

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du
diplôme de Master en Mathématiques

Option: Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O)

Thème

**Existence et Unicité des solutions anti-périodiques
d'un problème aux limites pour les équations
différentielles fonctionnelles du deuxième ordre**

Réalisé par :

- M. Mohamed BOUDJEMAI

Présenté devant le jury composé de

- | | |
|------------------------------|--------------|
| - Pr. Djamila HADJ SLIMANE | (Présidente) |
| - Pr. Mustapha YEBDRI | (Encadreur) |
| - Dr. Abdelatif BENCHAIB | (Examineur) |
| - Pr. Sidi Mohammed BOUGUIMA | (Examineur) |
| - Pr. Karim Yadi | (Examineur) |
| - Dr. Benmiloud MEBKHOUT | (Examineur) |

Année universitaire : 2014-2015

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

**Mémoire de fin d'études pour l'obtention du
diplôme de Master en Mathématiques**

Option: Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O)

Thème

**Existence et Unicité des solutions anti-périodiques
d'un problème aux limites pour les équations
différentielles fonctionnelles du deuxième ordre**

Réalisé par :

- **M. Mohamed BOUDJEMAI**

Présenté devant le jury composé de

- | | |
|------------------------------|--------------|
| - Pr. Djamila HADJ SLIMANE | (Présidente) |
| - Pr. Mustapha YEBDRI | (Encadreur) |
| - Dr. Abdelatif BENCHAIB | (Examineur) |
| - Pr. Sidi Mohammed BOUGUIMA | (Examineur) |
| - Pr. Karim Yadi | (Examineur) |
| - Dr. Benmiloud MEBKHOUT | (Examineur) |

Dédicace

A mes parents qui m'ont toujours encouragé dans mes études

A tous ceux qui me sont chers

Remerciement

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur, **Yebdri Mustapha** , pour les efforts qu 'il a accomplit pour le bon déroulement de ce travail.

Je remercie également Pr. **Djamila HADJ SLIMAN**; Dr. **Abdelatif BENCHAIIB** ;Pr. **Sidi Mohammed BOUGUIMA** ;Pr. **Karim Yadi**; Dr. **Mabkhout Benmiloude** ; enseignants au département des Mathématiques de l'université de Tlemcen d'avoir accepté de faire partie du ce jury.

Table des Matières

Introduction	4
1 Définitions et préliminaires:	6
1.1 Définitions	6
1.1.1 Fonction périodique :	6
1.1.2 Fonction anti-périodique :	7
1.1.3 Série de Fourier:	9
1.1.4 Existence de série de Fourier :	10
1.1.5 Espace précompact :	10
1.1.6 Inégalité de Cauchy Schwarz:	11
1.2 préliminaires:	12
2 Éxistence et unicité du solution anti- périodique:	33
2.1 Unicité :	34
2.2 Existence :	44
3 Exemples	61
3.1 Exemple1	61
3.2 Exemple2	63

Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions anti périodique d'un problème aux limites pour les équations différentielles fonctionnelles du deuxième ordre , de la forme:

$$x''(t) + f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) = 0 \quad (1)$$

avec $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue ; $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et T - *periodique* .

On s'intéresse aux conditions suffisantes sur la fonction f pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution anti-périodique du problème précédent.

Les problèmes anti-périodiques à valeur limite ont été discutés au cours des vingt dernières années. Okochi H.[1] [2] a lancé l'étude de solutions anti-périodiques de l'équation d'évolution dans les espaces de Hilbert. Chen et Al. [3];[4], ont étudié en utilisant le théorème du point fixe l'existence de la solution anti-périodique pour les équations d'évolution de premier ordre dans un espace de Hilbert séparable.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres:

Dans le premier chapitre , on présente quelques définitions et résultats préliminaires utiles pour la suite du travail. Le chapitre deux est réservé à l'existence et l'unicité des solutions anti-périodique du problème différentielle fonctionnelle aux limite du deuxième ordre . Le dernier

est consacré aux exemples d'application.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires:

1.1 Définitions

1.1.1 Fonction périodique :

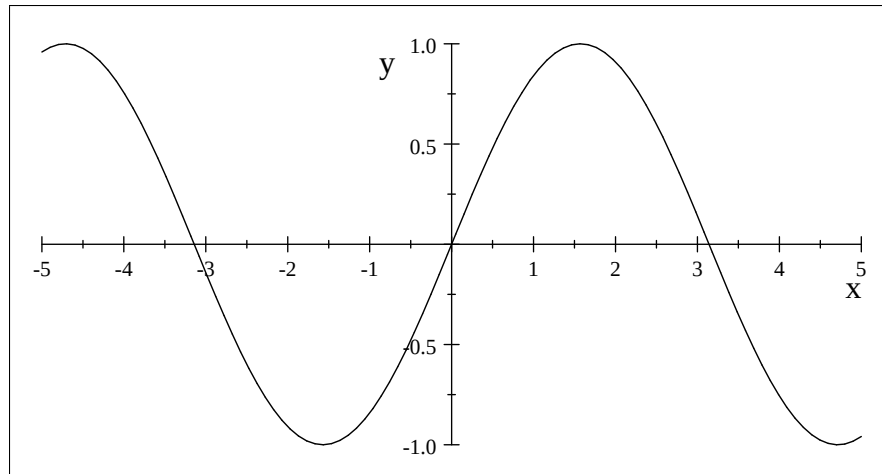
Définition 1.1 Une fonction $f : \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ est dite périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ (ou T -périodique) si et seulement si:

$$\forall t \in D, t + T \in D \text{ et } f(t + T) = f(t) \quad .$$

Exemple:

La fonction sinus est périodique de période égale à 2π

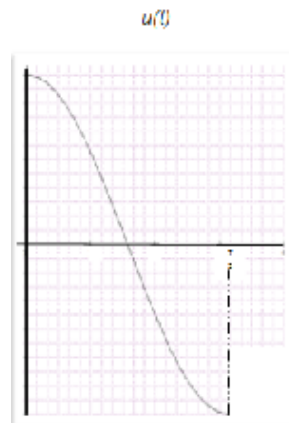
$$f : \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \sin x \end{array}$$

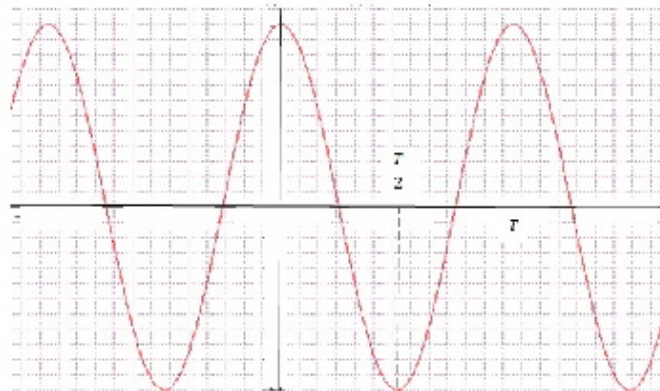
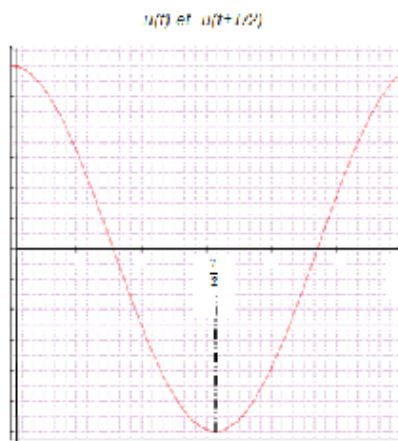
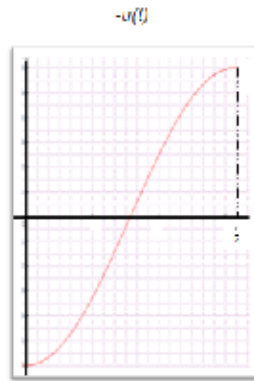


1.1.2 Fonction anti-périodique :

Définition 1.2 Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ; u est dite anti-périodique si :
 elle est périodique $\forall t \in \mathbb{R}$ et:

$$u\left(t + \frac{T}{2}\right) = -u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$





Remarque 1.1 *La fonction anti-périodique est entièrement déterminée par son graph sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$*

1.1.3 Série de Fourier:

Définition 1.3 Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ;

on appelle coefficients de Fourier réelles:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

et on a

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cdot \cos\left(nx \frac{2\pi}{T}\right) + b_n(f) \cdot \sin\left(nx \frac{2\pi}{T}\right) \right)$$

Remarque :

Si la fonction est paire alors $b_n = 0$.

