

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Équations aux dérivées Partielles

présenté par

BENMEHDI Imed-Eddine

**Explosion en gradient pour la solution très faible du problème
linéaire à donnée L^1 .**

Soutenu le : 30 / 06 / 2023 devant le jury composé de :

M. S.BENSID	Professeur, Université de Tlemcen	President
Mme. Y.NASRI	Professeur, Université de Tlemcen	Examineur
M. Y.O.BOUKARABILA	M.C.A, Université de Tlemcen	Encadrant
Mme. S.ROTA-NODARI	Professeur, Université de Nice	Co-Encadrant

Année Universitaire : 2022-2023

Dédicace

À mes chers parents.

À mon frère et ma soeur.

À ma famille.

À mes amis.

À mes professeurs.

À mes collègues.

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout-puissant, de m'avoir donné le courage, la force et la volonté de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir durant toutes mes années d'études.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Mr Youssouf Oussama Boukarabila, qui m'a encadré tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail, j'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

je tiens à remercier Mme Simona Rota Nodari d'avoir accepté de me co-encadrer, et pour ses remarques précieuses.

Je tiens à remercier également Mr Sabri Bensid pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à remercier Mme Yasmina Nasri pour l'honneur d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens à remercier Mr Mohamed Tarik Touaoula et Mr Andreas Höring pour m'avoir donné la chance de participer au programme de master international.

je tiens à remercier aussi Mr Salih Djilali pour toute l'aide précieuse qu'il m'a apporté tout au long de ma carrière d'études.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagné et aidé à m'améliorer durant mes études.

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires.	9
1.1 Espaces de Lebesgue L^p	9
1.2 Quelques Théorèmes de convergences	13
1.3 Les espaces de Sobolev	14
1.4 Le réarrangement décroissant	17
1.4.1 L'espace de Marcinkiewicz	18
1.4.2 Les espaces de Lorentz	19
1.4.3 Les espaces de Zygmund	20
1.5 La première fonction propre de l'opérateur $(-\Delta)$	21
1.6 Principe du maximum	21
2 Existence et unicité de la solution du problème linéaire avec donnée L^1	23
2.1 Introduction :	23
2.2 Cas 1 : $f \in L^1(\Omega)$	24
2.2.1 Le cadre fonctionnel	24
2.2.2 Estimations apriori	25
2.3 Cas 2 : $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + \ln(\delta)))$	30
2.4 Cas 3 : $f \in L^1(\Omega, \delta)$	34
3 Explosion du ∇u dans $L(LnL)$ lorsque $f \notin L^1(\delta(1 + \ln(\delta)))$	39
3.1 Introduction	39
3.2 Explosion du gradient dans l'espace de Zygmund	39
4 Explosion L^1 du ∇u quand $f \in L^1(\delta)$	47
4.1 Introduction	47
4.2 Existence de domaine et une fonction $f \in L^1(\Omega, \delta)$ avec $\ \nabla u\ _{L^1(\Omega)}$ explose	47
Appendices	61
4.3 A	61
4.4 B	62

Notations

Ω	: Un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	: Le bord du Ω .
$ x $	: Pour $x \in \mathbb{R}^N$ désigne $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$.
dx	: La mesure de Lebesgue de la dimension N .
$\delta(x)$	: La distance entre le point $x \in \overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$. Plus précisément, c'est $\delta(x) = \inf\{ x - y : y \in \partial\Omega\}$.
$ \Omega $	: mesure de Ω ; par rapport à la mesure de Lebesgue de la dimension N , plus précisément $ \Omega = \int_{\Omega} dx$.
$ \{ u > t \} $	: Pour $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$, c'est $ \{x : u(x) > t\} $.
$C_0^k(\Omega)$	: Les fonctions à support compact dans Ω et k fois dérivables sur Ω (i.e. de classe C^k).
$C_0^\infty(\Omega)$	: Les fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω .
$\mathcal{D}(\Omega)$	: est l'espace $C_0^\infty(\Omega)$.
$C_b(\mathbb{R}^N)$	: L'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.
$C_0^2(\overline{\Omega})$	: est l'espace $C^2(\overline{\Omega}) \cap \{\phi \in C(\overline{\Omega}) / \phi = 0, \text{ sur } \partial\Omega\}$.
$=$	: Pour deux fonctions f et g , on écrit $f = g$ si pour tout x ; $f(x) = g(x)$.
$\neq$	: Pour deux fonctions f et g , on écrit $f \neq g$ si on n'a pas la relation $f = g$.
$\geq$	: Pour deux fonctions f et g , on écrit $f \geq g$ si pour tout x ; on a $f(x) \geq g(x)$.
$\leq$	: $f \leq g$ si $g \geq f$.
$\geqneq$	: Pour deux fonctions f et g , on écrit $f \geqneq g$ si $f \geq g$ mais $f \neq g$.
$\leqneq$	: $f \leqneq g$ si $g \geqneq f$.
$f \approx g$	: f et g sont deux fonctions équivalentes, il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tel que : $(\forall x) \ c_1.g(x) \leq f(x) \leq c_2.g(x)$.
$\ \cdot\ _X$	: Si X est un espace vectoriel normé, alors $\ \cdot\ _X$ désigne la norme dans X .
$\mathcal{M}(\Omega)$	: L'ensemble des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_+(\Omega)$	: L'ensemble des fonctions mesurables positives de Ω dans $\mathbb{R}_+$.
$\hookrightarrow$	: Injection continu.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: Injection compact.
$\rightharpoonup$	: La convergence faible.
$\rightrightarrows$	: La convergence uniforme.
$B(x, r)$	: La boule de centre x et de rayon r .
ω_N	: La mesure superficielle de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$, i.e. $\int_{\partial B(0,1)} dx$.
χ_A	: La fonction caractéristique d'un ensemble A .
$[\alpha]$	: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est la partie entière de α .
$ \alpha $	: Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, c'est la longueur du multi indice α , donné par $\sum_{i=1}^n \alpha_i$.

x^α	: Désigne $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
$D^\alpha u$	: La dérivée mixte de u et elle est donnée par $\frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} u$
$\{u_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$	: Une sous suite de la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où $\sigma; \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application Strictement croissante. Ainsi, $\{u_{\gamma \circ \sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite de $\{u_{\sigma(n)}\}_n$.
$A \setminus B$	: Les éléments qui sont dans A et ne sont pas dans B .
C.à.d	: C'est à dire.
p.p	: Presque par tout dans Ω .
φ_1	: La première fonction propre du laplacien Dirichlet.
λ_1	: La première valeur propre du laplacien Dirichlet.
n ou $\vec{n}$	: Désigne le vecteur normal extérieur en un point $x \in \partial\Omega$.
$\frac{\partial \xi}{\partial n}$	: La dérivée normale extérieure de la fonction ξ en un point $x \in \partial\Omega$.
L^1_+	: $f \in L^1$ avec $f \geq 0$.

Introduction

Les équations elliptiques à donnée L^1 ou plus généralement des mesures jouent un rôle crucial que ça soit de point de vue théorique ou dans les applications.

Quitte à rappeler que le noyau de Green $G(x, y)$ et le noyau de Poisson $P(z, y)$ sont les solutions respectives de $(x, y \in \Omega, z \in \partial\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x, \cdot) &= \delta_x & \text{dans} & \Omega, \\ G(x, \cdot) &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_y P(z, \cdot) &= 0 & \text{dans} & \Omega, \\ P(z, \cdot) &= \delta_z & \text{sur} & \partial\Omega. \end{cases}$$

La première difficulté rencontrée avec ce type d'équations est le sens pour lequel on cherche une solution. L'équation peut être toujours considéré au sens des distributions mais l'espace de distributions est tellement grand qu'il est pauvre de méthodes de résolutions.

L'étude de ces équations remontent aux fameux travaux de Stampacchia. Ensuite, plusieurs contributions majeurs ont été suivi, on peut citer Boccardo, W.Strauss, H.Brezis, P.Benilan, T.Gallouet, F.Murat, M.F.B.Véron, L.Véron, A.C.Ponce, J.M.Rakotoson, J.I.Diaz, J.L.Vasquez, ...

Une question naturelle qui s'impose est la régularité maximale qu'on peut espérer du ∇u de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans} & \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^1_+$ ou plus généralement une mesure.

Dans cet esprit, L.Vivier et M.F.B.Véron [4] montrent que si $f \in L^1(\Omega, \delta^\alpha)$ où $\alpha \in [0, 1]$ alors $|\nabla u| \in L^q(\Omega, \delta^\gamma)$ pour certains $\gamma = \gamma(N, \alpha) \geq 0$ et $q = q(N, \gamma, \alpha) > 1$.

J.M.Rakotoson et J.I.Diaz [7] ont montré que $u \in W_0^{1,q}$ si et seulement si $f \in L^1(\delta^\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 1[$. En plus, dans [6]; ils ont montré que $u \in W_0^{1,1}$ à chaque fois $f \in L^1(\delta(1 + |\log \delta|))$.

J.M.Rakotoson et F.Abergel[10] montrent une explosion du ∇u dans certaines échelles lorsque la donnée f appartient à certains espaces intermédiaires entre $L^1(\delta)$ et $L^1(\delta(1 + |\log \delta|))$.

Plus précisément, J.M.Rakotoson et F.Abergel [10] montrent d'abord que si la fonction positive f appartient à l'espace pondéré $L^1(\Omega, \delta)$ et elle n'est pas dans l'espace

$L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$, alors la solution u associée est dans $L^1(\Omega)$, et son gradient explose dans l'espace de Zygmund $L(LnL)$. Dans la deuxième partie, il montre l'existence d'un domaine Ω de classe C^∞ et une fonction positive $f \in L^1(\Omega, \delta) \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$, telle que la solution très faible associée ait un gradient non intégrable.

Le présent mémoire vise à détailler et à analyser en profondeur ces résultats. Nous allons explorer les différentes notions utilisées, examiner les techniques analytiques et fonctionnelles employées, ainsi de discuter les conséquences et les applications potentielles de ces résultats. Notre mémoire sera organisée en cinq chapitres.

Chapitre 1 : On rappelle quelques notions élémentaires ; les espaces de Lebesgue avec poids, et on définit les espaces pondérés les quels nous travaillons avec " $L^1(\Omega, 1 + |\ln \delta|)$, $L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$ et $L^1(\Omega, \delta)$ ", et on montre les inclusions l'un dans l'autre. On définit ensuite les espaces de Sobolev, les espaces de Lorentz, les espaces de Marcinkiewicz ainsi que les espaces de Zygmund.

Chapitre 2 : On vas étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (1) pour $f \in L^1(\Omega)$, puis $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$ et finalement pour $f \in L^1(\Omega, \delta)$, avec des estimations sur ∇u dans chaque cas.

Chapitre 3 : On montre que pour $f \in L^1_+(\Omega, \delta)$ tels que $f \notin L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$, alors ∇u explose au moins dans l'espace de Zygmund $L(LnL)$.

Chapitre 4 : On présente un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, et une fonction positive $f \in L^1_+(\Omega, \delta) \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$, telle que la solution très faible du (1), vérifie que $|\nabla u| \notin L^1(\Omega)$.

Appendices : Ce chapitre contient la démonstration de deux Lemmes techniques utilisés dans les chapitres précédents.

Chapitre 1

Préliminaires.

1.1 Espaces de Lebesgue L^p

Définition 1.1 On considère (E, Σ, μ) un espace mesuré positif.

— Pour $1 \leq p < \infty$; on définit :

$$L^p(E, \Sigma, \mu) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_E |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{1/p}.$$

— Pour $p = +\infty$; on définit :

$$L^\infty(E, \Sigma, \mu) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \exists K > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq K, \mu. \text{ p.p. } x \in E \right\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ K > 0; |f(x)| \leq K, \mu. \text{ p.p. sur } E \right\}.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Un cas particulièrement important est lorsque $d\mu(x) = g(x) dx$ où g est une fonction mesurable positive.

