

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN



Faculté des sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

en Mathématiques

Spécialité : Statistique et probabilités approfondies

présenté par

BELOUAFI Bouchra

Sur la Distribution Spectrale Limite de la Matrice de Fisher

Soutenu le : 27 septembre 2026 devant le jury composé de :

Mme. BENSMAN NAWEL	MCA. Université de Tlemcen	Présidente
Mme. BENYAHIA WAHIBA	MCA. Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme. KARA TERKI NESRINE	MCA. École supérieure de management	Examinatrice
Mme. KHETTAB ZAHIRA	MCA. Université de Tlemcen	Encadrante

Année universitaire : 2025 - 2026

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, et tout particulièrement à ma mère, à mes frères et à ma seule et unique sœur, ainsi qu'à ma chère amie Kamilya.

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah Tout-Puissant de m'avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour surmonter les difficultés et mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à Mme Z. Khettab, pour avoir accepté d'assurer l'encadrement de ce mémoire. Je lui suis particulièrement reconnaissante pour sa disponibilité, ses précieux conseils, ses orientations et son accompagnement tout au long de la réalisation de ce travail.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements à Mme Bensmain, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance de mon mémoire. Je lui suis très reconnaissante pour l'honneur qu'elle me fait par sa présence et pour l'intérêt accordé à mon travail.

Mes sincères remerciements vont également à Mme Benyahia, pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de participer à mon jury de soutenance. Je la remercie pour le temps consacré à l'évaluation de ce travail et pour l'intérêt qu'elle lui a porté.

J'adresse également mes remerciements à Mme Kara Terki, pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie de mon jury de soutenance. Je la remercie sincèrement pour sa disponibilité et pour l'attention accordée à mon travail.

Je tiens à remercier l'ensemble de mes enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Tlemcen, qui ont contribué, tout au long de mon parcours universitaire, à enrichir mes connaissances et à construire ma formation.

Je remercie également ma famille, en particulier mes chers parents, pour leur soutien constant, leurs encouragements, leur patience et leur confiance, qui m'ont accompagnée tout au long de mes études.

Mes sincères remerciements vont aussi à mes frères, ma sœur et mes chers amis, pour leur présence, leur soutien et les précieux moments partagés durant mon parcours universitaire.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, et qui m'ont apporté leur aide, leurs encouragements ou leur soutien.

À toutes et à tous, je vous adresse mes sincères remerciements.

Table des matières

Introduction Générale	4
1 Distribution Spectrale Limite de Matrice Aléatoire	6
1.1 Généralités	6
1.1.1 Matrice de Wigner	6
1.1.2 Matrice de Wishart	7
1.1.3 Matrice de covariances	7
1.1.4 Fonction de répartition empirique	7
1.1.5 Méthodologie	8
1.2 Convergence de la distribution spectrale empirique	10
1.2.1 Loi de demi-cercle	10
1.2.2 Loi de Marcenko-Pastur	11
1.2.3 Loi de Marcenko-Pastur généralisée	12
2 Distribution Spectrale Limite de la Matrice de Fisher	14
2.1 Introduction aux matrices de Fisher	14
2.2 Outils d'Analyse Complexe	15
2.2.1 Intégration sur le plan complexe	15
2.2.2 Formule d'intégrale de Cauchy	15
2.3 Théorème de la Distribution Spectrale Limite de Fisher	16
2.4 Démonstration du Théorème	16
2.4.1 Identification combinatoire des moments limites	16
2.4.2 Fonction génératrice des moments	18
2.4.3 Passage aux transformées de Stieltjes	21
2.4.4 Réduction de l'intégrale à une fraction rationnelle	25
2.4.5 Localisation des pôles et calcul du résidu	26
2.4.6 Extraction de la densité et masse ponctuelle à l'origine	29
3 Applications de la LSD de Fisher par Intégrale de Contour	31
3.1 Rappels sur la distribution de Fisher	31
3.1.1 Formule intégrale de contour pour la loi de Fisher	32
3.2 Calcul des moments et de la variance	35
3.3 Spécialisation à la loi de Marchenko-Pastur	36
3.4 Illustrations numériques	37
Conclusion Générale	41

Introduction Générale

La théorie des matrices aléatoires trouve son origine dans les travaux de Wigner, qui modélisait les niveaux d'énergie des noyaux atomiques lourds par le spectre de matrices symétriques à coefficients aléatoires. Contre toute attente, ce spectre se stabilisait, lorsque la dimension croissait, autour d'une forme limite parfaitement déterministe, la loi du demi-cercle. Ce passage de l'aléatoire individuel à une régularité collective constitue le fil conducteur de ce mémoire.

Ce cadre asymptotique porte un nom : le régime de grande dimension, dans lequel la dimension p des matrices et la taille n de l'échantillon croissent simultanément vers l'infini, à un rapport p/n convergent vers une constante strictement positive. Ce régime s'oppose frontalement au cadre classique de la statistique multivariée, où n seul croît tandis que p demeure fixe, les résultats asymptotiques usuels, convergence de la matrice de covariance empirique vers la matrice de covariance théorique, normalité asymptotique des estimateurs, lois du χ^2 ou de Wishart classiques, reposent implicitement sur l'hypothèse $p \ll n$, et cessent d'être valides dès lors que p et n sont du même ordre de grandeur. C'est précisément ce changement de régime qui impose le recours à la théorie des matrices aléatoires, plutôt que de traiter la dimension comme un obstacle technique, elle l'intègre comme un paramètre à part entière de l'analyse asymptotique, au même titre que la taille de l'échantillon.

Cette idée prend un relief particulier en génomique, en finance ou en traitement du signal, où p et n sont désormais du même ordre de grandeur, ce qui fait perdre aux estimateurs usuels de covariance leurs propriétés de convergence. C'est ce constat qui a conduit Marchenko et Pastur, puis Bai et Silverstein, à décrire le comportement spectral limite de ces matrices lorsque p/n converge vers une constante strictement positive.

La matrice de Fisher, définie comme le produit d'une matrice de covariance empirique par l'inverse d'une seconde matrice indépendante, s'inscrit directement dans cette problématique : elle intervient dès que l'on compare la structure de covariance de deux populations, par exemple pour tester l'égalité de deux matrices de covariance en grande dimension. Déterminer sa loi spectrale limite revient donc à fournir un outil statistique valable là où les méthodes classiques échouent.

Ce mémoire s'appuie sur deux outils complémentaires pour atteindre cet objectif : la méthode des moments, qui relie la convergence des traces de puissances de la matrice à celle de sa mesure spectrale, et la transformation de Stieltjes, qui caractérise cette mesure comme solution d'une équation de point fixe avant d'en extraire la densité par inversion. L'analyse complexe, formule de Cauchy, théorème des résidus, intégration sur le cercle unité, vient ensuite prolonger ces deux approches.

Le mémoire comporte trois chapitres. Le premier pose les bases classiques de la théorie spectrale : matrices de Wigner et de covariance, loi du demi-cercle, loi de Marchenko-Pastur. Le second établit, par une démonstration combinant méthode des moments et intégration de contour, la transformée de Stieltjes puis la densité explicite de la loi spec-

trale limite de la matrice de Fisher. Le troisième en déduit une formule générale d'intégration de contour permettant de calculer toute fonctionnelle linéaire de cette loi, retrouve la loi de Marchenko-Pastur comme cas limite, et confronte les résultats théoriques à des simulations numériques.

Chapitre 1

Distribution Spectrale Limite de Matrice Aléatoire

1.1 Généralités

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à l'étude du spectre des matrices aléatoires de grande taille, notamment les matrices de Wigner et les matrices de covariance. L'objectif principal est d'analyser le comportement asymptotique des valeurs propres de ces matrices lorsque leur dimension tend vers l'infini.

Pour cela, nous utiliserons deux outils fondamentaux de la théorie des matrices aléatoires : la méthode des moments et la transformation de Stieltjes. Ces méthodes permettent d'étudier la convergence de la distribution spectrale empirique vers une loi limite.

Plus précisément, la méthode des moments consiste à examiner les moments de la distribution spectrale afin de caractériser la loi limite, tandis que la transformation de Stieltjes fournit une approche analytique puissante pour démontrer cette convergence.

1.1.1 Matrice de Wigner

On rappelle qu'une matrice $M_n = [M_{i,j}]$ est dite symétrique si

$$M_n = M_n^T, \quad M_{ij} = M_{ji}.$$

elle est hermitienne si

$$M_{ij} = \overline{M_{ji}},$$

ou $\overline{M_{ji}}$ désigne le conjugué de l'élément.

Définition 1.1. [5]

Une matrice de Wigner M_n est une matrice aléatoire $n \times n$ symétrique dans le cas réel ou hermitienne dans le cas complexe.

1. Cas réel :

* Les coefficients M_{ij} avec $i < j$ sont indépendants et identiquement distribués (iid), ont une moyenne nulle et une variance égale σ^2 .

* Les coefficients diagonaux $(M_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ sont également indépendants entre eux et indépendants des coefficients hors diagonale.

* Si les coefficients suivent une loi normale standard, on obtient une matrice de Wigner gaussienne.

2. Cas complexe :

* Pour $i < j$, les parties réelles et parties imaginaires des M_{ij} (iid), ont une moyenne nulle et une variance égale $\frac{1}{2}$.

1.1.2 Matrice de Wishart

Définition 1.2. [5]

Soit X une matrice rectangulaire de taille $p \times n$ à coefficients X_{ij} réels, (iid) selon une loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

On définit la matrice de Wishart de taille $p \times p$ par :

$$W = \frac{1}{n} X X^\top.$$

Si X est à coefficients complexes, $X^\top$ désigne la matrice conjuguée de X .

Si X est à coefficients réels, $X^\top$ désigne la matrice transposée de X .

Remarque 1. La loi gaussienne des entrées est ici essentielle : elle garantit que W suit exactement une loi de Wishart au sens classique. La Définition 1.3 ci dessous généralise ce cadre en remplaçant la gaussianité par une simple hypothèse d'existence de moments.

1.1.3 Matrice de covariances

Définition 1.3. [5]

Soit X une matrice aléatoire de taille $p \times n$, dont les coefficients sont des variables (iid) centrées et de variance σ^2

La matrice de covariance empirique de taille $p \times p$ est définie par :

$$S_n = \frac{1}{n} X X^\top,$$

telle que S_n est une matrice $p \times p$ symétrique définie positive.

1.1.4 Fonction de répartition empirique

Définition 1.4. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels.

La fonction de répartition empirique associée est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}},$$

où :

$$\mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre étude des matrices, les x_i présentent les valeurs propres de la matrice.

Définition 1.5. Soit M_n une matrice aléatoire de taille $n \times n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

La mesure empirique du spectre est définie par :

$$F_{M_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_i \leq x\}}.$$

1.1.5 Méthodologie

Dans la théorie des grandes matrices, les valeurs propres peuvent être vues comme des fonctions des coefficients de la matrice, mais elles ne possèdent pas de forme explicite lorsque la dimension dépasse 4. Il est donc nécessaire de les étudier à l'aide de méthodes spécifiques,

1. Méthode des moments

Cette méthode repose sur le théorème de convergence des moments, l'une des approches les plus fondamentales pour analyser les propriétés spectrales des grandes matrices aléatoires. Elle permet de démontrer qu'une suite de distributions spectrales empiriques converge vers une distribution limite, en étudiant les traces des puissances successives de la matrice.

Soit M_n une matrice aléatoire hermitienne (symétrique réelle), de valeurs propre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. La distribution spectrale empirique de M_n est définie par :

$$F^{M_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_i \leq x\}}.$$

Les moments de cette distribution sont donnés par :

$$\beta_{n,k} = \int_{\mathbb{R}} x^k dF^{M_n}(x),$$

ou de manière équivalente :

$$\beta_{n,k} = \int_{\mathbb{R}} x^k dF^{M_n}(x) = \frac{1}{n} \text{Tr} (M_n^k)$$

Cette expression est très importante dans la théorie des matrices aléatoires. En effet, d'après le théorème de convergence des moments,

Théorème 1. [2]

Soit $(\beta_{n,k})_{n \geq 1}$ une suite des moments de la distribution spectrale empirique de M_n (F_{M_n}), et pour chaque entier k fixé,

Si :

$$\frac{1}{n} \text{Tr} (M_n^k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \beta_k$$

alors :

$$F_{M_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} F$$

où les β_k sont les moments de la distribution spectrale limite F .

Remarque 2. Le théorème des moments est valable à condition que la distribution limite F soit uniquement déterminée par ses moments.

Comme dans la Condition de Carleman :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\frac{1}{2k}} = \infty.$$

Si cette somme diverge, alors F est uniquement déterminée par sa suite de moments β_k .

2. Transformation de Stieltjes

La transformée de Stieltjes est un outil fondamental dans la théorie des matrices aléatoires. Elle est utilisée pour étudier la distribution spectrale empirique des matrices. En particulier, la convergence des spectres est souvent établie à partir de la convergence de leurs transformées de Stieltjes.

