

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences
Département de Mathématiques
MÉMOIRE DE MASTER

présenté par
Ghermoul Khedoudja Serine

Thème :
ÉTUDE DE QUELQUES MODÈLES
ÉPIDÉMIOLOGIQUES STRUCTURÉS EN ÂGE
D'INFECTION

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. ABDELLAOUI BOUMEDIENNE	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mr. YADI KARIM	Professeur, Université de Tlemcen	Examineur
Mr. CHEKROUN ABDENNASER	MCA, Université de Tlemcen	Examineur
Mr. MOUSSAOUI ALI	Professeur, Université de Tlemcen	Encadrant
Mr. LOZI RENÉ	Professeur, Université Côte d'Azur	Co-encadrant

Année universitaire : 2021 - 2022

Dédicace

Je dédie ce travail

À mes très chers parents, pour leur encouragement contenu, leur aide et leur patience illimitée durant ces années d'études.

À ma chère sœur Ratiba.

À mes chers frères Ilyes, Najib et Akrem.

À mon oncle Abderrahim.

À mes meilleures copines Kheira, Zahia et Fatima Zohra.

Remerciement

Je tiens à remercier, en premier lieu, mon dieu de m'avoir donné la patience, la force et le courage de mener a bien ce modeste travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadrant Monsieur MOUSSAOUI ALI professeur de l'université de Tlemcen, de m'avoir encadré et encouragé tout le long de ce travail. Merci pour sa patience et ses précieux conseils.

j'aimerais aussi gratifier les efforts du professeur Lozi René de l'université de Nice qui a eu l'amabilité de répondre à mes questions et de fournir les explications nécessaires.

Je tiens à remercier le professeur ABDELLAOUI BOUMEDIENNE, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes sincères remerciements à Messieurs : YADI KARIM et CHEKROUN ABDENNASER d'avoir accepté de faire partie du jury qui examinera ce modeste travail.

Je tiens à remercier le professeur ANDREAS HÖRING et le professeur TOUAOULA MOHAMED TARIK pour m'avoir donné la chance de participer au programme de master international, les mots ne peuvent décrire combien je suis reconnaissant envers les deux professeurs.

je tiens à remercier mes chers parents pour m'avoir encouragé et qui m'ai donné le meilleur de ce qu'ils ont . Sans eux, je n'en serais pas là, que Dieu nous les garde.

Table des matières

Dédicace	1
Remerciement	2
Introduction	6
1 Quelques modèles de base en épidémiologie	8
1.1 Modèle de la variole : Daniel Bernoulli	8
1.2 Modèle de Ronald Ross pour le paludisme	11
1.2.1 Modélisation de la transmission du paludisme	11
1.2.2 Points d'équilibre et nombre de reproduction de base	14
1.2.3 Stabilité locale des points d'équilibre	14
1.3 Le modèle SIR de Kermack-Mckendrick	15
1.4 Quelques propriétés du modèle de Kermack-Mckendrick	16
1.4.1 Formule de la taille finale d'une épidémie	18
1.5 Modèle SIS	19
2 Le modèle SIR avec âge d'infection	22
2.1 Etats d'équilibre et nombre de reproduction de base :	23
2.2 Stabilité locale de l'état d'équilibre sans maladie	24
2.3 Stabilité locale de l'état d'équilibre endémique	26
2.4 Simulations numériques	28
3 Un modèle SEIR avec âge de latence	31
3.1 Existence et unicité de la solution	32
3.2 États stationnaires	36
3.3 Stabilité locale de l'équilibre sans maladie	37
3.4 Stabilité locale de l'équilibre endémique	40

3.5	Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	42
3.6	Persistance uniforme	44
3.7	Stabilité globale de l'équilibre endémique	48
3.8	Simulations numériques	51
4	Annexe	54
4.1	Existence et unicité des solutions	54
4.2	Points d'équilibre	55
4.3	Stabilité locale des points d'équilibre	55
4.4	Fonction de Lyapunov	55
4.5	Principe d'invariance de LaSalle	56
4.6	Théorème de Banach Picard	57
	Bibliographie	57

Table des figures

1.1	Diagramme de transfert pour le modèle de Ross. Les flèches pleines indiquent un transfert. Les flèches pointillées indiquent une infection croisée.	12
1.2	Les compartiments du modèle SIR.	16
1.3	Les compartiments du modèle SIS.	20
2.1	La solution $(S(t), i(t, a))$ s'approche de l'équilibre sans maladie lorsque $t \rightarrow +\infty$	29
2.2	La solution $(S(t), i(t, a))$ s'approche de l'équilibre endémique lorsque $t \rightarrow +\infty$	30
3.1	La stabilité globale de l'équilibre sans maladie dans le cas de $R_0 \leq 1$	52
3.2	La stabilité globale de l'équilibre endémique dans le cas de $R_0 > 1$	53

Introduction

La modélisation mathématique en épidémiologie permet de comprendre les mécanismes essentiels qui influencent la propagation des maladies et, ce faisant, elle suggère des stratégies de contrôle.