Définition 1.2 (Espaces de Lebesgue à poids) Lorsque $d\mu(x) = g(x)dx$; où g est une fonction mesurable positive, $1 \leq p < \infty$. On définit :

$$L^p(\Omega, g) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable : } \int_\Omega |f(x)|^p g(x) dx < \infty \right\},$$
$$L^\infty(\Omega, g) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega); \exists K > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq K, \mu. \text{ p.p. } x \in \Omega \right\}.$$

Définition 1.1.1 (La distance au bord $\delta(\cdot)$)

Considérons Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$. Si $x \in \overline{\Omega}$ on note par $\delta(x)$ la distance de x par rapport au $\partial\Omega$. Plus précisément,

$$\delta(x) = \inf\{|x - y| : y \in \partial\Omega\}.$$

Les espaces suivants jouent un rôle important dans l'étude du problème (1).

Définition 1.3 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, on définit les espaces de Lebesgue L^1 avec poids suivants

$$1. \ L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|)) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |f(x)| \delta(x) (1 + |\ln(\delta(x))|) dx < \infty \right\}.$$

$$2. \ L^1(\Omega, \delta) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |f(x)| \delta(x) dx < \infty \right\}.$$

$$3. \ L^1(\Omega, 1 + |\ln(\delta)|) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |f(x)| (1 + |\ln(\delta(x))|) dx < \infty \right\}.$$

$$4. \ L^1(\Omega, \delta |\ln(\delta)|) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |f(x)| \delta(x) |\ln(\delta(x))| dx < \infty \right\}.$$

S'il n'y a pas de confusion on note respectivement ces espaces par

$$L^1(\delta(1 + |\ln(\delta)|)), L^1(\delta), L^1(1 + |\ln(\delta)|) \text{ et } L^1(\delta |\ln(\delta)|).$$

On a les inclusions suivantes.

Lemme 1.1 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, on a :

$$L^1(\Omega, 1 + |\ln(\delta)|) \subsetneq L^1(\Omega) \subsetneq L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|)) \subsetneq L^1(\Omega, \delta).$$

Preuve :

1) Soit $f \in L^1(\Omega, 1 + |\ln(\delta)|)$. Puisque pour tout $x \in \Omega$ on a :

$$1 \leq 1 + |\ln(\delta)|,$$

alors,

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx \leq \int_{\Omega} |f(x)| (1 + |\ln(\delta)|) dx < +\infty.$$

Ainsi, $f \in L^1(\Omega)$.

Sans perte de généralité, on peut considérer $0 \in \partial\Omega$ et on définit pour $\varepsilon > 0$ très petit la fonction $f(x) = \frac{1}{|x|^N (-\ln|x|)^2} \cdot \chi_{B(0,\varepsilon)}(x)$.

Noter que lorsque x est très proche du 0 alors $\delta(x) \leq |x| < 1$, donc on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| (1 + |\ln(\delta)|) dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^N (-\ln|x|)^2} \chi_{B(0,\varepsilon)}(x) (1 + |\ln(\delta)|) dx, \\ &\geq \int_{B(0,\varepsilon) \cap \Omega} \frac{1}{|x|^N (-\ln|x|)^2} (-\ln(\delta)) dx, \\ &\geq \int_{B(0,\varepsilon) \cap \Omega} \frac{1}{|x|^N (-\ln|x|)^2} (-\ln(|x|)) dx, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^N (-\ln r)^2} (-\ln r) r^{N-1} dr, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r (-\ln r)} dr = +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que :

$$f \notin L^1(\Omega, 1 + |\ln(\delta)|).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^N (-\ln|x|)^2} \chi_{B(0,\varepsilon)}(x) dx, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^N (-\ln r)^2} r^{N-1} dr, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r (-\ln r)^2} dr < +\infty, \end{aligned}$$

alors $f \in L^1(\Omega)$.

Conclusion : $L^1(\Omega, 1 + |\ln(\delta)|) \subsetneq L^1(\Omega)$.

2) Soit $f \in L^1(\Omega)$. Il existe $M > 0$, tel que : $0 \leq |\delta(1 + |\ln(\delta)|)| \leq M$.

Ensuite,

$$\int_{\Omega} |f| \delta(1 + |\ln(\delta)|) dx \leq M \int_{\Omega} |f| dx < +\infty,$$

ce qui montre que $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

Sans perte de généralité, on peut considérer $0 \in \partial\Omega$ et on définit pour $\varepsilon > 0$ très petit la fonction $f(x) = \frac{1}{|x|^N} \cdot \chi_{B(0,\varepsilon)}(x)$, il est clair que $f \notin L^1(\Omega)$.

Noter que lorsque x est très proche du 0 alors $\delta(x) \leq |x| < 1$, donc on a :

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{\delta(x)(-\ln \delta(x))}{\delta(x)^\alpha} = 0, \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Alors on aura :

$$0 < \frac{\delta(x)(-\ln \delta(x))}{\delta(x)^\alpha} < 1, \quad \forall 0 < \alpha < 1,$$

ce qui implique que :

$$0 < \delta(x)(-\ln \delta(x)) < \delta(x)^\alpha \leq |x|^\alpha,$$

ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| \delta (1 + |\ln(\delta)|) dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^N} \chi_{B(0,\varepsilon)}(x) \delta (1 + |\ln(\delta)|) dx, \\ &\leq C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^N} (r + r^\alpha) r^{N-1} dr, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon (1 + r^{\alpha-1}) dr, \\ &= C_N \left(\varepsilon + \frac{1}{\alpha} \varepsilon^\alpha \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Alors $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

Conclusion : $L^1(\Omega) \subsetneq L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

3) Soit $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$:

Comme $\delta \leq \delta(1 + |\ln(\delta)|)$, alors pour toute $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$, on a :

$$\int_{\Omega} |f| \delta dx \leq \int_{\Omega} |f| \delta (1 + |\ln(\delta)|) dx < +\infty.$$

On a ainsi, $f \in L^1(\Omega, \delta)$.

Sans perte de généralité, on peut considérer $0 \in \partial\Omega$ et on définit pour $\varepsilon > 0$

très petit la fonction $f(x) = \frac{1}{|x|^N \delta(x) (-\ln|x|)^2} \cdot \chi_{B(0,\varepsilon)}(x)$.

Noter que lorsque x est très proche du 0 alors $\delta(x) \leq |x| < 1$, donc on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| \delta(1 + |\ln(\delta)|) dx &= \int_{\Omega} \chi_{B(0,\varepsilon)}(x) \frac{1}{|x|^N \delta (-\ln|x|)^2} \delta(1 + |\ln(\delta)|) dx, \\ &\geq C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^N (-\ln r)^2} (-\ln r) r^{N-1} dr, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r (-\ln r)} dr = +\infty. \end{aligned}$$

Alors $f \notin L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| \delta dx &= \int_{\Omega} \chi_{B(0,\varepsilon)}(x) \frac{1}{|x|^N \delta (-\ln|x|)^2} \delta dx, \\ &= C_N \int_0^\varepsilon \frac{1}{r (-\ln r)^2} dr < +\infty. \end{aligned}$$

Alors $f \in L^1(\Omega, \delta)$.

Conclusion : $L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|)) \subsetneq L^1(\Omega, \delta)$.

■

1.2 Quelques Théorèmes de convergences

Théorème 1.1 (Convergence monotone) Soient (E, Σ, μ) un espace mesuré, et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ croissante $\mu.p.p.$

(c.à.d. pour $\mu.p.p. x \in E$, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Alors,

$$\int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

Théorème 1.2 (Lemme de Fatou) Soient (E, Σ, μ) un espace mesuré, et $\{f_n\}_n \subset \mathcal{M}_+$. Pour $\mu.p.p. x \in \Omega$, on pose $f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, alors :

$$\int_E f(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

Théorème 1.3 (Convergence dominée) : Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré. Étant donnée $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, tels que :

1. $f_n \rightarrow f$ $\mu.p.p.$

2. Il existe $g \in L^1$ intégrable tel que : $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu.p.p.$

Alors :

$$\|f_n - f\|_{L^1(E, \Sigma, \mu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier :

$$\int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

1.3 Les espaces de Sobolev

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq +\infty$.

$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ ; \ \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \right.$

$$\left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\},$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ et $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

$W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou de la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = \infty$, $W^{1,\infty}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \left(\sup_{\Omega} \text{ess } |u| + \sup_{\Omega} \text{ess } |\nabla u| \right),$$

avec : $\sup_{\Omega} \text{ess}(u) = \inf \{ k \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq k \text{ p.p sur } \Omega \}$.

On pose $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée est :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

elle est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.3.1 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace :*

- *de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
- *réflexif que pour $1 < p < \infty$.*
- *séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Pour $1 \leq p < \infty$, on définit,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite de $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est réflexif pour $1 < p < \infty$.
- Notons :

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.4 (Inégalité de Poincaré) *Soient Ω un domaine borné et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante positive $C := C(\Omega, p)$ telle que :*

$$(\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.5 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Soit $1 \leq p < N$. Il existe une constante $C := C(p, N) > 0$, telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

$$\text{avec : } p^* := \frac{pN}{N-p}.$$

Théorème 1.6 (Rellich-Kondrachov) Soit Ω un domaine bornée de classe C^1 , on a :

- Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
- Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
- Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Remarque 1.1 : Si $\{u_n\}$ désigne une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < N$), alors on peut extraire une sous suite $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tel que $\{u_{n_k}\}$ converge fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$ et elle converge presque partout.

Théorème 1.7 (Théorème de Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert réel, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur H et $L(\cdot)$ une forme linéaire sur H .

On suppose que :

1. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c.à.d : Il existe $M > 0$ telle que pour tout $u, v \in H$ on a :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H.$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, c.à.d : Il existe $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in H$ on a :

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2.$$

3. $L(\cdot)$ est continue, c.à.d : Il existe $K > 0$ telle que pour tout $v \in H$ on a :

$$|L(v)| \leq K \|v\|_H.$$

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$ on a :

$$a(u, v) = L(v).$$

Si de plus $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est l'unique solution du problème de minimisation globale :

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v); \quad \text{où :} \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v).$$

Théorème 1.8 (Théorème de Banach-Steinhaus) [5, Théorème II.1.]

On considère A et B deux espaces de Banach. Soit $(T_k)_{k \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de A dans B (i.e : $(T_k)_{k \in I} \in \mathcal{L}(A, B)$). Supposons que :

$$(\forall x \in A) \quad \sup_{k \in I} \|T_k x\|_B < +\infty.$$

Alors :

$$\sup_{k \in I} \|T_k\|_{\mathcal{L}(A, B)} < +\infty.$$

Autrement dit, il existe une constante positive M telle que :

$$\|T_k x\|_B \leq M \cdot \|x\|_A \quad \forall x \in A, \quad \forall k \in I.$$

Théorème 1.9 (Théorème de Banach) [5, Corollaire II.6.] On considère X et Y deux espaces de Banach. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire bijective. Si $T : X \longrightarrow Y$ est borné alors $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ est borné.

1.4 Le réarrangement décroissant

Dans toute la suite on considère Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$. Pour un ensemble mesurable E de $\mathbb{R}^N$, on note par $|E|$ sa mesure de Lebesgue.

Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, pour $t \in \mathbb{R}$ on définit la fonction de distribution de u par :

$$m_u(t) = |\{|u| > t\}| = |\{x \in \Omega; |u(x)| > t\}|,$$

noter que $m_u(\cdot)$ est décroissante.

Définition 1.4 (réarrangement décroissant) [12] Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Le réarrangement décroissant de u est définie par :

$$\begin{aligned} u_* : \Omega_* =]0, |\Omega|[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto u_*(s) = \inf \{t \in \mathbb{R}; m_u(t) \leq s\}. \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} u_*(0) = \sup_{\Omega} \text{ess}(u), \\ u_*(|\Omega|) = \inf_{\Omega} \text{ess}(u), \end{cases}$$

et rappelons que :

$$\begin{cases} \sup_{\Omega} \text{ess}(u) = \inf \{k \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq k \text{ p.p sur } \Omega\}, \\ \inf_{\Omega} \text{ess}(u) = \sup \{k \in \mathbb{R}; |u(x)| \geq k \text{ p.p sur } \Omega\}. \end{cases}$$

Définition 1.5 Deux fonctions u et w sont équimesurables si elles ont la même fonction de distribution, i.e :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad m_u(t) = m_w(t).$$

Autrement dit,

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad |\{|u| > t\}| = |\{|w| > t\}|.$$

Proposition 1.1 On a :

1. u_* est une fonction décroissante et continue à gauche.
2. L'application $u \mapsto u_*$ est croissante, i.e. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$|u| \leq |w| \implies u_* \leq w_*.$$

3. Les fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_* : \Omega_* =]0, |\Omega|[\rightarrow \mathbb{R}$ sont équimesurables, i.e :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad m_u(t) = m_{u_*}(t).$$

Pour plus de propriétés des réarrangements, le lecteur est invité à consulter [2, 12].