Définition 1.6 ([2]). Soit M une matrice hermitienne de taille $n \times n$ et soit F_n sa distribution spectrale empirique. La transformation de Stieltjes de F_n est donnée par :

$$s_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} dF_n(x) = \frac{1}{n} \text{Tr}((M_n - zI)^{-1}), \quad z \in \mathbb{C}^+ = \{z = x + i\eta : \eta > 0\}$$

Expression par la formule d'inversion de matrice : Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on introduit les notations suivantes :

- m_{kk} désigne le k -ième élément diagonal de M_n ;
- M_k désigne la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de M_n la k -ième ligne et la k -ième colonne ;
- $\alpha_k \in \mathbb{C}^{n-1}$ désigne le k -ième vecteur colonne de M_n privé de sa k -ième composante, de sorte que α_k^* est son conjugué.

L'idée consiste alors à exprimer $s_n(z)$ à l'aide d'une formule itérative fondée sur l'inversion par blocs de $M_n - zI$, appliquée successivement à chaque indice k :

$$s_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m_{kk} - z - \alpha_k^*(M_k - zI)^{-1}\alpha_k}$$

La méthode consiste à montrer que le dénominateur de chaque terme converge vers une fonction $g(z, s_n(z))$ commune, c'est-à-dire que

$$m_{kk} - z - \alpha_k^*(M_k - zI)^{-1}\alpha_k \simeq g(z, s_n(z))$$

uniformément en k , ce qui permet d'écrire asymptotiquement :

$$s_n(z) \simeq \frac{1}{g(z, s_n(z))}.$$

Propriétés fondamentales de la transformée de Stieltjes Avant d'appliquer cet outil aux lois limites, nous précisons trois propriétés essentielles qui seront utilisées dans la suite.

1. *Comportement dans $\mathbb{C}^+$* : Pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, la transformée de Stieltjes $s_n(z)$ est bien définie et analytique. En effet, le dénominateur $x - z$ ne s'annule jamais tant que z est à partie imaginaire strictement positive. On travaille donc systématiquement dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}^+$ pour éviter les singularités situées sur l'axe réel aux positions des valeurs propres.

2. *Formule d'inversion* : La connaissance de $s(z)$ suffit à retrouver complètement la densité spectrale limite. Plus précisément, si $s(z)$ est la transformée de Stieltjes d'une mesure μ , alors la densité de μ se récupère par la formule [8] :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \text{Im } s(\lambda + i\eta). \quad (1.1)$$

Autrement dit, la partie imaginaire de $s(z)$, lorsqu'on approche l'axe réel par le haut, révèle directement la densité spectrale.

3. *Équation de point fixe* : La transformée de Stieltjes de la distribution spectrale limite F est caractérisée comme l'unique solution dans $\mathbb{C}^+$ de l'équation :

$$s(z) = \frac{1}{g(z, s(z))}. \quad (1.2)$$

où g est une fonction déterminée par la structure de la matrice. Cette équation implicite constitue le point de départ de toute la machinerie analytique, résoudre cette équation revient à identifier entièrement la loi limite.

Remarque 1.1.1. *Ces trois propriétés forment un cycle logique : on travaille dans $\mathbb{C}^+$ pour garantir l'analyticité, on résout l'équation de point fixe pour obtenir $s(z)$, puis on applique la formule d'inversion (1.1) pour en déduire la densité.*

1.2 Convergence de la distribution spectrale empirique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la convergence de la distribution spectrale empirique dans le cas où les coefficients sont (iid) pour des matrices fondamentales, telles que les matrices de Wigner et les matrices de covariance.

On note X_n une matrice de Wigner de taille $n \times n$, et on introduit la matrice de Wigner normalisée W_n définie par :

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_n.$$

1.2.1 Loi de demi-cercle

Théorème 2. [2]

Soit $((X_{ij})_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\mathbb{E}[X_{ij}] = 0, \quad \mathbb{E}[|X_{ij}|^2] = \sigma^2, \quad \forall 1 \leq i < j,$$

et pour $k \geq 1$

$$\sup_{(i,j)} \mathbb{E}[|X_{ij}|^k] = c(k) < +\infty.$$

On construit une matrice symétrique aléatoire $(X_n)_{1 \leq i,j \leq n}$ de taille $n \times n$ en posant $(X_n)_{ij} = X_{ij}$, alors la mesure spectrale $\mu_{\frac{X_n}{\sqrt{n}}}$ converge presque sûrement vers la loi de demi-cercle μ_{cs} de densité :

$$d\mu_{cs}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2}, \quad |x| \leq 2\sigma.$$

on a donc

$$\mu_{\frac{X_n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mu_{cs}.$$

La loi du demi-cercle également appelée loi semi-circulaire ou loi de Wigner.

La figure met en évidence une densité en forme d'arc, *centrée en zéro* et définie uniquement sur $[-2\sigma, 2\sigma]$. En dehors de cet intervalle, aucune valeur propre n'est observée, le spectre est donc naturellement *concentré et borné*.

Densité de la loi du demi-cercle

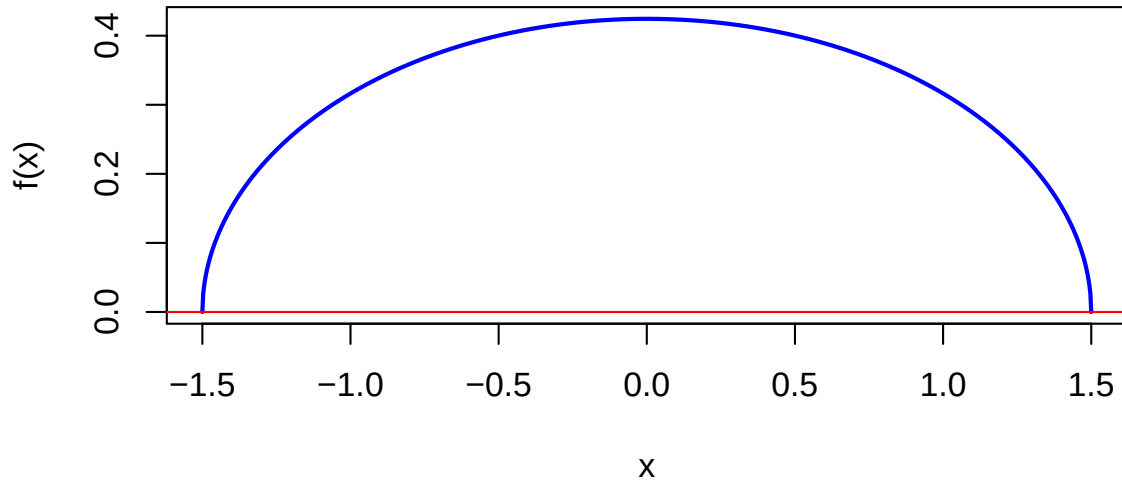


FIGURE 1.1 – Densité de la loi du demi-cercle

1.2.2 Loi de Marcenko-Pastur

Théorème 3 ([2]). Soit M_n une matrice de taille $p \times n$ à coefficients aléatoires (iid), centrés et de variance 1, et supposons $\frac{p}{n} \rightarrow y \in (0, \infty)$ lorsque $n, p \rightarrow \infty$.

On considère la matrice de covariance empirique

$$S_n = \frac{1}{n} M_n M_n^\top.$$

Alors la mesure spectrale empirique μ_{S_n} converge presque sûrement vers une mesure déterministe $\mu_{MP,y}$:

$$\mu_{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mu_{MP,y},$$

où

$$\mu_{MP,y}(dx) = \max\left\{1 - \frac{1}{y}, 0\right\} \delta_0 + f(x) \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx,$$

avec

$$f(x) = \frac{1}{2\pi xy} \sqrt{(b-x)(x-a)}$$

et

$$\begin{cases} a = (1 - \sqrt{y})^2, \\ b = (1 + \sqrt{y})^2. \end{cases}$$

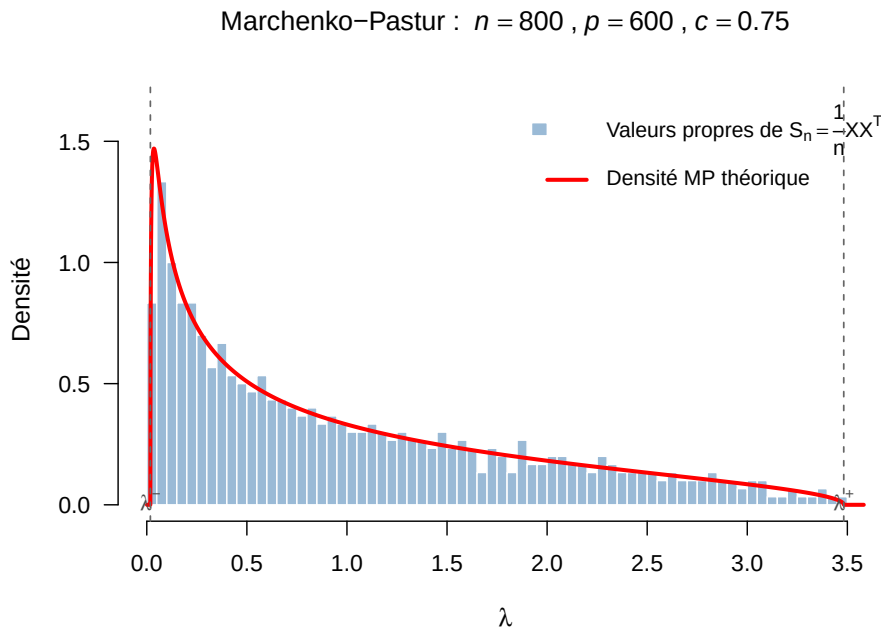


FIGURE 1.2 – Convergence vers la loi de Marchenko-Pastur : l’histogramme bleu des valeurs propres de $S_n = \frac{1}{n}M_n M_n^\top$ suit parfaitement la densité théorique en rouge.

Ici Le rapport $y = p/n = 0,75$ place le système dans un régime où le nombre de variables reste inférieur au nombre d’observations. Le support de la densité est un intervalle borné $[a, b] \approx [0,02, 3,48]$, avec $a = (1 - \sqrt{y})^2$ et $b = (1 + \sqrt{y})^2$: les valeurs propres de S_n restent concentrées dans cette zone. Comme $y < 1$, on a $p < n$, donc S_n est de rang plein presque sûrement, et il n’y a donc aucune masse ponctuelle en $x = 0$.

1.2.3 Loi de Marcenko-Pastur généralisée

La loi de Marchenko-Pastur établie précédemment décrit le spectre limite de la matrice de covariance empirique S_n seule. Il est cependant naturel, de considérer le produit de S_n par une matrice de population T_n non nécessairement identité, qui vient déformer le spectre. Le théorème suivant, caractérise la loi spectrale limite de ce produit $B_n = S_n T_n$ par une équation de point fixe portant sur sa transformée de Stieltjes, généralisant ainsi le cas $T_n = I_p$ traité au Théorème précédent.

Théorème 4 ([12]). *Soit S_n la matrice de covariance empirique avec des composantes (iid), et soit T_n une suite de matrices hermitiennes semi-définies positives de taille $p \times p$. Définissons $B_n = S_n T_n$ où $S_n = \frac{1}{n}X X^\top$ et supposons que :*

- (i) *Les entrées de la matrice de données X sont (iid) de moyenne nulle et de variance 1 ;*
- (ii) *Le rapport $p/n \rightarrow y > 0$ quand $n \rightarrow \infty$;*
- (iii) *La suite (T_n) est soit déterministe, soit indépendante de (S_n) ;*
- (iv) *Presque sûrement, la suite $(H_n = F^{T_n})$ de la distribution spectrale empirique de T_n converge faiblement vers une mesure de probabilité non aléatoire H .*

Alors, presque sûrement, F^{B_n} converge faiblement vers une mesure de probabilité non aléatoire $F_{y,H}$. De plus, sa transformée de Stieltjes s est définie implicitement par l'équation :

$$s(z) = \int \frac{1}{t(1 - y - y z s(z)) - z} dH(t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Chapitre 2

Distribution Spectrale Limite de la Matrice de Fisher

2.1 Introduction aux matrices de Fisher

Dans de nombreuses applications statistiques modernes, on est amené à comparer deux populations à travers le rapport de leurs matrices de covariance empiriques. Lorsque la dimension p et les tailles d'échantillons n_1, n_2 sont toutes grandes et du même ordre de grandeur, les outils classiques deviennent inadaptés et il est nécessaire de recourir à la théorie des grandes matrices aléatoires.

Dans ce contexte, nous nous intéressons à la matrice de Fisher définie par

$$F_n = S_1 S_2^{-1}, \quad S_j = \frac{1}{n_j} X_j X_j^\top, \quad j = 1, 2,$$

où $X_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$ et $X_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$ sont deux matrices de données indépendantes à entrées (iid) centrées et de variance unité. Pour garantir l'inversibilité de S_2 , on suppose

$$\frac{p}{n_1} \longrightarrow y_1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{p}{n_2} \longrightarrow y_2 \in (0, 1).$$

L'objectif de ce chapitre est de déterminer la distribution spectrale limite de F_n . Pour y parvenir, nous utilisons deux outils complémentaires : la *méthode des moments*, qui fournit les moments limites β_k^{st} , et la *transformée de Stieltjes*, qui permet, via la formule d'inversion, d'en déduire explicitement la densité limite. L'articulation de ces deux approches, au moyen d'une intégrale de contour dans le plan complexe.

