

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté de Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Biomathématiques et modélisation
présenté par

Otmani Fatima Zohra

Soutenu le : 30 - Juin - 2019

Système proie-prédateur avec comportement de troupeau et un Effet Allee fort

Soutenu devant le jury composé de :

M. S.E. MIRI	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Président
M. M.A. MENOUEUR	Maître de Conférences B	U. Tlemcen	Examineur
M. M. MAMCHAOU	Maître de Conférences B	U. Tlemcen	Examineur
M. R. BENTIFOUR	Maître de Conférences B	U. Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire :2018-2019

Dédicace

Je dédie ce mémoire :
A mes très chers parents.
A mes frères et mes sœurs.
A tous les membres de ma famille, petits et grands.
A tous mes amis sans exception.
A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.
A tous mes enseignants.

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à **Dieu** tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Au terme de ce travail je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur **Bentifour Rachid**.

Je tiens à remercier, également, Monsieur **Miri Sofiane El-Hadi**, pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **Menouer Mohammed Amine** et Monsieur **Mamchaoui Mohammed**, pour l'honneur d'avoir accepté de participer au jury qui examinera ce travail.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et assisté durant mes études.

Table des matières

Table des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Outils mathématiques fondamentaux	4
1.1 Étude d'une équation différentielle ordinaire	4
1.2 Point d'équilibre	6
1.3 Stabilité	6
1.4 Système d'équations dans $\mathbb{R}^2$	8
1.5 Étude des systèmes linéaires dans le plan	8
1.6 Étude des systèmes non linéaires	16
1.7 Fonction de Lyapunov	18
1.8 Théorème de Poincaré Bendixon	20
1.9 Théorie des bifurcations	20
1.9.1 Types de Bifurcation	21
1.9.2 Bifurcation de Hopf	21
1.10 Quelques modèles de dynamique de population	22
1.10.1 Modèle de Malthus	22
1.10.2 Modèle de Verhulst (Modèle Logistique)	23
1.10.3 Modèle de croissance avec effet Allee	23
1.10.4 Modèle de Lotka Volterra	24
1.10.5 Modèle de Holling	26
2 Effet Allee dans un modèle particulier de type proie -prédateur	27
2.1 Modèle Mathématique	27
2.2 Positivité et bornitude des solutions	29

2.3	Type d'extinction	32
2.4	Équilibres et stabilité	35
2.5	Bifurcation de Hopf	41
3	Simulation numérique	43
3.1	Point d'équilibre E_1 :	43
3.2	Point d'équilibre E^* :	44
3.3	Diagramme de bifurcation	47
	Bibliographie	49

Table des figures

1.1	Portraits de phase	8
1.2	Portrait de phase d'un nœud instable.	11
1.3	Portrait de phase d'un nœud stable.	11
1.4	Portrait de phase d'un point selle.	12
1.5	Portrait de phase d'un foyer instable. A partir d'une condition initiale proche de l'équilibre les trajectoires spiralent en s'éloignant de celui-ci.	14
1.6	Portrait de phase d'un foyer stable. Les trajectoires spiralent en s'ap- prochant de l'équilibre.	14
1.7	Portrait de phase d'un centre. Les trajectoires sont des cercles qui se referment autour de l'équilibre.	15
1.8	Typologie des systèmes planaires en dimension 2 en fonction de la trace et du déterminant de la matrice A dans le cas de $\det A \neq 0$	16
1.9	Trois types de réponses fonctionnelles selon Holling	26
2.1	Isoclines verticales et horizontales de système (2.2)	36
3.1	Comportement des solution du système (2.2).	44
3.2	Portrait de phase du système (2.2) pour différents choix de $x(0)$ et $y(0)$ montrons des spirales stables convergent vers $E^*(0.6830, 1.2276)$.	44
3.3	Comportement du x et du y dans le cas E^* localement asymptotique- ment stable.	45
3.4	Portrait de phase du système (2.2) montrant une orbite périodique proche de $E^*(0.6830, 1.1.1080)$	46
3.5	Comportement du x et du y dans le cas E^* instable.	46
3.6	Diagramme de bifurcation avec $a = 0.89$, $b = 0.19$, $c = 0.21$ et $d = 0.1$.	47

Liste des tableaux

3.1	Les valeurs des paramètre dans la figure 3.1.	43
3.2	Les valeurs des paramètres dans la figure 3.2.	44

Introduction

La dynamique des populations est une branche de l'écologie qui s'intéresse à la fluctuation dans le temps du nombre d'individus au sein d'une population d'êtres vivants. Elle a également pour but de comprendre les influences environnementales sur les effectifs des populations. La structuration de la population en âge, en poids, l'environnement, la biologie des groupes, et les processus qui influent sur ces changements font également partie de son champ d'étude.

La relation proie-prédateur est très importante, car une telle relation maintient l'équilibre écologique dans la nature. La modélisation mathématique de l'interaction proie-prédateur a été lancée dans les années 1920, le premier modèle proie-prédateur a été développé par Alfred James Lotka (un physicien-chimiste américain) et Vito Volterra (un mathématicien italien).

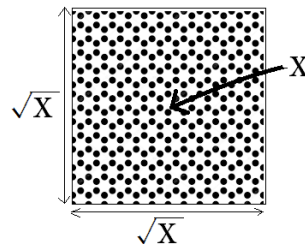
L'objectif de ce mémoire est d'étudier le comportement dynamique d'un système proie prédateur.

La proie de notre système présente un comportement de groupe. Très récemment, Angulo et al. [3] ont suggéré que le comportement de groupe diminue les risques d'extinction causés par l'effet Allee. Maintenant, quand une population forme des groupes, les membres d'un groupe n'interagissent pas à la fois. Plusieurs raisons expliquent ce comportement de troupeaux, telles que la recherche des ressources alimentaires, la défense contre les prédateurs, etc.

En conséquence, Il est nécessaire de chercher une forme appropriée de réponse fonctionnelle pour décrire ce comportement social. Plusieurs travaux ont démontré une idée ingénieuse selon laquelle les puissances appropriées des variables d'état peuvent expliquer le comportement social des populations. Par exemple, pour explorer les conséquences de la formation de groupes spatiaux de forme fixe par des prédateurs, Cosner et al. [9] ont introduit l'idée de la racine carrée de la variable prédatrice qui doit être utilisée dans la fonction décrivant le taux de rencontre dans les systèmes à

deux dimensions.

Soit X la densité d'une population constituée un troupeaux et supposons qu'un troupeau occupe une zone A , le nombre d'individus occupant des positions ultra-périphériques dans le troupeau est proportionnel à la longueur du périmètre de la parcelle où se trouve le troupeau. Il est clair que sa longueur est proportionnelle à $\sqrt{A}$. Puisque X est distribué sur un domaine à deux dimensions, $\sqrt{X}$ compterait donc les individus situés au bord du patch. Ainsi, quand l'attaque d'un prédateur sur cette population doit être modélisée, la fonctionnelle réponse doit être en termes de racine carrée de la population des proies. C'est l'idée principale de Ajraldi et al.



[1]. Braza [6] a fortement mis l'accent sur ce concept et a introduit une nouvelle réponse fonctionnelle, où la densité de la proie, et remplacée par sa racine carrée. La fonction réponse de notre modèle du type Holling II et donc sous la forme suivante :

$$F_1(X) = \frac{\alpha\sqrt{X}}{1 + T_h\alpha\sqrt{X}} \quad (1)$$

Il a déjà été mentionné que si une population est sensible à l'effet Allee, alors vivre dans des troupeaux pourrait lui être bénéfique [3]. Maintenant, s'il y a un prédateur, un tel comportement joue un rôle clé en ce qui concerne la vigilance et le risque de prédation [14].

L'attention des écologistes théoriciens s'est portée très récemment sur la dynamique des systèmes proie-prédateurs avec le comportement de troupeau de la proie, mais dans tous les cas, il est supposé que la proie a une croissance logistique (voir [4] et les références qu'il contient), Il serait de la plus haute importance de considérer les systèmes proie-prédateur avec le comportement de troupeau et l'effet Allee. On ne peut nier que de telles considérations seraient très intéressantes du point de vue théorique et pratique.

Description du travail :

Pour cela on divise notre travail en trois chapitres, organisés comme suit :

Le premier chapitre est consacré à quelques outils mathématiques fondamentaux, on

y donne aussi quelques rappels sur certains modèles de dynamiques de populations. Dans le deuxième chapitre nous allons présenter le modèle mathématique et étudier la positivité et la bornitude des solutions, on présente aussi quelques résultats sur l'extinction des proies et prédateurs, ensuite on cherche tous les points d'équilibre possible du modèle et leurs stabilités.

Dans le dernier chapitre nous présentons des simulations numériques concernant notre modèle pour valider les résultats analytiques.

Finalement, on donne une conclusion générale du travail.

Chapitre 1

Outils mathématiques fondamentaux

Dans ce chapitre, nous faisons un petit rappel des résultats liés aux EDO. Dans un premier temps, nous exposons les notions classiques de la théorie. Ensuite, nous abordons la théorie de la stabilité dans son cadre le plus simple (voir [[15]]).

1.1 Étude d'une équation différentielle ordinaire

Soit $x(t)$ une variable réelle dépendante de la variable réelle t , où t dans ce cas définit le temps.

Définition 1.1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et D un domaine ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ les éléments de D sont les couples (t, x) .

Soit, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et notons $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Une équation différentielle ordinaire dite EDO du premier ordre est une relation de la forme :

$$\dot{x} = f(t, x(t))$$

ou brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

On appelle solution de cette EDO sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, borné ou non, la fonction

$$\begin{aligned} x : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow x(t) \end{aligned}$$

définie et dérivable sur I et vérifiant :

- $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$
- $\forall t \in I \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t))$

x est appelé l'état du système et f représente le champ de vecteur sur D . Si f ne dépend pas explicitement de t , l'EDO (1.1) est dite équation autonome, sinon elle est non autonome.

Définition 1.2. (Problème de Cauchy) : Soit $(t_0, x_0) \in D$. On dit que x est une solution au problème de Cauchy relatif à (t_0, x_0) , si x est une solution de (1.1) sur I telle que $x(t_0) = x_0$. Avec, (t_0, x_0) la condition initiale associée au problème de Cauchy.

On écrit symboliquement le problème de Cauchy sous la forme suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.3. Une application

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longrightarrow f(t, x) \end{aligned}$$

est dite k -Lipschitzienne par rapport à x uniformément par rapport à t si $\forall (t, x), (t, y) \in D$

on a

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

où, k ne dépend pas de t , et $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1. (Cauchy-Lipschitz, solution locale) : [12] soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \longmapsto f(t, x)$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable x , sur D alors il existe un plus grand intervalle $I_{\max}(t_0, x_0)$ (ouvert) sur lequel est définie une unique solution x au problème de Cauchy (1.1). $I_{\max}(t_0, x_0)$ s'appelle l'intervalle maximal d'existence de la solution x de l'équation (1.1).

Théorème 1.2. [15] On considère une équation différentielle donnée dans la définition 1.2 (Problème de Cauchy) par l'équation (1.2) où la fonction f est définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable et de dérivée continue sur

I , alors pour tout $x_0 \in I$, il existe T un réel positif et une fonction x définie sur $[-T, T] \times x_0$ telle que $x(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle pour tout $t \in [-T, T]$. De plus, la solution est unique, c'est-à-dire que si y est également une solution de l'équation différentielle, alors $x(t, x_0) = y(t, y_0)$ pour tout $t \in [-T, T]$.

1.2 Point d'équilibre

Soit l'équation différentielle autonome :

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.3)$$

Définition 1.4. On appelle point d'équilibre, une solution constante $x(t) = x^*$ qui vérifie $f(x^*) = 0$ (i.e. $\dot{x}^* = 0$.)

1.3 Stabilité

Cas linéaire :

Soit l'équation différentielle linéaire suivante

$$\dot{x} = \lambda x = f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Si $f(x^*) = 0$, alors $x^* = 0$ est un point d'équilibre de l'équation (1.4).