1.4.1 L'espace de Marcinkiewicz

Définition 1.6 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $0 < p < +\infty$, l'espace de Marcinkiewicz est défini par :

$$\mathcal{M}^p(\Omega) := \left\{ g \in \mathcal{M}(\Omega) / (\exists C > 0)(\forall k > 0) \quad m_g(k) \leq Ck^{-p} \right\},$$

muni de la "norme" :

$$\|g\|_{\mathcal{M}^p(\Omega)} := \inf \left\{ C > 0; \quad m_g(k) \leq Ck^{-p} \quad \forall k \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Proposition 1.2 Pour $1 < q < +\infty$, on a :

$$L^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^q(\Omega) \subset L^{q-\varepsilon}(\Omega) \subset \dots \subset L^1(\Omega), \quad \forall \varepsilon \in]0, q-1[.$$

Pour la preuve voir [1].

Définition 1.7 (L'espace de Marcinkiewicz avec poids) [13] Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et g une fonction mesurable positive, pour $p > 1$, on définit l'espace de Marcinkiewicz avec poids g par :

$$\mathcal{M}^p(\Omega, g) := \left\{ f \in L^1(\Omega, g); \quad \|f\|_{\mathcal{M}^p(\Omega, g)} < +\infty \right\},$$

où :

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p(\Omega, g)} := \inf \left\{ C > 0; (\forall A \subset \Omega, A \text{ est mesurable}) \int_A |f| g dx \leq C \left(\int_A g dx \right)^{\frac{1}{p'}} \right\},$$

$$\text{avec : } p' = \frac{p}{p-1}.$$

Proposition 1.3 Pour $1 < q < +\infty$, on a :

$$L^q(\Omega, g) \subset \mathcal{M}^q(\Omega, g) \subset L^{q-\varepsilon}(\Omega, g) \subset \cdots \subset L^1(\Omega, g), \quad \forall \varepsilon \in]0, q-1[.$$

Pour plus de détails, veuillez consulter [13].

1.4.2 Les espaces de Lorentz

Pour introduire les espaces de Lorentz, on définit pour toute fonction mesurable $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$|g|_{**}(y) := \frac{1}{y} \int_0^y |g|_*(x) dx, \quad \forall y \in \Omega_*,$$

avec : $\Omega_* =]0, |\Omega|[$, où $|g|_{**}$ est appelée la fonction moyenne de $|g|_*$.

Définition 1.8 ([2, 12]) (Les espaces de Lorentz)

— Pour $p \in [1, \infty[$ et $q \in [1, \infty[$; on définit :

$$L^{p,q}(\Omega) := \left\{ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_{\Omega_*} \left[t^{\frac{1}{p}} |g|_{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|g\|_{L^{p,q}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega_*} \left[t^{\frac{1}{p}} |g|_{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

— Pour $q = \infty$,

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \left\{ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \sup_{t \in \Omega_*} t^{\frac{1}{p}} |g|_{**}(t) < \infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|g\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} := \sup_{t \in \Omega_*} t^{\frac{1}{p}} |g|_{**}(t).$$

Noter que :

- $L^{p,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.
- $L^{p,\infty}(\Omega) := \mathcal{M}^p(\Omega)$ (voir [14, Définition I-63]).

1.4.3 Les espaces de Zygmund

Définition 1.9 ([2]) Soit Ω un ouvert borné. Nous définissons les deux espaces de Zygmund $L(Ln L)$ et L_{exp} par :

$$L(Ln L)(\Omega) = \left\{ g \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} |g(x)| \ln^+ |g(x)| \, dx < +\infty \right\},$$

et,

$$L_{exp}(\Omega) = \left\{ g \in L^1(\Omega); \exists \lambda > 0 \text{ tel que : } \int_{\Omega} e^{\lambda |g(x)|} \, dx < +\infty \right\}.$$

Ces définitions sont équivalentes à (voir les démonstrations par exemple dans [2]) :

$$L(Ln L)(\Omega) = \left\{ g \in L^1(\Omega); \quad \|g\|_{L(Ln L)} := \int_{\Omega_*} |g|_{**}(t) \, dt < +\infty \right\},$$

ensuite,

$$L_{exp}(\Omega) = \left\{ g \in L^1(\Omega); \quad \|g\|_{L_{exp}(\Omega)} := \sup_{t \in \Omega_*} \frac{|g|_{**}(t)}{1 + \ln\left(\frac{|\Omega|}{t}\right)} < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.4 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, on a les inclusions suivantes :

$$L^\infty(\Omega) \subset L_{exp}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L(Ln L)(\Omega) \subset L^1(\Omega), \quad \forall p \in]1, +\infty[. \quad (1.4.1)$$

Preuve : Voir [2, Theorem 6.5].

Proposition 1.5 ([2]) Les espaces $L_{exp}(\Omega)$ et $L(Ln L)(\Omega)$ sont deux espaces de Banach associés l'un à l'autre. Comme conséquence, si $f \in L_{exp}(\Omega)$, $g \in L(Ln L)(\Omega)$ alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| \, dx \leq \|f\|_{L_{exp}(\Omega)} \cdot \|g\|_{L(Ln L)(\Omega)}. \quad (1.4.2)$$

1.5 La première fonction propre de l'opérateur $(-\Delta)$

Définition 1.10 On définit la première valeur propre $\lambda_1 > 0$ et la première fonction propre associée du laplacien-Dirichlet ; comme étant la solution φ_1 du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \varphi_1 > 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Le résultat suivant sera utilisé systématiquement dans la suite.

Lemme 1.2 [7, Lemma 2.] On a $\varphi_1 \approx \delta$. Ceci signifie qu'il existe deux constantes strictement positives α_0 et α_1 tel que :

$$(\forall x \in \Omega) \quad \alpha_0\delta(x) \leq \varphi_1(x) \leq \alpha_1\delta(x).$$

1.6 Principe du maximum

Théorème 1.10 (Principe du maximum faible) [8] :

Soit u une solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors on a :

1. Si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$.

2. Si $f \leq 0$ alors $u \leq 0$.

Preuve :

Rappelons que $u = u^+ - u^-$ avec : $\begin{cases} u^+ = \max(0, u) \geq 0, \\ u^- = \max(0, -u) \geq 0, \end{cases}$

et $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$.

1. En prenant u^- comme une fonction test, on obtient,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- dx = \int_{\Omega} f u^- dx \geq 0,$$

alors,

$$-\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\Omega} f u^- dx \geq 0.$$

Ceci implique,

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = 0,$$

d'où $u^- = 0$ c'est à dire $u \geq 0$.

2. De même, prenons u^+ comme une fonction test et utilisons le fait que $f \leq 0$, on déduit $u^+ = 0$ donc $u \leq 0$.

■

Théorème 1.11 (Principe du maximum fort) [8]

Soit u la solution unique du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

donc on a :

1. Si $f \geq 0$ alors $u > 0$ ou bien $u = 0$.
2. Si $f \leq 0$ alors $u < 0$ ou bien $u = 0$.

Théorème 1.12 (Lemme de Hopf) [8]

Soit u la solution unique du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

donc on a :

1. Si $f \geq 0$ tel que :

$$(\forall x \in \Omega) \quad 0 < u(x),$$

alors :

$$(\forall x_0 \in \partial\Omega) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) < 0.$$

2. Si $f \leq 0$ tel que :

$$(\forall x \in \Omega) \quad u(x) < 0,$$

alors :

$$(\forall x_0 \in \partial\Omega) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0.$$

où $n = \vec{n}(x_0)$ désigne le vecteur normal extérieur au point x_0 .

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du problème linéaire avec donnée L^1

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Dans toute la suite on considère Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \geq 0$. On suppose $f \in L^1$ avec un certain poids qu'on fixera selon le cas, et on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1.1) dans chaque cas; pour $f \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln \delta|))$ et $f \in L^1(\Omega, \delta)$.

Signalons que lorsque le second membre est L^1 , la fonctionnelle d'énergie n'est pas bien définie, et les méthodes de résolutions reviennent à approximer le second membre.

Commentaire : Les méthodes de résolutions des problèmes à donnée L^1 consistent grosso modo à d'abord donner un sens à l'équation, puis montrer l'existence de solution pour des problèmes approximés, et finalement montrer que la limite (modulo une sous suite) des solutions approximées convergent vers une solution du problème (2.1.1).

(voir [3, 9, 13], et voir [1, Appendices] pour une présentation de la méthode entropique pour le cas général de l'opérateur $\Delta_p u$).

On est ainsi ramené à définir le sens pour lequel u est solution du problème (2.1.1).

Définition 2.1 On dit que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution faible du problème (2.1.1) si :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,1}(\Omega), \\ (\forall \phi \in W^{1,\infty}(\Omega)) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Une version plus faible de la définition précédente est parfois nécessaire. On dit que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution faible du problème (2.1.1) si :

$$\begin{cases} u \in L^1(\Omega), \\ \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}) \quad - \int_{\Omega} u \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Noter que si u vérifie (2.1.3) alors la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est encodée dans le choix de fonctions tests $C_0^2(\overline{\Omega})$. Noter que si $\psi \in C(\partial\Omega)$ alors il existe une et une seule $\phi \in C_0^2(\overline{\Omega})$ telle que :

$$\psi = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega}.$$

Ainsi, si u est suffisamment régulière alors :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} u \psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0.$$

Pour plus de rigueur et de détails sur le sujet voir [9], consulter aussi la même référence pour l'équivalence entre (2.1.3) et (2.1.2).

En prenant en compte les inclusions du Lemme 1.1, nous avons besoin de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1.1) pour $f \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$ et $f \in L^1(\Omega, \delta)$, ainsi des estimations sur ∇u pour chaque cas.

2.2 Cas 1 : $f \in L^1(\Omega)$

2.2.1 Le cadre fonctionnel

On définit d'abord la fonction de troncature suivante, pour tout $k > 0$ on pose :

$$T_k(v) := \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq k, \\ k \operatorname{sign}(v) & \text{si } |v| > k. \end{cases}$$

Remarque : D'après la définition de la troncature on a :

$$T_k(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq k, \\ k \operatorname{sign}(u) & \text{si } |u| > k, \end{cases}$$

et

$$\nabla T_k(u) := \begin{cases} \nabla u & \text{si } |u| \leq k, \\ 0 & \text{si } |u| > k. \end{cases}$$

Ce qui nous donne que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous avons maintenant la possibilité de donner le cadre fonctionnel où on va traiter (2.1.1) (avec $f \in L_+^1(\Omega)$) et qui est donné par la définition suivante.

- Definition 2.2.1** ([3]) 1. On dit que $u \in \tau_{loc}^{1,1}(\Omega)$ si pour tout $k > 0$, $T_k(u) \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$.
2. Pour $p > 1$, on note $\tau_{loc}^{1,p}(\Omega)$ le sous ensemble de $\tau_{loc}^{1,1}(\Omega)$ est défini par u telles que $|\nabla(T_k(u))| \in L_{loc}^p(\Omega)$.
3. $\tau^{1,p}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau_{loc}^{1,1}(\Omega)$ est défini par u , telles que $|\nabla T_k(u)| \in L^p(\Omega) \quad \forall k > 0$ et $p > 1$.

2.2.2 Estimations apriori

Les deux Lemmes suivants jouent un rôle clé dans l'obtention d'estimations à priori pour le problème (2.1.1).

Lemme 2.1 [3, Lemma 4.1] Soit $1 < p < N$, et $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\{|u| < k\}} |\nabla u|^p dx \leq kM \quad (\forall k > 0), \quad (2.2.1)$$

alors $u \in \mathcal{M}^{p_1}(\Omega)$, avec $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$.

Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que :

$$|\{|u| > k\}| \leq CM^{\frac{N}{N-p}} k^{-p_1}.$$

Lemme 2.2 [3, Lemma 4.2] Soit $1 < p < N$. Si $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ satisfait (2.2.1) ; alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $h > 0$ on a :

$$|\{|\nabla u| > h\}| \leq CM^{\frac{N}{N-1}} h^{-p_2}, \quad (2.2.2)$$

avec : $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$.