Nous commençons par un rappel des outils d'analyse complexe nécessaires, puis nous énonçons et démontrons le théorème principal.

Définition 2.1. [2]

Une matrice de Fisher F_n est définie comme le produit d'une matrice de covariance empirique par l'inverse d'une autre matrice de covariance empirique indépendante :

$$F_n = S_1 S_2^{-1}$$

où $S_1 = \frac{1}{n_1} X X^\top$ et $S_2 = \frac{1}{n_2} Y Y^\top$ sont les matrices de covariance de deux échantillons indépendants de dimension p et de tailles n_1 et n_2 respectivement.

Les matrices de données X et Y , de dimensions respectives $p \times n_1$ et $p \times n_2$, sont constituées de vecteurs colonnes indépendants dont les entrées sont des variables aléatoires (iid) de moyenne nulle et de variance unité.

De plus, X et Y sont supposées mutuellement indépendantes, ce qui garantit l'indépendance des matrices de covariance empiriques S_1 et S_2 .

De plus, la matrice S_2 doit être inversible presque sûrement, ce qui impose la condition nécessaire

$$p \leq n_2.$$

En effet, comme $\text{rang}(Y) \leq \min(p, n_2)$ pour toute matrice $Y \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$, si $n_2 < p$ alors $\text{rang}(Y) < p$ pour toute réalisation, donc $\text{rang}(S_2) = \text{rang}(YY^\top) = \text{rang}(Y) < p$: S_2 est alors toujours singulière. La condition $p \leq n_2$ est donc nécessaire à l'inversibilité de S_2 .

2.2 Outils d'Analyse Complexe

2.2.1 Intégration sur le plan complexe

Dans l'étude du spectre d'une grande matrice aléatoire, on ne travaille pas directement sur l'axe réel, on plonge dans le plan complexe $\mathbb{C}$. L'outil central est la transformée de Stieltjes d'une mesure spectrale μ :

$$s(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu(\lambda), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Cette fonction de la variable complexe z encode toute l'information sur la distribution des valeurs propres. Elle est analytique partout sauf aux points du support de μ , où le dénominateur $\lambda - z$ s'annule, ce sont exactement les positions des valeurs propres, et $s(z)$ est singulière.

Alors travailler dans $\mathbb{C}^+$ présente un avantage décisif, en prenant $z = x + i\eta$ avec $\eta > 0$, on s'écarte de l'axe réel et $s(z)$ devient bien définie et analytique. On peut alors approcher le spectre sans y tomber dessus. c'est précisément cette limite $\eta \rightarrow 0^+$ qui révèle la densité spectrale, via la formule d'inversion de Stieltjes :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \text{Im } m(\lambda + i\eta).$$

Une fois que $s(z)$ est vue comme une fonction analytique dans $\mathbb{C}$, on dispose des outils de l'analyse complexe. En particulier, la formule de Cauchy.

2.2.2 Formule d'intégrale de Cauchy

La formule intégrale de Cauchy constitue le pont fondamental entre la mesure spectrale μ et la transformée de Stieltjes $s(z)$ fonction analytique définie sur $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$. Pour toute fonction f analytique dans un domaine contenant le support des valeurs propres, et pour tout contour fermé Γ entourant ce support dans le sens direct, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) m(z) dz = - \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu(\lambda).$$

Application aux moments spectraux :

En choisissant $f(\lambda) = \lambda^k$, on obtient directement les moments :

$$\beta_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z^k m(z) dz.$$

La formule de Cauchy permet ainsi d'accéder aux moments spectraux et, plus généralement, à toutes les quantités globales de la distribution μ sans avoir besoin de localiser individuellement chaque valeur propre. C'est cette propriété qui rend l'intégration de contour particulièrement adaptée à l'étude des grands spectres.

2.3 Théorème de la Distribution Spectrale Limite de Fisher

Théorème 5 ([2]). *Supposons que $p/n_1 \rightarrow y_1 \in (0, \infty)$ et $p/n_2 \rightarrow y_2 \in (0, 1)$ lorsque $n_1, n_2, p \rightarrow \infty$. Alors, la distribution spectrale empirique (ESD) de la matrice $F_n = S_1 S_2^{-1}$ converge presque sûrement vers une loi de probabilité dont la densité spectrale limite est donnée par :*

$$p_{y_1, y_2}(x) = \begin{cases} \frac{(1 - y_2) \sqrt{(b - x)(x - a)}}{2\pi x (y_1 + xy_2)} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

où les bornes du support $[a, b]$ sont définies par :

$$a = \left(\frac{1 - \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2}}{1 - y_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad b = \left(\frac{1 + \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2}}{1 - y_2} \right)^2$$

Lorsque $y_1 > 1$, la loi limite possède de plus une masse ponctuelle $1 - 1/y_1$ en $x = 0$.

2.4 Démonstration du Théorème

La démonstration articule la méthode des moments et la transformée de Stieltjes, reliées entre elles par une représentation en intégrale de contour dans le plan complexe. Rappelons que $F_n = S_1 S_2^{-1}$, avec $S_1 = n_1^{-1} X X^\top$ et $S_2 = n_2^{-1} Y Y^\top$ construites à partir de matrices de données indépendantes à entrées (iid) centrées de variance unité ; la loi spectrale limite LSD de F_n est, par définition, la limite presque sûre de la mesure spectrale empirique μ_{F_n} , dont on établit ici l'existence et la forme explicite.

2.4.1 Identification combinatoire des moments limites

On note $T_n = S_{n_2}^{-1}$, dont la loi spectrale limite (H_ℓ) est de moments $(H_\ell)_{\ell \geq 1}$, et β_k^{st} le k -ième moment limite de $B_n = S_n T_n$. La méthode des moments repose sur le dénombrement des chemins fermés dans les graphes associés aux traces $\text{Tr}(B_n^k)$, (voir Bai-Silverstein, chapitre 4) fournit

$$\beta_k^{st} = \sum_{s=1}^k y_1^{k-s} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_s = k \\ i_1, \dots, i_s \geq 1}} \frac{k!}{s!} \prod_{m=1}^s \frac{H_{i_m}}{i_m!}.$$

À partir de cette expression, on pose $A := \sum_{\ell=1}^{\infty} \zeta^{\ell} H_{\ell}$ et on reconnaît que β_k^{st} s'écrit comme le coefficient de ζ^k dans

$$\sum_{s=0}^k y_1^{k-s} \frac{k!}{s! (k-s+1)!} A^{k-s+1} + \frac{1}{y_1(k+1)}.$$

Le changement d'indice $r = k - s + 1$, soit $s = k - r + 1$, transforme la sommation $s \in \{0, \dots, k\}$ en $r \in \{1, \dots, k+1\}$ et donne :

$$\sum_{r=1}^{k+1} y_1^{r-1} \frac{k!}{r! (k-r+1)!} A^r + \frac{1}{y_1(k+1)}.$$

L'identité combinatoire $\frac{k!}{r! (k-r+1)!} = \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{r}$ permet de factoriser :

$$\frac{1}{k+1} \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} (y_1 A)^r \cdot \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1(k+1)}.$$

En rajoutant le terme $r = 0$, qui contribue $1/y_1$, on reconnaît le binôme

$$(1 + y_1 A)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} (y_1 A)^r$$

et on conclut, en tant qu'égalité de séries entières en ζ , c'est-à-dire que β_k^{st} est, à k fixé, le coefficient de ζ^k dans le développement en série entière de la fonction

$$f_k(\zeta) = \frac{1}{y_1(k+1)} \left(1 + y_1 A(\zeta)\right)^{k+1}.$$

La série $A(\zeta) = \sum_{\ell \geq 1} \zeta^{\ell} H_{\ell}$ converge pour $|\zeta| < \frac{1}{\tau_0}$, où τ_0 est la borne supérieure du support de H , borne finie par hypothèse sur les moments de la LSD de T_n . Sur tout disque fermé $|\zeta| \leq \rho < 1/\tau_0$, cette convergence est uniforme (le terme général est majoré par $\rho^{\ell} \sup H_{\ell}$, série numérique convergente).

Par conséquent, $f(\zeta)$ est analytique sur le disque $|\zeta| < \frac{1}{\tau_0}$, et on peut l'écrire sous forme de série entière :

$$f(\zeta) = \sum_{k \geq 0} a_k \zeta^k,$$

où a_k désigne le coefficient de ζ^k dans le développement de Taylor de $f(\zeta)$.

On remarque que β_k^{st} est précisément ce coefficient :

$$\beta_k^{st} = a_k.$$

D'après la formule intégrale de Cauchy, pour toute fonction analytique $f(\zeta) = \sum_{k \geq 0} a_k \zeta^k$, on a :

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta,$$

où ρ est le rayon de convergence.

On remplace $f(\zeta)$ par son expression explicite :

$$\beta_k^{st} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{1}{\zeta^{k+1}} \cdot \frac{1}{y_1(k+1)} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right)^{k+1} d\zeta.$$

d'où :

$$\beta_k^{st} = \frac{1}{2\pi i y_1(k+1)} \oint_{|\zeta|=\rho} \zeta^{-k-1} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right)^{k+1} d\zeta, \quad \rho \in \left(0, \frac{1}{\tau_0} \right).$$

2.4.2 Fonction génératrice des moments

On introduit $g(z) = \sum_{k \geq 0} z^k \beta_k^{st}$, de sorte que

$$g(z) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \beta_k^{st} = \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} z^k \zeta^{-1-k} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right)^{k+1} d\zeta.$$

Le rayon $\rho \in (0, 1/\tau_0)$ étant fixé strictement à l'intérieur du disque de convergence de $A(\zeta) = \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell$, la fonction $\zeta \mapsto 1 + y_1 A(\zeta)$ est continue sur le compact $\{|\zeta| = \rho\}$, donc bornée : il existe $M = M(\rho) < \infty$ tel que

$$\sup_{|\zeta|=\rho} |1 + y_1 A(\zeta)| \leq M.$$

Pour $|z| < \rho/M$, on a alors, uniformément en ζ sur $|\zeta| = \rho$,

$$\left| \frac{z}{\zeta} (1 + y_1 A(\zeta)) \right| \leq \frac{|z|}{\rho} M =: \delta < 1.$$

En posant $x = \frac{z}{\zeta} (1 + y_1 A(\zeta))$, chaque terme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k+1}$ vérifie $\left| \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \delta^k$, terme général d'une série géométrique convergente indépendante de ζ . Par le critère de Weierstrass, la série converge donc uniformément en ζ sur $|\zeta| = \rho$, ce qui justifie l'interversion série et intégrale utilisée par la suite.

$$\oint_{|\zeta|=\rho} \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \oint_{|\zeta|=\rho} (\dots) d\zeta,$$

et permet ensuite de sommer la série sous le signe intégral, comme ci-dessous.

On utilise le résultat suivant :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1, \quad |x| < 1$$

En effet ; on part de la série géométrique

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m, \quad |x| < 1.$$

En intégrant entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

et

$$\int_0^x \sum_{m=0}^{\infty} t^m dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Donc, en posant $k = m + 1$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

En divisant par x :

$$-\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

La série converge pour $|x| < 1$, donc en isolant le terme $k = 0$ qui vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1.$$

Avec

$$x = \frac{z}{\zeta} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right).$$

On trouve :

$$g(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \left[-\zeta^{-1} - y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^{\ell-1} H_\ell - \frac{1}{z} \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right) \right) \right] d\zeta.$$

On décompose l'intégrale en trois parties :

$$g(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i y_1} (I_1 + I_2 + I_3),$$

avec :

$$I_1 = \oint_{|\zeta|=\rho} (-\zeta^{-1}) d\zeta,$$

$$I_2 = \oint_{|\zeta|=\rho} \left(-y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^{\ell-1} H_\ell \right) d\zeta,$$

$$I_3 = \oint_{|\zeta|=\rho} \left(-\frac{1}{z} \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right) \right) \right) d\zeta.$$

On rappelle le Théorème des résidus.

Théorème 6. [4]

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert contenant le disque $|\zeta| \leq \rho$, avec des pôles isolés $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ à l'intérieur du contour. Alors :

$$\oint_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, \zeta_j).$$

En particulier, pour un pôle simple en $\zeta = a$:

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{\zeta \rightarrow a} (\zeta - a) f(\zeta).$$

Pour une fonction de la forme $f(\zeta) = \zeta^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$\oint_{|\zeta|=\rho} \zeta^n d\zeta = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1, \\ 0 & \text{si } n \neq -1. \end{cases}$$

Calcul de I_1

$$I_1 = \oint_{|\zeta|=\rho} (-\zeta^{-1}) d\zeta = - \oint_{|\zeta|=\rho} \zeta^{-1} d\zeta.$$

La fonction $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$ a un pôle simple en $\zeta = 0$, à l'intérieur du contour $|\zeta| = \rho$. Son résidu est :

$$\text{Res}(\zeta^{-1}, 0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \cdot \zeta^{-1} = 1.$$

Par le théorème des résidus :

$$\oint_{|\zeta|=\rho} \zeta^{-1} d\zeta = 2\pi i \times 1 = 2\pi i.$$

Donc :

$$I_1 = -2\pi i.$$

Calcul de I_2

$$I_2 = -y_1 \oint_{|\zeta|=\rho} \sum_{\ell \geq 1} \zeta^{\ell-1} H_\ell d\zeta = -y_1 \sum_{\ell \geq 1} H_\ell \oint_{|\zeta|=\rho} \zeta^{\ell-1} d\zeta,$$

où l'on a interverti somme et intégrale, justifié par la convergence uniforme sur $|\zeta| = \rho < 1/\tau_0$.

