6 &= \dot{\theta}_2 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_6 = \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donc les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$  devient :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \\ \mathbf{x}_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 \\ \dot{\mathbf{x}}_5 \\ \dot{\mathbf{x}}_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

On a :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{U})$$

Pour faire la linéarisation du système ( $x = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ ) on applique la jacobienne sur la matrice (2.27) :

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0, u=0} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=0, u=0} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{\theta}_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

On utilisant les valeurs de chaque paramètre du système indiquées dans le tableau suivant (3.1) :

Paramètre	notation	valeur
Masse du chariot	$m_{ch}$	0.3 [Kg]
Masse du pendule 1	$m_{p1}$	0.275 [Kg]
Masse du pendule 2	$m_{p2}$	0.275 [Kg]
Coefficient de frottement solide	$f_1$	0.3 [Kgs <sup>-1</sup> ]
Constante d'amortissement du pendule 1	$f_2$	0.1 [Kgm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
Constante d'amortissement du pendule 2	$f_3$	0.1 [Kgm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
La longueur des pendule 1 et 2	$L_{p1}, L_{p2}$	0.5 [m]
Distance pivot-centre de gravité	$l_{p1}, l_{p2}$	0.25 [m]
accélération gravitationnelle	$g$	9,81 [m/s <sup>2</sup> ]

TABLE 3.1 – Paramètres du double pendule inversé sur chariot

Les matrices du modèle d'état sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -26.9775 & 1.3333 & 8.9925 & -1.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 225.63 & -11.1515 & -114.45 & 16.9697 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -343.35 & 16.9697 & 232.17 & -34.4242 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.3 \\ 0 \\ -13.3 \\ 0 \\ -13.3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.4 La commande par placement de pôles :

La méthode de placement de pôles est une technique de régulation par retour d'état qui consiste à sélectionner une matrice de gains  $K_r$  de sorte à positionner les pôles du système en boucle fermée à des emplacements souhaités dans le plan complexe. Cela permet d'assurer la stabilité du système tout en modifiant ses performances dynamiques, telles que la rapidité, la précision et l'amortissement des oscillations. Parmi les bénéfices de la méthode de placement de pôles, on note sa capacité à permettre une conception de contrôleurs précise et efficace selon les normes de conception désirées, ainsi qu'à intégrer le cahier des charges du système [18].

### 3.4.1 Principe de la commande :

Le principe consiste à établir une commande de manière à ce que les pôles du système bouclé soient adéquatement situés dans le plan complexe et répondent aux exigences d'amortissement, de rapidité et de stabilité. La création du contrôleur exerce une influence majeure sur la stabilité du système. Un système instable, dont le pôle se trouve dans la partie droite du plan complexe, nécessite une approche de contrôle qui déplace tous les pôles vers la zone stable du plan complexe. Cela peut être stabilisé par l'utilisation d'une matrice de gain appropriée pour le retour d'état [16].

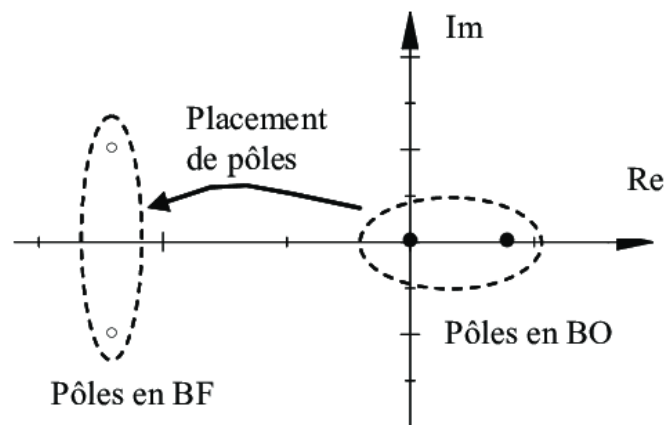


FIGURE 3.1 – Principe du placement de pôle [16]

Pour appliquer la commande par placement de pôle il faudrait suivre les deux étapes suivantes [16] :

- l'affectation des pôles à la position appropriée .
- l'identification de la matrice de retour d'état de gain  $K_r$  qui est capable de répondre aux critères souhaités.

La dynamique souhaitée en Boucle Fermée est définie par les pôles :

$$\Lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (3.16)$$

Dont le polynôme caractéristique est :

$$P_{BF}(\Lambda) = \prod_{i=1}^n (\Lambda - \lambda_i) = (\Lambda^n + a_{n-1}\Lambda^{n-1} + \dots + a_1\Lambda + a_0) \quad (3.17)$$

On applique au système une loi de commande par retour d'état ou placement de pôles :

$$U = -K_r X \quad (3.18)$$

Avec :

$$K_r = [k_{r1}, k_{r2}, k_{r3}, \dots, k_{rn}] \quad (3.19)$$

En remplaçant l'équation ci-dessus dans les équations de l'espace d'état (3.4). elle peut se formuler comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BK_r)X \\ Y = (C - DK_r)X \end{cases} \quad (3.20)$$

La résolution de cette équation se transforme alors en :

$$X = e^{A - BK_r} X(0) \quad (3.21)$$

La dynamique du système est donc déterminée par les valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée  $(A - BK_r)$ , et ces valeurs propres, également nommées pôles de régulation, sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\text{Det}(\Lambda I - (A - BK_r)) \quad (3.22)$$

- **Calcule de gain de retour d'état :**

Pour calculer la matrice de gain (3.19) en va utiliser le polynôme caractéristique suivant :

$$P_{A - BK_r}(\Lambda) = P_{BF}(\Lambda) = | \Lambda I - (A - BK_r) | \quad (3.23)$$

### 3.4.2 Application du placement de pôle sur **DPIC** :

il est essentiel de s'assurer que notre système est commandable en analysant la matrice de commandabilité :

$$\text{rang}(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}) = \text{rang complet} \quad (3.24)$$

Dans notre cas :

$$\text{rang}(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}) = 6 \quad (3.25)$$

Donc le système est complètement commandable .

- Les pôles du système instable sont les suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -51.7372 & -7.2702 & 8.8242 & 3.9590 & -0.3515 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

On a 2 pôles a partie réelle positive cela signifie l'instabilité du système .

- Pour stabiliser le système nous avons choisi les pôles suivants :

$$P_{désiré} = [-8.5 \quad -8 \quad -5 \quad -4.5 \quad -6 \quad -7] \quad (3.27)$$

- Le gain du retour d'état obtenu est :

$$K_r = [-0.6421 \quad -0.2864 \quad 16.8649 \quad -3.7844 \quad -7.3588 \quad 4.4241] \quad (3.28)$$

Nous avons utilisé la commande étudiée sur notre système sous MATLAB-SIMULINK voir la figure (3.2).

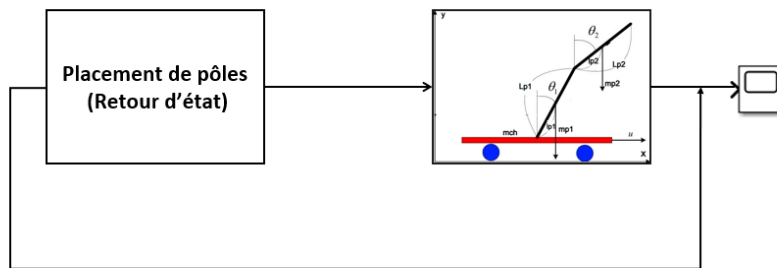


FIGURE 3.2 – Schéma de commande par Placements de pôles sous Simulink

On a considéré comme conditions initiales  $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$ , pour cela on obtiens les résultats suivants :