La solution de l'équation $\dot{x} = \lambda x$ est donnée par $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

On distingue 3 cas :

1. Si $\lambda < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, $\forall x_0$ le point d'équilibre $x^* = 0$ est globalement asymptotiquement stable.
2. Si $\lambda > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, $\forall x_0$ le point d'équilibre $x^* = 0$ est instable.
3. Si $\lambda = 0$, alors dans ce cas $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$, $\forall (x_0)$ le point d'équilibre $x^* = 0$ est neutralement stable.

Remarque 1.1. Dans le cas linéaire la stabilité asymptotique locale implique la stabilité asymptotique globale.

Cas non linéaire :

Soit x^* un point d'équilibre de l'équation (1.4). Le point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable si pour toute condition initiale x_0 proche de x^* , la solution

$x(t)$ reste proche de cet équilibre.

Si x^* n'est pas stable, alors il est instable.

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre x^* on procède comme suit : On pose $u(t) = x(t) - x^*$, ce changement de variable permettra de se ramener à l'origine.

Donc on a :

$$\dot{u} = \dot{x}(t) = f(x) = f(u + x^*)$$

En utilisant le développement de Taylor au voisinage de x^* on obtient :

$$\dot{u} = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*) \simeq f'(x^*)u$$

Ensuite, on pose $\lambda = f'(x^*)$

On obtient donc l'équation dite linéaire au voisinage de x^*

$$\dot{u} = \lambda u,$$

avec $u^* = 0$ et $\lambda = f'(x^*)$ alors la solution de l'équation est donnée par : $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$, et on distingue 3 cas :

1. Si $\lambda < 0$ [$f'(x^*) < 0$], alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$, $\forall u_0$ on dit que le point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable.
2. Si $\lambda > 0$ [$f'(x^*) > 0$], alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$, $\forall u_0$ on dit que le point d'équilibre x^* est instable.
3. Si $\lambda = 0$ [$f'(x^*) = 0$], alors la linéarisation ne permet pas de conclure, on dit que x^* est non hyperbolique.

Définition 1.5. (Portrait de phase) :

On cherche des points d'équilibres de $\dot{x} = f(x)$, la solution est x soit croissante ($\dot{x} > 0$), soit décroissante ($\dot{x} < 0$.)

Le sens de la variation de $\dot{x}$ est représenté par une flèche orientée vers la droite si $\dot{x} > 0$ et vers la gauche si $\dot{x} < 0$, cette représentation est appelée portrait de phase.

En générale on a quatre portraits de phase possible représentant quatre cas différents : **stable, instable, shunt positif, shunt négatif** donnée par la figure 1.1 suivante :

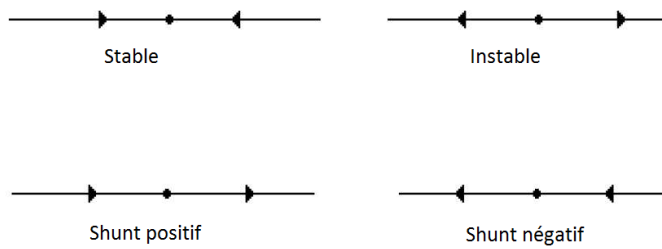


Figure 1.1 – Portraits de phase

1.4 Système d'équations dans $\mathbb{R}^2$

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = g(x, y), & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Qu'on peut l'écrire sous la forme standard $\dot{X} = F(X)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(X) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

Si $F \in \mathcal{C}^1$ alors, on a l'existence et l'unicité de la solution.

On appelle point d'équilibre du système (1.5) une solution constante vérifiant :

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

1.5 Étude des systèmes linéaires dans le plan

Résolution du système linéaire $\dot{X} = AX$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

donc on a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Définition 1.6. Soit A une matrice carrée, l'exponentielle de A noté e^A est définie par $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ avec $A^0 = I$.

Propriété 1.1. :

- ★ Si A et B commutent ($AB = BA$) alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
- ★ Si B est semblable à A ($B = P^{-1}AP$) alors $e^B = P^{-1}e^A P$.
- ★ La dérivée $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{tA}A$.

Cas particuliers :

1.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{implique} \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{implique} \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{implique} \quad e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Définition 1.7. La solution de l'équation $\dot{X} = AX$ avec $X(0) = X_0$ est donnée par :

$$X(t) = e^{tA} X_0.$$

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \dot{X} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose que $\det A \neq 0$ (donc $X^* = 0$ est le seul point d'équilibre).

Une valeur propre λ est solution de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$,

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont données en fonction de son déterminant et de sa trace par :

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta})$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta})$ tel que $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A$ et vérifient les relations $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det A$.

1er Cas : A admet deux valeurs propres réelles distincts $\lambda_1 \neq \lambda_2$

A est diagonalisable :

$\exists P$ tel que

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

En faisant le changement de variable $X = PY$ donc $Y = P^{-1}X$ ceci implique que

$$\dot{Y} = P^{-1}\dot{X} = JY$$

alors, un calcul simple donne

$$\dot{Y} = JY \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

L'allure des trajectoires va dépendre du signe des valeurs propres.

Trois cas peuvent être distingués ;

1. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors les deux valeurs propres sont positives.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = \infty$; $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty$

Donc toutes les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre $(0, 0)$, il s'agit d'un nœud instable.

L'allure générale des trajectoires est représentée sur la figure 1.2.

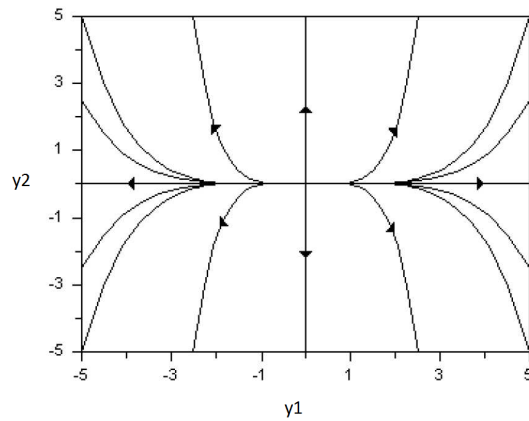


Figure 1.2 – Portait de phase d'un nœud instable.

2. Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors les deux valeurs propres sont négatives.

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ donc toutes les trajectoires tendent vers le point d'équilibre $(0,0)$, il s'agit d'un nœud stable.

L'allure générale des trajectoires est représentée sur la figure 1.3.

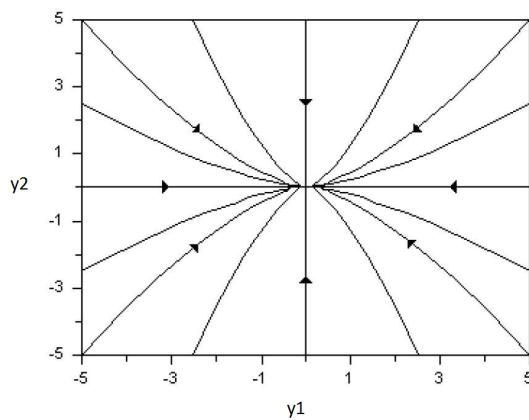


Figure 1.3 – Portait de phase d'un nœud stable.

3. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors les deux valeurs propres sont de signes contraires, il s'agit d'un point selle ou point col (Saddle point).

L'allure générale des trajectoires est représentée sur la figure 1.4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0; \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty$$

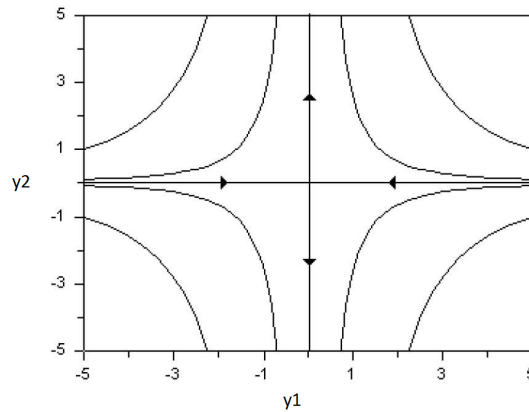


Figure 1.4 – Portrait de phase d'un point selle.

2 ème Cas : A admet ce valeur propre double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

★ A est diagonalisable :

$\exists P$ tel que

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On faisant le changement de variable $X = PY$:

$$\dot{Y} = JY \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Trois cas peuvent être distingués :

1. Si $\lambda > 0$, alors on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \infty$; $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty$ donc le point d'équilibre 0 est dite étoile instable
2. Si $\lambda < 0$, alors on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ donc le point d'équilibre 0 est dite étoile stable

★ A est triangulaires :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{Y} = JY \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases}$$

Alors $y_2 = c_2 e^{\lambda t}$ donc $\dot{y}_1 = \lambda y_1 + c_2 e^{\lambda t}$ ainsi la solution de système est :

$$\begin{cases} y_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

- Si $\lambda > 0$, alors le point d'équilibre 0 est un nœud dégénéré instable, puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty$.
- Si $\lambda < 0$, alors le point d'équilibre 0 est un nœud dégénéré stable, puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$.

L'allure générale des trajectoires est très semblable à celle d'un nœud instable ou stable et n'est pas présentée ici.

3ème Cas : Deux valeurs propres complexes conjuguées

Dans ce cas, la matrice peut se mettre sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Rappelons que les valeurs propres de la matrice A sont alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

et le système

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - \beta y_2 & (1) \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + \alpha y_2 & (2) \end{cases}$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} y_1 = r \cos \theta \\ y_2 = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow r^2 = y_1^2 + y_2^2$$

Après calculs on obtient le système suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}$$

Dont les solutions sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \beta_0 \end{cases}$$

La trajectoire est dans ce cas une combinaison de deux mouvements, un mouvement de rotation autour du point d'équilibre à vitesse angulaire constante β est un mouvement d'approche ou d'éloignement du point d'équilibre selon une fonction exponentielle du temps avec un facteur α .

Trois cas peuvent être distingués :

1. Si $\alpha > 0$ ($\beta > 0$), alors il s'agit d'un foyer instable.

L'allure générale des trajectoires est représentée sur la figure 1.5

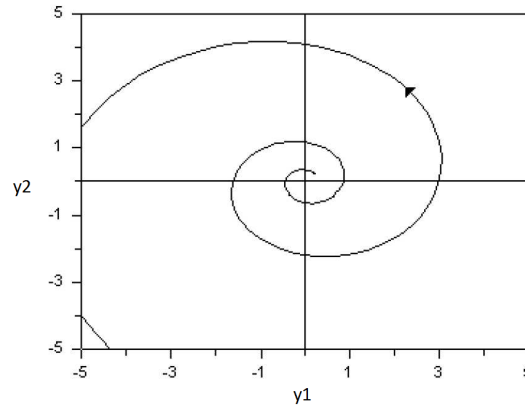


Figure 1.5 – Portrait de phase d'un foyer instable. A partir d'une condition initiale proche de l'équilibre les trajectoires spiralent en s'éloignant de celui-ci.

2. Si $\alpha < 0$ ($\beta > 0$), alors il s'agit d'un foyer stable.

L'allure générale des trajectoires est représentée sur la figure 1.6.

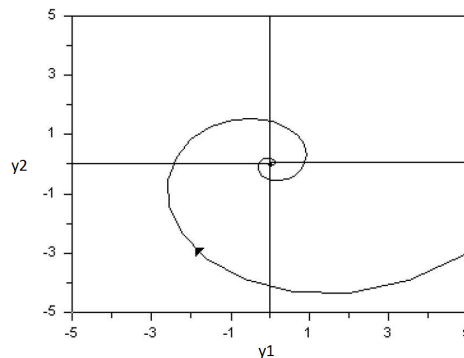


Figure 1.6 – Portrait de phase d'un foyer stable. Les trajectoires spiralent en s'approchant de l'équilibre.

3. Si $\alpha = 0$ ($\beta > 0$), alors les deux valeurs propres sont imaginaires pures, il s'agit d'un centre. L'allure générale des trajectoires est représentée sur la figure 1.7.

Toutes les trajectoires sont des cercles entourant le point d'équilibre $(0, 0)$.