Pour chaque terme, l'exposant de ζ est $\ell - 1$. Puisque $\ell \geq 1$, on a $\ell - 1 \geq 0$, donc :

$$\oint_{|\zeta|=\rho} \zeta^{\ell-1} d\zeta = 0 \quad \text{pour tout } \ell \geq 1,$$

car $\ell - 1 \neq -1$, il n'y a aucun pôle, toutes les puissances sont entières ≥ 0 .

Donc :

$$I_2 = 0.$$

Calcul de I_3

$$I_3 = -\frac{1}{z} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right) \right) d\zeta.$$

Cette intégrale ne se réduit pas à un simple calcul de résidu ; elle est conservée telle quelle est.

En substituant I_1 , I_2 et I_3 dans l'expression de $g(z) - 1$ on trouve :

$$g(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i y_1} (-2\pi i + 0 + I_3) = \frac{-2\pi i}{2\pi i y_1} + \frac{I_3}{2\pi i y_1}.$$

Donc :

$$g(z) - 1 = -\frac{1}{y_1} - \frac{1}{2\pi i y_1 z} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right) \right) d\zeta,$$

ou encore,

$$g(z) = \frac{y_1 - 1}{y_1} - \frac{1}{2\pi i y_1 z} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln \left[1 - \frac{z}{\zeta} \left(1 + y_1 \sum_{\ell \geq 1} \zeta^\ell H_\ell \right) \right] d\zeta. \quad (2.2)$$

Remarque 3. La décomposition $I_1 + I_2 + I_3$ exploite la linéarité de l'intégrale. I_1 contribue via le théorème des résidus avec un pôle simple en $\zeta = 0$; I_2 est nul car toutes les puissances sont entières et positives ; I_3 reste sous forme intégrale et constitue le terme principal de $g(z)$.

2.4.3 Passage aux transformées de Stieltjes

Rappelons que, pour une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$, la transformée de Stieltjes $s_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} \mu(dt)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$,

On a le développement asymptotique suivant, pour $|z| \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-t/z} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{z^{k+1}},$$

ce qui donne, en intégrant terme à terme :

$$s_\mu(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^{k+1}}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

où $\beta_k = \int t^k \mu(dt)$ est le k -ième moment de μ .

On applique le développement asymptotique aux mesures μ_F et μ_H , dont les transformées de Stieltjes sont respectivement s_F et s_H .

Le changement $z \mapsto 1/z$ transforme $|z| \rightarrow \infty$ en $|z| \rightarrow 0$, ce qui permet d'identifier les séries entières en z .

Par définition de s_F et du développement asymptotique :

$$s_F(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^{st}}{z^{k+1}} \implies -\frac{1}{z} s_F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{st} \cdot z^{k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{st} z^k.$$

D'autre part, on a par construction :

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{st} z^k,$$

d'où l'identification :

$$-\frac{1}{z} s_F\left(\frac{1}{z}\right) = g(z).$$

De même, pour la mesure empirique des valeurs propres H :

$$s_H(\zeta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{\zeta^{k+1}} \implies -\frac{1}{\zeta} s_H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k \zeta^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} H_k \zeta^k.$$

Avec $A(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \zeta^k$, on obtient :

$$-\frac{1}{\zeta} s_H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 1 + A(\zeta).$$

En remplaçant dans la formule (2.2), on obtient :

$$\frac{1}{z} s_F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{y_1} - 1 + \frac{1}{2\pi i y_1 z} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln\left(1 - z\zeta^{-1} + \zeta^{-1} z y_1 + \zeta^{-2} z y_1 s_H\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) d\zeta. \quad (2.3)$$

Puisque $T_n = S_{n_2}^{-1}$, les moments négatifs de H coïncident avec les moments positifs de la loi de Marchenko–Pastur d'indice y_2 , ce qui se traduit par la relation

$$\zeta^{-1} s_H(1/\zeta) = -\zeta s_{y_2}(\zeta) - 1,$$

où s_{y_2} est la transformée de Stieltjes de cette loi, sa forme explicite est donnée par la formule standard de la transformée de Stieltjes de la loi de Marchenko–Pastur :

$$s_{y_2}(\zeta) = \frac{1 - y_2 - \zeta + \sqrt{(1 + y_2 - \zeta)^2 - 4y_2}}{2y_2 \zeta}.$$

Donc, l'équation (2.3) devient :

$$\frac{1}{z} s_F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{y_1} - 1 + \frac{1}{2\pi i y_1 z} \oint_{|\zeta|=\rho} \left[\ln(z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)) - \ln z \right] d\zeta.$$

Le terme $(-\ln z)$ contribue :

$$\frac{1}{2\pi i y_1 z} \oint_{|\zeta|=\rho} (-\ln z) d\zeta = 0,$$

car $(\ln z)$ est indépendant de ζ et l'intégrale d'une constante sur un contour fermé est nulle.

En multipliant les deux membres par z , on a :

$$s_F\left(\frac{1}{z}\right) = z \left(\frac{1}{y_1} - 1 \right) + \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln(z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)) d\zeta.$$

On revient à la variable initiale z en renommant $z \rightarrow 1/z$, on obtient :

$$s_F(z) = \frac{1}{y_1 z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln(z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)) d\zeta.$$

On procède maintenant à une intégration par parties de l'intégrale I_3 , on part de :

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \ln(z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)) d\zeta$$

On pose :

$$u'(\zeta) = 1 \quad \implies \quad u(\zeta) = \zeta$$

$$v(\zeta) = \ln(z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)) \quad \implies \quad v'(\zeta) = \frac{\zeta^{-2} - y_1 s'_{y_2}(\zeta)}{z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)}.$$

On applique, $\oint u' v d\zeta = [u v]_{\text{contour}} - \oint u v' d\zeta$

Le terme de bord $[u v]_{\text{contour}}$ s'annule car le contour $|\zeta| = \rho$ est fermé. Il reste donc :

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i y_1} \left(- \oint_{|\zeta|=\rho} \zeta \cdot \frac{\zeta^{-2} - y_1 s'_{y_2}(\zeta)}{z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)} d\zeta \right) = - \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{\zeta^{-1} - y_1 \zeta s'_{y_2}(\zeta)}{z - \zeta^{-1} - y_1 s_{y_2}(\zeta)} d\zeta.$$

Ainsi, en multipliant le numérateur et le dénominateur par ζ , on obtient la forme :

$$I_3 = - \frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{1 - y_1 \zeta^2 s'_{y_2}(\zeta)}{z\zeta - 1 - y_1 \zeta s_{y_2}(\zeta)} d\zeta.$$

Changement de variable $\zeta \mapsto s$ via l'équation caractéristique de s_{y_2}

Ce changement de variable est motivé par le fait que l'intégrande contient $s_{y_2}(\zeta)$ et sa dérivée $s'_{y_2}(\zeta)$, rendant l'intégrale transcendante et difficile à manipuler directement. En substituant ζ par s via l'équation de point fixe

$$s = \frac{1}{1 - \zeta - y_2 - y_2 \zeta s}, \quad (2.4)$$

on exprime ζ explicitement en fonction de s , ce qui transforme l'intégrande en une fraction rationnelle en s , directement accessible par le théorème des résidus.

En inversant l'équation (2.4), on obtient :

$$\frac{1}{s} = 1 - \zeta - y_2 - y_2 \zeta s.$$

On regroupe les termes en ζ :

$$\frac{1}{s} = 1 - y_2 - \zeta(1 + y_2s). \quad (2.5)$$

On isole ζ :

$$\zeta(1 + y_2s) = 1 - y_2 - \frac{1}{s} = \frac{s(1 - y_2) - 1}{s}.$$

D'où :

$$\zeta = \frac{s(1 - y_2) - 1}{s(1 + y_2s)}.$$

On calcule la première forme de $\frac{ds}{d\zeta}$: on développe l'équation de point fixe (2.5) :

$$s(1 - y_2 - \zeta - y_2\zeta s) = 1$$

$$s - sy_2 - s\zeta - y_2\zeta s^2 = 1.$$

On dérive implicitement par rapport à ζ , en posant $s' = \frac{ds}{d\zeta}$:

$$s' - s'y_2 - s - s'\zeta - y_2(2ss'\zeta + s^2) = 0.$$

On regroupe les termes en s' :

$$s'(1 - y_2 - \zeta - 2y_2\zeta s) = s + y_2s^2.$$

On obtient donc la première forme :

$$\frac{ds}{d\zeta} = \frac{s + s^2y_2}{1 - y_2 - \zeta - 2sy_2\zeta}.$$

On calcule la deuxième forme de $\frac{ds}{d\zeta}$, pour éliminer ζ du dénominateur, on y substitue

$$\zeta = \frac{s(1 - y_2) - 1}{s(1 + y_2s)} :$$

$$1 - y_2 - \zeta(1 + 2sy_2) = \frac{s(1 - y_2)(1 + y_2s) - [s(1 - y_2) - 1](1 + 2sy_2)}{s(1 + y_2s)}.$$

Le numérateur se développe en $s(1 - y_2) + s^2y_2(1 - y_2)$ pour le premier terme, et $s(1 - y_2) + 2s^2y_2(1 - y_2) - 1 - 2sy_2$ pour le second ; leur différence donne $1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)$. On obtient ainsi

$$1 - y_2 - \zeta - 2sy_2\zeta = \frac{1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)}{s(1 + y_2s)},$$

et, en substituant dans s' et en simplifiant $s(1 + sy_2) = s + s^2y_2$ au numérateur,

$$\frac{ds}{d\zeta} = \frac{s(1 + sy_2) \cdot s(1 + y_2s)}{1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)} = \frac{s^2(1 + sy_2)^2}{1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)}.$$

2.4.4 Réduction de l'intégrale à une fraction rationnelle

On rappelle que lorsque ζ parcourt le contour $|\zeta| = \rho$ dans le sens direct, s parcourt également un contour $\mathcal{C}$ dans le sens direct. On effectue alors le changement de variable $\zeta \mapsto s$ dans l'intégrale, on part de

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{1 - y_1 \zeta^2 s'_{y_2}(\zeta)}{z\zeta - 1 - y_1 \zeta s_{y_2}(\zeta)} d\zeta$$

avec, $s = s_{y_2}(\zeta)$,

$$\zeta^2 s'_{y_2}(\zeta) = \zeta^2 \cdot \frac{s^2(1 + sy_2)^2}{1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)}, \quad \zeta = \frac{s(1 - y_2) - 1}{s(1 + sy_2)}, \quad d\zeta = \frac{1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)}{s^2(1 + sy_2)^2} ds.$$

Le numérateur de l'intégrande, multiplié par $d\zeta$, devient donc

$$(1 - y_1 \zeta^2 s'_{y_2}(\zeta)) d\zeta = \frac{[1 + 2sy_2 - s^2y_2(1 - y_2)] - y_1[s^2(1 - y_2)^2 - 2s(1 - y_2) + 1]}{s^2(1 + sy_2)^2} ds.$$

En développant le crochet et en regroupant les puissances de s , avec $y_2 + y_1(1 - y_2) = y_1 + y_2 - y_1y_2$, on obtient

$$1 - y_1 + 2s(y_1 + y_2 - y_1y_2) - s^2(1 - y_2)(y_1 + y_2 - y_1y_2),$$

ce qui donne,

$$(1 - y_1 \zeta^2 s'_{y_2}(\zeta)) d\zeta = -\frac{(y_1 + y_2 - y_1y_2)(1 - y_2)s^2 - 2s(y_1 + y_2 - y_1y_2) - (1 - y_1)}{s^2(1 + sy_2)^2} ds.$$

Le numérateur se développe en $-s^2[y_1(1 - y_2) + y_2] + s[(1 - y_1) + z(1 - y_2)] - z$, où l'on reconnaît de nouveau $y_1(1 - y_2) + y_2 = y_1 + y_2 - y_1y_2$; ainsi

$$z\zeta - 1 - y_1\zeta s = -\frac{(y_1 + y_2 - y_1y_2)s^2 + s[(1 - y_1) - z(1 - y_2)] + z}{s(1 + sy_2)}.$$

Le rapport numérateur sur dénominateur de l'intégrande s'écrit donc, après simplification du facteur commun $s(1 + sy_2)$ au numérateur avec $s^2(1 + sy_2)^2$ au dénominateur, il reste $1/[s(1 + sy_2)]$, et changement de signe des deux facteurs -1 ,

$$\frac{1 - y_1 \zeta^2 s'_{y_2}(\zeta)}{z\zeta - 1 - y_1\zeta s} d\zeta = \frac{N(s)}{D(s)} ds,$$

avec

$$N(s) = (y_1 + y_2 - y_1y_2)(1 - y_2)s^2 - 2s(y_1 + y_2 - y_1y_2) - (1 - y_1),$$

$$D(s) = s(1 + sy_2)[(y_1 + y_2 - y_1y_2)s^2 + s((1 - y_1) - z(1 - y_2)) + z].$$

On a donc réduit I_3 à l'intégrale d'une fraction rationnelle en s sur le contour $\mathcal{C}$.