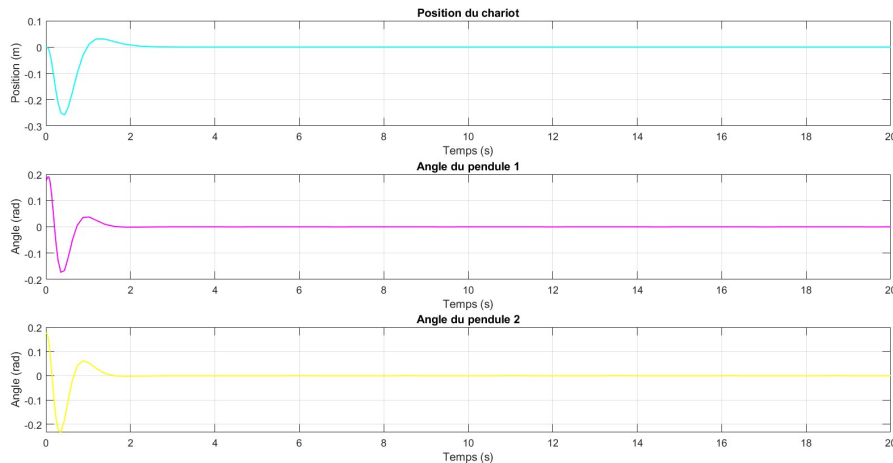


FIGURE 3.3 – Position d'un double pendule inversé sur chariot par placement de pôle

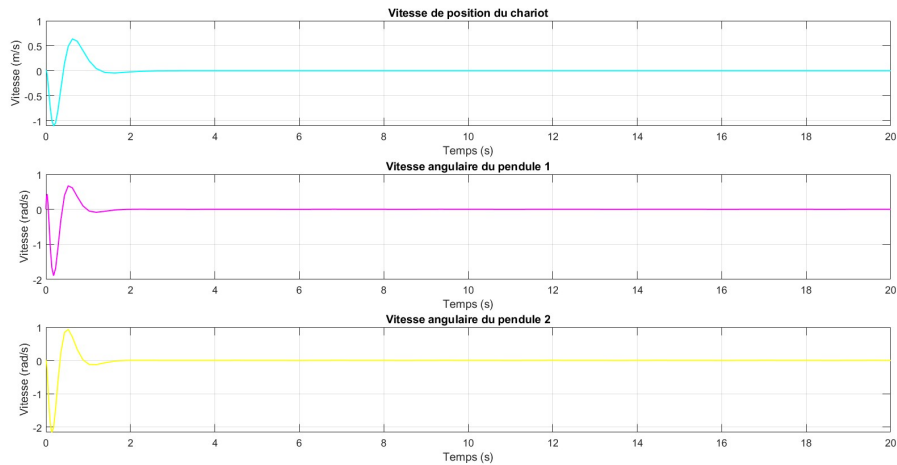


FIGURE 3.4 – Vitesse d'un double pendule inversé sur chariot par placement de pôle

### Interprétations :

Les deux figures ((3.3) et (3.4)) ci-dessus montrent respectivement l'évolution des états principaux du système (position du chariot et angles des pendules) ainsi que de leurs dérivées temporelles (vitesses linéaire et angulaires), à la suite d'une condition initiale.

Dans la première figure (3.3) , on observe que la position du chariot ainsi que les angles des deux pendules présentent des oscillations initiales avant de se stabiliser autour de zéro. Cette réaction témoigne d'un comportement stable, où le chariot revient à sa position d'équilibre, tandis que les deux pendules se redressent verticalement.

La seconde figure (3.4) montre les vitesses associées à ces états. Les vitesses linéaire et angulaires affichent des pics tout au début, en lien avec l'effet de la condition initiale, puis diminuent progressivement jusqu'à s'annuler. L'ensemble des vitesses tend également vers zéro, ce qui montre une stabilisation complète du système.

En conclusion, l'analyse conjointe des états et de leurs dérivées indique que le système est asymptotiquement stable, avec une bonne performance dynamique : système précis (erreur statique nulle en régime permanent), temps de réponse rapide , dépassement faible et absence de comportement divergent. Cela confirme l'efficacité du contrôleur mis en œuvre (placement de pôle) pour stabiliser un système naturellement instable tel qu'un chariot à double pendule inversé.

- La figure suivante présente la réponse de la commande  $U$  obtenue sous régulation par placement de pôles :

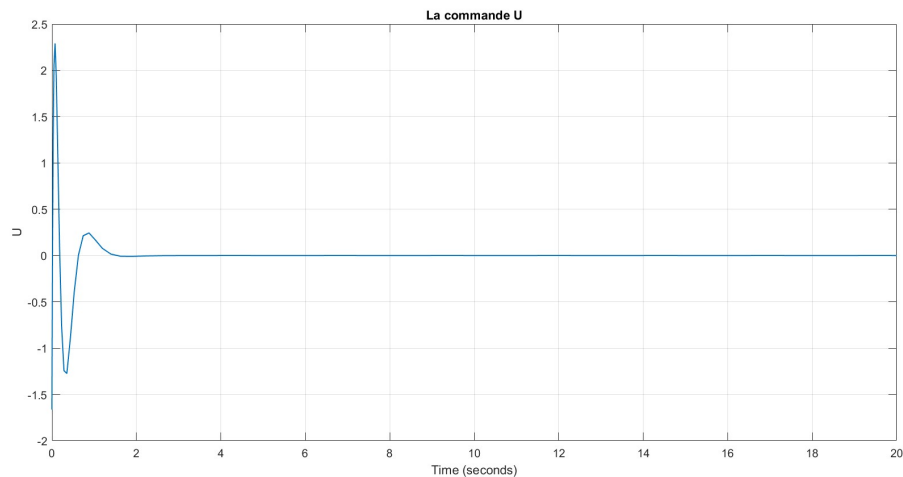


FIGURE 3.5 – Réponse de la commande U sous régulation par placement de pôles

### Interprétation :

La figure (3.5) représente l'évolution temporelle de la commande U sous régulation par placement de pôles, on observe que la commande converge rapidement vers zéro après quelques oscillations initiales. Cette convergence indique une bonne performance du régulateur et une régulation efficace.

## 3.5 La commande par PID :

Un régulateur PID (Proportionnel Intégral Dérivé) est un dispositif de contrôle qui permet de réaliser une régulation en boucle fermée d'un système automatisé. C'est le type de régulateur le plus couramment utilisé dans le secteur industriel et qui permet de gérer un grand nombre de procédés.

### 3.5.1 Principe de la commande :

Un contrôleur PID est une méthode de contrôle qui s'efforce de réguler une certaine variable de régulation (pression, température, etc.) selon une valeur de consigne fixée à l'avance (valeur de consigne PID). Pour y parvenir, le contrôleur nécessite des données concernant l'état actuel du système sous la forme d'une valeur mesurée (capteur de pression, capteur de température, etc.). Ce signal est désigné sous le nom de retour PID [15].

En général, cette méthode de contrôle comprend trois actions :

Action P : assurer la rapidité .

Action I : annuler l'erreur statique .

Action D : améliorer la stabilité .

Le réglage d'un PID est généralement assez compliqué, mais des méthodes pratiques de réglage permettent d'atteindre de bons résultats. Il est gouverné par la relation suivante [16] :

$$\Pi(t) = \kappa_p \bar{e}(t) + \kappa_i \int_0^t \bar{e}(\tau) d\tau + \kappa_d \frac{d\bar{e}(t)}{dt} \quad (3.29)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(p) = \kappa_p + \frac{\kappa_i}{p} + \kappa_d p = \kappa_p \left( 1 + T_d p + \frac{1}{T_i p} \right) \quad (3.30)$$

On a aussi la méthode essais-erreurs que nous avons utilisé , la méthode d'essais-erreurs pour régler un PID consiste à modifier de manière manuelle les gains proportionnel ( $\kappa_p$ ), intégral ( $\kappa_i$ ) et dérivé ( $\kappa_d$ ) jusqu'à atteindre la performance de régulation désirée .Il est inutile de vouloir ajuster les trois coefficients simultanément : il existe trop de combinaisons possibles et dénicher un triplet efficace serait un véritable exploit. Il est préférable d'avancer par étapes [17] :

- Tout d'abord, il est nécessaire d'installer un simple régulateur proportionnel (les coefficients  $\kappa_i$  et  $\kappa_d$  étant donc nuls). Par le biais de tests et d'erreurs, il faut ajuster le coefficient  $\kappa_p$  afin d'optimiser le temps de réponse du système. C'est-à-dire qu'il faut déterminer un  $\kappa_p$  qui permette au système de s'approcher rapidement de la consigne tout en veillant à maintenir la stabilité du système : il ne faut pas que le système réagisse rapidement tout en oscillant excessivement.