Autrement dit :

$$|\nabla u| \in \mathcal{M}^{p_2}(\Omega).$$

Pour $k > 0$ on note :

$$f_k = T_k(f) := \begin{cases} f & \text{si } |f| \leq k, \\ k \operatorname{sign}(f) & \text{si } |f| > k. \end{cases}$$

Comme $f \geq 0$ alors on a bien :

$$f_k = T_k(f) := \begin{cases} f & \text{si } f \leq k, \\ k & \text{si } f > k. \end{cases}$$

Noter que $f_k \in L^\infty(\Omega)$. En effet, on a :

$$|f_k| = f_k = T_k(f) \leq \min\{k, f\} < C.$$

Alors :

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x)| < C \iff \|f_k\|_{L^\infty(\Omega)} < C.$$

Ce qui montre que $f_k \in L^\infty(\Omega)$.

Lemme 2.3 $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

Preuve : Nous avons bien les conditions suivantes :

$$(i) \quad f_k \rightarrow f \quad \text{p.p.}$$

$$(ii) \quad f_k = T_k(f) \leq \min\{k, f\} \leq f,$$

$$\text{où } f \in L^1(\Omega).$$

Alors d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\|f_k - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0,$$

i.e : f_k converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$.

■

Maintenant nous définissons le problème approximé suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_k = f_k & \text{dans } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Puisque $f_k \in L^\infty(\Omega)$ donc $f_k \in L^2(\Omega)$, alors par application du Théorème du Lax-Milgram (ou Théorème de représentation de Riesz) dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, le problème (2.2.3) admet une solution unique $u_k \in H_0^1(\Omega)$. Ceci fait l'objectif du Lemme suivant

Lemme 2.4 Pour tout $k > 0$; le problème (2.2.3) admet une solution unique $u_k \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve : La formulation variationnelle associée au problème (2.2.3) est donnée par

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f_k \phi \, dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Noter qu'elle est de la forme :

$$(\forall \phi \in H_0^1(\Omega)) \quad a(u_k, \phi) = L(\phi).$$

Où :

$$a(u_k, \phi) = \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx, \quad \text{et} \quad L(\phi) = \int_{\Omega} f_k \phi \, dx.$$

- $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire symétrique ;

$$a(u_k, \phi) = \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla u_k \, dx = a(\phi, u_k).$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique.

La bilinéarité de $a(\cdot, \cdot)$ découle de la linéarité de l'intégrale et le gradient.

Ce qui donne que $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire symétrique.

- La continuité de $a(\cdot, \cdot)$;

$$|a(u_k, \phi)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u_k \cdot \nabla \phi| \, dx,$$

par l'inégalité de Hölder on obtient,

$$\begin{aligned} |a(u_k, \phi)| &\leq \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}, \\ &= \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall u_k, \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On a bien :

$$|a(u_k, \phi)| \leq M \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u_k, \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{où } M \geq 1).$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est continue.

- La coercivité de $a(\cdot, \cdot)$;

$$\begin{aligned} a(u_k, u_k) &= \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 \, dx, \\ &\geq M \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall u_k \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{où } M \leq 1). \end{aligned}$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive.

- La continuité de $L(\cdot)$;

$$|L(\phi)| = \left| \int_{\Omega} f_k \phi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f_k \phi| \, dx,$$

par l'inégalité de Hölder on aura :

$$|L(\phi)| \leq \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

d'après l'inégalité de Poincaré on a :

$$|L(\phi)| \leq C(\Omega) \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Alors on a : $|L(\phi)| \leq M \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{où } M = C(\Omega) \|f_k\|_{L^2(\Omega)}).$

Donc $L(\cdot)$ est continue.

Toutes les conditions de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème (2.2.3) admet une solution unique $u_k \in H_0^1(\Omega)$.

■

On arrive maintenant au Théorème principal de cette partie.

Théorème 2.1 *On considère $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$. Alors le problème (2.1.1) admet une solution faible unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $p \in [1, \frac{N}{N-1}]$.*

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}. \quad (2.2.4)$$

Preuve :

Multiplions l'équation (2.2.3) par la fonction test $T_k(u_k) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on aura :

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla T_k(u_k) \, dx = \int_{\Omega} f_k T_k(u_k) \, dx.$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\{|u_k| < k\}} |\nabla u_k|^2 \, dx &= \int_{\Omega} f_k T_k(u_k) \, dx, \\ &\leq k \int_{\Omega} f_k \, dx, \\ &\leq k \int_{\Omega} |f| \, dx = k \|f\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\int_{\{|u_k| < k\}} |\nabla u_k|^2 \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} k \quad (\forall k > 0).$$

D'après Lemme 2.1 et Lemme 2.2, on a les résultats suivants :

- $u_k \in \mathcal{M}^{p_1}$ avec $p_1 = \frac{N}{N-2} \implies u \in L^q(\Omega)$, $\forall q < \frac{N}{N-2}$.
- $\nabla u_k \in \mathcal{M}^{p_2}$ avec $p_2 = \frac{N}{N-1} \implies |\nabla u_k| \in L^s(\Omega)$, $\forall s < \frac{N}{N-1}$.
- En plus, $\{u_k\}_k$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall p < \frac{N}{N-1}$.

Par réflexivité et injection compacte (Théorème de Rellich-Kondrachov (1.1)); il existe une sous suite de $\{u_k\}_k$ qu'on note aussi par u_k (pour simplifier les notations) telle que :

- $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall p < \frac{N}{N-1}$.
- $u_k \longrightarrow u$ fortement dans $L^q(\Omega)$, $\forall q < (\frac{N}{N-1})^* = \frac{N}{N-2}$.
- $u_k \longrightarrow u$ p.p.

Noter que la convergence faible dans $W^{1,p}(\Omega)$ implique :

- $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$.
- $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$.

Conclusion : Maintenant nous pouvons passer à la limite quand $k \rightarrow \infty$ pour l'équation (2.2.3).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_k \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} u \Delta \phi \, dx,$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx.$$

Ce qui montre que le problème linéaire de Dirichlet (2.1.1) admet une solution distributionnelle u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($\forall p < \frac{N}{N-1}$).

L'unicité : Pour montrer l'unicité on suppose que le problème (2.1.1) a deux solutions u_1 et u_2 , et on trouve que $u_1 = u_2$.

En effet, si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.1.1) alors :

$$-\int_{\Omega} u_1 \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx,$$

et,

$$-\int_{\Omega} u_2 \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

On pose $v = u_1 - u_2$, alors on a :

$$\int_{\Omega} v \Delta \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

Pour toute fonction ξ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ solution du :

$$\begin{cases} -\Delta \phi &= \xi & \text{dans } \Omega, \\ \phi &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

on a ainsi :

$$\int_{\Omega} v \cdot \xi \, dx = 0 \quad (\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)),$$

ce qui implique $v = 0$, donc $u_1 = u_2$.

On a ainsi montré que pour toute $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$; le problème linéaire (2.1.1) admet une solution unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ($\forall p < \frac{N}{N-1}$).

■

2.3 Cas 2 : $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$

On énonce le théorème suivant qui affirme l'existence et l'unicité de solution du problème (2.1.1) où $f \in L_+^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

Théorème 2.2 *On considère $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$, $f \geq 0$. Alors le problème (2.1.1) admet une solution unique $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, telle que :*

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx. \quad (2.3.1)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))}, \quad (2.3.2)$$

et,

$$\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))}. \quad (2.3.3)$$

Preuve :

Tout d'abord on signale que le terme à droite de (2.3.1) est bien défini seulement s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$(\forall x \in \Omega) \quad |\phi(x)| \leq \beta \delta(x)(1 + |\ln(\delta(x))|).$$

On procède comme pour le cas 1, soit donc le problème approximé,

$$\begin{cases} -\Delta u_k &= f_k & \text{dans } \Omega, \\ u_k &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Où :

$$f_k = T_k(f) := \begin{cases} f & \text{si } f \leq k, \\ k & \text{si } f > k. \end{cases}$$

Noter que $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ fortement dans $L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

En effet, puisque

(i) $f_k \rightarrow f$ p.p .

(ii) $f_k = T_k(f) \leq \min\{k, f\} \leq f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

Alors d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\|f_k - f\|_{L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

i.e : f_k converge fortement vers f dans $L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$.

Notons que $u_k \in H_0^1(\Omega)$ la solution unique de (2.3.4) telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f_k \phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3.5)$$

Par densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ donc on a bien que u_k vérifie :

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad - \int_{\Omega} u_k \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f_k \phi \, dx. \quad (2.3.6)$$

On définit ξ par :

$$\begin{cases} -\Delta \xi &= 1 & \text{dans } \Omega, \\ \xi &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappelons que $\xi \approx \delta(x)$ et que $\xi \in C_0^2(\overline{\Omega})$.

Si on prend $\phi = \xi$, on a :

$$- \int_{\Omega} u_k \Delta \xi \, dx = \int_{\Omega} f_k \xi \, dx,$$

donc,

$$\int_{\Omega} u_k \, dx = \int_{\Omega} f_k \xi \, dx.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_k| dx &\leq \int_{\Omega} f_k |\xi| dx, \\
&\leq C \int_{\Omega} f_k \delta dx, \\
&\leq C \int_{\Omega} f_k \delta dx + \int_{\Omega} f_k \delta |\ln(\delta)| dx, \\
&\leq C' \int_{\Omega} f_k \delta (1 + |\ln(\delta)|) dx, \quad (C' = \max(C, 1)).
\end{aligned}$$

Comme :

$$\int_{\Omega} |u_k| dx \leq C \int_{\Omega} f_k \delta (1 + |\ln(\delta)|) dx. \quad (2.3.7)$$

Alors : $\exists M \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N}$ telle que $p, q > M$ on a :

$$\int_{\Omega} |u_p - u_q| dx \leq C \int_{\Omega} |f_p - f_q| \delta (1 + |\ln(\delta)|) dx \leq \varepsilon,$$

donc $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega)$, et comme ce dernier est un espace de Banach, alors $u_k \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$.

Après le passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ dans (2.3.6) et (2.3.11) on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_k \Delta \phi dx = \int_{\Omega} u \Delta \phi dx,$$

et,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

On conclut que le problème (2.1.1) admet une solution $u \in L^1(\Omega)$, telle que :

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad - \int_{\Omega} u \Delta \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

Et qu'il existe une constante $C > 0$, telle que :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta(1+|\ln(\delta)|))}. \quad (2.3.8)$$

L'unicité : Pour montrer l'unicité on suppose que le problème (2.1.1) admet deux solutions u_1 et u_2 , et on trouve que $u_1 = u_2$.

En effet, si u_1 et u_2 sont deux solution du problème (2.1.1) alors :

$$-\int_{\Omega} u_1 \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx,$$

et,

$$-\int_{\Omega} u_2 \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

On pose $v = u_1 - u_2$, alors on a :

$$\int_{\Omega} v \Delta \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

Pour toute fonction ξ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ solution du :

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \xi & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

on a ainsi :

$$\int_{\Omega} v \xi \, dx = 0 \quad (\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Ce qui implique $v = 0$, donc $u_1 = u_2$, d'où l'unicité de la solution.

Concernant l'estimation sur ∇u , on utilise [6, Proof of Theorem 3.12.] (voir aussi la méthode dans [7, Theorem 3]). Il existe une fonction $\psi \in W_0^1 L_{exp}(\Omega)$ qui vérifie :

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} B_k \cdot \nabla \phi \, dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad (2.3.9)$$

avec :

$$B_k(x) := \begin{cases} \frac{\nabla u_k}{|\nabla u_k|} & \text{si } \nabla u_k \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où : $W_0^1 L_{exp}(\Omega) = \{\psi \in W_0^{1,1}(\Omega) : |\nabla \psi| \in L_{exp}(\Omega)\}$.