Les modèles de propagation des maladies ont été étudiés depuis Kermack et McKendrick [10] en 1927, en particulier au cours des trente dernières années. Beaucoup de ces modèles sont formulés sous forme d'équations différentielles ordinaires (ODE) avec des variables distinctes pour décrire la taille des groupes tels que les personnes sensibles, exposées et infectieuses, avec éventuellement plusieurs compartiments pour diviser davantage ces classes. La formulation de l'EDO suppose que tous les individus d'un compartiment se comportent de manière identique, indépendamment du temps qu'ils ont passé dans ce compartiment. Par exemple, elle suppose que tous les individus dans un compartiment infectieux ont le même niveau d'infectiosité.

Les modèles épidémiques structurés en âge remontent au début du XXe siècle, lorsque Kermack et McKendrick ont créé leur célèbre modèle SIR pour expliquer les épidémies de maladies telles que la peste ou le choléra et donc ce type de modèle a eu une présence dans la littérature sur les maladies infectieuses. Leur principale contribution aux mathématiques a été un nouveau type d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites non locales, dont l'analyse a défié les mathématiciens au cours des 70 dernières années.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres : le premier chapitre s'attache à certains modèles épidémiologiques de base tel que le modèle de Bernoulli qui était le premier en épidémiologie, les modèles classiques *SIR* et *SIS* et celui du paludisme. Nous définissons la notion du nombre de reproduction de base R_0 pour chaque modèle.

Dans le deuxième chapitre, on étudie le modèle *SIR* avec durée d'infection x . Nous étudions la stabilité locale en utilisant la méthode de linéarisation.

Le troisième chapitre est spécifique pour la présentation et l'étude du modèle mathématique *SEIR* avec âge d'infection a . On étudie l'existence et l'unicité de solution. Ensuite, selon les valeurs du taux de reproduction de base R_0 , on étudie la stabilité locale et globale des états stationnaires en utilisant la méthode de linéarisation et des fonctions de Lyapunov appropriés.

Chapitre 1

Quelques modèles de base en épidémiologie

L'épidémiologie est l'étude de la propagation des maladies. Son but est de retracer les facteurs responsables ou contribuant à leur apparition. En épidémiologie, les modèles mathématiques ont un rôle fondamental pour connaître le développement de l'épidémie et essayer de la contrôler.

Dans ce chapitre, on va présenter quelques modèles de base en épidémiologie qui vont nous servir dans les chapitres suivants.

1.1 Modèle de la variole : Daniel Bernoulli

Le 30 Avril 1760, D.Bernoulli [2] a proposé le premier modèle mathématique en épidémiologie, pour tester l'efficacité de l'inoculation. Il est important de savoir qu'à l'époque il n'y avait pas de vaccins, que la technique d'inoculation était très controversée et que la maladie était dévastatrice.

On désigne par $S(x)$ la population d'âge x qui n'a pas encore attrapé la variole, $R(x)$ la population d'âge x qui a attrapé la variole et qui a survécu, (elle admet donc immunité permanente) et on note $P(x) = S(x) + R(x)$ la population d'âge x . Le modèle de Bernoulli s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dx} = -qS(x) - m(x)S(x), \\ \frac{dR}{dx} = (1-p)qS(x) - m(x)R(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

où $m(x)$ représente la mortalité à l'âge x qui n'est pas due à la variole, c'est-à-dire la mortalité naturelle, q est la probabilité d'attraper la maladie dans l'année et p est la probabilité de mourir de la variole par année. D'après la première équation du système (1.1), on a

$$S(x) = S(0)e^{-qx - \int_0^x m(y)dy}.$$

De même, à partir de la deuxième équation du système (1.1), on a aussi

$$\frac{dR}{dx} + m(x)R(x) = (1-p)qS(0)e^{-qx - \int_0^x m(y)dy}.$$

Après intégration on obtient,

$$R(x) = S(0)(1-p)(1 - e^{-qx})e^{-\int_0^x m(y)dy}.$$

La proportion des susceptibles à l'âge x est,

$$\begin{aligned} \frac{S(x)}{P(x)} &= \frac{S(x)}{S(x) + R(x)}, \\ &= \frac{e^{-qx}}{e^{-qx} + (1-p)(1 - e^{-qx})}, \\ &= \frac{1}{1 + (1-p)(e^{qx} - 1)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Bernoulli utilise les valeurs de $P(x)$ qui se trouvent dans le tableau de Halley [8] et à l'aide de la formule (1.2), il détermine les valeurs de $S(x)$ et de $R(x)$ que l'on retrouve dans la colonne 3 et 4 respectivement du Tableau 1.