- Une fois ce coefficient ajusté, il est possible de passer au coefficient  $\kappa_i$ . Celui-ci va permettre d'éliminer l'erreur finale du système afin qu'il respecte scrupuleusement la consigne. Il faut donc régler  $\kappa_i$  pour obtenir une réponse précise en peu de temps tout en essayant de minimiser les oscillations causées par l'intégrateur.

- Enfin, il est envisageable de se concentrer sur le dernier coefficient  $\kappa_d$  qui permet d'accroître la stabilité du système. Son réglage contribue ainsi à réduire les oscillations.

### ***3.5.2 Application du PID sur DPIC :***

Pour appliquer cette commande il faut régler les trois paramètres des PID .

Nous avons utilisé la commande étudier sur notre système sous MATLAB-SIMULINK voir la figure (3.6).

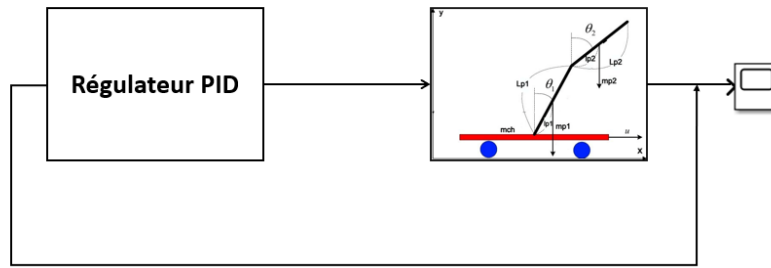


FIGURE 3.6 – Schéma de commande par PID sous Simulink

On a considéré comme conditions initiales  $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$  et pour les gains du contrôleur PID on a :

- Pour le chariot : on a utilisé que l'action P avec un gain de  $P = 0.79$ .
- Pour le premier pendule : on a utilisé les trois actions avec  $P = -67$ ,  $I = 0.2$  et  $D = -0.50$ .
- Pour le deuxième pendule : on a utilisé que l'action P avec un gain de  $P = 0.20$ .

Pour cela on obtiens les résultats suivantes :

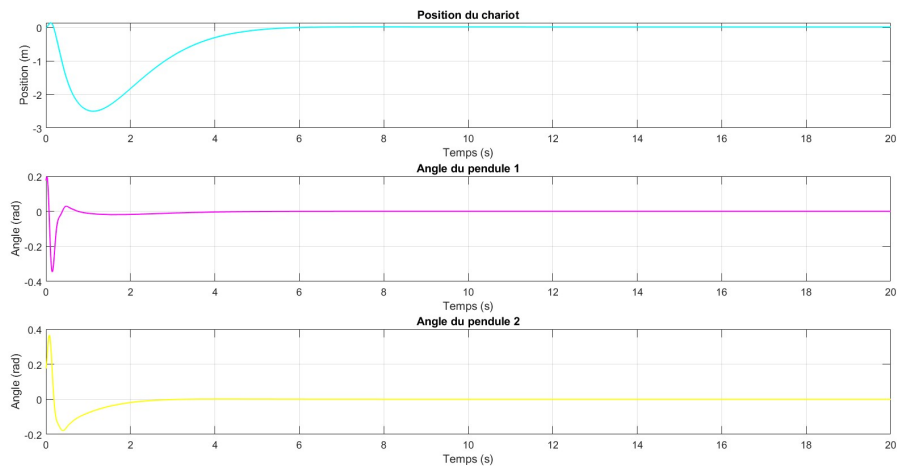


FIGURE 3.7 – Position d'un double pendule inversé sur chariot par contrôle PID

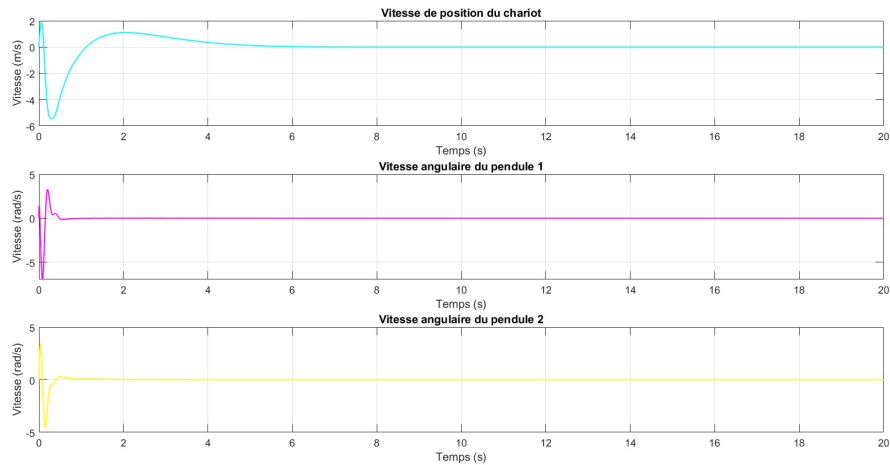


FIGURE 3.8 – Vitesse d'un double pendule inversé sur chariot par contrôle PID

### Interprétations :

Les deux figures ((3.7) et (3.8)) ci-dessus montrent de manière détaillée le comportement dynamique du système sous l'effet d'un contrôleur PID.

La première figure (3.7) illustre l'évolution des états principaux : la position du chariot ainsi que les angles des deux pendules. À la suite d'une condition initiale, tous les états connaissent des oscillations transitoires, mais tendent progressivement vers une position d'équilibre. Cela suggère que le chariot revient à sa position initial avec un temps de réponse un peu plus lent et un dépassement marqué . Tandis que les pendules retrouvent leur orientation verticale.

La seconde figure (3.8) présente les dérivées temporelles de ces états, notamment la vitesse du chariot et les vitesses angulaires des pendules. On observe des pics initiaux associés à la condition initiale , suivis d'une réduction progressive vers zéro avec un temps de réponse plus rapide que la figure précédente . Cela témoigne d'un bon amortissement des mouvements, sans oscillations persistantes.

En conclusion, l'analyse combinée des états et de leurs dérivées prouve que le contrôleur PID garantit une stabilisation efficace du système. Ce dernier affiche une réponse rapide, un comportement transitoire bien contrôlé et une convergence asymptotique vers l'équilibre, malgré la nature intrinsèquement instable du système.

- La figure suivante présente la réponse de la commande  $U$  obtenue sous régulation par PID :

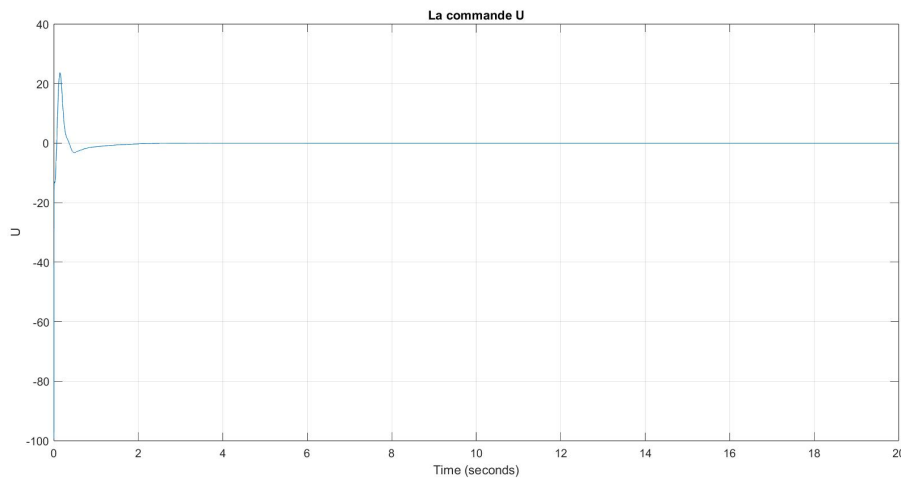


FIGURE 3.9 – Réponse de la commande  $U$  sous régulation PID

### Interprétation :

La figure (3.9) représente l'évolution temporelle de la commande  $U$  sous régulation par PID . On constate que la commande  $U$  converge rapidement vers zéro après une phase transitoire. Cette convergence traduit l'efficacité du régulateur PID à stabiliser le système.