Si la fonction est impaire alors $a_n = 0$.

On appelle coefficients de Fourier complexe :

$$C_n(g) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-i \frac{2n\pi}{T} t} dt.$$

La série $S_n(g) = \sum_{k=-n}^n C_k(g) e^{i \frac{2k\pi}{T} t}$ s'appelle série de Fourier.

Remarque :

$$\begin{cases} C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \end{cases}$$

Si la série est convergente alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(g) = g(x)$

1.1.4 Existence de série de Fourier :

Le théorème suivant en nous donne la decomposition d'une fonction periodique en série de Fourier :

Théorème 1.1 (Dirichlet) [5]:

Soit f de période T , continue en un réel x , et dérivable à droite et à gauche en x , alors :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(f).e^{inx\frac{2\pi}{T}}$$

Si f est à valeurs réelles, l'égalité ci-dessus se réécrit avec les coefficients de Fourier réels :

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f). \cos \left(nx \frac{2\pi}{T} \right) + b_n(f). \sin \left(nx \frac{2\pi}{T} \right) \right)$$

1.1.5 Espace précompact :

Définition 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique, K une partie de X .On dit que K est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon ε ;*

Les notions suivantes sont utilisées dans la suite :

$$C_T^k = \{x \in C^k, x \text{ est } T - \text{périodique}\}; k = \{0; 1; 2; \dots\}$$

est l'ensemble des fonctions de classe C^k et $T - \text{périodique}$.

$$\|x\|_p = \left(\int_0^T |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \forall p \geq 1; |x|_0 = \max_{t \in [0;T]} |x(t)|.$$

$$C_T^{k, \frac{1}{2}} = \{x \in C_T^k, x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t); \forall t \in \mathbb{R}\}$$

est l'ensemble des fonctions de C_T^k et *anti - périodique* .

$$\|x\|_{C_T^{k, \frac{1}{2}}} = \max \left\{ |x|_0, |x'|_0, \dots, |x^{(k)}|_0 \right\} \forall x \in C_T^{k, \frac{1}{2}}$$

l'ensemble $C_T^{k, \frac{1}{2}}$ muni de la norme $\|x\|_{C_T^{k, \frac{1}{2}}}$ est un espace de Banach.

1.1.6 Inégalité de Cauchy Schwarz:

Lemme 1.1 [6]

Soient p et q deux nombres positifs tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Si $\|f(x)\|_p$ et $\|g(x)\|_q$ sont Riemann intégrable sur $[a, b]$, avec $\|f(x)\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

et $\|g(x)\|_q = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$.

Alors:

$$|\int_a^b f(x).g(x)dx| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Remarque 1.2 Dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n x_i.y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 préliminaires:

proposition 1.1 on a:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Preuve: La fonction $h : \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{matrix}$ vérifier les hypotheses du théorème 1.1 et elle a les coefficients suivantes :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 h(x) dx + \int_0^{\pi} h(x) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\
&= -\frac{2}{n^2\pi} [-\cos(nx)]_0^{\pi} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi} (1 - 1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n^2\pi} (-1 - 1) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc on a:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Pour $x = 0$ on a: $f(0) = 0$.

C'est à dire :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'où :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'autre part pour $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ on a:

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

C'est à dire :

$$s = \frac{s}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

C'est à dire :

$$\frac{3s}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'où

$$s = \frac{\pi^2}{6}$$

C'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

■

Pour l'étude de l'existence et l'unicité ; nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.2 (Inégalité de Wirtinger et Inégalité de Sobolev) [7]

si $x \in C_T^1$ et $\int_0^T x(t)dt = 0$ alors:

1) *Inégalité de Wirtinger:*

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |x'(t)|^2 dt$$

2) *Inégalité de Sobolev :*

$$|x(t)|_0^2 \leq \frac{T}{12} \int_0^T |x'(t)|^2 dt$$

Preuve: 1) *L'inégalité de Wirtinger:*

Soit $x \in C_T^1$ en utilisant le développement en série de Fourier on a

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} x_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}} .$$

d'où

$$x'(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{2i\pi k}{T} . x_k . e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$$

ceci implique :

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x'(t)|^2 dt &= \int_0^T \left| \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{2i\pi k}{T} x_k \cdot e^{\frac{2i\pi kt}{T}} \right|^2 dt \\
&= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{4\pi^2 k^2}{T^2} |x_k|^2 T \\
&\geq \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |x_k|^2 T \\
&\geq \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \int_0^T |x_k|^2 \cdot |e^{\frac{2i\pi kt}{T}}|^2 dt \\
&= \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \int_0^T \left| x_k \cdot e^{\frac{2i\pi kt}{T}} \right|^2 dt
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |x'(t)|^2 dt$$

2) L'inégalité de Sobolev :

Soit $x \in C_T^1$ en utilisant le développement en série de Fourier on a

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} x_k e^{\frac{2i\pi kt}{T}} .$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|x(t)|^2 &\leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |x_k|^2 \right) \\
&\leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{T}{4\pi^2 k^2} \times \frac{4\pi^2 k^2}{T} |x_k|^2 \right) \\
&\leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{T}{4\pi^2 k^2} \right) \cdot \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{4\pi^2 k^2}{T^2} \times T |x_k|^2 \right) \quad (Cauchy Schwurz) \\
&\leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{T}{4\pi^2 k^2} \right) \times \int_0^T |x'(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|x(t)|^2 &\leq T \times \frac{1}{4\pi^2} \times \frac{2\pi^2}{6} \times \int_0^T |x'(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{T}{12} \times \int_0^T |x'(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.3 [8]

soit $\lambda > 0$ et $\delta(t) \in C_T^{0;\frac{1}{2}}$ et soit le probleme anti-periodique aux limites :

$$\begin{cases} (x''(t) - \lambda^2 x(t) = \delta(t) \\ x(\frac{T}{2}) = -x(0); x'(\frac{T}{2}) = -x'(0) \end{cases} \quad (2.1)$$

$x(t)$ est une solution de notre problème ssi :

$$x(t) = \int_0^{\frac{T}{2}} G(t; s) \delta(s) ds$$

avec

$$G(t; s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq s \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq t \leq s \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Preuve: supposons que $x(t)$ est solution de (2.1) et $D = \frac{d}{dt}$
donc l'équation de (2.1) écrite de la forme:

$$(D - \lambda)(D + \lambda)x(t) = \delta(t)$$

on pose :

$$(D + \lambda)x(t) = y(t)$$

c'est à dire

$$y(t) = x'(t) + \lambda x(t)$$

donc:

$$(D - \lambda)y(t) = \delta(t)$$

on multiplie par $e^{-\lambda t}$ et on intègre entre 0 et t , on trouve :

$$y(t) = e^{\lambda t} \left[y(0) + \int_0^t \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right]$$

comme:

$$(D + \lambda)x(t) = y(t)$$

en remplaçant et multipliant les deux coté par $e^{\lambda t}$ et en intégrant entre 0 et t
on obtient:

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left[x(0) + \int_0^t e^{\lambda s} y(s) ds \right]$$

on a :

$$\int_0^t e^{\lambda s} y(s) ds = \frac{1}{2\lambda} \left[y(0)(e^{2\lambda t} - 1) + \int_0^t (e^{2\lambda t} - e^{2\lambda s}) \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right]$$

comme

$$y(t) = e^{\lambda t} \left[y(0) + \int_0^t \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right]$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\lambda s} y(s) ds &= \int_0^t e^{2\lambda s} \left[y(0) + \int_0^s \delta(u) e^{-\lambda u} du \right] ds \\ &= \int_0^t e^{2\lambda s} y(0) ds + \int_0^t \left[e^{2\lambda s} \int_0^s \delta(u) e^{-\lambda u} du \right] ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\lambda} \left[e^{2\lambda s} y(0) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left[y(0)(e^{2\lambda t} - 1) \right] \end{aligned}$$

et

$$I_2 = \int_0^t \left[e^{2\lambda s} \int_0^s \delta(u) e^{-\lambda u} du \right] ds$$