T A B L E I.

AGES par années.	Survivans selon M. Halley.	N'ayant pas eu la pet. vérole.	Ayant eu la pet. vérol.	Prenant la pet. vérole pendant ch. année.	MORTS de la pet. vérole pendant chaq. ann.	SOMME des morts de la pet. vérole.	MORTS par d'autres maladies pend. chaq. année.
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17,1	17,1	28,3
2	855	685	170	99	12,4	29,5	13,3
3	798	571	227	78	9,7	39,2	4,7
4	760	485	275	66	8,3	47,5	3,0
5	732	416	316	56	7,0	54,5	2,1
6	710	359	351	48	6,0	60,5	1,6
7	692	311	381	42	5,2	65,7	12,8
8	680	272	408	36	4,5	70,2	7,5
9	670	237	433	32	4,0	74,2	6
10	661	208	453	28	3,5	77,7	5,5
11	653	182	471	24,4	3,0	80,7	5
12	646	160	486	21,4	2,7	83,4	4,3
13	640	140	500	18,7	2,3	85,7	3,7
14	634	123	511	16,6	2,1	87,8	3,9
15	628	108	520	14,4	1,8	89,6	4,2
16	622	94	528	12,6	1,6	91,2	4,4
17	616	83	533	11,0	1,4	92,6	4,6
18	610	72	538	9,7	1,2	93,8	4,8
19	604	63	541	8,4	1,0	94,8	5
20	598	56	542	7,4	0,9	95,7	5,1
21	592	48,5	543	6,5	0,8	96,5	5,2
22	586	42,5	543	5,6	0,7	97,2	5,3
23	579	37	542	5,0	0,6	97,8	6,4
24	572	32,4	540	4,4	0,5	98,3	6,5

Tableau 1 : Tableau fourni par Halley [8]

Par la suite Bernoulli s'intéresse exclusivement au cas de l'inoculation de la variole à la population entière depuis la naissance, il suppose que tous les bébés sont inoculés avec un risque ε de mourir, Il trouve les deux résultats suivants :

- L'espérance de vie sans inoculation est 26 ans et 7 mois.
- Supposons maintenant que tout le monde est inoculé à la naissance. La nouvelle population $P^*(x)$ ne fera que suivre l'équation

$$\frac{dP^*}{dx} = -m(x)P^*(x).$$

Par conséquent, Bernoulli a pu réaliser une nouvelle table numérique pour la population P^* . Il a appliqué la méthode de trapèze, Bernoulli déduit que l'espérance de vie avec inoculation à la naissance est 29 ans et 2 mois et il a trouvé que la probabilité est proche de 1, c'est la raison pour laquelle il encourage l'inoculation. Mais le Français Alembert s'est opposé au travail de Bernoulli. Bien que Alembert ait tenu des propos justifiés, il n'a pas saisi les arguments mathématique de Bernoulli, notamment les études probabilistes. Comme d'Alembert tenait une grande place politique à l'académie, il a réussi à garder l'œuvre de Bernoulli sous sa coupe pendant près de dix ans. Dans le même temps, il a publié son propre ouvrage qui contient des conclusions presque en contradiction avec celles de ce dernier.

1.2 Modèle de Ronald Ross pour le paludisme

Le paludisme est causé par des protozoaires parasites du genre *Plasmodium*. Les protozoaires sont transmis aux humains par les piqûres de moustiques femelles infectés de type anophèle lorsqu'ils prennent un repas de sang.

1.2.1 Modélisation de la transmission du paludisme

Les premiers travaux de modélisation mathématique de la dynamique de la transmission du paludisme ont été réalisés au début des années 1900 par R.Ross [20], qui a reçu plus tard le prix Nobel de médecine pour ses recherches médicales sur le paludisme. Pour formuler le modèle de R.Ross pour la transmission du paludisme, nous considérons une population de moustiques n et une population humaine N , et supposons que les deux populations sont constantes. Soient S_N et I_N les humains sensibles et infectieux, et S_n et I_n les moustiques femelles sensibles et infectées.

Le processus de transmission du paludisme entre les populations humaines et les moustiques est décrit dans la figure (1.1).