### 3.6 Comparaison entre le PID et le placement de pôle :

La commande par placement de pôles s'est révélée plus performante que le régulateur PID dans le cadre du **DPIC**, notamment en termes de temps de réponse et de maîtrise de la dynamique. Cette supériorité s'explique par la capacité du placement de pôles à imposer explicitement la position des pôles en boucle fermée, permettant ainsi un ajustement précis des performances souhaitées. En revanche, le PID, bien que largement utilisé pour sa simplicité et sa robustesse, repose sur une approche heuristique ne garantissant pas un contrôle optimal dans les systèmes complexes et multivariables. Toutefois, l'efficacité du placement de pôles dépend fortement de la qualité du modèle mathématique et des conditions de contrôlabilité et d'observabilité. Ainsi, le choix entre PID et placement de pôles doit être guidé par un compromis entre précision théorique, complexité de mise en œuvre et contraintes pratiques du système à réguler.

### 3.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons examiné les méthodes classiques de contrôle linéaire appliquées au Double Pendule Inversé sur Chariot (**DPIC**). Après avoir effectué la linéarisation du modèle autour de son point d'équilibre, nous avons construit la représentation d'état du système, essentielle pour l'application des techniques de contrôle. Nous avons mis en œuvre deux méthodes de commande classiques : le placement de pôles et la commande PID.

Le placement de pôles, fondé sur le retour d'état, permet de placer les pôles du système en boucle fermée à des emplacements spécifiques afin d'assurer la stabilité et de satisfaire des critères dynamiques précis. L'application a permis de valider cette méthode et d'observer l'impact des choix de pôles sur la réponse du système.

La commande PID, quant à elle, fournit une solution simple et largement utilisée pour la régulation des systèmes linéarisés. Son implémentation a mis en lumière sa capacité à stabiliser le **DPIC**, bien que ses performances soient limitées en présence de conditions initiales ou de variations significatives des paramètres du système.

Cependant, ces méthodes restent limitées par leur stabilité locale : elles voient leur performance diminuer lorsque le système s'éloigne du point d'équilibre. Cela met en évidence la nécessité d'approches non linéaires plus efficace .

# Chapitre 4

## Commande non linéaire d'un DPIC :

### 4.1 Introduction :

L'étude des commandes non linéaires est essentielle pour maîtriser le comportement des systèmes complexes et non linéaires. Elles permettent de dépasser les limites des approches linéaires, en proposant des réponses fiables et efficaces. Parmi les diverses méthodes de commande non linéaire, la commande par mode glissant (Sliding Mode Control, SMC) se démarque par sa robustesse et sa facilité conceptuelle.

### 4.2 Commande par mode glissant (SMC) :

La commande par mode glissant (ou "sliding mode control" en anglais) constitue une méthode de contrôle robuste non linéaire qui repose sur le concept de surface de glissement, laquelle est une surface dans l'espace d'état du système permettant de faire converger le système vers un état souhaité.

En effet, la SMC est élaborée pour maintenir le système sur cette surface de glissement en ajustant la commande d'entrée du système afin d'annuler les effets des perturbations et des erreurs de modélisation. L'objectif est d'assurer que le système suive cette surface de glissement, de telle manière que l'erreur entre l'état du système et l'état désiré tende vers zéro.

La surface de glissement est définie comme une fonction qui est nulle dans la région d'équilibre du système et qui prend une valeur constante et non nulle en dehors de cette région. Cette surface est conçue de sorte à contraindre le système à se déplacer sur cette surface (ou à "glisser" sur cette surface) en utilisant une commande calculée en fonction de l'écart entre la sortie du système et la valeur de la surface de glissement. Cependant, la mise en œuvre de la SMC peut s'avérer complexe, car elle nécessite la conception de la surface de glissement, qui doit être déterminée de manière à garantir la convergence du système vers l'état voulu. De plus, la SMC peut être sujette à des variations dans les paramètres du système et peut nécessiter un réglage précis de ses paramètres pour assurer la stabilité du système [18].

### 4.2.1 Principe de la commande :

Le principe de la commande par mode glissant prend en considération les problèmes de stabilité et de performances. En règle générale, pour mettre en œuvre ce type de commande, trois étapes doivent être respectées [18] :

#### 1 - Choix de la surface de glissement [18] :

L'objectif principal de la surface de glissement est de déterminer une condition permettant au système de converger vers l'état désiré. Quand le système se situe sur la surface de glissement, il emprunte une trajectoire prédéfinie qui assure la convergence de l'erreur d'état vers zéro, comme l'illustre la figure (4.1).

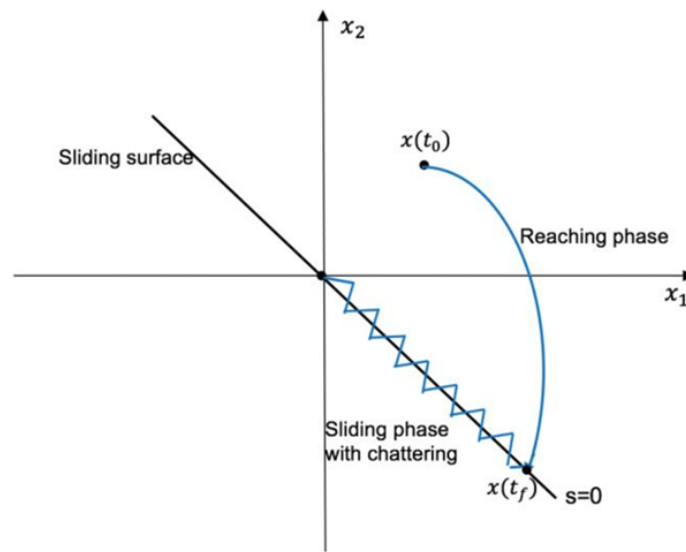


FIGURE 4.1 – Le phénomène de glissement [18]

La formule générale est décrit comme suite :

$$\mathcal{S}(x) = \dot{\epsilon} + \lambda_e \epsilon \quad (4.1)$$

Avec :

$$\epsilon = (q_d - q) \quad (4.2)$$

Et sa dérivée :

$$\dot{\epsilon} = (\dot{q}_d - \dot{q}) \quad (4.3)$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ \theta_{1d}(t) \\ \theta_{2d}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{q}_d = \begin{bmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \dot{\theta}_{1d}(t) \\ \dot{\theta}_{2d}(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

On veut stabiliser le système autour de l'origine , on pose :

$$q_d(t) = \dot{q}_d(t) = 0 \quad (4.6)$$

Donc l'erreur de position est :

$$\epsilon(t) = q(t) - q_d(t) \quad (4.7)$$

Et l'erreur de vitesse :

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) \quad (4.8)$$

( $r$ ) est le degré relatif du système , ( $\epsilon$ ) l'erreur concernant les états, et ( $\lambda_e$ ) une matrice diagonale avec des gains positifs , ( $q$ ) représente le vecteur caractérisé et ( $q_d$ ) représente la trajectoire désirée .

## 2 - Conditions d'existence et de convergence [20] :

Les conditions d'existence et de convergence constituent les critères qui permettent aux diverses dynamiques du système de se diriger vers la surface de glissement et d'y demeurer, quelles que soient les perturbations. Deux aspects doivent être pris en compte pour garantir le mode de convergence.