Maintenant on utilise ψ comme une fonction test dans (2.3.5), on aura :

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} f_k \psi \, dx. \quad (2.3.10)$$

On combine entre (2.3.9) et (2.3.10), donc on trouve :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f_k \psi \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot B_k \, dx, \\
 &= \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \frac{\nabla u_k}{|\nabla u_k|} \, dx, \\
 &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_k|^2}{|\nabla u_k|} \, dx, \\
 &= \int_{\Omega} |\nabla u_k| \, dx.
 \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u_k| \, dx &= \int_{\Omega} f_k \psi \, dx = \int_{\Omega} f_k \delta(1 + |\ln(\delta)|) \frac{\psi}{\delta(1 + |\ln(\delta)|)} \, dx, \\
 &\leq \left\| \frac{\psi}{\delta(1 + |\ln(\delta)|)} \right\|_{\infty} \int_{\Omega} f_k \delta(1 + |\ln(\delta)|) \, dx.
 \end{aligned}$$

D'après [6, Theorem 3.10], on a :

$$\left\| \frac{\psi}{\delta(1 + |\ln(\delta)|)} \right\|_{\infty} \leq C \|\nabla \psi\|_{L_{exp}(\Omega)},$$

ce qui entraîne,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k| \, dx \leq C \int_{\Omega} f_k \delta(1 + |\ln(\delta)|) \, dx. \quad (2.3.11)$$

Après le passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité (2.3.11), on aura alors pour toute $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))}.$$

■

2.4 Cas 3 : $f \in L^1(\Omega, \delta)$

Avant d'annoncer et monter le théorème principal de cette section, on énonce le théorème suivant qui sera utilisé dans la démonstration.

Théorème 2.3 [4, Theorem 2.6] Pour tout $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} |f| \delta^{\alpha} \, dx < \infty$, avec $\alpha \in [0, 1]$. Soit u la solution du problème (2.1.1), alors on a :

(i) — Si $N \geq 3$ alors :

$$u \in \mathcal{M}^{\frac{N+\beta}{N-2+\alpha}}(\Omega, \delta^\alpha),$$

$$\text{pour tout } \beta \in \left(\frac{-N}{N+\alpha-1}, \frac{\alpha.N}{N-2} \right), \text{ si } \alpha \neq 0,$$

$$\text{et pour tout } \beta \in \left(\frac{-N}{N-1}, 0 \right], \text{ si } \alpha = 0.$$

— Si $N = 2$, et $\alpha \in (0, 1]$ alors :

$$u \in \mathcal{M}^{\frac{2+\beta-\varepsilon}{\alpha}}(\Omega, \delta^\beta),$$

$$\text{pour tout } \beta \in \left(\frac{-2}{1+\alpha}, +\infty \right), \text{ avec } \varepsilon \text{ assez petit},$$

et si $\alpha = 0$ alors :

$$u \in \mathcal{M}^p(\Omega, \delta^\beta),$$

$$\text{pour tout } \beta \in (-2, 0], \text{ et } p \in (\max(1, -\beta), +\infty).$$

(ii) Pour tout $N \geq 2$ on a :

$$|\nabla u| \in \mathcal{M}^{\frac{N+\gamma}{N-1+\alpha}}(\Omega, \delta^\gamma),$$

$$\text{pour tout } \gamma \in \left[0, \frac{\alpha.N}{N-1} \right) \text{ si } \alpha \in (0, 1),$$

$$\text{et pour tout } \gamma \in \left(0, \frac{N}{N-1} \right) \text{ si } \alpha = 1,$$

et pour $\gamma = 0$ si $\alpha = 0$.

Preuve : Voir [4, Theorem 2.6].

On annonce maintenant le théorème principal suivant qui nous donne l'affirmation de l'existence et l'unicité de solution du problème (2.1.1) lorsque $f \in L^1(\Omega, \delta)$.

Théorème 2.4 Soient $f \in L^1(\Omega, \delta)$, $f \geq 0$. Alors le problème (2.1.1) admet une solution unique $u \in L^1(\Omega)$, telle que :

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad - \int_{\Omega} u \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx. \quad (2.4.1)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta)}, \quad (2.4.2)$$

et,

$$\|\nabla u\|_{L^1(\Omega, \delta)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta)}. \quad (2.4.3)$$

Preuve :

Nous signalons que le terme à droite de (2.4.1) est bien défini seulement s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$(\forall x \in \Omega) \quad |\phi(x)| \leq \alpha \delta(x).$$

On suit les mêmes étapes données pour le cas 1 et cas 2. Soit u_k la solution unique du problème approximé :

$$\begin{cases} -\Delta u_k = f_k & \text{dans } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.4)$$

où :

$$f_k = T_k(f) := \begin{cases} f & \text{si } f \leq k, \\ k & \text{si } f > k. \end{cases}$$

Noter que $u_k \in H_0^1(\Omega)$ est la solution unique de (2.4.4) qui vérifie :

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f_k \phi \, dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

On a $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ fortement dans $L^1(\Omega, \delta)$.

En effet, puisque

- (i) $f_k \rightarrow f$ p.p .
- (ii) $f_k = T_k(f) = \min\{k, f\} \leq f \in L^1(\Omega, \delta)$.

Alors d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\|f_k - f\|_{L^1(\Omega, \delta)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

i.e : f_k converge fortement vers f dans $L^1(\Omega, \delta)$.

Par densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ donc on a bien que u_k vérifie :

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad - \int_{\Omega} u_k \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f_k \phi \, dx. \quad (2.4.5)$$

On définit ξ par :

$$\begin{cases} -\Delta \xi = 1 & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Rappelons que $\xi \approx \delta(x)$.

Considérons ξ comme une fonction test dans (2.4.5) donc , on a :

$$- \int_{\Omega} u_k \Delta \xi \, dx = \int_{\Omega} f_k \xi \, dx,$$

ce qui nous donne,

$$\int_{\Omega} u_k dx = \int_{\Omega} f_k \xi dx.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_k| dx &\leq \int_{\Omega} f_k |\xi| dx, \\ &\leq C \int_{\Omega} f_k \delta dx. \end{aligned}$$

Comme :

$$\int_{\Omega} |u_k| dx \leq C \int_{\Omega} f_k \delta dx. \quad (2.4.6)$$

Alors : $\exists M \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N}$ telle que $p, q > M$ on a :

$$\int_{\Omega} |u_p - u_q| dx \leq C \int_{\Omega} |f_p - f_q| \delta dx \leq \varepsilon,$$

donc $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega)$, et comme $L^1(\Omega)$ est un espace de Banach, alors $u_k \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$.

Après le passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ dans (2.4.5) et (2.4.6) tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_k \Delta \phi dx = \int_{\Omega} u \Delta \phi dx,$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx,$$

on conclut que le problème (2.1.1) admet une solution $u \in L^1(\Omega)$, telle que :

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad - \int_{\Omega} u \Delta \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx,$$

et qu'il existe une constante $C > 0$, telle que :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta)}. \quad (2.4.7)$$

L'unicité : Pour montrer l'unicité on suppose que le problème (2.1.1) a deux solutions u_1 et u_2 , et on trouve que $u_1 = u_2$.

En effet, si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.1.1) alors :

$$- \int_{\Omega} u_1 \Delta \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx,$$

et :

$$-\int_{\Omega} u_2 \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

On pose $v = u_1 - u_2$, alors on a :

$$\int_{\Omega} v \Delta \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

Pour toute fonction ξ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ solution du :

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \xi & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

on a ainsi :

$$\int_{\Omega} v \xi \, dx = 0, \quad (\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Ce qui implique $v = 0$, donc $u_1 = u_2$, d'où l'unicité de la solution.

Pour montrer l'estimation (2.4.3), on utilise le résultat (ii) du Théorème 2.3. Pour $\alpha = 1$, on aura :

$$|\nabla u| \in \mathcal{M}^{\frac{N+\gamma}{N}}(\Omega, \delta^\gamma),$$

pour tout $\gamma \in \left(0, \frac{N}{N-1}\right)$, alors pour $\gamma = 1$. Ce qui entraîne que :

$$|\nabla u| \in \mathcal{M}^{\frac{N+1}{N}}(\Omega, \delta).$$

Comme $\mathcal{M}^{\frac{N+1}{N}}(\Omega, \delta) = \mathcal{M}^{1+\frac{1}{N}}(\Omega, \delta) \subset L^1(\Omega, \delta)$, alors :

$$|\nabla u| \in L^1(\Omega, \delta).$$

Alors pour toute $f \in L^1(\Omega, \delta)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\nabla u\|_{L^1(\Omega, \delta)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta)}.$$

Ce qui montre l'estimation (2.4.3). ■

Chapitre 3

Explosion du ∇u dans $L(LnL)$ lorsque $f \notin L^1(\delta(1 + |\ln(\delta)|))$

3.1 Introduction

Dans toute la suite on considère Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^1_+(\Omega, \delta)$ et u est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Dans le chapitre précédent on a montré que si $f \in L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$ alors la solution très faible de (3.1.1) $u \in L^1(\Omega)$ et $|\nabla u| \in L^1(\Omega, \delta)$. Mais dans ce chapitre on montre que si $f \in L^1(\Omega, \delta) \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$ alors $u \in L^1(\Omega)$ et son gradient explose dans l'espace de Zygmund $L(\ln L)$.

3.2 Explosion du gradient dans l'espace de Zygmund

Avant de commencer à démontrer le Théorème principal, on énonce la proposition ainsi les lemmes suivants lesquelles nous les avons besoin dans la démonstration du Théorème principal.

Proposition 3.1 [5, 11] *Pour $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, il existe une suite $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C^1_0(\Omega)$ telle que :*

$$1. \exists a > 0; \|\nabla \phi_n\|_\infty \leq a \left(\|\nabla \phi\|_\infty + \|\phi\|_\infty \right), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $C(\overline{\Omega})$.

3. $\nabla \phi_n \rightharpoonup \nabla \phi$ * faiblement dans $L^\infty(\Omega)^N$.

Lemme 3.1 Soit u la solution très faible de (3.1.1) avec $\int_{\Omega} |\nabla u| dx < +\infty$ ($i.e : |\nabla u| \in L^1(\Omega)$). Alors u vérifie :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \quad \forall \phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Preuve :

Rappelons que u est une solution très faible de (3.1.1) si

$$(\forall \phi \in C_0^2(\overline{\Omega})) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx. \quad (3.2.1)$$

Comme $C_0^2(\overline{\Omega})$ est dense dans $C_0^1(\Omega)$, alors il existe une suite $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^2(\overline{\Omega})$, tel que $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $C_0^1(\Omega)$, cela veut dire que :

$$\|\phi_n - \phi\|_{C_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

c'est à dire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\Omega} |\phi_n - \phi| + \sup_{\Omega} |\nabla \phi_n - \nabla \phi| \right) = 0,$$

ce qui donne,

$$\begin{cases} \phi_n \rightrightarrows \phi, \\ \text{et,} \\ \nabla \phi_n \rightrightarrows \nabla \phi, \end{cases}$$

alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi_n dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx,$$

et,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \phi_n dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

Donc on obtient,

$$(\forall \phi \in C_0^1(\Omega)) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

Considérons $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on note par $\phi_n \in C_0^1(\Omega)$ une approximation de ϕ qui satisfait les conditions du Proposition 3.1. Noter que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi_n dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx. \quad (3.2.2)$$

D'après l'inégalité 4.4.1 du Lemme 4.4, on a :

$$|\gamma(x)| \leq \|\nabla \gamma\|_{\infty} \delta(x).$$

Posons $\gamma(x) = \phi_n(x) - \phi(x)$, alors on aura :

$$\begin{aligned} |\phi_n(x) - \phi(x)| &\leq \|\nabla \phi_n - \nabla \phi\|_{\infty} \delta(x), \\ &\leq (\|\nabla \phi_n\|_{\infty} + \|\nabla \phi\|_{\infty}) \delta(x). \end{aligned}$$

Ceci combiné avec le résultat(1) de la Proposition 3.1 donnera :

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq C \delta(x). \quad (3.2.3)$$

- D'après le résultat(2) de la proposition 3.1, on a :

$$f\phi_n - f\phi \rightarrow 0 \quad \text{p.p.}$$

- D'après l'inégalité (3.2.3) on a :

$$\begin{aligned} |f(x)\phi_n(x) - f(x)\phi(x)| &= f(x) |\phi_n(x) - \phi(x)|, \\ &\leq C f(x) \delta(x), \end{aligned}$$

où : $f\delta \in L^1(\Omega)$ car $f \in L^1(\Omega, \delta)$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \phi_n dx = \int_{\Omega} f \phi dx. \quad (3.2.4)$$

En combinant (3.2.2) et (3.2.4), alors on conclut :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \quad \forall \phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

■

Lemme 3.2 On considère $f \in L_+^1(\Omega, \delta)$. Soit u une solution du (3.1.1) telle que $|\nabla u| \in L^1(\Omega)$. Si $|\nabla u| \in L^1(\Omega, 1 + |\ln \delta|)$ alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que :

$$\int_{\Omega} f \delta (1 + |\ln \delta|) dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (1 + |\ln \delta|) dx + \int_{\Omega} f \delta dx \right). \quad (3.2.5)$$

Preuve :

Fixons $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, et prenons $\phi = \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)|$ comme une fonction test dans l'équation (2.3.4). Noter que cette fonction test est admissible puisque $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\varphi_1 \approx \delta(\cdot)$ (voir Lemme 1.2).