Le retour dans la base d'origine correspondant aux solutions en (y_1, y_2) ne modifie pas l'allure générale des trajectoires car il s'agit d'une transformation linéaire. Les

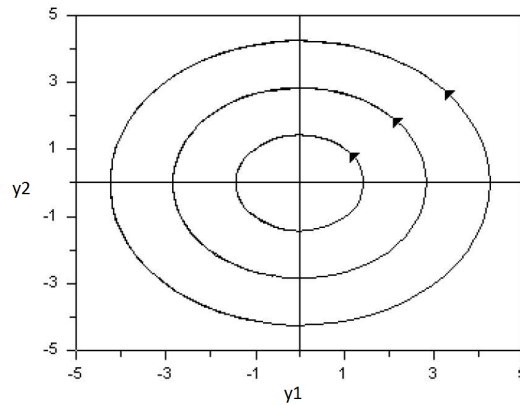


Figure 1.7 – Portrait de phase d'un centre. Les trajectoires sont des cercles qui se referment autour de l'équilibre.

portraits de phase possibles d'un système linéaire en dimension 2 sont localisés dans le plan $(\text{tr } A, \det A)$ avec $\det A \neq 0$ de la figure 1.8.

Nous ne présentons pas les cas correspondant à $\det A = 0$ qui conduisent à d'autres cas possibles pour les quels l'une des valeurs propres ou les deux sont nulles.

On peut annoncer le théorème suivant

Théorème 1.3. [5]

1. Si $\det A < 0$, alors X^* est un point selle (côl) instable.
2. Si $\det A > 0$, et $\text{tr } A = 0$, alors X^* est un centre stable.
3. Si $\det A > 0$ et $\Delta < 0$, alors X^* est un foyer asymptotiquement stable si $\text{tr } A < 0$ et foyer instable si $\text{tr } A > 0$.
4. Si $\det A > 0$ et $\Delta > 0$, alors X^* est un nœud asymptotiquement stable si $\text{tr } A < 0$ et nœud instable si $\text{tr } A > 0$.

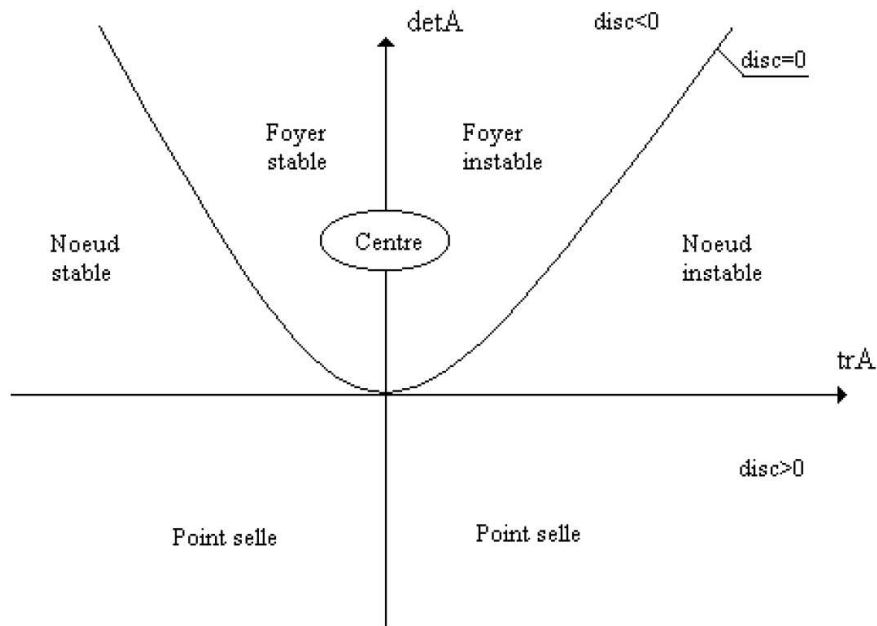


Figure 1.8 – Typologie des systèmes planaires en dimension 2 en fonction de la trace et du déterminant de la matrice A dans le cas de $\det A \neq 0$.

1.6 Étude des systèmes non linéaires

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

Supposons que le système (1.6) admet un point d'équilibre (x^*, y^*) donc

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

On introduit des variables locales

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases}$$

Calculons $\dot{u}$ et $\dot{v}$

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \dot{x} \\
 &= f(x, y) \\
 &= f(u + x^*, v + y^*) \\
 &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v + o(\|u, v\|) \\
 &\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\
 \\
 \dot{v} &= \dot{y} \\
 &= g(x, y) \\
 &= g(u + x^*, v + y^*) \\
 &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v + o(\|u, v\|) \\
 &\simeq \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v
 \end{aligned}$$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \dot{v} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v \end{cases} \quad (1.7)$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne calculée en (x^*, y^*) et donc le système (1.6) s'écrit $\dot{X} = AX$
On obtient donc le système linéaire qui approxime le système non linéaire (1.6) au voisinage de (x^*, y^*) .

Définition 1.8. *Un point d'équilibre $X^* = (x^*, y^*)$ est dit localement stable (LS) si est seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|X_0 - X^*\| \leq \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$$

Définition 1.9. *Le point d'équilibre X^* est dit localement asymptotiquement stable (LAS) si est seulement si :*

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X^*$$

Théorème 1.4. (Théorème de linéarisation) : *Soit le système $\dot{X} = \Phi(x)$ admettant (x^*, y^*) comme point d'équilibre et tel que $\det A \neq 0$ où A est la matrice*

jacobienne calculée en (x^*, y^*) alors au voisinage du point d'équilibre (x^*, y^*) les portraits de phase du système $\dot{U} = AU$ sont qualitativement équivalents sous réserve que le système linéarisé ne correspond pas à des centres.

Remarque 1.2. On dit que les foyers, nœuds, points selle sont structurellement stable par contre les centres ne le sont pas.

Étude des portraits de phase dans le cas planaires :

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.8)$$

et (x_i^*, y_i^*) sont les points d'équilibres du système (1.8)

Isocline verticale : $\dot{x} = f(x, y) = 0$

Isocline horizontale : $\dot{y} = g(x, y) = 0$

Remarque 1.3. :

- Lorsque une trajectoire coupe une isocline verticale ($\dot{x} = 0$), la direction du vecteur vitesse qui est tangent à la trajectoire est verticale.
- Lorsque une trajectoire coupe une isocline horizontale ($\dot{y} = 0$), la direction du vecteur vitesse qui est tangent à la trajectoire est horizontale.
- Les points d'équilibres sont les intersections des isoclines verticales et horizontales.

1.7 Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est un outil permettant de déterminer la stabilité locale et globale d'un point d'équilibre.

Cette méthode peut également être utilisée pour déterminer la stabilité d'un équilibre non hyperbolique lorsque la linéarisation ne permet pas de conclure.

Pour commencer, définissons ce qu'est une fonction définie positive.

Définition 1.10. (Fonction définie positive) : On appelle fonction définie positive (resp. négative) une fonction $V(x, y)$ définie, différentiable et de différentielle continue sur un ouvert D contenant l'origine et vérifiant les propriétés suivantes :

1. $V(0, 0) = 0$

2. $\forall (x, y) \in D - \{(0, 0)\}, \quad V(x, y) > 0 \quad (\text{resp. } V(x, y) < 0).$

Théorème 1.5. (Théorème stabilité de Lyapunov) :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

admettant l'origine comme point fixe. S'il existe une fonction réelle d'une variable réelle $V(x, y)$ définie dans un voisinage de l'origine telle que :

1. Les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ existent et sont continues.
2. $V(x, y)$ est définie positive.
3. $\dot{V} = V_x \dot{x} + V_y \dot{y}$ est définie négative, alors l'origine est un équilibre globalement asymptotiquement stable.
4. $\dot{V}$ est définie positive, alors l'origine est un équilibre instable.

Remarque 1.4. V dans le théorème précédent est dite fonction de Lyapunov forte. Si $\dot{V} \leq 0$ on dit que V est une fonction de Liapunov faible, dans ce cas l'origine est globalement stable est mais pas nécessairement asymptotiquement stable.

Définition 1.11. (Cycle limite) : est une trajectoire fermée isolée au moins d'un côté.

Remarque 1.5. :

- Un cycle limite n'est pas toujours stable.
- Un cycle limite est différent d'un centre.

Pour démontrer l'existence d'un cycle limite, il est possible d'appliquer le théorème d'existence de cycle limite dit Théorème de Poincaré Bendixon.

Définition 1.12. (Domaine positivement invariant) : Un domaine D du plan associé au système (1.9) est dit positivement invariant si quel que soit la condition initiale $(x_0, y_0) \in D$, la trajectoire correspondante reste dans D lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Définition 1.13. (Domaine attractant) : On appelle domaine attractant une région D du plans, bornée et compacte telle que toute trajectoire partant du bord ∂D de D entre dans l'intérieur de D .

Définition 1.14. ω – limite : Soit p_0 un point du domaine de définition du système (1.8). On appelle ω – limite de p_0 , l'ensemble suivant :

$$\omega(p_0) = \bigcup_{t \geq 0} \overline{\{x(s, p_0), y(s, p_0), s \geq t\}}$$

1.8 Théorème de Poincaré Bendixon

Le théorème de Poincaré Bendixon [15][16] est un outil très important dans l'études des systèmes dynamiques, il est énoncé par Henri Poincaré et la preuve est finalement complétée par Ivar Bendixon en 1901. *Gra*ce a ce théorème et sous des hypothèses nous pouvons assurer l'existence d'un cycle limite. Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x(t), y(t)) \\ \dot{y} &= g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.9)$$

où f et g sont différentiables et de différentielles continues sur $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, \infty[$;

Théorème 1.6. *Si D est un domaine bornée attractant du plan, tout trajectoire de D admet comme ω – limite*

- ✓ *Soit un point d'équilibre.*
- ✓ *Soit une orbite périodique.*
- ✓ *Soit un ensemble constitué de la réunion de points d'équilibres et d'orbites régulières qui les joignent (hétéroclines ou homoclines)*

Proposition 1.1. (Critère négatif de Bendixon) :

Soit un système du type (1.9) donnée dans une région D simplement connexe.

Si $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ est de signe constant sur D alors il n'existe pas de cycle limite entièrement contenue dans D .

Proposition 1.2. (Critère négatif de Dulac) :

Soit un système de type (1.9) et D une région simplement connexe.

Soit $B(x, y)$ une fonction strictement positive continue et différentiable quelconque sur D .

Si $\frac{\partial Bf}{\partial x} + \frac{\partial Bg}{\partial y}$ est de signe constant sur D alors il n'existe pas de cycle limite entièrement contenue dans D .

1.9 Théorie des bifurcations

Une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans le comportement du système [15].

1.9.1 Types de Bifurcation

Dans cette section, nous exposons quelques notions relative aux bifurcations local, parmi les différents types de bifurcations, on trouve :

- Les bifurcations « de fourche » (en anglais : « pitchfork »). Un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Cette transition peut se faire de façon supercritique (de façon continue et prévisible) ou sous-critique (discontinue, avec des phénomènes d'hystérèse)
- Les bifurcations col-nœud (en anglais : « saddle-node »). Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.
- Les bifurcations de Hopf. Ce sont des bifurcations oscillantes, comme l'attracteur de Lorenz.

L'objectif dans ce mémoire n'est pas de présenter les différents types de bifurcation, mais plutôt on s'intéresse seulement à la bifurcation de Hopf.

1.9.2 Bifurcation de Hopf

Ce théorème de bifurcation valable en dimensions $n \geq 2$ qui permet de démontrer l'existence d'un cycle limite [15].

Soit le système d'équations différentielles sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) \end{cases}$$

où μ est un paramètre réel strictement positif. Supposons que (x^*, y^*) est un point d'équilibre du système pour toute valeur du paramètre μ .

Soit $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$ les racines de l'équation caractéristique de système linéaire :

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$$

le théorème de Hopf s'énonce ainsi :

Théorème 1.7. *Supposons que les trois hypothèses suivantes soient vérifiées :*

1. *La partie réelle des racines s'annulent pour une valeur μ_0 du paramètre $\alpha(\mu_0) = 0$*

2. Pour $\mu = \mu_0$, la partie imaginaire des racines est différente de zéro, $\beta(\mu_0) \neq 0$.
Cela revient à dire que les racines sont imaginaires pures.
3. Supposons de plus que $\frac{d\alpha}{d\mu}(\mu_0) > 0$.