### • Fonction directe de commutation :

C'est la première exigence de convergence qui a été suggérée et examinée par (Emelyanov. , 1967) et (Utkin. , 1977). Il s'agit d'attribuer à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est exprimée par :

$$\mathcal{S}(x)\dot{\mathcal{S}}(x) \leq 0 \quad (4.9)$$

### • Fonction de Lyapunov :

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive  $\mathcal{V}(x) > 0$  pour les variables d'état du système. Nous établissons la fonction de Lyapunov comme suit :

$$\mathcal{V}(x) = \frac{1}{2}\mathcal{S}^2(x) \quad (4.10)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \mathcal{S}(x)\dot{\mathcal{S}}(x) \quad (4.11)$$

Pour que la fonction  $\mathcal{V}(x)$  puisse diminuer et converger vers zéro, il suffit de veiller à ce que sa dérivée soit négative .

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \iff \mathcal{S}(x)\dot{\mathcal{S}}(x) \leq 0 \quad (4.12)$$

Pour garantir la stabilité selon Lyapunov , il faut démontrer que :

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0$$

On a :

$$\mathcal{S}(x) = \dot{\epsilon} + \lambda_e \epsilon$$

Avec :

$$\epsilon = q - q_d = q$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$q_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

- La dérivée temporelle de la surface de glissement :

$$\dot{\mathcal{S}}(x) = \ddot{q} + \lambda_e \dot{q} \quad (4.15)$$

- Loi de commande en mode glissant :

On choisit une loi de commande telle que :

$$\dot{\mathcal{S}}(x) = -\mathcal{K} \text{sign}(\mathcal{S}(x)) = -\mathcal{K} \tanh\left(\frac{\mathcal{S}(x)}{\varepsilon}\right) \quad (4.16)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \mathcal{S}(x)\dot{\mathcal{S}}(x) = -\mathcal{K}\mathcal{S}(x)\tanh\left(\frac{\mathcal{S}(x)}{\varepsilon}\right) \quad (4.17)$$

Cette quantité est toujours  $\leq 0$  sauf en  $\mathcal{S} = 0$  , donc selon Lyapunov la stabilité est préservée .

### 3 - Détermination de la loi de commande :

A partir des équations de lagrange sous forme matricielle (2.21) et avec :

$$\dot{\mathcal{S}} = \ddot{q} + \lambda_e \dot{q}$$

- On exprime  $\ddot{q}$  à partir de  $\dot{\mathcal{S}}$  :

$$\ddot{q} = \dot{\mathcal{S}} - \lambda_e \dot{q} \quad (4.18)$$

- On remplace  $\ddot{q}$  dans la dynamique :

$$M_1(q)(\dot{\mathcal{S}} - \lambda_e \dot{q}) + M_2(q, \dot{q})\dot{q} + M_3(q) = M_4 \mathbf{U} \quad (4.19)$$

On obtient :

$$\mathbf{U} = M_4^{-1}(M_2(q, \dot{q})\dot{q} + M_3(q) + M_1(q)(\dot{\mathcal{S}} - \lambda_e \dot{q})) \quad (4.20)$$

- On remplace  $\dot{\mathcal{S}}$  par  $-\mathcal{K} \tanh\left(\frac{\mathcal{S}}{\varepsilon}\right)$  :

$$\mathbf{U} = M_4^{-1}(M_2\dot{q} + M_3 + M_1(-\mathcal{K} \tanh\left(\frac{\mathcal{S}}{\varepsilon}\right) - \lambda_e \dot{q})) \quad (4.21)$$

( $\lambda_e$ ) une matrice diagonale de gains positifs , ( $\mathcal{K}$ ) c'est le gain et ( $\varepsilon$ ) vaut 0.001.

- Dans notre cas on a remplacer la fonction  $sign\mathcal{S}(x)$  par  $\tanh\left(\frac{\mathcal{S}(x)}{\varepsilon}\right)$  (avec  $\varepsilon = 0.001$ ) car la fonction **sign** provoque une commutation très rapide autour de la surface  $\mathcal{S} = 0$  tandis que la fonction **tanh** évite les discontinuités et réduire du chattering en conservant les propriétés de stabilité.

### 4.3 Application du SMC sur le **DPIC** :

Après avoir testé d'ajuster le gain  $\mathcal{K}$  et la matrice  $\lambda_e$  , nous avons gagné seulement la stabilité de la position du chariot avec une valeur final nulle mais  $\theta_1$  et  $\theta_2$  convergent vers des valeurs non nulles comme le montre la figure (4.2) et le contraire pour la deuxième figure (4.3) , position du chariot diverge et  $\theta_1$  ,  $\theta_2$  convergent vers zéro cela montre qu'il existe une erreur statique non compensée .

Pour la figure (4.2) on a utiliser les gains suivants :

$$\lambda_e = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.013 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0.93 \end{bmatrix}$$

Et pour la deuxième figure (4.3) on a utilisé les gains :

$$\lambda_e = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

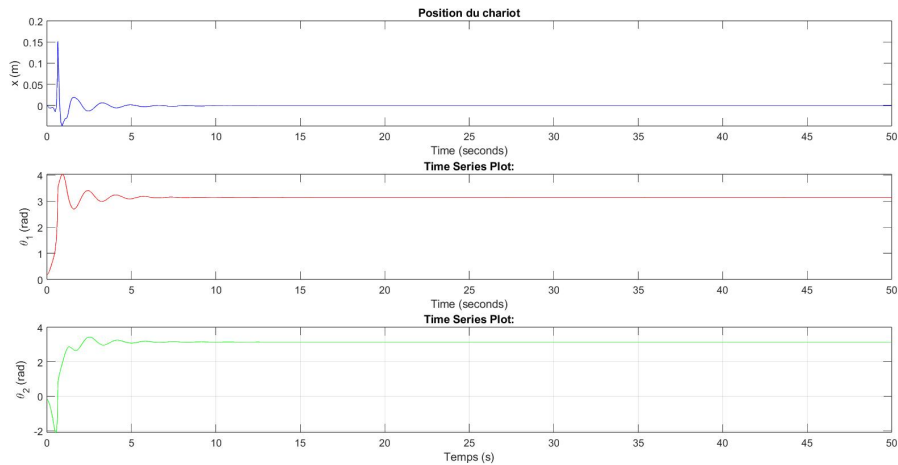


FIGURE 4.2 – Position du chariot pour un premier essai

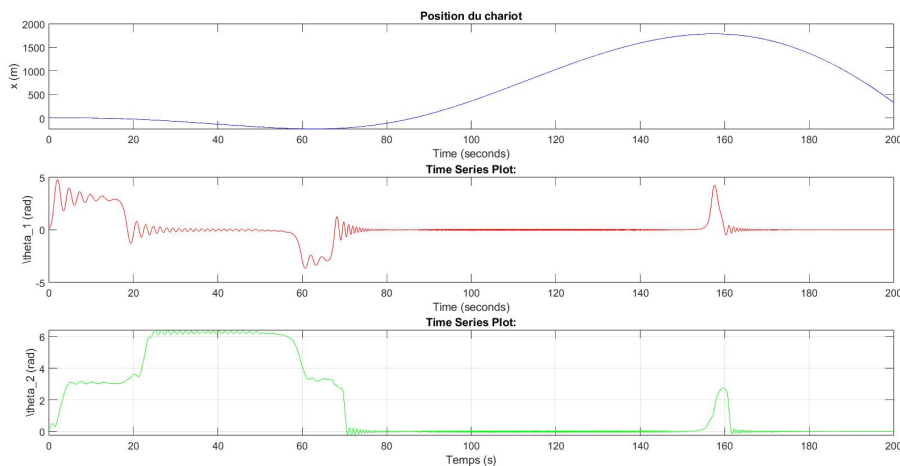


FIGURE 4.3 – Position du chariot pour un deuxième essai

### Interprétations :

Les deux figures ((4.2) et (4.3)) ci-dessus montrent le comportement des états principaux du système (position du chariot et angles des pendules), à la suite d'une condition initiale .