On pose :

$$F(s) = \int_0^s \delta(u) e^{-\lambda u} du \quad \text{et} \quad G'(s) = e^{2\lambda s} ds$$

par intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t F(s).G'(s)ds \\
&= [F(s).G(s)]_0^t - \int_0^t F'(s).G(s)ds \\
&= \left[\frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda s} \int_0^s \delta(u) e^{-\lambda u} du \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda s} \delta(s) e^{-\lambda s} ds \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left[e^{2\lambda t} \int_0^t \delta(s) e^{-\lambda s} ds - 0 - \int_0^t e^{2\lambda s} \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right] \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left[\int_0^t (e^{2\lambda t} - e^{2\lambda s}) \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right] .
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_0^t e^{\lambda s} y(s) ds \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left[y(0)(e^{2\lambda t} - 1) + \int_0^t (e^{2\lambda t} - e^{2\lambda s}) \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right]
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\lambda t} \left[x(0) + \int_0^t e^{\lambda s} y(s) ds \right] \\
&= e^{-\lambda t} x(0) + e^{-\lambda t} \frac{1}{2\lambda} \left[y(0)(e^{2\lambda t} - 1) + \int_0^t (e^{2\lambda t} - e^{2\lambda s}) \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right] \\
&= e^{-\lambda t} x(0) + e^{-\lambda t} \frac{1}{2\lambda} \left[(x'(0) + \lambda(x(0)))(e^{2\lambda t} - 1) + \int_0^t (e^{2\lambda t} - e^{2\lambda s}) \delta(s) e^{-\lambda s} ds \right]
\end{aligned}$$

Or :

$$y(0) = (x'(0) + \lambda x(0))$$

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda} \left\{ [x'(0) + \lambda x(0)] e^{-\lambda t} + [\lambda x(0) - x'(0)] e^{-\lambda t} - \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(t-s)}) \delta(s) ds \right\}$$

Donc pour $x(t)$ on a :

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda} \left\{ [x'(0) + \lambda x(0)] e^{\lambda t} + [\lambda x(0) - x'(0)] e^{-\lambda t} - \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(t-s)}) \delta(s) ds \right\}.$$

Pour $t = 0$

$$x(0) = \frac{1}{2\lambda} \{ (x'(0) + \lambda x(0)) + (\lambda x(0) - x'(0)) \}$$

pour $t = \frac{T}{2}$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) e^{\lambda \frac{T}{2}} + (\lambda x(0) - x'(0)) e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \right) \delta(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Et pour $x'(t)$ on a :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \lambda e^{\lambda t} + (\lambda x(0) - x'(0)) (-\lambda) e^{-\lambda t} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (-\lambda e^{\lambda(t-s)} - \lambda e^{\lambda(t-s)}) \delta(s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) e^{\lambda t} - (\lambda x(0) - x'(0)) e^{-\lambda t} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} + e^{\lambda(t-s)}) \delta(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Pour $t = 0$

$$x'(0) = \frac{1}{2} \{ (x'(0) + \lambda x(0)) - (\lambda x(0) - x'(0)) \}.$$

Pour $t = \frac{T}{2}$

$$\begin{aligned} x' \left(\frac{T}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) e^{\lambda \frac{T}{2}} - (\lambda x(0) - x'(0)) e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)}) \delta(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} 0 &= x \left(\frac{T}{2} \right) + x(0) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left[\left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) e^{\lambda \frac{T}{2}} + (\lambda x(0) - x'(0)) e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)}) \delta(s) ds \right\} + \{ (x'(0) + \lambda x(0)) + (\lambda x(0) - x'(0)) \} \right] \\ &= \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}} \right) + (\lambda x(0) - x'(0)) \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds + \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds \right\} \\ &= \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}} \right) + \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds \right\} \\ &\quad + \left\{ (\lambda x(0) - x'(0)) \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right) - \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds \right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}} \right) + \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds \right\} = 0$$

et

$$\left\{ (\lambda x(0) - x'(0)) \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right) - \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds \right\} = 0$$

C'est à dire

$$(x'(0) + \lambda x(0)) = \frac{-1}{(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}})} \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)) ds$$

et

$$(\lambda x(0) - x'(0)) = \frac{1}{\left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right)} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)\right) ds$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} 0 &= x' \left(\frac{T}{2} \right) + x'(0) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) e^{\lambda \frac{T}{2}} - (\lambda x(0) - x'(0)) e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)}) \delta(s) ds \right\} + \frac{1}{2} \{ (x'(0) + \lambda x(0)) - (\lambda x(0) - x'(0)) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right) - (\lambda x(0) - x'(0)) \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)\right) ds + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)\right) ds \right\} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ -(\lambda x(0) - x'(0)) \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right) + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)\right) ds \right\} \\ &\quad + \left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right) + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)\right) ds \right\} \end{aligned}$$

D'où

$$\left\{ -(\lambda x(0) - x'(0)) \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right) + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s)\right) ds \right\} = 0$$

et

$$\left\{ (x'(0) + \lambda x(0)) \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}} \right) + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds \right\} = 0$$

C'est à dire

$$(\lambda x(0) - x'(0)) = \frac{1}{\left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}} \right)} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds$$

et

$$(x'(0) + \lambda x(0)) = \frac{-1}{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}} \right)} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds$$

en remplaçant dans (2.2) on trouve:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{-1}{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} e^{\lambda t} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right)} e^{-\lambda t} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds - \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(t-s)}) \delta(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{-1}{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} e^{\lambda t} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds + \frac{1}{\left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right)} e^{-\lambda t} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)}{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(t-s)}) \delta(s) ds \right\}. \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{-1}{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} e^{\lambda t} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds + \frac{1}{\left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right)} e^{-\lambda t} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(\frac{T}{2}-s)} \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s-\frac{T}{2})} - e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})}) \delta(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \left\{ - \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s+t)} \delta(s) \right) ds + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\lambda(-s+t)} \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t (e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(t-s)} + e^{-\lambda(t-s-\frac{T}{2})} - e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})}) \delta(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\left(e^{-\lambda(-s+t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s+t)} \right) \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (-e^{-\lambda(t-s)} + e^{\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s-\frac{T}{2})} + e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})}) \delta(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\left(e^{-\lambda(-s+t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s+t)} \right) \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (-e^{-\lambda(t-s)} + e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(s-t+\frac{T}{2})} + e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})}) \delta(s) ds \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\left(e^{-\lambda(-s+t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s+t)} \right) \delta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \left(e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) ds + \int_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(s-t+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\left(e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) \right) ds + \int_t^0 \left(e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(s-t+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \left\{ \int_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(s-t+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) ds + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(\left(e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(t-s+\frac{T}{2})} \right) \delta(s) \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

C'est à dire :

$$x(t) = \int_0^{\frac{T}{2}} G(t, s) \delta(s) ds$$

■

Pour la demonstration de la reciproque :

supposons que :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^{\frac{T}{2}} G(t, s) \delta(s) ds \\
x'(t) &= \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \delta(s) ds
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t}(t; s) &= \begin{cases} \frac{\lambda e^{\lambda(t-s)} + \lambda e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq s \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{-\lambda e^{\lambda(s-t)} - \lambda e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq t \leq s \leq \frac{T}{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq s \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{-e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq t \leq s \leq \frac{T}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{1}{2(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}})} \left[\int_0^t (e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}) \delta(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(-e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)} \right) \delta(s) ds \right]
\end{aligned}$$

done

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \frac{1}{2\left(e^{\lambda\frac{T}{2}} + 1\right)} \left[\int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} - \lambda e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)} \delta(s) ds + \left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right) \delta(t) \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(\lambda e^{\lambda(s-t)} - \lambda e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}\right) \delta(s) ds - \left(-1 - e^{\lambda\frac{T}{2}}\right) \delta(t) \right] \\
&= \lambda^2 \left[\frac{1}{2\lambda\left(e^{\lambda\frac{T}{2}} + 1\right)} \left\{ \int_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}\right) \delta(s) ds + \frac{\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)}{\lambda} \delta(t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}\right) \delta(s) ds + \frac{\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)}{\lambda} \delta(t) \right\} \right] \\
&= \lambda^2 \left[\frac{1}{2\lambda\left(e^{\lambda\frac{T}{2}} + 1\right)} \left\{ \int_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}\right) \delta(s) ds + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}\right) \delta(s) ds \right\} \right] + \delta(t) \\
&= \lambda^2 \int_0^{\frac{T}{2}} G(t, s) \delta(s) ds + \delta(t)
\end{aligned}$$