Alors on peut conclure :

1. $\mu = \mu_0$ est une valeur de bifurcation du système.
2. il existe $\mu_a < \mu_0$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_a, \mu_0[$ le point (x^*, y^*) est foyer stable.
3. il existe $\mu_b > \mu_0$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_0, \mu_b[$ le point (x^*, y^*) est foyer instable entouré d'un cycle limite stable.

1.10 Quelques modèles de dynamique de population

1.10.1 Modèle de Malthus

En 1798, Thomas Malthus a publié la première version de son essai sur la dynamique de la population humaine [15].

Le modèle Malthusien suppose que : L'accroissement de la population est proportionnel à l'effectif.

Le modèle de Malthus s'écrit alors :

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t) \quad (1.10)$$

où a et b sont des constantes positives.

a : Le taux annuel de natalité.

b : Le taux annuel de mortalité.

Si on pose $k = a - b$: taux de croissance de la population, la solution est donnée par :

$$x(t) = x(0)e^{kt}$$

Où $x(0)$ étant la population initiale.

1. Si $k > 0$ ($a > b$), alors la population va croître exponentiellement.
2. Si $k < 0$ ($a < b$), alors la population va décroître (extinction de la population).
3. Si $k = 0$ ($a = b$), alors la population reste constante.

1.10.2 Modèle de Verhulst (Modèle Logistique)

Le modèle de croissance logistique due à Verhulst (1840)[8][11][13][15] est en fait une amélioration du modèle de Malthus qui a supposé que le taux d'accroissement est constant, ceci provoque une croissance exponentielle de la population. Dans le cas le plus simple on choisit comme taux de natalité une fonction linéaire décroissante de l'effectif x

$$b(x) = \alpha - \beta x$$

Même chose pour le taux de mortalité est une fonction linéaire croissante de l'effectif

$$\mu(x) = \gamma + \delta x$$

Où : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes positives et $\alpha > \gamma$.

En substituant ses taux de naissance et de mortalité dans l'équation (1.10), on obtient l'équation de croissance :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad (1.11)$$

Où $x(t)$: désigne la densité de population au temps t .

$r = \alpha - \gamma$: le taux de croissance intrinsèque par habitant.

$k = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$: la capacité de charge de l'environnement.

L'équation différentielle (1.11) est dite Équation logistique,

1.10.3 Modèle de croissance avec effet Allee

L'effet Allee est un phénomène de dépendance positive en la densité en écologie des populations, caractérisé par une corrélation positive entre la densité d'une population et son taux de croissance. Il se manifeste chez certaines espèces et seulement pour de faibles effectifs.

Le phénomène a été décrit pour la première fois en 1931 par Warder Clyde Allee (1894-1980)[8][11][13][15]. Allee était un zoologiste américain qui portait un intérêt particulier au comportement animal. On sépare deux intensités d'effet Allee : fort ou faible.

1. L'effet Allee est considéré comme fort lorsqu'il existe une densité de population, dite critique, en dessous de laquelle le taux de croissance par individu est négatif.

2. L'effet Allee est dit faible si le taux de croissance par individu est toujours positif, mais plus faible pour des faibles densités que pour des densités plus élevées.

En général, l'effet Allee est modélisé par une équation de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = rx(K - x)(x - M) = f(x) \quad \text{ou} \quad 0 < M < K \quad (1.12)$$

Ce modèle admet trois points d'équilibres : $x_0^* = 0$, $x_1^* = M$, $x_2^* = K$

La dérivée de la fonction $f(x)$ est la suivante :

$$\frac{df}{dx} = r(-3x^2 + 2(K + M)x - KM)$$

- $x_0^* = 0$, cette dérivée vaut $-rMK < 0$ alors l'équilibre 0 est stable.
- $x_1^* = M$, cette dérivée vaut $rM(K - M) > 0$ alors l'équilibre M est instable.
- $x_2^* = K$, cette dérivée vaut $-rK(K - M) < 0$ alors l'équilibre K est stable.

1.10.4 Modèle de Lotka Volterra

En mathématiques, les équations de prédation de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926 [8][13][15].

Elles s'écrivent fréquemment :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = -y(t)(\delta - \gamma x(t)) \end{cases} \quad (1.13)$$

où

- $x(t)$: est l'effectif des proies.
- $y(t)$: est l'effectif des prédateurs.
- t : est le temps.
- $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{dy(t)}{dt}$ représentent la variation des populations au cours du temps.

Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

- α : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;
- β : taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;
- δ : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies. ;
- γ : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées ;

Une fois développées, les équations prennent une forme utile pour une interprétation physique.

Proies

L'équation de la proie devient :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t)$$

Les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire exponentiellement si elles ne sont soumises à aucune prédation ; cette croissance exponentielle est représentée dans l'équation ci-dessus par le terme $\alpha x(t)$. Le taux de prédation sur les proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies ; il est représenté ci-dessus par $\beta x(t)y(t)$. Si l'un des termes $x(t)$ ou $y(t)$ est nul, alors il ne peut y avoir aucune prédation.

Avec ces deux termes, l'équation peut alors être interprétée comme : la variation du nombre de proies est donnée par sa propre croissance moins le taux de prédation qui leur est appliqué.

Prédateurs

L'équation du prédateur devient :

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x(t)y(t) - \delta y(t)$$

Cette équation, $\gamma x(t)y(t)$ représente la croissance de la population prédatrice. Notons la similarité avec le taux de prédation ; cependant, une constante différente est utilisée car la vitesse à laquelle la population des prédateurs augmente n'est pas nécessairement égale à celle à laquelle il consomme la proie. De plus, $\delta y(t)$ représente la mortalité naturelle des prédateurs ; c'est une décroissance exponentielle. L'équation représente donc la variation de la population de prédateurs en tant que croissance de cette population, diminuée du nombre de morts naturelles.

1.10.5 Modèle de Holling

Les trois types de réponses fonctionnelles selon Holling [13][15] sont :

La réponse fonctionnelle d'un prédateur aux variations de densité de la proie se mesure par les variations du nombre moyen de proies ΔN consommées par individu et par jour. On distingue trois types de réponses fonctionnelles. (Holling, 1959).

Il existe plusieurs stratégies de prédation. Ces stratégies changent en fonctions de l'environnement et des perturbations qu'elles subit. On retrouve parmi elles la réponse fonctionnelle de type I, cette réponse s'écrit sous la forme suivant :

$$\phi(x, y) = \frac{axy}{y} = ax$$

Cette stratégie est la plus simple, le taux de capture croît en fonction de la densité de proie. Ensuite on retrouve la stratégie de type II qui s'écrit sous la forme :

$$\phi(x, y) = \frac{ax}{x + D}$$

Où $a > 0$ et $D > 0$.

Qui prend en compte le temps de manipulation de la proie. Le taux de capture décroît donc avec l'augmentation de la densité de proies.

Il existe une dernière réponse fonctionnelle qui est en lien direct avec l'évolution des stratégies de prédation, dans ce cas la fonction réponse s'écrit :

$$\phi(x, y) = \frac{ax}{1 + bx + cy}$$

Où a , b et c sont des constantes positives.

Pour une interprétation biologique détaillée sur ce dernier type de fonction voir [10].

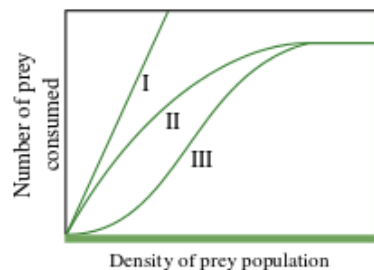


FIGURE 1.9 – Trois types de réponses fonctionnelles selon Holling

Chapitre 2

Effet Allee dans un modèle particulier de type proie -prédateur

Ce chapitre est consacré à l'étude du modèle. Les principaux résultats de cette partie sont la positivité et bornitude des solutions, quelques résultats sur l'extinction des proie et des prédateurs, bifurcation de Hopf.

2.1 Modèle Mathématique

Soit $X(T)$ la densité de la proie au temps T , et $Y(T)$ la densité du prédateur. En supposant que les proies vivent dans des troupeaux et en considérant un multiplicatif effet Allee sur la croissance de la population de proie. On aboutit au modèle proie-prédateur décrit dans [2] comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = rX(1 - \frac{X}{K})(\frac{X}{K_0} - 1) - \frac{\alpha\sqrt{XY}}{1+T_h\alpha\sqrt{X}}, & X(0) > 0 \\ \frac{dY}{dT} = -\delta Y + \frac{\beta\alpha\sqrt{XY}}{1+T_h\alpha\sqrt{X}}, & Y(0) > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

r : le taux de croissance intrinsèque de la proie ;

K : la capacité de charge du proie ;

δ : le taux de mortalité du prédateur ;

A. MAITI et al ont supposé un effet Allee fort sur la proie. Le paramètre K_0 avec $0 < K_0 \ll K$ représente le seuil d'Allee de la population de proie en absence des prédateurs. Comme la proie présente un comportement de troupeau, nous avons

utilisé ici la réponse fonctionnelle (1) (suggérée par Braza [6]) pour représenter l'interaction entre la proie et le prédateur. Donc α, T_h, β représentent l'efficacité de recherche du prédateur pour la proie, le temps de traitement moyen pour chaque proie et le taux de conversion de la biomasse, respectivement. Tous les paramètres sont supposés positifs.

Afin de réduire le nombre de paramètres dans le système (2.1), nous utilisons le changement de variables suivant :

$$x = \frac{X}{K}, \quad y = \frac{Y}{K}, \quad t = r \frac{K}{K_0} T$$

on a donc,

$$x = \frac{X}{K} \Rightarrow dX = K dx$$

$$y = \frac{Y}{K} \Rightarrow dY = K dy$$

$$t = r \frac{K}{K_0} T \Rightarrow dT = \frac{K_0}{rK} dt$$

Alors :

$$\frac{dX}{T} = \frac{rK^2}{K_0} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dY}{T} = \frac{rK^2}{K_0} \frac{dy}{dt}$$

On remplace dans le système (2.1) :

$$\begin{cases} \frac{rK^2}{K_0} \frac{dx}{dt} = rKx(1 - \frac{Kx}{K})(\frac{Kx}{k_0} - 1) - \frac{\alpha\sqrt{KxKy}}{1+T_h\alpha\sqrt{Kx}}, & x(0) > 0 \\ \frac{rK^2}{K_0} \frac{dy}{dt} = -\delta Ky + \frac{\beta\alpha\sqrt{KxKy}}{1+T_h\alpha\sqrt{Kx}}, & y(0) > 0. \end{cases}$$

Après simplifications, on aura le système suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x)(x - \frac{K_0}{K}) - \frac{\alpha K_0 \sqrt{xy}}{r\sqrt{K}(1+T_h\alpha\sqrt{Kx})}, & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-\delta K_0}{rK} y + \frac{\beta K_0 \alpha \sqrt{xy}}{r\sqrt{K}(1+T_h\alpha\sqrt{Kx})}, & y(0) > 0, \end{cases}$$

a des fins de simplicité, définissons les constantes suivantes :

$$m = \frac{K_0}{K}; \quad a = T_h\alpha\sqrt{K}; \quad b = \frac{\alpha K_0}{r\sqrt{K}}; \quad c = \frac{\beta\alpha K_0}{r\sqrt{K}}; \quad d = \frac{\delta K_0}{rK}$$

Alors le système (2.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & y(0) > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2 Positivité et bornitude des solutions

Un modèle est bien posé si la positivité et la bornitude des solutions est assurée. La positivité des solutions est donné dans le résultat qui va suivre.