Dans la première figure (4.2) , on observe que la position du chariot avec la commande mode glissant oscille puis converge vers l'origine mais les deux pendules convergent vers

des valeurs constantes 3.14 Cela signifie que les deux pendules reviennent à leur position naturelle (ils tombent vers le bas).

Pour la seconde figure (4.3) , on remarque que la position du chariot diverge vers l'infini mais les deux pendules convergent vers l'origine toujours avec des oscillations persistantes.

La commande par mode glissant (CMG) n'a pas rempli son rôle de convergence vers l'origine, ce qui révèle une défaillance dans sa conception ou son implémentation. L'inefficacité peut découler d'une surface de glissement inappropriée, qui ne garantit pas une dynamique stable en régime glissant, gains de commande trop faibles pour surmonter les perturbations.

#### 4.4 La commande adaptative :

Puisque le **DPIC** est un système non linéaire , instable naturellement avec une dynamique complexe et couplée , on ajoute une commande adaptative permet d'adapter les gains automatiquement , corriger l'action de la commande  $U$  en fonction des erreurs et forcer la trajectoire a suivre :

$$q_d = [0 \ 0 \ 0]^T$$

Dans la commande adaptative appliquée au **DPIC**, une méthode d'ajustement dynamique des gains a été introduite pour augmenter la stabilité du système. Cette approche repose sur la considération de la dérivée de la fonction de Lyapunov qui illustre l'évolution de l'énergie du système. Plus précisément, si  $\dot{\mathcal{V}} \geq 0$  cela signifie que l'énergie ne diminue pas, ce qui peut risquer de perdre la stabilité. Pour remédier à cela, une loi d'adaptation est proposée : lorsqu'on détecte que  $\dot{\mathcal{V}}$  devient positif ou nul, les gains de la commande adaptative sont augmentés par un coefficient (par exemple 2.5), soit  $\mathcal{K} = 2.5\mathcal{K}$  . Cette augmentation des gains permet d'accélérer la convergence du système et de forcer  $\dot{\mathcal{V}}$  à devenir négatif, assurant ainsi une trajectoire stable et une diminution continue de l'erreur. Ce mécanisme permet donc de rendre la commande plus robuste.

Nous avons utiliser  $\mathcal{K}$  et  $\lambda_e$  comme gains pour la nouvelle commande de contrôle avec :

$$\lambda_e = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = [200 \ 80 \ 80]$$

On a considéré comme conditions initiales  $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$ , pour cela on obtiens les résultats suivantes :

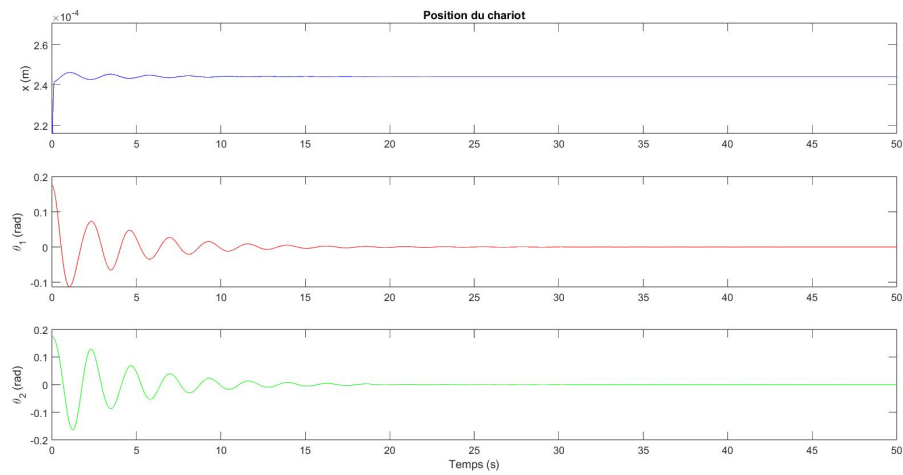


FIGURE 4.4 – Position d'un **DPIC** par la commande mode glissant adaptatif pour  $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$

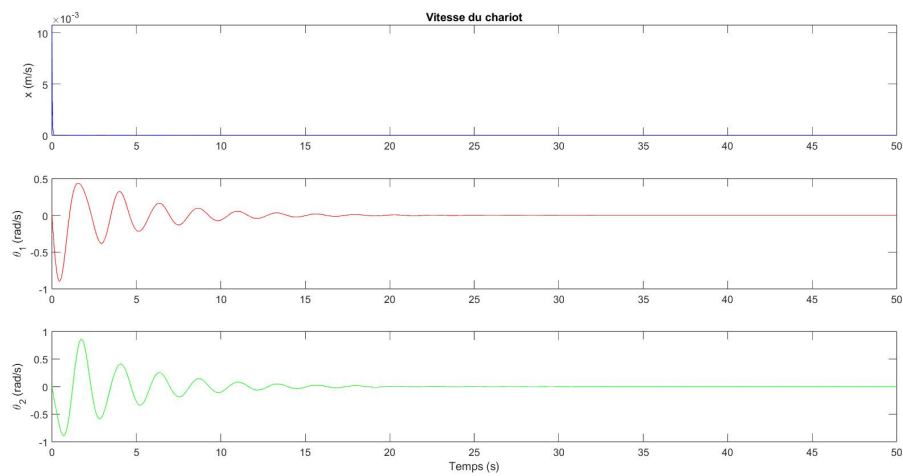


FIGURE 4.5 – Vitesse d'un **DPIC** par la commande mode glissant adaptatif pour  $\eta_0 = (0, 0, 10^\circ, 0, 10^\circ, 0)$

**Interprétations :**

Les figures ((4.4) et (4.5)) montrent les états principaux du système (position du chariot et angles des pendules) ainsi que de leurs dérivées temporelles (vitesses linéaire et angulaires), après l'ajout d'une commande adaptative.

Les deux figures montrent une nette amélioration par l'application de cette commande . On remarque pour le chariot et les deux pendules une stabilisation parfaite en régime permanent , temps de réponse rapide , Pas d'oscillations notables contrairement à ce qu'on constate fréquemment avec le mode glissant seulement.

La commande adaptative démontre une efficacité remarquable dans le contrôle des systèmes complexes, comme le montrent les résultats obtenus sur la position et la vitesse du **DPIC**.

Pour les conditions initiales  $\eta_0 = (0, 0, 20^\circ, 0, 20^\circ, 0)$ , pour cela on obtiens les résultats suivantes :

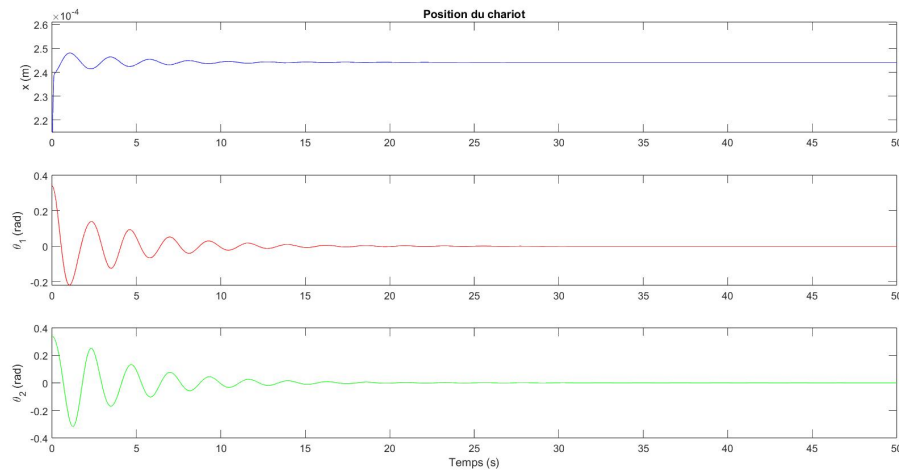


FIGURE 4.6 – Position d'un **DPIC** par la commande mode glissant adaptatif pour  $\eta_0 = (0, 0, 20^\circ, 0, 20^\circ, 0)$