C'est à dire : $x''(t) - \lambda^2 x(t) = \delta(t)$

Il reste à montrer que :

$$x(0) + x\left(\frac{T}{2}\right) = 0; x'(0) + x'\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

En effet :

on a par

$$G(t; s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\lambda\left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq s \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\lambda\left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq t \leq s \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^{\frac{T}{2}} G(t, s) \delta(s) ds \\
&= \int_0^t \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&\quad + \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
x(0) &= \int_0^0 \frac{e^{\lambda(0-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-0+s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&\quad + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s-0)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+0-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{T}{2}\right) &= \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} - e^{\lambda(s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&\quad + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s-\frac{T}{2})} - e^{\lambda(-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} - e^{\lambda(s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&= - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \delta(s) ds \\
&= -x(0)
\end{aligned}$$

donc

$$x(0) + x\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

d'autre part

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{2\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)} \left[\int_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)} \right) \delta(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\frac{T}{2}} \left[-e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)} \right] \delta(s) ds \right] \end{aligned}$$

pour $t = 0$ on a :

$$\begin{aligned} x'(0) &= \frac{1}{2\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)} \left[\int_0^0 \left(e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)} \right) \delta(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{T}{2}} \left[-e^{-\lambda(0-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+0-s)} \right] \delta(s) ds \right] \end{aligned}$$

c'est à dire

$$x'(0) = \frac{1}{2\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[-e^{\lambda s} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} \right] \delta(s) ds$$

et

$$\begin{aligned} x'\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{1}{2\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} + e^{\lambda s} \right) \delta(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(-e^{-\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)} \right) \delta(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{2\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} + e^{\lambda s} \right) \delta(s) ds \\ &= \frac{1}{2\left(1 + e^{\lambda\frac{T}{2}}\right)} \left[- \int_0^{\frac{T}{2}} \left(-e^{\lambda(\frac{T}{2}-s)} - e^{\lambda s} \right) \delta(s) ds \right] \\ &= -x'(0) \end{aligned}$$

donc

$$x' \left(\frac{T}{2} \right) + x'(0) = 0$$

■

Lemme 1.4 [10]

*Soit E un espace convexe , fermé d'un espace de Banach et soit A une application continue de E dans lui même et AE est pré compacte
alors A admet un point fixe*

Lemme 1.5 [11]

Soit A une application continue et compacte d'un espace de Banach B dans lui même ,et supposent qu'il existe un constante M tel que $\|x\|_B < M$

$\forall x \in B$ et $\sigma \in [0; 1]$ satisfait $x = \sigma Ax$ alors A admet un point fixe

Preuve: *On peut supposer son perdre la généralité que $M = 1$*

supposons

$$A^*x = \begin{cases} Ax & \|Ax\| \leq 1 \\ \frac{Ax}{\|Ax\|} & \|Ax\| \geq 1 \end{cases}$$

*A^*x et continue de $D \subset B$ ($D = \{x \in B; \|x\|_B \leq M\}$) dans lui même .*

donc le lemme 1.4 affirme que

A^ admet un point fixe*

supposent que $\|Ax\| \geq 1$ on a donc :

$$x = A^*x = \left(\frac{1}{\|Ax\|} \right) Ax = \sigma Ax$$

donc

$$\|x\| = \|A^*x\| = 1$$

contradiction avec $\|x\| < 1$

donc $\|Ax\| \leq 1$

*c'est à dire $A^*x = Ax$*

ce qui implique

$x = Ax$ (ie A admet un point fixe)

■

Chapitre 2

Existence et unicité du solution anti-périodique:

Dans ce qui suit, on s'intéresse au problème différentielle fonctionnelle aux limite suivent :

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) = 0 \\ x(0) = -x\left(\frac{T}{2}\right) ; x'(0) = -x'\left(\frac{T}{2}\right) \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose que f satisfait les hypothèses suivantes:

(H_1) :soient f dans $C(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$ et τ dans $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que : quelque *soit* $t; x; y; z$ dans $\mathbb{R}$

$$f\left(t + \frac{T}{2}, -x, -y, -z\right) = f(t, x, y, z) , \tau\left(t + \frac{T}{2}\right) = \tau(t)$$

(H_2) Il existe a, b, c des constantes positives ou nulles telles que :

$$a\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi^2} + c\frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} < 1,$$

et

$$\forall t, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

$$|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| \leq a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2| + c|z_1 - z_2|$$

$(\overline{H}_2)$ Il existe $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ des constantes positives ou nulles telles que

$$\frac{\overline{b}}{2\pi} + \frac{\overline{c}}{2\sqrt{3}} < \frac{\overline{a}}{T}$$

et

$$\begin{aligned} (f(t, x_1, y, z) - f(t, x_2, y, z))(x_1 - x_2) &\geq \overline{a}|x_1 - x_2|^2, \\ |f(t, x, y_1, z_1) - f(t, x, y_2, z_2)| &\leq \overline{b}|y_1 - y_2| + \overline{c}|z_1 - z_2| \forall t, x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(H_3) Il existe deux fonctions continue positives ou nulles $p(t), q(t)$ et une constante L positive ou nulle telle que

$$|f(t, u, 0, 0)| \leq p(t)|u| + q(t) \forall t \in [0, T], |u| > L$$

2.1 Unicité :

Théorème 2.1 [12]

On suppose que la condition (H_1) et l'une des deux conditions $(H_2), (\overline{H}_2)$ soient satisfaites. Alors l'équation (1.1) possède au plus une solution anti-périodique.

Preuve: Supposons que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions anti-périodiques de l'Equation (1.1).

Alors, nous avons

$$x_1''(t) + f(t, x_1'(t), x_1(t); x_1(t - \tau(t))) = 0$$

et

$$x_2''(t) + f(t, x_2'(t), x_2(t); x_2(t - \tau(t))) = 0$$

donc on a:

$$(x_1(t) - x_2(t))'' + f(t, x_1'(t), x_1(t); x_1(t - \tau(t))) - f(t, x_2'(t), x_2(t); x_2(t - \tau(t))) = 0$$

On affirme que la fonction $X(t) = x_1(t) - x_2(t)$ est une fonction anti-périodique .

En effet :

d'une part :

$$\begin{aligned} X\left(t + \frac{T}{2}\right) &= x_1\left(t + \frac{T}{2}\right) - x_2\left(t + \frac{T}{2}\right) \\ &= -(x_1(t) - x_2(t)) \\ &= -X(t) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} X(t + T) &= x_1(t + T) - x_2(t + T) \\ &= (x_1(t) - x_2(t)) \\ &= X(t). \end{aligned}$$

Dans la suite on montre que X est identiquement nulle .

On a:

$$\int_0^T X(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} X(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T X(t)dt$$

par le changement du variable $s = t - \frac{T}{2}$ ie $ds = dt$ on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T X(t)dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} X(t + \frac{T}{2})dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} -X(t)dt \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \int_0^T X(t)dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} X(t)dt - \int_0^{\frac{T}{2}} X(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $X \in C_T^1$ et en utilisant l'inégalité de Sobolev (lemme 1.2), nous obtenons:

$$|X|_0 \leq \sqrt{\frac{T}{12}} |X'|_2$$

Supposons maintenant que (H_2) ou $(\overline{H}_2)$ est vérifiée . On distingue les deux cas

i) Si (H_2) est satisfaite

on a:

$$|X'|_2^2 = \int_0^T |X'(t)|^2 dt = \int_0^T X'(t).X'(t)dt$$

une intégration par partie nous donne

$$\begin{aligned} |X'|_2^2 &= [X(t).X'(t)]_0^T - \int_0^T X''(t).X(t)dt \\ &= (X(T).X'(T)) - (X(0).X'(0)) - \int_0^T X''(t).X(t)dt \\ &= - \int_0^T X''(t).X(t)dt \\ &= \int_0^T [f(t, x'_1(t), x_1(t); x_1(t - \tau(t))) - f(t, x'_2(t), x_2(t); x_2(t - \tau(t)))]X(t)dt \end{aligned}$$

