

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr BELKAÏD - TLEMCCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

# INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES ET COMMUTÉS

Adressé aux étudiants niveau : Master ( M 1-2 )

Domaine : Technologie.

Filière : Automatique.

Établi Par :

RAHMOUN Amel

Faculté des Sciences - Ridjani HADDAM

Année 2021.

TÉL: 043 21 63 70 / Tél & Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71

Site Web: [www.fs.univ-tlemcen.dz](http://www.fs.univ-tlemcen.dz)

Email: [vdrpg.facscience@gmail.com](mailto:vdrpg.facscience@gmail.com)



# FACULTÉ DES SCIENCES

## Faculty of Sciences

### كلية العلوم



Faculté des Sciences - Tidjani HADDAM

Tél: 043 21 63 70 / Tél & Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71

Site Web: [www.fs.univ-tlemcen.dz](http://www.fs.univ-tlemcen.dz)

Email: [vdrpg.facscience@gmail.com](mailto:vdrpg.facscience@gmail.com)



---

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## *Remerciements.*

*Louanges à Dieu (que son nom soit sanctifié dans les cieux et sur la terre), grâce à qui toutes les choses ce font, le présent manuscrit ne fait pas exception...*

## *Dédicace*

*Je dédie ce cours à ma fille tant attendue*

*Fatiha Malek.*

*Je t'aime mon bébé.*

---

## Table des matières

Table des matières .....	2
Liste des figures.....	5
Introduction.....	7
Chapitre 1 Notions fondamentales .....	9
1 Concept de stabilité au sens de Lyapunov .....	9
1.1 Définitions .....	9
1.1.1 Equilibre stable.....	9
1.1.2 Equilibre asymptotiquement stable.....	9
1.1.3 Bassin d'attraction.....	10
1.1.4 Equilibre attractif.....	10
1.1.5 Equilibre exponentiellement stable .....	10
1.2 Fonctions de classe $\mathcal{K}$ , $\mathcal{K}^\infty$ , et $\mathcal{KL}$ :.....	11
1.2.1 Quelques faits à propos des fonctions $\mathcal{K}$ , $\mathcal{K}^\infty$ , et $\mathcal{KL}$ :.....	11
1.2.2 Définitions de stabilité grâce aux fonctions $\mathcal{KL}$ :.....	12
1.3 Méthode directe de Lyapunov .....	12
1.4 Théorème inverse de Lyapunov .....	14
1.5 Principe d'invariance de La Salle .....	15
1.5.1 Exemple 1 .....	15
1.5.2 Exemple 2 .....	17
2 Rappels sur les Algèbres de Lie .....	18
2.1 Définition.....	18
2.2 Exemples.....	18
2.3 Classification des algèbres de Lie.....	19
2.4 Critère de Cartan basé sur la forme de Killing.....	19
Chapitre 2 Les systèmes Dynamiques Hybrides.....	20
1 Introduction.....	20
2 Quelques Exemples .....	23
2.1 Exemple 1 : le bac à eau .....	23
2.2 Exemple 2 : le thermostat .....	24
3 Les types de SDH .....	26
3.1 Les sauts autonomes .....	26
3.2 Les sauts contrôlés .....	27

3.3	Commutations autonomes.....	27
3.4	Commutations contrôlées.....	28
4	Etude qualitative .....	28
4.1	Trajectoire temporelle hybride .....	28
4.2	Suite de champs de vecteurs.....	29
4.3	Exécution hybride.....	29
4.3.1	Existence.....	30
4.3.2	Unicité .....	31
4.3.3	Solution qui s'échappe à l'infini en un temps fini .....	32
4.3.4	Non continuité par rapport aux conditions initiales .....	33
4.3.5	Chattering.....	36
4.3.6	Blocage .....	37
4.3.7	Non déterminisme.....	37
4.3.8	Comportement Zénon.....	38
Chapitre 3 Les systèmes commutés .....		39
1	Introduction.....	39
2	Les systèmes commutés.....	40
3	A propos des Solutions des systèmes commutés.....	45
3.1	Equations différentielles ordinaires .....	45
3.2	Le comportement Zénon.....	47
3.3	Les modes glissants .....	49
3.4	Commutations par hystérésis.....	51
Chapitre 4 Stabilité des systèmes commutés.....		53
1	Introduction.....	53
1.1	Exemples.....	53
1.1.1	Exemple 1 .....	53
1.1.2	Exemple 2 .....	55
1.1.3	Exemple 3 .....	56
2	Stabilité sous n'importe quelle suite de commutations .....	58
2.1	Concepts de stabilité uniforme .....	58
2.2	Les concepts de stabilité élargis aux systèmes commutés .....	59
2.3	Les fonctions de Lyapunov communes .....	59
2.4	Le théorème inverse de Lyapunov .....	63
2.5	Stabilité des systèmes commutés Linéaires.....	64

---

3	Commutativité et stabilité des systèmes commutés .....	68
3.1	Les systèmes commutant : .....	68
3.1.1	Le cas linéaire .....	68
3.1.2	Le cas non linéaire .....	72
3.2	Algèbres de Lie solvables et Nilpotentes.....	73
3.2.1	Systèmes linéaires .....	73
3.2.2	Systèmes non linéaires .....	76
4	Stabilité sous commutations contraintes.....	76
4.1	Fonctions Multiples de Lyapunov.....	76
4.2	Stabilité sous commutations lentes : .....	79
4.2.1	Le temps de séjours : .....	79
4.3	Stabilité sous des commutations dépendantes de l'état .....	81
	Bibliographie.....	84

---

## Liste des figures

Figure 1: Alexander Lyapunov .....	9
Figure 2: Trajectoire stable.....	9
Figure 3: Résumé des cas possibles de stabilité.....	10
Figure 4 : Fonction de classe $K_\infty$ .....	11
Figure 5: Fonction de classe KL.....	11
Figure 6: Représentation du lemme 2.....	11
Figure 7: Stabilité asymptotique .....	12
Figure 8: Stabilité Exponentielle.....	12
Figure 9: Illustration de la preuve du théorème de Lyapunov.....	13
Figure 10: Le pendule simple .....	15
Figure 11: Stabilité des points d'équilibre du pendule quand $k>0$ .....	17
Figure 12: Stabilité des points d'équilibre du pendule quand $k=0$ .....	17
Figure 13: La convergence n'implique pas la stabilité ! .....	18
Figure 14: Automate à état fini modélisant une machine simple.....	20
Figure 15: Automates temporisé modélisant une machine simple.....	21
Figure 16: Représentation de la dynamique d'un SDH.....	23
Figure 17: Le bac à eau.....	23
Figure 18: Automate à états finis décrivant le bac à eau.....	24
Figure 19: Automate hybride décrivant le bac à eau.....	24
Figure 20: Le thermostat .....	24
Figure 21: Le fonctionnement du thermostat.....	25
Figure 22: Automate hybride modélisant un thermostat.....	25
Figure 23: La solution continue et les transitions discrètes du thermostat.....	26
Figure 24: La balle bondissante.....	26
Figure 25: (a)Automate hybride modélisant la balle bondissante (b) Représentation des solutions continues.....	27
Figure 26: Exemple d'une exécution hybride.....	29
Figure 27: Graphe de la fonction discontinue considérée.....	30
Figure 28: La solution ne quitte plus l'axe des abscisses.....	30
Figure 29: Automate hybride présentant un problème d'existence de l'exécution.....	31
Figure 30: EDO admettant deux solutions.....	31
Figure 31: Graphe des deux solutions possibles de l'EDO considérée.....	31
Figure 34: SDH avec solution qui s'échappe à l'infini.....	33
Figure 32: Graphe de la fonction considérée.....	32
Figure 33: Solution qui s'échappe à l'infini en un temps fini.....	32
Figure 35: SDH de l'exemple 1.....	33
Figure 36: Deux exécutions du SDH de l'exemple 1.....	34
Figure 37: SDH de l'exemple 2.....	34
Figure 38: Deux exécutions du SDH de l'exemple 2.....	34
Figure 39: Illustration des conditions du théorème.....	35
Figure 40: Trajectoire d'un exemple académique.....	35
Figure 41: SDH modélisant l'exemple académique.....	36
Figure 42: SDH présentant un chattering, son exécution et sa représentation graphique.....	36
Figure 43: Thermostat non déterministe.....	38

---

Figure 44: Thermostat présentant un comportement Zéno.....	38
Figure 45: Représentation de l'interaction hybride. ....	39
Figure 46: Une représentation des sauts autonomes. ....	41
Figure 47: Un signal de commutations.....	43
Figure 48: Représentation des solutions du système (1.11).....	48
Figure 49: Point d'accumulation d'une exécution.....	49
Figure 50: La solution réelle du système (1.11). ....	49
Figure 51: (a) Solution qui traverse la surface de commutation. (b) Un mode glissant. ....	50
Figure 52: Hystérésis : (a) Les régions de commutations (b) Une trajectoire typique. ....	51
Figure 53: Switch entre des sous systèmes stables.....	53
Figure 55: Commuter entre des sous systèmes stable donne un système stable. ....	54
Figure 54: Commuter entre des sous systèmes stable donne un système instable. ....	54
Figure 56: Switch entre des sous systèmes instables.....	55
Figure 57: Simulation numérique de l'exemple 2 .....	56
Figure 58: Simulation numérique de l'exemple 3. ....	57
Figure 59: Simulation numérique des deux systèmes de l'exemple 1. ....	61
Figure 60: Simulation numérique des deux systèmes de l'exemple 2. ....	62
Figure 61: Les ellipses de l'exemple. ....	67
Figure 62: Le pire cas de commutations de l'exemple.....	68
Figure 63: Commuter entre deux sous systèmes.....	69
Figure 64: Deux fonctions de Lyapunov. ....	77
Figure 65: Démontrer la stabilité de Lyapunov au théorème 3.1 . ....	79
Figure 66: Un signal de commutation avec temps de séjours. ....	80
Figure 67: Illustration de la stabilité dans l'exemple (3.2). ....	83

---

## Introduction

En abordant le cours des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH), la première question qui vient à l'esprit c'est qu'est-ce qu'un Système Dynamique Hybride ?

Le mot hybride signifie « résultat d'un mélange » ou « hétérogène de composition », mais pour les systèmes dynamiques hybrides, il n'y a pas encore une définition claire et unifiée entre les communautés des automaticiens, des informaticiens et récemment des mathématiciens pour ce type de systèmes ! D'autre part, le besoin d'une bonne connaissance et la nécessité d'une analyse rigoureuse des systèmes modélisant des phénomènes en cours, poussent les scientifiques à élaborer de nouvelles méthodes bien adaptées aux systèmes en investigation, pour éviter tout danger de manipulation pouvant avoir des conséquences désastreuses.

Commençons par le commencement ; les systèmes technologiques de nos jours sont souvent composés d'éléments physiques à dynamique continue, contrôlés par des programmes informatisés implémentés qui répondent mieux à une modélisation par des systèmes à événements discrets.

Quand ces deux dynamiques sont en interaction importante, le comportement du système peut être extraordinairement complexe, même pour des systèmes très simples. Ce comportement ne peut pas être analysé par des méthodes propres au mode continu, ni par celles propres au mode discret, (comme démontré dans (Engell, 2002)). En dépit du manque d'outils de simulation et d'études des SDH, les ingénieurs ont réussi à les traiter au cas par cas, par des méthodes de tâtonnement : « essai et erreurs », « séparation des éléments » ou une combinaison entre les deux, mais le prix à payer était des tests longs à ne plus en finir, des itérations fréquentes et coûteuses dans le processus de design et un manque de fiabilité, une chose totalement impensable en industrie de l'automobile par exemple.

Une autre difficulté spécifique à ce genre de systèmes se traduit par la non uniformité du langage que les chercheurs des différentes disciplines exercent et le besoin d'unifier la terminologie et les concepts se fait de plus en plus urgent.

Revenons à la question de savoir ce qu'est un système hybride.

On définit un système comme étant hybride si et seulement si on ne peut pas l'analyser, le traiter, le simuler, ni par les méthodes propres au mode continu, ni par celles propres au mode discret. Mais cela ne clarifie pas ce qu'est un hybride, d'ailleurs, la plus part des articles dans ce domaine commencent par considérer un système « hybride » et l'étudier, sans jamais dire pourquoi il a été considéré comme tel ! Cette situation est due au fait que les théories du continu et du discret ont été élaborées séparément jusqu'à lors et que les hybrides prennent une place sur la frontière séparant les deux mondes...mais voilà qui est en train de changer.

Le présent tapuscrit se décompose en quatre chapitres. Le premier rassemble les notions fondamentales de la théorie des systèmes dynamiques continus et quelques rappels sur les algèbres de Lie, qui sont utiles pour la suite du document. Nous ne donnons pas de démonstration dans ce chapitre et nous ne nous attardons pas sur les détails, le lecteur intéressé pourra consulter des références spécialisées en la matière.

---

Le deuxième chapitre introduit les systèmes dynamiques hybrides pour que le lecteur se familiarise avec la terminologie correspondante. On y introduit plusieurs exemples et on y présente les notions de dynamique hybride et d'exécution hybride.

Le troisième chapitre traite des systèmes commutés, un cas particulier des systèmes hybrides. Après les définitions nécessaires et les exemples illustratifs, on y présente les différences avec les systèmes (continus) classiques ainsi que les problèmes particuliers engendrés par les commutations.

Enfin, le chapitre quatrième a pour objet l'étude de stabilité des systèmes commutés. Le tour de la question est fait en présentant des exemples et des contre exemples à chaque fois pour fixer les idées et les démonstrations des théorèmes sont données en détails dès que c'est possible.

Des figures et des simulations numériques remplissent ce polycopié car, de mon point de vue, le visuel est un moyen pédagogique extrêmement efficace pour « faire apprendre une notion » ou pour « digérer une information ». Elles ont été effectuées à l'aide de Matlab, puis retouchées pour y insérer des textes explicatifs. J'espère que cette approche plaira au lecteur car elle a nécessité d'innombrables heures de travail !

Dans ce cours, j'ai essayé de présenter ce que j'ai appris de mes lectures et de mes recherches dans ce domaine, de la manière la plus simple et la plus pédagogique possible.

Mon but était de créer un document qui soit lisible par une personne de formation plutôt théorique et qui voudrait s'aventurer dans la recherche sur ce thème.

Le présent document rassemble donc les connaissances absolument fondamentales sur le sujet des systèmes dynamiques hybrides et commutés, en attente d'un deuxième volet qui sera consacré aux résultats avancés de la recherche dans ce domaine.

# Chapitre 1 Notions fondamentales

## 1 Concept de stabilité au sens de Lyapunov

Dans cette partie on rappelle brièvement quelques résultats de la théorie de stabilité de Lyapunov, en considérant les systèmes autonomes :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction localement Lipschitz. On suppose aussi que l'origine est un point d'équilibre du système

(A.1), c'est-à-dire que  $f(0) = 0$  et qu'il est isolé.



Figure 1: Alexander Lyapunov

### 1.1 Définitions

Puisque le système (A.1) est stationnaire, considérons l'instant initial  $t_0 = 0$  sans perte de généralités.

#### 1.1.1 Équilibre stable

L'origine est dite un équilibre stable de (A.1) dans le sens de Lyapunov si

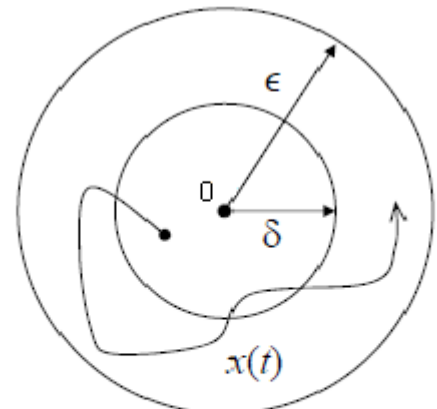
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tels que } |x(0)| \leq \delta \Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Dans ce cas, nous allons simplement dire que le système (A.1) est stable.

#### 1.1.2 Équilibre asymptotiquement stable

L'origine est dite asymptotiquement stable si elle est stable et le  $\delta$  peut être choisi tel que :

$$|x(0)| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$



- 1) Si la solution démarre proche de 0, elle va rester proche de 0 pour toujours.
- 2)  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit, en choisissant  $\delta$  assez petit.

Figure 2: Trajectoire stable

### 1.1.3 Bassin d'attraction

L'ensemble de tous les états initiaux à partir desquels les trajectoires convergent vers l'origine est appelé le bassin d'attraction. Si la condition plus haut est vérifiée pour tout  $\delta$ , c'est-à-dire que l'origine est un équilibre stable et que son bassin d'attraction est l'espace d'état tout entier alors l'origine est dite globalement asymptotiquement stable.

### 1.1.4 Équilibre attractif

Si l'origine n'est pas nécessairement stable mais qu'elle a la propriété que toutes les solutions qui démarrent de ses voisinages convergent vers elle, alors elle est dite (localement) attractive. On dit que le système est globalement attractif si ses solutions convergent vers l'équilibre à partir de toutes les conditions initiales.

### 1.1.5 Équilibre exponentiellement stable

L'origine est dite exponentiellement stable s'il existe des constantes  $\delta, c$  et  $\lambda$  strictement positives telles que

$$|x(0)| \leq \delta \Rightarrow |x(t)| \leq c|x(0)|e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

Si cette estimation de la décroissance exponentielle est vraie pour tous les  $x(0)$ , le système est alors globalement exponentiellement stable. La constante  $\lambda$  dans (A.2) est occasionnellement appelée « marge de la stabilité ».

Résumons quelques cas possibles dans le plan:

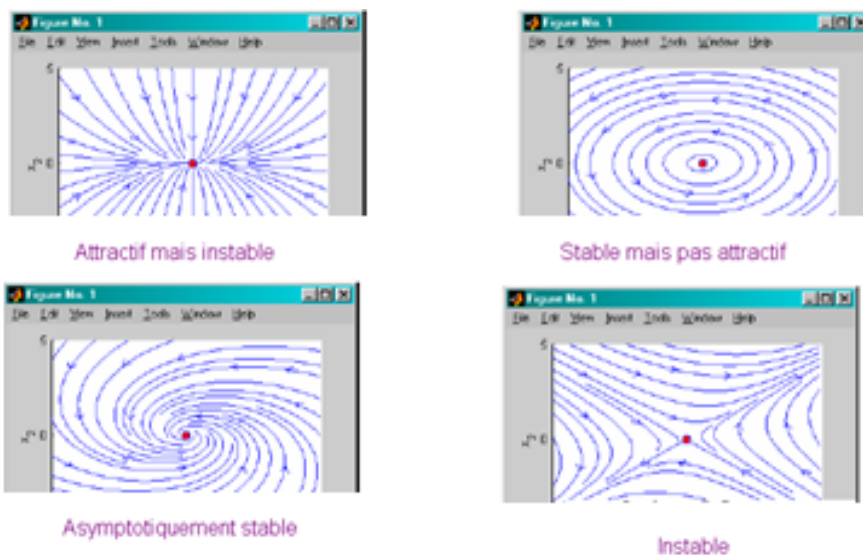


Figure 3: Résumé des cas possibles de stabilité.

## 1.2 Fonctions de classe $\mathcal{K}$ , $\mathcal{K}_\infty$ , et $\mathcal{KL}$ :

- Une fonction  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si elle est continue strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Si de plus  $\alpha$  est non bornée, elle est dite de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

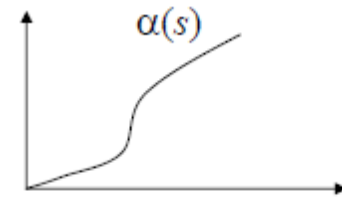


Figure 4 : Fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$

- Une fonction  $\beta : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$  si  $\beta(\cdot, t)$  est de classe  $\mathcal{K}$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\beta(s, t)$  est décroissante vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  pour chaque  $s \geq 0$ .

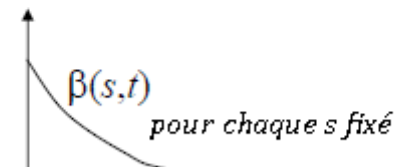
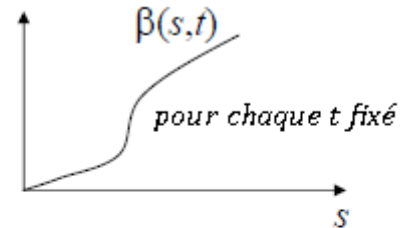


Figure 5: Fonction de classe  $\mathcal{KL}$

### 1.2.1 Quelques faits à propos des fonctions $\mathcal{K}$ , $\mathcal{K}_\infty$ , et $\mathcal{KL}$ :

Voir (Khalil, 2002) par exemple pour plus de détails.

#### Lemme 1

Si  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$  alors  $\alpha(s) = \alpha_1(\alpha_2(s)) \in \mathcal{K}$ .

(de même pour  $\mathcal{K}_\infty$ )

#### Lemme 2

Si  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ , alors  $\alpha$  est inversible et  $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ .

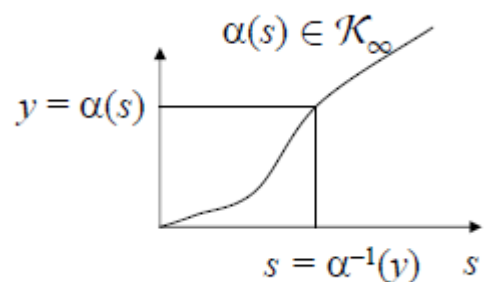


Figure 6: Représentation du lemme 2

#### Lemme 3

Si  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie positive et radialement non bornée alors

$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  telles que  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$ .

$$\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(V(x)) \quad \alpha_2^{-1}(V(x)) \leq \|x\|$$

Une application immédiate de ces classes de fonctions est de réécrire les définitions de stabilité comme suit :

### 1.2.2 Définitions de stabilité à l'aide des fonctions $\mathcal{KL}$ :

- **Stabilité :**

Le système (A.1) est stable si et seulement si, il existe  $\delta > 0$  et une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que toutes les solutions avec  $|x(0)| \leq \delta$  vérifient

$$|x(t)| \leq \alpha(|x(0)|) \quad \forall t \geq 0$$

- **Stabilité asymptotique**

La stabilité asymptotique devient équivalente à l'existence d'une constante  $\delta > 0$  et d'une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telles que toutes les solutions avec  $|x(0)| \leq \delta$  vérifient

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) \quad \forall t \geq 0$$

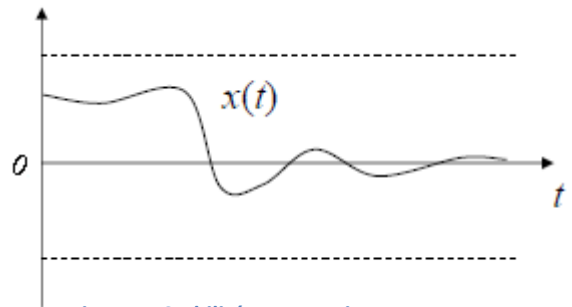


Figure 7: Stabilité asymptotique

- **Stabilité asymptotique globale**

La stabilité asymptotique globale requiert l'existence d'une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que l'inégalité :

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) \quad \forall t \geq 0$$

est vraie pour toutes les conditions initiales.

- **Stabilité exponentielle globale**

La Stabilité exponentielle globale veut dire que la fonction  $\beta$  prend la forme  $\beta(r, s) = cre^{-\lambda s}$  pour certains  $\lambda$ , et  $c > 0$ .

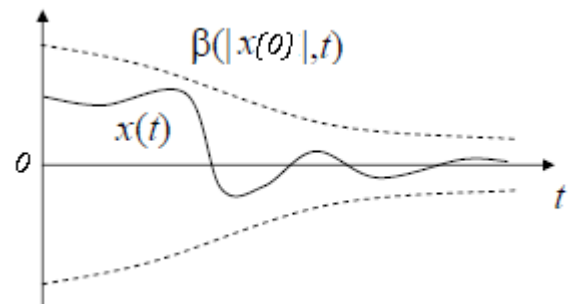


Figure 8: Stabilité Exponentielle

### 1.3 Méthode directe de Lyapunov

(Dite aussi deuxième méthode de Lyapunov)

#### Définition

Considérons une fonction continûment dérivable (de classe  $C^1$ )  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Elle est dite définie positive si  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .
- Si  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ , alors  $V$  est dite radialement non bornée.
- Si  $V$  est en même temps définie positive et radialement non bornée alors il existe deux fonctions de classe  $\mathcal{K}_\infty$   $\alpha_1, \alpha_2$  telles que  $V$  vérifie :

$$\alpha_1|x| \leq V(x) \leq \alpha_2|x| \quad \forall x \quad (\text{A.3})$$

On note par  $\dot{V}$  la dérivée de  $V$  lelong des solutions du système (A.1), c'est-à-dire

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

Le résultat le plus remarquable de la théorie de stabilité de Lyapunov est alors le suivant :

**Théorème A.1 (dit théorème de Lyapunov)**

- *Supposons qu'il existe une fonction définie positive de classe  $C^1$ ,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle la dérivée lelong des solutions du système (A.1) vérifie :*

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall x, \quad \dot{V}(0) = 0 \quad (\text{A.4})$$

*alors le système (A.1) est stable.*

- *Si la dérivée de  $V$  vérifie*

$$\dot{V} < 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \dot{V}(0) = 0 \quad (\text{A.5})$$

*Alors le système est asymptotiquement stable.*

- *Si dans le dernier cas  $V$  est aussi radialement non bornée alors le système (A.1) est globalement asymptotiquement stable.  $\square$*

**Définition**

Une fonction  $V$  définie positive de classe  $C^1$  est appelée *fonction faible de Lyapunov* si elle satisfait l'équation (A.4) et *fonction de Lyapunov* si elle satisfait (A.5). Les conclusions du théorème restent vraies si  $V$  est continue et pas nécessairement  $C^1$  mais quand les inégalités (A.4) et (A.5) sont remplacées par le fait que  $V$  soit décroissante, et strictement décroissante sur les solutions non nulles respectivement.

