

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques et Modélisation

Présenté par

MR RAKA MORAD

Soutenu le : 13 06 2024

Stabilité et bifurcation dans un modèle proie-prédateur avec délai temporel

Soutenu devant le jury composé de :

M. MOUSSAOUI ALI	Pr.	Université de Tlemcen	Président
Mme. KHITRI-KAZI-TANI LEILA	MCA	Université de Tlemcen	Examinatrice
M. MOULAI-KHATIR ANES	MCB	Université d'Oran 2	Encadrant

Année Universitaire : 2023-2024

DÉDICACES

Je dédie ce travail à mes chers parents, ma petite famille, et mes frères.

REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah le clément le miséricordieux

JE remercie en priorité ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la volonté d'achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur MOULAI-KHATIR Anes qui m'a encadré tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, sa patience et ses conseils précieux pour la réussite de ce travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur MOUSSAOUI Ali qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Mes plus vifs remerciements à Madame KHITRI-KAZI-TANI Leila, pour le temps qu'elle a consacré à examiner ce mémoire.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Résumé

Le présent mémoire de master a pour objectif d'analyser l'impact d'un retard temporel discret sur un modèle de proies-prédateurs exploité. Le modèle de base est un modèle de Lotka-Volterra modifié, appelé modèle de Leslie, où la capacité de charge de la population de prédateurs est proportionnelle à la densité de proies disponibles. Nous nous intéressons principalement à l'impact d'un retard temporel discret sur ce système. Dans cet objectif, nous tirerons la conclusion que le paramètre de retard, sous certaines conditions, ne pourra pas influencer les comportements de stabilité asymptotique des solutions autour du point d'équilibre de coexistence. Afin de maintenir la stabilité du système, nous donnons une formule pour évaluer la longueur estimée du retard. Finalement, nous réaliserons une analyse de bifurcation en prenant en compte le retard discret comme paramètre de bifurcation. Nous procéderons à des simulations numériques pour améliorer nos résultats mathématiques.

Mots clés : Proies-prédateurs · Retard temporel · Stabilité · Bifurcation de Hopf · Exploitation.

Abstract

The present master's thesis aims to analyze the impact of a discrete time delay on a harvested prey-predator model. The basic model is a modified Lotka-Volterra model, called the Leslie model, where the carrying capacity of the predator population is proportional to the available prey density. We are mainly interested in the impact of a discrete time delay on the harvested prey-predator model system. With this objective, we will draw the conclusion that the delay parameter, under certain conditions, will not be able to influence the asymptotic stability behaviors of the solutions around the coexistence equilibrium point. In order to maintain the stability of the system, we provide a formula to estimate the length of the delay. Finally, we will perform a bifurcation analysis considering the discrete delay as the bifurcation parameter. We will carry out numerical simulations to enhance our mathematical results.

Keywords : Prey-predators · Time delay · Stability · Hopf-bifurcation · Harvesting.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACES	i
REMERCIEMENTS	ii
INTRODUCTION GÉNÉRALE	v
1 DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE	1
1.1 Le Modèle de Lotka-Volterra : basique	1
1.2 Le Modèle de Lotka-Volterra : croissance logistique	2
1.3 Capacité de Charge des Prédateurs : Relation Proportionnelle avec la Popula- tion de Proies	3
1.4 Exploitation et Introduction du Retard	4
2 DYNAMIQUE SANS RETARD ET RÉSULTATS DE BASE SUR LE MODÈLE (1.8)-(1.9)	7
2.1 Faisabilité Biologique	7
2.2 Étude de stabilité : Absence du retard	9
2.2.1 Instabilité du point $E_{1,0}$	10
2.2.2 Stabilité Locale	11
2.2.3 Stabilité Globale	12
2.3 Simulation Numérique	13
2.3.1 Exemple 1	13
2.3.2 Exemple 2	14
3 MODÈLE AVEC RETARD	15
3.1 Le modèle	15
3.2 Système linéarisé et équation caractéristique	16
3.3 Stabilité du point E_* pour tout $\tau \geq 0$	18
3.4 Bifurcation : Émergence de solutions périodiques	20
3.4.1 Bifurcation dans le modèle (3.1)-(3.2)	20

3.5	Estimation du retard pour préserver la stabilité	24
3.5.1	Estimation	25
3.6	Simulation Numérique	29
CONCLUSION GÉNÉRALE		33
ANNEXE		34
A	Annexe Biologique	34
A.1	Réponse(s) fonctionnelle(s) de Holling	34
A.2	Modèle de Leslie-Gower [14, 15]	35
B	Outils Mathématiques	35
B.1	Principe de Comparaison[6]	35
B.2	Stabilité des équilibres [1]	36
B.3	Critère de Bendixson-Dulac [1]	37
B.4	Bifurcation de Hopf (Théorème) [1]	37
B.5	Critères de Nyquist [2, 3] :	38
BIBLIOGRAPHIE		39

TABLE DES FIGURES

2.1	Convergence des trajectoires (densités des proies et prédateurs) vers le point d'équilibre (droite) et dessin du champ de vecteurs (stream-plot) sur le plan $u - v$ pour le système considéré (gauche).	14
2.2	Convergence des trajectoires (densités des proies et prédateurs) vers le point d'équilibre (droite) et dessin du champ de vecteurs (stream-plot) sur le plan $u - v$ pour le système considéré (gauche).	14
3.1	Portrait de phase et convergence des solutions vers l'équilibre intérieur pour le cas $\tau = 8 < \tau_0^*$	30
3.2	Évolution temporelle des densités pour $\tau = 8 < \tau_0^*$	31
3.3	Portrait de phase des solutions pour le cas $\tau_0^* < 10 = \tau$. Nous constatons existence d'un cycle limite.	31
3.4	Pour $\tau_0^* < 10 = \tau$ nous constatons de solutions périodiques.	32

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les modèles proies-prédateurs sont des outils cruciaux pour appréhender les interactions dynamiques entre les populations d'espèces au sein d'un écosystème. Ils permettent d'analyser les relations complexes qui régissent les interactions entre les proies et leurs prédateurs, ainsi que de prédire l'évolution de leurs populations respectives au fil du temps. Néanmoins, dans de nombreux cas, ces interactions sont sujettes à des retards temporels, ajoutant une dimension supplémentaire à la modélisation et à la compréhension de ces systèmes.

Plusieurs facteurs peuvent expliquer ces retards, tels que le temps nécessaire à la reproduction, la migration saisonnière ou les cycles de vie complexes de certaines espèces. Par exemple, un prédateur a besoin de temps pour s'adapter aux variations de la population de proies, en raison du temps de gestation et de croissance des nouveaux individus. De même, les proies peuvent éprouver des difficultés à répondre aux variations de la pression de prédation en raison de leur cycle de reproduction ou de leur capacité limitée à détecter les prédateurs.

Il est essentiel de prendre en compte ces retards temporels pour modéliser avec précision les dynamiques entre proies et prédateurs. Les modèles classiques, qui supposent des interactions instantanées, peuvent mal représenter les interactions écologiques réelles. En intégrant ces retards, les modèles deviennent plus réalistes et permettent une meilleure compréhension des phénomènes observés, tels que les cycles de population, les extinctions locales ou les oscillations persistantes. En outre, la prise en compte des retards temporels dans les modèles peut mettre en lumière des comportements dynamiques complexes et inattendus, tels que des cycles limites, des bifurcations ou des phénomènes chaotiques.

Le sujet de ce mémoire de Master est l'analyse d'un modèle proie-prédateur avec retard. Le mémoire est structuré en trois chapitres séparés, chacun traitant d'un aspect particulier

du modèle.

Le chapitre initial se focalise sur l'élaboration du modèle de proies-prédateurs avec retard. Nous allons étudier les bases théoriques de ce modèle, en nous basant sur les recherches déjà menées dans ce domaine. Les équations différentielles qui décrivent les interactions entre les proies et les prédateurs seront exposées en détail, en prenant en considération les retards temporels pertinents.

Le deuxième chapitre se concentrera sur l'étude du modèle proies-prédateurs sans retard. Cette étape est cruciale pour établir une base de comparaison solide et comprendre les différences fondamentales entre les modèles avec et sans retard. Nous commençons ce chapitre par un traitement de la faisabilité biologique du modèle. Ensuite, nous analyserons les dynamiques de population obtenues à partir du modèle sans retard et examinerons en détail les résultats. Nous étudierons plus précisément la stabilité du système dans des conditions idéales. Cela nous permettra de mieux appréhender l'impact du retard sur les interactions proies-prédateurs et d'évaluer l'importance de l'incorporer dans ce modèle.

Finalement, le chapitre trois se concentrera sur l'analyse du modèle de proies-prédateurs avec retard. Les effets de l'incorporation du retard dans les équations du modèle seront examinés, en mettant l'accent sur les modifications importantes observées dans les dynamiques de population. De plus, les résultats des simulations numériques seront analysés et feront l'objet d'un appui d'affirmation des résultats théoriques.

Remarque : Ce travail est une synthèse de l'article intitulé <u>Effect of time delay on a harvested predator-prey model</u> de Nurul Huda Gazi · Malay Bandyopadhyay, publié dans Journal of Applied Mathematics Computing (2008) 26 : 263-280 [7]. Plus précisément, nous reprenons largement la présentation des auteurs.

Ce chapitre est consacré à l'élaboration d'un modèle proie-prédateur intégrant des retards. Nous détaillerons les équations différentielles qui décrivent les interactions dynamiques entre les populations de proies et de prédateurs, en tenant compte des retards temporels pertinents qui influencent ces interactions. Ces aspects théoriques serviront de base pour les analyses et simulations présentées dans les chapitres suivants.

1.1 Le Modèle de Lotka-Volterra : basique

Le modèle de prédation à deux dimensions initialement proposé par Lotka [16] et Volterra [19] présente des caractéristiques génériques qui en font une base essentielle pour de nombreux autres modèles. Lotka, initialement intéressé par les oscillations des réactions chimiques, a étendu son champ d'application aux problèmes démographiques, aux réseaux alimentaires, au cycle de l'eau et même aux cycles du dioxyde de carbone. Ces oscillations entre prédateurs et proies ont donné leur nom au modèle. Volterra, quant à lui, a été intrigué par un phénomène observé pendant la Première Guerre mondiale : l'interruption temporaire de la pêche dans l'Adriatique a entraîné une augmentation des poissons prédateurs, comme les requins, et une diminution des poissons proies. Bien que le nombre total de poissons soit demeuré constant pendant la guerre, les proportions ont changé. Volterra, à travers des équations différentielles, a étudié les raisons de cette perturbation de l'équilibre entre une proie et son prédateur, des raisons similaires à celles avancées par Lotka [16]. Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = cNP - DP, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec N , P densités respectives des proies et prédateurs. Les paramètres a , b , c et D sont des constantes positives définies comme suit :

a : le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs,

b : le taux de prédation du prédateur sur la proie,

c : le taux de croissance du prédateur suite à sa prédation,

D : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proies.

Les hypothèses de ce modèle peuvent être interprétées comme suit :

1. En absence de prédation, la population de proies croît selon une croissance malthusienne, illustrée par le terme aN dans (1.1).
2. La prédation réduit le taux de croissance des proies d'un montant proportionnel à la population conjointe de proies et de prédateurs, représenté par $-bNP$.
3. Sans proies pour se nourrir, la population de prédateurs décroît de façon exponentielle, indiquée par le terme $-DP$.
4. La croissance de la population de prédateurs est favorisée par la disponibilité de proies, exprimée par le terme cNP , proportionnel à la population de proies et de prédateurs.

L'équation de la fonction représentative dans (1.1) est basée sur la méthode des rencontres et les équations d'équivalence de Volterra [19].