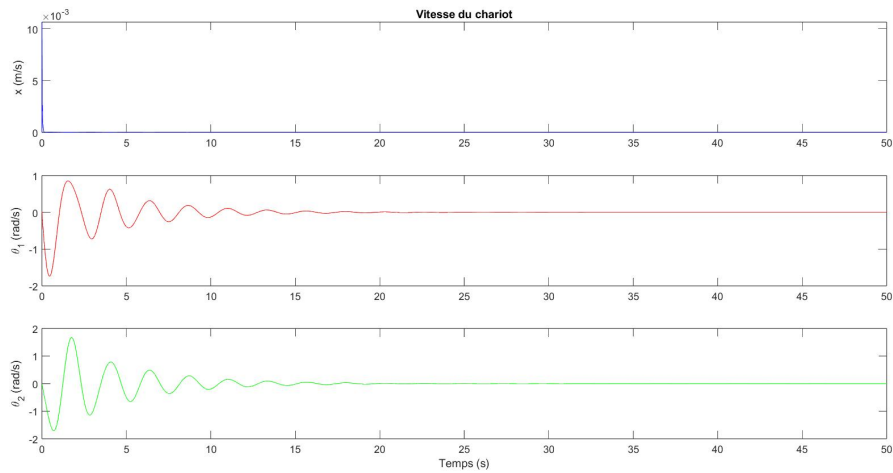


FIGURE 4.7 – Vitesse d'un **DPIC** par la commande mode glissant adaptatif pour  $\eta_0 = (0, 0, 20^\circ, 0, 20^\circ, 0)$

### Interprétations :

Les deux figures ((4.6) et (4.7)) illustrent le comportement d'un **DPIC** contrôlé par mode glissant après un changement des conditions initiales.

La réponse dynamique reste presque similaire malgré le changement des conditions initiales, le chariot et les deux pendules se stabilisent mais avec des amplitudes plus importantes, un temps de réponse un peu plus long et un dépassement augmenté.

Donc la méthode de commande par mode glissant s'adapte de manière efficace à des variations importantes des conditions initiales.

- La figure suivante présente la réponse de la commande  $U$  obtenue sous régulation par mode glissant adaptatif :

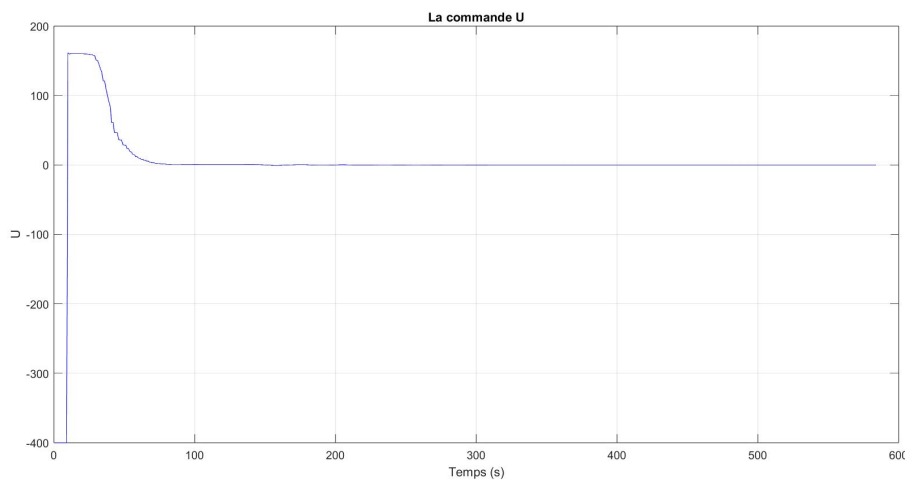


FIGURE 4.8 – Réponse de la commande  $U$  sous régulation par mode glissant adaptatif

**Interprétation :**

La figure (4.8) illustre l'évolution temporelle de la commande  $U$  appliquée au système sous régulation par mode glissant adaptatif. On observe qu'au début, la commande présente une valeur initiale élevée, suivie d'une diminution rapide. Cette phase transitoire correspond à l'action corrective intense du régulateur pour ramener le système vers l'état souhaité. Progressivement, la commande  $U$  décroît et converge vers zéro, ce qui indique que le système atteint un régime permanent stable. Cette convergence rapide vers zéro traduit l'efficacité du mode glissant adaptatif à corriger les écarts initiaux tout en assurant la stabilité et la robustesse du système.

**4.5 Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons étudié la commande par mode glissant (SMC- Sliding Mode Control) , une commande non linéaire robuste et efficace pour le contrôle des systèmes non linéaires .

L'application du SMC sur le **DPIC** a mettre en évidence son efficacité pour stabiliser le système, tout en montrant les défis potentiels associés au réglage des gains et à la gestion du phénomène de chattering.

Enfin, la commande adaptative a été mentionnée comme une option , capable d'améliorer l'efficacité et la fiabilité face aux incertitudes et aux variations des paramètres.

En dernier lieu , Le mode glissant en tant que stratégie de commande non linéaire, offre des outils robustes permettant de stabiliser efficacement le **DPIC** tout en assurant un contrôle précis de sa dynamique.

Néanmoins, le succès de cette méthode dépend largement de la qualité de la modélisation, du choix des surfaces de glissement ainsi que de l'ajustement des paramètres de la commande. L'adoption de stratégies adaptatives représente un chemin favorable pour améliorer la robustesse , la fiabilité et l'efficacité de la commande dans des conditions réelles.

## Conclusion générale

Ce mémoire a examiné l'analyse, la modélisation et la régulation d'un système non linéaire complexe : le double pendule inversé monté sur chariot. Ce système représente un exemple classique mais difficile en termes de stabilité, souvent utilisé comme plateforme d'expérimentation pour les techniques avancées de contrôle des systèmes dynamiques.

Dans un premier temps, il a été convenu de débiter par un état de l'art sur les divers types de pendules existants et l'intérêt de l'étude de **DPIC**, notamment dans le secteur médical et la robotique.

Dans un deuxième temps, nous avons pris conscience de l'importance d'une bonne modélisation de la dynamique du système, c'est pour cela nous avons commencé l'analyse des équations du mouvement du **DPIC** où nous nous sommes basés sur le formalisme d'Euler Lagrange. Le modèle que nous avons développé a révélé de fortes non-linéarités intrinsèques au système.

En dernier temps notre recherche a pour objectif de concevoir des stratégies de contrôle qui répondent de manière cruciale aux buts spécifiques, en particulier le déplacement du chariot tout en garantissant la stabilité des deux pendules inversés, et en respectant des exigences de performance, de rapidité et de précision.

Pour cela plusieurs stratégies de contrôle ont été mises en œuvre et comparées : une commande linéaire par placement de pôles, un contrôleur PID et une commande non linéaire par mode glissant. Chaque méthode a été évaluée à l'aide de simulations, en soulignant ses performances en termes de stabilité, rapidité de réaction et robustesse face aux perturbations. Les résultats obtenus ont indiqué que les trois approches permettent de stabiliser efficacement le système, avec des niveaux de performance différents. Le placement de pôles propose une meilleure performance dynamique, à condition d'une linéarisation autour de l'équilibre. Le PID est facile à mettre en œuvre mais restreint en robustesse. La commande par mode glissant, en revanche, s'est montrée particulièrement robuste face aux non-linéarités et incertitudes du modèle.

En conclusion, cette étude a offert une meilleure compréhension des défis liés à la régulation des systèmes instables comportant plusieurs degrés de liberté tel que le double pendule inversé sur chariot qui est notre sujet de recherche, et a mis en évidence l'efficacité de diverses méthodes, allant des plus traditionnelles aux plus avancées. Les résultats obtenus indiquent que l'implémentation de techniques de commande avancées pourraient encore optimiser les performances et la robustesse des systèmes non linéaires.