**Preuve du théorème de Lyapunov**

Premièrement supposons (A.4) vérifiée. Considérons la boule centrée à l'origine de rayon  $\varepsilon > 0$  donné; prenons un nombre positif  $< \min_{|x|=\varepsilon} V(x)$ . Notons par  $\delta$  le rayon d'une boule centrée à l'origine qui soit incluse dans l'ensemble  $\{x : V(x) \leq b\}$  (voir la figure ci-contre). puisque  $V$  est décroissante lelongs des solutions, chaque solution qui démarre dans la petite boule de rayon  $\delta$  vérifie  $V(x(t)) \leq b$ , donc elle reste à l'intérieur de la grande boule de

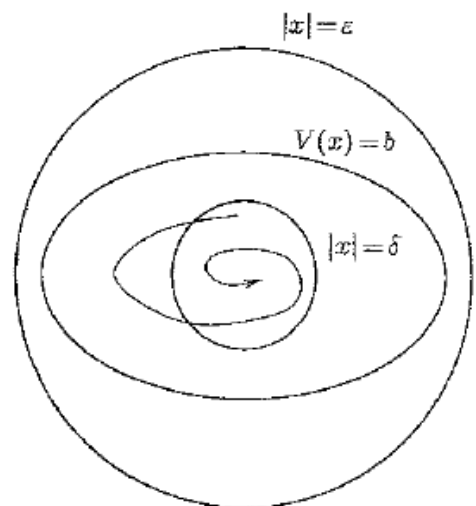


Figure 9: Illustration de la preuve du théorème de Lyapunov.

rayon  $\varepsilon$ , ce qui prouve la stabilité.

Maintenant, prenons une condition initiale arbitraire vérifiant  $|x(0)| \leq \delta$  où  $\delta$  est défini comme précédemment (c'est-à-dire pour un certain  $\varepsilon$ ). Puisque  $V$  est positive, et décroissante le long de la solution correspondante, elle va avoir une limite  $c \geq 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Si nous pouvons montrer que  $c = 0$  alors on aura la stabilité asymptotique (puisque  $V$  est définie positive et que  $x$  reste borné en norme par  $\varepsilon$ ). Supposons que  $c$  est strictement positive, alors la solution ne pourra pas rentrer dans l'ensemble  $\{x : V(x) < c\}$ . Dans ce cas la solution évolue dans un compact qui ne contient pas l'origine, par exemple on peut prendre l'ensemble  $S := \{x : r \leq x \leq \varepsilon\}$  pour un certain  $r$  assez petit. Posons  $d := \max_{x \in S} \dot{V}(x)$ ; ce nombre est bien défini et négatif par (A.5) et la compacité de  $S$ . on a  $\dot{V} \leq d$  donc  $V(t) \leq V(0) + dt$ . Mais alors  $V$  sera éventuellement plus petite que  $c$ , ce qui est une contradiction.

L'argument plus haut est valide localement au voisinage de l'origine parce que l'ensemble à niveaux de  $V$  n'est pas forcément borné, et donc  $\delta$  risque de rester borné quand on fait croître  $\varepsilon$  à l'infini. Si  $V$  est radialement non bornée, alors tous ses ensembles à niveaux seront bornés, on aura  $\delta \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . La stabilité asymptotique globale s'en suit.  $\square$

#### 1.4 Théorème réciproque de Lyapunov

Il y a beaucoup de théorèmes réciproques de Lyapunov qui démontrent que les conditions du théorème A.1 sont aussi nécessaires. Par exemple si le système est asymptotiquement stable alors il existe une fonction  $V$  de classe  $C^1$ , définie positive qui vérifie l'inégalité (A.5).

Il est aussi bien connu que pour les systèmes stationnaires

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{A.6})$$

la stabilité asymptotique, exponentielle, et leurs versions globales sont équivalentes et s'expriment par le fait que la matrice  $A$  soit de Hurwitz (à valeurs propres de parties réelles strictement négatives).

Si on fixe une matrice (arbitraire) symétrique et définie positive  $Q$ , et qu'on trouve la solution de l'équation de Lyapunov unique, symétrique et définie positive  $P$

$$A^T P + P A = -Q$$

alors la fonction définie par  $V(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov quadratique dont la dérivée le long des solutions du système s'écrit  $\dot{V} = -x^T Q x$ .

La formule explicite pour  $P$  est  $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ , en effet, on aura

$$A^T P + PA = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt = -Q$$

car  $A$  est Hurwitz.

## 1.5 Principe d'invariance de LaSalle

Avec quelques connaissances additionnelles sur le comportement de la solution, il est possible de prouver la stabilité asymptotique en utilisant une fonction faible de Lyapunov qui satisfait l'inégalité (A.4). Cela est facilité par le principe d'invariance de LaSalle : un ensemble  $M$  est dit positivement invariant par rapport au système donné si toutes les solutions qui démarrent dans  $M$  restent dans  $M$  pour tous les temps futur. En voici une version qui est la plus utile dans notre contexte.

*Théorème A.2 (dit théorème de LaSalle)*

*Supposons qu'il existe une fonction  $C^1$ , définie positive  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dont la dérivée le long des solutions du système (A.1) satisfait l'inégalité (A.4).*

*Soit  $M$  le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble  $\{x : \dot{V}(x) = 0\}$ , alors le système (A.1) est stable et toute solution qui reste bornée pour  $t \geq 0$  s'approche de  $M$  quand  $t \rightarrow \infty$ . En particulier si toutes les solutions restent bornées et  $M = \{0\}$ , alors le système (A.1) est globalement asymptotiquement stable.* □

Pour déduire la stabilité asymptotique globale avec l'aide de ce résultat, nous avons besoin de vérifier deux conditions. D'abord que les solutions du système sont toutes bornées ; cette propriété découle automatiquement de l'inégalité (A.4) si  $V$  est choisie radialement non bornée. Cela étant, la non bornétude radiale de  $V$  n'est pas nécessaire quand la bornétude des solutions peut être prouvée d'une autre façon. La deuxième condition c'est que  $\dot{V}$  n'est pas identiquement nulle le long de n'importe quelle solution non nulle du système. On remarque aussi que si on veut prouver seulement la convergence asymptotique des solutions bornées vers zéro et qu'on ne s'intéresse pas à la stabilité au sens de Lyapunov de l'origine, alors le fait que  $V$  soit définie positive n'est pas requis (ce qui est en contraste avec le théorème A.1).

### 1.5.1 Exemple 1

Voici l'exemple du pendule pour résumer les définitions plus haut :

On considère un pendule accroché en haut par un point fixe comme dans l'image.

Les équations du mouvement vont s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

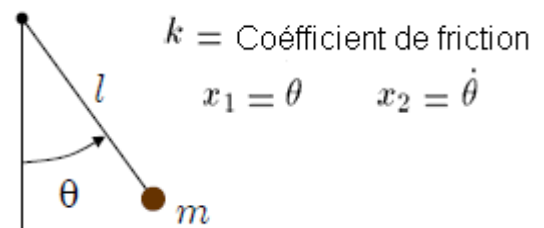


Figure 10: Le pendule simple

---

Il est facile de vérifier que nous avons deux points d'équilibre :  $(0,0)$  et  $(\pi, 0)$ .

Considérons la fonction suivante où  $x = (x_1, x_2)$

$$V(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2} \geq 0$$

- Pour  $x = (0,0)$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(x - x_{eq})f(x) &= \begin{bmatrix} \frac{g}{l} \sin x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{k}{m} x_2^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

C'est pour cela que  $x = (0,0)$  est stable au sens de Lyapunov.

- Pour  $x = (\pi, 0)$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(x - x_{eq})f(x) &= \begin{bmatrix} \frac{g}{l} \sin(x_1 - \pi) & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-2g}{l} x_2 \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2^2 \end{aligned}$$

qui peut être positive, négative ou nulle.

C'est pour cela qu'on ne peut rien conclure sur la stabilité de l'équilibre  $x = (\pi, 0)$ .

- Quand  $k > 0$ , l'équilibre  $(0,0)$  est asymptotiquement stable et l'équilibre  $(\pi, 0)$  est instable, comme le montre la figure suivante :

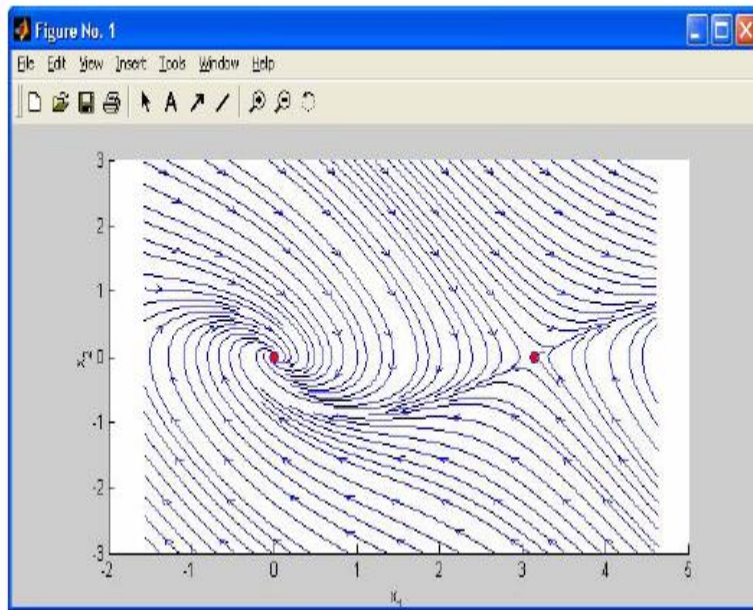


Figure 11: Stabilité des points d'équilibre du pendule quand  $k > 0$

- Quand  $k = 0$ , l'équilibre  $(0,0)$  est stable mais pas asymptotiquement, et  $(\pi, 0)$  est instable comme le montre la figure suivante :

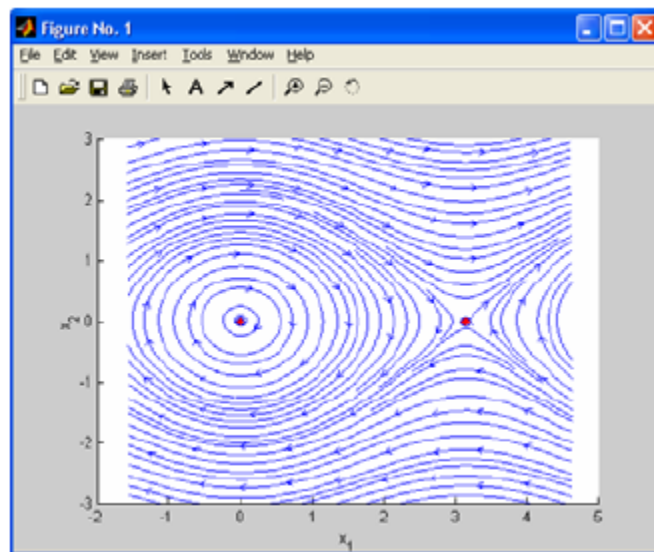


Figure 12: Stabilité des points d'équilibre du pendule quand  $k = 0$

### 1.5.2 Exemple 2

Voici le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2 \end{cases}$$

qui a le point  $(0,0)$  comme point d'équilibre, (facile à vérifier).

Toutes les solutions convergent vers le point d'équilibre pourtant, il n'est pas stable.

La convergence n'implique pas la stabilité, comme nous pouvons le constater sur la figure suivante :

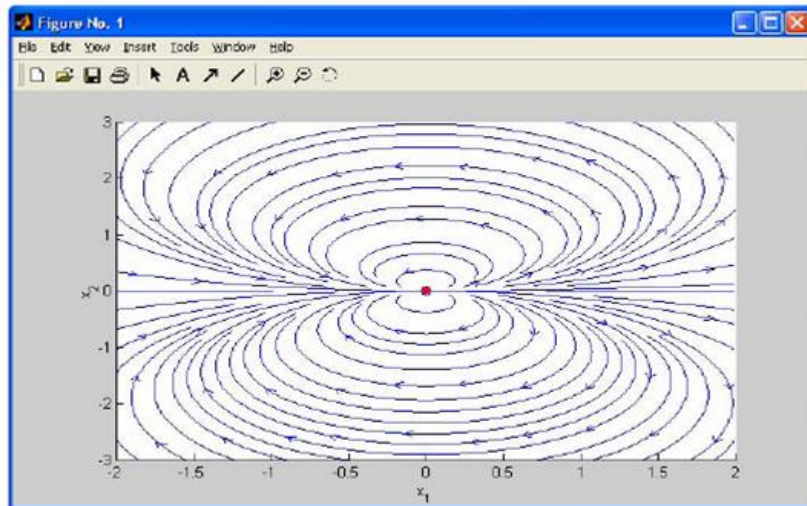


Figure 13: La convergence n'implique pas la stabilité !

## 2 Rappels sur les Algèbres de Lie

### 2.1 Définition

Une Algèbre de Lie est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  sur un corps  $\mathbb{K}$  muni d'une opération binaire qu'on appelle le crochet de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  vérifiant  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \forall a, b \in \mathbb{K}$

- La bilinéarité  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ , et  $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$ .
- L'anti symétrie  $[x, y] = -[y, x]$ .
- L'identité de Jacobi  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ .

### 2.2 Exemples

- $gl_n(\mathbb{R})$  l'algèbre de Lie des matrices réelles  $(n \times n)$ .
- $sl_n(\mathbb{R})$  sous algèbre de  $gl_n(\mathbb{R})$  formée des matrices réelles  $(n \times n)$  de trace nulle.

### Remarques

- Chaque groupe de Lie donne naissance à une algèbre de Lie canonique qui est l'espace tangent à ce groupe en son identité.
- Inversement, chaque algèbre de Lie donne pas un, mais plusieurs groupes de Lie qui lui son correspondants, avec la propriété que si deux groupes de Lie s'associent à la même algèbre de Lie alors ils sont localement isomorphes.

## 2.3 Classification des algèbres de Lie

Une Algèbre de Lie est dite :

- **Abélienne** si  $\forall x, y \in \mathfrak{g} \quad [x, y] = 0$ .
- **Nilpotente d'ordre de nilpotence  $p$**  si les crochets de Lie d'ordre  $p$  et plus s'annulent, par exemple si l'ordre de nilpotence est 2 on aura  $[x, [x, y]] = [y, [x, y]] = 0$ .

$$\mathfrak{g} \text{ Nilpotente} \Leftrightarrow \text{l'opérateur } ad(x) \text{ est nilpotent } \forall x \in \mathfrak{g}$$

$$\text{Dans ce cas, on aura } \mathfrak{g} > [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] > \dots$$

Par exemple l'algèbre de Lie  $gl_n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  des matrices  $(n \times n)$  strictement triangulaires supérieures est nilpotente d'ordre  $(n - 1)$ .

- **Solvable** si

$$\mathfrak{g} > [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] > \dots$$

Par exemple l'algèbre de Lie  $gl_n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  des matrices  $(n \times n)$  triangulaires supérieures est soluble.

**Lemme**

$$\mathfrak{g} \text{ est soluble} \Leftrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ est nilpotent.}$$

## 2.4 Critère de Cartan basé sur la forme de Killing

La forme de Killing associée à deux opérateurs linéaires  $u$  et  $v$  est définie par :

$$K(u, v) = tr(ad(u)ad(v)).$$

Où  $ad(u)$  est l'opérateur adjoint de  $u$  et  $tr$  représente la trace d'un opérateur linéaire.

**Le critère de Cartan :**

$$\mathfrak{g} \text{ soluble} \Leftrightarrow K(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$$

# Chapitre 2

## Les systèmes Dynamiques Hybrides

Voir (Zaytoon, 2001) ou (Broucke, 2004) pour plus de détails.

### 1 Introduction

Les SDH sont des systèmes qui font interagir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de types dynamiques continus et dynamiques événementielles.

Les systèmes réels font intervenir généralement deux variables, le temps ( $t$ ) et l'état ( $x$ ).

Le temps peut être continu, discret, ou symbolique. Un temps « symbolique », cela veut dire qu'on ne considère qu'une chronologie des événements sans jamais savoir l'instant auquel arrive un événement, ni la durée écoulée entre deux événements successifs.

L'état peut aussi être continu, discret, ou symbolique. Un état « symbolique » cela veut dire que la variable ( $x$ ) prend ses valeurs dans un ensemble non structuré du genre : mon portable peut être {ouvert, fermé, en panne, hors champs,...}.

Quand le temps est continu et que l'état est continu, on est en théorie du « continu » modélisée par des équations différentielles (complétées éventuellement par des contraintes Algébriques), mais quand le temps est symbolique et que l'état est symbolique on est en théorie des SED (systèmes à événements discrets) modélisée (entre autres) par des « automates à états finis » :

**Exemple :**

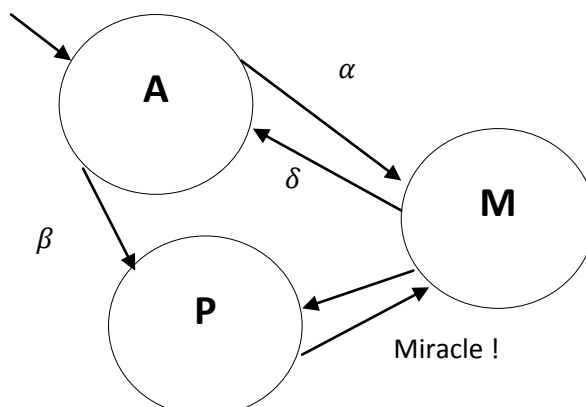


Figure 14: Automate à état fini modélisant une machine simple.

Une machine simple peut être en trois états (symboliques) :  $A$  : arrêt,  $M$  : marche,  $P$  : en panne.

On pose  $Q = \{A, M, P\}$

Le passage d'un état à un autre se fait grâce à un évènement, l'ensemble des évènements est noté  $\Sigma$ ,

$$\Sigma = \{\alpha, \beta, \delta, \text{Miracle !}, \dots\}.$$

L'état initial de l'automate est noté par une flèche rentrante. Dans ce cas  $q_0 = A$  est l'état initial de notre exemple.

Une **transition** du SED est un triplé (*sommet départ, évènement, sommet but*). Par exemple (arrêt,  $\alpha$ , marche) où  $\alpha$  peut être : « appuyer sur le bouton de démarrage ».

L'ensemble de toutes les transitions possibles du système est noté :  $T$ .

Maintenant, une **exécution** de l'SED est une suite des transitions possibles du système, par exemple  $\{(A, \alpha, M), (M, \delta, A), (A, \beta, P), (P, \text{miracle}, M)\}$ . C'est un sous ensemble de l'ensemble des transitions  $T$ .

Un SED est donc défini comme :  $S = (Q, q_0, \Sigma, T)$ .

Pour des raisons pratiques les automaticiens ont eu besoin de calculer le temps que reste un SED dans un état donné ; ils ont donc inclus des variables horloges qui mesurent le temps (comme  $x, y, et z$  dans la Fig.15); on est passé alors aux automates temporisés :

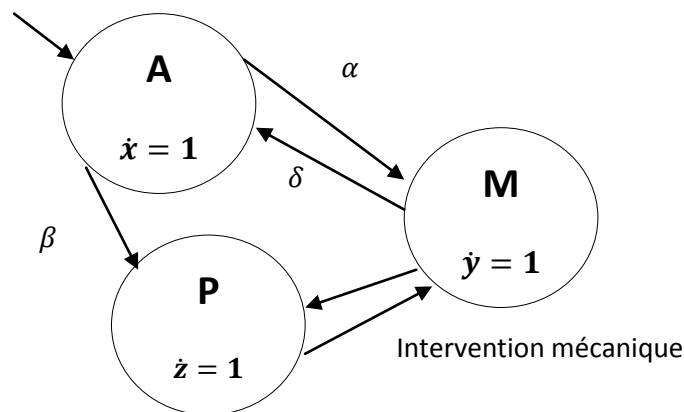


Figure 15: Automates temporisés modélisant une machine simple.

Il était alors naturel de passer aux « automates hybrides », ce sont des automates temporisés à la base, mais au lieu d'ajouter une variable horloge, on ajoute une EDO (générale) qui modélise la dynamique continue dans un état discret donné.

---

Les automates hybrides sont un moyen très naturel pour modéliser les SDH, et qui met tout le monde d'accord ! Les théoriciens, les automaticiens et les informaticiens y voient une bonne représentation des SDH.

Les automates hybrides sont donc le croisement entre un automate à état fini et une famille d'équations différentielles, où à chaque état discret son équation différentielle !

Mais inclure une EDO n'est pas aussi simple que d'inclure une variable horloge ; nous devons connaître un peu plus d'informations, par exemple le domaine de la variable continue (i.e. celle de l'équation différentielle) associée à chaque état discret noté  $D(q)$  et puis, pour qu'il y ait réellement interaction MUTUELLE entre dynamique continue et dynamique discrète (l'influence du discret sur le continu est claire : l'équation différentielle dépend de la situation discrète, reste l'influence du continu sur le discret), nous imposons alors des conditions sur l'état continu pour permettre un saut discret, ce sont les conditions *Guard*.

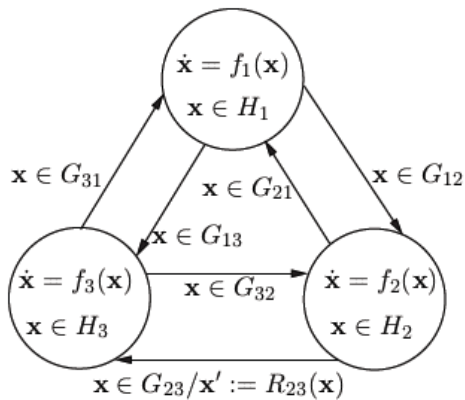
Si  $x \in \text{Guard}(q, q')$  alors le passage de  $q$  à  $q'$  est permis et ce fait instantanément.

Reste une dernière information légitime: où se trouve la variable continue après un saut discret ? La réponse à cette question est donnée par la fonction « *Reset map* », qui – pour chaque  $x$ - nous donne la région (ou la valeur) de l'état continu après avoir accompli un saut discret.

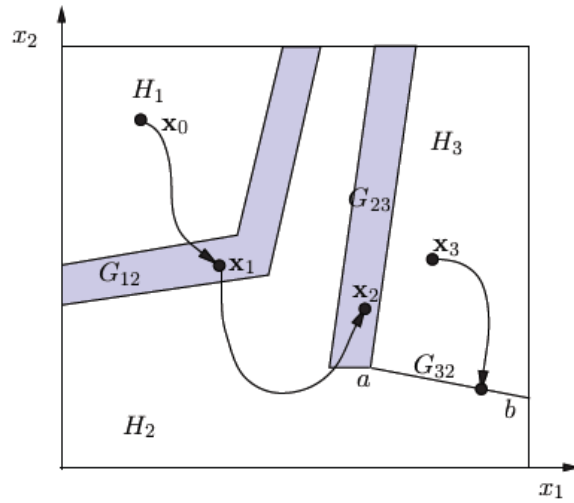
Récapitulons tout ça d'une manière plus technique (nous suivons la méthodologie de (Sastry, 2003)). Un SDH est une famille d'éléments :

$H = (Q, X, f, \text{Init}, D, E, G, \text{Reset})$  où :

- $Q$  l'ensemble des variables discrètes (supposé fini).
- $X$  l'ensemble des variables continues.
- $f : Q \times X \rightarrow TX$  une famille de champs de vecteurs.
- $\text{Init}$  : l'ensemble des états hybrides initiaux.
- $D : Q \rightarrow P(X)$  un domaine de variables continues pour chaque état discret.
- $E$  : un sous ensemble de  $Q \times Q$  représentant les transitions possibles ou effectives du système.
- $G : E \rightarrow P(X)$  l'ensemble des conditions qui doivent être remplies par l'état continu pour pouvoir faire une transition discrète.
- $\text{Reset} : E \times X \rightarrow P(X)$  nous informe sur la région de l'espace d'état continu où on se retrouve après avoir effectué une transition discrète.



(1)



(2)

Figure 16: Représentation de la dynamique d'un SDH.

## 2 Quelques Exemples

### 2.1 Exemple 1 : le bac à eau (Fig.17)

Nous savons que le modèle adéquat dépend de l'objectif de l'étude :

Si on s'intéresse au niveau d'eau dans le bassin on se tournera vers une modélisation continue :

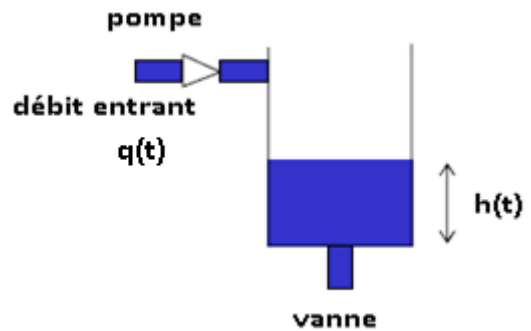


Figure 17: Le bac à eau

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = sq(t) - \alpha h(t) & \text{si la vanne est ouverte} \\ \dot{h}(t) = sq(t) + \alpha h(t) & \text{si la vanne est fermée.} \end{cases}$$

où  $s$  et  $\alpha$  sont deux paramètres du système.

Si on s'intéresse seulement au remplissage et soutirage du bac on se tournera vers un modèle SED comme suit, (Fig.18) :

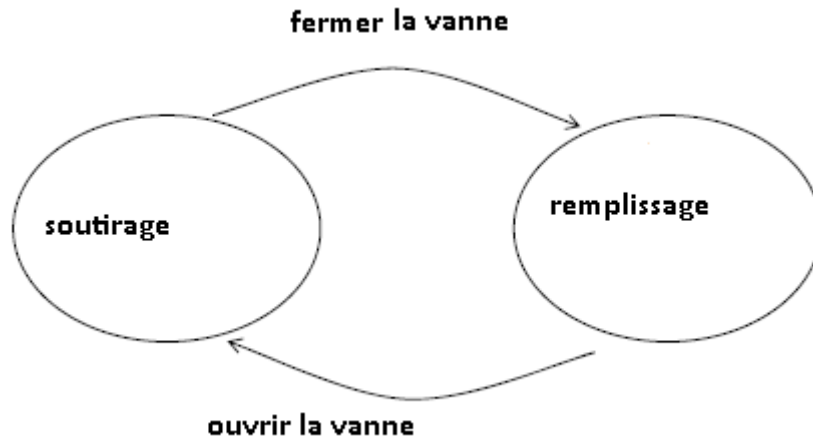


Figure 18: Automate à états finis décrivant le bac à eau.