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi i y_1} \oint_{\mathcal{C}} f(s) ds, \quad f(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

2.4.5 Localisation des pôles et calcul du résidu

Identification des quatre pôles candidats

L'application du Théorème des résidus donne :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(s) ds = 2\pi i \sum_{s_k \in \text{int}(\mathcal{C})} \text{Res}(f, s_k)$$

Les pôles candidats de f sont les zéros de $D(s)$, que l'on identifie comme suit :

Pôles issus du facteur $s(1 + sy_2) = 0$:

$$s_1 = 0 \quad \text{et} \quad s_2 = -\frac{1}{y_2}$$

Pôles issus de $Q(s) = (y_1 + y_2 - y_1 y_2) s^2 + s((1 - y_1) - z(1 - y_2)) + z = 0$:

Le trinôme $Q(s)$ admet deux racines s_+ et s_- données par :

$$s_{\pm} = \frac{-[(1 - y_1) - z(1 - y_2)] \pm \sqrt{\Delta}}{2(y_1 + y_2 - y_1 y_2)} \quad (2.6)$$

où le discriminant s'écrit :

$$\Delta = [(1 - y_1) - z(1 - y_2)]^2 - 4z(y_1 + y_2 - y_1 y_2).$$

Au total, f possède quatre pôles simples candidats : s_1, s_2, s_+, s_- .

Sélection des pôles intérieurs au contour

Pour identifier les pôles qui contribuent effectivement au calcul, il nous faut déterminer lesquels parmi les quatre pôles candidats se trouvent à l'intérieur du contour $\mathcal{C}$. Rappelons que ce contour est l'image du cercle $|\zeta| = \rho$ sous le changement de variable $\zeta \mapsto s$, où ρ est choisi suffisamment petit.

Localisation du contour. L'équation caractéristique de $s_{y_2}(\zeta)$ nous renseigne sur la géométrie de $\mathcal{C}$: pour ρ petit, tout point $|\zeta| \leq \rho$ vérifie

$$s_{y_2}(\zeta) \approx \frac{1}{1 - y_2}.$$

Autrement dit, le contour $\mathcal{C}$ et son intérieur gravitent autour de la valeur $\frac{1}{1 - y_2}$. C'est ce critère de proximité qui gouverne la sélection des pôles.

Choix de la branche et signe de $\sqrt{\Delta}$. On se place dans la région $z = u + iv$ avec u grand et $v > 0$. Par la convention habituelle sur la branche de la racine carrée, les parties réelle et imaginaire de $\sqrt{\Delta}$ sont toutes deux positives, ce qui se traduit par l'inégalité :

$$\Im\left((1 - y_1) + z(1 - y_2)\right)^2 - 4z = 2v[(1 - y_1)(u(1 - y_2)(1 - y_1)) - 2] > 0.$$

Ce signe positif est la clé pour distinguer s_+ de s_- .

Analyse pôle par pôle.

1. Pôle $s_1 = 0$. Ce pôle est situé à l'extérieur de $\mathcal{C}$. En effet, la relation $\zeta = \frac{s(1-y_2)-1}{s(1+y_2s)}$ montre que $s \rightarrow 0$ force $\zeta \rightarrow \infty$: ce point ne peut donc appartenir à aucun contour borné, et le théorème des résidus ne le prend pas en compte.
2. Pôle $s_2 = -1/y_2$. Ce pôle est lui aussi à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Sa valeur est négative et son module vaut $1/y_2$, ce qui l'éloigne considérablement du centre $\frac{1}{1-y_2}$ du contour.
3. Pôle s_- . Pour u grand, la forme explicite en multipliant par le conjugué

$$s_- = \frac{-(1-y_1) + z(1-y_2) + \sqrt{\Delta}}{2(y_1 + y_2 - y_1 y_2)} = \frac{2z}{-(1-y_1) + z(1-y_2) + \sqrt{\Delta}}$$

révèle que $|s_-| \rightarrow \infty$: ce pôle s'échappe donc vers l'infini et se retrouve à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

4. Pôle s_+ . C'est le seul pôle à l'intérieur de $\mathcal{C}$. La forme rationalisée

$$s_+ = \frac{2z}{-(1-y_1) + z(1-y_2) - \sqrt{\Delta}}$$

confirme que s_+ demeure au voisinage de $\frac{1}{1-y_2}$ pour toute valeur de z à grande partie réelle et partie imaginaire strictement positive.

Le contour C étant fermé simple et $f = N/D$ méromorphe avec un seul pôle intérieur le pôle simple s_+ , le Théorème des résidus donne alors :

$$\oint_C f(s) ds = 2\pi i \operatorname{Res}(f, s_+).$$

Calcul explicite du résidu en s_+

La définition d'un résidu en un pôle simple,

$$\operatorname{Res}(f, s_+) = \lim_{s \rightarrow s_+} (s - s_+) f(s) = \lim_{s \rightarrow s_+} (s - s_+) \frac{N(s)}{D(s)},$$

n'est pas directement exploitable : comme $D(s_+) = 0$, on lève l'indétermination en développant D au premier ordre autour de s_+ :

$$D(s) = D'(s_+)(s - s_+) + O((s - s_+)^2).$$

D'où

$$(s - s_+) \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s - s_+) N(s)}{D'(s_+)(s - s_+) + O((s - s_+)^2)} = \frac{N(s)}{D'(s_+) + O(s - s_+)}.$$

En faisant $s \rightarrow s_+$, le terme $O(s - s_+)$ disparaît, et il reste :

$$\operatorname{Res}(f, s_+) = \frac{N(s_+)}{D'(s_+)}.$$

Calcul de $D'(s_+)$.

On factorise $Q(s)$ sous la forme :

$$Q(s) = (y_1 + y_2 - y_1 y_2)(s - s_+)(s - s_-).$$

En dérivant $D(s) = s(1 + s y_2) \cdot Q(s)$ par la règle du produit :

$$D'(s) = (1 + 2s y_2) Q(s) + s(1 + s y_2) Q'(s).$$

En évaluant en $s = s_+$, le terme $Q(s_+) = 0$ disparaît, et il reste :

$$D'(s_+) = s_+(1 + s_+ y_2) \cdot Q'(s_+).$$

Or $Q'(s) = (y_1 + y_2 - y_1 y_2)[(s - s_-) + (s - s_+)]$, donc en $s = s_+$:

$$Q'(s_+) = (y_1 + y_2 - y_1 y_2)(s_+ - s_-).$$

D'où :

$$D'(s_+) = s_+(1 + s_+ y_2) \cdot (y_1 + y_2 - y_1 y_2)(s_+ - s_-). \quad (2.7)$$

Expression de $s_+ - s_-$.

D'après (2.6), la différence des deux racines vaut :

$$s_+ - s_- = \frac{\sqrt{\Delta}}{y_1 + y_2 - y_1 y_2}.$$

En substituant dans (2.7), les facteurs $(y_1 + y_2 - y_1 y_2)$ se simplifient, ce qui donne

$$D'(s_+) = s_+(1 + s_+ y_2) \cdot \sqrt{\Delta}.$$

Calcul de $N(s_+)$.

On évalue le numérateur en $s = s_+$:

$$\begin{aligned} N(s_+) &= (y_1 + y_2 - y_1 y_2)(1 - y_2) s_+^2 - 2s_+(y_1 + y_2 - y_1 y_2) - (1 - y_1) \\ &= (y_1 + y_2 - y_1 y_2) s_+ [(1 - y_2) s_+ - 2] - (1 - y_1). \end{aligned}$$

On utilise la relation de Viète $s_+ \cdot s_- = \frac{z}{y_1 + y_2 - y_1 y_2}$, soit $(y_1 + y_2 - y_1 y_2) = \frac{z}{s_+ s_-}$, pour réécrire :

$$N(s_+) = \frac{z}{s_-} [(1 - y_2) s_+ - 2] - (1 - y_1). \quad (2.8)$$

En développant et en substituant s_- par son expression (2.6) :

$$\begin{aligned} N(s_+) &= \frac{z(1 - y_2) s_+}{s_-} - \frac{2z}{s_-} - (1 - y_1) \\ &= z(1 - y_2) \frac{s_+}{s_-} - 2z s_-^{-1} - (1 - y_1). \end{aligned}$$

D'où,

$$\text{Res}(f, s_+) = \frac{N(s_+)}{D'(s_+)} = \frac{z(1 - y_2)s_+ - 2z - (1 - y_1)s_-}{z(1 + s_+ y_2)(s_+ - s_-)}.$$

On substitue $s_+ - s_- = \frac{\sqrt{\Delta}}{y_1 + y_2 - y_1 y_2}$ et les expressions de s_+ et s_- par (2.6). Avec un développement algébrique, on obtient :

$$\text{Res}(f, s_+) = \frac{[(1 - y_1 + z - z y_2) - \sqrt{\Delta}](y_1 + y_2 - y_1 y_2)}{z(2y_1 + y_2 - y_1 y_2 + z y_2(1 - y_2)) - y_2 \sqrt{\Delta}}$$

Après simplification (on multiplie numérateur et dénominateur par :

$$2y_1 + y_2 - y_1 y_2 + z y_2(1 - y_2) + y_2 \sqrt{\Delta},$$

et en appliquant $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ au dénominateur), on obtient la forme finale :

$$R = \text{Res}(f, s_+) = \frac{y_1(1 - y_1 + z - z y_2) + 2y_2 z + y_1 \sqrt{\Delta}}{2z(y_1 + y_2 z)}$$

$$\text{où } \Delta = [(1 - y_1) - z(1 - y_2)]^2 - 4z(y_1 + y_2 - y_1 y_2).$$

Transformée de Stieltjes de la LSD de Fisher

En reportant $I_3 = -2\pi i \text{Res}(f, s_+)$ dans $s_F(z) = \frac{1}{y_1 z} - \frac{1}{z} + I_3$, on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}^+$,

$$s_F(z) = \frac{1}{y_1 z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{y_1} \text{Res}(f, s_+) = \frac{1}{y_1 z} - \frac{1}{z} - \frac{y_1[(1 - y_1) + z(1 - y_2)] + 2y_2 z - y_1 \sqrt{\Delta}}{2y_1 z(y_1 z + y_2)}. \quad (2.9)$$

Cette fonction est analytique sur $\mathbb{C}^+$: le choix de branche de $\sqrt{\Delta}$ fait plus haut garantit que Δ ne rencontre pas la coupure $\mathbb{R}_-$ lorsque $\text{Im}(z) > 0$, et $y_1 z + y_2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}^+$ car $y_1, y_2 > 0$. Par unicité de la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, deux mesures de probabilité ayant même transformée de Stieltjes sur $\mathbb{C}^+$ coïncident, par injectivité de la transformation, s_F ainsi obtenue est la transformée de Stieltjes de l'unique mesure limite de μ_{F_n} .

2.4.6 Extraction de la densité et masse ponctuelle à l'origine

Densité spectrale limite par inversion de Stieltjes

Pour déterminer la densité spectrale limite, nous faisons appel à la formule d'inversion de Stieltjes :

$$f(x) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Im[s_F(x + i\varepsilon)].$$

L'idée centrale repose sur l'analyse du signe du discriminant Δ . En effet, lorsque $z = x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des termes intervenant dans l'expression (2.9) sont réels, à l'exception notable de $\sqrt{\Delta}$.

C'est précisément dans la zone où $\Delta(x) < 0$ que la situation devient intéressante : la racine carrée devient alors purement imaginaire, ce qui s'écrit

$$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}.$$

Ce changement de nature permet d'isoler la partie imaginaire de $s_F(x)$. Un calcul direct conduit à :

$$\Im[s_F(x)] = \frac{\sqrt{4x(y_1 + y_2 - y_1 y_2) - [(1 - y_1) + x(1 - y_2)]^2}}{2x(y_1 x + y_2)},$$

et l'on en déduit l'expression explicite de la densité limite :

$$p_{y_1, y_2}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x(y_1 + y_2 - y_1 y_2) - [(1 - y_1) + x(1 - y_2)]^2}}{2\pi x(y_1 x + y_2)}, & \text{si } \Delta < 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Le support de p s'identifie naturellement à l'ensemble $\{x > 0 : \Delta < 0\}$, lequel constitue un intervalle $[x_-, x_+]$, où $x_{\pm}$ désignent les racines positives du trinôme $\Delta = 0$.

Un calcul algébrique, mené de façon élémentaire, révèle que ces racines coïncident exactement avec les valeurs

$$a = \left(\frac{1 - \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2}}{1 - y_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad b = \left(\frac{1 + \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2}}{1 - y_2} \right)^2.$$

De plus, pour tout $x \in [a, b]$, on dispose de l'identité remarquable :

$$4x(y_1 + y_2 - y_1 y_2) - [(1 - y_1) + x(1 - y_2)]^2 = (1 - y_2)^2(b - x)(x - a).$$

En reportant cette factorisation dans (2.10), on retrouve terme à terme la densité (2.1) énoncée dans le théorème .