Par (H_2) on a :

$$|X'|_2^2 \leq \int_0^T \{a|X'(t)||X(t)| + b|X(t)|^2 + c|X(t - \tau(t))||X(t)|\}dt$$

c'est à dire

$$|X'|_2^2 \leq a|X'|_2|X|_2 + b|X|_2^2 + c|X| \int_0^T |X(t)|dt \quad (2.3)$$

Or on a par l'inégalité de Sobolev:

$$|X|_2 \leq \frac{T}{2\pi} |X'|_2$$

et

$$|X|_2^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} |X'|_2^2$$

par l'inégalité de Sobolev

$$|X|_0 \leq \sqrt{\frac{T}{12}} |X'|_2$$

Et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T |X(t)| dt &\leq \left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T |X(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{T} \cdot |X(t)|_2 \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.3) on obtient l'inégalité suivant :

$$\begin{aligned} |X'|_2^2 &\leq a \frac{T}{2\pi} |X'|_2^2 + b \frac{T^2}{4\pi^2} |X'|_2^2 + c \frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} |X'|_2^2 \\ &\leq \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} \right] |X'|_2^2 \end{aligned}$$

D'au :

$$\left(1 - \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3\pi}}\right]\right) |X'|_2^2 \leq 0$$

par (H₂) on a $\left(1 - \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3\pi}}\right]\right) > 0$ et donc on a :

$$|X'|_2^2 \leq 0$$

C'est à dire :

$$X'(t) \equiv 0$$

D' ou

$$X(t) \equiv C ; C \text{ étant une constante}$$

Or

$$X(t) = -X\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

C'est à dire :

$$C = -C$$

ce qui donne:

$$2C = 0$$

C'est à dire :

$$C = 0$$

Donc

$$X(t) \equiv 0$$

ce qui donne :

$$x_1(t) = x_2(t)$$

ii) : $(\overline{H}_2)$ est satisfaite:

on a

$$\int_0^T [(x_1(t) - x_2(t))'' + f(t, x_1'(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t))) - f(t, x_2'(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t)))] (x_1(t) - x_2(t))' dt$$

c'est à dire

$$\int_0^T [X''(t) + f(t, x_1'(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t))) - f(t, x_2'(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t)))] X'(t) dt = 0$$

c'est à dire

$$\int_0^T X''(t)X'(t)dt + \int_0^T [f(t, x_1'(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t))) - f(t, x_2'(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t)))] X'(t)dt = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^T [f(t, x'_1(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t))) - f(t, x'_2(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t)))] X'(t) dt &= - \int_0^T X''(t) X'(t) dt \\
&= - \int_0^T X'(t) X''(t) dt \\
&= - \int_0^T X'(t) d(X'(t)) \\
&= - \int_0^T d \left[\frac{(X'(t))^2}{2} \right] \\
&= - \left[\frac{(X'(T))^2}{2} - \frac{(X'(0))^2}{2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\int_0^T [f(t, x'_1(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t)))] X'(t) dt = \int_0^T [f(t, x'_2(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t)))] X'(t) dt \quad (2.4)$$

d'un autre côté d'après $\overline{H}_2$

$$\begin{aligned}
\int_0^T [f(t, x'_1(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t))) - f(t, x'_2(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t)))] X'(t) dt &\geq \bar{a} \int_0^T X'(t) X'(t) dt \\
&\geq \bar{a} \int_0^T |X'(t)|^2 dt \\
&\geq \bar{a} |X'|_2^2
\end{aligned}$$

et d'après (2.4)

$$\begin{aligned}
\bar{a} |X'|_2^2 &\leq \int_0^T [f(t, x'_2(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t))) - f(t, x'_2(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t)))] X'(t) dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, x'_2(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t))) - f(t, x'_2(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t)))| \cdot |X'(t)| dt \\
&\leq \int_0^T (\bar{b} |X(t)| + \bar{c} |X(t - \tau(t))|) \cdot |X'(t)| dt \\
&\leq \int_0^T (\bar{b} |X(t)| \cdot |X'(t)| + \bar{c} |X(t - \tau(t))| \cdot |X'(t)|) dt \\
&\leq \bar{b} \int_0^T |X(t)| \cdot |X'(t)| dt + \bar{c} \int_0^T |X(t - \tau(t))| \cdot |X'(t)| dt
\end{aligned}$$

par l'inégalité de cauchy-schwartz on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T [f(t, x'_2(t), x_2(t), x_2(t - \tau(t))) - f(t, x'_2(t), x_1(t), x_1(t - \tau(t)))] X'(t) dt &\leq \bar{b} |X|_2 |X'|_2 \\
&\quad + \bar{c} |X|_0 \int_0^T |X'(t)| dt
\end{aligned}$$

par les équations Sobolev et Wirtinger on obtient

$$\begin{aligned}
\bar{a} |X'|_2^2 &\leq \bar{b} |X'|_2 \frac{T}{2\pi} |X'|_2 + \bar{c} |X|_0 \int_0^T |X'(t)| dt \\
&\leq \bar{b} |X'|_2 \frac{T}{2\pi} |X'|_2 + \bar{c} \sqrt{\frac{T}{12}} |X'|_2 \sqrt{T} |X'|_2 dt \\
&\leq \left(\frac{\bar{b}T}{2\pi} + \bar{c} \frac{T}{\sqrt{12}} \right) |X'|_2^2 \\
&\leq \left(\frac{\bar{b}}{2\pi} + \frac{\bar{c}}{2\sqrt{3}} \right) T |X'|_2^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\bar{a}}{T}|X'|_2^2 \leq \left[\frac{\bar{b}}{2\pi} + \frac{\bar{c}}{2\sqrt{3}} \right] |X'|_2^2$$

c'est à dire

$$0 \geq \left[\frac{\bar{a}}{T} - \frac{\bar{b}}{2\pi} - \frac{\bar{c}}{2\sqrt{3}} \right] |X'|_2^2$$

Par $(\overline{H}_2)$ on a $\left[\frac{\bar{a}}{T} - \frac{\bar{b}}{2\pi} - \frac{\bar{c}}{2\sqrt{3}} \right] > 0$ donc on a :

$$|X'|_2 = 0$$

c'est à dire

d'ou

$$X'(t) \equiv 0$$

c'est à dire

$$X(t) \equiv C ; C : \text{constant}$$

Or

$$X(t) = -X\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

c'est à dire

$$C = -C$$

ce qui donne

$$2C = 0$$

c'est à dire

$$C = 0$$

Donc :

$$X(t) \equiv 0$$

ce qui implique :

$$x_1(t) = x_2(t)$$

conclusion :

la solution anti -périodique de notre problème si elle existe elle est unique .

■

2.2 Existence :

Théorème 2.2 [13]

Supposons que (H_1) est satisfaite et que soit la condition (H_2) soient les conditions $(\bar{H}_2)$, (H_3) sont satisfaits. Alors l'équation. (1.1) admet au moins une solution anti-périodique.

Preuve: On défini l'application $A : C_T^{1, \frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1, \frac{1}{2}}$ par :

$$Ax(t) = \int_0^{\frac{T}{2}} G(t, s)(f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s))ds ; \forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$$

si $Ax(t) = -Ax(t - \frac{T}{2}) \forall t \in [\frac{T}{2}, T]$. le lemme 1.3 implique que la résolution du problème 1 est équivalent à trouver $x \in C_T^{1, \frac{1}{2}}$ verifiant $x = Ax$ c'est à dire x est un point fixe de A

i) $A : C_T^{1, \frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1, \frac{1}{2}}$ est continue :

soit x_n un suite de $C_T^{1, \frac{1}{2}}$ telle que $x_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On a $f \in C(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$

donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(t, x'_n(t), x_n(t), x_n(t - \tau(t))) - \lambda^2 x_n(t)) = f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)$$

D'autre part on a

$$|Ax_n(t) - Ax(t)| \leq \int_0^{\frac{T}{2}} |G(t; s)| |f(s, x'_n(s), x_n(s), x_n(s - \tau(s))) - f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 (x_n(t) - x(s))| ds$$

et

$$\begin{aligned} |G(t; s)| &\leq \frac{1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}}{2\lambda (1 + e^{\lambda \frac{T}{2}})} \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

d'où

$$|Ax_n(t) - Ax(t)| \leq \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\frac{T}{2}} |(f(s, x'_n(s), x_n(s), x_n(s - \tau(s))) - f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s)))) - \lambda^2 (x_n(t) - x(s))| ds$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |Ax_n - Ax|_0 = 0$$

d'un autre côté

$\forall t \in [0, \frac{T}{2}]$ on a:

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^t \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \\ &\quad + \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int_0^t \left(\frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right. \\ &\quad + \frac{1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \\ &\quad - \int_t^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right) \\ &\quad \left. - \frac{\left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \int_0^t \left(\frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right) \\
&\quad - \int_t^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right)
\end{aligned}$$

il suit que

$$\begin{aligned}
|A'x_n(t) - A'x(t)| &\leq \frac{1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}}{\left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} \left[\int_0^t \left\{ |f(s, x'_n(s), x_n(s), x_n(s - \tau(s))) - f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s)))| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda^2 |x_n(s) - x(s)| ds \right\} \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{\frac{T}{2}} \left\{ |f(s, x'_n(s), x_n(s), x_n(s - \tau(s))) - f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s)))| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda^2 |x_n(s) - x(s)| ds \right\} \right] \\
&\leq \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \left\{ |f(s, x'_n(s), x_n(s), x_n(s - \tau(s))) - f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s)))| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda^2 |x_n(s) - x(s)| ds \right\} \right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |A'x_n - A'x|_0 = 0$$

on a ainsi demontrer que

$A : C_T^{1, \frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1, \frac{1}{2}}$ est continue .

ii) Montrons que $A : C_T^{1, \frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1, \frac{1}{2}}$ est borné

Soit D sous ensemble bornée dans $C_T^{1,\frac{1}{2}}$, autrement dit, il existe une constante $d > 0$ telle que pour tout x dans D on a $|x|_0 < d$ et $|x'|_0 < d$
alors

$$\begin{aligned}
|Ax|_0 &= \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \left| \int_0^{\frac{T}{2}} G(t; s) (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right| \\
&\leq \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \int_0^{\frac{T}{2}} |G(t; s)| |f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)| ds \\
&\leq \frac{1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \cdot \frac{T}{2} \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} |f(s, u_1, u_2, u_3)| + \lambda^2 |u_2| : s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; |u_i| < d; i = \{1, 2, 3\} \\
&\leq \frac{T + Te^{\lambda \frac{T}{2}}}{4\lambda \left(1 + e^{\lambda \frac{T}{2}}\right)} \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \left\{ |f(s, u_1, u_2, u_3)| + \lambda^2 |u_2| : s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; |u_i| < d; i = \{1, 2, 3\} \right\} \\
&: = M_1
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
|A'x|_0 &= \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \left| \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial G}{\partial t}(t; s) (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right| \\
&\leq \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \int_0^{\frac{T}{2}} \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t; s) \right| |f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)| ds \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2} \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \{ |f(s, u_1, u_2, u_3)| + \lambda^2 |u_2| : s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; |u_i| < d; i = \{1, 2, 3\} \} \\
&\leq \frac{T}{4} \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \{ |f(s, u_1, u_2, u_3)| + \lambda^2 |u_2| : s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; |u_i| < d; i = \{1, 2, 3\} \} \\
&: = M_2
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t; s) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{\lambda(t-s)} - \lambda e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\left(1+e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq s \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{\lambda e^{\lambda(s-t)} - \lambda e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\left(1+e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} & 0 \leq t \leq s \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t; s) &\leq \frac{\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}\right)} \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} |A''x|_0 &= \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \left| \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t, s) (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \int_0^{\frac{T}{2}} \left| \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t, s) \right| |f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)| ds \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{T}{2} \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \{ |f(s, u_1, u_2, u_3)| + \lambda^2 |u_2| : s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; |u_i| < d; i = \{1, 2, 3\} \} \\ &\leq \lambda \frac{T}{4} \max_{t \in [0, \frac{T}{2}]} \{ |f(s, u_1, u_2, u_3)| + \lambda^2 |u_2| : s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; |u_i| < d; i = \{1, 2, 3\} \} \\ &: = M_3 \end{aligned}$$

ce qui implique :

$A : C_T^{1,\frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{2,\frac{1}{2}} \left(\subset C_T^{1,\frac{1}{2}} \right)$ est bornée .

iii) $A : C_T^{1,\frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1,\frac{1}{2}}$ est compacte .

soit $(x_n)_n$ une suite bornée de $D \left(\subset C_T^{1,\frac{1}{2}} \right)$ par théorème de Rellich[9] $(Ax_n)_n$ admet une sous suite converge

ce qui implique :

$A : C_T^{1,\frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1,\frac{1}{2}}$ est compacte .

Donc nous avons montré que $A : C_T^{1,\frac{1}{2}} \rightarrow C_T^{1,\frac{1}{2}}$ est une application continue et compacte, pour pouvoir appliquer le lemme 1.5 on a démontré qu'il existe une constante M telle que tout x (vérifiant $x = \sigma Ax$ avec $\sigma \in [0; 1]$) est borné par M

donc

$$x(t) = \sigma Ax(t) = \sigma \int_0^{\frac{T}{2}} G(t; s)(f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds$$

d'où

$$x'(t) = \sigma \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\partial G}{\partial t}(t; s)(f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds$$

avec:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t; s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2(1+e^{\lambda(\frac{T}{2})})} & 0 \leq s \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{-e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2(1+e^{\lambda(\frac{T}{2})})} & 0 \leq t \leq s \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \sigma \left(\int_0^t \frac{e^{\lambda(t-s)} + e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{-e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \sigma \left(\lambda \int_0^t \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right. \\
&\quad + \frac{1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \\
&\quad + \lambda \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \\
&\quad \left. - \left(\frac{-1 - e^{\lambda(\frac{T}{2})}}{2 \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \right) \right) \\
&= \sigma \left(\lambda^2 \int_0^t \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}-t+s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \\
&\quad + \lambda^2 \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda(\frac{T}{2}+t-s)}}{2\lambda \left(1 + e^{\lambda(\frac{T}{2})} \right)} (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \right) \right) \\
&= \sigma \left(\lambda^2 \int_0^{\frac{T}{2}} G(t, s) (f(s, x'(s), x(s), x(s - \tau(s))) - \lambda^2 x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + (f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \lambda^2 \sigma A x(t) + \sigma(f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \\
&= \lambda^2 x(t) + \sigma(f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - \lambda^2 x(t)) \\
&= -[\lambda^2(\sigma - 1)x(t) - \sigma f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))]
\end{aligned}$$

i) Si (H_2) est satisfaite :

on a

$$|x'|_2^2 = \int_0^T |x'(t)|^2 dt$$

par intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
|x'|_2^2 &= - \int_0^T x''(t).x(t) dt = - \int_0^T -[\lambda^2(\sigma - 1)x(t) - \sigma f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))]x(t) dt \\
&= \lambda^2 \int_0^T ((\sigma - 1)x^2(t) dt + \sigma \int_0^T f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))x(t) dt \\
&\leq \sigma \int_0^T f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))x(t) dt \\
|x'|_2^2 &= ||x'|_2^2| \leq 1 \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))x(t)| dt
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|x'|_2^2 &\leq \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))x(t)| dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - f(t, 0, 0, 0)| |x(t)| dt \\
&\quad + \int_0^T |f(t, 0, 0, 0)| |x(t)| dt
\end{aligned}$$

comme (H_2) est satisfaite

$$|x'|_2^2 \leq \int_0^T (a|x'(t)| + b|x(t)| + c|x(t - \tau(t))|)|x(t)|dt + \int_0^T |f(t, 0, 0, 0)| |x(t)|dt$$

par l'inégalité de Sobolev et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |x'|_2^2 &\leq a|x'|_2 + b|x|_2 + c|x|_0 \int_0^T |x(t)|dt + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot |x|_2 \\ &\leq \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3\pi}} \right] |x'|_2 + \frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x|_2 \end{aligned}$$

pour $|x'|_2 \neq 0$ on a :

$$|x'|_2 \leq \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3\pi}} \right] |x'|_2 + \frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est à dire :

$$\left(1 - \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3\pi}} \right] \right) |x'|_2 \leq \frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc:

$$|x'|_2 \leq \frac{\frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3\pi}} \right] \right)}$$

car par H_2 on a:

$$\left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} \right] < 1$$

d'où $|x'|_2$ est bornée par $C_1 = \frac{\frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T \max_{t \in [0,T]} \{ |f(t,0,0,0)|^2 \} dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \left[a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} \right] \right)}$
 c'est à dire :

$$|x'|_2 \leq C_1; C_1 : \text{constant positive}$$

par l'inégalité de Sobolev on a

$$\begin{aligned} |x|_0 &\leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} |x'|_2 \\ &\leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} C_1 \end{aligned}$$

dans le cas $|x'|_2 = 0$ il n'y a rien à montrer.