Maintenant, si on s'intéresse au remplissage/soutirage ainsi qu'au niveau d'eau dans le bac on se tournera vers un modèle hybride ; les évènements du SED peuvent être traduits en variables continues si on considère par exemple que le soutirage arrive quand le niveau d'eau atteint ou descend plus qu'un seuil petit  $h$ , et que le remplissage arrive dès que le niveau d'eau atteint ou dépasse un grand  $H$ , ces  $h$  et  $H$  peuvent être vu comme des seuils de sureté pour éviter la sécheresse ou l'inondation du bassin :

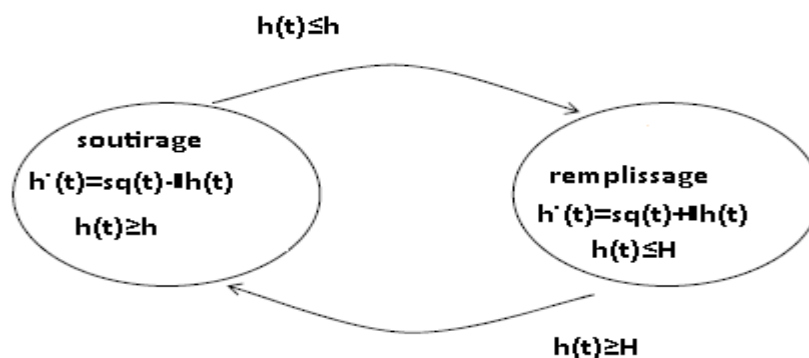
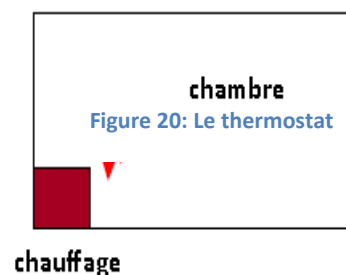


Figure 19: Automate hybride décrivant le bac à eau.

## 2.2 Exemple 2 : le thermostat (Fig.20)

Considérons une chambre chauffée par un appareil contenant un thermostat. Le but est de régulariser la température autour de  $75^\circ$ .

$x$  représente la température. Quand le chauffage est en mode OFF, elle évolue suivant l'équation



différentielle:  $\dot{x} = -x + 50$  et quand il est en mode ON, elle évolue suivant l'équation  $\dot{x} = -x + 100$ .



Figure 21: Le fonctionnement du thermostat.

Voici une modélisation hybride de ce système, (Fig.22) :

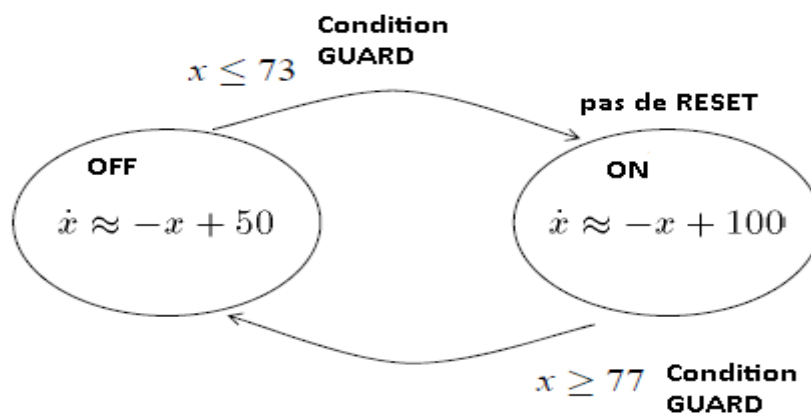


Figure 22: Automate hybride modélisant un thermostat.

qu'on peut aussi écrire de cette façon :

$$f(q, x) = \begin{cases} -x + 50 & q = off \\ -x + 100 & q = on \end{cases}$$

La variable  $x(t) \in \mathbb{R}$  représente l'état continu, et  $q(t) \in \{ON, OFF\}$  représente l'état discret, ou les modes discrets. Les champs de vecteurs sont :

$$\begin{cases} f_1(q, x) = -x + 50 \\ f_2(q, x) = -x + 100 \end{cases}$$

Et les transitions discrètes sont :

$$\begin{cases} on, & q = off, x \leq 73. \\ off, & q = off, x > 73. \\ off, & q = on, x \leq 77. \\ on, & q = on, x < 77. \end{cases}$$

Nous représentons la solution continue  $x$  ainsi que les changements des états discrets sur la figure suivante, (Fig.23) :

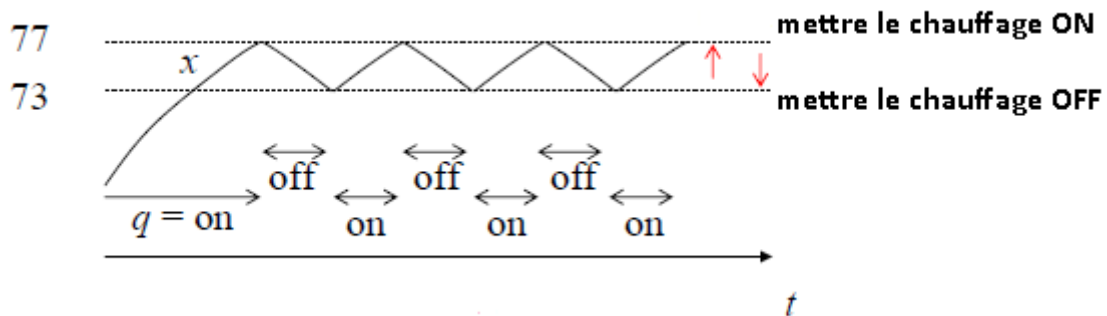


Figure 23: La solution continue et les transitions discrètes du thermostat.

### 3 Les types de SDH

Nous avons plusieurs types de SDH :

- Systèmes à structures variables (multi modèles)
- Systèmes de complémentarité
- Systèmes dynamiques et logiques mixtes
- Systèmes à commutations, qui eux-mêmes regroupent :
  - Les sauts autonomes
  - Les sauts contrôlés
  - Les commutations autonomes
  - Les commutations contrôlées.

Nous nous intéressons particulièrement dans ce cours aux systèmes commutés car ce sont les plus connus et les plus étudiés dans la littérature concernant les systèmes dynamiques hybrides.

#### 3.1 Les sauts autonomes

Lorsque l'état atteint certains seuils ou Certaines régions de l'espace d'état il effectue un saut brusque discontinu.

**Exemple :** la balle bondissante (Fig.24, 25)

On laisse tomber une balle sur le sol d'une hauteur connue et on s'intéresse à son comportement.



Figure 24: La balle bondissante.

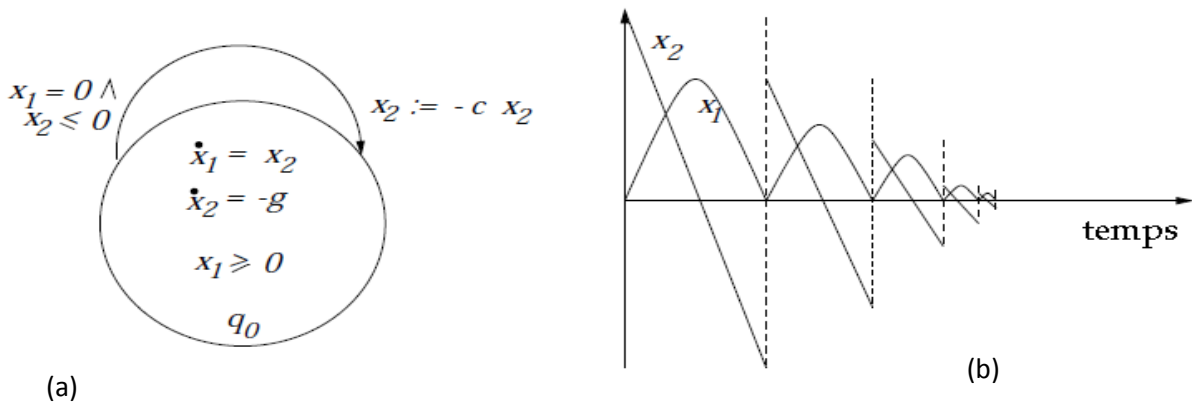


Figure 25: (a)Automate hybride modélisant la balle bondissante (b) Représentation des solutions continues.

$x_2$  représente la position tandis que  $x_1$  représente la vitesse de la balle.

Nous pouvons constater que  $x_2$  fait régulièrement des sauts brusques, discontinus et instantanés.

### 3.2 Les sauts contrôlés

L'état fait un saut brusque discontinu en réponse à une commande,

#### Exemple : stockage de matière

On dépose des quantités d'une matière  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  aux instants :  $t_1, t_2, \dots, t_n$  dans un stock.

L'équation d'évolution de la matière s'écrit:  $\dot{y}(t) = -Q(t) + \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i)$

où:  $y$  : Niveau de la matière dans le stock.

$Q$  : Fonction de dégradation ou d'utilisation.

$\delta$  : Impulsion de Dirac.

Nous constatons que l'état (c'est-à-dire le niveau de la matière dans le stock), fait un saut à chaque fois qu'on dépose une nouvelle quantité de matière. L'action de l'humain ici est la commande.

### 3.3 Commutations autonomes

C'est le champ de vecteur qui subit un saut brusque discontinu lorsque l'état atteint certains Seuils, certaines régions de l'espace d'état.

#### Exemple :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } h(x) \leq 0 \\ f_2(x) & \text{si } h(x) > 0 \end{cases}$$

### 3.4 Commutations contrôlées

Le même phénomène que les commutations autonomes arrive mais en réponse à une commande:

Par **exemple** le système

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u}_i$$

où  $\bar{u}_i$  est constant sur chaque intervalle temporel  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Voici un autre exemple plus pratique, soit le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 - y^2(t) + (u - 1)(u + 1) \\ \dot{y}(t) = u \end{cases}$$

et supposons qu'on voudrait aller du point (0,0) au point (1,0) le plus vite possible.

Si on prend  $u = 0$ , on aura la solution triviale ce qui ne convient pas. Pour aller du point (0,0) au point (1,0) le plus vite possible, il convient de s'éloigner le moins possible de l'axe des abscisses, il faudra donc prendre :

$$\begin{cases} u = -1 & \text{si } y > 0 \\ u = 1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Notre système devient:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 - y^2 \\ \dot{y}(t) = u \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = \begin{cases} -1 & \text{si } y > 0 \\ \text{indéterminé} & \text{si } y = 0 \\ 1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

## 4 Étude qualitative

Nous avons déjà introduit quelques éléments importants pour l'étude qualitative des SDH, à savoir la définition des composantes d'un tel système ainsi que sa dynamique. Nous allons maintenant introduire d'autres concepts tout aussi importants.

### 4.1 Trajectoire temporelle hybride

C'est une suite finie (ou infinie) d'intervalles fermés de la forme:

$$\tau = \{[\tau_i, \tau_i'] : \tau_i \leq \tau_i', \tau_i' = \tau_{i+1}, i = 1, 2, \dots\}$$

Si  $\tau$  est une suite finie, il est permis au dernier intervalle d'être fermé ou ouvert.

On note par  $\langle \tau \rangle = \{1, 2, \dots, N\}$  l'ensemble des indices de  $\tau$ , et par  $|\tau| = \sum_{i \in \langle \tau \rangle} (\tau_i' - \tau_i)$  sa longueur.

## 4.2 Suite de champs de vecteurs (signal hybride)

Pour une trajectoire temporelle hybride donnée  $\tau$ , un signal hybride défini sur  $\tau$  est une suite de fonctions :

$$x = \{x_i: [\tau_i, \tau_i'] \rightarrow \chi, \quad i = 1, 2, \dots\}$$

Chaque fonction va d'un intervalle temporel qui lui correspond vers l'espace des états  $\chi$ .

## 4.3 Exécution hybride

C'est une collection  $X = (\tau, q, x)$  où :

- $\tau$  est une trajectoire temporelle hybride.
- $q$  est une application  $q: \langle \tau \rangle \rightarrow Q$ .
- $x$  une suite de champs de vecteurs vérifiant :
  - ✗  $(q(0), x_0(0))$  est un point initial.
  - ✗  $\forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \quad \dot{x}_i = f(q(i), x_i(t))$  et  $x_i(t) \in D(q(i))$ .
  - ✗  $\forall i \in \langle \tau \rangle \setminus \{N\} \quad e = (q(i), q(i+1)) \in E \quad x_i(\tau_i') \in G(e)$  et  $x_{i+1}(\tau_{i+1}) \in \text{Reset}(e, x_i(\tau_i))$ .

En voici un exemple :

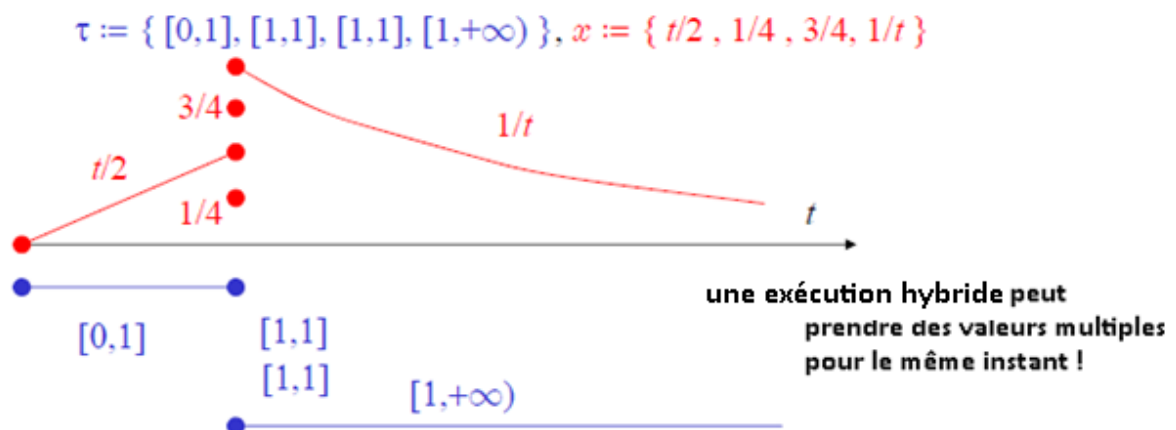


Figure 26: Exemple d'une exécution hybride.

A présent, quels sont les problèmes qui peuvent apparaître ?

En dynamique continue:

- Existence
- Unicité
- Solution qui s'échappe à l'infini en un temps fini
- Non continuité par rapport aux conditions initiales

En dynamique discrète :

- Oscillations (dit phénomène de chattering)
- Blocage
- Zénon
- Non déterminisme.

Nous allons donner des exemples de chaque problème.

**4.3.1 Existence**

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

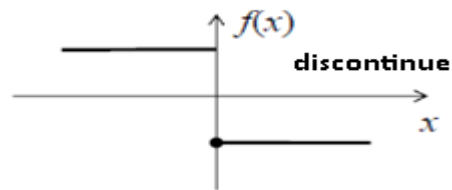


Figure 27: Graphe de la fonction discontinue considérée.

$f(x)$  est un champ de vecteur discontinu. Dès qu'on intègre, on se rend compte que l'état ne peut plus quitter l'axe des abscisses. Il n'y a aucune solution de cette équation qui démarre à  $(0) \neq 0$ .

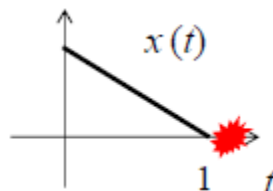


Figure 28: La solution ne quitte plus l'axe des abscisses.

**Théorème d'existence (classique)**

Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue alors, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe au moins une solution avec  $x(0) = x_0$  définie sur un certain intervalle  $[0, \epsilon)$ .

Donc pour le SDH suivant, l'exécution ne pourra plus passer l'axe des abscisses :

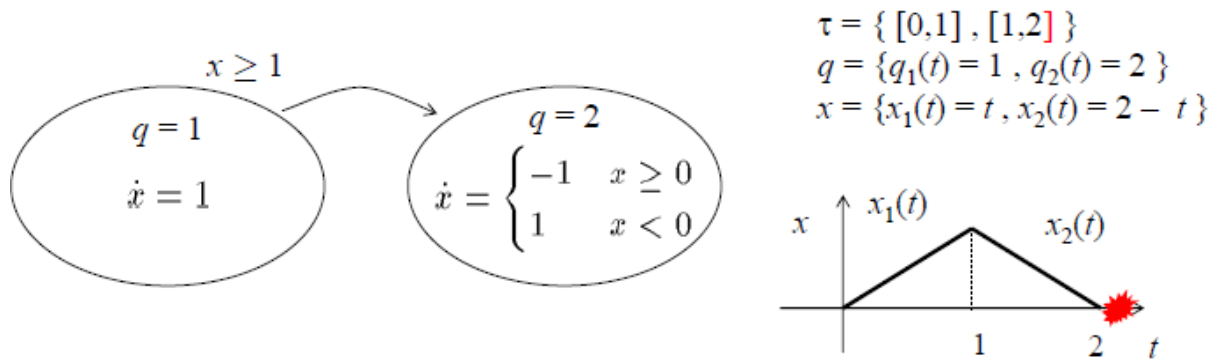


Figure 29: Automate hybride présentant un problème d'existence de l'exécution.

Pour remédier à ce problème, il faut supposer que  $f$  est continue.

#### 4.3.2 L'unicité

Soit

la

fonction :

$$\dot{x} = f(x) = \sqrt{|x|}$$

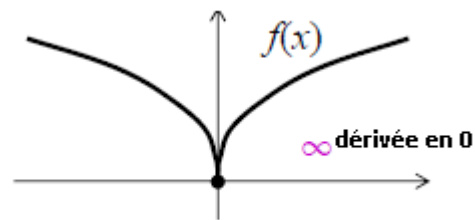


Figure 30: EDO admettant deux solutions.

qui admet deux solutions démarrant à 0, la solution triviale  $x(t) = 0$  et  $x(t) = \frac{t^2}{4}$

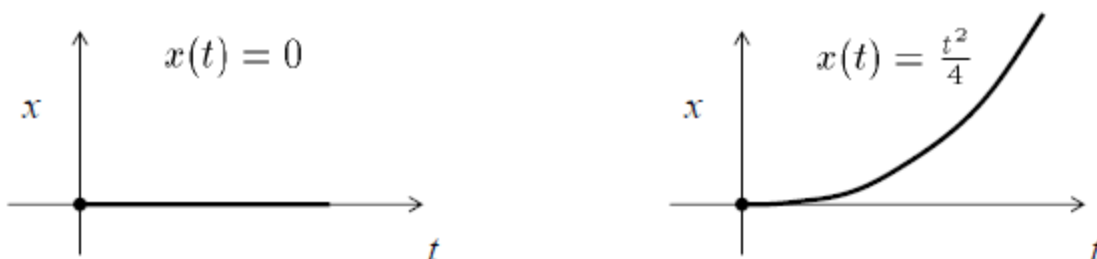


Figure 31: Graphe des deux solutions possibles de l'EDO considérée.

**Théorème d'unicité classique :**

Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est (localement) Lipschitzienne alors,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  il existe une solution unique avec  $x(0) = x_0$  définie sur un certain intervalle  $[0, \epsilon)$ .

Rappelons qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite (localement) Lipschitzienne si, sur n'importe quel sous ensemble borné  $S$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in S$$

$f$  est alors différentiable presque partout et sa dérivée est bornée sur chaque ensemble borné.

L'intervalle maximal de l'existence de la solution  $[t_0, T_{max})$  peut ne pas être le semi-axe entier  $[t_0, \infty)$ .

Pour remédier à ce problème il faut supposer  $f$  Lipschitz (localement).

### 4.3.3 Solution qui s'échappe à l'infini en un temps fini

La solution tend vers l'infini quand le temps tend vers une limite finie, exemple :  $\dot{x} = x^2$

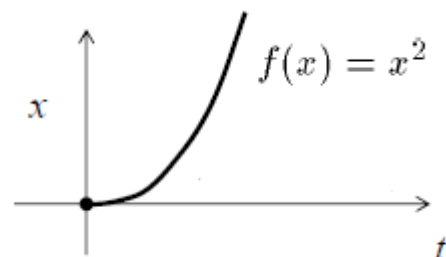


Figure 32: Graphe de la fonction considérée.

La solution  $x(t) = \frac{1}{T-t}$  avec  $t \in [0, T]$  :

$x(t) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow T$

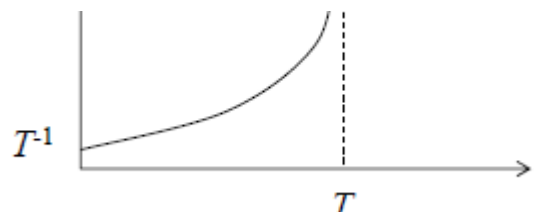


Figure 33: Solution qui s'échappe à l'infini en un temps fini.

### Théorème d'existence et d'unicité (classique)

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est globalement Lipschitzienne alors,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  il existe une solution unique avec  $x(0) = x_0$  définie sur un certain intervalle  $[0, \infty)$ .

Nous pouvons construire un SDH qui « souffre » du même problème :

$$\tau = \{ [0,1], [1,2) \}$$

$$q = \{ q_1(t) = 1, q_2(t) = 2 \}$$

$$x = \{ x_1(t) = t, x_2(t) = 1/(2-t) \}$$

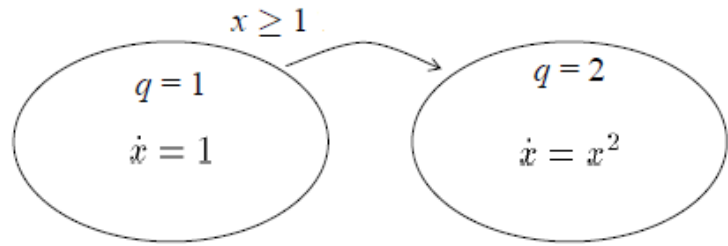
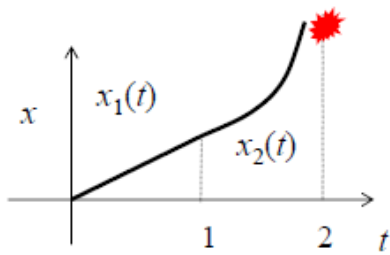


Figure 34: SDH avec solution qui s'échappe à l'infini.

Pour remédier à ce problème il faut supposer  $f$  globalement Lipschitzienne.

Rappelons qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite globalement Lipschitzienne si, il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in S$$

On dit que  $f$  ne croît pas plus rapidement qu'une croissance linéaire.

#### 4.3.4 Non continuité par rapport aux conditions initiales

**Exemple 1 :**

La **non continuité** de la fonction Reset implique une **non continuité** par rapport aux conditions initiales.

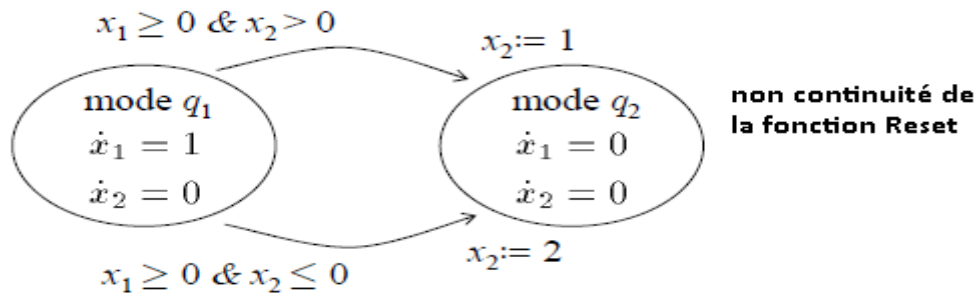


Figure 35: SDH de l'exemple 1.

Prenons deux exécutions qui démarrent très proche l'une de l'autre :

$$\begin{cases} x_1^0 = -1 \\ x_2^0 = \epsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1^0 = -1 \\ x_2^0 = 0 \end{cases}$$

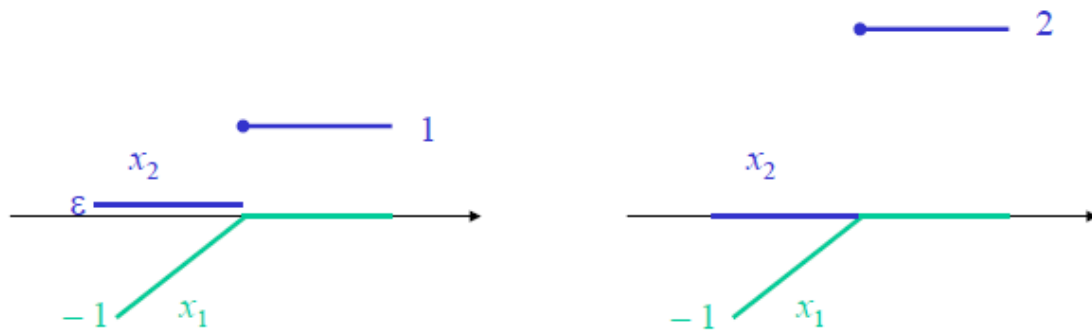


Figure 36: Deux exécutions du SDH de l'exemple 1.

Elles vont énormément s'éloigner après un seul saut discret.

En voici un deuxième exemple...

### Exemple 2

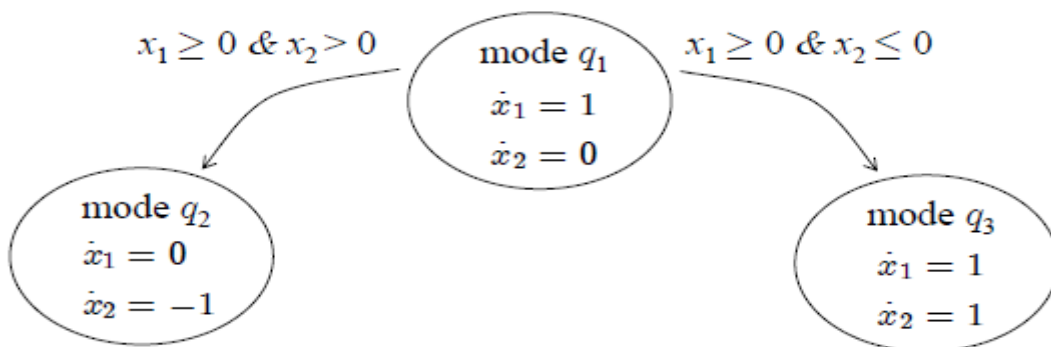


Figure 37: SDH de l'exemple 2.