La méthode des rencontres propose qu'il y a une espèce prédatrice et une espèce proie. Elle affirme que ces deux espèces doivent se rencontrer, et que le nombre de rencontres dépend du nombre d'individus de chaque espèce. La probabilité de ces rencontres est représentée par un coefficient de proportionnalité.

Les équations d'équivalence de Volterra, quant à elles, suggèrent qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et les apparitions d'individus suite à une rencontre. En d'autres termes, lorsque le prédateur mange une proie, la population du prédateur augmente d'autant que celle de la proie diminue [19].

1.2 Le Modèle de Lotka-Volterra : croissance logistique

Le modèle classique de Lotka-Volterra (1.1) suppose une croissance exponentielle des populations de proies. Cependant, dans la nature, les populations sont souvent limitées par leur environnement et tendent à s'autoréguler pour atteindre leurs capacités maximales, ce qui les stabilise autour de ces limites. En incorporant la croissance logistique des proies, le modèle de Lotka-Volterra modifié gagne en stabilité, comme le montre son analyse.

Dans ce modèle modifié, la population de proies suit une dynamique tenant compte de la croissance logistique, tandis que la réponse fonctionnelle des prédateurs est linéaire. La

dynamique de la population de prédateurs suit la règle classique du transfert de biomasse, où la croissance par individu est proportionnelle à la densité des proies consommées. La mortalité naturelle du prédateur dépend uniquement de sa propre densité[1].

Le système d'équations modifié est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K_1} \right) - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = g(N, P) - DP, \end{cases} \quad (1.2)$$

où a , b et D sont des constantes positives définies comme dans les modèles précédents. Ici, K_1 est la capacité de charge des proies et $g(N, P)$ modélise la croissance des prédateurs.

Bien que le modèle de base de Lotka-Volterra soit simplifié et ne capture pas tous les phénomènes observés dans la nature, il offre un formalisme mathématique riche. Des modèles plus avancés, tels que ceux intégrant la réponse fonctionnelle de Holling de type II (voir Annexe) ou la croissance logistique des proies, ont été développés pour améliorer la précision des prédictions [1, 12, 13]. Cependant, pour se rapprocher davantage de la réalité, il est essentiel de continuer à affiner ces modèles en s'appuyant sur les recherches menées par divers scientifiques.

1.3 Capacité de Charge des Prédateurs : Relation Proportionnelle avec la Population de Proies

La capacité de charge des prédateurs est l'une des caractéristiques les plus significatives de ces modèles. La capacité de charge est la quantité de prédateurs que l'environnement peut supporter en fonction de la disponibilité de proies. La charge des prédateurs est, dans de nombreux cas, proportionnelle à la population de proies. Cela implique que l'augmentation de la population de proies entraîne également une augmentation de la capacité de charge des prédateurs, ce qui permet à plus de prédateurs de survivre et de se reproduire. De la même manière, une baisse de la population de proies conduit à une réduction de la capacité de charge des prédateurs, ce qui peut avoir un impact sur la taille de la population de prédateurs dans l'environnement.

On peut représenter mathématiquement cette relation entre la capacité de charge des prédateurs et la population de proies en utilisant une équation dans un modèle de Leslie-Gower [14, 15, 17]. En particulier, on peut représenter la capacité de charge des prédateurs (K_p) en fonction de la population de proies (N), avec un coefficient de proportionnalité (K_2). Ainsi, le système d'équations peut dans ce cas être modifié comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K_2N}\right). \end{cases} \quad (1.3)$$

où r est le taux de croissance des prédateurs et le reste des paramètres sont définis comme précédemment.

1.4 Exploitation et Introduction du Retard

Dans un environnement donné, il est important de développer un modèle complet qui prend en compte tous les facteurs pertinents. Dans cette partie, nous présentons une formulation détaillée de ce modèle qui prend en compte l'effet de la récolte et l'effet de l'introduction d'un retard dans la réponse des prédateurs au changement de la densité des proies.

L'ajout de termes de récolte dans les équations de dynamique des populations repose sur l'hypothèse qu'une activité (de pêche par exemple) affecte directement la taille des populations de proies et de prédateurs. Ces termes de récolte sont souvent définis en fonction de divers facteurs tels que les pratiques de pêche, les quotas de récolte ou les stratégies de gestion des ressources. Pour une justification détaillée de l'inclusion de ces termes dans les modèles de dynamique des populations, les lecteurs intéressés peuvent se référer aux travaux de référence tels que ceux de [4] et [5], ainsi qu'aux références complémentaires fournies dans ces publications.

En gardant à l'esprit l'aspect ci-dessus, nous construisons le système suivant d'équations non linéaires gérées par des équations différentielles pour étudier la dynamique du système proie-prédateur comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{k}\right) - a_1 NP - r_1 FN, \\ \frac{dP}{dt} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{a_2 N}\right) - r_2 FP. \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{k}\right) - a_1 NP - r_1 FN, \\ \frac{dP}{dt} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{a_2 N}\right) - r_2 FP. \end{cases} \quad (1.5)$$

où les paramètres $a_1, a_2, r_1, r_2, k, F > 0$ et variables du système sont détaillés dans le tableau suivant :

Paramètre	Signification
N	Densité des proies
P	Densité des prédateurs
k	Capacité de charge du milieu
r_1	Taux de croissance intrinsèque des proies
r_2	Taux de croissance intrinsèque des prédateurs
a_1	Constante d'interaction prédateurs-proies
a_2	Constante de proportionnalité (charge du milieu et densité des proies)
F	Effort d'exploitation

TABLE 1.1 – Paramètres du modèle

A des fins de simplicité, nous introduisons le changements de variables suivant :

$$u = \frac{N}{k}, \quad v = \frac{P}{a_2 k}, \quad A = \frac{a_1 a_2 k}{r_1}, \quad B = \frac{r_2}{r_1}, \quad t' = r_1 t.$$

Grâce au changement précédent, le système (1.4)-(1.5) devient (ou l'on écrit t au lieu de t') :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1 - F - u) - Auv, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = Bv \left(1 - F - \frac{v}{u} \right). \end{cases} \quad (1.7)$$

Il existe différentes façons d'incorporer un seul retard discret dans les systèmes de modèles proies-prédateurs. Dans cette étude, nous introduisons un retard temporel discret τ dans l'équation de croissance des prédateurs.

$$\frac{dv}{dt} = Bv \left(1 - F - \frac{v(t - \tau)}{u(t - \tau)} \right).$$

L'introduction d'un retard discret dans l'équation de croissance des prédateurs repose sur l'hypothèse que le taux de croissance de la population de prédateurs dépend du rapport entre les proies et les prédateurs présents dans le système à un moment précédent. Pour une signification biologique détaillée et une justification de ce type de modèles d'équations différentielles avec retard, les lecteurs intéressés peuvent consulter les travaux de Beretta et Kuang [4], [5] et les références qui y sont mentionnées. Ainsi, le modèle que nous traitons dans ce mémoire est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1 - F - u) - Auv, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = Bv \left(1 - F - \frac{v(t - \tau)}{u(t - \tau)} \right). \end{cases} \quad (1.9)$$

muni des conditions initiales

$$u_0(\theta) = \phi_1(\theta) \geq 0, v_0(\theta) = \phi_2(\theta) \geq 0, \theta \in [-\tau, 0], u(0) > 0, v(0) > 0, \quad (1.10)$$

avec $\Phi = (\phi_1, \phi_2) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+^2)$ et les paramètres sont défini comme précédemment.

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE SANS RETARD ET RÉSULTATS DE BASE SUR LE MODÈLE (1.8)-(1.9)

Dans ce chapitre, notre attention sera portée sur l'analyse approfondie du modèle proie-prédateur sans retard, mais aussi sur la faisabilité du modèle.

2.1 Faisabilité Biologique

Notre premier objectif est de garantir que le modèle est biologiquement faisable. Pour cela, nous vérifions que les densités de population sont positives et ne croissent pas indéfiniment.

Remarque 1. *Nous remarquons que pour tout $t \in [-\tau, +\infty[$, la solution de (1.8)-(1.9) est donnée par*

$$\begin{cases} u(t) = u(0) \exp \left(\int_0^t (1 - F - u(s)) - Av(s) ds \right), \\ v(t) = v(0) \exp \left(\int_0^t \left(1 - F - \frac{v(s-\tau)}{u(s-\tau)} \right) ds \right), \end{cases}$$

et comme $u(0) > 0$, $v(0) > 0$, alors $u(t) > 0$, $v(t) > 0 \forall t \geq 0$ et les densités de populations seront toujours positives.

Dans le lemme qui suit, nous énonçons le résultat de la bornitude des solutions du système (1.8)-(1.9).

Lemme 1. *Si $F \in]0, 1[$, alors toute solution de (1.8)-(1.9) est bornée.*

Démonstration. Sachant que $u(t) > 0$, $v(t) > 0$, $A > 0 \forall t \geq 0$, une majoration de l'équation (1.8) est

$$\frac{du}{dt} \leq u(1 - F - u).$$

Par application du principe de comparaison [6], on a :

$$u(t) \leq \bar{u}(t). \quad \forall t \in [0, \infty[.$$

où $\bar{u}(t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \bar{u}'(t) = \bar{u}(1 - F - \bar{u}), \\ \bar{u}(0) = u(0) > 0. \end{cases}$$

Par intégration, nous avons

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}(1 - F - \bar{u})} = dt \Rightarrow \frac{1}{1 - F} \left(\frac{1}{\bar{u}} + \frac{1}{1 - F - \bar{u}} \right) d\bar{u} = dt,$$

ce qui nous mène à :

$$\bar{u}(t) = \frac{u(0)(1 - F)e^{(1-F)t}}{1 + u(0)e^{(1-F)t}}.$$

Nous pouvons conclure ici par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(t) = 1 - F.$$

Ainsi,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq 1 - F.$$

L'inégalité précédente assure la bornitude de $u(t)$ pour tout $t > 0$. De plus, de ce résultat, il existe un $T > 0$, tel que pour tout $t > T$, $0 < u(t) < 1 - F$. On conclut donc que

$$0 < u(t) < 1 - F \Rightarrow \frac{1}{1 - F} < \frac{1}{u(t)} \Rightarrow -\frac{1}{u(t)} < -\frac{1}{1 - F}.$$

L'inégalité précédente étant vraie pour tout $t > T$; pour $\tau > 0$ une quantité fixe, nous aurons aussi $0 < u(t) < 1 - F$ pour tout $t > T + \tau$, et à partir de l'équation (1.9), nous obtenons la majoration

$$\frac{dv}{dt} < Bv \left(1 - F - \frac{v(t - \tau)}{1 - F} \right). \quad (2.1)$$

Du faite que

$$\frac{dv}{dt} < Bv(1 - F),$$

pour tout $t > T$, une intégration de l'inégalité précédente de $t - \tau$ à t , donne

$$v(t) < v(t - \tau) \exp(B \times (1 - F)\tau).$$

Il en découle que

$$v(t - \tau) > v(t) \exp(-B \times (1 - F)\tau).$$

En utilisant ce résultat dans (2.1), nous obtenons, pour $t > T + \tau$,

$$v'(t) < Bv \left[1 - F - \frac{v(t) \exp(-B(1-F)\tau)}{1-F} \right]. \quad (2.2)$$

Cette inégalité différentielle s'écrit de manière équivalente par

$$v'(t) < \frac{B}{M} v [M^2 - v(t) \exp(-B(1-F)\tau)], \quad M = 1 - F,$$

et comme le calcul pour $u(t)$, elle conduit au résultat suivant

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq (1 - F) \exp(B(1 - F)\tau) \quad (2.3)$$