d'autre part:

$$\begin{aligned}
|x''|_2^2 &= \int_0^T |x''(t)|^2 dt \\
&= - \int_0^T [\lambda^2(\sigma - 1)x(t) - \sigma f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))] x''(t) dt \\
&= -\lambda^2(\sigma - 1) \int_0^T x(t) x''(t) dt + \sigma \int_0^T f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) x''(t) dt \\
&= \lambda^2(\sigma - 1) \int_0^T x'(t)^2 dt + \sigma \int_0^T f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) x''(t) dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) x''(t)| dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))| |x''(t)| dt \\
&\leq \int_0^T [|f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - f(t, 0, 0, 0)| + |f(t, 0, 0, 0)|] |x''(t)| dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - f(t, 0, 0, 0)| |x''(t)| dt + \int_0^T |f(t, 0, 0, 0)| |x''(t)| dt
\end{aligned}$$

par H_2 on a:

$$|x''|_2^2 \leq \int_0^T (a|x'(t)| + b|x(t)| + c|x(t - \tau(t))|) |x''(t)| dt + \int_0^T |f(t, 0, 0, 0)| |x''(t)| dt$$

done

$$|x''|_2^2 \leq \left[a \frac{T}{2\pi} |x'|_2 + b|x|_2 + c\sqrt{T}|x|_0 + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] |x''|_2$$

pour $|x''|_2 \neq 0$ on a:

$$\begin{aligned}
|x''|_2 &\leq \left[a \frac{T}{2\pi} |x'|_2 + b|x|_2 + c\sqrt{T}|x|_0 + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq \left[a \frac{T}{2\pi} |x'|_2 + b \frac{T^2}{4\pi^2} |x|_2 + c \frac{T}{2\sqrt{3}} |x'|_2 + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

d'où

$$|x''|_2 \left[1 - \left(a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T}{2\sqrt{3}} \right) \right] \leq \left[\left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} |x''|_2 &\leq \frac{\left[\left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[1 - \left(a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T}{2\sqrt{3}} \right) \right]} \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \{|f(t, 0, 0, 0)|\} \frac{T}{\left[1 - \left(a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T}{2\sqrt{3}} \right) \right]} \end{aligned}$$

ce qui implique que $|x''|_2$ est bornée par $C_2 = \max_{t \in [0, T]} \{|f(t, 0, 0, 0)|\} \frac{T}{\left[1 - \left(a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T}{2\sqrt{3}} \right) \right]}$
c'est à dire il existe une constante positive C_2 telle que:

$$|x'|_0 \leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} |x''|_2 \leq C_2$$

pour $|x''|_2 = 0$ il est claire que $|x''|_2$ est bornée .

donc

$$\begin{aligned} \|x\|_{C_T^{1, \frac{1}{2}}} &= \max \{|x|_0 + |x'|_0\} \\ &< \max \left\{ \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} C_1, C_2 \right\} + 1 \\ &:= M \end{aligned}$$

c'est à dire il existe un constant positive M telle que:

$$\|x\|_{C_T^{1,\frac{1}{2}}} < M$$

ii) Si $(\bar{H}_2)$ et H_3 sont satisfaites:

on a

$$\begin{aligned} \int_0^T [(f(t, x', x(t), x(t - \tau(t))))x'(t)]dt &= - \int_0^T x''(t)x'(t)dt \\ &= - \int_0^T d(x'(t))dt \\ &= - [x'(t)]_0^T \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

par $\bar{H}_2$ on a pour $x_1 = x'$ et $x_2 = 0$

$$a|x'(t)|_2^2 \leq \int_0^T [(f(t, x', x(t), x(t - \tau(t)))) - f(t, 0, x(t), x(t - \tau(t)))]x'(t)dt$$

par (2.5) on a

$$\begin{aligned}
a|x'(t)|_2^2 &\leq \int_0^T |f(t, 0, x(t), x(t - \tau(t)))||x'(t)|dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, 0, x(t), x(t - \tau(t))) - f(t, 0, 0, 0)||x'(t)|dt + \int_0^T |f(t, 0, 0, 0)||x'(t)|dt \\
&\leq \int_0^T [b|x(t)| + c|(t - \tau(t))|]|x'(t)|dt + \int_0^T |f(t, 0, 0, 0)||x'(t)|dt \\
&\leq b|x|_2|x'|_2 + c|x|_0 \int_0^T |x'(t)|dt + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x'|_2 \\
&\leq \left[b\frac{T}{2\pi} + c\frac{T}{2\sqrt{3}} \right] |x'(t)|_2^2 + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x'|_2
\end{aligned}$$

pour $|x'|_2 \neq 0$ on a:

$$|x'|_2 \leq \left[b\frac{T}{2\pi} + c\frac{T}{2\sqrt{3}} \right] |x'|_2 + \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est à dire :

$$\left\{ 1 - \left[b\frac{T}{2\pi} + c\frac{T}{2\sqrt{3}} \right] \right\} |x'|_2 \leq \left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$|x'|_2 \leq \frac{\left(\int_0^T |f(t, 0, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left\{ 1 - \left[b\frac{T}{2\pi} + c\frac{T}{2\sqrt{3}} \right] \right\}}$$

ce qui implique que :

$$|x'|_2 \leq C_1$$

donc

$$|x|_0 \leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} C_1$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
|x''|_2^2 &= \int_0^T |x''(t)|^2 dt \\
&= \int_0^T x''(t)^2 dt \\
&= \int_0^T x''(t) \cdot x''(t) dt
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
|x''|_2^2 &= - \int_0^T [\lambda^2(\sigma - 1)x(t) - \sigma f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))] x''(t) dt \\
&\leq \lambda^2 \int_0^T |(\sigma - 1)x(t)| |x''(t)| dt + \sigma \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))| |x''(t)| dt \\
&\leq \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))| |x''(t)| dt + \lambda^2 T \frac{T^2}{4\pi^2} |x''|_2^2 \\
&\leq \lambda^2 \frac{T^3}{4\pi^2} |x''|_2^2 + \int_0^T |f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) - f(t, x'(t), 0, 0)| |x'(t)| dt + \int_0^T |f(t, x'(t), 0, 0)| |x''(t)| dt \\
&\leq \lambda^2 \frac{T^3}{4\pi^2} |x''|_2^2 + \int_0^T [b|x(t)| + c|x(t - \tau(t))|] |x''(t)| dt + \int_0^T |f(t, x'(t), 0, 0)| |x''(t)| dt \\
&\leq \left[\lambda^2 \frac{T^3}{4\pi^2} + b|x|_2 + c\sqrt{T}|x|_0 \right] |x''|_2^2 + \left(\int_0^T |f(t, x'(t), 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x''|_2 \\
&\leq \left[\lambda^2 \frac{T^3}{4\pi^2} + b|x|_2 + c\sqrt{T}|x|_0 \right] |x''|_2^2 + \left(\int_0^T \max \{f(t, u, 0, 0) : |u| \leq L\}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x''|_2 \\
&\quad + \int_0^T p(t)|x'(t)| + q(t)|x''(t)| dt \\
&\leq \left\{ \lambda^2 \frac{T^3}{4\pi^2} + b|x|_2 + c\sqrt{T}|x|_0 + \left(\int_0^T \max \{f(t, u, 0, 0) : |u| \leq L\}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + |p|_0 \frac{T^2}{4\pi^2} + |q|_2 \right\} |x''|_2
\end{aligned}$$

donc

$$|x''|_2 \leq \left\{ \lambda^2 \frac{T^3}{4\pi^2} + b|x|_2 + c\sqrt{T}|x|_0 + \left(\int_0^T \max \{f(t, u, 0, 0) : |u| \leq L\}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + |p|_0 \frac{T^2}{4\pi^2} + |q|_2 \right\}$$

donc $|x''|_2$ est bornée.

ce qui implique:

$$|x'|_0 \leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} |x''|_2 \leq C_2$$

donc

$$\|x\|_{C_T^{1,\frac{1}{2}}} < \max \left\{ \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} C_1, C_2 \right\} + 1$$

c'est à dire il existe un constant positive M telle que:

$$\|x\|_{C_T^{1,\frac{1}{2}}} < M$$

Ainsi l'operatuer A admet un point fixe par le lemme 1.5.