Même si, encore une fois nous démarrons très proche de 0, après un seul saut discret, les deux exécutions vont s'éloigner énormément:

$$\begin{cases} x_1^0 = -1 \\ x_2^0 = \epsilon \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_1^0 = -1 \\ x_2^0 = 0 \end{cases}$$

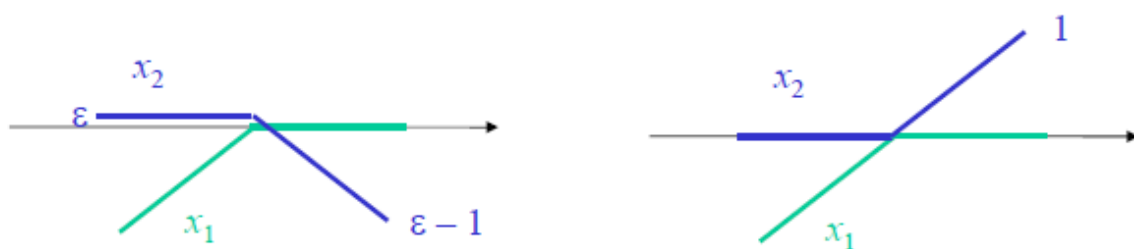


Figure 38: Deux exécutions du SDH de l'exemple 2.

Pour pallier ce problème il faut imposer la continuité de la fonction Reset.

**Théorème** : (Sastry, 2003)

H est continu par rapport aux conditions initiales si :

1/H est déterministe.

2/ $\forall e \in E$   $G(e) \cap D(q)$  est un ouvert du bord de  $D(q)$ , (on dit qu'on aplatit le guard sur le bord du domaine de  $q$ ).

3/ $\forall e \in E$   $\text{Rest}(e, .)$  est continue.

4/ Si d'un point on peut aller par évolution continue à un point à partir duquel une transition discrète est possible, alors on peut faire la même chose de tous ses états voisins.

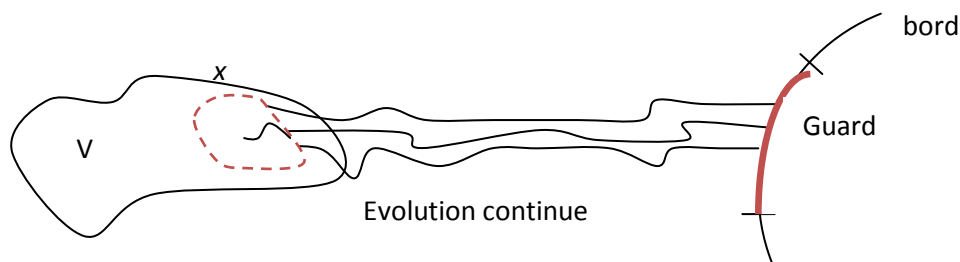


Figure 39: Illustration des conditions du théorème.

Ces conditions imposées dans le théorème ci-haut nous ramènent aux systèmes commutés sans discontinuité de la fonction Reset ce qui est fort dommage parce que les hybrides perdent leur intérêt : explication ... petit exemple académique :

**Exemple académique** (Zaytoon, 2001):

Supposons que c'est là la trajectoire d'un système autonome du premier ordre :

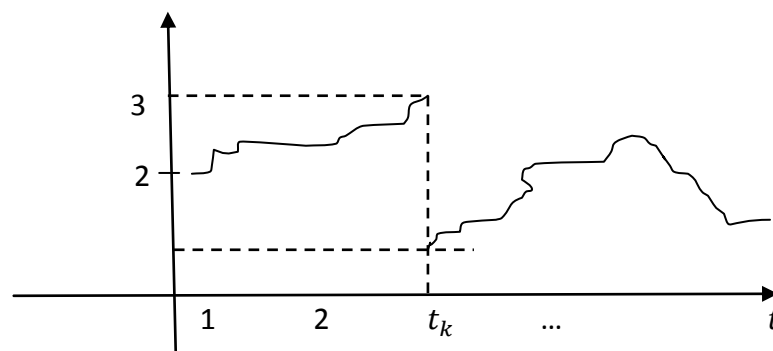


Figure 40: Trajectoire d'un exemple académique.

On ne peut pas modéliser ce système par du continu à cause de la rupture de la condition Lipschitz à  $t_k$ .

On ne peut pas (ou en tous cas ça ne serait pas très intelligent) de modéliser ça par du discret parce que ça serait perdre beaucoup d'informations sur l'état.

Les équations différentielles à second membre discontinue nous mènent aux solutions de Phillipov, un concept ni familier ni pratique pour les automaticiens par exemple, une alternative est donc de modéliser par des SDH :

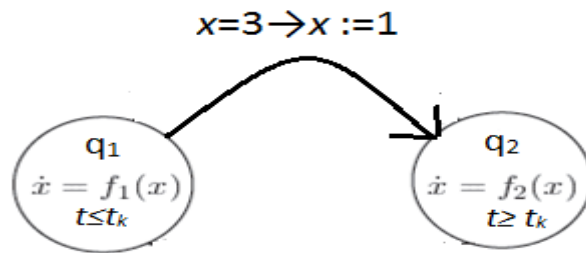


Figure 41: SDH modélisant l'exemple académique.

Nous avons grandement besoin des hybrides particulièrement quand la fonction Reset est discontinue.

### 4.3.5 Chattering

Reprenons notre exemple de l'existence, nous allons voir que s'il n'y a pas de solution dans le sens classique, il y a quand même une exécution sur cet exemple:

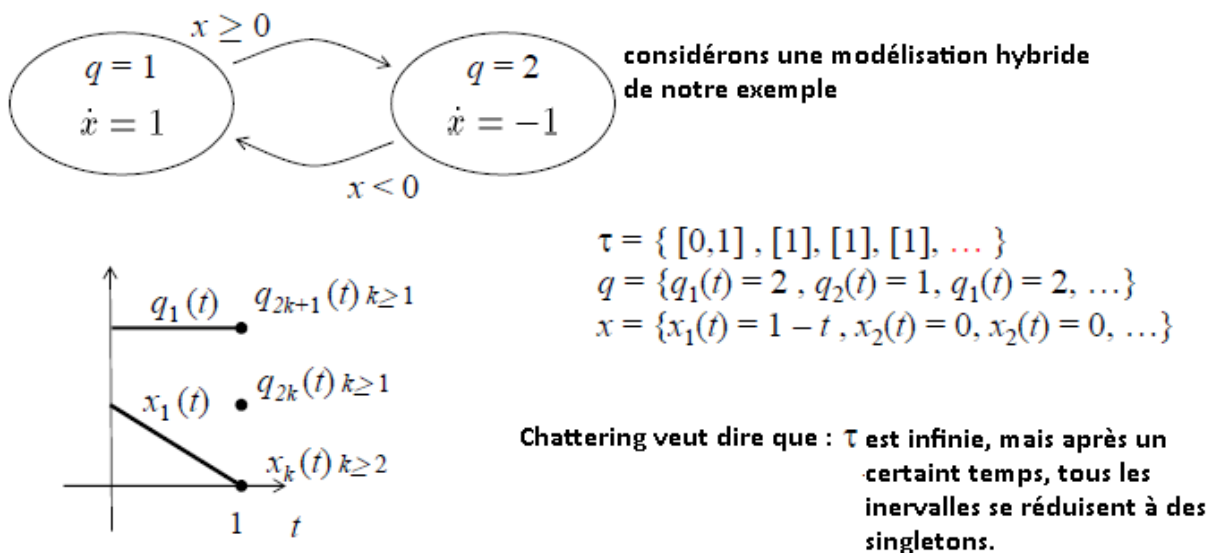


Figure 42: SDH présentant un chattering, son exécution et sa représentation graphique.

---

Ce phénomène est souvent indésirable et on suppose la plus part du temps que dans le système étudié, les sauts discrets sont séparés par des intervalles de temps de longueur strictement positive.

#### 4.3.6 Blocage

Il y a deux moyens de rentrer dans le blocage :

- Après une transition discrète l'état continu ne se trouve pas dans  $D(q')$  (mais dans  $OUT_H$  car il n'y a plus d'évolution continue possible non plus)

Pour lutter contre ce problème il faut prendre des Guards minimaux i.e

$G'(q, q') := G(q, q') \cap Reset^{-1}(D(q'))$  avec  $Reset^{-1}(D(q'))$  l'image réciproque du domaine  $D(q')$  par la fonction  $Reset = \{x / \exists x' \in D(q') x' \in Reset(q, x)\}$ .

- On ne peut pas faire une transition discrète pourtant, il n'y a plus d'évolution continue possible. Cela veut dire que l'état continu quitte le domaine sans atteindre aucun Guard.

Pour pallier ce problème, on va créer une nouvelle localisation où le système va à chaque fois qu'il sort d'un quelconque domaine  $D(q)$ .

Comme exemple du blocage, nous pouvons revenir à notre thermostat et supposer que –par maladresse- l'utilisateur le programme de façon que  $M < m$  et le met en (On), le chauffage va fonctionner sans jamais détecter  $M$ , donc il va bloquer (on est dans la deuxième façon de blocage ici).

#### 4.3.7 Non déterminisme

Être déterministe c'est : **si le passé est connu alors, le future est déjà fixé !**

Pour les hybrides cela signifie que si on est face à l'une des situations suivantes :

- 1- On arrive à un point où on a le choix entre évolution continue et transition discrète.
- 2- On arrive à un point où on a le choix entre deux transitions discrètes différentes.
- 3- On arrive à un point, on fait une transition discrète, mais on a le choix entre des destinations multiples.

**Alors notre SDH n'est pas déterministe.**

Prenons comme exemple un thermostat non déterministe :

Nous savons que –malheureusement- un thermostat ne peut pas détecter « exactement » le moment où la température atteint un certain seuil à cause des incertitudes des capteurs de chaleur, donc on ne peut pas garantir le switch (i.e. la commutation) « exactement » au moment où la température touche le seuil, mais dans un voisinage de ce dernier.

Pour refléter cette incertitude on modifie les conditions comme suit :

Passer à (Off) si  $\theta_M - \varepsilon \leq x \leq \theta_M + \varepsilon$  et passer à (On) si  $\theta_m - \varepsilon \leq x \leq \theta_m + \varepsilon$

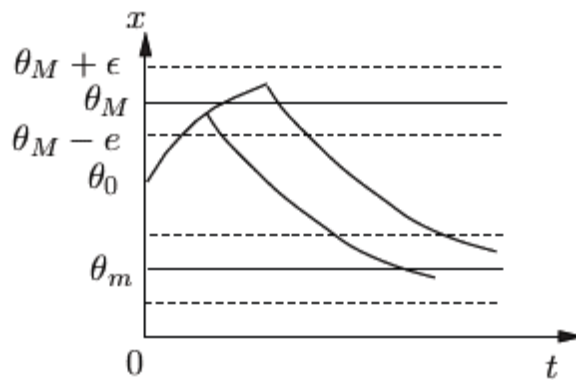


Figure 43: Thermostat non déterministe.

Quand  $x \in [\theta_M - \varepsilon, \theta_M + \varepsilon]$  par exemple, le thermostat peut soit continuer sur (On) ou passer à (Off), nous avons donc deux exécutions possibles pour un même état initial, c'est du non déterminisme.

Pour arranger la première situation de non déterminisme (et celle de notre exemple) il faut « aplatis » le Guard sur le bord du domaine de la situation discrète.

#### 4.3.8 Comportement Zénon

C'est quand le système fait une infinité de transitions discrètes dans un intervalle de temps fini.

**Exemple :**

Dans notre thermostat non déterministe, il suffit de prendre les intervalles  $[\theta_M - \varepsilon, \theta_M + \varepsilon]$  et  $[\theta_m - \varepsilon, \theta_m + \varepsilon]$  d'intersection non vide, quand  $x$  atteint cette intersection, il va y être « coincé ».

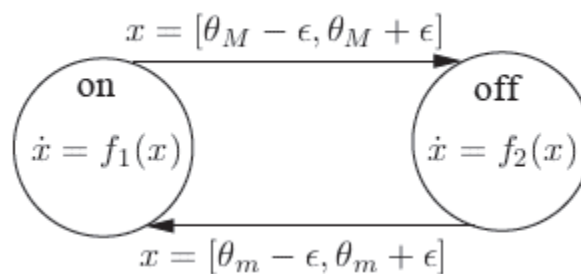


Figure 44: Thermostat présentant un comportement Zéno.

## Chapitre 3

### Les systèmes commutés

#### 1 Introduction

Rappelons que les systèmes dynamiques décrits par une **interaction** entre des dynamiques **discrètes** et des dynamiques **continues** sont appelés « systèmes dynamiques **hybrides** » (SDH).

La dynamique continue peut être représentée par un système contrôlé linéaire, par exemple :  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  le contrôle (l'entrée)  $u \in \mathbb{R}^m$ .

Pour la dynamique discrète, on peut penser à un **automate** à état «  $q$  » qui prend ses valeurs dans un ensemble **discret fini**  $Q$ , où les **transitions** entre les différents états discrets sont amenées par un contrôle approprié  $v$ .

Quand l'entrée  $u$  de la dynamique continue est en fonction de l'état discret  $q$ , et la valeur de l'entrée  $v$  est en fonction de l'état continu  $x$ , un système hybride apparaît <sup>1</sup>.

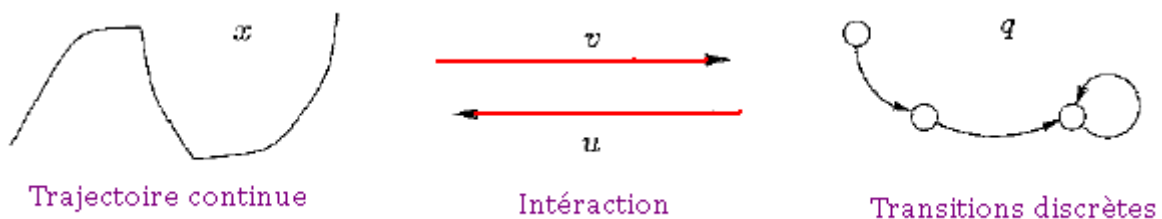


Figure 45: Représentation de l'interaction hybride.

Traditionnellement, la théorie du contrôle s'est focalisée sur l'un ou l'autre des comportements continus ou discrets. Pourtant, beaucoup - sinon la plupart- des systèmes dynamiques rencontrés dans la pratique sont de nature hybride.

#### Exemple :

Un modèle très simplifié du mouvement d'une voiture par exemple peut prendre la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(a, q) \end{cases}$$

<sup>1</sup> Ce n'est pas le seul cas d'apparition d'un SDH, d'autres formes d'interactions sont possibles.

---

où  $x_1$  représente la position,  $x_2$  la vitesse,  $a \geq 0$  est l'accélération (c'est une entrée du système), et puis  $q \in \{1,2,3,4,5,-1,0\}$  représente la position du levier de vitesse, (-1 représente la marche arrière, 0 le point mort, 1 pour première, 2 pour deuxième ...etc.)

La fonction  $f$  doit être négative décroissante en  $a$  quand  $q = -1$ , indépendante de  $a$  quand  $q = 0$ , positive croissante par rapport à  $a$  quand  $q > 0$ .

Dans ce système,  $x_1$  et  $x_2$  représentent l'état continu et  $q$  l'état discret. Il est clair que les transitions discrètes influent sur la trajectoire continue.

Dans le cas d'une transmission automatique, l'évolution de l'état  $x_2$  est en retour utilisée pour déterminer la transition discrète. Pour une transmission manuelle, les transitions discrètes sont contrôlées par le chauffeur.

Il est tout à fait naturel dans ce cas de considérer des variables de sorties qui dépendent des états continus et discrets en même temps, comme « le taux de rotation du moteur » par exemple, qui est une fonction de  $x_2$  et  $q$ .

## 2 Les systèmes commutés

Le domaine des systèmes hybrides a une saveur largement interdisciplinaire. Les différentes communautés ont développé différents points de vue.

L'approche favorite par les informaticiens consiste à concentrer la recherche sur la partie discrète du système pendant que les dynamiques continues sont supposées être extrêmement simples, ils traitent alors de la simulation, la vérification, l'approximation de l'ensemble d'états atteignables,...etc. Alors que les chercheurs du domaine de la théorie du contrôle -d'un autre côté- tendent à regarder les SDH comme des systèmes continus avec des « commutations » ; les sujets de recherches se focalisent alors sur les propriétés de l'état continu, l'existence et l'unicité de la solution, la stabilité, stabilisation et/ou contrôle. Et c'est cet angle qu'on va adopter ici.

Donc, les systèmes qui nous intéressent, sont continus présentant des événements de commutations, on les appelle les « systèmes commutés » ou « les systèmes à commutations ». Un système commuté peut être obtenu à partir d'un système hybride en négligeant les détails sur le comportement discret, et à la place, considérer tous les modèles de commutations possibles pour une certaine classe. Cela peut être un point de départ significatif pour l'étude des hybrides spécialement au stade de l'analyse.

Les événements de commutation dans les systèmes commutés peuvent être classés en :

- Dépendants de l'état ou bien dépendants du temps.
- Autonomes (ou non contrôlés) ou bien contrôlés.

Bien sûr, nous pouvons avoir une combinaison de plusieurs types de commutations dans un même système, nous allons discuter brièvement toutes ces possibilités :

### a. Commutations dépendantes de l'état

Supposons que l'espace d'état (en l'occurrence  $\mathbb{R}^n$ ) est partitionné en un nombre (fini ou infini) de régions par le moyen d'une famille (finie ou infinie) de « surfaces de commutations » (dites aussi « Guards »).

Dans chacune de ces régions, un système dynamique continu, décrit par une équation différentielle (avec ou sans contrôle) est donné. Dès que la trajectoire de ce système touche une surface de commutation (un Guard), l'état continu fait instantanément un saut à une autre valeur spécifiée par une fonction appelée « fonction de réinitialisation » (Reset Map).

Dans les cas les plus simples, cette fonction a pour ensemble de départ la réunion des surfaces de commutations et va vers tout l'ensemble d'état (en excluant les surfaces de commutations éventuellement), mais d'autres formes de la « Reset Map » peuvent être considérées.

Le système est alors spécifié par la donnée de :

- Une famille de surfaces de commutations et les régions opérantes associées.
- Une famille de sous-systèmes continus, un pour chaque région opérante.
- La « Reset Map ».

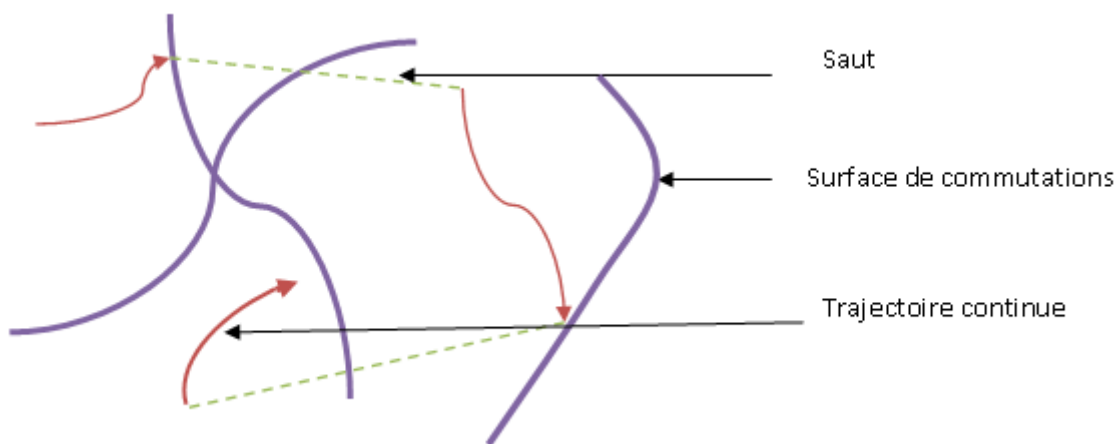


Figure 46: Une représentation des sauts autonomes.

Sur la figure 46, les traits gras violets représentent les surfaces de commutations, les traits moins gras rouges représentent la partie continue de la trajectoire, et les traits discontinus symbolisent les sauts.

Les sauts instantanés de l'état sont des fois appelés « impulsions ».

Quand justement ces effets « impulsions » sont absents, la « Reset Map » se réduit alors à l'identité, cela veut dire que la trajectoire d'état est continue partout, bien qu'elle perd la différentiabilité en général au moment du saut.

Comme exemple pratique, nous pouvons penser à une balle qui bondit sur le sol ; sa hauteur par rapport à ce dernier constitue la première composante de l'état continu du système, sa vitesse constitue la deuxième. Les commutations ici sont un changement brusque de la vitesse, qui subit un saut et change instantanément de signe dès que la balle touche le sol, c'est-à-dire lorsque la hauteur s'annule, les commutations sont donc dépendantes de l'état, nous explorerons cet exemple de plus près un peu plus loin dans cette partie.

Nous allons nous restreindre dans la suite aux systèmes sans effets impulsion, on évite aussi la situation où la solution « reste coincée » sur une des surfaces de commutations (modes glissants).

### b. Commutations dépendantes du temps

Supposons qu'on ait une famille de fonctions :  $f_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^n$  où  $\mathcal{P}$  est un ensemble d'indices (typiquement  $\mathcal{P}$  est un sous ensemble d'un espace vectoriel de dimension finie). Cela donne la famille de sous-systèmes :

$$\dot{x} = f_p(x) \quad , \quad p \in \mathcal{P} \quad (1.1) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions  $f_p$  sont supposées être suffisamment régulières (au moins localement Lipschitziennes).

Le cas le plus simple serait le cas linéaire qui s'écrit alors :

$$\dot{x} = A_p x, \quad A_p \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad , \quad p \in \mathcal{P} \quad (1.2)$$

avec  $\mathcal{P}$  un ensemble d'indices fini de la forme  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Pour définir un système commuté généré par la famille décrite plus haut, nous avons besoin d'introduire la notion de « signal de commutations ». C'est une fonction constante par morceaux  $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$  qui a un nombre fini de discontinuités - qu'on appelle les instants de commutations - sur chaque intervalle temporel borné, et prend une valeur constante sur chaque intervalle entre deux instants de commutation successifs.

Le rôle de  $\sigma$  est de spécifier à chaque instant  $t$  l'indice  $\sigma(t) \in \mathcal{P}$  du sous système « actif » (c'est-à-dire qui est actuellement en cours) de la famille (1.1).

On suppose que  $\sigma$  est partout continue à droite: i.e  $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau)$  pour tout :  $\tau \geq 0$

Voici un exemple d'une telle fonction dans le cas  $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ , (Fig.47):

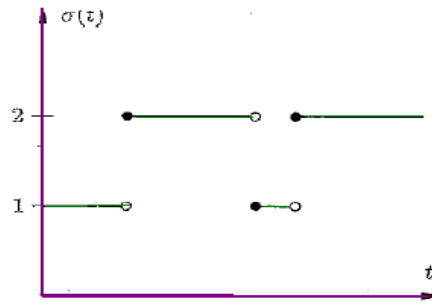


Figure 47: Un signal de commutations.

Donc, un système avec des commutations dépendantes du temps peut s'écrire :

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)).$$

Un cas particulier est le cas linéaire qui s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),$$

et qui apparait quand tous les sous-systèmes sont linéaires (comme dans (1.2)).

Pour simplifier les notations nous allons souvent négliger le temps et écrire simplement :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad (1.3)$$

et

$$\dot{x} = A_{\sigma}x. \quad (1.4)$$

Notons qu'en général, il est difficile de faire une distinction formelle entre les commutations dépendantes de l'état et celles dépendantes du temps. En effet si les éléments de l'ensemble des indices  $\mathcal{P}$  sont en bijection avec les régions opérantes de la section précédente, et si les systèmes dans ces régions sont ceux qui apparaissent dans (1.1), alors toute trajectoire possible du système à commutations dépendantes de l'état est aussi une solution du système à commutations dépendantes du temps donné en (1.3) et cela pour un signal de commutations approprié. En vue de cette observation le dernier système peut être considéré comme un modèle plus grossier du premier qu'on pourra utiliser si les localisations des surfaces de commutations sont méconnues. Cela souligne aussi l'importance de développer des outils d'analyse pour les systèmes commutés comme dans (1.3).

Comme exemple pratique, nous pouvons citer le fonctionnement d'une machine à laver qui passe des modes discrets « lavage », « rinçage », « essorage ». Elle doit passer assez de temps dans chacun des modes, généralement 30min au lavage, 17 min au rinçage et environs 7min à l'essorage. Nous remarquons que le tambour de la machine fonctionne à

---

des dynamiques différentes dans chaque mode : à l'étape du lavage, il alterne tours complets, demi tours et doubles tours tantôt à droite tantôt à gauche, avec une vitesse moyenne. Dans le mode rinçage, il effectue plusieurs tours à droite puis s'arrête brusquement et reprend le même nombre de tours à gauche avec une vitesse un peu plus rapide qu'au moment du lavage. Ensuite, au moment de l'essorage, il effectue des tours nombreux et extrêmement rapides. Mais notons que ce n'est pas sa dynamique qui impose les commutations, c'est le temps.

### c. Commutations autonomes et contrôlées

Par commutations autonomes nous entendons une situation où nous n'avons aucun contrôle direct sur le mécanisme de commutations qui crée les sauts, cette catégorie inclue les systèmes à commutations dépendantes de l'état où les surfaces de commutations sont prédéterminées ainsi que les systèmes à commutations dépendantes du temps pour qui la loi qui définit le signal de commutation est inconnue (ou a été ignorée au moment de la modélisation). Par exemple, des changements brusques dans la dynamique d'un système peuvent être provoqués par des facteurs environnementaux imprévisibles ou de défaillances de certaines composantes du système.