Ce résultat assure la bornitude de $v(t)$ pour tout temps positif t . □

Remarque 2. *Il est remarquable que la condition $F < 1$ est cruciale d'un point de vue biologique et que c'est grâce à cette condition que nous venons de prouver que toute solution du système est bornée.*

2.2 Étude de stabilité : Absence du retard

Dans cette section, nous étudions la stabilité du modèle en l'absence du retard temporel τ . Cela est nécessaire pour comprendre l'effet du retard temporel sur la dynamique du modèle complet. À cette fin, nous considérons la version non retardée du système modèle, définie comme suit :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(t)(1 - F - u(t)) - Au(t)v(t), \\ \frac{dv}{dt} = Bv(t) \left(1 - F - \frac{v(t)}{u(t)} \right), \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $u(0) = u_0 > 0$ et $v(0) = v_0 > 0$. Les densités des populations à un état d'équilibre, sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{dv}{dt} = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 0 = u^*(1 - F - u^*) - Au^*v^*, \\ 0 = Bv^* \left(1 - F - \frac{v^*}{u^*} \right). \end{cases}$$

Il est remarquable que u^* ne peut pas prendre de valeur nulle. Par ailleurs, de la première équation on a

$$v^* = 0 \implies u^*(1 - F - u^*) = 0 \implies u^* = 1 - F.$$

Nous tirons donc

$$E_{1,0} = (1 - F, 0),$$

Dans le cas où $v^* \neq 0$, nous avons de la seconde équation que

$$(u^*, v^*) \neq (0, 0) \implies v^* = (1 - F)u^*,$$

et donc en remplaçant dans l'équation $0 = u^*(1 - F - u^*) - Au^*v^*$,

$$u^* [(1 - F)(1 - Au^*) - u^*] = 0 \implies (1 - F)(1 - Au^*) - u^* = 0,$$

et nous pouvons déduire le deuxième point d'équilibre

$$E_* = (u_*, v_*) = \left(\frac{(1 - F)}{1 + A(1 - F)}, \frac{(1 - F)^2}{1 + A(1 - F)} \right).$$

Pour que les deux équilibres soient définis (biologiquement), on a la condition d'existence $0 < F < 1$.

Remarque 3. Dans tout ce qui va suivre, nous admettons la condition $1 - F > 0$ toujours vérifiée.

2.2.1 Instabilité du point $E_{1,0}$

Nous donnons dans ce paragraphe la stabilité du point d'équilibre axial $E_{1,0} = (1 - F, 0)$. Nous avons le résultat qui va suivre.

Théorème 1. Le point d'équilibre axial $E_{1,0} = (1 - F, 0)$ est instable.

Démonstration. La jacobienne du modèle (2.4) en un point (u^*, v^*) est donnée par :

$$J_{(u^*, v^*)} = \begin{pmatrix} (1 - F - 2u^*) - Av^* & -Au^* \\ B \frac{v^{*2}}{u^{*2}} & B \left(1 - F - 2 \frac{v^*}{u^*} \right) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que pour $(u^*, v^*) = (1 - F, 0)$, on a

$$J_{(1-F,0)} = \begin{pmatrix} -(1 - F) & -A(1 - F) \\ 0 & B(1 - F) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres dans ce cas sont : $\lambda_1 = -(1 - F) < 0$ et $\lambda_2 = B(1 - F) > 0$ car $B > 0$ et $1 - F > 0$. Ceci achève la preuve. $\square$

2.2.2 Stabilité Locale

Le point d'équilibre le plus intéressant pour le modèle (2.4) est E_* , également connu sous le nom de point d'équilibre de **coexistence**.

Tout au long de cette partie, nous nous concentrons sur la dynamique autour de ce point d'équilibre qui est intérieur. Comme notre intérêt dans ce paragraphe se porte sur la stabilité locale de l'état E_* , nous réalisons une analyse de stabilité linéaire autour de ce point. Pour réaliser cette analyse de stabilité, nous introduisons les perturbations suivantes :

$$u(t) = u_* + u_1, \quad v(t) = v_* + u_2, \quad (2.5)$$

dans l'équation (2.4) et, en négligeant les termes d'ordre supérieurs, nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

où

$$a_{11} = \frac{F-1}{1+A(1-F)}, \quad a_{12} = \frac{A(F-1)}{1+A(1-F)},$$

$$a_{21} = B(1-F)^2, \quad a_{22} = B(F-1).$$

Le premier résultat important de cette partie est comme suit.

Théorème 2. *Le point d'équilibre intérieur E_* est localement stable.*

Démonstration. La jacobienne du modèle (2.4) en un point (u^*, v^*) est donnée par :

$$J_{(u^*, v^*)} = \begin{pmatrix} (1-F-2u^*) - Av^* & -Au^* \\ B\frac{v^{*2}}{u^{*2}} & B\left(1-F-2\frac{v^*}{u^*}\right) \end{pmatrix}.$$

Pour l'équilibre de coexistence, la jacobienne précédente prend la forme qui suit :

$$J_{E_*} = \begin{pmatrix} \frac{F-1}{1+A(1-F)} & \frac{A(F-1)}{1+A(1-F)} \\ B(1-F)^2 & B(F-1) \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique pour le système linéarisé (2.6) est obtenu grâce à la jacobienne précédente et est donnée par

$$\det(J_{E_*} - \lambda I) = 0,$$

i.e

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad (2.7)$$

où p et q sont donnés par

$$p = a_{11} + a_{22} = -(1 - F) \left[\frac{1}{1 + A(1 - F)} + B \right] < 0, \quad (2.8)$$

$$q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{B(1 - F)^2}{1 + A(1 - F)} \left[\frac{1}{1 + A(1 - F)} + A(1 - F) \right] > 0. \quad (2.9)$$

Des deux signes sur p et q , i.e : la somme et le produit nous déduisons que les racines de (2.7) sont toutes deux négative et comme conclusion nous avons stabilité du point d'équilibre intérieur E_* . $\square$

2.2.3 Stabilité Globale

Nous nous concentrons dans ce paragraphe sur la preuve du résultat suivant :

Théorème 3. *L'existence d'un équilibre intérieur positif E_* assure la stabilité globale du système modélisé autour de ce point.*

Pour étudier le comportement global du système (2.4), nous établissons l'inexistence d'un cycle limite autour de l'équilibre intérieur positif E_* . La preuve repose sur l'application du critère de divergence de Bendixson-Dulac [1] (voir annexe).

Démonstration. Soit $h(u, v) = \frac{1}{uv^2}$. Il est évident que $h(u, v) > 0$ pour $u, v > 0$. Nous définissons :

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= u[(1 - F) - u - Av], \\ g_2(u, v) &= Bv \left[(1 - F) - \frac{v}{u} \right], \\ \Delta(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} (g_1 h) + \frac{\partial}{\partial v} (g_2 h), \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (g_1 h) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{v^2} [(1 - F) - u - Av] \right) \\ &= -\frac{1}{v^2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (g_2 h) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{uv} \left[(1 - F) - \frac{v}{u} \right] \right) \\ &= -\frac{B}{uv^2} + \frac{BF}{uv^2} + \frac{B}{u^2 v} - \frac{B}{u^2 v} \\ &= \frac{B}{uv^2} (1 - F), \end{aligned}$$

que nous utilisons dans

$$\Delta(u, v) = -\frac{1}{v^2} - \frac{B(1-F)}{uv^2}.$$

Cette quantité étant strictement inférieure à zéro pour tous $u, v > 0$ et $0 < F < 1$. Par conséquent, selon le critère de Bendixson-Dulac, il n'existe pas de cycle limite dans le premier quadrant de l'espace d'états autour de E_* . Ceci termine la preuve. $\square$

2.3 Simulation Numérique

Les systèmes complexes, tels que les modèles avec et sans retard, nécessitent souvent une approche numérique pour étudier leur comportement dynamique. Dans cette section, nous allons exploiter les techniques de simulation numérique afin d'analyser la dynamique du système (1.8)-(1.9).

2.3.1 Exemple 1

Cet exemple fournit une illustration numérique des résultats théoriques établis précédemment. Les conditions initiales et les valeurs des paramètres sont fixées. Le choix fut hypothétique car nous ne sommes pas en mesure d'avoir des données exactes.

Les conditions initiales pour les deux exemples sont :

$$u(0) = 0.2, v(0) = 0.2$$

Les valeurs des paramètres sont :

Paramètre	A	B	F
Valeur	0.7	0.5	0.4

Les valeurs des équilibres sont :

Point	u^*	v^*
$E_{1,0}$	0.6	0
E_*	0.422	0.253

Dans cet exemple et celui qui suivra, nous prenons $\tau = 0$.

Nous remarquons que les trajectoires vont toutes converger vers le point d'équilibre intérieur.

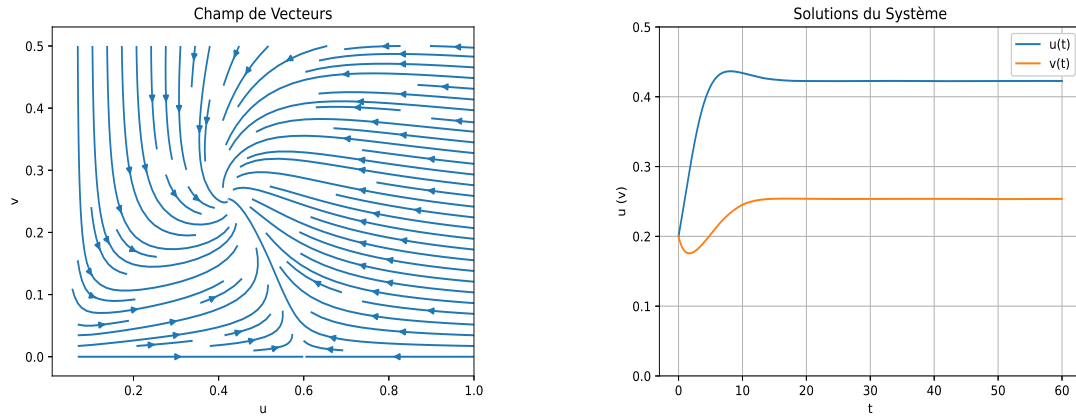


FIGURE 2.1 – Convergence des trajectoires (densités des proies et prédateurs) vers le point d'équilibre (droite) et dessin du champ de vecteurs (stream-plot) sur le plan $u - v$ pour le système considéré (gauche).

2.3.2 Exemple 2

Cet exemple fournit une seconde illustration des résultats avec un petit changement dans les valeurs prise.

Les valeurs des paramètres sont :

Paramètre	A	B	F
Valeur	1.5	1	0.5

Les valeurs des équilibres sont :

Point	u^*	v^*
$E_{1,0}$	0.5	0
E_*	0.285	0.142

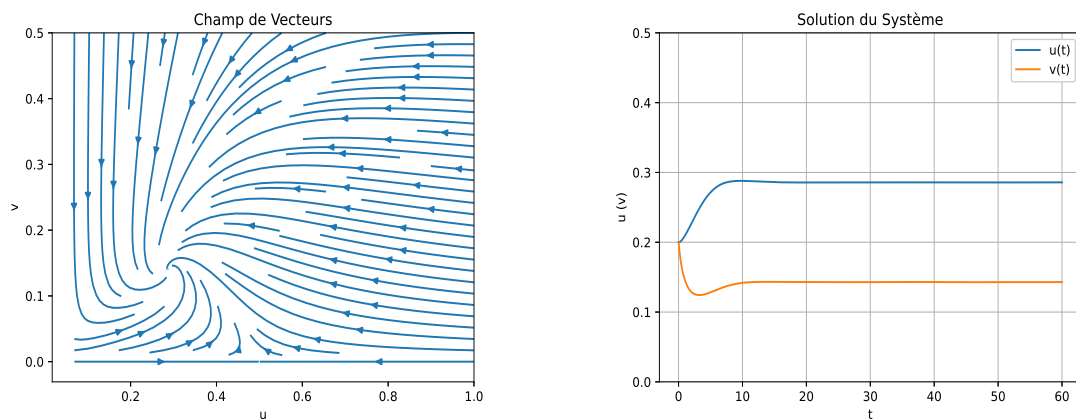


FIGURE 2.2 – Convergence des trajectoires (densités des proies et prédateurs) vers le point d'équilibre (droite) et dessin du champ de vecteurs (stream-plot) sur le plan $u - v$ pour le système considéré (gauche).