## Bibliographie

- [1] Aissou Mohammed Amin, "*Étude de la commande d'un double pendule inversé*", Mémoire de Master, Université M'Hamed Bougara - Boumerdès, Département Ingénierie des Systèmes Électriques, 2020.
- [2] Marc Buffat, "*Étude d'un exemple : Pendule inversé sur une table oscillante*", Cours d'Information Scientifique, Université Lyon 1, 2007.
- [3] Ali Abdessetar Berkoune et Mohammed Rida Rabehi, "*Modélisation et commande en temps réel d'un pendule inversé rotatif : Approche linéaire*", Mémoire d'ingénieur, École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen (ESSAT), Université de Tlemcen, 2021.
- [4] Thi-Van-Anh Nguyen, Bao-Trung Dong et Ngoc-Tam Bui, "*Enhancing Stability Control of Inverted Pendulum Using Takagi-Sugeno Fuzzy Model with Disturbance Rejection and Input-Output Constraints*", Hanoi University of Science and Technology et Shibaura Institute of Technology, 2023.
- [5] Nesrine Aissat, "*Modélisation et commande d'un système non linéaire : Application au pendule inversé rotatif*", Mémoire d'ingénieur, École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen (ESSA Tlemcen), Université de Tlemcen, 2020.
- [6] Gerasimos Rigatos, Jorge Pomares, Masoud Abbaszadeh, Ali Mhmood et Hazem Ali, "*Nonlinear optimal control of the parallel double inverted pendulum*", Industrial Systems Institute (Grèce), University of Alicante (Espagne), Rensselaer Polytechnic Institute (USA), University of Tikrit (Irak) et University of Technology - Iraq, 2023.
- [7] Sonia Aberkane et Tiziri Moussaoui, "*Commande d'un pendule inversé par un contrôleur PID optimisé par un algorithme évolutionnaire*", Mémoire de Master en Automatique, Université A. Mira - Béjaïa, Faculté de Technologie, Département de Génie Électrique, 2019/2020.
- [8] Youcef Morceli et Mohamed Amine Laskri, "*Réalisation et commande d'un pendule inversé*", Mémoire de Master, Filière Automatique, Spécialité Automatique et Système, Université Saad Dahlab – Blida 1, Faculté de Technologie, Département d'Automatique et Électrotechnique, 2021-2022.
- [9] Mohamed Chems eddine Laoubi, "*Contrôle d'un pendule inversé par un réseau de neurones artificiels*", Mémoire de Master en Électronique, spécialité Électronique des systèmes embarqués, Université Akli Mohand Oulhadj – Bouira, Faculté des sciences et des sciences appliquées, Département de Génie Électrique, 2017/2018.
- [10] Yahia Ouladyahi et Moulaylach Darchiech, "*Étude et modélisation du pendule inversé*", Mémoire de Licence en Génie Électrique, spécialité Maintenance en instrumentation industrielle, Université de Ghardaïa, Faculté des Sciences et Technologie, Département des Sciences et Technologie, 2013-2014.

- [11] Alexander Bogdanov, "*Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart*", Technical Report, 2004.
- [12] Billel Benyahia, "*Conception et réalisation d'une carte d'acquisition de données pour la commande d'un pendule inversé*", Mémoire de Master en Automatique, Université Larbi Ben M'hidi – Oum El Bouaghi, Faculté des Sciences et de la Technologie, Département d'Électronique et Automatique, 2015/2016.
- [13] Alloprof, "*La conservation de l'énergie*", Article en ligne pour les élèves.
- [14] Derradji Melissa et Mekideche Abdellah "*Commande d'un double pendule inversé monté sur un chariot*", Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira - Béjaïa, 2021.
- [15] Sourcetronic "*Principes de base de la régulation PID pour les variateurs de vitesse*", 2025
- [16] T. Touati, "*Commande et modélisation d'un pendule inversé : Approches classiques et intelligentes*", Mémoire de Master, Université Badji Mokhtar Annaba, 2021.
- [17] Académie d'Aix-Marseille, "*Régulation d'un moteur à courant continu (MCC)*", Classe de terminale SI, mai 2018.
- [18] ASNOUNE Nour El Houda et HADJ HENNI Hamza. "*Commande robuste d'un système non linéaire : Application au pendule inversé rotatif*". École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen, 2022/2023.
- [19] Fayssal Ouagueni, "*Commande par Mode Glissant*", Université Mohamed Boudiaf de M'Sila, 2025.
- [20] S. A. El Mehdi Ardjoun, "*Commande d'un système d'énergies renouvelables multi-sources relié au réseau électrique*", Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabes - Sidi Bel Abbès, 2021.

## Résumé

Le double pendule inversé monté sur chariot (**DPIC**) est un système dynamique sous actionné et non linéaire . La dynamique du système est acquise par une modélisation fondée sur les équations de Lagrange, ce qui permet de déduire les équations du mouvement selon les paramètres physiques et les variables d'état. Cette modélisation souligne l'interaction complexe entre le chariot et les deux pendules, et représente la base pour l'élaboration des lois de contrôle. Trois approches de commande sont élaborées et comparées. La première s'appuie sur un placements de pôles qui doit positionner les pôles du système linéarisé autour d'un point d'équilibre afin de stabiliser le **DPIC**. La seconde consiste en un contrôle par PID visant à stabiliser le système linéarisé autour de sa position d'équilibre. et la dernière est la commande par mode glissant, une méthode non linéaire robuste capable d'assurer la stabilité du système même en cas d'incertitudes ou de perturbations. Les résultats des simulations indiquent que le placements de pôles et le PID montrent une efficacité proche de l'équilibre mais peuvent échouer devant de fortes perturbations, tandis que la commande par mode glissant fournit de meilleures performances en termes de robustesse et de temps de convergence.

**Mots clés :** **DPIC** , placements de pôles , PID , mode glissant .

## Abstract

The double inverted pendulum mounted on a cart (**DPIC**) is an underactuated and nonlinear dynamic system. The system dynamics is acquired through modeling based on Lagrange's equations, which allows the equations of motion to be deduced based on physical parameters and state variables. This modeling highlights the complex interaction between the cart and the two pendulums and provides the basis for developing control laws. Three control approaches are developed and compared. The first is based on pole placement, which must position the poles of the linearized system around an equilibrium point to stabilize the **DPIC**. The second consists of PID control aimed at stabilizing the linearized system around its equilibrium position. The last is sliding mode control, a robust nonlinear method capable of ensuring system stability even under uncertainties or disturbances. Simulation results indicate that pole placement and PID show near-equilibrium efficiency but may fail under strong disturbances, while sliding mode control provides better performance in terms of robustness and convergence time.

**Keywords :** **DPIC**, pole placements, PID, sliding mode .

## المخلص

النواس المزدوج المقلوب المثبت على العربة (**DPIC**) هو نظام ديناميكي غير نشط و غير خطي . يتم الحصول على ديناميكيات النظام من خلال النمذجة المبنية على معادلات لاغرانج، والتي تسمح باستنتاج معادلات الحركة وفقاً للمعلمات الفيزيائية ومتغيرات الحالة. يسلط هذا النموذج الضوء على التفاعل المعقد بين العربة والنواسين، ويمثل الأساس لتطوير قوانين التحكم. تم تطوير ثلاثة أساليب للتحكم ومقارنتها. الأول يعتمد على وضع القطب الذي يجب أن يضع أقطاب النظام الخطي حول نقطة التوازن من أجل تثبيت **DPIC**. يتكون الثاني من عنصر تحكم PID يهدف إلى تثبيت النظام الخطي حول موضع توازنه. والأخير هو التحكم عن طريق وضع الانزلاق، وهي طريقة غير خطية قوية قادرة على ضمان استقرار النظام حتى في حالة عدم اليقين أو الاضطرابات. تشير نتائج المحاكاة إلى أن مواضع الأقطاب و PID تظهر كفاءة شبيهة متوازنة ولكنها قد تفشل في مواجهة الاضطرابات القوية، في حين يوفر التحكم في الوضع المنزلق أداءً أفضل من حيث المتانة ووقت التقارب.

**الكلمات المفتاحية :** النواس المزدوج المقلوب المثبت على العربة ، وضع الأقطاب، PID، وضع الانزلاق.