En contraste avec les commutations autonomes, dans plusieurs cas, les commutations sont imposées par un « designer » pour achever un comportement désiré du système. Dans ce cas nous avons un contrôle direct sur le mécanisme de commutations (qui peut dépendre de l'état ou du temps), qu'on peut aussi ajuster avec l'évolution du système. Pour des raisons variées, il est naturel d'appliquer des actions de contrôle discrètes ce qui mène à un système à commutations contrôlées.

Dans l'exemple de l'automobile donné auparavant, la transmission automatique correspond à des commutations autonomes dépendantes de l'état, alors que la transmission manuelle correspond à des commutations contrôlées par le chauffeur, ce qui est interprété comme des commutations dépendantes de l'état (changement de la position du levier de vitesse à l'atteinte d'une valeur de la vitesse) plutôt que des commutations dépendantes du temps.

Malheureusement il n'est pas aussi facile que ça de distinguer entre les commutations autonomes et contrôlées, dépendantes de l'état ou dépendantes du temps, car dans un système, ces différents types de commutations peuvent coexister. Par exemple si un processus donnée est sujet à des influences environnementales imprévues ou à des échecs de certaines composantes (commutations autonomes), il sera peut être nécessaire de considérer un mécanisme pour détecter de tels évènements et imposer des actions de corrections d'erreurs (commutations contrôlées).

Les systèmes à commutations dépendantes du temps peuvent être décrits dans un langage plus standard en théorie du contrôle :

Supposons que  $\mathcal{P}$  est un ensemble fini, par exemple  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, m\}$  alors le système commuté (1.3) peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i \quad (1.5)$$

où les contrôles admissibles sont de la forme  $u_k = 1, u_i = 0$  pour tout  $i \neq k$

(Ceci correspond à  $\sigma = k$ ). En particulier le système commuté linéaire (1.4) donne naissance au système bilinéaire :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m A_i x u_i$$

Ce fait va être utilisé plus tard.

### 3 A propos des Solutions des systèmes commutés

Nous allons commencer par quelques remarques sur l'existence et l'unicité des solutions pour les systèmes décrits par une équation différentielle ordinaire.

#### 3.1 Équations différentielles Ordinaires

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

Nous cherchons une solution  $x(\cdot)$  de ce système pour un **temps initial** donné  $t_0$  et un **état initial**  $(t_0) = x_0$ . Il est commun de supposer que  $f$  est **continue en  $t$**  et **localement Lipschitz en  $x$**  **uniformément par rapport à  $t$** . Cette dernière condition veut dire que pour toute paire  $(t_0, x_0)$ , il existe une constante  $L > 0$  telle que l'inégalité

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad (1.7)$$

soit vraie pour tout  $(t, x)$  et  $(t, y)$  dans un certain voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans  $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ .

Sous ces conditions, il est connu que le système (1.6) admet une solution unique pour toute condition initiale  $(t_0, x_0)$  définie sur un intervalle maximal  $[t_0, T_{max})$ .

Pour comprendre pourquoi la condition de **continuité** est importante, nous allons considérer le système stationnaire scalaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$  est un champ de vecteur discontinu. Dès qu'on intègre, on se rend compte qu'on ne peut plus quitter l'axe des abscisses, Il n'y a aucune solution (forte) de cette équation qui démarre à  $(0) \neq 0$ .

Pour comprendre pourquoi la condition *localement Lipschitz* est nécessaire, nous allons considérer le système stationnaire scalaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 0 \quad (1.8)$$

Les fonctions  $x(t) \equiv 0$  et  $x(t) = t^2/4$  vérifient toutes les deux l'équation (1.8) pour la condition initiale  $x(0) = 0$ .

Nous n'avons pas l'unicité parce que la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  n'est pas localement Lipschitzienne en 0.

L'exemple suivant illustre comment une solution peut « *s'échapper vers l'infini en un temps fini* » ce qui ne va pas arriver si la fonction est globalement Lipschitz en  $x$  uniformément par rapport à  $t$ , c'est-à-dire la condition de Lipschitz (1.7) est vérifiée pour une constante de Lipschitz  $L$  définie pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \geq t_0$ .

Considérons le système scalaire stationnaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) = x^2, \quad x_0 > 0$$

Il est facile de vérifier que la solution (unique) qui satisfait  $x(0) = x_0$  est donnée par la formule :

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

et est définie seulement sur l'intervalle temporel fini :  $[0, \frac{1}{x_0}[$  [ ceci est dû à la croissance

non linéaire rapide à l'infini de la fonction  $f(x) = x^2$ .

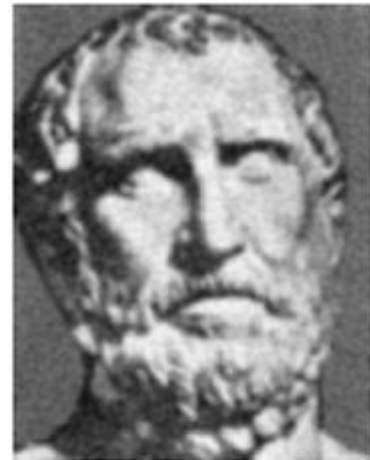
Revenons donc à la situation générale décrite par le système (1.6), puisque nous nous intéressons aux systèmes commutés, l'hypothèse que la fonction  $f$  soit continue en  $t$  est trop restrictive, en réalité, pour que le résultat d'existence et d'unicité reste valable, il est suffisant de demander à la fonction  $f$  d'être « continue par morceaux » en  $t$ , dans ce cas, nous avons besoin de travailler un concept de solutions plus « faibles » en occurrence, une fonction  $x(\cdot)$  qui vérifie l'équation intégrale correspondante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Une fonction qui a ces propriétés est différentiable par morceaux et satisfait l'équation (1.6) presque partout. Elles sont dites « absolument continues » et elles représentent les solutions de (1.6) dans le sens de Carathéodory. Les solutions des systèmes commutés (1.3) seront interprétées de la même manière.

### 3.2 Le comportement Zénon

Le nom du comportement Zénon nous vient du philosophe grec Zénon d'Elée né aux alentours de 490 A.J à Elée, il ne nous est pas parvenu beaucoup de son travail, seulement 200 mots environs, mais sa plus grande contribution fut un nombre de paradoxes comme celui d'Achille et la tortue, ou celui du mouvement. Zénon démontrait qu'on ne pouvait pas marcher ! Puisque, pour traverser une distance donnée, il fallait d'abord traverser sa moitié, mais il fallait d'abord traverser la moitié de cette moitié et ainsi de suite, donc le mouvement ne peut jamais commencer ! Pour le ridiculiser ses contemporains faisaient un pas en avant, voilà ...nous pouvons marcher ! Bien sur, leur geste ne révélait pas où se trouve l'erreur du raisonnement de Zénon, bien que ses démonstrations semblent illogiques, elles n'en demeurent pas moins ardues à réfuter, elles ont posé de sérieux problèmes mathématiques. Pour les mathématiciens grecs qui n'avaient aucune notion de convergence ou d'infinité ces raisonnements étaient incompréhensibles, il était l'un des premiers à avoir pensé à la continuité des choses qui nous paraît si simple maintenant, mais qui n'était pas aussi évidente dans son temps !



Zénon D'Elée

Nous allons maintenant illustrer avec l'aide de l'exemple de la balle bondissante, un type de comportement qui peut arriver dans les systèmes commutés.

Considérons une balle qui bondit sur le sol, on note  $h$  sa hauteur par rapport au sol, et  $v$  sa vitesse (en prenant comme vitesse positive la direction de bas en haut).

En normalisant par la constante gravitationnelle on obtient les équations de mouvement suivantes, valides entre les moments de l'impact :

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = -1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Au moment de l'impact c'est-à-dire quand la balle touche le sol, sa vitesse change brusquement suivant la loi :

$$v(t) = -rv(t^-), \quad (1.10)$$

où  $v(t^-)$  est la vitesse de la balle juste avant l'impact, et  $r \in ]0,1[$  est un coefficient de restitution. (La vitesse décroît à cause de l'énergie perdue du système après un impact).

Ce modèle peut être considéré comme un système à commutations dépendantes de l'état avec un effet pulsionnel.

Les commutations (switch) ici sont les impacts avec le sol, et sont le résultat de la situation où  $h = 0$ . Elles causent des sauts instantanés dans la valeur de la vitesse qui est en fait une des deux composantes de l'état continu du système.

L'intégration de (1.9) donne :

$$\begin{cases} v(t) = -(t - t_0) + v(t_0) \\ h(t) = -\frac{(t - t_0)^2}{2} + v(t_0)(t - t_0) + h(t_0) \end{cases} \quad (1.11)$$

Prenons pour condition initiale  $t_0 = 0, h(0) = 0$  et  $v(0) = 1$ .

Par (1.11), jusqu'au moment du premier switch, on aura :

$$\begin{cases} v(t) = -t + 1 \\ h(t) = -\frac{t^2}{2} + t \end{cases}$$

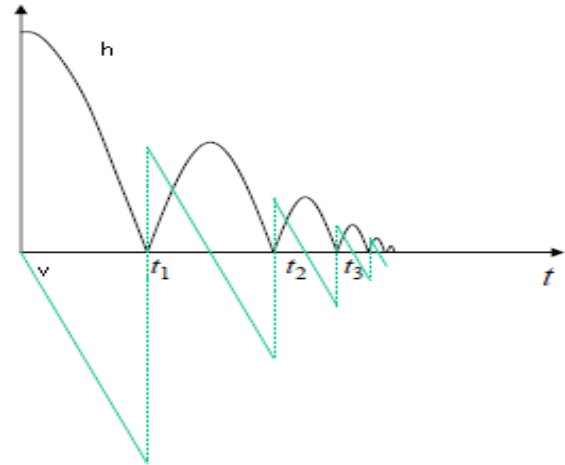
Le premier switch va arriver à l'instant  $t = 2$  puisque  $h(2) = 0$ . On a  $v(2^-) = -1$ , donc  $v(2) = r$  en vue de (1.10).

En utilisant (1.11) encore avec  $t_0 = 2, h(2) = 0$  et  $v(2) = r$  on obtient :

$$\begin{cases} v(t) = -t + 2 + r \\ h(t) = -\frac{(t - 2)^2}{2} + (t - 2)r \end{cases}$$

De là il est facile de déduire que le prochain switch va arriver à  $t = 2 + 2r$  et que la vitesse après ce switch sera  $v(2 + 2r) = r^2$ .

En continuant cette analyse, nous voyons que



les instants de commutations forment la suite **Figure 48:Représentation des solutions du système (1.11).**

$2, 2 + 2r, 2 + 2r + 2r^2, 2 + 2r + 2r^2 + 2r^3, \dots$  et que les vitesses correspondantes forment la suite :  $1, r, r^2, r^3, r^4, \dots$ . Ce qui est particulièrement intéressant à conclure ici, c'est que la suite des instants de commutation admet un point d'accumulation, qui est la somme de la série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2r^k = \frac{2}{1 - r}$$

À ce moment-là, les commutations « s'entassent » et la balle fait une infinité de transitions discrètes juste avant cet instant, comme l'explique la figure suivante :

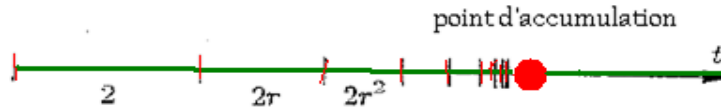


Figure 49: Point d'accumulation d'une exécution.

Puisque  $h(t)$  et  $v(t)$  obtenus par le raisonnement plus haut convergent tous les deux vers zéro quand  $t \rightarrow \frac{2}{1-r}$  il est naturel d'étendre la solution au-delà de ce temps en posant :

$$h(t), v(t) = 0, \quad t \geq \frac{2}{1-r}$$

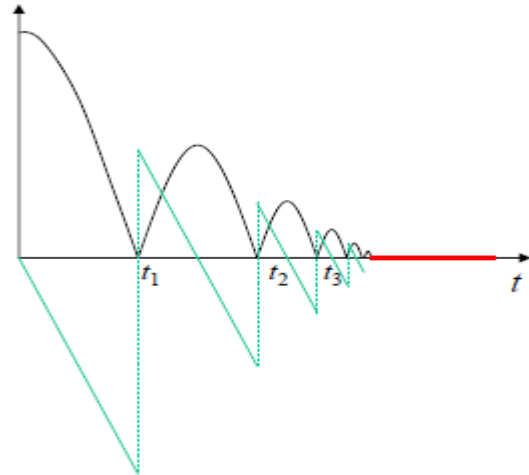


Figure 50: La solution réelle du système (1.11).

Et donc la balle arrête de bondir, ce qui est une fin raisonnable, mais bien sûr dans la réalité, elle va s'arrêter après un nombre fini de sauts.

Sur les systèmes hybrides plus compliqués, la tâche de détecter une trajectoire possiblement Zénon et de l'étendre au-delà de son point d'accumulation est loin d'être triviale !

Dans ce qui va suivre, nous allons volontairement exclure ce type de comportement de nos systèmes, c'est-à-dire que dans ce qui va suivre, nous allons supposer que la suite des instants de commutations va toujours tendre vers l'infini.

### 3.3 Les modes glissants

Soit un système commuté, à commutations dépendantes de l'état, décrit par une seule surface de commutation  $S$  et deux sous systèmes :

$$\dot{x} = f_i(x) \quad , \quad i = 1, 2 \quad \text{un de chaque côté de } S.$$

Supposons qu'il n'y ait pas d'effet d'impulsion, de façon à ce que l'état ne fasse pas de saut au moment du switch.

Nous avons auparavant supposé que, quand l'état touche la surface  $S$ , il passe à l'autre côté, cela sera vrai en effet si au point de passage correspondant  $x \in S$  les deux

champs de vecteurs  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  pointent dans la même direction relativement à  $S$ , comme montré sur la figure 51(a) ci-dessous.

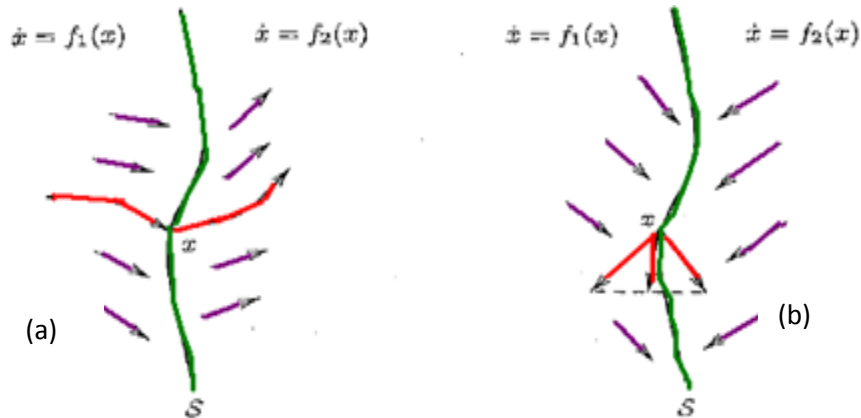


Figure 51: (a) Solution qui traverse la surface de commutation. (b) Un mode glissant.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si les deux champs de vecteurs pointent tout les deux vers  $S$ , (figure 51(b)) nous ne pouvons plus décrire le comportement du système comme avant.

Une façon de résoudre cette difficulté est de définir un nouveau concept de solutions introduit par Fillipov, justement pour contrer ce genre de problèmes.

D'après la définition de Fillipov, on enrichit l'ensemble des vitesses admissibles pour les points  $x \in S$  en incluant toutes les combinaisons convexes des vecteurs  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ . Donc une fonction absolument continue  $x(\cdot)$  est une solution du système commuté dans le sens de Fillipov si elle satisfait l'inclusion différentielle :

$$\dot{x} \in F(x) \quad (1.12)$$

où  $F$  est une fonction à plusieurs variables définie comme suit, pour  $x \in S$  on pose :

$$F(x) = co\{f_1(x), f_2(x)\} := \{\alpha f_1(x) + (1 - \alpha)f_2(x) , \quad \alpha \in [0,1] \}$$

Tant que  $x \notin S$  on pose simplement  $F(x) = f_1(x)$  ou bien  $F(x) = f_2(x)$  suivant la région de  $S$  sur laquelle se trouve le point  $x$ .

Ce n'est pas difficile de voir à quoi ressemblent les solutions de Fillipov dans la situation de la figure 51(b) : une fois que la trajectoire touche la surface  $S$ , elle ne peut plus la quitter( à cause des deux champs de vecteurs pointant tout les deux vers  $S$ ). C'est pourquoi le seul comportement possible de la solution c'est de glisser le long de la surface de commutations  $S$ . On obtient alors ce qui est connu sous le nom de **modes glissants**.

Pour tout  $x_0 \in S$ , la solution correspondante  $x(\cdot)$  est l'unique fonction absolument continue qui satisfait l'inclusion différentielle (1.12).

Du point de vue des systèmes commutés, un mode glissant peut être interprété comme un switch infiniment rapide, qu'on appelle aussi le « **chattering** » ; ce phénomène est

souvent indésirable dans la modélisation mathématique des systèmes réels, mais d'un autre côté, on remarque de la discussion plus haut qu'un mode glissant engendre un comportement radicalement différent du comportement de chaque sous système. C'est pourquoi, les modes glissants sont parfois créés intentionnellement pour résoudre certains problèmes de contrôle qui peuvent être difficiles, ou impossibles à résoudre autrement.

### Exemple

Considérons le système à commutations dépendantes de l'état, linéaire à deux dimensions suivant :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x & \text{si } x_2 \geq x_1 \\ A_2 x & \text{si } x_2 < x_1 \end{cases} \quad \text{où}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

On peut montrer qu'un mode glissant arrive dans le premier quadrant si  $\lambda < 1$ .

Pour  $\lambda > -1$  la trajectoire correspondante approche l'origine suivant une ligne de commutations (ce qu'on appelle un mode glissant stable), mais pour  $\lambda < -1$ , elle s'éloigne de l'origine (ce qu'on appelle un mode glissant instable).

### 3.4 Commutations par hystérésis

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à l'approximation du comportement d'un mode glissant, tout en évitant le chattering, et maintenir la propriété que deux commutations successives soient toujours séparées par un laps de temps strictement positif.

Considérons encore l'exemple de la figure 51(b). Nous allons construire deux régions  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  qui isolent la surface de commutations  $S$ , comme montré sur la figure 52(a).

Sur cette figure, la surface de commutation originelle est dessinée par une ligne en pointillés, les nouvelles surfaces de commutations obtenues  $S_1$  et  $S_2$  sont dessinées par des lignes continues, la région  $\Omega_1$  se trouve sur la gauche de  $S$ , et la région  $\Omega_2$  se trouve sur la droite de  $S$ .

Leur intersection est la bande comprise entre les deux nouvelles surfaces de commutations, en excluant ces surfaces elles-mêmes.

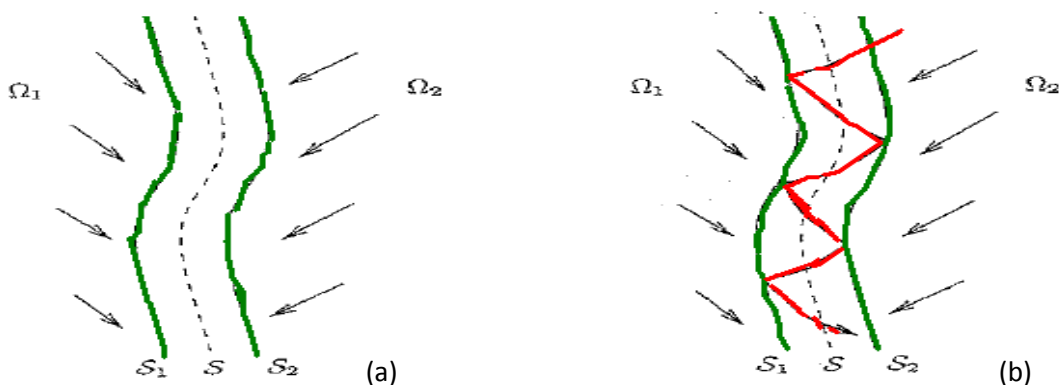


Figure 52: Hystérésis : (a) Les régions de commutations

(b) Une trajectoire typique.

---

Nous voulons suivre le sous système  $\dot{x} = f_1(x)$  dans  $\Omega_1$  et le sous système  $\dot{x} = f_2(x)$  dans  $\Omega_2$ , les switch arrivent quand la trajectoire touche une des surfaces de commutations  $S_1$  ou  $S_2$ .

Cela peut être formalisé en introduisant un état discret  $\sigma$ , qui évolue de la façon suivante :  
 $\sigma(0) = 1$  si  $x(0) \in \Omega_1$  et  $\sigma(0) = 2$  autrement .

Pour chaque  $t > 0$  si  $\sigma(t^-) = i \in \{1,2\}$  et  $x(t) \in \Omega_i$  alors  $\sigma(t) = i$

D'un autre côté, si  $\sigma(t^-) = 1$  mais  $x(t) \notin \Omega_1$  alors  $\sigma(t) = 2$ , de manière similaire, si  $\sigma(t^-) = 2$  mais  $x(t) \notin \Omega_2$  alors  $\sigma(t) = 1$ .

En répétant cette procédure, on génère un signal constant par morceaux  $\sigma$  qui est continu partout à droite.

Puisque  $\sigma$  ne change de valeur que si la trajectoire continue passe à travers l'intersection entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , le chattering est évité.

Un exemple de trajectoire solution est représenté en figure 51(b).

Cette idée standard, connue sous le nom de « commutations par hystérésis » est très utile pour le design d'un contrôle, et le système à boucle fermée résultant est un système hybride où  $\sigma$  est son état discret.

Ce système est véritablement hybride car nous devons remarquer que cette partie discrète a une « mémoire », en effet la valeur de  $\sigma$  ne dépend pas de la valeur courante de  $x$  seulement, mais aussi de la valeur précédente de  $\sigma$ .

Le changement instantané de  $\sigma$ , en retour, dépend non seulement de la valeur de  $x$ , mais aussi de celle de  $\sigma$ .

## Chapitre 4

### Stabilité des systèmes commutés

#### 1 Introduction

Nous allons traiter la stabilité des systèmes de la forme (1.3). Pour le moment nous nous contentons de la stabilité asymptotique, bien que d'autres formes de stabilité soient tout aussi intéressantes (voir (Laubry, 1995) pour un cours complet là-dessus).

Pour comprendre les questions basiques qui se posent, nous allons considérer la situation où  $\mathcal{P} = \{1,2\}$  et  $x \in \mathbb{R}^2$  de façon à commuter entre deux sous systèmes dans le plan :

$$\dot{x} = f_1(x) \text{ et } \dot{x} = f_2(x).$$

Premièrement, supposons que les deux sous systèmes (individuellement) sont asymptotiquement stables, avec des trajectoires comme montré sur la gauche de la figure 53 ci-dessous.

Pour des choix différents du signal de commutation, le système commuté global peut être asymptotiquement stable, ou instable (ces deux possibilités sont montrées sur la droite de la figure 53)

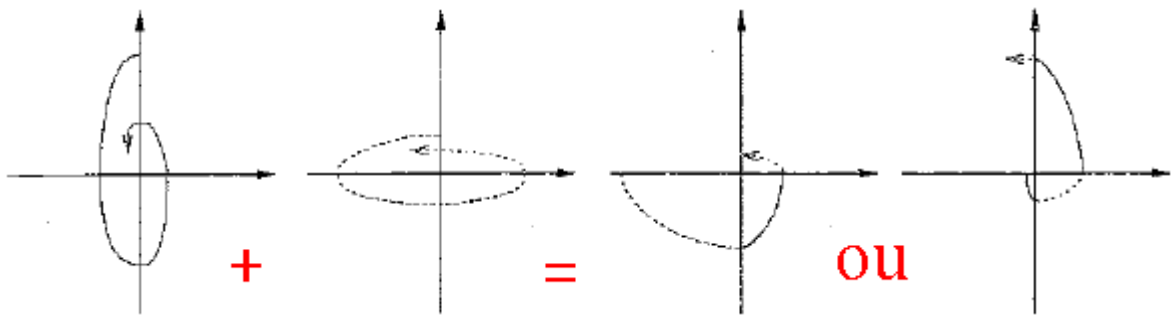


Figure 53: Switch entre des sous-systèmes stables.

#### 1.1 Exemples

##### 1.1.1 Exemple 1

Soit les systèmes linéaires :

$$\dot{x} = A_1x \text{ et } \dot{x} = A_2x \text{ avec } A_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.4 \\ 3 & -0.5 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & -3 \\ 0.4 & -0.5 \end{pmatrix},$$

qui sont tous les deux asymptotiquement stables. Considérons les deux signaux de commutations suivants:

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1x_2 \geq 0 \\ 2 & \text{si } x_1x_2 < 0 \end{cases} \text{ et } \sigma_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1x_2 < 0 \\ 2 & \text{si } x_1x_2 \geq 0 \end{cases}$$

et le système commuté :  $\dot{x} = A_\sigma x$

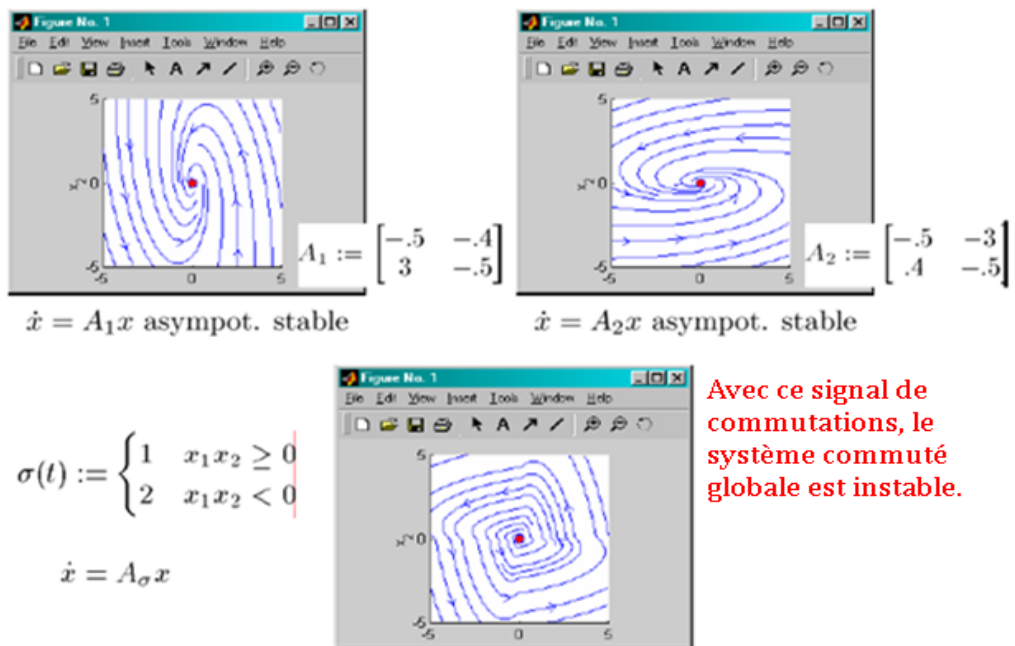


Figure 54: Commuter entre des sous-systèmes stables donne un système instable.