CHAPITRE 3

MODÈLE AVEC RETARD

Dans ce chapitre, nous considérons l'effet d'un retard temporel discret sur différents comportements dynamiques du système modèle à l'étude.

3.1 Le modèle

Nous rappelons le modèle en présence d'un retard discret, noté τ . Ce système est décrit par les équations différentielles couplées suivantes :

$$\frac{du}{dt} = u(1 - F - u) - Auv, \quad (3.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = Bv \left(1 - F - \frac{v(t - \tau)}{u(t - \tau)} \right). \quad (3.2)$$

où u et v sont les variables d'état, F , A et B sont des paramètres du système, et $\tau > 0$ est le retard discret (constant) dans le temps.

Remarque 4. Lorsque $F = 0$, ce système a été étudié par de nombreux chercheurs, notamment Baretta et Kuang [4, 5].

Remarque 5. On rappelle que les points d'équilibre sont les mêmes pour les modèles avec et sans retard car le retard n'affecte pas les variables d'états à l'état d'équilibre.

Dans ce cas particulier, il existe un point d'équilibre intérieur $E_* = (u_*, v_*)$ avec $\tau \neq 0$, où :

$$u_* = \frac{1 - F}{1 + A(1 - F)}, \quad (3.3)$$

$$v_* = (1 - F)u_*. \quad (3.4)$$

avec la condition $0 < F < 1$. Ce point d'équilibre intérieur E_* est donc valable pour le système modèle avec retard discret, décrit par les équations (3.1) et (3.2).

Ce type de modèle avec retard discret peut représenter divers processus physiques, chimiques ou biologiques impliquant des interactions couplées avec un effet de retard temporel, comme des réactions chimiques, des modèles épidémiologiques ou des systèmes écologiques.

3.2 Système linéarisé et équation caractéristique

Dans le cas présent, où le système original implique un retard discret τ , le système linéarisé sera un système d'équations différentielles à retard. L'analyse de stabilité d'un tel système repose sur l'étude de son équation caractéristique, qui est une équation transcendante en la variable complexe λ . Les racines de cette équation caractéristique déterminent le comportement asymptotique des solutions du système linéarisé, et par conséquent, la stabilité locale du point d'équilibre E_* du système non linéaire initial.

Nous allons détailler les calculs de l'équation caractéristique.

Posons $M = 1 - F$, le système devient :

$$\begin{cases} u' = u(M - u) - Auv = u(M - u - Av), \\ v' = Bv \left(M - \frac{v(t - \tau)}{u(t - \tau)} \right). \end{cases}$$

Rappelons les isoclines du système :

$$\begin{aligned} 0 &= u^* (M - u^*) - Au^* v^* = u^* (M - u^* - Av^*), \\ 0 &= Bv^* \left(M - \frac{v^*}{u^*} \right). \end{aligned}$$

En effectuant la transformation linéaire $x = u - u^*$, $y = v - v^*$ et en négligeant les termes non linéaires d'ordre supérieur ou égal à deux en x et y , nous obtenons premièrement pour u

$$\begin{aligned} x' &= u' = u(M - u - Av) \\ &= (x + u^*)(M - (x + u^*) - A(y + v^*)) \\ &= u^*(M - u^* - Av^*) + x(M - 2u^* - Av^*) - Au^* y \\ &= \alpha x + \beta y, \end{aligned}$$

et donc

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta y(t),$$

où

$$\alpha = M - 2u^* - Av^* = u^* \quad \text{et} \quad \beta = -Au^*.$$

Pour l'équation de v , sachant qu'on a un terme non lineaire sous forme de fraction, on procède d'une manière alternative équivalente, en passant par un développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre un. Pour notre cas :

$$\begin{aligned} y' = v' &= f(u^*, v^*) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u^*, v^*} (u - u^*) + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{u^*, v^*} (v - v^*) + \frac{\partial f}{\partial u(t-\tau)} \Big|_{u^*, v^*} (u(t-\tau) - u^*) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial v(t-\tau)} \Big|_{u^*, v^*} (v(t-\tau) - v^*) \\ &= Bv^* \left(M - \frac{v^*}{u^*} \right) + B \left(M - \frac{v^*}{u^*} \right) (v - v^*) + Bv^* \left(\frac{v^*}{u^{*2}} \right) (u(t-\tau) - u^*) \\ &\quad + Bv^* \left(-\frac{1}{u^*} \right) (v(t-\tau) - v^*) \\ &= \gamma x(t-\tau) + \delta y(t-\tau), \end{aligned}$$

et donc

$$y'(t) = \gamma x(t-\tau) + \delta y(t-\tau),$$

où

$$\gamma = B \left(\frac{v^*}{u^*} \right)^2 \quad \text{et} \quad \delta = -B \frac{v^*}{u^*}$$

Nous obtenons alors le système linéarisé suivant à partir des équations (3.1) et (3.2) :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) + \beta y(t), \tag{3.5}$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x(t-\tau) + \delta y(t-\tau), \tag{3.6}$$

où les coefficients α , β , γ et δ sont donnés précédemment. À partir de ce système linéarisé (3.5)-(3.6), nous obtenons l'équation caractéristique. D'abord, cherchons des solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' &= \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} \\ &= \begin{cases} \alpha a e^{\lambda t} + \beta b e^{\lambda t} \\ \gamma a e^{\lambda t - \lambda \tau} + \delta b e^{\lambda t - \lambda \tau} \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma e^{-\lambda \tau} & \delta e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Faisons un passage de termes d'un seul coté,

$$\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma e^{-\lambda\tau} & \delta e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma e^{-\lambda\tau} & \delta e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Par définition, l'équation caractéristique dans ce cas prends la forme suivante :

$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 + [p_1 + s_1 e^{-\lambda\tau}] \lambda + q e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.7)$$

où les coefficients p_1 , s_1 et q sont exprimés en fonction de α , β , γ et δ :

$$p_1 = -\alpha, \quad s_1 = -\delta, \quad q = \alpha\delta - \beta\gamma. \quad (3.8)$$

Sous la condition de stabilité locale du point d'équilibre E_* , nous avons $p_1 > 0$, $s_1 > 0$ et $q > 0$.

3.3 Stabilité du point E_* pour tout $\tau \geq 0$

Après avoir obtenu le point d'équilibre intérieur E_* et le système linéarisé associé, nous nous intéressons maintenant à l'analyse de la stabilité locale de E_* en présence du retard discret τ . La stabilité locale de ce point d'équilibre est cruciale pour comprendre le comportement du système lorsqu'il est légèrement perturbé autour de son état d'équilibre. L'objectif est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que E_* soit localement asymptotiquement stable, c'est-à-dire que toutes les solutions suffisamment proches de E_* convergent vers ce point d'équilibre lorsque le temps tend vers l'infini.

Pour ce faire, nous allons examiner les racines de l'équation caractéristique (3.7) du système linéarisé. La position des racines de cette équation par rapport à l'axe réel du plan complexe détermine la stabilité locale de E_* . Le théorème suivant énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour que E_* soit localement asymptotiquement stable pour toutes les valeurs de $\tau \geq 0$.

Théorème 4 ([7]). *Un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour que E_* soit localement asymptotiquement stable pour tout $\tau \geq 0$ est le suivant :*

- (i) E_* est stable en l'absence de retard temporel τ .
- (ii) Il n'y a aucune racine purement imaginaire de l'équation caractéristique (3.7).

Autrement dit, nous avons :

— Les conditions (i) et (ii) exigent que :

- les parties réelles des racines de $\Delta(\lambda, 0) = 0$ soient négatives;
- $\Delta(i\omega, \tau) \neq 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $\tau \geq 0$.
- Si une racine de $\Delta(\lambda, 0) = 0$ a une partie réelle positive, alors E_* n'est pas asymptotiquement stable sans retard temporel.
- Si $\exists \omega > 0$ et $\tau \geq 0$ tels que $\Delta(i\omega, \tau) = 0$, alors l'équation caractéristique (3.7) a au moins une paire de racines purement imaginaires, et E_* n'est pas asymptotiquement stable avec retard temporel.

Pour prouver ce qui précède, nous suivons la méthode du Théorème 3.7.1 dans [7, 8]. Supposons que $|\exp(-\lambda\tau)| \leq 1$ pour $\tau \geq 0$ et $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Ceci est possible pour une petite valeur de τ ; une analyse sera fournie dans la démonstration suivante.

Démonstration. Pour simplifier les notations mathématiques, nous réécrivons (3.7) comme :

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = 0, \quad (3.9)$$

où $\alpha_1 = p_1 + s_1 e^{-\lambda\tau}$ et $\alpha_2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)e^{-\lambda\tau}$. Pour $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ et $\tau \geq 0$, les coefficients α_1 et α_2 sont bornés en valeur absolue. Soit

$$\Gamma = \max_{1 \leq i \leq 2} \left[\sup_{\text{Re}(\lambda) \geq 0} |\alpha_i| \right],$$

et

$$\Phi = \max(1, 3\Gamma) \geq 1.$$

Pour $|\lambda| \geq \Phi \geq 1$ et $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, nous avons

$$|\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2| \geq |\lambda|^2 \left[1 - \frac{|\alpha_1|}{|\lambda|} - \frac{|\alpha_2|}{|\lambda|^2} \right],$$

et comme $-\frac{1}{|\lambda|^2} \geq -\frac{1}{|\lambda|}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} |\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2| &\geq |\lambda|^2 \left[1 - \frac{|\alpha_1|}{|\lambda|} - \frac{|\alpha_2|}{|\lambda|^2} \right] \\ &\geq |\lambda|^2 \left[1 - \frac{|\alpha_1|}{|\lambda|} - \frac{|\alpha_2|}{|\lambda|} \right] \\ &= |\lambda|^2 \left[1 - \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{|\lambda|} \right]. \end{aligned}$$

De plus par le fait que

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 2\Gamma \quad \text{et} \quad \Phi \geq 3\Gamma,$$

alors

$$|\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2| \geq \Phi^2 \left[1 - \frac{2\Gamma}{3\Gamma} \right] = \frac{\Phi^2}{3} > 0,$$

ce qui implique que dans le domaine $|\lambda| \geq \Phi$ et $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, l'équation caractéristique (3.7) n'a aucune racine avec une partie réelle positive, et cela est valable pour tout $\tau \geq 0$ satisfaisant les conditions énoncées précédemment. Ainsi nous avons les conclusions suivantes

- Par le critère (i), pour $\tau = 0$, les racines de l'équation caractéristique (3.7) sont toutes dans le demi-plan gauche $\text{Re}(\lambda) < 0$.
- Pour $\tau \neq 0$, la seule possibilité pour que les racines de (3.7) tombent dans la région $\text{Re}(\lambda) > 0$ est que, pour un certain $\tau > 0$, une ou plusieurs racines de (3.7) se trouvent sur l'axe imaginaire du plan complexe λ entre $-\Phi$ et Φ .
- La condition (ii) ne permettra à aucune des racines de (3.7) de se trouver sur l'axe imaginaire du plan λ pour tout $\tau \geq 0$.