Masse ponctuelle à l'origine

Pour la détermination d'un éventuel atome en 0, on exploite le comportement asymptotique de $zs_F(z)$ lorsque $z = u + iv \rightarrow 0$ avec $v > 0$: on a $zs_F(z) \rightarrow -F(\{0\})$. Cela découle de $zs_F(z) = \int \frac{z}{t-z} dF(t) = - \int \frac{1}{1-t/z} dF(t)$, dont la limite en $z \rightarrow 0$ isole la masse en $t = 0$ par convergence dominée.

Un calcul analogue de la partie imaginaire fournit cette fois :

$$\Im((1 - y_1 + z(1 - y_2))^2 - 4z) = 2v[(1 - y_1 + u(1 - y_2))(1 - y_2) - 2] < 0.$$

Il s'ensuit que $\Re(\sqrt{(1 - y_1 + z(1 - y_2))^2 - 4z}) < 0$, ce qui implique que

$$\sqrt{(1 - y_1 + z(1 - y_2))^2 - 4z} \rightarrow -|1 - y_1| \quad \text{quand } z \rightarrow 0.$$

Par conséquent, la masse de l'atome en 0 vaut :

$$F(\{0\}) = - \lim_{z \rightarrow 0} zs_F(z) = 1 - \frac{1}{y_1} + \frac{1 - y_1 + |1 - y_1|}{2y_1} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y_1}, & \text{si } y_1 > 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat s'interprète naturellement : lorsque $y_1 > 1$, la matrice $S_n T_n$ possède $p - n_1$ valeurs propres nulles, ce qui explique la présence d'un atome de masse $1 - \frac{1}{y_1}$ à l'origine. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Chapitre 3

Applications de la LSD de Fisher par Intégrale de Contour

Introduction

Ce chapitre est consacré au calcul explicite des fonctionnelles spectrales linéaires associées à la distribution spectrale limite (LSD) de la matrice de Fisher. L'objectif principal est d'exploiter la représentation par intégrale de contour, établie au chapitre précédent, afin d'évaluer de manière rigoureuse des intégrales de la forme :

$$\int_a^b f(x) dF_{y_1, y_2}(x)$$

où f est une fonction analytique sur un domaine contenant le support $[a, b]$ de la LSD de Fisher F_{y_1, y_2} .

L'idée centrale repose sur un passage du calcul réel au calcul complexe, en substituant l'intégrale réelle par une intégrale sur un contour fermé dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on ramène l'évaluation de ces fonctionnelles à un simple calcul de résidus. Cette approche, à la fois élégante et systématique, permet d'obtenir des expressions explicites et fermées pour des quantités spectrales fondamentales telles que la moyenne, la variance et la fonctionnelle logarithmique de la LSD.

Les résultats développés dans ce chapitre constituent ainsi un outil analytique puissant pour l'étude asymptotique du spectre des grandes matrices aléatoires de type Fisher.

3.1 Rappels sur la distribution de Fisher

Le théorème [2] affirme que sous le régime asymptotique $p/n_1 \rightarrow y_1 > 0$ et $p/n_2 \rightarrow y_2 \in (0, 1)$, la distribution spectrale empirique de $F_n = S_1 S_2^{-1}$ converge presque sûrement vers F_{y_1, y_2} , dont la densité est donnée par :

$$p_{y_1, y_2}(x) = \frac{1 - y_2}{2\pi x(y_1 + y_2 x)} \sqrt{(b - x)(x - a)}, \quad x \in [a, b],$$

où les paramètres du support sont définis par :

$$h = \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2}, \quad a = \frac{(1 - h)^2}{(1 - y_2)^2}, \quad b = \frac{(1 + h)^2}{(1 - y_2)^2}.$$

3.1.1 Formule intégrale de contour pour la loi de Fisher

Théorème 7 ([12]). *soit f une fonction analytique sur un domaine ouvert contenant le support $[a, b]$ de F_{y_1, y_2} . Alors l'intégrale de f par rapport à la LSD de Fisher admet la représentation exacte suivante :*

$$\int_a^b f(x) dF_{y_1, y_2}(x) = -\frac{h^2(1-y_2)}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f\left(\frac{|1+hz|^2}{(1-y_2)^2}\right) (1-z^2)^2 dz}{z(1+hz)(z+h)(y_2z+h)(y_2+hz)} \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.1. *La formule (3.1) constitue un outil central dans l'analyse spectrale des grandes matrices aléatoires : elle transforme le calcul de toute fonctionnelle linéaire de la LSD de Fisher en un problème d'analyse complexe, directement traitable par le théorème des résidus.*

Démonstration. La preuve repose sur un changement de variable trigonométrique suivi d'un passage au contour complexe via la substitution $z = e^{i\theta}$.

Commençons par la mise en place du changement de variable. Posons, pour $\theta \in (0, \pi)$, la substitution :

$$x(\theta) = \frac{1+h^2+2h\cos\theta}{(1-y_2)^2}, \quad a = \frac{(1-h)^2}{(1-y_2)^2}, \quad b = \frac{(1+h)^2}{(1-y_2)^2} \quad (3.2)$$

On vérifie immédiatement que $x(0) = b$ et $x(\pi) = a$, confirmant que θ parcourt $(0, \pi)$ lorsque x parcourt (a, b) en sens inverse.

Avec une transformation de l'élément d'intégration. En développant $x(\theta) - a$ et $b - x(\theta)$ à partir de (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} x - a &= \frac{1+h^2+2h\cos\theta}{(1-y_2)^2} - \frac{(1-h)^2}{(1-y_2)^2} \\ &= \frac{1+h^2+2h\cos\theta - (1-2h+h^2)}{(1-y_2)^2} \\ &= \frac{2h(1+\cos\theta)}{(1-y_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De même :

$$\begin{aligned} b - x &= \frac{(1+h)^2}{(1-y_2)^2} - \frac{1+h^2+2h\cos\theta}{(1-y_2)^2} \\ &= \frac{1+2h+h^2 - 1 - h^2 - 2h\cos\theta}{(1-y_2)^2} \\ &= \frac{2h(1-\cos\theta)}{(1-y_2)^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le produit de (3.3) et (3.4), combiné à l'identité trigonométrique $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$,

fournit :

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-a)(b-x)} &= \sqrt{\frac{2h(1+\cos\theta)}{(1-y_2)^2} \cdot \frac{2h(1-\cos\theta)}{(1-y_2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4h^2(1-\cos^2\theta)}{(1-y_2)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4h^2\sin^2\theta}{(1-y_2)^4}}.\end{aligned}$$

On conclut que :

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{2h\sin\theta}{(1-y_2)^2}. \quad (3.5)$$

La différentiation de (3.2) par rapport à θ donne :

$$dx = \frac{-2h\sin\theta}{(1-y_2)^2} d\theta. \quad (3.6)$$

Le signe négatif dans (3.6) traduit le fait que x est une fonction décroissante de θ sur $(0, \pi)$.

En suite on procède à une substitution dans l'intégrale. Par définition de la LSD de Fisher, on écrit :

$$I = \int_a^b f(x) p_{y_1, y_2}(x) dx = \int_a^b \frac{(1-y_2)f(x)}{2\pi x(y_1+y_2x)} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx.$$

En injectant simultanément (3.5) et (3.6), et en notant que les bornes s'inversent ($x = a \Rightarrow \theta = \pi$, $x = b \Rightarrow \theta = 0$), on obtient :

$$I = \int_{\pi}^0 \frac{(1-y_2)f(x)}{2\pi x(y_1(1-y_2)^2 + y_2x)} \cdot \frac{2h\sin\theta}{(1-y_2)^2} \cdot \frac{-2h\sin\theta}{(1-y_2)^2} d\theta$$

Le signe négatif de dx rétablit le sens naturel d'intégration $[0, \pi]$. En regroupant les constantes et en simplifiant les puissances de $(1-y_2)$, on arrive à :

$$I = \frac{2h^2(1-y_2)}{\pi(1-y_2)^4} \int_0^{\pi} \frac{f(x(\theta))\sin^2\theta}{x(\theta)(y_1(1-y_2)^2 + y_2x(\theta))} d\theta.$$

En remplaçant $x(\theta) = \frac{1+h^2+2h\cos\theta}{(1-y_2)^2}$ dans le dénominateur, le terme $y_1(1-y_2)^2 + y_2x$ devient :

$$y_1(1-y_2)^2 + y_2x = y_1(1-y_2)^2 + \frac{y_2(1+h^2+2h\cos\theta)}{(1-y_2)^2} = \frac{y_1(1-y_2)^4 + y_2(1+h^2+2h\cos\theta)}{(1-y_2)^2}.$$

Le produit $x \cdot (y_1(1-y_2)^2 + y_2x)$ se développe alors :

$$\begin{aligned}x \cdot (y_1(1-y_2)^2 + y_2x) &= \frac{1+h^2+2h\cos\theta}{(1-y_2)^2} \cdot \frac{y_1(1-y_2)^4 + y_2(1+h^2+2h\cos\theta)}{(1-y_2)^2} \\ &= \frac{(1+h^2+2h\cos\theta)(y_1(1-y_2)^4 + y_2(1+h^2+2h\cos\theta))}{(1-y_2)^4}.\end{aligned}$$

En substituant dans I et en simplifiant les facteurs $(1 - y_2)^4$, on aboutit à :

$$I = \frac{2h^2(1 - y_2)}{\pi} \int_0^\pi \frac{f\left(\frac{1 + h^2 + 2h \cos \theta}{(1 - y_2)^2}\right) \sin^2 \theta d\theta}{(1 + h^2 + 2h \cos \theta)(y_1(1 - y_2)^4 + y_2(1 + h^2 + 2h \cos \theta))}.$$

L'intégrande étant symétrique par rapport à $\theta = \pi$, on étend l'intégration à $[0, 2\pi]$ en divisant par 2 :

$$I = \frac{h^2(1 - y_2)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(\frac{1 + h^2 + 2h \cos \theta}{(1 - y_2)^2}\right) \sin^2 \theta d\theta}{(1 + h^2 + 2h \cos \theta)(y_1(1 - y_2)^4 + y_2(1 + h^2 + 2h \cos \theta))}. \quad (3.7)$$

A la fin on passe au contour complexe. On introduit $z = e^{i\theta}$ sur le cercle unité $|z| = 1$. Les trois identités fondamentales suivantes et le fait que f est analytique permettent de réécrire chaque terme de (3.7) en fonction de z :

$$|1 + hz|^2 = 1 + h^2 + 2h \cos \theta, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

La première identité se vérifie en développant :

$$|1 + hz|^2 = (1 + hz)(1 + h\bar{z}) = (1 + he^{i\theta})(1 + he^{-i\theta}) = 1 + h^2 + h(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 1 + h^2 + 2h \cos \theta.$$

La deuxième découle directement de la formule d'Euler $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, qui donne $z - z^{-1} = 2i \sin \theta$.

La troisième s'obtient en différentiant $z = e^{i\theta}$, ce qui donne $dz = iz d\theta$, soit $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

En combinant ces trois substitutions, l'élément $\sin^2 \theta d\theta$ se transforme en :

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta d\theta &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2 \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{(z - z^{-1})^2}{-4} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{-(z^2 - 1)^2}{4iz^3} dz = \frac{(1 - z^2)^2}{4iz^3} dz. \end{aligned}$$

De plus, sur $|z| = 1$, la relation $\bar{z} = z^{-1}$ permet de factoriser $|1 + hz|^2$ sous la forme :

$$|1 + hz|^2 = (1 + hz)(1 + hz^{-1}) = (1 + hz) \cdot \frac{z + h}{z} = \frac{(1 + hz)(z + h)}{z}$$

ce qui factorise le dénominateur en produit de termes linéaires en z .

En regroupant l'ensemble de ces substitutions dans (3.7), le facteur $\frac{h^2(1 - y_2)}{\pi}$ combiné avec $\frac{1}{4iz}$ donne le préfacteur global $-\frac{h^2(1 - y_2)}{4\pi i}$. Le dénominateur se factorise complètement en :

$$z(1 + hz)(z + h)(y_2 z + h)(y_2 + hz).$$

On obtient ainsi la représentation en intégrale de contour annoncée :

$$\int_a^b f(x) dF_{y_1, y_2}(x) = -\frac{h^2(1 - y_2)}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f\left(\frac{|1 + hz|^2}{(1 - y_2)^2}\right) (1 - z^2)^2 dz}{z(1 + hz)(z + h)(y_2 z + h)(y_2 + hz)}.$$

□

3.2 Calcul des moments et de la variance

Dans cette section, nous appliquons la formule d'intégrale de contour du Théorème 7 pour calculer explicitement les moments de la loi de Fisher F_{y_1, y_2} , en choisissant successivement $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$.