Théorème 2.1. *Toutes les solutions du système partant de $\mathbb{R}_+^2$ restent toujours positives pour tout t .*

Démonstration. Du système 2.1, on a le système (2.2) suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & y(0) > 0 \end{cases}$$

ceci implique que :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[(1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})}], & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = y[-d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}], & y(0) > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$\Phi(x(t), y(t)) = (1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})}$$

et

$$\Psi(x(t), y(t)) = -d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}$$

Alors on a :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\Phi(x(t), y(t)), & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = y\Psi(x(t), y(t)), & y(0) > 0 \end{cases}$$

Par conséquent on a,

$$\begin{cases} x(t) = x(0) \exp(\int_0^t \Phi(x(s), y(s)) ds) > 0 & \text{puisque } x(0) > 0 \\ y(t) = y(0) \exp(\int_0^t \Psi(x(s), y(s)) ds) > 0 & \text{puisque } y(0) > 0 \end{cases}$$

Ainsi la solution du système (2.2) sont positives. □

Le théorème suivant donne la bornitude des solutions du système (2.2).

Théorème 2.2. *Toutes les solutions du système (2.2) partant de condition initiale dans $\mathbb{R}_+^2$ sont uniformément bornée.*

Démonstration. Soit $(x(t), y(t))$ une solution de système (2.2).

Deux cas doivent être distingués :

1er cas : soit $x(0) \leq 1$. Nous affirmons que $x(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$;

Par l'absurde : on suppose que notre affirmation est fausse ;

Donc, il est possible de trouver deux nombres réels positifs t' et t'' tels que $x(t') = 1$ et $x(t) > 1$ pour tout $t \in (t', t'')$;

Maintenant, pour tout $t \in (t', t'')$ nous avons de la première équation du système (2.2) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{x}y}{1+a\sqrt{x}} \\ &= x[(1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})}] \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{dx}{x} = [(1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})}] dt$$

On pose :

$$\Phi(x(t), y(t)) = (1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})}$$

Donc on a :

$$\frac{dx}{x} = \Phi(x(t), y(t)) dt$$

ceci donne,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \exp(\int_0^t \Phi(x(s), y(s)) ds) \\ &= x(0) [\exp(\int_0^{t'} \Phi(x(s), y(s)) ds) + \int_{t'}^t \Phi(x(s), y(s)) ds] \\ &= [x(0) \exp(\int_0^{t'} \Phi(x(s), y(s)) ds)] \exp(\int_{t'}^t \Phi(x(s), y(s)) ds) \\ &= x(t') \exp(\int_{t'}^t \Phi(x(s), y(s)) ds) \end{aligned}$$

et par hypothèse : $x(t) > 1$ si $t \in (t', t'')$ alors, $1 - x(t) < 0$ car $x(t) > 1$.

Et $x(t) - m > 1 - m > 0$ puisque $m < 1$.

Donc, on a $\Phi(x(t), y(t)) < 0$ pour tout $t \in (t', t'')$.

Ainsi, $x(t) < x(t')$ ou $x(t') = 1$ (par hypothèse $x(t) > 1$) et ceci remède à une contradiction.

Ainsi notre affirmation est vrai.

2ème Cas : Soit $x(0) > 1$ alors $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 1$

Supposons par l'absurde que, $x(t) > 1$ pour $t > 0$ alors $\Phi(x(t), y(t)) < 0$ (où Φ à la même expression du 1er Cas) ; par conséquent, de la première équation du système (2.2) on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \exp\left(\int_0^t \Phi(x(s), y(s)) ds\right) \\ &< x(0) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)(1-x(t))(x(t)-m) - \frac{b\sqrt{x(t)y(t)}}{1+a\sqrt{x(t)}} \\ &< x(t)(1-x(t))(x(t)-m) \\ &< (x(0)-m)x(t)(1-x(t)) \\ &\leq x(0) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(0)-m > 0 \\ x(t) \geq 1 \Rightarrow 1-x(t) \leq 0 \end{cases}$$

Contradiction

Cela implique que $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 1$ donc notre affirmation est vraie.

A partir des deux cas ci-dessus, nous avons $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 1$

Soit $W = cx + by$. Ensuite pour un t assez grand, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= c \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} \\ &= c \left[x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \right] + b \left[-dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \right] \\ &= cx[(1-x)(x-m)] - bdy \\ &= cx[(1+m)x - (m+x^2)] - bdy \\ &\leq cx(1+m)x - bdy \\ &\leq cx(1+m) - bdy \quad (x \leq 1) \\ &\leq cx(1+m) - bdy - cx(1+m) + cx(1+m) \\ &\leq 2cx(1+m) - [cx(1+m) + bdy] \\ &\leq 2cx(1+m) - \min\{(1+m), d\}(cx + by) \\ &\leq 2c(1+m) - \lambda W \quad (x \leq 1) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dW}{dt} + \lambda W \leq 2c(1+m)$$

En appliquant la méthode du facteur intégrant on aboutit à :

$$\mu(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda ds\right) = \exp(\lambda t)$$

soit

$$z(t) = \mu(t)W(x(t), y(t)) = \exp(\lambda t)[W(x(t), y(t))]$$

donc

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \lambda \exp(\lambda t)W(x(t), y(t)) + \frac{dW(x(t), y(t))}{dt} \exp(\lambda t) \\ &= \exp(\lambda t)[\lambda W(x(t), y(t)) + \frac{dW(x(t), y(t))}{dt}] \\ &\leq \exp(\lambda t)[2c(1 + m)] \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} z(t) - z(0) &\leq \int_0^t \exp(\lambda s)[2c(1 + m)]ds \\ &\leq \frac{2c(1+m)}{\lambda} [\exp(\lambda t) - 1] \end{aligned}$$

Donc :

$$\exp(\lambda t)W(x(t), y(t)) - W(x(0), y(0)) \leq \frac{2c(1 + m)}{\lambda} [\exp(\lambda t) - 1]$$

Ensuite :

$$\exp(\lambda t)W(x(t), y(t)) \leq \frac{2c(1 + m)}{\lambda} [\exp(\lambda t) - 1] + W(x(0), y(0))$$

Ainsi :

$$W(x(t), y(t)) \leq \frac{2c(1 + m)}{\lambda} [1 - \exp(-\lambda t)] + W(x(0), y(0)) \exp(-\lambda t) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty$$

Donc :

$$0 \leq W(x(t), y(t)) \leq \frac{2c(1 + m)}{\lambda}$$

Ainsi, toutes les solutions entrant dans la région

$$B = \{(x, y) : 0 \leq W \leq \frac{2c(1 + m)}{\lambda} + \varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0\}$$

□

2.3 Type d'extinction

Dans cette partie, nous cherchons quelques conditions pour lesquelles on a un résultat d'extinction. Ici nous utilisons les symboles $\bar{x}$ et $\underline{y}$ pour représenter la $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t)$ et $\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t)$ respectivement. Nous utilisons fréquemment le fait que

$\bar{x} \leq 1$ ce qui est prouvé dans le théorème 2.2.

Les deux premiers théorèmes de cette partie concernent l'extinction des proies. Il est bien évident que si après un certain temps, la densité de population de proies est au dessous du seuil de l'Allee (de plus, les proies sont attaquées par les prédateurs), alors forcément la population de la proie va s'éteindre. Ce fait est représenté en termes mathématiques dans le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Si $\bar{x} < m$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$*

Démonstration. Supposons que : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mu > 0$

la définition de $\bar{x}$ implique que pour tout ε satisfaisant $0 < \varepsilon < m - \bar{x}$, il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que $x(t) < \bar{x} + \varepsilon$ pour $t > t_\varepsilon$.

Ensuite pour $t > t_\varepsilon$, nous avons de la première équation du système (2.2) que :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \exp\left(\int_0^t (1 - x(s))(x(s) - m) - \frac{by(s)}{\sqrt{x(s)(1+a\sqrt{x(s)})}} ds\right) \\ &< x(0) \exp\left(\int_0^t (1 - x(s))(x(s) - m) ds\right) \\ &< x(0) \exp\left(\int_0^t (\bar{x} + \varepsilon - m) ds\right) \\ &< x(0) \exp((\bar{x} + \varepsilon - m) \int_0^t ds) \\ &< x(0) \exp(-(m - \bar{x} - \varepsilon)t) \end{aligned}$$

alors quand $t \rightarrow +\infty : x(t) \rightarrow 0$ car $m - \bar{x} - \varepsilon > 0$ **contradiction** □

Si la condition du théorème ci-dessus est satisfaite, le prédateur dans ce cas n'a aucune influence sur la proie, en fait, l'effet Allee est le facteur qui conduit la population de la proie à l'extinction (bien évidemment, le prédateur pourrait accélérer le processus d'extinction de la proie).

Le théorème suivant montre que le prédateur peut également jouer un rôle clé pour inciter la proie à disparaître.

Théorème 2.4. *Si $\underline{y} > \frac{2\sqrt{2}}{b}(1 + a\sqrt{2})(1 - m)$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$*

Démonstration. Supposons que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mu > 0$ puisque $\bar{x} < 1$ pour tout $0 < \varepsilon < 1 - m$, il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que $x(t) < 1 + \varepsilon$ pour $t > t_\varepsilon$.

De la définition de $\underline{y}$, il en résulte que, pour tout $0 < \varepsilon' < \underline{y} - \frac{2\sqrt{2}}{b}(1 + a\sqrt{2})(1 - m)$ il existe $t_{\varepsilon'} > 0$ tel que $y(t) > \underline{y} - \varepsilon'$ pour $t > t_{\varepsilon'}$

Ensuite, pour $t > \max\{t_\varepsilon, t_{\varepsilon'}\}$, nous avons de la première équation du système (2.2) :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \\
&= x(x-m) - x^2(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \\
&< x(1+\varepsilon-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \quad \text{car } x-m > 0 \\
&< x(1+\varepsilon-m) - \frac{bxy}{(1+a\sqrt{1+\varepsilon})} \quad \text{car } x < 1+\varepsilon \\
&< x(1+\varepsilon-m) - \frac{bxy}{\sqrt{1+\varepsilon}(1+a\sqrt{1+\varepsilon})} \quad \text{car } -\sqrt{x} < \frac{-x}{\sqrt{1+\varepsilon}} \\
&< x[(1+\varepsilon-m) - \frac{b(\underline{y}-\varepsilon')}{\sqrt{1+\varepsilon}(1+a\sqrt{1+\varepsilon})}] \quad \text{car } -y < -(\underline{y}+\varepsilon') \\
&< x[(1+(1-m)-m) - \frac{b(\underline{y}-\varepsilon')}{\sqrt{2}(1+a\sqrt{2})}] \quad \text{car } \varepsilon < 1-m \text{ alors } \varepsilon < 1 \\
&= x[(2(1-m)) - \frac{b(\underline{y}-\varepsilon')}{\sqrt{2}(1+a\sqrt{2})}] \\
&= \frac{-bx}{\sqrt{2}(1+a\sqrt{2})} [\underline{y} - \frac{2\sqrt{2}}{b}(1-m)(1+a\sqrt{2}) - \varepsilon'] \\
&< 0 \quad \text{car } \underline{y} - \frac{2\sqrt{2}}{b}(1-m)(1+a\sqrt{2}) - \varepsilon' > 0
\end{aligned}$$

Contradiction avec $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mu > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

□

Un critère très simple pour l'extinction du prédateur est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Si $d > c$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$*

Démonstration. Puisque $\bar{x} \leq 1$ pour tout $0 < \varepsilon < \frac{d^2}{c^2} - 1$, il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que $x(t) < 1 + \varepsilon$ pour $t > t_\varepsilon$.

Pour $t > t_\varepsilon$ nous avons de la seconde équation du système (2.2) que :

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \\
&= y[-d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}] \\
&< y(-d + c\sqrt{x}) \\
&< y(-d + c\sqrt{1+\varepsilon}) \\
&< -cy(\frac{d}{c} - \sqrt{1+\varepsilon}) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$

□

Remarque 2.1. *On remarque que si le prédateur est agressif (caractérisé par une valeur élevée de b) ou l'effet Allee est très fort ($m \approx 1$), alors la condition du théorème (2.4) est satisfaite automatiquement.*

D'autre part, si le bénéfice maximal du prédateur (en interaction avec la proie), ne

réussit pas à surmonter sa perte due à la mort, alors le prédateur sera finalement hors du système.

2.4 Équilibres et stabilité

Dans cette section, nous trouvons les points d'équilibre du système (2.2) et nous étudions leurs stabilité.