Par conséquent, toutes les racines de (3.7) seront telles que $\text{Re}(\lambda) < 0$ lorsque (i) et (ii) sont satisfaites simultanément. Ceci achève la preuve. $\square$

3.4 Bifurcation : Émergence de solutions périodiques

Dans cette section, nous allons chercher une condition sous laquelle le système modèle (3.1)-(3.2) présente un cycle limite provenant d'une bifurcation de Hopf, en considérant le retard discret τ comme paramètre de bifurcation. Avant de procéder au résultat, énonçons le rappel suivant.

3.4.1 Bifurcation dans le modèle (3.1)-(3.2)

Dans ce travail, nous nous intéressons à la bifurcation autour du point d'équilibre intérieur E^* , ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 5. *Si $B < 1$, une bifurcation de Hopf aura lieu autour du point d'équilibre coexistant E_* lorsque τ passe par sa valeur critique $\tau = \hat{\tau}$.*

Démonstration. Nous rappelons l'équation caractéristique (3.7) :

$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 + [(p_1 + s_1 \exp(-\lambda\tau))\lambda + q \exp(-\lambda\tau)] = 0,$$

où p_1, s_1, q sont donnés par (3.8).

En substituant

$$\lambda = \mu(\tau) + i\nu(\tau),$$

dans l'équation caractéristique nous avons :

$$(\mu + i\nu)^2 + [p_1 + s_1 \exp(-(\mu + i\nu)\tau)](\mu + i\nu) + q \exp(-(\mu + i\nu)\tau) = 0.$$

En utilisant cette égalité, nous avons :

$$(\mu + i\nu)^2 = \mu^2 + 2i\mu\nu - \nu^2,$$

$$\exp(-(\mu + i\nu)\tau) = \exp(-\mu\tau)(\cos(\nu\tau) - i\sin(\nu\tau)),$$

$$[p_1 + s_1 \exp(-(\mu + i\nu)\tau)](\mu + i\nu) = [p_1 + s_1 \exp(-\mu\tau)(\cos(\nu\tau) - i\sin(\nu\tau))](\mu + i\nu),$$

$$q \exp(-(\mu + i\nu)\tau) = q \exp(-\mu\tau)(\cos(\nu\tau) - i\sin(\nu\tau)),$$

et en réunissant tous ces termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(\mu^2 + 2i\mu\nu - \nu^2) + [p_1(\mu + i\nu) + s_1 \exp(-\mu\tau)(\cos(\nu\tau) - i\sin(\nu\tau))(\mu + i\nu)] \\ &+ q \exp(-\mu\tau)(\cos(\nu\tau) - i\sin(\nu\tau)) = 0. \end{aligned}$$

Désormais en séparant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\mu^2 - \nu^2 + \mu[p_1 + s_1 \exp(-\mu\tau) \cos \nu\tau] + \nu s_1 \exp(-\mu\tau) \sin \nu\tau \\ &+ q \exp(-\mu\tau) \cos \nu\tau = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} &2\mu\nu + \nu[p_1 + s_1 \exp(-\mu\tau) \cos \nu\tau] - \mu s_1 \exp(-\mu\tau) \sin \nu\tau \\ &- q \exp(-\mu\tau) \sin \nu\tau = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Par notre hypothèse précédente, λ et donc μ et ν sont des fonctions de τ .

Nous allons maintenant examiner le changement de stabilité de E_* qui se produit pour les valeurs de τ pour lesquelles $\mu = 0$ et $\nu \neq 0$. Soit $\tau = \hat{\tau}$ une valeur critique de τ pour laquelle $\mu(\hat{\tau}) = 0$ et $\nu(\hat{\tau}) = \hat{\nu} \neq 0$. Alors (3.10) et (3.11) deviennent :

$$-\hat{\nu}^2 + \hat{\nu} s_1 \sin \hat{\nu} \hat{\tau} + q \cos \hat{\nu} \hat{\tau} = 0, \tag{3.12}$$

$$\hat{\nu} p_1 + \hat{\nu} s_1 \cos \hat{\nu} \hat{\tau} - q \sin \hat{\nu} \hat{\tau} = 0. \tag{3.13}$$

Ces deux équations sont réécrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{\nu} s_1 & q \\ -q & \hat{\nu} s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\hat{\nu} \hat{\tau}) \\ \cos(\hat{\nu} \hat{\tau}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\nu}^2 \\ -\hat{\nu} p_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi une résolution (par Cramer) de ce système donne :

$$\sin(\hat{\nu} \hat{\tau}) = \frac{\hat{\nu}^2 s_1 + p_1 q \hat{\nu}}{q^2 + \nu^2 s_1^2},$$

$$\cos(\hat{\nu} \hat{\tau}) = \frac{q \hat{\nu}^2 - p_1 s_1 \hat{\nu}^2}{q^2 + \nu^2 s_1^2}.$$

Par élévation au carré et sommation des deux termes précédents, nous avons :

$$\hat{v}^4 + (p_1^2 - s_1^2) \hat{v}^2 - q^2 = 0. \quad (3.14)$$

Remarquons que c'est une équation du second degré en $\hat{v}^2$ et donc, du faite que nous ayons

$$(p_1^2 - s_1^2)^2 + 4q^2 > 0,$$

il est possible d'avoir deux racines de (3.14) sous la forme :

$$\hat{v}^2 = \frac{1}{2} \left[-(p_1^2 - s_1^2) \pm \sqrt{(p_1^2 - s_1^2)^2 + 4q^2} \right]$$

Puisque

$$(p_1^2 - s_1^2)^2 + 4q^2 > (p_1^2 - s_1^2)^2,$$

il n'y a qu'une seule solution réelle pour $\hat{v}^2$. Nous pouvons trouver l'expression pour $\tau = \hat{\tau}$ à partir de (3.12) et (3.13) ou encore plus précisément à partir des valeurs sur $\cos(\hat{v}\tau)$ et $\sin(\hat{v}\tau)$:

$$\tan(\hat{v}\hat{\tau}) = \frac{\sin(\hat{v}\hat{\tau})}{\cos(\hat{v}\hat{\tau})},$$

nous obtenons le paramètre de retard critique $\hat{\tau}$ donné par la formula suivante :

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\hat{v}} \arctan \left[\frac{\hat{v}^2 s_1 + p_1 q}{q \hat{v} - p_1 s_1 \hat{v}} \right] + \frac{n\pi}{\hat{v}}, \quad (3.15)$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$

La plus petite valeur de $\hat{\tau}$ est obtenue en choisissant $n = 0$, soit :

$$\hat{\tau}_0 = \frac{1}{\hat{v}_0} \arctan \left[\frac{s_1 \hat{v}_0^2 + p_1 q}{q \hat{v}_0 - p_1 s_1 \hat{v}_0} \right]. \quad (3.16)$$

Pour analyser le changement de comportement de E_* par rapport à τ , nous examinons le signe de $\frac{d\mu}{d\tau}$ évalué en $\tau = \hat{\tau}$ avec les conditions $\mu(\hat{\tau}) = 0$ et $v(\hat{\tau}) = \hat{v} \neq 0$. Si la valeur est positive, alors la stabilisation ne peut pas avoir lieu pour la valeur paramétrique critique $\hat{\tau}$ [9, 10, 11].

Nous dérivons (3.10) et (3.11) par rapport à τ :

$$\frac{d}{d\tau} [\mu^2 - v^2 + \mu [p_1 + s_1 \exp(-\mu\tau) \cos v\tau] + v s_1 \exp(-\mu\tau) \sin v\tau + q \exp(-\mu\tau) \cos v\tau] = 0,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} & -2\nu\nu' + p_1\mu' + s_1 \left[(\mu e^{-\mu\tau})' \cos \nu\tau \right] + s_1 \left[\nu e^{-\mu\tau} \right]' \sin \nu\tau + \nu e^{-\mu\tau} \cdot (\sin \nu\tau)' \\ & + q \left[(e^{-\mu\tau})' \cos \nu\tau + e^{-\mu\tau} (\cos \nu\tau)' \right] = 0, \end{aligned}$$

par ailleurs

$$\frac{d}{d\tau} (2\mu\nu + \nu [p_1 + s_1 \exp(-\mu\tau) \cos \nu\tau] - \nu s_1 \exp(-\mu\tau) \sin \nu\tau - q \exp(-\mu\tau) \sin \nu\tau) = 0,$$

se réduit de même à

$$\begin{aligned} & 2(\mu\nu)' + (p_1\nu)' + s_1 \left[(e^{-\mu\tau})' (\nu \cos \nu\tau) + e^{-\mu\tau} \cdot (\nu \cos \nu\tau)' \right] - s_1 \left[(e^{-\mu\tau})' (\mu \sin \nu\tau) \right. \\ & \left. + (e^{-\mu\tau}) (\mu \sin \nu\tau)' \right] - q \left[(e^{-\mu\tau})' \sin \nu\tau + e^{-\mu\tau} (\sin \nu\tau)' \right] = 0, \end{aligned}$$

et en posant $\tau = \hat{\tau}$ (utilisant $\mu = 0$ et $\nu = \hat{\nu}$), nous obtenons :

$$\xi \left[\frac{d\mu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} + \eta \left[\frac{d\nu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} = a, \quad (3.17)$$

$$-\eta \left[\frac{d\mu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} + \xi \left[\frac{d\nu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} = b. \quad (3.18)$$

où

$$\begin{aligned} \xi &= p_1 + s_1 \cos \hat{\nu}\hat{\tau} - s_1 \hat{\nu}\hat{\tau} \sin \hat{\nu}\hat{\tau} - q\hat{\tau} \cos \hat{\nu}\hat{\tau}, \\ \eta &= -2\hat{\nu} + s_1 \sin \hat{\nu}\hat{\tau} + s_1 \hat{\nu}\hat{\tau} \cos \hat{\nu}\hat{\tau} - q\hat{\tau} \sin \hat{\nu}\hat{\tau}, \\ a &= q\hat{\tau} \sin \hat{\nu}\hat{\tau} - s_1 \hat{\nu}^2 \cos \hat{\nu}\hat{\tau}, \\ b &= s_1 \hat{\nu}^2 \sin \hat{\nu}\hat{\tau} + q\hat{\nu} \cos \hat{\nu}\hat{\tau}. \end{aligned}$$

En résolvant (3.17)-(3.18) pour $\left[\frac{d\mu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}}$; que nous écrivons encore une fois en forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left[\frac{d\mu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} \\ \left[\frac{d\nu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

alors, nous obtenons :

$$\left[\frac{d\mu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} = \frac{\xi a - \eta b}{\xi^2 + \eta^2}.$$