Donc nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (\varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)|) dx, \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \frac{\varphi_1 \cdot \text{sign}(\ln(\varphi_1 + \varepsilon))}{\varphi_1 + \varepsilon} dx. \end{aligned}$$

Comme $f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx \right| &\leq \int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx, \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \varphi_1| |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \varphi_1| \left| \frac{\varphi_1 \text{sign}(\ln(\varphi_1 + \varepsilon))}{\varphi_1 + \varepsilon} \right| dx. \end{aligned}$$

Comme,

$$\left| \frac{\varphi_1 \text{sign}(\ln(\varphi_1 + \varepsilon))}{\varphi_1 + \varepsilon} \right| = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varepsilon} < 1,$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \varphi_1| |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx + \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \varphi_1| dx, \\ &\leq \|\nabla \varphi_1\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u| |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx + \|\nabla \varphi_1\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u| dx. \end{aligned}$$

Comme $\|\nabla \varphi_1\|_{\infty} < +\infty$, donc nous avons :

$$\int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u| |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx + \int_{\Omega} |\nabla u| dx \right).$$

D'après Lemme 4.3 on a :

$$|\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| \leq M (|\ln \varphi_1| + 1).$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx &\leq C \left(M \int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\varphi_1)| + 1) dx + \int_{\Omega} |\nabla u| dx \right), \\
&\leq C_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\varphi_1)| + 1) dx + \int_{\Omega} |\nabla u| dx \right), \quad (C_1 = \max(C M, C)), \\
&\leq C_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (2|\ln(\varphi_1)| + 2) dx \right), \\
&\leq C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\varphi_1)| + 1) dx \right), \quad (\text{Où } C_2 = 2C_1).
\end{aligned}$$

Alors il existe une constante $\lambda > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| dx \leq \lambda \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\varphi_1)| + 1) dx \right),$$

faisons $\varepsilon \rightarrow 0$, et on applique lemme de Fatou, on trouve :

$$\int_{\Omega} f \varphi_1 |\ln(\varphi_1)| dx \leq \lambda \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\varphi_1)| + 1) dx \right).$$

Comme $\varphi_1 \approx \delta$ (voir Lemme 1.2), alors on obtient :

$$\int_{\Omega} f \delta |\ln(\delta)| \leq K \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\delta)| + 1) dx \right).$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\Omega} f \delta (1 + |\ln(\delta)|) \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u| (|\ln(\delta)| + 1) dx + \int_{\Omega} f \delta dx \right).$$

■

On arrive maintenant au Théorème principal dans ce Chapitre.

Théorème 3.1 *Si $f \in L^1(\Omega, \delta)_+ \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$, alors toute solution u de (3.1.1) telle que avec $|\nabla u| \in L^1(\Omega)$ vérifie :*

1. $\int_{\Omega} |\nabla u| |\ln \delta| dx = +\infty.$
2. $\int_{\Omega_*} |\nabla u|_{**} dx = +\infty, \quad \text{i.e : } |\nabla u| \notin L(LnL).$

Démonstration du Théorème 3.1 :

Comme on a $f \in L^1(\Omega, \delta) \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$, $f \geq 0$, alors :

$$\int_{\Omega} f \delta \, dx < +\infty \quad \text{et}, \quad \int_{\Omega} f \delta (1 + |\ln(\delta)|) \, dx = +\infty.$$

D'après le lemme 3.2, nous constatons que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u| (1 + |\ln \delta|) \, dx = +\infty,$$

alors,

$$\int_{\Omega} |\nabla u| |\ln \delta| \, dx = +\infty.$$

Autrement dit, $|\nabla u| \notin L^1(\Omega, |\ln \delta|)$.

$$\text{On sait que : } |\ln \delta| = \begin{cases} \ln \delta & \text{si } \delta \geq 1, \\ -\ln \delta & \text{si } 0 < \delta \leq 1, \end{cases}$$

donc :

- Si $\delta \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{\alpha |\ln(\delta)|} \, dx &= \int_{\Omega} \left(e^{\ln(\delta)} \right)^{\alpha} \, dx, \\ &= \int_{\Omega} \delta^{\alpha} \, dx < +\infty, \quad \forall \alpha > 0. \end{aligned}$$

- Si $\delta \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{\alpha |\ln(\delta)|} \, dx &= \int_{\Omega} \left(e^{-\ln(\delta)} \right)^{\alpha} \, dx, \\ &= \int_{\Omega} \left(e^{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} \right)^{\alpha} \, dx, \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\delta^{\alpha}} \, dx < +\infty, \quad \forall 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $|\ln \delta| \in L_{exp}(\Omega)$.

Puisque $L_{exp}(\Omega)$ et $L(LnL)$ sont deux espaces associés l'un à l'autre (voir (1.4.2)), alors :

$$\int_{\Omega} |\nabla u| |\ln \delta| \, dx \leq \|\ln \delta\|_{L_{exp}}(\Omega) \cdot \|\nabla u\|_{L(LnL)}. \quad (3.2.6)$$

Le fait que $\int_{\Omega} |\nabla u| |\ln \delta| \, dx = +\infty$ et $\|\ln \delta\|_{L_{exp}}(\Omega) < +\infty$ entraîne que :

$$\|\nabla u\|_{L(LnL)} = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\|\nabla u\|_{L(LnL)} = \int_{\Omega_*} |\nabla u|_{**} dx = +\infty.$$

D'où $|\nabla u| \notin L(LnL)$.

■

Conclusion : Lorsque $f \in L_+^1(\Omega, \delta) \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$ alors le gradient de la solution du problème (3.1.1) explose en moins dans l'espace de Zygmund ($L(LnL)$).

Chapitre 4

Explosion L^1 du ∇u quand $f \in L^1(\delta)$

4.1 Introduction

Étant donnée une fonction positive $f \in L^1(\Omega, \delta) \setminus L^1(\Omega, \delta(1 + |\ln(\delta)|))$ où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Dans le Chapitre précédent on a vu que le gradient de la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

explose dans l'espace de Zygmund $L(\ln L)$ (en moins). Par contre, d'après Théorème 2.4; $|\nabla u| \in L^1(\Omega, \delta)$. En tenant compte des inclusions $L^1(\Omega, 1 + |\ln(\delta)|) \subset L^1(\Omega)$ et $L(\ln L) \subset L^1(\Omega)$, on pose la question de la régularité optimale du $|\nabla u|$ dans $L^1(\Omega)$.

Le but de ce chapitre est de répondre négativement à la question posée.

4.2 Existence de domaine et une fonction $f \in L^1(\Omega, \delta)$ pour lequel $\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$ explose

Lemme 4.1 *Ils existent un domaine Ω de classe C^∞ , et une fonction avec $h \in L^N(\Omega)$, $h \not\geq 0$, tel que la solution unique $\xi > 0$ de :*

$$\begin{cases} -\Delta \xi = h & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

vérifie :

$$\sup \left\{ \frac{\xi(x)}{\delta(x)} : x \in \Omega \right\} = +\infty. \quad (4.2.2)$$

Preuve :

Commençons par le cas $N = 2$. Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ alors en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x_1 = r \cdot \cos \theta \\ x_2 = r \cdot \sin \theta, \end{cases}$$

où $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On considère :

$$\tilde{\Omega} = \left\{ x = (x_1, x_2) \setminus x_1^2 < x_2, |x|^2 < \frac{1}{e} \right\}.$$

La figure suivante nous montre la représentation du domaine $\tilde{\Omega}$.

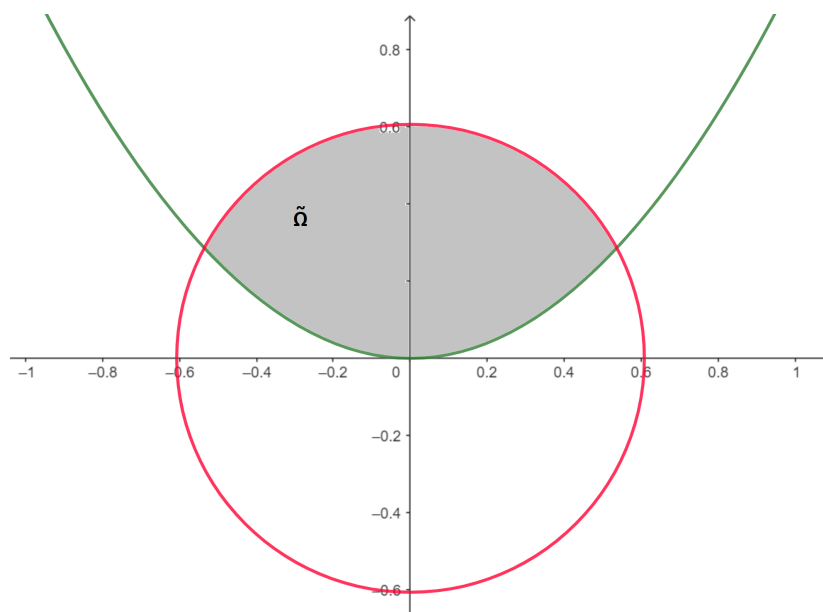


FIGURE 4.1 –

On définit la fonction ν dans $\tilde{\Omega}$ par :

$$\nu(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2) \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right).$$

La fonction ν sera écrite :

$$\nu(r, \theta) = (r \sin(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)) \ln \left(\ln \left(\frac{1}{r^2} \right) \right). \quad (4.2.3)$$

Elle a les propriétés suivantes :

1. $\nu > 0$ dans $\tilde{\Omega}$.
2. $\nu(x_1, x_1^2) = 0$ pour $-\tilde{x}_1 < x_1 < \tilde{x}_1$, où $\tilde{x}_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{e+4} - \sqrt{e}}{2\sqrt{e}}}$,
et $\nu(x_1, x_2) = 0$ pour $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{e}$.

$$3. \nu \in C^\infty(\tilde{\Omega}) \cap H^2(\tilde{\Omega}).$$

Pour vérifier le dernier point, il suffit de calculer $\frac{\partial \nu}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_i^2}$ et de démontrer que $\Delta \nu \in L^2(\tilde{\Omega})$.

$$\text{On a : } \quad \nu(x_1, x_2) = (-x_1^2 + x_2) \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right).$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_1} = -\frac{2x_1(-x_1^2 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)} - 2x_1 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right).$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_2} = -\frac{2x_2(-x_1^2 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)} + \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} = & -\frac{4x_1^2(-x_1^2 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2} + \frac{4x_1^2(-x_1^2 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)} + \frac{2(5x_1^2 - x_2)}{(x_1^2 + x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)} \\ & - 2 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} = -\frac{4x_2^2(-x_1^2 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2} + \frac{4x_2^2(-x_1^2 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)} + \frac{2(x_1^2 - 3x_2)}{(x_1^2 + x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)}.$$

$$\Delta \nu = \frac{4 \left(x_1^2 - x_2 + (2x_1^2 - x_2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)}{(x_1^2 + x_2^2) \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2} - 2 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right).$$

En utilisant les coordonnées polaires (4.2.3), on aura :

$$\Delta \nu \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

En effet ;

$$\begin{aligned}
|\Delta \nu|^2 &= \frac{16 \left(x_1^4 + x_2^2 - 2x_1^2 x_2 + (4x_1^4 + x_2^2 - 4x_1^2 x_2) \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2 \right)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^4} \\
&\quad + \frac{(16)(2)(x_1^2 - x_2)(2x_1^2 - x_2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^4} + 4 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2 \\
&\quad - 16 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) \frac{\left(x_1^2 - x_2 + (2x_1^2 - x_2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)}{(x_1^2 + x_2^2) \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2}.
\end{aligned}$$