Exemple 3.1 (Premier moment : Espérance de F_{y_1, y_2}). On pose $f(x) = x$ dans le Théorème 7 :

$$\int_a^b x dF_{y_1, y_2}(x) = -\frac{h^2(1-y_2)}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{|1+hz|^2}{(1-y_2)^2} (1-z^2)^2 dz}{z(1+hz)(z+h)(y_2z+h)(y_2+hz)}.$$

Sur $|z| = 1$, on utilise la factorisation $|1+hz|^2 = \frac{(1+hz)(z+h)}{z}$, ce qui simplifie l'intégrande en :

$$-\frac{h^2}{4\pi i(1-y_2)} \oint_{|z|=1} \frac{(1-z^2)^2 dz}{z^2(y_2z+h)(y_2+hz)}.$$

Les pôles à l'intérieur de $|z| = 1$ sont $z = 0$ (ordre 2) et $z = -y_2/h$ (simple), puisque $h^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(1 - y_2) > 0$ entraîne $h > y_2$, donc $|-h/y_2| = h/y_2 > 1$ (extérieur) tandis que $|-y_2/h| = y_2/h < 1$ (intérieur). Le calcul des résidus donne :

$$\text{Res}_{z=0} = -\frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{h^2}, \quad \text{Res}_{z=-y_2/h} = \frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{h^2},$$

soit une somme $-2/h^2$. Par le théorème des résidus :

$$\int_a^b x dF_{y_1, y_2}(x) = -\frac{h^2}{2(1-y_2)} \left(-\frac{2}{h^2}\right) = \frac{1}{1-y_2}.$$

Exemple 3.2 (Second moment de F_{y_1, y_2}). On pose $f(x) = x^2$ dans le Théorème 7 :

$$\int_a^b x^2 dF_{y_1, y_2}(x) = -\frac{h^2(1-y_2)}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{|1+hz|^4}{(1-y_2)^4} (1-z^2)^2 dz}{z(1+hz)(z+h)(y_2z+h)(y_2+hz)}.$$

En utilisant $|1+hz|^4 = \frac{(1+hz)^2(z+h)^2}{z^2}$ sur $|z| = 1$, on simplifie :

$$-\frac{h^2(1-y_2)}{4\pi i(1-y_2)^4} \oint_{|z|=1} \frac{(1+hz)(z+h)(1-z^2)^2}{z^3(y_2z+h)(y_2+hz)} dz.$$

On factorise le dénominateur :

$$-\frac{h}{2(1-y_2)^3 y_2} \oint_{|z|=1} \frac{(1+hz)(z+h)(1-z^2)^2}{z^3(z+h/y_2)(z+y_2/h)} dz.$$

Les pôles à l'intérieur de $|z| = 1$ sont :

$z = 0$: pôle d'ordre 3.

$z = -y_2/h$: pôle simple, car $h > y_2$ implique $|y_2/h| < 1$.

Par le théorème des résidus :

$$\frac{-h}{2(1-y_2)^3 y_2} \left\{ \frac{(1+hz)(z+h)(1-z^2)^2}{z^3(z+h/y_2)} \Big|_{z=-y_2/h} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{(1+hz)(z+h)(1-z^2)^2}{(z+h/y_2)(z+y_2/h)} \Big|_{z=0} \right\}$$

Après calcul et simplification :

$$\frac{-h}{2y_2(1-y_2)^3} \left\{ \frac{(1-y_2)(h^2-y_2)(y_2^2-h)}{hy_2^2} - 2h - (1+h^2-y_2-h^2/y_2) \frac{y_2^2+h^2}{hy_2} \right\}$$

On conclut :

$$\int_a^b x^2 dF_{y_1, y_2}(x) = \frac{h^2 + 1 - y_2}{(1 - y_2)^3}.$$

Variance spectrale. En combinant les deux exemples précédents :

$$\sigma^2 = \int x^2 dF_{y_1, y_2}(x) - \left(\int x dF_{y_1, y_2}(x) \right)^2 = \frac{h^2 + 1 - y_2}{(1 - y_2)^3} - \frac{1}{(1 - y_2)^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{(1 - y_2)^3},$$

où $h = \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2}$.

3.3 Spécialisation à la loi de Marchenko-Pastur

On montre ici que la loi de Marchenko-Pastur est un cas limite de la loi de Fisher lorsque $y_2 \rightarrow 0$.

Proposition 3.1 ([12]). Lorsque $y_2 \rightarrow 0$ et $y_1 \rightarrow y > 0$, la densité de la LSD de Fisher $p_{y_1, y_2}(x)$ converge vers la densité de la loi de Marchenko-Pastur d'indice y , donnée par :

$$p_{\text{MP}, y}(x) = \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi y x}, \quad x \in [a, b]$$

où $a = (1 - \sqrt{y})^2$ et $b = (1 + \sqrt{y})^2$.

Démonstration. Lorsque $y_2 \rightarrow 0$, le paramètre auxiliaire devient :

$$h = \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2} \xrightarrow{y_2 \rightarrow 0} \sqrt{y_1} = \sqrt{y}$$

Les bornes du support de la LSD de Fisher deviennent :

$$a = \frac{(1-h)^2}{(1-y_2)^2} \xrightarrow{y_2 \rightarrow 0} (1-\sqrt{y})^2, \quad b = \frac{(1+h)^2}{(1-y_2)^2} \xrightarrow{y_2 \rightarrow 0} (1+\sqrt{y})^2$$

ce qui coïncide exactement avec le support de la loi de Marchenko-Pastur. De plus, la densité de Fisher :

$$p_{y_1, y_2}(x) = \frac{(1-y_2)\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi x(y_1 + y_2 x)} \xrightarrow{y_2 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi y x} = p_{\text{MP}, y}(x)$$

□

Proposition 3.2 ([12]). Soit F_y la distribution de Marchenko-Pastur standard d'indice $y > 0$ et de paramètre d'échelle $\sigma^2 = 1$. Pour toute fonction f analytique sur un domaine contenant le support $[a, b] = [(1 - \sqrt{y})^2, (1 + \sqrt{y})^2]$, on a :

$$\int_a^b f(x) dF_y(x) = -\frac{1}{4\pi i} \oint_{|z|=1} f(|1 + \sqrt{y} z|^2) \frac{(1 - z^2)^2}{z^2 (1 + \sqrt{y} z) (z + \sqrt{y})} dz$$

Démonstration. Lorsque $y_2 \rightarrow 0$ et $y_1 \rightarrow y > 0$, le paramètre auxiliaire devient :

$$h = \sqrt{y_1 + y_2 - y_1 y_2} \xrightarrow{y_2 \rightarrow 0} \sqrt{y}$$

En substituant $h = \sqrt{y}$ et $y_2 = 0$ dans le Théorème 7 :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF_{y_1, y_2}(x) &= -\frac{h^2(1 - y_2)}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f\left(\frac{|1 + hz|^2}{(1 - y_2)^2}\right) (1 - z^2)^2}{z(1 + hz)(z + h)(y_2 z + h)(y_2 + hz)} dz \\ &= -\frac{y \cdot 1}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(|1 + \sqrt{y} z|^2) (1 - z^2)^2}{z(1 + \sqrt{y} z)(z + \sqrt{y})(\sqrt{y})(\sqrt{y} z)} dz. \end{aligned}$$

On simplifie les facteurs $\sqrt{y}$ au dénominateur, sachant que $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} z = y z$:

$$= -\frac{y}{4\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(|1 + \sqrt{y} z|^2) (1 - z^2)^2}{y z^2 (1 + \sqrt{y} z)(z + \sqrt{y})} dz.$$

Les facteurs y se simplifient et on obtient :

$$\int_a^b f(x) dF_y(x) = -\frac{1}{4\pi i} \oint_{|z|=1} f(|1 + \sqrt{y} z|^2) \frac{(1 - z^2)^2 dz}{z^2 (1 + \sqrt{y} z)(z + \sqrt{y})}.$$

□

3.4 Illustrations numériques

Dans cette section, nous présentons des simulations numériques qui confirment les résultats théoriques établis.

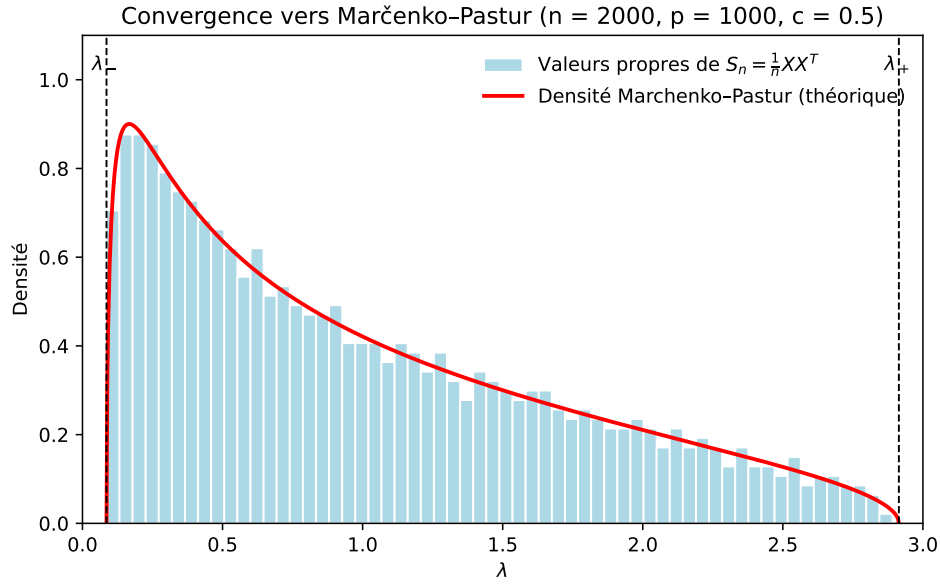


FIGURE 3.1 – Convergence vers la loi de Marchenko-Pastur ($n = 500$, $p = 250$, $c = 0,5$) : l’histogramme bleu des valeurs propres de $S_n = \frac{1}{n}XX^T$ suit parfaitement la densité théorique rouge (Théorème 3).

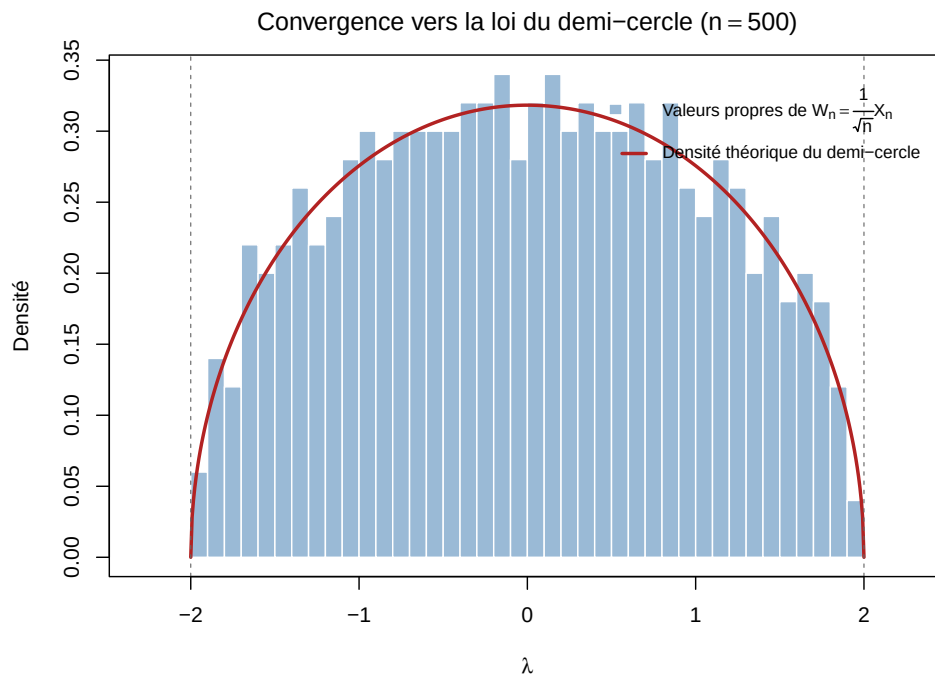


FIGURE 3.2 – Convergence vers la loi du demi-cercle ($n = 500$) : les valeurs propres de $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}X_n$ convergent vers la densité théorique (Théorème 2).

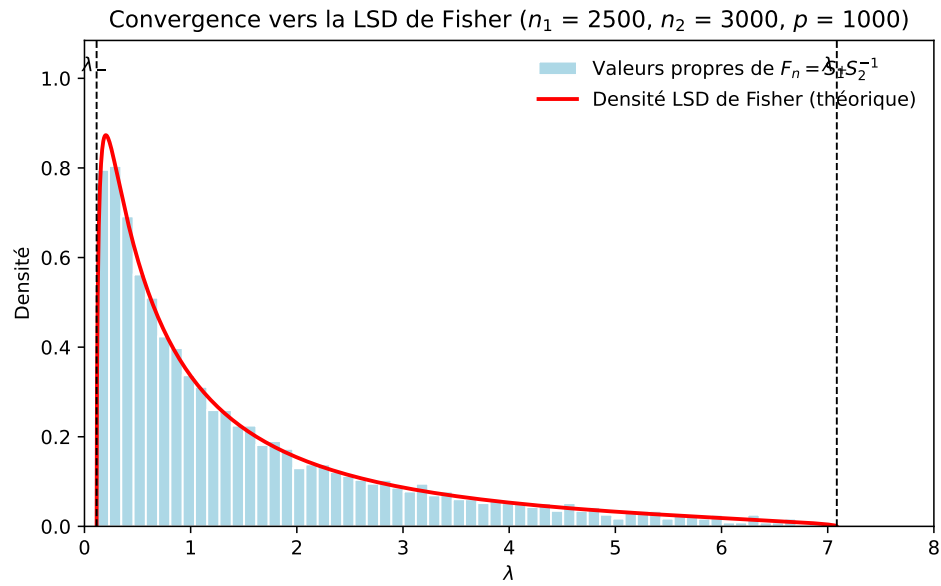


FIGURE 3.3 – Convergence vers la LSD de Fisher ($n_1 = 500, n_2 = 600, p = 200, y_1 = 0,4, y_2 = 0,33$) : les valeurs propres de $F_n = S_1 S_2^{-1}$ coïncident avec la densité théorique du Théorème 5.