En utilisant (3.12) et (3.13), et en remplaçant $\cos(\hat{v}\tau)$ et $\sin(\hat{v}\tau)$ par leurs valeurs, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \xi a - \eta b &= (p_1 + s_1 \cos \hat{v}\hat{\tau} - s_1 \hat{v}\hat{\tau} \sin \hat{v}\hat{\tau} - q\hat{\tau} \cos \hat{v}\hat{\tau}) (q\hat{\tau} \sin \hat{v}\hat{\tau} - s_1 \hat{v}^2 \cos \hat{v}\hat{\tau}) \\
 &\quad - (-2\hat{v} + s_1 \sin \hat{v}\hat{\tau} + s_1 \hat{v}\hat{\tau} \cos \hat{v}\hat{\tau} - q\hat{\tau} \sin \hat{v}\hat{\tau}) (s_1 \hat{v}^2 \sin \hat{v}\hat{\tau} + q\hat{v} \cos \hat{v}\hat{\tau}) \\
 &= \frac{\hat{v}^2}{q^2 + \hat{v}^2 s_1^2} [(2\hat{v}^2 s_1 + p_1 q) (\hat{v}^2 s_1 + p_1 q) + (2q\hat{v}^2 - p_{11}^s \hat{v}^2) (q - p_1 s_1)] - s_1^2 \hat{v}^2 \\
 &= \frac{\hat{v}^2}{q^2 + \hat{v}^2 s_1^2} [2\hat{v}^4 s_1^2 + 2\hat{v}^2 s_1 p_1 q + p_2 q \hat{v}^2 s_1 + p_1^2 q^2 + 2q^2 \hat{v}^2 - 2q p_1 s_1 \hat{v}^2 - p_1 q s_1 \hat{v}^2 + p_1^2 s_1^2 \hat{v}^2] - s_1^2 \hat{v}^2 \\
 &= \frac{\hat{v}^2}{q^2 + \hat{v}^2 s_1^2} [2\hat{v}^4 s_1^2 + p_1^2 q^2 + 2q^2 \hat{v}^2 + p_1^2 s_1^2 \hat{v}^2] - s_1^2 \hat{v}^2 \\
 &= \frac{\hat{v}^2}{q^2 + \hat{v}^2 s_1^2} [(2\hat{v}^2 + p_1^2)(q^2 + \hat{v}^2 s_1^2)] - s_1^2 \hat{v}^2 \\
 &= \hat{v}^2 [2\hat{v}^2 + p_1^2 - s_1^2].
 \end{aligned}$$

Rappelons que pour $B < 1$, nous avons

$$p_1 - s_1 = u^* - B(1 - F) > 0,$$

alors $\left[\frac{d\mu}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} > 0$. Nous avons la conclusion suivante, une bifurcation de Hopf aura lieu et cela car nous avons a un moment donné occurrence de la relation paramétrique $\tau = \hat{\tau}$.

La preuve est achevée. $\square$

3.5 Estimation du retard pour préserver la stabilité

Dans cette section, nous nous intéressons à déterminer une estimation du retard maximal τ pour lequel le point d'équilibre intérieur E_* reste localement asymptotiquement stable. Cette estimation est cruciale d'un point de vue pratique, car elle fournit une plage de valeurs du retard dans laquelle le système conserve son comportement stable autour de l'équilibre. Au-delà de cette plage, des instabilités ou des dynamiques indésirables pourraient se produire.

Pour obtenir cette estimation, nous utiliserons les critères de Nyquist, qui permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de l'équation caractéristique associée. Dans le cas présent, l'équation caractéristique (3.7) du système linéarisé autour de E_* dépend du paramètre de retard τ . En analysant le comportement des racines de cette équation en fonction de τ , nous pourrions déterminer une valeur maximale de τ pour laquelle toutes les racines ont une partie réelle négative, garantissant ainsi la stabilité locale de E_* .

3.5.1 Estimation

Nous supposons dans un premier temps que, en l'absence de retard ($\tau = 0$), le point d'équilibre E_* est localement asymptotiquement stable. Cette condition initiale nous permettra d'appliquer un raisonnement de continuité pour obtenir l'estimation de τ recherchée. Les étapes détaillées de cette analyse sont présentées ci-après. À partir des équations (3.5) et (3.6), nous obtenons :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) + \beta y(t), \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x(t - \tau) + \delta y(t - \tau), \quad (3.19)$$

Soit $\bar{x}(s)$ et $\bar{y}(s)$ les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$ respectivement. Alors, en prenant la transformée de Laplace de (3.19), nous obtenons :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{\alpha x(t)\} + \mathcal{L}\{\beta y(t)\}. \quad (3.20)$$

On utilise la propriété de la transformé de Laplace suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'(t)\} &= s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} &= s\bar{x}(s) - x(0). \end{aligned}$$

$$(3.20) \Rightarrow s\bar{x}(s) - x(0) = \alpha\bar{x}(s) + \beta\bar{y}(s).$$

$$\Rightarrow (s - \alpha)\bar{x}(s) = \beta\bar{y}(s) + x(0)$$

Maintenant, pour l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x(t - \tau) + \delta y(t - \tau),$$

nous avons

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{\gamma x(t - \tau)\} + \mathcal{L}\{\delta y(t - \tau)\}, \quad (3.21)$$

on utilise les propriétés de la transformé de Laplace :

$$\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} \bar{x}(s) + \int_{-\tau}^0 x(t) e^{-s\tau} dt.$$

Ainsi,

$$(3.21) \Rightarrow s\bar{y}(s) - y(0) = \gamma e^{-s\tau} \bar{x}(s) + \delta e^{-s\tau} \bar{y}(s) + \gamma e^{-s\tau} k_1(s) + \delta e^{-s\tau} k_2(s),$$

où

$$k_1(s) = \int_{-\tau}^0 x(t) e^{-s\tau} dt \text{ et } k_2(s) = \int_{-\tau}^0 y(t) e^{-s\tau} dt.$$

En réarrangeant les équations ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (s - \alpha)\bar{x}(s) &= \beta\bar{y}(s) + x(0) \\ s\bar{y}(s) &= \gamma\bar{x}(s)e^{-s\tau} + \gamma k_1(s)e^{-s\tau} + \delta\bar{y}(s)e^{-s\tau} + \delta k_2(s)e^{-s\tau} + y(0), \end{aligned} \quad (3.22)$$

En multipliant la 1^{ère} équation par $(\delta e^{-s\tau})$ et la 2^{ème} par $(s - \alpha)$, nous avons :

$$\begin{aligned} [s^2 - (\alpha + \delta e^{-s\tau})s + (\alpha\delta - \beta\gamma)e^{-s\tau}] \bar{y}(s) &= \gamma x(0)e^{-s\tau} + \gamma(s - \alpha)k_1(s)e^{-s\tau} \\ &\quad + \delta(s - \alpha)k_2(s)e^{-s\tau} + (s - \alpha)y(0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous constatons donc que

$$\bar{y}(s) = \frac{H(s)}{G(s)},$$

où

$$H(s) = \gamma x(0)e^{-s\tau} + \gamma(s - \alpha)k_1(s)e^{-s\tau} + \delta(s - \alpha)k_2(s)e^{-s\tau} + (s - \alpha)y(0),$$

et

$$G(s) = s^2 - [\alpha + \delta e^{-s\tau}]s + (\alpha\delta - \beta\gamma)e^{-s\tau}.$$

Les zeros de G vont nous permettre d'obtenir l'estimation souhaitée. Ainsi, nous devons assurer en premier que :

- Pour que E_* soit localement asymptotiquement stable, il est nécessaire et suffisant que tous les pôles de $\bar{y}(s)$ aient une partie réelle négative.
- Nous emploierons les critères de Nyquist [2, 3].

Remarquons que :

$$\begin{aligned} G(i\omega_0) &= -\omega_0^2 - \delta\omega_0 \sin \omega_0\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cos \omega_0\tau \\ &\quad + i(-\alpha\omega_0 - \delta\omega_0 \cos \omega_0\tau - (\alpha\delta - \beta\gamma) \sin \omega_0\tau). \end{aligned}$$

Nous souhaitons avoir les conditions pour la stabilité asymptotique locale de E_* qui sont données par les critères de Nyquist :

$$\operatorname{Im} G(i\omega_0) > 0, \quad (3.24)$$

$$\operatorname{Re} G(i\omega_0) = 0, \quad (3.25)$$

où ω_0 est comme définit dans la section précédente, la plus petite racine positive de $G(s) = 0$. Les parties imaginaires et réelles de G sont :

$$\operatorname{Im}(G) = \delta\omega_0 \cos \omega_0\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \sin \omega_0\tau + \alpha\omega_0,$$

et

$$\operatorname{Re}(G) = \omega_0^2 + \delta\omega_0 \sin \omega_0\tau - (\alpha\delta - \beta\gamma) \cos \omega_0\tau.$$

Par conséquent, sous les conditions de Nyquist, les équations (37) et (38) deviennent :

$$\delta\omega_0 \cos \omega_0\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \sin \omega_0\tau + \alpha\omega_0 < 0,$$

et

$$\omega_0^2 = -\delta\omega_0 \sin\omega_0\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cos\omega_0\tau.$$

Pour obtenir une estimation de la durée du retard qui préserve la stabilité, nous utilisons les conditions suivantes :

$$-\alpha\omega > \delta\omega \cos\omega\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \sin\omega\tau, \quad (3.26)$$

et

$$\omega^2 = -\delta\omega \sin\omega\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cos\omega\tau. \quad (3.27)$$

Nous remarquons que l'équation (3.27) est satisfaite et la stabilité de E_* dépend de la satisfaction de l'inégalité (3.26).

- Nous essayons maintenant de trouver une borne supérieure de ω , disons ω_+ , indépendante du paramètre de retard discret τ , telle que l'inégalité (3.26) soit satisfaite pour toutes les valeurs de ω où $0 \leq \omega \leq \omega_+$.
- En particulier, ce qui précède reste vrai pour $\omega = \omega_0$ si $\omega_0 \leq \omega_+$.

En utilisant les majorations

$$|\cos\omega_0\tau| \leq 1 \text{ et } |\sin\omega_0\tau| \leq 1,$$

dans l'expression $(\alpha\delta - \beta\gamma) \cos\omega_0\tau - \delta\omega_0 \sin\omega_0\tau$, nous obtenons :

$$\omega_0^2 \leq (\alpha\delta - \beta\gamma) - \delta\omega_0. \quad (3.28)$$

Si ω_+ désigne la plus petite racine positive de l'équation quadratique

$$\omega^2 + \delta\omega - (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0,$$

où

$$\delta^2 + 4(\alpha\delta - \beta\gamma) > 0,$$

et donc :

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \left[-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(\alpha\delta - \beta\gamma)} \right]. \quad (3.29)$$

Il est à noter que $\omega_+ \geq \omega_0$. Nous avons donc obtenu une borne supérieure de ω , à savoir ω_+ ($\omega_0 \leq \omega_+$), pour laquelle l'inégalité (3.26) est satisfaite pour toutes les valeurs de ω dans l'intervalle $[0, \omega_+]$ et spécialement pour $\omega_0 \leq \omega_+$. De plus, ω_+ est indépendante du paramètre de retard τ .

Maintenant, nous sommes en mesure de trouver une estimation pour le paramètre de retard τ de sorte que l'inégalité (3.26) soit satisfaite. Comme $\alpha = -u_* < 0$, nous pouvons

formuler que l'inégalité (3.26) peut être mise sous la forme :

$$\omega^2 > -\frac{\delta\omega^2}{\alpha} \cos \omega\tau - (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\omega}{\alpha} \sin \omega\tau. \quad (3.30)$$

Pour $\tau = 0$, l'inégalité ci-dessus se réduit à $\alpha + \delta < 0$, ce qui est un résultat valide en l'absence de retard pour la relation paramétrique $\omega = \omega_0$.

De plus, pour $\tau = 0$, la solution de l'équation (3.27), c'est-à-dire $\omega^2 = \alpha\delta - \beta\gamma$, existe car $\alpha\delta > \beta\gamma$ (en raison de la condition de stabilité du point d'équilibre de coexistence).

Donc, par continuité, cela restera vrai pour un $\tau > 0$ suffisamment petit à $\omega = \omega_0$.