Cherchons les points d'équilibres :

$$\begin{cases} x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} = 0 \\ -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{ou} \quad (1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})} = 0 & \quad \text{Isoclines verticales} \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad -d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}} = 0 & \quad \text{Isoclines horizontales} \end{aligned}$$

Nous avons donc les isoclines suivantes : les deux axes $x = 0$ et $y = 0$, la droite verticale d'équation $x = \frac{d^2}{(c-ad)^2}$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{cx(1-x)(x-m)}{bd}$.

Les intersections de ces isoclines, nous donne quatre points d'équilibres :

$$E_0 = (0, 0); \quad E_1 = (1, 0); \quad E_2 = (m, 0); \quad E^* = (x^*, y^*);$$

Avec :

$$\begin{cases} (1-x^*)(x^*-m) - \frac{by^*}{\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})} = 0 & (1) \\ -d + \frac{c\sqrt{x^*}}{1+a\sqrt{x^*}} = 0 & (2) \end{cases}$$

Calculons x^* et y^*

Le x^* est donné par :

$$-d + \frac{c\sqrt{x^*}}{1+a\sqrt{x^*}} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{d^2}{(c-ad)^2}$$

En remplace x^* dans l'équation (1) pour calculer y^* :

$$(1-x^*)(x^*-m) - \frac{by^*}{\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})} = 0 \Rightarrow (1-x^*)(x^*-m) = \frac{by^*}{\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 y^* &= \frac{\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*}(1-x^*)(x^*-m))}{b} \\
 &= \frac{x^*(\frac{1}{\sqrt{x^*}}+a)(1-x^*)(x^*-m))}{b} \\
 &= \frac{(\frac{c-ad}{d}+a)x^*(1-x^*)(x^*-m))}{b} \\
 &= \frac{cx^*(1-x^*)(x^*-m)}{bd}
 \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1 le domaine $\mathbb{R}_+^2$ est positivement invariant alors l'équilibre $E^* = (x^*, y^*)$ existe si $x^* > 0$ et $y^* > 0$.

On a

$$x^* = \frac{d^2}{(c-ad)^2} > 0$$

et

$$y^* = \frac{cx^*(1-x^*)(x^*-m)}{bd} > 0 \quad \text{si} \quad (c-ad)\sqrt{m} < d < (c-ad) \quad \text{puisque} \quad m < 1$$

ainsi l'équilibre E^* existe. Les isoclines sont représentées à la figure 2.1. **Étude de**

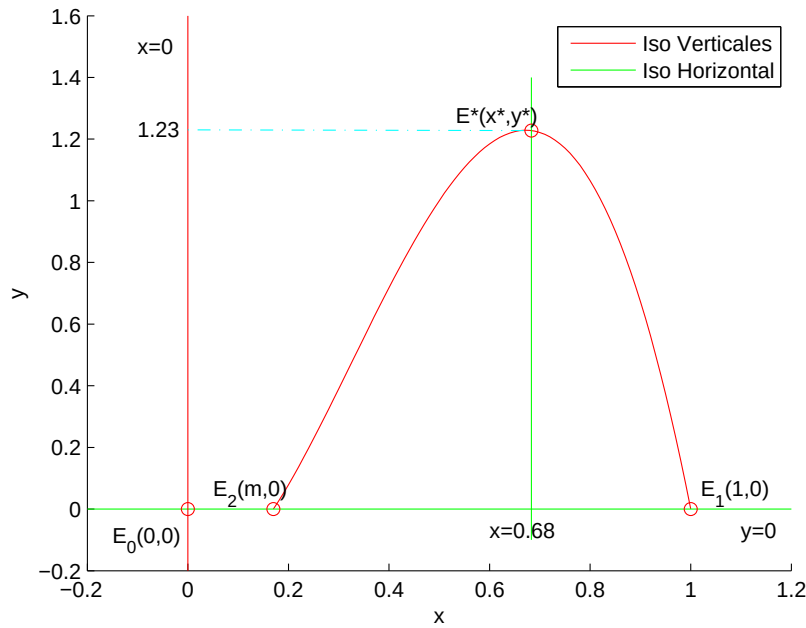


Figure 2.1 – Isoclines verticales et horizontales de système (2.2)

la stabilité :

Pour démontrer la stabilité on linéarise autour de chaque point d'équilibre.

La matrice Jacobienne du système (2.2) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & y(0) > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 - x^3 - mx + mx^2 - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \\ g(x, y) = -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}} \end{cases}$$

La dérivée de la fonction $f(x, y)$ est donnée par :

$$\frac{df}{dx} = 2x - 3x^2 - m + 2mx - \frac{by}{2\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})^2}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{-b\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}$$

La dérivée de la fonction $g(x, y)$ est donnée par :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{cy}{2\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})^2}$$

$$\frac{dg}{dy} = -d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}$$

Alors la matrice jacobienne est :

$$Jac = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - m + 2mx - \frac{by}{2\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})^2} & \frac{-b\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}} \\ \frac{cy}{2\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})^2} & -d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}} \end{pmatrix}$$

★ La matrice jacobienne $Jac(E_0)$ en $E(0, 0)$ est donnée par :

$$Jac(E_0) = \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

On a

$$\det Jac(E_0) = md > 0 \quad \text{et} \quad \text{trc} Jac(E_0) = -(m + d) < 0$$

Donc $E_0 = (0, 0)$ est un point d'équilibre localement stable. On utilise une fonction de Lyapounov pour montrer que le point d'équilibre $E_0 = (0, 0)$ est globalement stable.

Soit $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

1. $v \in \mathcal{C}^1$
2. v est définie positive

$$3. \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt}$$

On va calculer $\frac{dv}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \\ &= x[x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}] + y[-dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}] \\ &= x^2[(1-x)(x-m) - \frac{by}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})}] + y^2[-d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}] \\ &= x^2(x-m) - \frac{byx^2}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})} - y^2[d - \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}}] \\ &< x^2(\bar{x}-m) - \frac{byx^2}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})} - y^2[d - \frac{c}{1+a}] \\ &< x^2(\bar{x}-m) - \frac{byx^2}{\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})} - y^2(d-c) \\ &< 0 \end{aligned}$$

La fonction v est bien une fonction de Lyapunov en $E_0 = (0,0)$, donc cet équilibre est globalement asymptotiquement stable.

★ La matrice jacobienne $Jac(E_1)$ en $E_1 = (1,0)$ est donnée par :

$$Jac(E_1) = \begin{pmatrix} m-1 & \frac{-b}{1+a} \\ 0 & -d + \frac{c}{1+a} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $Jac(E_1)$ sont :

$$\lambda_1 = m-1 < 0 \quad \text{puisque} \quad m < 1.$$

$$\lambda_2 = -d + \frac{c}{1+a} < 0 \quad \text{si et seulement si} \quad c < d(1+a).$$

Nous avons donc le théorème suivant sur la stabilité de $E_1 = (1,0)$

Théorème 2.6. *L'équilibre $E_1 = (1,0)$ est localement asymptotiquement stable si et seulement si $c < d(1+a)$.*

Remarque 2.2. *Nous remarquons que l'existence de E^* déstabilise E_1*

★ La matrice jacobienne $Jac(E_2)$ en $E_2 = (m,0)$ est donnée par :

$$Jac(E_2) = \begin{pmatrix} m(1-m) & \frac{-b\sqrt{m}}{1+a\sqrt{m}} \\ 0 & -d + \frac{c\sqrt{m}}{1+a\sqrt{m}} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $Jac(E_2)$ sont :

$$\lambda_1 = m(1-m) > 0 \quad \text{puisque} \quad 0 < m < 1.$$

$$\lambda_2 = -d + \frac{c\sqrt{m}}{1 + a\sqrt{m}} < 0 \quad \text{si seulement si} \quad c\sqrt{m} < d(1 + a\sqrt{m}).$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.7. *L'équilibre $E_2 = (m, 0)$ est toujours instable, c'est un point selle si et seulement si $c\sqrt{m} < d(1 + a\sqrt{m})$*

★ Enfin, nous étudions la stabilité de l'équilibre intérieur $E^* = (x^*, y^*)$;

Nous avons la matrice jacobienne suivant à $E^* = (x^*, y^*)$

$$Jac(E^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

où,

$$a_{11} = (1 - 2x^*)(x^* - m) + x^*(1 - x^*) - \frac{by^*}{2\sqrt{x^*}(1 + a\sqrt{x^*})^2}.$$

$$a_{12} = \frac{-b\sqrt{x^*}}{1 + a\sqrt{x^*}}.$$

$$a_{21} = \frac{cy^*}{2\sqrt{x^*}(1 + a\sqrt{x^*})^2}.$$

$$a_{22} = 0.$$

L'équation caractéristique de $Jac(E^*)$ est :

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$$

$$\det(Jac(E^*) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(a_{11} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow (\lambda)^2 - a_{11}\lambda - a_{12}a_{21} = 0$$

Donc :

$$P = -tr(Jac(E^*)) = -a_{11}$$

$$Q = \det(Jac(E^*)) = -a_{12}a_{21}$$

on a :

$$x^* = \frac{d^2}{(c - ad)^2} \quad \text{et} \quad y^* = \frac{cx^*(1 - x^*)(x^* - m)}{bd}$$

Commençons par calculer P :

$$\begin{aligned}
P &= -[(1 - 2x^*)(x^* - m) + x^*(1 - x^*) - \frac{by^*}{2\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2}] \\
&= (2x^* - 1)(x^* - m) - x^*(1 - x^*) + \frac{by^*}{2\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2} \\
&= (2x^* - 1)(x^* - m) - x^*(1 - x^*) + \frac{b \frac{cx^*(1-x^*)(x^*-m)}{2\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2}}{2\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2} \\
&= (2x^* - 1)(x^* - m) - x^*(1 - x^*) + \frac{cx^*(1-x^*)(x^*-m)}{2d\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2} \\
&= -x^*(1 - x^*) + (x^* - m)[(2x^* - 1) + \frac{cx^*(1-x^*)}{2d\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2}] \\
&= -x^*(1 - x^*) + (x^* - m)[(2x^* - 1) + \frac{cx^*(1-x^*)}{2d\sqrt{x^*}(1+a\frac{d}{c-ad})^2}] \\
&= -x^*(1 - x^*) + (x^* - m)[2\frac{d^2}{(c-ad)^2} - 1 + \frac{cx^*(1-x^*)(c-ad)^2}{2dc^2}] \\
&= -x^*(1 - x^*) + (x^* - m)[\frac{2d^2-(c-ad)^2}{(c-ad)^2} + \frac{c\frac{d}{c-ad}(1-\frac{d^2}{(c-ad)^2})(c-ad)^2}{2dc^2}] \\
&= -x^*(1 - x^*) + (x^* - m)[\frac{4d^2c-2c(c-ad)^2+(c-ad)((c-ad)^2-d^2)}{2c(c-ad)^2}] \\
&= -x^*(1 - x^*) + (x^* - m)[\frac{d^2(3c+ad)-(c+ad)(c-ad)^2}{2c(c-ad)^2}] \\
&= -x^*(1 - x^*) - (x^* - m)[\frac{(c+ad)(c-ad)^2-d^2(3c+ad)}{2c(c-ad)^2}]
\end{aligned}$$

On pose :

$$A = (c - ad)^2 \quad \text{et} \quad B = (c + ad)A - (3c + ad)d^2$$

Alors

$$\begin{aligned}
P &= -x^*(1 - x^*) - (x^* - m)[\frac{(c+ad)A-d^2(3c+ad)}{2cA}] \\
&= -x^*(1 - x^*) - (x^* - m)\frac{B}{2cA} \\
&= -x^*(1 - \frac{d^2}{(c-ad)^2}) - (\frac{d^2}{(c-ad)^2} - m)\frac{B}{2cA} \\
&= -x^*(\frac{(c-ad)^2-d^2}{(c-ad)^2}) - (\frac{d^2-m(c-ad)^2}{(c-ad)^2})\frac{B}{2cA} \\
&= -\frac{d^2[(c-ad)^2-d^2]}{A^2(c-ad)^4} - (\frac{[d^2-m(c-ad)^2]B}{2cA^2}) \\
&= \frac{-2cd^2(A-d^2)-Bd^2+mAB}{2cA^2} \\
&= \frac{mAB-d^2\{2c(A-d^2)+B\}}{2cA^2}
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant le théorème qui nous garanti la stabilité de $E^*(x^*, y^*)$.