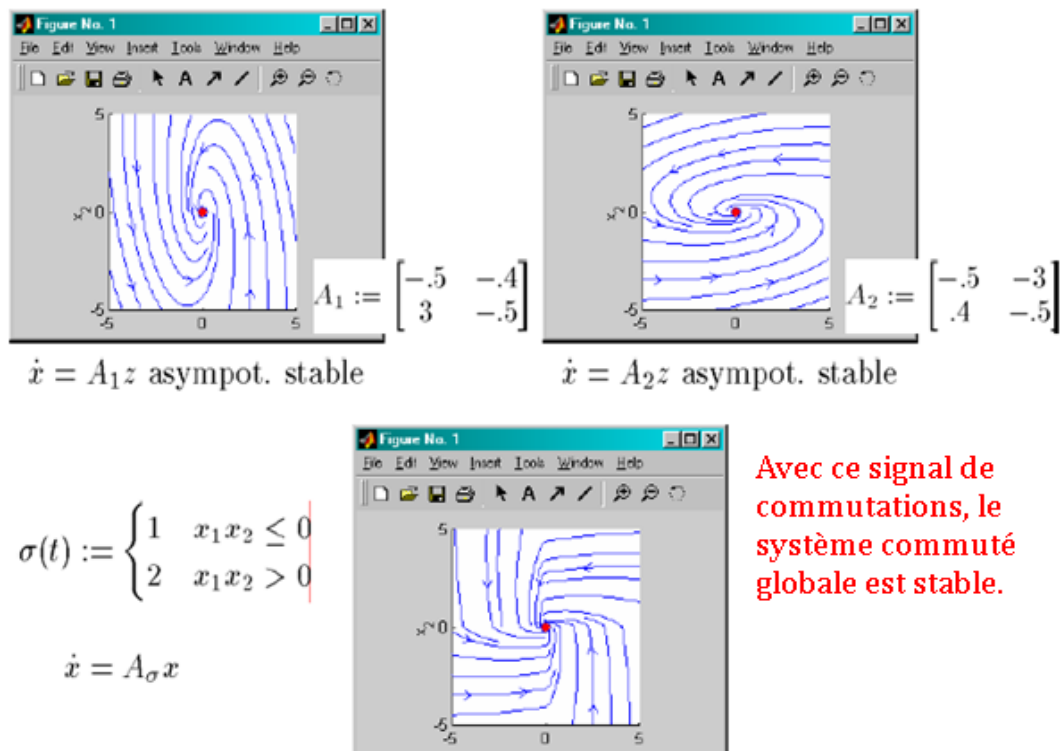


Figure 55: Commuter entre des sous-systèmes stables donne un système stable.

La simulation numérique montre que le système commuté global avec le premier signal est instable, alors qu'avec le deuxième signal est stable.

De la même manière, la figure suivante illustre le cas où les deux sous systèmes sont instables ; là encore, le système commuté global peut être asymptotiquement stable, ou instable, suivant le signal de commutations choisi.

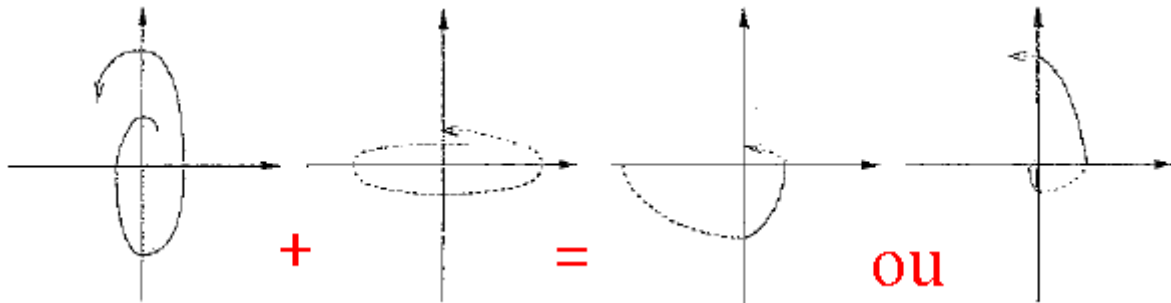


Figure 56: Switch entre des sous-systèmes instables.

### 1.1.2 Exemple 2

Soit les systèmes linéaires :

$$\dot{x} = A_1 x \quad \text{et} \quad \dot{x} = A_2 x \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont tous les deux instables. Considérons le signal de commutation défini par :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 x_2 \geq 0 \\ 2 & \text{si } x_1 x_2 < 0 \end{cases}$$

Et le système commuté :  $\dot{x} = A_\sigma x$

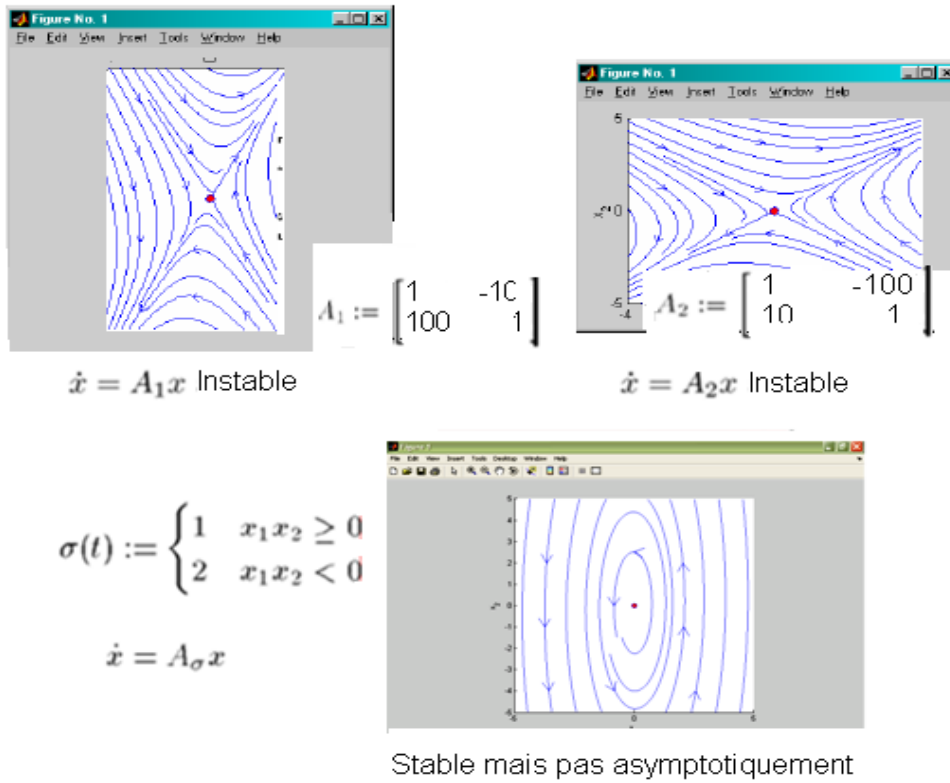


Figure 57: Simulation numérique de l'exemple 2

La simulation numérique montre que le système commuté global est stable mais pas asymptotiquement.

### 1.1.3 Exemple 3

Soit les systèmes linéaires :

$$\dot{x} = A_1 x \text{ et } \dot{x} = A_2 x \text{ avec } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont tous les deux instables. Puis considérons le signal de commutation défini par :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 x_2 < 0 \\ 2 & \text{si } x_1 x_2 \geq 0 \end{cases},$$

et le système commuté :

$$\dot{x} = A_\sigma x$$

La simulation numérique montre que le système commuté global est instable.

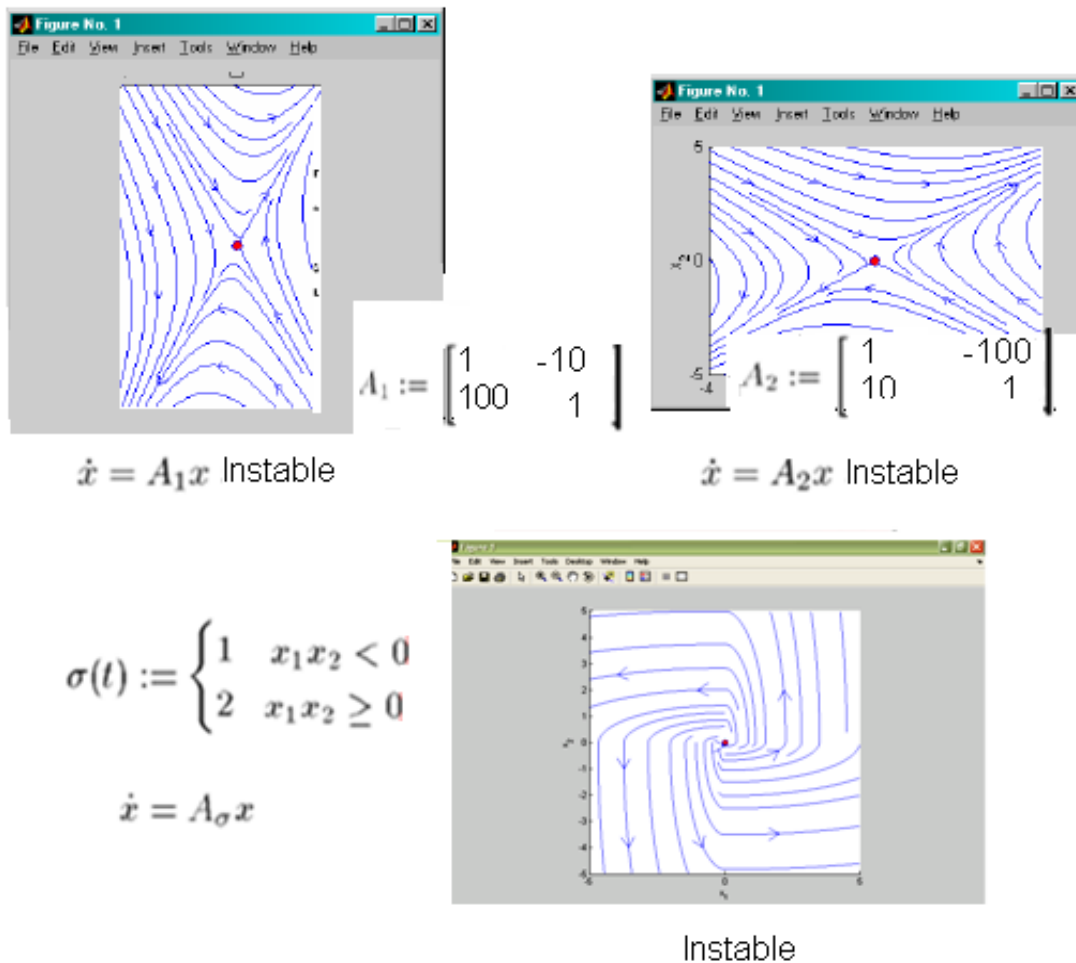


Figure 58: Simulation numérique de l'exemple 3.

De ces trois exemples, les faits suivants peuvent être déduits :

- Un switch (non contrôlé) peut déstabiliser un système commuté, même si tous les sous systèmes sont stables (pris chacun individuellement).
- On peut stabiliser un système commuté par le moyen d'un switch contrôlé approprié même si tous les sous systèmes (pris séparément) sont instables.

C'est pour cela que nous allons étudier les deux problèmes suivants :

- ✗ **Problème N°1** : trouver les conditions qui garantissent la stabilité asymptotique d'un système commuté pour un signal de commutation arbitraire (c'est-à-dire, pour n'importe quel signal de commutations).
- ✗ **Problème N° 2** : si un système n'est pas asymptotiquement stable pour n'importe quel signal de commutations, identifier les signaux de commutations possibles pour lesquels il sera asymptotiquement stable.

Le premier problème est particulièrement intéressant quand le mécanisme de commutation est inconnu, ou trop compliqué pour être utile dans une analyse de stabilité.

---

En étudiant le premier problème, nous sommes amenés à chercher les sources probables d'instabilité, ce qui peut être un bon début pour l'investigation du second problème.

Dans le contexte du deuxième problème, il est naturel de faire la distinction entre deux situations : si quelques ou tous les sous-systèmes sont asymptotiquement stables, il serait particulièrement intéressant de caractériser- de la façon la plus complète possible- la classe des signaux de commutations qui préservent cette stabilité asymptotique. Des signaux comme cela existent forcément, il suffit de poser  $\sigma(t) \equiv p$  où  $p$  représente l'indice d'un sous-système asymptotiquement stable.

D'un autre côté, si tous les sous-systèmes sont instables, notre tâche est de construire au moins un signal de commutations stabilisant le système commuté global; cela peut être difficile ou tout simplement impossible.

## 2 Stabilité sous n'importe quelle suite de commutations

### 2.1 Concepts de stabilité uniforme

Nous supposons le lecteur familier avec la théorie générale de stabilité au sens de Lyapunov (voir le premier chapitre ou bien (Khalil, 2002)).

Étant donnée une famille de systèmes (1.1), nous voulons étudier la question suivante : quand-est ce que le système (1.3) est asymptotiquement stable pour toute suite (signal) de commutations  $\sigma$  ?

On suppose ici que les sous-systèmes (pris individuellement) ont l'origine pour point d'équilibre commun, i.e.  $f_p(0) = 0$  pour tout  $p \in \mathcal{P}$ .

Il est évident qu'une condition *nécessaire* pour la stabilité asymptotique sous n'importe quelle suite de commutations, est que tous les sous-systèmes soient stables asymptotiquement. En effet, si le  $p^{\text{ième}}$  est instable pour un  $p \in \mathcal{P}$  alors le système commuté est instable pour  $\sigma(t) \equiv p$ .

C'est pourquoi, nous allons dans cette partie supposer que tous les sous-systèmes sont asymptotiquement stables.

D'après les exemples précédents, nous savons que cette condition n'est pas suffisante ; nous devons donc déterminer quels sont les autres conditions à imposer pour aboutir à la stabilité (éventuellement asymptotique) des systèmes de la forme (1.1).

Rappelons que d'après l'équivalence entre le système commuté (1.3) pour  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, m\}$  et le système contrôlé (1.5), la stabilité asymptotique de (1.3) pour n'importe quelle suite de commutations correspond à un « domaine » de contrôlabilité, c'est-à-dire que pour n'importe quel contrôle admissible, la trajectoire de la solution doit s'approcher de l'origine.

Au lieu de la stabilité asymptotique pour une suite de commutations particulière, une propriété plus forte est désirée: la stabilité asymptotique ou exponentielle *uniforme* par rapport à l'ensemble des suites de commutations. Voici maintenant les concepts de stabilité modifiés pour s'adapter aux systèmes commutés :

## 2.2 Les concepts de stabilité élargis aux systèmes commutés

### Définitions

On dit que le système commuté (1.3) est *uniformément asymptotiquement stable* s'il existe une constante positive  $\delta$  et une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$ <sup>2</sup> telles que pour toute suite de commutations  $\sigma$  la solution de (1.3) avec  $|x(0)| \leq \delta$  vérifie l'inégalité :

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

Si la fonction  $\beta$  prend la forme :  $\beta(r, s) = cre^{-\lambda s}$  pour  $c, \lambda > 0$  l'inégalité plus haut prend alors la forme :

$$|x(t)| \leq c|x(0)|e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

et le système (1.3) est dit *uniformément exponentiellement stable*.

Si les deux inégalités (2.1) et (2.2) sont valides pour toutes les suites de commutations et toutes les conditions initiales, on obtient la *stabilité uniforme asymptotique globale* (GUAS) et la *stabilité uniforme exponentielle globale* (GUES), respectivement.

Des définitions équivalentes peuvent être exprimées en  $\varepsilon$  et  $\delta$ .

Le terme « uniforme » ici est utilisé pour décrire l'uniformité par rapport aux signaux de commutations et non pas par rapport au temps initial comme c'est souvent le cas dans la théorie des systèmes évolutifs continus classique.

## 2.3 Les fonctions de Lyapunov communes

Le théorème de stabilité de Lyapunov (connu dans la théorie classique) admet une extension directe qui est un outil de base pour étudier la stabilité uniforme des systèmes commutés (1.3).

Cette extension est obtenue en exigeant l'existence d'une fonction de Lyapunov pour laquelle les dérivées le long des solutions de tous les systèmes de la famille (1.1) vérifient quelques inégalités appropriées.

### Définition

Étant donnée la fonction *continûment dérivable* ( $C^1$ ), *définie positive* notée :

<sup>2</sup> Voir la définition et certaines propriétés des fonctions  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$ , et  $\mathcal{KL}$  dans le chapitre 1.

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

On dit que  $V$  est une fonction commune de Lyapunov pour la famille du système (1.1) s'il existe une fonction continue définie positive  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) \leq -W(x) \quad \forall x, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2.3)$$

Nous allons énoncer un théorème qui sera utile pour le reste du document :

*Théorème 1 (Liberzon, 2003)*

*Si tous les systèmes dans la famille (1.1) partagent une fonction de Lyapunov commune radialement non bornée, alors le système commuté (1.3) est (GUAS).*

Ce théorème peut être prouvé de la même façon que pour son analogue dans la théorie classique de stabilité de Lyapunov (voir la preuve en chapitre 1). Ce qui est important à retenir c'est que le taux de décroissance de  $V$  ne doit pas être affecté par les commutations et donc la stabilité asymptotique est uniforme par rapport à  $p$ .

**Remarque 1**

*Dans le cas particulier où  $V$  et  $W$  sont quadratiques (ou plus généralement bornées par le haut et par le bas par des monômes du même degré en  $|x|$ ) le système sera GUES.*

**Remarque 2**

Si nous remplaçons l'inégalité (2.3) par la condition plus faible

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) < 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2.4)$$

alors, le résultat ne tient plus, voici un exemple explicatif :

**Exemple :**

Soit  $f_p(x) = -px$  et  $\mathcal{P} = (0,1]$ , cela donne une famille de systèmes où chacun est globalement asymptotiquement stable, et a  $V(x) = \frac{x^2}{2}$  comme fonction de Lyapunov.

Le système commuté résultant :

$$\dot{x} = -\sigma x,$$

admet les solutions

$$x(t) = e^{-\int_0^t \sigma(\tau) d\tau} x(0).$$

Ainsi, tout signal de commutations  $\sigma \in \mathcal{L}_1$  produit une trajectoire qui ne tend pas vers 0.

Cela arrive à cause du taux de décroissance de  $V$  le long du  $p^{\text{ième}}$  sous système qui est donné par :

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) = -px^2 \quad (2.5)$$

qui devient de plus en plus petit avec des valeurs de plus en plus petites de  $p$ , on n'aura donc pas la stabilité asymptotique si  $\sigma$  va vers 0 trop rapidement.

Notons aussi que  $V$  n'est pas une fonction commune de Lyapunov en vue de la définition plus haut, puisque les fonctions du membre droit de (2.5) pour  $0 < p \leq 1$  ne peuvent pas être toutes bornées par une seule fonction définie négative.

La propriété énoncée en (2.4) sera suffisante pour la GUAS si l'ensemble  $\mathcal{P}$  est *compact*, et  $f_p$  dépend continûment de  $p$  pour chaque  $x$  fixé. (Sous ces conditions nous pouvons construire  $W$  en prenant le maximum du second membre de (2.4) sur  $\mathcal{P}$  qui est bien défini).

Ce résultat devient trivial si  $\mathcal{P}$  est un ensemble fini, et si dans la suite il est infini, nous supposons qu'il est compact.

### Exemple 1:

Soient deux systèmes asymptotiquement stables définis par les matrices suivantes :

$$\dot{x} = A_1 x \quad \text{et} \quad \dot{x} = A_2 x \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0.25 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.25 & -1 \end{pmatrix}$$

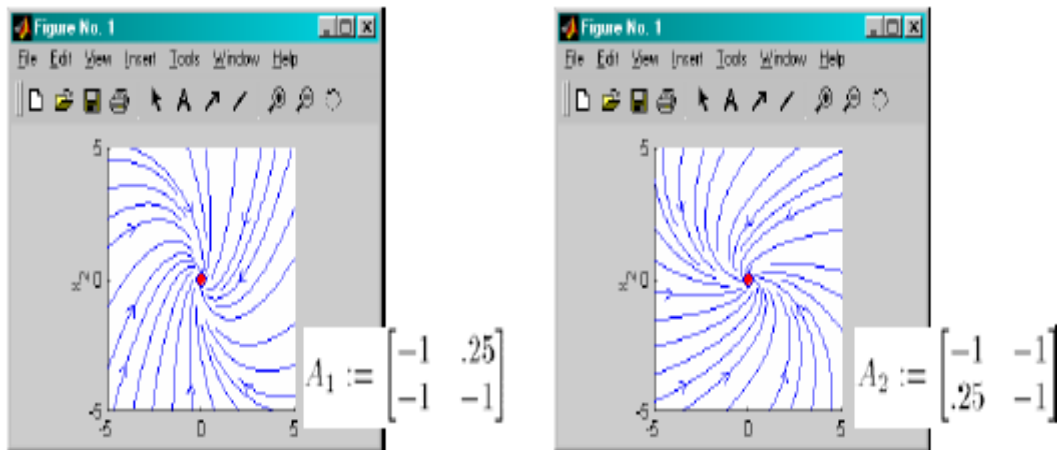


Figure 59: Simulation numérique des deux systèmes de l'exemple 1.

On considère le système commuté  $\dot{x} = A_\sigma x \quad \sigma = 1,2$ .

La fonction  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  est une fonction commune de Lyapunov, en effet :

$$\frac{\partial V}{\partial x} A_1(x) = -x_1^2 - 1.4374x_2^2 - (x_1 + .75x_2)^2 < 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} A_2(x) = -x_1^2 - 1.4374x_2^2 - (x_1 + .75x_2)^2 < 0$$

ce qui permet de conclure la stabilité uniforme asymptotique.

Voici un autre exemple :

### Exemple 2

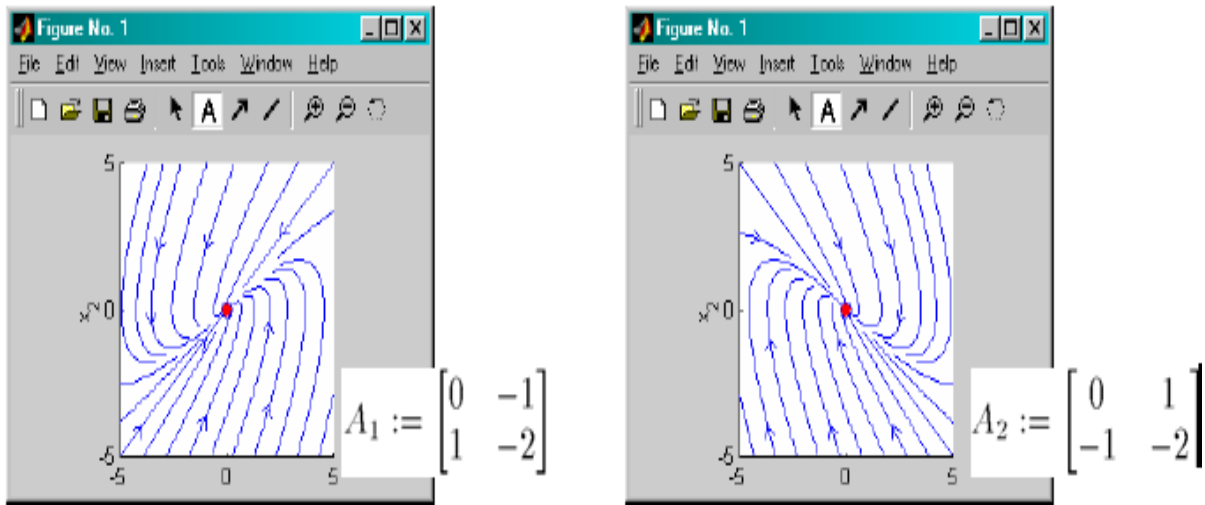


Figure 60: Simulation numérique des deux systèmes de l'exemple 2.

Et on considère le système commuté  $\dot{x} = A_\sigma x \quad \sigma = 1,2$ .

La fonction  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  est une fonction commune de Lyapunov, en effet :

$$\frac{\partial V}{\partial x} A_1(x) = -4x_2^2 \leq 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} A_2(x) = -4x_2^2 \leq 0.$$

Ce qui permet de conclure la stabilité uniforme mais non asymptotique.

### Remarque 3

*Si  $\mathcal{P}$  n'est pas un ensemble discret, on peut considérer les systèmes évolutifs décrits par la formule (1.3) avec des signaux de commutations continus par morceaux (au lieu de constants par morceaux). L'existence d'une fonction de Lyapunov commune implique aussi la SUAG.*

Dans la suite, si  $\mathcal{P}$  est infini, nous supposons (raisonnablement) qu'il est compact.