Désormais, en substituant ω^2 de l'équation (3.27) dans l'inégalité (3.30), nous obtenons :

$$-\delta\omega \sin \omega\tau + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cos \omega\tau > -\frac{\delta\omega^2}{\alpha} \cos \omega\tau - (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\omega}{\alpha} \sin \omega\tau$$

L'inégalité ci-dessus peut être mise sous la forme :

$$\left[-\frac{\delta\omega^2}{\alpha} - (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \cos \omega\tau + \left[\delta\omega - \frac{\omega}{\alpha} (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \sin \omega\tau < 0$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma)$, l'inégalité précédente prend la forme :

$$\left[-\frac{\delta\omega^2}{\alpha} - (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \cos \omega\tau + \left[\delta\omega - \frac{\omega}{\alpha} (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \sin \omega\tau + \frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma) < \frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma).$$

En substituant $\omega = \omega_0$ dans l'inégalité ci-dessus et en réarrangeant, on peut facilement obtenir :

$$\left[\frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] (1 - \cos \omega_0\tau) + \left[\delta\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\alpha} (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \tau \frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau} < \frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma). \quad (3.31)$$

Maintenant, pour $0 < \omega_0\tau < \pi/2$, nous utilisons les majorations suivantes :

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1, \quad \underbrace{1 - \cos(x)}_{2 \sin^2(\frac{x}{2})} \leq \frac{1}{2} x^2,$$

et le côté gauche de l'inégalité ci-dessus peut être approché comme suit :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] (1 - \cos \omega_0\tau) + \left[\delta\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\alpha} (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \tau \frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\delta\omega_0^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \omega_0^2 \tau^2 + \left[\delta\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\alpha} (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \tau \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\delta\omega_+^2}{\alpha} + (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \omega_+^2 \tau^2 + \left[\delta\omega_+^2 - \frac{\omega_+^2}{\alpha} (\alpha\delta - \beta\gamma) \right] \tau, \end{aligned}$$

et donc

$$\left[\frac{\delta \omega_0^2}{\alpha} + (\alpha \delta - \beta \gamma) \right] (1 - \cos \omega_0 \tau) + \left[\delta \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\alpha} (\alpha \delta - \beta \gamma) \right] \tau \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \leq A_\phi \tau^2 + B_\phi \tau.$$

Ainsi, l'inégalité (3.31) sera satisfaite pour $0 \leq \omega_0 \leq \omega_+$ si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$A_\phi \tau^2 + B_\phi \tau < \eta_\phi, \quad (3.32)$$

où

$$A_\phi = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta \omega_+^2}{\alpha} + (\alpha \delta - \beta \gamma) \right] \omega_+^2, \quad B_\phi = \left[-\frac{\omega_+^2}{\alpha} (\alpha \delta - \beta \gamma) - |\delta| \right] \omega_+^2$$

$$\eta_\phi = \frac{\delta \omega^2}{\alpha} + (\alpha \delta - \beta \gamma)$$

Ainsi, si $A_\phi \tau^2 + B_\phi \tau - \eta_\phi < 0$ est vérifiée, alors l'inégalité (3.26) est automatiquement satisfaite. Une racine positive de l'équation

$$A_\phi \tau^2 + B_\phi \tau - \eta_\phi = 0,$$

est donnée par :

$$\tau_+ = \frac{1}{2A_\phi} \left[-B_\phi + \sqrt{B_\phi^2 + 4A_\phi \eta_\phi} \right]. \quad (3.33)$$

Ainsi, pour $0 \leq \tau \leq \tau_+$, les critères de Nyquist sont satisfaits. Par conséquent, τ_+ est une estimation de la durée maximale du retard préservant la stabilité.

3.6 Simulation Numérique

Dans cette section, nous exploiterons les techniques de simulation numérique afin d'étudier l'influence des retards sur la dynamique du système (3.1)-(3.2), en résolvant numériquement le système d'équations différentielles pour un ensemble de paramètres spécifiques.

Remarque 6. Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont été réalisées à l'aide de la librairie 'ddeint' du langage Python, sur des intervalles temporel adéquats.

Avant d'approfondir l'analyse, il convient de préciser les valeurs des paramètres utilisées lors des simulations numériques. Le Tableau suivant présente les paramètres correspondants pour le système (3.1)-(3.2).

Paramètre	A	B	F
Valeur	0.7	0.5	0.7

Les valeurs des équilibres sont :

Point	u^*	v^*
$E_{1,0}$	0.3	0
E_*	0.247	0.074

Les valeurs des constantes sont :

Constante	p_1	s_1	q
Valeur	0.247	0.15	0.045

De plus, il est à noter que les fonctions initiales utilisées pour les deux exemples sont

$$(u(\theta), v(\theta)) = (0.2, 0.2), \quad \forall \theta \leq 0,$$

et que pour les constantes et paramètres précédents, nous obtenons :

$$\hat{\tau} = 8.638.$$

Remarque 7. Dans toute la suite nous écrivons τ_0^* à la place de $\hat{\tau}$.

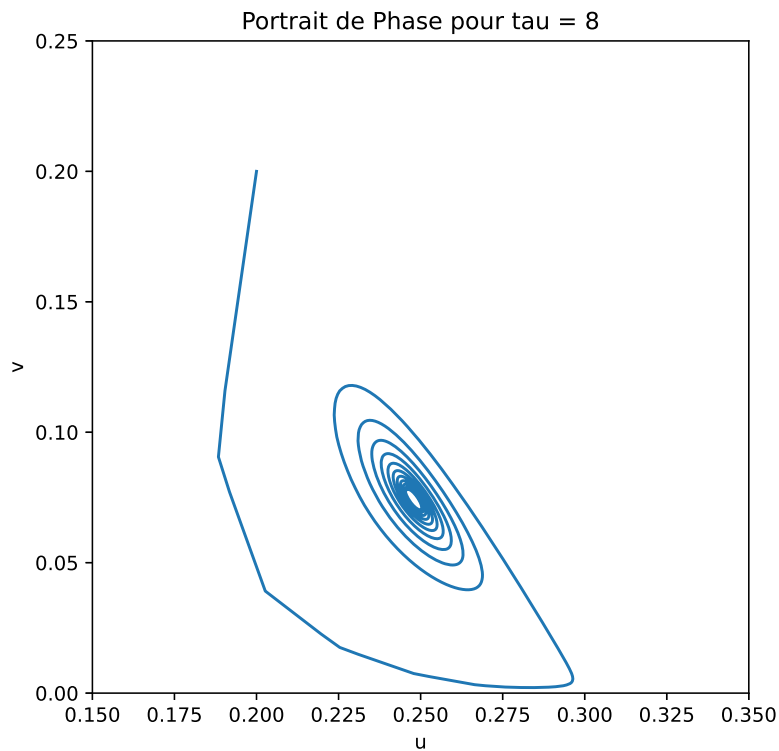


FIGURE 3.1 – Portrait de phase et convergence des solutions vers l'équilibre intérieur pour le cas $\tau = 8 < \tau_0^*$.

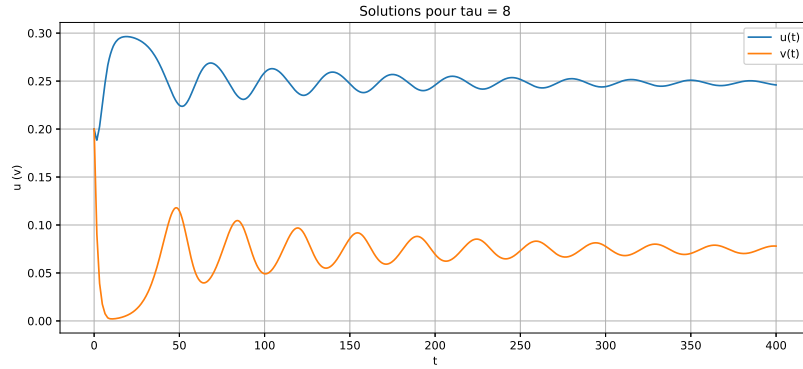


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle des densités pour $\tau = 8 < \tau_0^*$.

Évolution temporelle pour une valeur de $\tau < \tau_0^*$. Nous allons explorer l'évolution temporelle du système pour une valeur du retard τ inférieure à la valeur critique τ_0^* . Cela nous permettra d'analyser l'impact des faibles retards sur la dynamique des populations.

Les deux Figures 3.2 et 3.3 illustrent l'évolution temporelle des différentes populations pour $\tau = 8$. On observe que les populations atteignent rapidement un état d'équilibre stable, caractérisé par des oscillations amorties autour de valeurs d'équilibre constantes.

Ces résultats suggèrent que pour des retards faibles ($\tau = 8$), le système atteint un équilibre stable caractérisé par des niveaux de population constants pour les proies et les prédateurs.

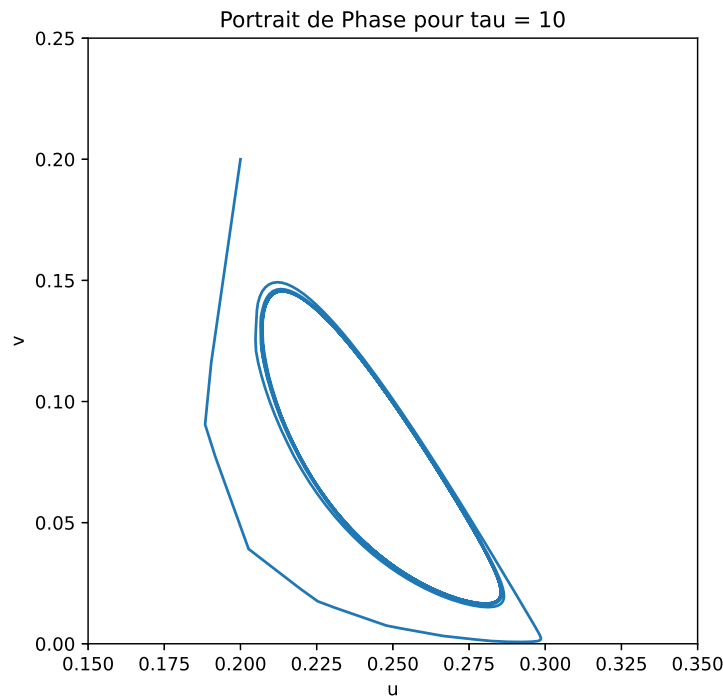


FIGURE 3.3 – Portrait de phase des solutions pour le cas $\tau_0^* < 10 = \tau$. Nous constatons existence d'un cycle limite.

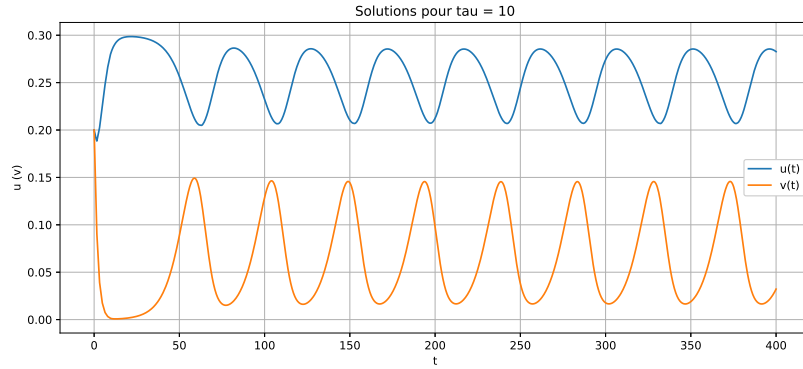


FIGURE 3.4 – Pour $\tau_0^* < 10 = \tau$ nous constatons de solutions périodiques.

Évolution temporelle pour une valeur de $\tau > \tau_0^*$. Après avoir étudié le comportement du système pour des valeurs de retard τ inférieures à la valeur critique τ_0^* , nous allons maintenant nous intéresser aux cas où τ est supérieur à τ_0^* . Cette analyse nous permettra d'explorer les effets des retards élevés sur la dynamique des populations.