Comme on a $x_1^2 < x_2$, alors :

$$\begin{aligned}
|\Delta \nu|^2 &\leq \frac{16 \left(x_2^2 + x_2^2 - 2x_1^2 x_2 + (4x_2^2 + x_2^2 - 4x_1^2 x_2) \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2 \right)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^4} \\
&\quad + \frac{16 \left((4x_1^2 - 6x_1^2 x_2 + 2x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^4} + 4 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2 \\
&\quad - 16 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) \frac{\left(x_2 - x_2 + (2x_2 - x_2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)}{(x_1^2 + x_2^2) \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{e}$, alors on a :

$$\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^4} < 1.$$

Ce qui nous donne :

$$|\Delta \nu|^2 \leq \frac{16(2x_2^2 - 2x_1^2x_2 + 5x_2^2 - 4x_1^2x_2 + 4x_2^2 - 6x_1^2x_2 + 2x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 4 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2 - 16 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)}.$$

Comme $\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) > 1 \iff \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) > 0$, et $x_2 > 0$ alors on a :

$$-16 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2) \ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)} < 0.$$

Ce qui entraine ;

$$|\Delta \nu|^2 \leq \frac{16(13x_2^2 - 12x_1^2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 4 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right)^2. \quad (4.2.4)$$

On intègre (4.2.4) en utilisant les coordonnées polaires (4.2.3), on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |\Delta \nu|^2 dx &\leq 16 \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{13r^2 \sin^2 \theta - 12r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r} dr d\theta \\ &\quad + 4 \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} r \ln \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 dr d\theta. \\ &= 16 \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{e}} 13r \sin^2 \theta - 12r^2 \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta + 4\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} r \ln \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 dr d\theta. \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Delta \nu \in L^2(\tilde{\Omega})$, alors $\nu \in H_0^1(\tilde{\Omega}) \cap H^2(\tilde{\Omega})$.

On considère $0 < \lambda < \tilde{x}_1$, et l'ensemble Ω de classe $C^{2,1}$ (au moins), tel que :

$$\Omega \subset [-\tilde{x}_1 + \lambda; \tilde{x}_1 - \lambda] \times \left[0, \frac{1}{\sqrt{e}} \right].$$

et la frontière de Ω ($\partial\Omega$) contient $\hat{\Gamma}$ avec :

$$\hat{\Gamma} = \left\{ (x_1, x_2) : -\tilde{x}_1 + \lambda < x_1 < \tilde{x}_1 - \lambda, x_2 = x_1^2 \right\} \cup \left\{ (x_1, x_2) : -\tilde{x}_1 + \lambda < x_1 < \tilde{x}_1 - \lambda, x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{e} \right\}$$

Le domaine Ω est inclus dans la partie colorée en gris sur la figure suivante.

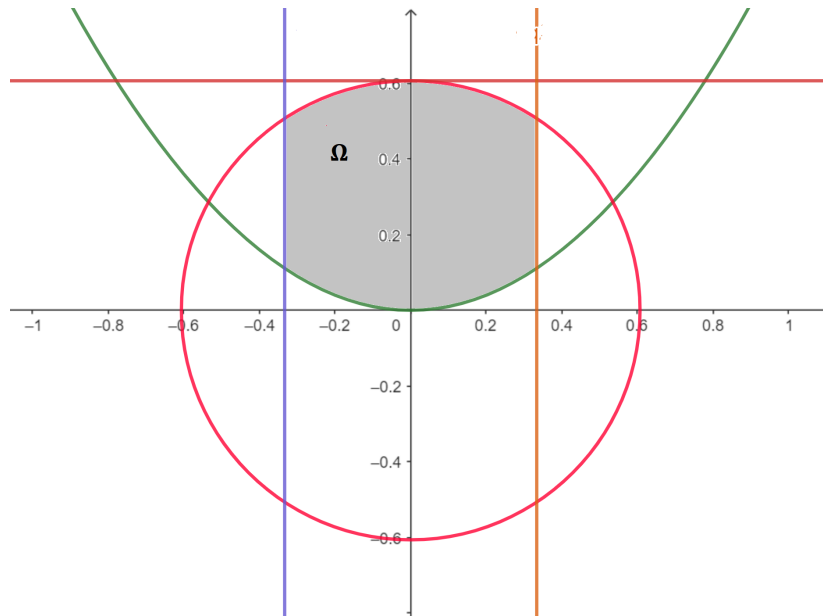


FIGURE 4.2 –

Pour $s > 0$ tel que $2s < \tilde{x}_1 - \lambda$, nous définissons la fonction régulière ρ tel que :

$$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2), \rho \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho(x_1, x_2) = 1 & \text{si } |x_1| \leq s, \\ \rho(x_1, x_2) = 0 & \text{si } |x_1| > \frac{3s}{2}. \end{cases}$$

Donc en particulier, la fonction $\rho \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$.

Maintenant nous montrons que $\xi_0 = \rho \cdot \nu$ vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $-\Delta \xi_0 = f_0 \in L^2(\Omega)$.
- (ii) $\text{Max} \left\{ \frac{\xi_0(x)}{\delta(x)}, \quad x \in \Omega \right\} = +\infty$.

Comme :

$$\begin{aligned} -\Delta \xi_0 &= -\Delta(\rho \cdot \nu). \\ &= -(\Delta \rho \cdot \nu + 2\nabla \nu \cdot \nabla \rho + \Delta \nu \cdot \rho) \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

alors on a bien la propriété (i), et on a aussi que $\xi_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Pour prouver la propriété (ii), on considère $x = (x_1, \gamma x_1)$, où $0 < \gamma < 1$, tel que x_1 est assez petit pour que $x \in \Omega$, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\xi_0(x)}{\delta(x)} &= \frac{\xi_0(x_1, \gamma x_1)}{\delta(x)} \\ &\geq \frac{(\gamma - x_1) \ln(-(\ln(1 + \gamma^2) x_1^2))}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0} +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\sup \left\{ \frac{\xi_0(x)}{\delta(x)} : x \in \Omega \right\} = +\infty.$$

Prenons $g = |f_0|$, et nous considérons $\xi > 0$ la solution de $-\Delta \xi = g$, $\xi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

D'après le principe de maximum on a $\xi_0 \leq \xi$, ce qui entraine :

$$\sup \left\{ \frac{\xi(x)}{\delta(x)} : x \in \Omega \right\} = +\infty.$$

Maintenant nous généraliserons la construction ci-dessus dans $\mathbb{R}^N$.
Pour $x = (\tilde{x}, x_N) = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N$, et soit :

$$\begin{cases} |\tilde{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_{N-1}^2. \\ \eta(x) = x_1^2 + \dots + x_N^2. \end{cases}$$

On considère l'ensemble ouvert :

$$\tilde{\Omega} = \left\{ x = (\tilde{x}, x_N), |\tilde{x}|^2 < x_N, \eta(x) < \frac{1}{e} \right\}.$$

Soit ν une fonction positive définie sur $\tilde{\Omega}$ par :

$$\nu(x) = (x_N - |\tilde{x}|^2) \ln \left(\ln \left(\frac{1}{\eta(x)} \right) \right),$$

Noter que ν a les mêmes propriétés comme le cas pour $N = 2$.

Pour $s > 0$ petit, on considère $\rho \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho(\tilde{x}, x_N) = 1 & \text{si } |\tilde{x}| \leq s, \\ \rho(\tilde{x}, x_N) = 0 & \text{si } |\tilde{x}| > \frac{3s}{2}, \end{cases}$$

et un ouvert Ω de classe $C^{2,1}$, avec $\text{supp } \rho \cap \tilde{\Omega} \subset \Omega$, et $\rho\nu = 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit $\xi_0 = \rho.\nu$, comme $\Delta\nu \in L^N(\Omega)$, alors $-\Delta\xi_0 \in L^N(\Omega)$.

On pose :

$$\begin{cases} e_{N-1} = (1, \dots, 1), \\ x_\gamma = x_N(\gamma, \dots, \gamma, 1) \in \Omega, \quad \gamma > 0. \end{cases}$$

Pour $x_N > 0$ assez petit, on a :

$$\frac{\xi_0(x_\gamma)}{\delta(x_\gamma)} \geq \frac{(1 - \gamma^2 |e_{N-1}|^2 x_N)}{\sqrt{1 + \gamma^2 |e_{N-1}|^2}} \ln \left(\ln \left(\frac{1}{x_N^2 (1 + \gamma^2 (N-1))} \right) \right) \xrightarrow{x_N \rightarrow 0} +\infty.$$

Ce qui implique :

$$\sup_{x \in \Omega} \left\{ \frac{\xi_0(x)}{\delta(x)} \right\} = +\infty.$$

On considère ξ la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\xi = |\Delta\xi_0| = h \in L^N(\Omega), \\ \xi \in W^{1,N}(\Omega) \cap W^{2,N}(\Omega), \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\sup_{x \in \Omega} \left\{ \frac{\xi(x)}{\delta(x)} \right\} = +\infty.$$

■

On considère l'opérateur :

$$\begin{array}{ccc} T & : & L^1(\Omega, \delta) \longrightarrow L^1(\Omega)^N \\ & & f \longmapsto Tf = \nabla u \end{array}$$

où u est la solution unique du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

alors on a le lemme suivant.

Lemme 4.2 *Si T est défini pour toute $f \in L^1(\Omega, \delta)$ alors T est borné.*

Preuve :

On prend $0 < \varepsilon \leq \alpha$ (α assez petit), et soit $\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \delta(x) > \varepsilon \right\}$.

On définit $T_\varepsilon f = \chi_{\Omega_\varepsilon} \nabla u$, avec : $\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Noter que :

- $T_\varepsilon f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Tf$ p.p.

- $|T_\varepsilon f| = \left| \chi_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \right| \leq |\nabla u| \in L^1(\Omega)$, (car : $\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) \leq 1$) .

Donc d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\|T_\varepsilon f - Tf\|_{L^1(\Omega)^N} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'autre part nous avons :

$$x \in \Omega_\varepsilon \iff x \in \Omega; 1 < \frac{\delta(x)}{\varepsilon},$$

donc :

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_{L^1(\Omega)^N} &= \int_{\Omega} \chi_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u| \, dx, \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u| \, dx, \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{\delta}{\varepsilon} |\nabla u| \, dx, \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u| \delta \, dx. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (2.4.3) du Théorème 2.4, on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \delta \, dx \leq C \int_{\Omega} |f| \delta \, dx,$$

ce qui implique

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^1(\Omega)^N} \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} |f| \delta \, dx.$$

Ce qui montre que T_ε est un opérateur linéaire continue de $L^1(\Omega, \delta)$ dans $L^1(\Omega)^N$, i.e :

$$T_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^1(\Omega, \delta), L^1(\Omega)^N).$$

Donc d'après le Théorème de Banach-Steinhaus (voir Théorème 1.8), on a :

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty,$$

où $E := L^1(\Omega, \delta)$, et $F := L^1(\Omega)^N$.

Autrement dit, il existe une constante C telle que :

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^1(\Omega)^N} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta)}.$$

Après le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$\|Tf\|_{L^1(\Omega)^N} = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta)} \quad (4.2.6)$$

■

Le résultat principal dans ce Chapitre est donné par le prochain Théorème.

Théorème 4.1 *Il existe un domaine régulier Ω de $\mathbb{R}^N$, et une fonction $f \in L^1(\Omega, \delta)$, tel que la solution u de (4.1.1) vérifiée*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|(x) \, dx = +\infty.$$

Démonstration du Théorème 4.1 :

Nous considérons Ω construit dans le Lemme 4.1. Supposons que pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, \delta)$ le gradient de la solution u du problème (4.2.8) est intégrable.