Théorème 2.8. *L'équilibre intérieur $E^*(x^*, y^*)$ est localement asymptotiquement stable si :*

$$\Delta = mAB - d^2\{2c(A - d^2) + B\} > 0$$

Il serait intéressant si on peut établir un comportement global de l'équilibre intérieur. Soit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y > 0\} \quad \text{et} \quad E^*(x^*, y^*) \in \Omega.$$

Ainsi nous avons le théorème suivant

Théorème 2.9. *Si $E^*(x^*, y^*)$ est localement asymptotiquement stable avec $d > c + m + 2$. Alors, E^* attirent toutes les solutions partant de Ω .*

Démonstration. Écrivons la première équation du système (2.2) sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, y)$$

et la deuxième équation sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = \Psi(x, y)$$

Ensuite, pour tout $(x, y) \in \Omega$ on remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} &= (1 - 2x)(x - m) + x(1 - x) - \frac{by}{2\sqrt{x}(1+a\sqrt{x})^2} - d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}} \\ &\leq x - 2x^2 - m + 2mx + x - x^2 - d + \frac{c\sqrt{x}}{1+a\sqrt{x}} \\ &\leq 2x + 2mx - m - 3x^2 - d + c\sqrt{x} \\ &\leq 2 + 2m - m - d + c\sqrt{x} \\ &\leq 2 + m - d + c \\ &< 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, selon le critère de Bendixon, il n'y a pas d'orbite périodique dans Ω .

D'où le théorème 2.9 est une conséquence du théorème de Poincaré-Bendixon. $\square$

2.5 Bifurcation de Hopf

Dans cette partie, nous fournissons les conditions pour les quelles une bifurcation de Hopf peut apparaître près de l'équilibre intérieur $E^*(x^*, y^*)$.

Nous utilisons le théorème 1.7 de bifurcation de Hopf pour aboutir au résultat suivant :

Théorème 2.10. *Si le point d'équilibre $E^*(x^*, y^*)$ existe, alors, une bifurcation de Hopf se produit en*

$$m = m^* = \frac{d^2\{2c(A - d^2) + B\}}{AB}$$

Démonstration. Nous remarquons que :

1.

$$\begin{aligned}
tr(Jac(E^*))|_{m=m^*} &= -P|_{m=m^*} \\
&= \frac{-ABm^* + d^2(2c(A-d^2)+B)}{2cA} \\
&= \frac{-AB \frac{d^2(2c(A-d^2)+B)}{AB} + d^2(2c(A-d^2)+B)}{2cA^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
det(Jac(E^*))|_{m=m^*} &= -a_{12}a_{21}|_{m=m^*} \\
&= -\left[-\frac{b\sqrt{x^*}}{1+a\sqrt{x^*}} \frac{cy^*}{2\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^2}\right] \\
&= \frac{bc\sqrt{x^*}y^*}{2\sqrt{x^*}(1+a\sqrt{x^*})^3} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

3. Lorsque $m = m^*$ l'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + tr(Jac(E^*))\lambda + det(Jac(E^*)) = 0$$

D'après (1) l'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + det(Jac(E^*)) = 0$$

Donc les racines sont purement imaginaires.

4.

$$\begin{aligned}
\frac{d(tr(Jac(E^*)))}{dm}|_{m=m^*} &= \frac{d(-P)}{dm}|_{m=m^*} \\
&= \frac{d\left(\frac{-ABm^* + d^2(2c(A-d^2)+B)}{2cA^2}\right)}{dm^*} \\
&= \frac{-B}{2cA} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les conditions du théorème d'une bifurcation de Hopf sont remplies et le théorème suit ; □

Chapitre 3

Simulation numérique

Dans ce chapitre, nous présentons des simulations numériques concernant notre système (2.2).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x)(x-m) - \frac{b\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{c\sqrt{xy}}{1+a\sqrt{x}}, & y(0) > 0. \end{cases}$$

Ces simulation ont pour but de valider les résultats analytiques obtenus dans le chapitre 2. Les simulations sont réalisées à l'aide du logiciel MATLAB.

3.1 Point d'équilibre E_1 :

Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau suivant :

paramètre	m	a	b	c	d
valeurs	0.2	0.89	0.19	0.17	0.1

TABLE 3.1 – Les valeurs des paramètre dans la figure 3.1.

La figure 3.1 montre que si on prend $c < d(1+a)$ (voir théorème 2.6) alors les solutions convergent vers l'équilibre E_1 qui est dans ce cas localement asymptotiquement stable, où on remarque l'extinction du prédateurs en temps fini avec deux conditions initiales différents $(x(0), y(0)) = (0.65, 1)$ et $(x(0), y(0)) = (0.51, 0.6)$.

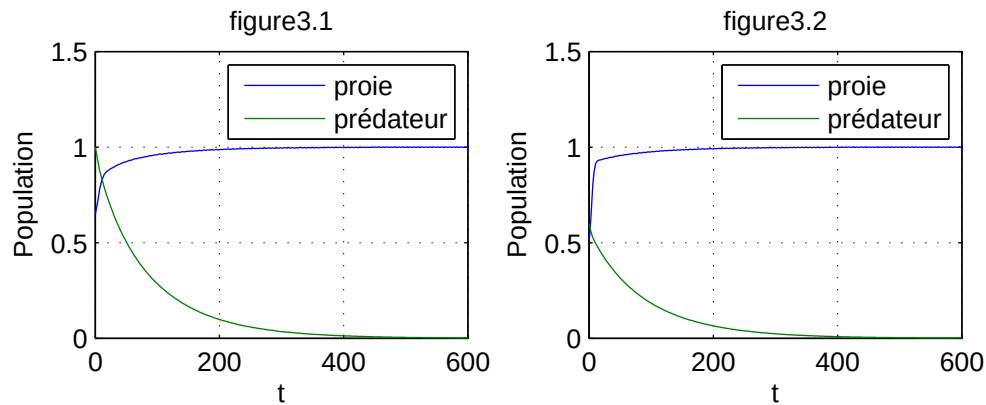


Figure 3.1 – Comportement des solution du système (2.2).

3.2 Point d'équilibre E^* :

Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau suivant :

paramètre	m	a	b	c	d
valeurs	0.17	0.89	0.19	0.21	0.1

Table 3.2 – Les valeurs des paramètres dans la figure 3.2.

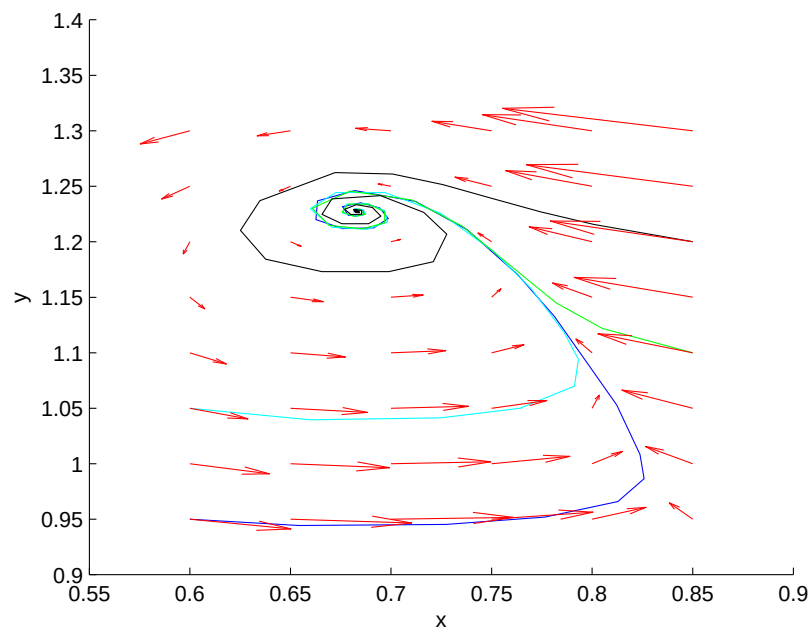


Figure 3.2 – Portrait de phase du système (2.2) pour différents choix de $x(0)$ et $y(0)$ montrons des spirales stables convergent vers $E^*(0.6830, 1.2276)$.

Dans ce cas $\Delta = 0.0000016314 > 0$, la figure (3.2) on voit très bien que pour chaque condition initiale $(x(0), y(0))$ les solutions du système (2.2) tends vers l'équilibre intérieur (voir théorème 2.8) $E^*(x^*, y^*) = (0.6830, 1.2276)$, les trajectoires sont des spirales stables.

Les graphes dans la figure 3.3 montrent le comportement de x et y avec le temps, lorsque $(x(0), y(0)) = (0.6, 0.95) = (0.6, 1.05) = (0.85, 1.1) = (0.85, 1.2)$ respectivement et il est évident que (x, y) est proche de (x^*, y^*) pour des temps finis. Ainsi, les trajectoires sont identiques à celles présentées dans la figure 3.2.

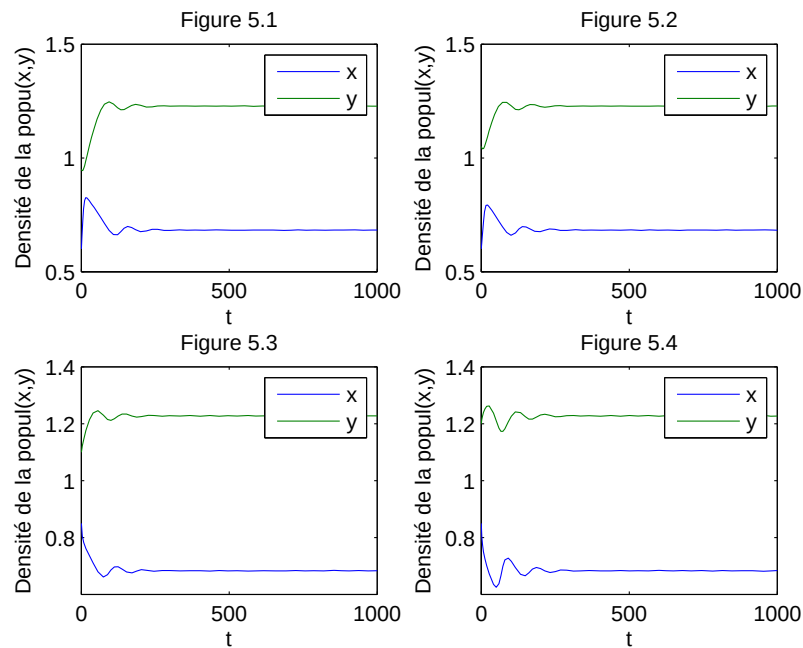


Figure 3.3 – Comportement du x et du y dans le cas E^* localement asymptotiquement stable.

Cas E^* instable

Si nous augmentons progressivement la valeur de m tout en maintenant les autres paramètres, alors selon le théorème 2.10, nous avons une valeur critique $m^* = 0.2096$ pour la quelle E^* perd sa stabilité.

Donc si $m = 0.22 > m^*$, $E^*(0.6830, 1.1080)$ est instable ($\Delta = -0.0000004274 < 0$) et il existe une orbite périodique proche de E^* représenté dans la figure 3.4.