## 2.4 Le théorème réciproque de Lyapunov

Nous nous intéresserons maintenant à l'identification des classes de systèmes commutés qui sont GUAS. L'approche la plus classique pour résoudre ce problème consiste à chercher une fonction de Lyapunov qui soit partagée par tous les sous-systèmes.

La question se pose alors de savoir si l'existence de cette fonction de Lyapunov commune est une condition plus sévère que la GUAS elle-même !

Une réponse négative à cette question - et par la même occasion - une justification de l'approche des fonctions communes de Lyapunov- nous vient du théorème inverse de Lyapunov pour les systèmes commutés, qui dit que la SUAG d'un système commuté implique l'existence d'une fonction commune de Lyapunov dès que la famille des sous-système (1.1) vérifie des conditions de régularité et de bornétude uniforme (par rapport à ).

Il est facile de voir, *et important à savoir*, que ces conditions sont automatiquement vérifiées si l'ensemble des indices  $\mathcal{P}$  est fini (rappelons que tous les champs de vecteurs  $f_p$  sont supposés être localement Lipschitz en  $x$ ).

### *Théorème 2*

*Si le système commuté (1.3) est (GUAS), si l'ensemble  $\{f_p(x), p \in \mathcal{P}\}$  est borné pour chaque  $x$  et si la fonction  $(x, p) \rightarrow f_p(x)$  est localement Lipschitz en  $x$  uniformément par rapport à  $p$ , alors tous les systèmes de la famille (1.1) partagent une fonction de Lyapunov commune radialement non bornée.*

Il y a un résultat très utile que nous trouvons particulièrement intéressant de citer ici comme corollaire. Il dit que sous les hypothèses du théorème 2, toutes les combinaisons convexes des sous-systèmes de la famille (1.1) sont aussi asymptotiquement stables, ces combinaisons (convexes) sont définies par le champ de vecteurs :

$$f_{p,q,\alpha}(x) = \alpha f_p(x) + (1 - \alpha) f_q(x), \quad p, q \in \mathcal{P}, \quad \alpha \in [0,1]$$

### *Corollaire 1*

*Sous les hypothèses du théorème 2, pour tout  $\alpha \in [0,1]$  et tout  $p, q \in \mathcal{P}$  le système*

$$\dot{x} = f_{p,q,\alpha}(x) \quad (2.6)$$

*est globalement asymptotiquement stable.*

Cela peut être prouvé en observant que la fonction commune de Lyapunov  $V$  du théorème 2 décroît le long des solutions de (2.6). En effet, de l'inégalité (2.3) on obtient aisément :

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_{p,q,\alpha}(x) = \alpha \frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) + (1 - \alpha) \frac{\partial V}{\partial x} f_q(x) \leq -W(x) \quad \forall x \quad (2.7)$$

---

### Remarque 3

La formule (2.7) veut dire même plus ; elle veut dire que la fonction  $V$  est une fonction de Lyapunov commune pour la famille élargie de systèmes :

$$\{\dot{x} = f_{p,q,\alpha}(x) : p, q \in \mathcal{P} \quad \alpha \in [0,1]\} \quad (2.8).$$

Par le théorème 2, le système commuté généré par cette famille est aussi GUAS.

Une combinaison convexe de deux champs de vecteur asymptotiquement stables n'est pas forcément asymptotiquement stable, en voici un exemple démonstratif :

Considérons les deux matrices de Hurwitz suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.1 & -1 \\ 2 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & 2 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Leur moyenne  $(A_1 + A_2)/2$  n'est pas de Hurwitz.

La stabilité des combinaisons convexes nous offre un moyen facile de vérifier la GUAS, pour voir que cette condition n'est pas suffisante. Considérons l'exemple suivant :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.4 \\ 3 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & -3 \\ 0.4 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que toutes les combinaisons convexes de ces deux matrices sont de Hurwitz, les trajectoires des systèmes  $\dot{x} = A_1x$  et  $\dot{x} = A_2x$  sont très similaires mais par la commutation, il est possible d'obtenir une trajectoire non bornée.

## 2.5 Stabilité des systèmes commutés linéaires

Nous allons voir dans la suite comment se traduisent les résultats qu'on a vu précédemment dans le cas linéaire de la forme (1.4) où tous les sous-systèmes sont linéaires.

Rappelons d'abord que pour un système linéaire  $\dot{x} = Ax$ , la stabilité exponentielle globale est équivalente à la condition (plus faible) d'attractivité locale, ce qui peut aussi être formulé par une matrice  $A$  de Hurwitz<sup>3</sup>, ou l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov :

$$V(x) = x^T P x \quad (2.9)$$

où  $P$  est une matrice symétrique définie positive.

Considérons maintenant le système commuté (1.4), supposons que  $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$  est un ensemble compact (par rapport à la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ) de matrices de Hurwitz.

Comme dans le cas des systèmes linéaires sans commutations ce qui va suivre est vrai :

---

<sup>3</sup> C'est-à-dire qui admet des valeurs propres se trouvant toutes dans le demi-plan complexe gauche et ouvert.

### Théorème 3

Le système commuté (1.4) est GUES ssi il est localement attractif pour toute suite de commutations.

Pour les systèmes commutés linéaires, il est naturel de considérer des fonctions communes de Lyapunov qui soient quadratiques, c'est-à-dire des fonctions qui soient de la forme (2.9) de façon à ce que pour une certaine matrice symétrique définie positive  $Q$  on ait :

$$A_p^T P + P A_p \leq -Q \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2.10)$$

(L'inégalité  $M \leq N$  ou  $M < N$  pour deux matrices symétriques  $M$  et  $N$  veut dire que la matrice  $M - N$  est semi définie négative ou définie négative respectivement).

En vue de l'hypothèse de compacité faite auparavant, l'inégalité (2.10) est équivalente à la suivante, qui est plus simple :

$$A_p^T P + P A_p < 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2.11)$$

L'inégalité (2.11) est un système d'Inégalités Matricielles Linéaires, appelé couramment LMI (Linear Matrix Inequalities). Une raison qui rend l'approche des fonctions quadratiques communes de Lyapunov attractive, c'est que et qu'il y a des moyens numériques très efficaces pour résoudre les LMI, et qu'on dispose de moyens (algébriques) pour juger l'infaisabilité de (2.11) :

#### Proposition

Pour  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, m\}$  une fonction quadratique commune de Lyapunov n'existe pas ssi, il existe des matrices  $R_1, \dots, R_m$  non toutes nulles, symétriques, définies positives vérifiant l'équation :

$$\sum_{i=1}^m (A_i R_i + R_i A_i^T) > 0 \quad (2.12)$$

Esquisse de démonstration :

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \text{tr}[R_i(A_i^T P + P A_i)] &= \sum_{i=1}^m \text{tr}[(R_i A_i^T P + R_i P A_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m \text{tr}[(P R_i A_i^T + P A_i R_i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \left[ \sum_{i=1}^m (PR_i A_i^T + PA_i R_i) \right] \\
&= \text{tr} \left[ P \sum_{i=1}^m (R_i A_i^T + A_i R_i) \right]
\end{aligned}$$

Rappelons que si  $M$  et  $N$  sont deux matrices définies positives alors :

$$\begin{aligned}
\text{tr}(MN) &= \text{tr}(NM) > 0 \\
&= \text{tr} \left[ P \sum_{i=1}^m (A_i R_i + R_i A_i^T) \right]
\end{aligned}$$

Une question se pose alors, est-il suffisant de travailler seulement avec des fonctions communes de Lyapunov qui soient quadratiques ? En d'autres termes, si le système commuté linéaire (1.4) est GUES et donc tous les systèmes de la famille :

$$\dot{x} = A_p x, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.13)$$

partagent une fonction commune de Lyapunov (par les vertus du théorème 2), est-il vrai que nous pourrions toujours trouver une fonction de Lyapunov commune qui soit *quadratique* ?

L'exemple suivant montre que la réponse à cette question est négative, c'est-à-dire que même un système commuté linéaire qui soit GUES, n'implique pas l'existence d'une fonction de Lyapunov commune qui soit quadratique.

Prenons  $\mathcal{P} = \{1,2\}$  et soient les deux matrices de Hurwitz suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}$$

✘ **Fait numéro 1** : les systèmes  $\dot{x} = A_1 x$  et  $\dot{x} = A_2 x$  ne partagent pas une fonction commune de Lyapunov qui soit quadratique (i.e de la forme (2.9))

Pour montrer cela, et sans perte de généralités, nous pouvons chercher une matrice symétrique définie positive  $P$  de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

qui vérifie l'inégalité (2.11). On a

$$-A_1^T P - P A_1 = \begin{pmatrix} 2 - 2q & 2q + 1 - r \\ 2q + 1 - r & 2q + 2r \end{pmatrix}$$

qui sera positif seulement si :

$$q^2 + \frac{(r-3)^2}{8} < 1 \quad (2.14)$$

De même

$$-A_2^T P - P A_2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{q}{5} & 2q + 10 - \frac{r}{10} \\ 2q + 10 - \frac{r}{10} & 20q + 2r \end{pmatrix}$$

sera positive si :

$$q^2 + \frac{(r - 300)^2}{800} < 100 \quad (2.15)$$

Nous pouvons aisément vérifier que les deux ellipsoïdes d'équations (2.14) et (2.15) sont d'intersection vide, comme montré sur la figure suivante :

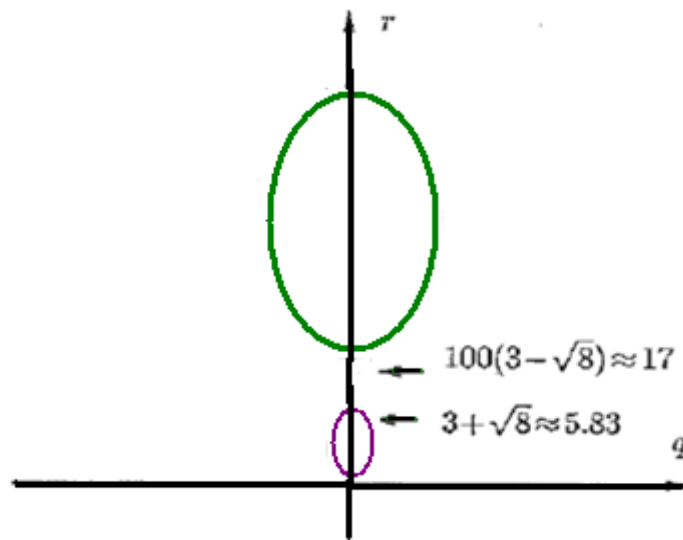


Figure 61: Les ellipses de l'exemple.

✘ Fait numéro 2 le système commuté de l'exemple est bien GUES.

Ce fait peut être montré en étudiant le comportement du système par la technique du « pire cas de commutations », qui sera défini comme suit :

Les vecteurs  $A_1 x$  et  $A_2 x$  sont colinéaires sur deux lignes qui passent par l'origine, dans tous les autres points de  $\mathbb{R}^2$ , un des deux vecteurs pointe vers l'extérieur par rapport à l'autre (c'est-à-dire qu'il forme un petit angle avec la direction radiale en cours). La stratégie du « pire cas de commutations » consiste à suivre le vecteur qui pointe à l'extérieur. Comme les commutations arrivent sur les deux lignes, la trajectoire qui en résulte va tendre vers 0, car la distance de l'origine va décroître après une rotation (Fig.62 suivante) :

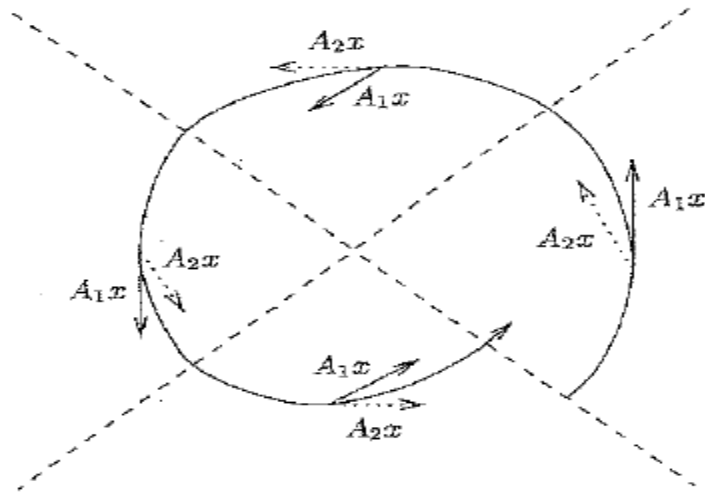


Figure 62: Le pire cas de commutations de l'exemple.

Les trajectoires de tout autre signal de commutations convergent aussi vers l'origine, et le pire cas de commutations décrit plus haut représente une borne inférieure uniforme des taux de convergence, c'est pour cela que le système commuté est GUES.

### 3 Commutativité et stabilité des systèmes commutés

La stabilité des systèmes commutés peut être étudiée sous des angles différents. Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'influence de la relation de commutativité sur la stabilité des systèmes commutés.

#### 3.1 Les systèmes commutant :

##### 3.1.1 Le cas linéaire

Considérons le système commuté linéaire (1.4) et supposons pour le moment que  $\mathcal{P} = \{1,2\}$  et que les deux matrices  $A_1$  et  $A_2$  commutent, c'est-à-dire,  $A_1A_2 = A_2A_1$ . Ou alors  $[A_1, A_2] = 0$  où  $[.,.]$  représente le crochet de Lie défini par :

$$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 \quad (2.16)$$

Il est bien connu que dans ce cas, nous allons avoir  $e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_2}e^{A_1}$  (cela peut être déduit de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff) :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}([A,[A,B]] + [B,[A,B]]) + \dots}$$

Ou plus généralement :

$$e^{A_1 t} e^{A_2 \tau} = e^{A_2 \tau} e^{A_1 t} \quad \forall t, \tau > 0 \quad (2.17)$$

Cela veut dire que les flux des deux systèmes  $\dot{x} = A_1 x$  et  $\dot{x} = A_2 x$  commutent.

Maintenant, considérons un signal de switch arbitraire  $\sigma$  et notons par  $t_i$  et  $\tau_i$  les longueurs des intervalles temporeux sur les quels  $\sigma$  prend la valeur 1, puis 2 respectivement (voir figure 12).

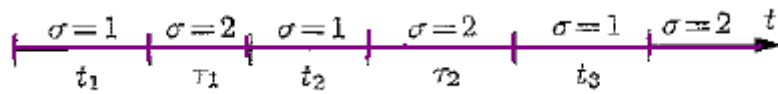


Figure 63: Commuter entre deux sous-systèmes.

La solution engendrée par ce switch va s'écrire :

$$x(t) = \dots e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 t_2} e^{A_2 \tau_1} e^{A_1 t_1} x(0).$$

Qui, en vue de (2.17) est égale à :

$$x(t) = \dots e^{A_2 \tau_2} e^{A_2 \tau_1} \dots e^{A_1 t_2} e^{A_1 t_1} x(0) \quad (2.18)$$

Un autre fait qu'on peut déduire de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff c'est que :

$$[A, B] = 0 \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$$

Les multiples scalaires par la même matrice évidemment commutent, on aura alors :

$$x(t) = e^{A_2(\tau_1 + \tau_2 + \dots)} e^{A_1(t_1 + t_2 + \dots)} x(0) \quad (2.19)$$

Puisqu'au moins une des deux série  $t_1 + t_2 + \dots$  ou  $\tau_1 + \tau_2 + \dots$  converge vers  $\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ , la matrice exponentielle correspondante converge vers zéro (à cause de la stabilité des deux matrices  $A_1$  et  $A_2$ ). Nous avons donc prouvé que  $x(t) \rightarrow 0$  pour un signal de commutations arbitraires .

La généralisation à  $\mathcal{P}$  contenant plus de deux éléments (mais fini) est directe, nous avons le résultat suivant :

#### *Théorème 4*

*Si  $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$  est un ensemble fini de matrices de Hurwitz qui commutent deux à deux, alors le système commuté (linéaire) correspondant est GUES.*

L'argument plus haut ne démontre que l'attractivité globale, indépendamment du signal de commutations. Pour montrer le théorème 4, nous pouvons invoquer le théorème 3, ou utiliser une méthode plus directe qui consiste à construire une fonction de Lyapunov commune de manière itérative :

Voyons d'abord cette construction quand  $\mathcal{P} = \{1,2\}$ .

On aura deux sous-systèmes avec les équations de Lyapunov suivantes :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I \quad \text{équation 1}$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1 \quad \text{équation 2}$$

(bien sûr, n'importe quelle autre matrice symétrique définie négative peut être utilisée à la place de  $-I$ ).

Montrons que  $V(x) = x^T P_2 x$  est une fonction de Lyapunov commune pour les deux sous-systèmes.

Pour le deuxième sous-système on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_2 x + x^T P_2 \dot{x} \\ &= x^T [A_2^T P_2 x + x^T P_2 A_2] x \\ &= -x^T P_1 x < 0 \end{aligned}$$

Pour le premier sous-système on aura

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_2 x + x^T P_2 \dot{x} \\ &= x^T (A_1^T P_2 + P_2 A_1) x \end{aligned}$$

En utilisant l'équation 1 et l'équation 2, et le fait que les deux matrices commutent on aura :

$$\begin{aligned} A_1^T (-A_2^T P_2 - P_2 A_2) + (-A_2^T P_2 - P_2 A_2) A_1 &= -I \\ A_2^T (A_1^T P_2 + P_2 A_1) + (A_1^T P_2 + P_2 A_1) A_2 &= I \end{aligned}$$

$I$  est définie positive,  $A_2$  est stable alors, cette dernière équation est une équation de Lyapunov admettant une solution unique symétrique définie négative, ce qui veut dire que

$$A_1^T P_2 + P_2 A_1$$

est définie négative comme désiré.

Nous pouvons généraliser ce résultat comme suit :

Soit  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  un ensemble de matrices de Hurwitz qui commutent deux à deux, soit  $P_1$  l'unique solution (symétrique et définie positive) de l'inégalité de Lyapunov :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 \leq -I$$

Pour  $i = 1, \dots, m$ , soit  $P_i$  les solutions (uniques symétriques définies positives) des inégalités de Lyapunov  $A_i^T P_i + P_i A_i \leq -P_{i-1}$ , et  $P_0 = I$  alors la fonction :

$$V(x) = x^T P_m x \quad (2.20)$$

est la fonction de Lyapunov quadratique commune désirée pour le système commuté (1.4).

Pour voir pourquoi cela est vrai, observons que la matrice  $P_m$  est donnée par la formule :

$$P_m = \int_0^\infty e^{A_m^T t_m} \dots \left( \int_0^\infty e^{A_1^T t_1} e^{A_1 t_1} dt_1 \right) \dots e^{A_m t_m} dt_m$$

Fixons un  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , puisque les matrices exponentielles commutent, nous pouvons les regrouper et avoir :

$$P_m = \int_0^\infty e^{A_i^T t_i} Q_i e^{A_i t_i} dt_i \quad (2.21)$$

Où  $Q_i$  est donnée par une expression qui fait intervenir  $(m - 1)$  intégrales.

Cette matrice  $Q_i$  peut donc être obtenue en appliquant  $(m - 1)$  étapes de l'algorithme précédant (sauf la  $i^{\text{ème}}$  étape), elle est donc définie positive.

Puisque (2.22) implique  $A_i^T P_m + P_m A_i \leq -Q_i$ , on conclut que  $V$  donnée par (2.20) est une fonction de Lyapunov pour le  $i^{\text{ème}}$  système.

Il est clair aussi qu'en changeant l'ordre des matrices  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  la matrice résultat  $P_m$  n'est pas affectée.

### Exemple

Soit le système commuté linéaire engendré par les deux matrices qui commutent suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'équation  $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I$  donne  $P_1 = \frac{1}{2} I$ .

En substituant  $P_1$  dans

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1, \text{ on aura } P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Et  $V(x) = x^T P_2 x$  est une fonction de Lyapunov commune pour les deux sous systèmes.

### Remarque

La commutativité est une condition suffisante mais pas nécessaire pour avoir une fonction de Lyapunov commune.

Nous pouvons le constater grâce à l'exemple suivant :

### Exemple

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ne commutent pas pourtant on peut vérifier que  $V(x) = x^T x$  est une fonction de Lyapunov commune.

### 3.1.2 Le cas non linéaire

Pour étendre les résultats précédent aux systèmes non linéaires, nous avons besoin de rappeler la notion de crochets de Lie (ou commutateur de Lie) pour des champs de vecteurs  $C^1$ . C'est donc le champ de vecteurs défini par la formule :

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} f_2(x)$$

Pour des champs de vecteurs linéaires,  $f_1(x) = A_1 x$  et  $f_2(x) = A_2 x$  le second membre de l'égalité devient  $:(A_1 A_2 - A_2 A_1)x$  ce qui consistant avec la définition (2.16) du crochet de Lie pour deux matrices qu'on a donné précédemment à part pour la différence de signe.

Si le crochet de Lie de deux champs de vecteurs est identiquement nul, on dira que ces deux champs de vecteurs commutent, le résultat suivant est une généralisation directe du théorème 4.

#### *Théorème 5*

*Si  $\{f_p, p \in \mathcal{P}\}$  est un ensemble fini de champs de vecteurs de classe  $C^1$  qui commutent deux à deux, et que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour tous les sous-systèmes de la famille (1.1) alors le système commuté correspondant (1.3) est GUAS.*

La preuve de ce théorème établie la propriété GUAS directement sans construire explicitement une fonction commune de Lyapunov .

Nous avons deux alternatives qui nous permettent de construire cette fonction de Lyapunov commune mais malheureusement, elles requièrent une hypothèse plus forte, que tous les sous-systèmes de la famille (1.1) soient *exponentiellement stables*, et puis, elles nous donnent une fonction de Lyapunov commune valable *seulement localement*, c'est-à-dire dans un voisinage de l'origine, nous allons les résumer par la suite.

La première s'appelle la méthode indirecte de Lyapunov (extension de celle qui existe déjà en théorie des systèmes continus classique).

Considérons les linéarisations des sous-systèmes :

$$A_p = \frac{\partial f_p}{\partial x}(0), \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.22)$$

#### *Remarque 4*

*Si les champs de vecteurs commutent, alors leurs Linéarisations commutent, l'inverse n'est pas forcément vrai.*

Les matrices  $A_p$  sont Hurwitz ssi les champs de vecteurs  $f_p$  sont (localement) exponentiellement stables, donc une fonction quadratique commune de Lyapunov pour les linéarisations construite comme expliqué précédemment sert comme fonction de Lyapunov commune locale à la famille originelle finie de systèmes non linéaires (1.1).

La deuxième méthode est une procédure de construction itérative, parallèle à celle pour les systèmes Linéaires (vue précédemment) mais en travaillant directement avec les champs de vecteurs, (sa praticité reste à l'appréciation du lecteur !)

Considérons toujours que  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, m\}$  et supposons que les systèmes dans (1.1) sont exponentiellement stables, pour chaque  $p \in \mathcal{P}$  notons par  $\varphi_p(t, z)$  la solution du système  $\dot{x} = f_p(x)$  avec la condition initiale  $(0) = z$ , nous allons définir les fonctions suivantes :

$$V_1(x) = \int_0^T |\varphi_1(\tau, x)|^2 d\tau$$

$$V_i(x) = \int_0^T V_{i-1}(\varphi_i(\tau, x)) d\tau, \quad i = 2, \dots, m$$

Où  $T$  est une constante positive suffisamment large, alors  $V_m$  est une fonction de Lyapunov commune locale pour la famille (1.1).

De plus, si les fonctions  $f_p, p \in \mathcal{P}$  sont globalement Lipschitz, alors nous obtenons une fonction de Lyapunov commune globale.

Pour le cas des systèmes linéaires  $f_p(x) = A_p x, p \in \mathcal{P}$  on retrouve l'algorithme de construction déjà vu en posant  $T = \infty$ .

## 3.2 Algèbres de Lie solvables et Nilpotentes

### 3.2.1 Systèmes linéaires

Considérons encore le système commuté de (1.4), en vue des anciens résultats il est raisonnable de penser que si les matrices  $A_p, p \in \mathcal{P}$  ne commutent pas, la stabilité va dépendre toujours de la relation de commutativité entre elles. Un objet puissant pour révéler la nature de cette relation c'est l'Algèbre de Lie  $\mathcal{G} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}_{LA}$  engendrée par les matrices  $A_p, p \in \mathcal{P}$  par rapport au crochet de Lie standard (2.16). C'est un espace vectoriel linéaire de dimension au plus  $n^2$  engendré par les matrices données et tous leurs crochets de Lie (itératifs).

#### Remarque 5

*Le crochet de Lie de deux matrices de Hurwitz n'est plus Hurwitz, comme nous pouvons le constater de la formule suivante :*

$$\text{tr}[A, B] = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

Au-delà du cas de commutativité, les classes les plus simples d'Algèbre de Lie sont les Algèbres nilpotentes et solvables.

Une Algèbre de Lie est dite nilpotente, si tous ses crochets de Lie à partir d'un ordre suffisamment grand sont nuls, la classe des Algèbres de Lie solvables est plus large, c'est celle où tous les crochets de Lie à partir d'un certain ordre (suffisamment grand) d'une certaine structure sont nuls.

Le premier cas non trivial, c'est lorsqu'on a  $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ ,  $[A_1, A_2] \neq 0$  et

$[A_1, [A_1, A_2]] = [A_2, [A_1, A_2]] = 0$ . Cela veut dire que  $\mathfrak{g}$  est une Algèbre de Lie nilpotente de degré 2 et de dimension 3, (comme une base nous pouvons choisir  $\{A_1, A_2, [A_1, A_2]\}$ ), la stabilité du système commuté correspondant à cette situation a été étudiée, mais en imposant que les instants de commutations soient des entiers multiples d'un nombre entier positif, dans l'esprit de la formule (2.19), la solution du système commuté peut s'écrire :

$$x(t) = e^{A_2 \tau_1} e^{A_1 t_1} e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 t_2} e^{A_2 \tau_3} x(0)$$

Où au moins l'une des quantités  $\tau_1 t_1 \tau_2 t_2 \tau_3$  converge vers  $\infty$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Cette expression est une conséquence de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Comme pour le cas de commutativité, il s'en suit que le système commuté est GUES, pourvu que les matrices  $A_1$  et  $A_2$  soient de Hurwitz.