Les deux Figures 3.3 et 3.4 illustrent l'évolution temporelle des différentes populations pour $\tau = 10$. Contrairement au cas des retards faibles, on observe ici un comportement oscillatoire persistant, avec des amplitudes d'oscillation importantes pour les deux populations.

Bien que les simulations numériques fournissent des informations précieuses sur le comportement dynamique du système, il est important de souligner que ces résultats sont spécifiques aux valeurs de paramètres choisies. Des analyses supplémentaires seraient nécessaires pour étudier l'influence d'autres paramètres ou d'autres conditions initiales.

CONCLUSION GÉNÉRALE

En somme, ce mémoire a permis d'approfondir la compréhension des dynamiques complexes des systèmes proies-prédateurs en intégrant rigoureusement l'effet du retard temporel, un aspect souvent négligé mais essentiel pour une modélisation réaliste. L'étude a suivi une démarche structurée en trois chapitres complémentaires.

D'abord, les fondations théoriques ont été posées en détaillant les équations différentielles régissant les interactions entre proies et prédateurs, tout en intégrant les retards temporels dans un cadre mathématique robuste.

Ensuite, une analyse comparative avec un modèle sans retard a permis d'établir une base de référence solide et de mettre en évidence les différences cruciales, notamment en termes de faisabilité biologique et de stabilité des populations.

Enfin, l'intégration du retard dans le modèle a révélé des modifications significatives des dynamiques de population, confirmées par des simulations numériques corroborant les affirmations théoriques.

Ainsi, cette étude a mis en lumière le rôle déterminant du retard temporel, ouvrant la voie à de futures investigations, tant sur le plan théorique que pratique, pour explorer davantage les implications écologiques et les applications potentielles de ces modélisations améliorées.

A Annexe Biologique

A.1 Réponse(s) fonctionnelle(s) de Holling

Dans les années 1950, l'entomologiste C.S. Holling ([12], [13]) a proposé des types de réponses fonctionnelles en fonction des densités et caractéristiques des proies et des prédateurs, illustrant la saturation des prédateurs. Ces réponses incluent les fonctions de Holling de type I et type II.

Holling de type I Cette réponse linéaire à la densité des proies suppose que les prédateurs cherchent leurs proies au hasard avec un taux de recherche constant, indépendamment de la densité des proies. Le nombre de proies tuées est proportionnel à leur densité, atteignant un niveau de saturation :

$$F(N) = \begin{cases} bN & \text{pour } N < \bar{N}, \\ b\bar{N} & \text{pour } N \geq \bar{N}. \end{cases} \quad (34)$$

Cette réponse a été observée par Ricker ([18]) chez des poissons consommant du saumon rouge.

Holling de type II Cette réponse non linéaire montre qu'une augmentation de la densité des proies entraîne d'abord une augmentation rapide du nombre de proies attaquées, puis un ralentissement jusqu'à atteindre une valeur fixe :

$$F(N) = \frac{bN}{1 + hN}, \quad (35)$$

où h est le temps moyen que prend le prédateur pour consommer une proie ([13]).

A.2 Modèle de Leslie-Gower [14, 15]

Le modèle proie-prédateur de Leslie-Gower a été Introduit en 1948 par Leslie [14] et a été discuté par Leslie et Gower en 1960 [15] et Pielou [17] en 1969. Leslie (1948) à utilisé l'équation logistique pour obtenir un modèle plus réaliste qui est basé sur les hypothèses suivantes :

- la population des proies suit une croissance logistique,
- la réponse fonctionnelle correspond à une relation linéaire avec la densité des proies,
- la population des prédateurs suit une croissance logistique mais avec une capacité de charge limitée par la densité des proies.

Le modèle de Leslie-Gower est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - aNP, \\ \frac{dP}{dt} = sP \left(1 - \frac{P}{cN}\right), \end{cases}$$

où :

- N : population de la proie,
- P : population du prédateur,
- r : taux de croissance intrinsèque de la proie,
- K : capacité de charge de l'environnement pour la proie,
- a : taux de prédation,
- s : taux de mortalité intrinsèque du prédateur,
- c : constante ajustant la dépendance du taux de croissance du prédateur à la densité de la population de proies.

B Outils Mathématiques

B.1 Principe de Comparaison[6]

Théorème 6 (Principe de Comparaison). *Soient $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement Lipschitziennes. On considère les solutions $x(t)$ et $y(t)$ des problèmes de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que $f(t, x) \leq g(t, x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et que $x_0 \leq y_0$. Alors $x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \geq 0$.

B.2 Stabilité des équilibres [1]

Soit le système de deux équations différentielles ordinaires couplées suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{36}$$

Soit un point d'équilibre (x^*, y^*) de ce système. La linéarisation du système au voisinage de cet équilibre conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) v \\ \dot{v} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) v\end{aligned}$$

où $(u(t), v(t))$ sont les coordonnées locales au voisinage du point d'équilibre, $u(t) = x(t) - x^*$ et $v(t) = y(t) - y^*$. Le système s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

qui est la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre. En résumé, nous pouvons constater que les cas de stabilité locale sont déterminés par deux conditions :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 > 0, & (\lambda_i \text{ valeur propre } \forall i = 1, 2) \\ \text{tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 < 0.\end{aligned}$$

Dans ces conditions toute trajectoire issue d'une condition initiale prise dans le voisinage du point d'équilibre va retourner au point d'équilibre (nœud ou foyer stable). La définition rigoureuse de la stabilité est la suivante.

Stabilité d'un point d'équilibre : Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système du type (36) est dit stable si pour tout voisinage V de (x^*, y^*) , il existe un voisinage $U \subseteq V$ tel que toute trajectoire pénétrant dans U reste dans V pour tout t suivant.

Instabilité d'un point d'équilibre : Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système du type (36) est dit instable s'il n'est pas stable.

B.3 Critère de Bendixson-Dulac [1]

Le critère de Bendixson-Dulac, aussi appelé critère de divergence, permet de déterminer l'absence de cycles limites dans une région du plan pour un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y),\end{aligned}$$

où P et Q sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans une région simplement connexe D du plan (x, y) .

Critère de Bendixson-Dulac : S'il existe une fonction $H(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans D telle que la divergence

$$\text{div}(HP, HQ) = \frac{\partial}{\partial x}(HP) + \frac{\partial}{\partial y}(HQ)$$

ne s'annule pas et garde un signe constant dans D , alors il n'existe pas de cycle limite entièrement contenu dans D . En d'autres termes, si la divergence du champ de vecteurs (HP, HQ) est non nulle et de signe constant dans la région D , alors aucun cycle limite ne peut exister dans cette région.

B.4 Bifurcation de Hopf (Théorème) [1]

Ce théorème de bifurcation est valable en dimensions $n \geq 2$ et permet de démontrer l'existence d'un cycle limite.

Considérons le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = g(x, y, \mu), \end{cases}$$

où μ est un paramètre réel strictement positif. Supposons que (x^*, y^*) est un point d'équilibre du système pour toute valeur du paramètre μ .

Soient $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$ les valeurs propres de l'équation caractéristique du système linéaire associé au système précédent, où :

$$\lambda_{1,2} = a(\mu) \pm ib(\mu).$$

Le théorème de Hopf s'énonce de la manière suivante :

Théorème 7 (Théorème de bifurcation de Hopf [1]). *Supposons que les trois hypothèses sui-*

vantes soient vérifiées :

1. La partie réelle des valeurs propres s'annulent pour une valeur μ^* du paramètre, c'est-à-dire $a(\mu^*) = 0$.
2. Pour $\mu = \mu^*$, la partie imaginaire des valeurs propres est différente de zéro, c'est-à-dire $b(\mu^*) \neq 0$. Cela signifie que les racines sont purement imaginaires.
3. De plus, supposons que $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) > 0$.

Alors nous pouvons conclure :

1. $\mu = \mu^*$ est une valeur de bifurcation du système.
2. Il existe $\mu_\alpha < \mu^*$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_\alpha, \mu^*[$ le point (x^*, y^*) est un foyer stable.
3. Il existe $\mu_\beta > \mu^*$ tel que pour tout $\mu \in [\mu^*, \mu_\beta[$ le point (x^*, y^*) est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable.

B.5 Critères de Nyquist [2, 3] :

Les critères de Nyquist sont des règles graphiques utilisées en automatique et en théorie de la stabilité pour déterminer si un système dynamique est stable. Ils sont basés sur l'analyse du diagramme de Nyquist, qui représente la réponse harmonique du système dans le plan complexe (la réponse harmonique dans notre cas concerne les racines de la partie imaginaire de l'équation caractéristique du système).

Critère de Nyquist (explication) :

Pour que le système soit stable, il doit ne pas y'avoir de racines dans le demi-plan positif des fréquences. Le critère de Nyquist permet de vérifier si ce critère est satisfait.

Pour une fonction de Transfert (équation caractéristique) $F(s)$, nous avons que les conditions pour la stabilité asymptotique locale de point d'équilibre intérieur sont données par les critères suivant :

$$\text{Im } F(i\omega) > 0, \quad (37)$$

$$\text{Re } F(i\omega) = 0, \quad (38)$$

où ω est la plus petite racine positive de $F(s) = 0$. La suite de la procédure, pour notre cas, sera de donner une majoration sur le paramètre du retard de sorte à ce que au-delà d'une certaine marge, les critères précédents ne soient plus valide.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Auger, P., Lett, C., & Poggial, J. C. (2010). Modélisation mathématique en écologie. Paris : Dunod.
- [2] Bandyopadhyay, M. (2004). Global stability and bifurcation analysis in a delayed non-linear autotroph-herbivore model. Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 7(3), 238–249.
- [3] Bandyopadhyay, M., & Bhattacharyya, R. (2004). Dynamics of an autotroph-herbivore system with nutrient recycling. Ecological Modelling, 176(1–2), 201–209.
- [4] Beretta, E., & Kuang, Y. (1996). Convergence results in a well-known delayed prey-predator system. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 204, 840–853.
- [5] Beretta, E., & Kuang, Y. (1998). Global analysis in some delayed ratio-dependent predator-prey systems. Nonlinear Analysis, 32, 381–408.
- [6] Birkhoff, G., & Rota, G. C. (1982). Ordinary Differential Equations. Boston : Ginn.
- [7] Gazi, N. H., & Bandyopadhyay, M. (2008). Effect of time delay on a harvested predator-prey model. Journal of Applied Mathematics and Computing, 26, 263–280.
- [8] Gopalswamy, K. (1984). Delayed responses and stability in two-species systems. Journal of the Australian Mathematical Society Series B, 25, 473–500.
- [9] Hale, J. K. (1997). Theory of Functional Differential Equations. New York, NY : Springer, Berlin.
- [10] Hale, J. K., & Verduyn, S. M. (1993). Introduction to Functional Differential Equations. New York, NY : Springer.
- [11] Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D., & Wan, Y.-H. (1981). Theory and Applications of Hopf Bifurcation 41. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge, UK : Cambridge University Press.
- [12] Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. Canadian Entomologist, 91, 385–398.

- [13] Holling, C. S. (1959). The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pine sawfly. Canadian Entomologist, 91, 293–320.
- [14] Leslie, P. H. (1948). Some further notes on the use of matrices in population mathematics. Biometrika, 325, 213–245.
- [15] Leslie P. H. and J. C. Gower (1960). The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species. Biometrika, (47) : 219–234.
- [16] Lotka, A. J. (1925). Elements of Physical Biology. Baltimore : Williams and Wilkins.
- [17] Pielou E.C. (1941). Mathematical Ecology. John Wiley and Sons, New York.
- [18] Ricker, W. (1941). The consumption of young sockeye salmon by predaceous fish. Journal of the Fisheries Research Board of Canada, 5, 293-313.
- [19] Volterra, V. (1931). Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie. Paris : Gauthier-Villars.