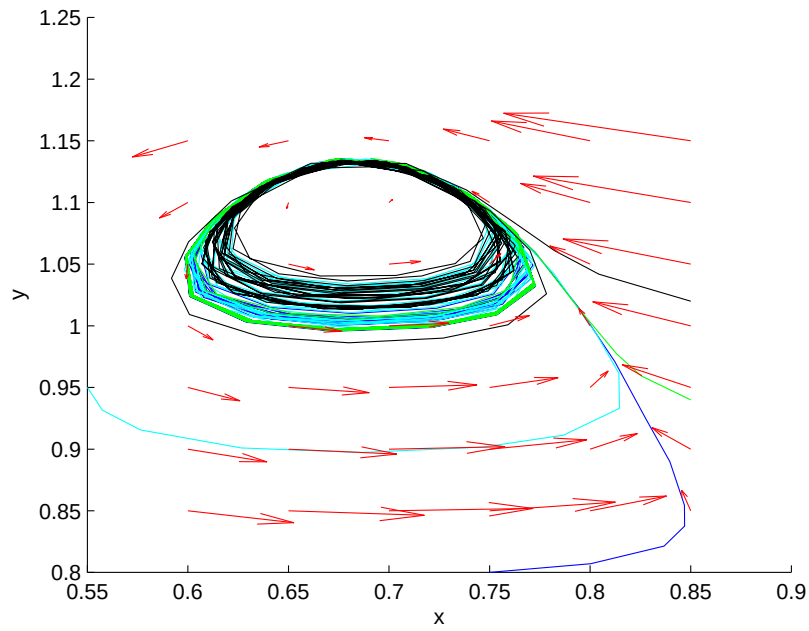


Figure 3.4 – Portrait de phase du système (2.2) montrant une orbite périodique proche de $E^*(0.6830, 1.1.1080)$.

Les oscillations temporelles de x et de y sont illustrées dans la figure 3.5 qui contient les figures (7.1),(7.2),(7.3) et (7.4) avec les conditions initiales $(x(0), y(0)) = (0.75, 0.8) = (0.55, 0.95) = (0.85, 0.94) = (0.85, 1.02)$ respectivement.

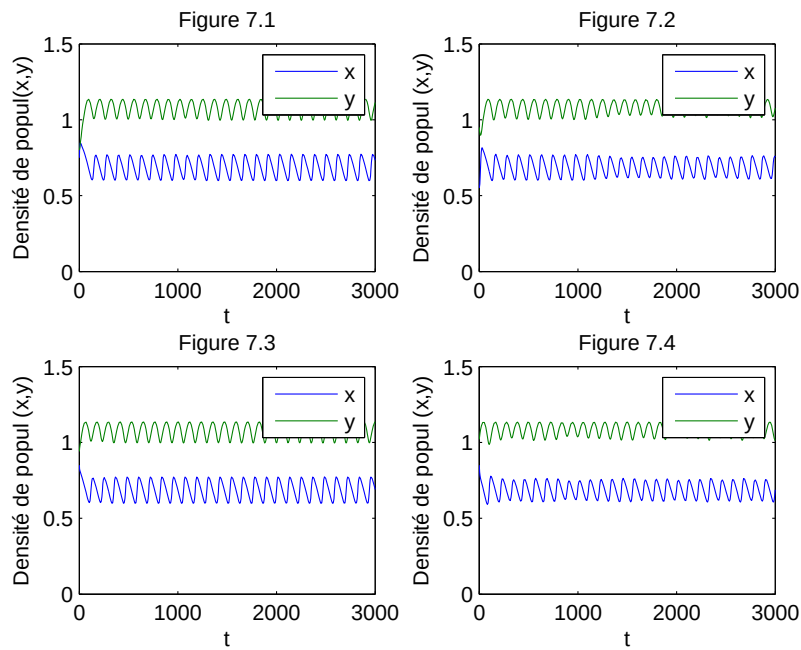


Figure 3.5 – Comportement du x et du y dans le cas E^* instable.

3.3 Diagramme de bifurcation

Finalement, le diagramme de bifurcation est présenté dans la figure 3.6, lorsque le paramètre m traverse la valeur de bifurcation $m^* = 0.2096$ il y a un changement de stabilité.

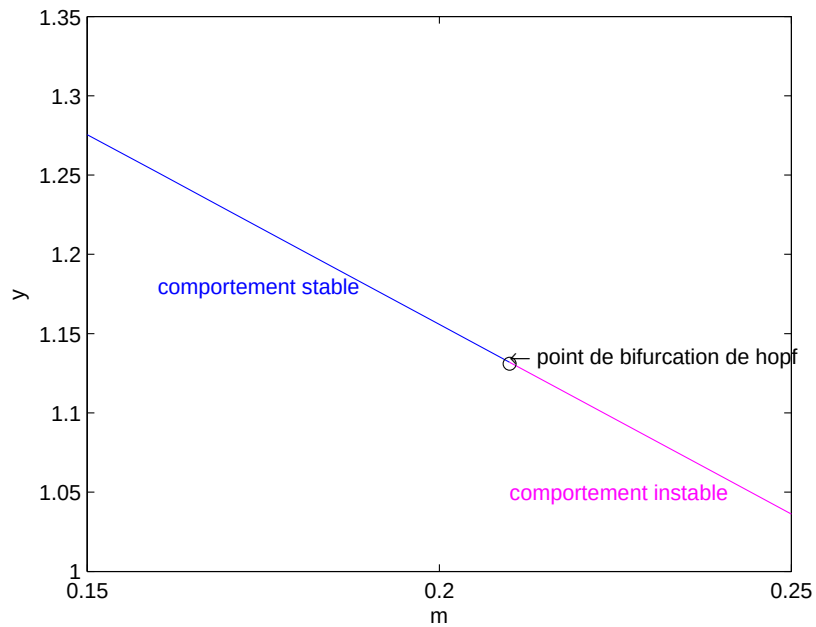


Figure 3.6 – Diagramme de bifurcation avec $a = 0.89$, $b = 0.19$, $c = 0.21$ et $d = 0.1$.

Conclusion

On a considéré un modèle proie-prédateur où la proie montre un comportement de troupeau avec une sensibilité à l'effet Allee.

Le nombre de paramètres du modèle a été réduit en utilisant un changement d'échelle de temps. Ensuite, le comportement des solutions du système (2.2) a été étudié.

Dans le théorème 2.1 et le théorème 2.2 nous avons démontré que les solutions sont toujours positives et uniformément bornées. Donc, le système est bien posé d'un point de vue biologique. Nous avons obtenu des résultats sur l'extinction des proies et des prédateurs, et nous avons prouvé que s'il existe un effet Allee très fort, alors la population de la proie ne peut pas survivre. En outre, un prédateur agressif pourrait provoquer l'extinction de la proie et par conséquent le prédateur va s'éteindre aussi (parce que le prédateur meurt de faim).

Nous avons ainsi établi que si le bénéfice maximal du prédateur (en interaction avec la proie) ne permet pas de vaincre sa perte due à la mort, le prédateur finira par disparaître.

Il est reconnu depuis longtemps que la plupart des études des modèles déterministes en fonction du temps continu révèlent deux schémas fondamentaux : l'approche d'un équilibre ou d'un cycle limite. L'argument fondamental de ce type d'analyse est peut être que ces deux schémas sont très courants dans plusieurs, systèmes proies-prédateurs que nous observons dans la nature.

Nous avons présenté ce point de vue dans l'analyse de la stabilité des points d'équilibre, ainsi que l'analyse de la bifurcation du point d'équilibre intérieur E^* . Le critère d'existence de l'équilibre intérieur suggère qu'un prédateur agressif avec un taux de mortalité modéré pourrait donner une garantie pour que la coexistence d'équilibre soit réalisable. De même, l'existence de l'équilibre intérieur déstabilise E_1 . L'effet Allee a un effet négatif sur l'aptitude du prédateur.

L'analyse de la bifurcation présentée ici montre que l'effet Allee pourrait avoir un impact sur l'ensemble du système.

Bibliographie

- [1] AJRALDI, V., PITTAVINO, M. and VENTURINO, E. Modelling herd behavior in population systems. *Nonlinear Anal. RWA* 12 (2011) 2319–2338.
- [2] A .MAITI, P .SEN, D .MANNA, G.P .SAMANTA, A Predator-Prey System with Herd Behaviour and Strong Allee Effect, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*,16(1) (2016) pp. 86-101.
- [3] ANGULO, E., RASMUSSEN, G.S.A., MACDONALD, D.W., and COURCHAMP, F. Do social groups prevent Allee effect related extinctions : The case of wild dogs. *Frontiers in Zoology* 10 :11 (2013) doi :10.1186/1742-9994-10-11.
- [4] BERA, S.P., MAITI, A. and SAMANTA, G.P. Modelling herd behavior of prey : analysis of a prey-predator model. *World Journal of Modelling and Simulation* 11 (2015) 3–14.
- [5] BEROUAL NABIL, « Modèles mathématiques appliqués à la dynamiques des populations ». Thèse doctorat Université de Sétif (2015) pp.11.
- [6] BRAZA, A.P. Predator-prey dynamics with square root functional responses. *Nonlinear Anal. RWA* 13 (2012) 1837–1843.
- [7] CHATTOPADHYAY, J., CHATTERJEE, S. and VENTURINO, E. Patchy agglomeration as a transition from monospecies to recurrent plankton blooms. *J. Theor. Biol.* 253 (2008) 289–295.
- [8] CLAUDIA BERGERON, « Vision mathématique sur l'équilibre de la biodiversité ».
- [9] COSNER, C., DEANGELIS, D.L., AULT, J.S. and OLSON D.E. Effects of spatial grouping on the functional response of predators. *Theor. Pop. Biol.* 56 (1999) 65–75.
- [10] C. S. Holling, Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism, *The Canadian Entomologist* no 91, 1959, p. 385-398. doi :10.4039/Ent91385-7.

-
- [11] FREDD BRAUER , CARLOS CASTILLO-CHAVEZ, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Second Edition, pp. 8-11, 123-126, 128-131, 173-182.
 - [12] LIERMANN, M. and HILBORN, R. DEPENSATION : evidence, models and implications. Fish Fish. 2 (2001) 33–58.
 - [13] MENOUEUR MOHAMMED AMINE, « Solutions périodiques et presque-périodiques de quelques modèles de dynamiques des populations », 2018, pp. 3-21.
 - [14] MOORING, M.S., FITZPATRICK, T.A., NISHIHARA, T.T. and REISIG, D.D. VIGILANCE, predation risk, and the Allee effect in desert bighorn sheep. J. Wildlife Management 68 (2004) 519– 532.
 - [15] P.POGGIAL, C. LETT, J. C. AUGER, Modélisation mathématique en ecologie, Dunod, Paris, 2010, pp. 3-117.
 - [16] SERGE CANTAT, « Théorème de Poincaré-Bendixson » ,Le journal de maths des élèves, No. 3, Volume 1 (1995).

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié les comportements dynamiques d'un système proie-prédateur. La proie présente un comportement de troupeau et elle est également soumise à un effet Allee fort. La positivité et la limite des solutions sont discutées. Quelques critères d'extinction des proies et des populations de prédateurs sont démontrés. L'analyse de stabilité des points d'équilibres et un critère de bifurcation de Hopf sont présentés. Des simulations numériques sont effectuées pour valider les résultats analytiques.

Mots-Clés: Système proie-prédateur, Effet Allée, Stabilité, Bifurcation de Hopf.

Abstract :

In this paper, we have studied the dynamical behaviours of a predator-prey system. The prey exhibits herd behaviour, and is also subject to strong Allee effect. Positivity and boundedness of the system are discussed. Some criteria for the extinction of prey and predator populations are derived. Stability analysis of the equilibrium points is presented. A criterion for Hopf bifurcation is derived. Numerical simulations are carried out to validate our analytical findings. Implications of our analytical and numerical findings are discussed critically.

Keywords: Prey-predator system, Allee effect, stability, Hopf bifurcation.

ملخص:

في هذه الأطروحة نقوم بدراسة التفاعلات للسلوكيات الديناميكية مفترس-فريسة، ممثلة بنظام معادلتين تفاضليتين في الأولى تتعرض الفريسة لسلوك القطيع وتخضع أيضا لقوة تأثير آل، و نناقش إيجابيات وحدود النظام ، نذكر بعض المعايير التي تؤدي الى انقراض الفريسة والحيوانات المفترسة، نحلل الاستقرار من اجل تقديم نقاط التوازن، استنتاج معيار تشعبات هوبف ، كما أننا تطرقنا إلى دراسة بعض المنحنيات الرقمية من أجل إثبات و مناقشة النتائج النظرية.

الكلمات المفتاحية : نظام مفترس-فريسة، تأثير آل ، استقرار ، تشعب هوبف.