Le résultat général suivant –dont la preuve est résumée un peu plus bas- inclut le théorème 4 comme cas spéciale :

### *Théorème 6*

*Si  $A_p, p \in \mathcal{P}$  est un ensemble compact de matrices de Hurwitz et que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}_{LA}$  est solvable, alors le système commuté (1.4) est GUES.*

Un exemple standard d'algèbre de Lie solvable est celui généré par les matrices (non strictement) triangulaires supérieures, c'est-à-dire avec des zéros partout sous la diagonale principale. Nous allons exploiter le fait que - grâce à un changement de coordonnées - toutes les algèbres de Lie solvables se caractérisent de cette façon. (C'est une conséquence du théorème de Lie bien connu en théorie d'algèbre de Lie).

### *Proposition 1 (de Lie)*

*Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie solvable, alors il existe un changement de coordonnées linéaire (pouvant être complexe) grâce au quel, toutes les matrices de  $\mathfrak{g}$  seront simultanément transformées à la forme triangulaire supérieure.*

En vue de ce résultat, on peut supposer sans perte de généralité, que toutes les matrices

$A_p, p \in \mathcal{P}$  sont triangulaires supérieures, le fait suivant peut alors être utilisé pour finir la preuve du théorème 6.

**Proposition 2**

*Si  $A_p, p \in \mathcal{P}$  est un ensemble compact de matrices de Hurwitz triangulaires supérieures, alors le système commuté linéaire (1.4) est GUES.*

Pour voir pourquoi cette proposition est vraie, supposons que  $\mathcal{P} = \{1,2\}$  et  $x \in \mathbb{R}^2$ , et soit les deux matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ 0 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -a_2 & b_2 \\ 0 & -c_2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Supposons pour simplifier que leurs entrées sont réelles, puisque les valeurs propres de ces matrices sont de parties réelles strictement négatives on aura  $a_i, c_i > 0, i = 1, 2$ ;

Maintenant, considérons le système commuté  $\dot{x} = A_\sigma(x)$ , la deuxième composante de  $x$  vérifie l'équation suivante :

$$\dot{x}_2 = -c_\sigma x_2$$

C'est pourquoi  $x_2$  décroît vers 0 de manière exponentielle avec un taux égal à  $\min\{c_1, c_2\}$

La première composante de  $x$  vérifie l'équation :

$$\dot{x}_1 = -a_\sigma x_1 + b_\sigma x_2$$

qui peut être vu comme un système exponentiellement stable  $\dot{x}_1 = -a_\sigma x_1$  perturbé par une entrée exponentiellement décroissante  $b_\sigma x_2$ , et donc  $x_1$  converge aussi vers 0 exponentiellement rapidement.

Ce n'est pas difficile d'étendre cet argument à des systèmes de plus grandes dimensions, par induction en commençant par la dernière composante et en remontant, et pour  $\mathcal{P}$  infini en supposant qu'il est compact.

Une autre preuve consiste à construire une fonction de Lyapunov commune pour la famille des systèmes (2.13). Cette construction est d'intérêt indépendant, en fait dans ce cas précis il est possible de trouver une fonction commune de Lyapunov qui soit quadratique de la forme (2.9) avec  $P$  matrice diagonale, nous allons illustrer cela sur un exemple avec les deux matrices dans (2.23), on cherche  $P$  sous la forme :

$$P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

avec  $d_1, d_2 > 0$ .

Un calcul direct nous donne :

$$-A_i^T P - P A_i = \begin{pmatrix} 2d_1 a_i & -d_1 b_i \\ -d_1 b_i & 2d_2 c_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Pour assurer que cette matrice est bien définie positive, nous pouvons prendre un  $d_1 > 0$  arbitraire, puis choisir un  $d_2 > 0$  suffisamment grand pour avoir :

$$4d_2 d_1 a_i c_i - d_1^2 b_i^2 > 0, \quad i = 1, 2.$$

Encore une fois, nous pouvons généraliser cet argument au cas  $\mathcal{P}$  infini compact, et utiliser l'induction sur la dimension du système donné.

### 3.2.2 Systèmes non linéaires

En utilisant la méthode indirecte de Lyapunov, nous pouvons obtenir la version locale du théorème 6 pour les systèmes commutés non linéaires.

Considérons la famille des systèmes non linéaires (1.1), supposons que toutes les fonctions  $f_p$  sont de classe  $C^1$  et vérifient  $f_p(0) = 0$ , considérons aussi la famille des linéarisations correspondantes  $A_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  définies par la formule (2.22).

#### Corollaire 2

*Supposons que les  $A_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  soient de Hurwitz,  $\mathcal{P}$  est un ensemble compact et  $\frac{\partial f_p}{\partial x}(x)$  dépend continûment sur  $p$  pour chaque  $x$  dans un certain voisinage de l'origine.*

*Si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}_{LA}$  est solvable, alors le système commuté (1.3) est localement uniformément exponentiellement stable.*

C'est une application presque directe de la méthode indirecte de Lyapunov, bien que quelques hypothèses techniques additionnelles doivent être imposées, parce qu'ici l'ensemble  $\mathcal{P}$  peut être infini. Les linéarisations  $A_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  forment un ensemble compact parce qu'elles sont définies par la formule (2.22) et  $\frac{\partial f_p}{\partial x}(x)$  est supposée être continûment dépendante de  $p$ . De plus, puisque les matrices  $A_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  sont de Hurwitz et génèrent une algèbre de Lie solvable, les systèmes correspondants linéaires (2.13) partagent une fonction quadratique commune de Lyapunov, (comme on l'a vu précédemment), il n'est donc pas difficile de montrer que cette fonction est aussi une fonction commune de Lyapunov.

## 4 Stabilité sous commutations contraintes

### 4.1 Fonctions Multiples de Lyapunov

Nous commençons cette partie par la description d'un outil très utilisé pour prouver la stabilité des systèmes commutés qui se base sur les fonctions multiples de Lyapunov, généralement une ou plus pour chacun des sous-systèmes à être commuté.

Pour fixer les idées, considérons le système commuté (1.3) avec  $\mathcal{P} = \{1,2\}$ . Supposons les deux systèmes  $\dot{x} = f_1(x)$  et  $\dot{x} = f_2(x)$  sont (globalement) asymptotiquement stables, et soient  $V_1$  et  $V_2$  leurs fonctions de Lyapunov (radialement non bornée) respectives.

On se pose dans la situation où une fonction commune de Lyapunov des deux systèmes n'est pas connue ou n'existe pas, dans ce cas, nous pouvons essayer d'analyser la stabilité en utilisant  $V_1$  et  $V_2$ .

Dans l'absence d'une fonction de Lyapunov commune, les propriétés de stabilité du système commuté dépend du signal de commutations  $\sigma$ , soient  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  les instants de commutations, s'il arrive que les valeurs de  $V_1$  et  $V_2$  coïncident à chaque instant de commutation, i.e :  $V_{\sigma(t_{i-1})}(t_i) = V_{\sigma(t_i)}(t_i)$  pour tout  $i$  alors  $V_\sigma$  est une fonction de Lyapunov pour le système commuté et donc, la stabilité asymptotique s'en suit. Cette situation est représentée sur la figure 61(a).

Bien que, en général, la fonction  $V_\sigma$  sera discontinue. Chaque  $V_p$  décroît quand le  $p^{\text{ième}}$  sous système est actif, elle pourrait croître quand il n'est pas actif, ce comportement est représenté sur la figure 61(b), l'idée essentielle qui nous permet de conclure la stabilité asymptotique dans cette situation est la suivante : regardons la valeur de  $V_p$  au début de chaque intervalle où  $\sigma = p$ , pour que le système commuté soit asymptotiquement stable, cette suite de valeurs doit être décroissante pour chaque  $p$ .

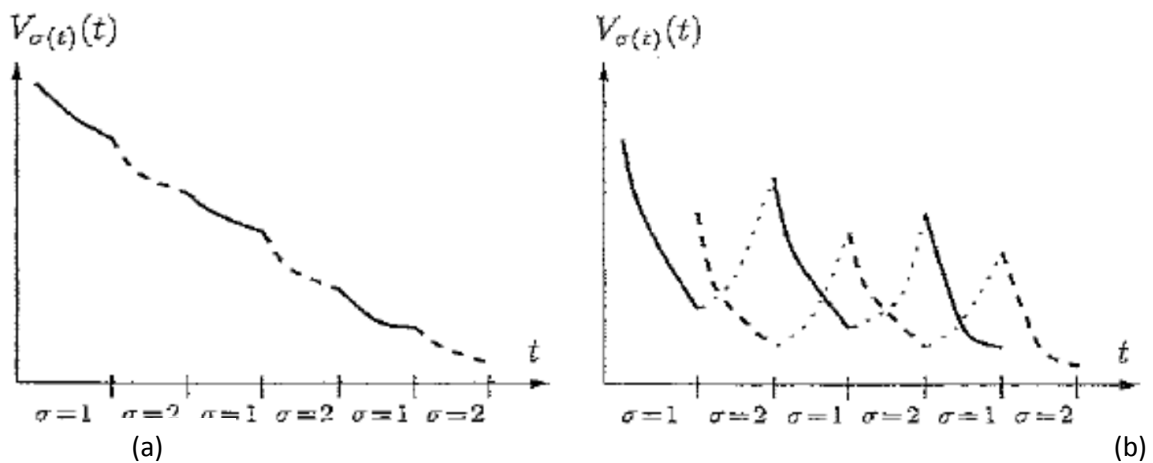


Figure 64: Deux fonctions de Lyapunov.

### Théorème 3.1

*Soit (1.1) une famille finie de systèmes globalement asymptotiquement stables, et soit  $V_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  une famille de fonctions de Lyapunov correspondantes (radialement non bornée). Supposons qu'il existe une famille de fonctions continues définies positives  $W_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  vérifiant la propriété que pour toute paire d'instant de commutations,*

$(t_i, t_j)$ ,  $i < j$  tels que  $\sigma(t_i) = \sigma(t_j) = p \in \mathcal{P}$  et  $\sigma(t_k) \neq p$  pour  $t_i < t_k < t_j$  on ait :

$$V_p(x(t_j)) - V_p(x(t_i)) \leq -W_p(x(t_i)) \quad (3.1)$$

Alors le système commuté (1.3) est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve :**

Nous allons d'abord montrer la stabilité de l'origine dans le sens de Lyapunov.

Soit  $m$  le nombre des éléments de  $\mathcal{P}$ , sans perte de généralité, on suppose que

$\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, m\}$ , considérons la boule centrée à l'origine de rayon arbitraire

$\varepsilon > 0$ . Soit  $\mathcal{R}_m$  l'ensemble de la forme  $\{x, V_m(x) \leq c_m\}$ ,  $c_m > 0$  qui est contenu dans cette boule. Pour  $i = m-1, \dots, 1$  soit  $\mathcal{R}_i$  l'ensemble de la forme  $\{x, V_i(x) \leq c_i\}$ ,  $c_i > 0$  qui est contenu dans l'ensemble  $\mathcal{R}_{i+1}$ .

Notons  $\delta$  le rayon d'une boule centrée à l'origine qui prend place dans l'intersection de toutes les suites d'ensembles construits plus haut, pour toute les permutations possibles de  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Supposons que la condition initiale vérifie  $|x(0)| \leq \delta$ . Si les  $k$  premières valeurs de  $\sigma$  sont distinctes, où  $k \leq m$  alors par construction, on aura  $|x(t_k)| \leq \varepsilon$ , après cela, les valeurs de  $\sigma$  vont se répéter, et la condition (3.1) garanti que la trajectoire d'état va toujours appartenir à l'un des ensembles cités plus haut, la figure ??? illustre cet argument pour le cas  $m = 2$ .

Pour montrer la stabilité asymptotique, observons que, comme  $\mathcal{P}$  est fini, il existe un indice  $q \in \mathcal{P}$  qui lui est associée une suite infinie d'instant de commutations  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots$  telle que (en excluant le cas triviale où il y a seulement un nombre fini de switch)  $\sigma(t_{i_j}) = q$  la suite :  $V_q(x(t_{i_1})), V_q(x(t_{i_2})), \dots$  est décroissante et positive, pour cela elle admet une limite  $c \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 = c - c &= \lim_{j \rightarrow \infty} V_q(x(t_{i_{j+1}})) - \lim_{j \rightarrow \infty} V_q(x(t_{i_j})) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} [V_q(x(t_{i_{j+1}})) - V_q(x(t_{i_j}))] \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} [-W_q(x(t_{i_j}))] \leq 0 \end{aligned}$$

Donc  $W_q(x(t_{i_j})) \rightarrow 0$  quand  $j \rightarrow \infty$ , nous savons aussi que  $W_q$  est définie positive, puisque  $V_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  est radialement non bornée, un argument similaire à celui utilisé précédemment pour prouver la stabilité de Lyapunov montre que  $x(t)$  reste bornée.

C'est pourquoi  $x(t_{i_j})$  doit converger vers 0 quand  $j \rightarrow \infty$ , il s'en suit maintenant, de la propriété de stabilité de Lyapunov que  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

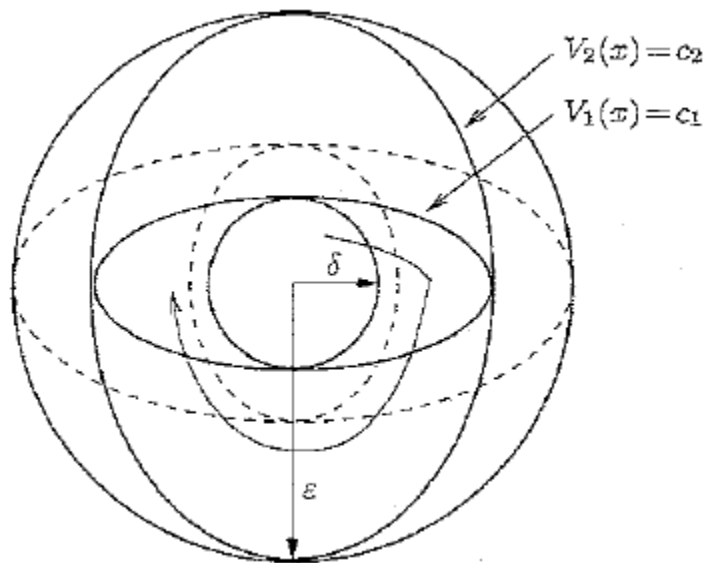


Figure 65: Démontrer la stabilité de Lyapunov au théorème 3.1.

Il est important de noter que pour appliquer le théorème 3.1 on doit avoir quelques informations sur la solution du système, précisément la valeur des fonctions de Lyapunov appropriées aux instants de commutations, ce qui veut dire la connaissance de la valeur de la solution à ces instants-là, remarque que c'est là une différence majeure avec le théorème de Lyapunov classique où on n'a pas besoin de connaître la solution. (Bien sûr, dans les deux cas reste le problème de trouver la fonction de Lyapunov).

Les résultats de la technique des fonctions multiples de Lyapunov, comme le théorème (3.1) sont utiles quand on est dans une situation où le signal de commutations est une suite contrainte de façon à avoir la possibilité d'assurer la relation désirée entre les valeurs de la fonction de Lyapunov aux instants de commutations.

## 4.2 Stabilité sous commutations lentes :

Nous allons dans cette partie utiliser la technique des fonctions multiples de Lyapunov pour démontrer la propriété suivante : un système commuté est stable si tous ses sous-systèmes sont stables et que les commutations sont « suffisamment » lentes de façon à dissiper l'effet de « transition » après chaque switch.

### 4.2.1 Le temps de séjours :

La façon la plus simple de spécifier les commutations lentes, c'est d'introduire un nombre  $\tau_d > 0$  et restreindre la classe de signaux admissibles à celles avec la propriété que les instants de commutations  $t_1, t_2, \dots$  vérifient la condition  $t_{i+1} - t_i > \tau_d$  pour tout  $i$ . Ce nombre  $\tau_d$  est appelé le temps de séjours (parce que  $\sigma$  séjourne dans chacune de ses valeurs pendant au moins  $\tau_d$  unités de temps).

Il est bien connu que tous les systèmes linéaires de la famille (2.13) sont asymptotiquement stables, que le système commuté (1.4) est asymptotiquement stable si le temps de séjours  $\tau_d$  est suffisamment grand, la borne inférieure de  $\tau_d$  requise peut être calculée à partir des bornes de décroissance exponentielle des matrices de transition des sous systèmes individuels.

Sous quelques hypothèses appropriées, un temps de séjours suffisamment grand peut aussi garantir la stabilité asymptotique d'un système commuté dans le cas non linéaire. Probablement le meilleur moyen de montrer des résultats de ce genre c'est d'utiliser les fonctions multiples de Lyapunov, nous allons dans la suite résumer cet argument :

Supposons pour simplifier, que tous les systèmes de la famille (1.1) sont globalement exponentiellement stables, alors pour  $p \in \mathcal{P}$  il existe une fonction de Lyapunov  $V_p$  qui, pour certaines constantes positives  $a_p, b_p$  et  $c_p$  vérifie :

$$a_p|x|^2 \leq V_p(x) \leq b_p|x|^2 \quad (3.2)$$

et

$$\frac{\partial V_p}{\partial x} f_p(x) \leq -c_p|x|^2 \quad (3.3)$$

En combinant (3.2) et (3.3) on trouve :

$$\frac{\partial V_p}{\partial x} f_p(x) \leq -2\lambda_p V_p(x), \quad p \in \mathcal{P}.$$

où  $\lambda_p = \frac{c_p}{2b_p}, \quad p \in \mathcal{P}.$

Ce qui implique que  $V_p(x(t_0 + \tau_d)) \leq e^{-2\lambda_p \tau_d} V_p(x(t_0)).$

Pour vu que  $\sigma(t) = p$  pour  $t \in [t_0, t_0 + \tau_d]$ .

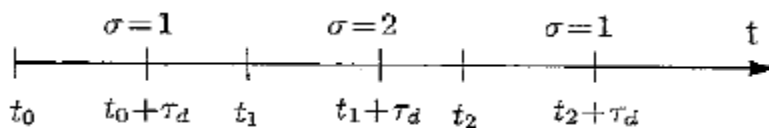


Figure 66: Un signal de commutation avec temps de séjours.

Pour simplifier le calcul suivant, nous nous plaçons dans le cas où  $\mathcal{P} = \{1,2\}$  et  $\sigma$  prend la valeur 1 sur  $[t_0, t_1]$  et 2 sur  $[t_1, t_2]$  avec  $t_{i+1} - t_i > \tau_d, \quad i = 0,1.$

Des inégalités plus haut on a :

$$V_2(t_1) \leq \frac{b_2}{a_1} V_1(t_1) \leq \frac{b_2}{a_1} e^{-2\lambda_1 \tau_d} V_1(t_0)$$

En plus,

$$V_1(t_2) \leq \frac{b_1}{a_2} V_2(t_2) \leq \frac{b_1}{a_2} e^{-2\lambda_2 \tau_d} V_2(t_1) \leq \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau_d} V_1(t_0) \quad (3.4)$$

Il est maintenant direct de calculer une borne inférieure de  $\tau_d$  qui garantie que les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, impliquant ainsi que le système commuté (1.3) est globalement asymptotiquement stable. En fait, il est suffisant d'assurer que :

$$V_1(t_2) - V_1(t_0) \leq -\gamma |x(t_0)|^2$$

pour un certain  $\gamma > 0$ . En vu de (3.4) cela sera vrai si on a :

$$\left( \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau_d} - 1 \right) V_1(t_0) \leq -\gamma |x(t_0)|^2$$

qui sera réalisé en vertu de (3.2) si :

$$\left( \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau_d} - 1 \right) a_1 \leq -\gamma$$

Puisque  $\gamma$  peut être un nombre positif arbitraire, tout ce dont on a besoin d'avoir c'est :

$$\left( \frac{b_1 b_2}{a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau_d} \right) < a_1$$

qui peut être écrit de façon équivalente à :

$$-2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau_d < \log \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}.$$

Et finalement on arrive à :

$$\tau_d > \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \log \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}, \quad (3.5)$$

qui est la borne inférieure désirée sur le temps de séjours.

### 4.3 Stabilité sous des commutations dépendantes de l'état

Dans la section précédente, nous avons étudié la stabilité des systèmes à commutations dépendantes du temps et vérifiant certaines contraintes appropriées, un autre exemple de commutations contraintes est celles dépendantes de l'état, où l'évènement de commutation ne peut arriver que si l'état touche une surface de commutation. Dans ce cas, l'analyse de stabilité est souvent facilitée par le fait que les

propriétés de chaque sous-système individuel sont en question seulement dans la région où ce sous système est activé et le comportement de ce sous système dans d'autres parties de l'espace d'état n'influe pas sur le comportement du système commuté global.

### Exemple (3.1)

Considérons les matrices (2×2) suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ 2 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \gamma & -2 \\ 1 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Où  $\gamma$  est un nombre négatif suffisamment proche de 0 pour que les trajectoires des systèmes  $\dot{x} = A_1x$  et  $\dot{x} = A_2x$  ressemblent (qualitativement) aux deux premiers dessins sur la FIGURE 50.

On définit maintenant un système linéaire à commutations dépendantes de l'état dans le plan par :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x & \text{si } x_1 x_2 \leq 0 \\ A_2x & \text{si } x_1 x_2 > 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $V(x) = x^T x$  vérifie  $\dot{V} < 0$  le long des solutions non nulles de ce système commuté, donc nous avons une stabilité asymptotique globale.

Les sous-systèmes non même pas besoin d'être asymptotiquement stables, car la fonction de Lyapunov doit seulement décroître le long des solutions de chaque sous système dans les régions appropriées, et pas nécessairement partout. Si on pose  $\gamma = 0$ , alors  $V$  va rester décroissante le long des solutions du système commuté (3.14).

Si  $\gamma$  est un nombre positif suffisamment petit, alors le système commuté (3.14) reste globalement asymptotiquement stable, même si les sous-systèmes sont instables.

Il est important de comprendre que la fonction  $V$  joue le rôle d'une fonction de Lyapunov seulement dans des régions appropriées pour chaque sous système, en fait, il n'y a pas de fonction commune globale pour les deux sous-systèmes de l'exemple. En effet, si on change de loi de commutations à :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x & \text{si } x_1 x_2 > 0 \\ A_2x & \text{si } x_1 x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Alors le système commuté résultant est instable.

Si l'analyse de stabilité avec une seule fonction de Lyapunov ne marche pas, nous pouvons utiliser la technique des fonctions multiples de Lyapunov, comme montré dans cet exemple, (modification de l'exemple précédent).

### Exemple (3.2)

Nous allons utiliser les mêmes matrices de l'exemple précédent avec  $\gamma$  nombre négatif mais proche de zéro, pour définir le différent système à commutations dépendantes de l'état suivant :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x & \text{si } x_1 \geq 0 \\ A_2 x & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

Nous savons que les systèmes linéaires  $\dot{x} = A_1 x$  et  $\dot{x} = A_2 x$  ne partagent pas une fonction commune de Lyapunov, en plus il, est impossible de trouver une fonction quadratique de Lyapunov qui décroît le long des solutions de chaque sous systèmes dans les régions correspondantes.

En effet, puisque chaque région est un demi-plan par symétrie, cela devrait donner une fonction de Lyapunov quadratique commune, pourtant, si on considère les deux matrices symétriques définies positives :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les fonctions  $V_1(x) = x^T P_1 x$  et  $V_2(x) = x^T P_2 x$  sont des fonctions de Lyapunov pour les systèmes  $\dot{x} = A_1 x$  et  $\dot{x} = A_2 x$  respectivement. De plus, sur la surface de commutations

$\{x : x_1 = 0\}$ , leurs valeurs coïncident, donc la fonction  $V_\sigma$  où  $\sigma$  est un signal de commutations prenant la valeur de 1 si  $x_1 \geq 0$  et la valeur 2 pour  $x_1 < 0$  est continue le long des solutions du système commuté. Cela prouve la stabilité asymptotique globale.

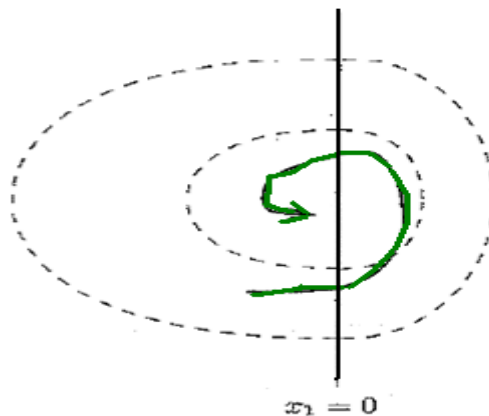


Figure 67: Illustration de la stabilité dans l'exemple (3.2).

Si dans l'exemple (3.2) on multiplie les matrices  $P_1$  et  $P_2$  par deux nombres positifs arbitraires les fonctions de Lyapunov peuvent toujours vérifier les hypothèses du théorème (3.1). Mais c'est vrai qu'il est plus difficile d'appliquer le théorème (3.1) si les valeurs des fonctions de Lyapunov ne coïncident pas sur les surfaces de commutations.

---

## Bibliographie

**Braniky.M.S.** Perspectives and results on the stability and the stabilisability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE.* (2000) .

**Broucke.M.** *Hybrid Systems.* Springer. (2004).

**Engell.S.** *Modeling, analysis and design of hybrid systems.* Allemagne: Springer. (2002).

**Khallil.H.** *Nonlinear systems.* New Jersey: Prentice Hall. (2002).

**Laubry.C.** *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires.* Toulouse: Anales de la faculté des sciences de Toulouse. (1995).

**Liberzon.D.** *Switching in systems and control.* Berlin: Birkhauser.(2003).

**Rahmoun.A.** *Introduction aux systèmes dynamiques hybrides.* Tlemcen: Université AbouBekr Belkaid.(2005).

**Sastry.S.S.** Dynamical properties of hybrid automata. *Transactions on automatic control.*(2003) .

**Zaytoon.J.** *Systèmes Dynamiques Hybrides.* Paris: Hermes. (2001).