■

Chapitre 3

Exemples

3.1 Exemple1

considérons l'équation différentielle non linéaire du second degré

$$x''(t) + \frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x'(t) + \frac{1}{7} x(t) + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi} x(t - \sin^2 t) - \cos t = 0 \quad (Ex_1)$$

Notre problème s'écrit sous la forme

$$x''(t) = f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))$$

avec

$$f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t))) = \frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x'(t) + \frac{1}{7} x(t) + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi} x(t - \sin^2 t) - \cos t$$

ainsi

$$f(t, x, y, z) = \frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x + \frac{1}{7} y + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi} z - \cos t$$

et

$$\begin{aligned}
 f(t + \pi, -x, -y, -z) &= \frac{1}{2} \sin^2(t + \pi) \cdot (-x) + \frac{1}{7}(-y) + \frac{1 + \sin^4(t + \pi)}{2\sqrt{3}\pi}(-z) - \cos(t + \pi) \\
 &= -\frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x - \frac{1}{7}y - \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi}z + \cos t \\
 &= -\left[\frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x + \frac{1}{7}y + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi}z - \cos t \right] \\
 &= -f(t, x, y, z)
 \end{aligned}$$

et

$$\tau(t) = \sin^2 t$$

verifié

$$\begin{aligned}
 \tau(t + \pi) &= \sin^2(t + \pi) \\
 &= \sin^2 t \\
 &= \tau(t)
 \end{aligned}$$

on conclu que (H_1) est satisfaite

d'autre part :

par

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{7}; c = \frac{1}{\sqrt{3}\pi}$$

on a

$$\begin{aligned}
 a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} &= \frac{1 \times \pi}{4\pi} + \frac{\pi^2}{28\pi^2} + \frac{1 \times \pi^2}{3\pi^2} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{84 + 12 + 112}{336} \\
 &\approx 0.62
 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$a \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^2}{4\pi^2} + c \frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} < 1$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| &= \left| \left(\frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x_1 + \frac{1}{7} y_1 + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi} \cdot \sin z_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \sin^2 t \cdot x_2 + \frac{1}{7} y_2 + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi} \cdot \sin z_2 \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \sin^2 t \cdot (x_1 - x_2) + \frac{1}{7} (y_1 - y_2) + \frac{1 + \sin^4 t}{2\sqrt{3}\pi} \cdot (\sin z_1 - \sin z_2) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| + \frac{1}{7} |y_1 - y_2| + \frac{1 + 1}{2\sqrt{3}\pi} \cdot |z_1 - z_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| + \frac{1}{7} |y_1 - y_2| + \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \cdot |z_1 - z_2| \\ &\leq a |x_1 - x_2| + b |y_1 - y_2| + c |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

donc f satisfait (H_2)

d'où d'après les théorèmes 2.1 et 2.2 l'équation (Ex_1) admet une unique solution anti-périodique .

■

3.2 Exemple2

concéderons l'équation différentielle non linéaire de second degré

$$x''(t) + \frac{1}{4} \cos^2 t \cdot x(t) + \frac{1}{8} x'(t) + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} x(t - \sin^2 t) - \cos t = 0 \quad (Ex_2)$$

Notre problème s'écrit sous la forme

$$x''(t) = f(t, x'(t), x(t), x(t - \tau(t)))$$

avec

$$f(t, x, y, z) = \frac{1}{4} \cos^2 t . y + \frac{1}{8} x + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} z - \cos t$$

ainsi

$$f(t, x, y, z) = \frac{1}{4} \cos^2 t . y + \frac{1}{8} x + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} z - \cos t$$

et

$$\begin{aligned} f(t + \pi, -x, -y, -z) &= \frac{1}{4} \cos^2 (t + \pi) . (-y) + \frac{1}{8} (-x) + \frac{3 \cos^4 (t + \pi)}{8\sqrt{3}\pi} (-z) - \cos (t + \pi) \\ &= -\frac{1}{4} \cos^2 t . y - \frac{1}{8} x - \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} z + \cos t \\ &= -\left[\frac{1}{4} \cos^2 t . y + \frac{1}{8} x + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} z - \cos t \right] \\ &= -f(t, x, y, z) \end{aligned}$$

et

$$\tau(t) = \sin^2 t$$

verifie

$$\begin{aligned} \tau(t + \pi) &= \sin^2 (t + \pi) \\ &= \sin^2 t \\ &= \tau(t) \end{aligned}$$

on conclu que (H_1) est satisfait.

d'autre part :

par

$$a = \frac{1}{8}; b = \frac{1}{4}; c = \frac{3}{8\sqrt{3}\pi}$$

on a

$$\begin{aligned}
a\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi^2} + c\frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2} + \frac{3}{8\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{4\sqrt{3}\pi} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1+2+1}{8} \\
&= \frac{4}{8} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$a\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi^2} + c\frac{T^2}{4\sqrt{3}\pi} < 1$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| &= \left| \left(\frac{1}{4} \cos^2 t \cdot y_1 + \frac{1}{8} x_1 + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} z_1 - \cos t \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{4} \cos^2 t \cdot y_2 + \frac{1}{8} x_2 + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} z_2 - \cos t \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{8} \cdot (x_1 - x_2) + \frac{1}{4} \cos^2 t (y_1 - y_2) + \frac{3 \cos^4 t}{8\sqrt{3}\pi} \cdot (\sin z_1 - \sin z_2) \right| \\
&\leq \frac{1}{8} |x_1 - x_2| + \frac{1}{4} |y_1 - y_2| + \frac{3}{8\sqrt{3}\pi} \cdot |z_1 - z_2| \\
&\leq a |x_1 - x_2| + b |y_1 - y_2| + c |z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

donc f satisfait (H_2)

d'où d'après les théorèmes 2.1 et 2.2 l'équation (Ex_2) admet une unique solution anti-périodique .

■

Bibliographie

- [1] OKOCHI H., *On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations*, *J. Math. Soc. Japan* 40 (1988) 541-553
- [2] OKOCHI H., *On the existence of anti-periodic solutions to a nonlinear evolution equation associated with odd subdifferential operators*, *J. Funct. Anal.* 91 (1990) 246-258.
- [3] CHEN Y.Q., NIETO J.J., O'Regan D., *Anti-periodic solutions for evolution equations associated with maximal monotone mappings*, *Applied Mathematics Letters* 24(2011) 302-307
- [4] CHEN Y.Q., NIETO J.J., O'Regan D., *Anti-periodic solutions for fully nonlinear first-order differential equations*, *Math. Comput. Modelling* 46 (2007) 1183-1190
- [5] JEAN-PIERRE KAHANE ET PIERRE-GILLES LEMARI-RIEUSSET, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998
- [6] SERGE LANG ; *Calculus of several variables*, Springer Science & Business Media, 1987
- [7] MAWHIN J. WILLEM M., *Critical point theory and Hamiltonian systems. Application of mathematical science, vol.74. New York: Springer-Verlag, 1989.*
- [8] RUIXI LIANG; *New results on anti-periodic boundary value problems for second-order nonlinear differential equations* , SpringerOpen Journal , 2012
- [9] HIRSCH F. LACOMBE G. ; *Elements of Functional Analysis. Springer (1999), p355*
- [10] GILBARG D., TRUDINGER N., *Elliptic partial differential equations of second order*, New York: Springer-Verlag, 1998.

- [11] GILBARG D., TRUDINGER N., *Elliptic partial differential equations of second order*, New York: Springer-Verlag, 1998.
- [12] JING ZHAO JINBO LIU LIJING FANG .; *Anti-periodic Boundary Value Problems of Second-Order Functional Differential Equations ; Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2014
- [13] JING ZHAO JINBO LIU LIJING FANG .; *Anti-periodic Boundary Value Problems of Second-Order Functional Differential Equations ; Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2014