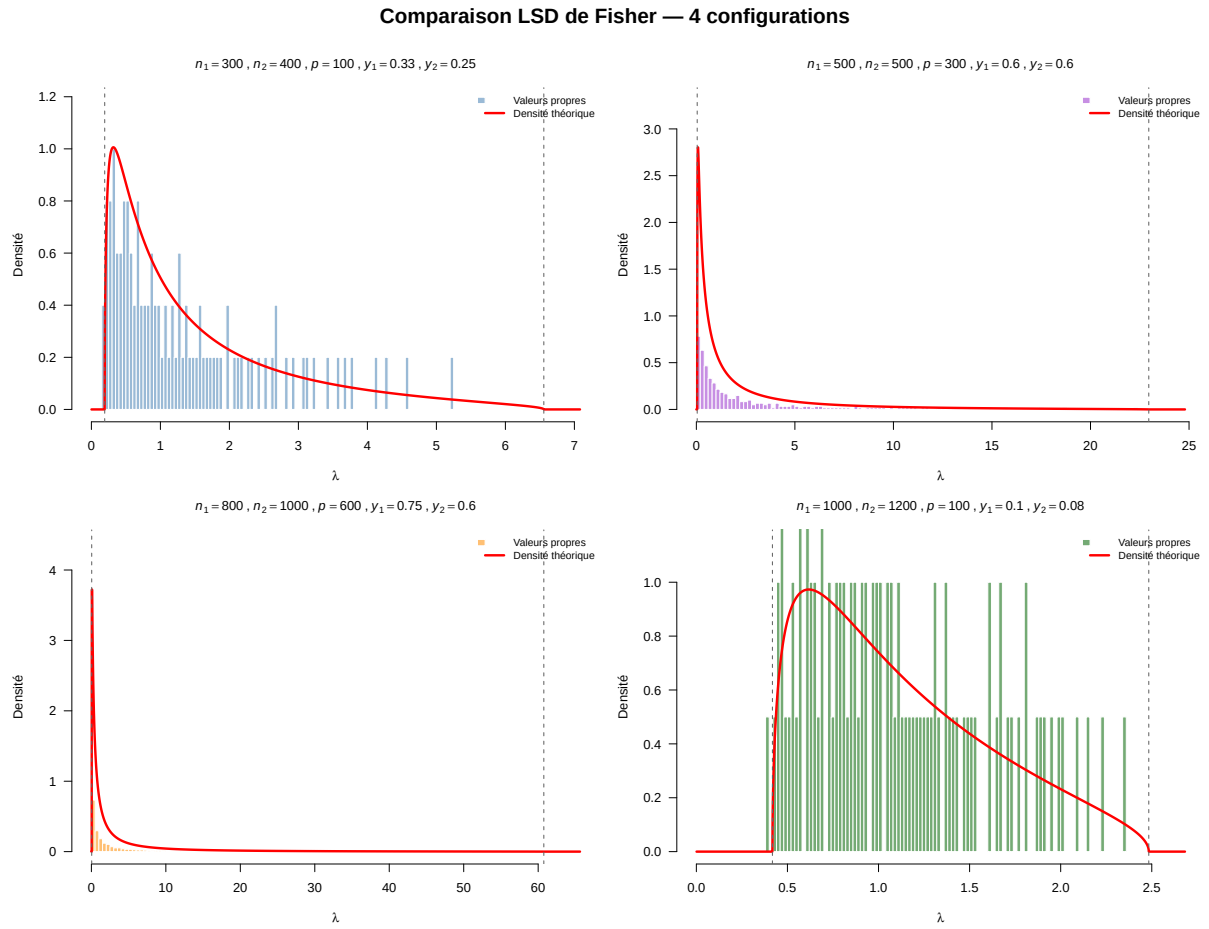


FIGURE 3.4 – Comparaison de la LSD de Fisher pour quatre configurations de paramètres différentes. On observe l'influence des ratios $y_1 = p/n_1$ et $y_2 = p/n_2$ sur la forme et le support de la densité limite.

Conclusion Générale

Ce mémoire avait pour objectif de déterminer, de manière explicite, la distribution spectrale limite de la matrice de Fisher, un outil statistique central pour comparer la structure de covariance de deux populations en grande dimension, là où les méthodes classiques perdent leur validité.

Le cadre conceptuel nécessaire à cette étude a d'abord été mis en place : les modèles de matrices aléatoires Wigner, Wishart et covariance empirique, ainsi que les deux outils qui structurent l'ensemble de la démarche, la méthode des moments et la transformation de Stieltjes. L'établissement de la loi du demi-cercle pour les matrices de Wigner, puis de la loi de Marchenko-Pastur pour les matrices de covariance, a permis d'illustrer sur des cas désormais classiques le phénomène central de la théorie : la stabilisation asymptotique du spectre autour d'une mesure déterministe, indépendante de la loi précise des coefficients.

Le cœur du travail réside dans la démonstration de la loi spectrale limite de la fonction de répartition empirique de la matrice de Fisher, combinant méthode des moments, analyse complexe et transformée de Stieltjes pour obtenir la densité explicite et la masse ponctuelle à l'origine.

Ce résultat a ensuite été exploité par l'établissement d'une formule générale d'intégration de contour, obtenue par un changement de variable trigonométrique, qui ramène le calcul de toute fonctionnelle linéaire de la LSD de Fisher à un problème de résidus. Son application au premier et au second moment a fourni des expressions de l'espérance et de la variance spectrales, et un passage à la limite a permis de retrouver la loi de Marchenko-Pastur comme cas particulier de la loi de Fisher, confirmant la cohérence de l'ensemble de la construction. Les simulations numériques présentées corroborent, dans chaque cas, la théorie développée.

Au-delà du résultat obtenu, ce mémoire illustre la complémentarité de trois approches : combinatoire, analytique complexe et probabiliste, dans l'étude des grandes matrices aléatoires.

Bibliographie

- [1] Z. Bai and J. W. Silverstein, “CLT for Linear Spectral Statistics of Large-Dimensional Sample Covariance Matrices,” *The Annals of Probability*, vol. 32, no. 1A, pp. 553–605, 2004.
- [2] Z. Bai and J. W. Silverstein, *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*, 2nd ed., Springer, New York, 2010.
- [3] Z. D. Bai and Y. Q. Yin, “Limit of the Smallest Eigenvalue of a Large-Dimensional Sample Covariance Matrix,” *The Annals of Probability*, vol. 21, no. 3, pp. 1275–1294, 1993.
- [4] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, 8th ed., McGraw-Hill, New York, 2008.
- [5] M. Capitaine, *Introduction aux grandes matrices aléatoires*, Cours M2R, Institut de Mathématiques de Toulouse, CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2012–2013.
- [6] V. A. Marchenko and L. A. Pastur, “Distribution of Eigenvalues for Some Sets of Random Matrices,” *Matematicheskii Sbornik*, vol. 114, no. 4, pp. 507–536, 1967.
- [7] J. W. Silverstein, “The Limiting Eigenvalue Distribution of a Multivariate F Matrix,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 16, no. 3, pp. 641–646, 1985.
- [8] J. W. Silverstein and S. I. Choi, “Analysis of the Limiting Spectral Distribution of Large-Dimensional Random Matrices,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 54, no. 2, pp. 295–309, 1995.
- [9] T. Tao, *Topics in Random Matrix Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 132, American Mathematical Society, Providence, 2012.
- [10] K. W. Wachter, “The Limiting Empirical Measure of Multiple Discriminant Ratios,” *The Annals of Statistics*, vol. 8, no. 5, pp. 937–957, 1980.
- [11] E. P. Wigner, “Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions,” *Annals of Mathematics*, vol. 62, no. 3, pp. 548–564, 1955.
- [12] J. Yao, S. Zheng and Z. Bai, *Large Sample Covariance Matrices and High-Dimensional Data Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [13] S. Zheng, “Central Limit Theorems for Linear Spectral Statistics of Large Dimensional F-Matrices,” *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, vol. 48, no. 2, pp. 444–476, 2012.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la distribution spectrale limite (LSD) de la matrice de Fisher $F_n = S_1 S_2^{-1}$, produit d'une matrice de covariance empirique par l'inverse d'une seconde matrice de covariance empirique indépendante, en régime de grande dimension où $p/n_1 \rightarrow y_1 > 0$ et $p/n_2 \rightarrow y_2 \in (0, 1)$. Dans un premier temps, nous rappelons les modèles fondamentaux de matrices aléatoires (Wigner, Wishart, covariance empirique) ainsi que les deux outils qui structurent la démarche, à savoir la méthode des moments et la transformée de Stieltjes, avant de présenter la loi du demi-cercle, la loi de Marchenko–Pastur et sa version généralisée. Dans un second temps, nous démontrons le théorème de la LSD de Fisher en combinant l'identification combinatoire des moments limites, la fonction génératrice des moments, l'intégration de contour et le théorème des résidus, ce qui conduit à la transformée de Stieltjes puis, par la formule d'inversion, à la densité explicite de la loi limite, ainsi qu'à une masse ponctuelle en 0 lorsque $y_1 > 1$. Enfin, nous établissons une formule générale d'intégrale de contour permettant de calculer toute fonctionnelle linéaire de cette loi, dont nous déduisons l'espérance et la variance spectrales, et nous retrouvons la loi de Marchenko–Pastur comme cas limite lorsque $y_2 \rightarrow 0$. Des simulations numériques viennent corroborer les résultats théoriques obtenus.

Mots-clés : matrices aléatoires, matrice de Fisher, distribution spectrale limite, transformée de Stieltjes, méthode des moments, intégrale de contour, théorème des résidus, loi de Marchenko–Pastur.

Abstract

This dissertation is devoted to the study of the limiting spectral distribution (LSD) of the Fisher matrix $F_n = S_1 S_2^{-1}$, defined as the product of a sample covariance matrix by the inverse of a second, independent sample covariance matrix, in the high-dimensional regime where $p/n_1 \rightarrow y_1 > 0$ and $p/n_2 \rightarrow y_2 \in (0, 1)$. We first recall the fundamental models of random matrices (Wigner, Wishart, sample covariance) together with the two tools underlying the approach, namely the method of moments and the Stieltjes transform, before presenting the semicircle law, the Marchenko–Pastur law and its generalized version. We then prove the LSD theorem for the Fisher matrix by combining the combinatorial identification of the limiting moments, the moment generating function, contour integration and the residue theorem, which leads to the Stieltjes transform and, through the inversion formula, to the explicit density of the limiting law, as well as to a point mass at 0 when $y_1 > 1$. Finally, we establish a general contour-integral formula that makes it possible to compute any linear spectral statistic of this law, from which we derive the spectral mean and variance, and we recover the Marchenko–Pastur law as a limiting case when $y_2 \rightarrow 0$. Numerical simulations corroborate the theoretical results.

Keywords : random matrices, Fisher matrix, limiting spectral distribution, Stieltjes transform, method of moments, contour integral, residue theorem, Marchenko–Pastur law.

ملخص

تُخصّص هذه المذكرة لدراسة التوزيع الطيفي الحدي (LSD) لمصفوفة فيشر $F_n = S_1 S_2^{-1}$ ، وهي جداء مصفوفة التغيرات التجريبية في مقلوب مصفوفة تغيرات تجريبية ثانية مستقلة عنها، وذلك في نظام الأبعاد الكبيرة حيث $p/n_1 \rightarrow y_1 > 0$ و $p/n_2 \rightarrow y_2 \in (0,1)$. نستعرض في البداية النماذج الأساسية للمصفوفات العشوائية (ويغفر، ويشارت، مصفوفات التغيرات التجريبية) والأداتين اللتين تقوم عليهما المقاربة، وهما طريقة العزوم وتحويل ستيلتيس، ثم نعرض قانون نصف الدائرة وقانون ماركنكو-باستور وصيغته المعممة. بعد ذلك نبرهن على مبرهنة التوزيع الطيفي الحدي لمصفوفة فيشر بالجمع بين التعداد التوافقي للعزوم الحدية، والدالة المولدة للعزوم، والتكامل الكنتوري، ونظرية البواقي، مما يقود إلى تحويل ستيلتيس ثم، بواسطة صيغة القلب، إلى الكثافة الصريحة للقانون الحدي، مع كتلة نقطية عند الصفر عندما $y_1 > 1$. وأخيراً، نثبت صيغة عامة للتكامل الكنتوري تتيح حساب كل دالة طيفية خطية لهذا القانون، ونستنتج منها الأمل الرياضي والتباين الطيفي، ونستعيد قانون ماركنكو-باستور كحالة حدية عندما $y_2 \rightarrow 0$. وتؤكد المحاكاة العددية النتائج النظرية المحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: المصفوفات العشوائية، مصفوفة فيشر، التوزيع الطيفي الحدي، تحويل ستيلتيس، طريقة العزوم، التكامل الكنتوري، نظرية البواقي، قانون ماركنكو-باستور.