On note par ξ la solution du problème (4.2.1). Rappelons que ξ vérifie (4.2.2), i.e :

$$\sup_{x \in \Omega} \left\{ \frac{\xi(x)}{\delta(x)} \mid x \in \Omega \right\} = +\infty.$$

Montrons qu'il existe une fonction $\tilde{f} \in L^1(\Omega, \delta)$, $\tilde{f} \geq 0$, tel que :

$$\int_{\Omega} \tilde{f}(x) \xi(x) \, dx = +\infty. \quad (\text{i.e. : } \tilde{f} \notin L^1(\Omega, \xi)).$$

D'après le principe de maximum de Hopf (voir Théorème 1.12), il existe une constante $\alpha > 0$ tel que :

$$(\forall x \in \Omega) \quad \xi(x) \geq \alpha \delta(x).$$

Noter que
$$\int_{\Omega} |g(x)| \delta \, dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} |g(x)| \xi \, dx,$$

cela veut dire que : $L^1(\Omega, \xi) \hookrightarrow L^1(\Omega, \delta)$.

Maintenant on montre que : $L^1(\Omega, \xi) \neq L^1(\Omega, \delta)$. La démonstration sera faite par

l'absurde ; on suppose que $L^1(\Omega, \xi) = L^1(\Omega, \delta)$, et puisque les deux espaces sont des espaces Banach, alors d'après le Théorème de Banach (voir Théorème 1.9) ; il existe une constante $\beta > 0$ tel que :

$$(\forall g \in L^1(\Omega, \delta)) \quad \int_{\Omega} |g(x)| \xi(x) dx \leq \beta \int_{\Omega} |g(x)| \delta(x) dx. \quad (4.2.7)$$

$$(4.2.7) \implies \xi(x) \leq \beta \delta(x).$$

En effet ; soient $y \in \Omega$ et $g(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \cdot \chi_{B(y, \varepsilon)}(x)$, alors d'après la formule de la moyenne, il existe z ; $|z - y| < \varepsilon$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(x)| \xi(x) dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^N} \cdot \chi_{B(y, \varepsilon)}(x) \xi(x) dx, \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B(y, \varepsilon)} \xi(x) dx, \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \xi(z) \int_{B(y, \varepsilon)} dx, \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} |B(y, \varepsilon)| \xi(z), \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} |B(0, 1)| \varepsilon^N \xi(z), \\ &= \frac{\omega_N}{N} \xi(z). \end{aligned}$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |g(x)| \xi(x) dx = \frac{\omega_N}{N} \xi(y).$$

De même, on aura pour $y \in \Omega$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |g(x)| \delta(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^N} \cdot \chi_{B(y, \varepsilon)}(x) \delta(x) dx = \frac{\omega_N}{N} \delta(y).$$

Alors d'après l'inégalité (4.2.7), on aura :

$$\xi(x) \leq \beta \cdot \delta(x),$$

ce qui implique que,

$$\frac{\xi(x)}{\delta(x)} \leq \beta < +\infty,$$

contradiction !, car on a :

$$\sup_{x \in \Omega} \left\{ \frac{\xi(x)}{\delta(x)} \right\} = +\infty.$$

Donc on conclut que $L^1(\Omega, \xi) \subsetneq L^1(\Omega, \delta)$, alors il existe ainsi une fonction $\tilde{f} \in L^1(\Omega, \delta) (\tilde{f} \geq 0)$, tel que $\tilde{f} \notin L^1(\Omega, \xi)$.

$$\text{Soit : } \tilde{f}_k := T_k(\tilde{f}) := \begin{cases} \tilde{f} & \text{si } \tilde{f} \leq k, \\ k & \text{si } \tilde{f} > k, \end{cases}$$

et soit $\tilde{u}_k$ la solution du :

$$-\Delta \tilde{u}_k = \tilde{f}_k. \quad (4.2.8)$$

On utilise ξ comme fonction test dans (4.2.8), alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\Omega} \tilde{f}_k \xi \, dx &= - \int_{\Omega} \Delta \tilde{u}_k \xi \, dx, \\ &= - \int_{\Omega} \tilde{u}_k \Delta \xi \, dx, \\ &= \int_{\Omega} \tilde{u}_k h \, dx, \end{aligned}$$

ensuite par l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\Omega} \tilde{u}_k h \, dx \leq \|\tilde{u}_k\|_{L^{N'}(\Omega)} \cdot \|h\|_{L^N(\Omega)},$$

et comme $N' = \frac{N}{N-1} = 1^*$, alors :

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^{N'}(\Omega)} = \|\tilde{u}_k\|_{L^{1^*}(\Omega)}.$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev,

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^{N'}(\Omega)} \leq S \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^1(\Omega)},$$

d'après l'inégalité (4.2.6) on aura :

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^{N'}(\Omega)} \leq C \|\tilde{f}_k\|_{L^1(\Omega, \delta)}.$$

Nous avons bien : $\tilde{f}_k = \min(\tilde{f}, k)$, cela veut dire que : $0 \leq \tilde{f}_k \leq \tilde{f}$,

ce qui entraîne,

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^{N'}(\Omega)} \leq C \|\tilde{f}\|_{L^1(\Omega, \delta)}.$$

Donc finalement on a :

$$\int_{\Omega} \tilde{f}_k \xi \, dx \leq C \|\tilde{f}\|_{L^1(\Omega, \delta)} \|h\|_{L^N(\Omega)}.$$

D'autre part, on a :

- $\tilde{f}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}$ p.p.
- Soit : $\tilde{f}_{k1} = T_k(\tilde{f}_1) := \begin{cases} \tilde{f}_1 & \text{si } \tilde{f}_1 \leq k, \\ k & \text{si } \tilde{f}_1 > k, \end{cases}$

$$\text{et } \tilde{f}_{k2} = T_k(\tilde{f}_2) := \begin{cases} \tilde{f}_2 & \text{si } \tilde{f}_2 \leq k, \\ k & \text{si } \tilde{f}_2 > k. \end{cases}$$

Si $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_2$ alors on a $\tilde{f}_{k1} < \tilde{f}_{k2}$,

ce qui montre que $\tilde{f}_k$ est une fonction croissante positive.

D'après le Théorème de convergence monotone, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f} \xi \, dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \tilde{f}_k \xi \, dx. \\ &\leq C \|\tilde{f}\|_{L^1(\Omega, \delta)} \|h\|_{L^N(\Omega)} < +\infty, \end{aligned}$$

c'est une contradiction ; car nous avons déjà : $\int_{\Omega} \tilde{f} \xi \, dx = +\infty$.

Donc, il existe une fonction $\tilde{f} \in L^1(\Omega, \delta)$ telle que la solution très faible associée $\tilde{u}$ son gradient explose dans $L^1(\Omega)$, i.e :

$$|\nabla \tilde{u}| \notin L^1(\Omega).$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 4.1.

■

Appendices

4.3 A

Lemme 4.3 *Soit φ_1 la première fonction propre de l'opérateur $-\Delta$, il existe une constante $M > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on a :*

$$|\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| \leq M (|\ln \varphi_1| + 1).$$

Preuve

Supposons par l'absurde que ceci est incorrecte, donc :

$$(\forall M > 0) (\exists \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}) (\exists x \in \overline{\Omega}) |\ln(\varphi_1(x) + \varepsilon)| > M (|\ln(\varphi_1(x))| + 1)).$$

Si $M = M_n \rightarrow \infty$ (par exemple $M_n = n$) alors ceci donne :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists \varepsilon_n \in [0, \frac{1}{2}], (\exists x_n \in \overline{\Omega}) |\ln(\varphi_1(x_n) + \varepsilon_n)| > M_n (|\ln(\varphi_1(x_n))| + 1)).$$

Puisque $[0, \frac{1}{2}]$ est compact, il existe une sous suite $\varepsilon_{\sigma(n)} \rightarrow \bar{\varepsilon} \in [0, \frac{1}{2}]$.

De même, $\overline{\Omega}$ est compact, il existe une sous suite $x_{\gamma \circ \sigma(n)} \rightarrow \bar{x} \in \overline{\Omega}$.

On déduit,

$$(\forall n) |\ln(\varphi_1(x_{\gamma \circ \sigma(n)}) + \varepsilon_{\gamma \circ \sigma(n)})| > M_{\gamma \circ \sigma(n)} (|\ln(\varphi_1(x_{\gamma \circ \sigma(n)}))| + 1).$$

En faisant tendre n vers l'infini, et par continuité de $y \mapsto \varphi_1(y)$ et la fonction logarithme, on conclut,

$$|\ln(\varphi_1(\bar{x}) + \bar{\varepsilon})| \geq \infty.$$

Ce qui est impossible.

Alors on conclut qu'il existe une constante $M > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ on a :

$$|\ln(\varphi_1 + \varepsilon)| \leq M (|\ln \varphi_1| + 1).$$

■

4.4 B

Lemme 4.4 : Soit $\gamma \in C_0^1(\Omega)$, alors on a :

$$|\gamma(x)| \leq \|\nabla \gamma\|_\infty \delta(x). \quad (4.4.1)$$

Preuve :

Soient $x \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Prenons $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $|h| < \varepsilon$. On définit :

$$k(t) = \gamma(x + th), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Noter que :

$$k'(t) = h \nabla \gamma(x + th),$$

ensuite,

$$\begin{aligned} \gamma(x + th) - \gamma(x) &= k(t) - k(0), \\ &= \int_0^t k'(s) ds, \\ &= \int_0^t h \nabla \gamma(x + sh) ds. \end{aligned}$$

Ce qui entraine,

$$\begin{aligned} |\gamma(x) - \gamma(x + th)| &= \left| \int_0^t h \nabla \gamma(x + sh) ds \right|, \\ &\leq \int_0^t |h \nabla \gamma(x + sh)| ds, \\ &\leq \|\nabla \gamma\|_\infty \int_0^t |h| ds, \\ &\leq \|\nabla \gamma\|_\infty . t |h|. \end{aligned}$$

Soit $t > 0$ tel que $x + th \in \partial\Omega$. Si on note $x + th = y \in \partial\Omega$, alors :

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \leq \|\nabla \gamma\|_\infty |x - y|.$$

Si le vecteur h est tel que $y \in \partial\Omega$ alors $|x - y| = \delta(x)$, donc on a :

$$|\gamma(x)| \leq \|\nabla\gamma\|_{\infty} \delta(x).$$

■

Bibliographie

- [1] B. Abdellaoui, Y.O Boukarabila, S.E.H Miri ,*Introduction aux méthodes variationnelles et application à la résolution des EDP elliptiques*. Polycopié en ligne, (2018). doi : 10.13140/RG.2.2.10826.82883.
- [2] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, London, (1983).
- [3] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. Vazquez, *An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 22 (1995), no. 2, 241-273.
- [4] M.F.Bidaut-Veron,L.Vivier,*An elliptic semilinear equation with source term involving boundary measures : the subcritical case*, Rev ; Mat. Iberoamericana 16 (2000), 477-513.
- [5] H. Brezis,*Analyse fonctionnelle théorie et applications*, ed. Masson, Paris, (1983).
- [6] J.I. Díaz, J.M. Rakotoson, *Elliptic problems on the space of weighted with the distance to the boundary integrable functions revisited*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 21 (2014),pp. 45-59.
- [7] J.I. Díaz, J.M. Rakotoson, *On the differentiability of very weak solutions with right-hand side data integrable with respect to the distance to the boundary*, J. Functional Analysis, 257, (2009), 807-831.
- [8] C.Evans ,*Partial Differential Equation*, American Math. Society ,2010.
- [9] A.C.Ponce,*Selected problems on elliptic equations involving measures*, arXiv :1204.0668v1, Apr. 2012.
- [10] J.M. Rakotoson,F. Abergel *Gradient blow-up in Zygmund spaces for the very weak solution of a linear elliptic equation*.Discrete and Continuous Dynamical Systems 33, 5 (2013) 1809- 1818.

-
- [11] J.E. Rakotoson, J.M. Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux dérivées partielles*, ed. PUF, (1999).
 - [12] J.M. Rakotoson, *Réarrangement Relatif : un instrument d'estimation dans les problèmes aux limites*, ed. Springer Verlag Berlin, (2008).
 - [13] L. Veron, *Elliptic equations involving measures*. Stationary partial differential equations. Vol. I, 593-712, Handb. Differ. Equ., North-Holland, Amsterdam, 2004.
 - [14] C.Villani, *Analyse II, Cours de deuxième année donné à l'école normale supérieure de Lyon , année universitaire 2003-2004*.