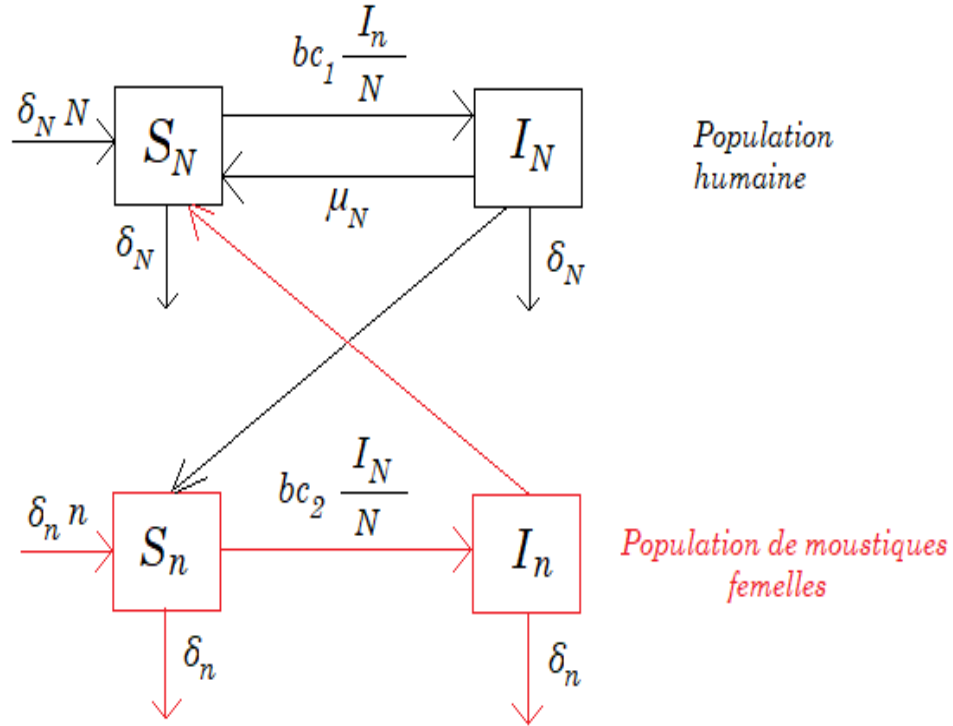


FIGURE 1.1 – Diagramme de transfert pour le modèle de Ross. Les flèches pleines indiquent un transfert. Les flèches pointillées indiquent une infection croisée.

Les équations du modèle sont présentées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_N}{dt} = \delta_N N - \delta_N S_N - bc_1 \frac{I_n}{N} S_N + \mu_N I_N, \\ \frac{dI_N}{dt} = bc_1 \frac{I_n}{N} S_N - (\delta_N + \mu_N) I_N, \\ \frac{dS_n}{dt} = \delta_n n - \delta_n S_n - bc_2 \frac{I_N}{N} S_n, \\ \frac{dI_n}{dt} = bc_2 \frac{I_N}{N} S_n - \delta_n I_n, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

où les paramètres utilisés dans le modèle sont énumérés dans Tableau 2.

b	Taux de piqûre (nombre d'humains piqués par moustique dans une unité de temps).
c_1	Probabilité d'une infection humaine résultant d'une piqûre infectieuse.
c_2	Probabilité d'une infection par un moustique à la suite à une piqûre infectieuse.
δ_N	Taux de natalité et de mortalité humaine.
δ_n	Taux de natalité et de mortalité des moustiques.
μ_N	Taux de guérison des humains.

Tableau 2

Ross a examiné l'évolution de la fraction d'individus dans les compartiments des infectés (I_N, I_n) à l'aide de deux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = bc_1x_2(1 - x_1) - dx_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = bc_2x_1(1 - x_2) - \delta_nx_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

où x_1 représente la fraction des humains infectés ($\frac{I_N}{N}$) et x_2 est la fraction des moustiques infectés ($\frac{I_n}{n}$) et $d = \delta_N + \mu_N$, $l = \frac{n}{N}$.

Nous considérons le système (1.4) dans la région bornée suivante :

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

Le modèle est réécrit ainsi :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1.5)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz [5] assure l'existence et l'unicité de la solution du système (1.5).

En utilisant la proposition 10 de l'Annexe, nous montrons que les solutions sont positives :

Lorsque $x_1 = 0, x_2 \geq 0$ donc $g_1(x_1, x_2) = bc_1x_2 \geq 0$.

Lorsque $x_1 \geq 0, x_2 = 0$ donc $g_2(x_1, x_2) = bc_2x_1 \geq 0$.

Quand $x_1 = 1, x_2 \geq 0$ alors $g_1(x_1, x_2) = -dx_1 \leq 0$.

Quand $x_1 \geq 0, x_2 = 1$ alors $g_2(x_1, x_2) = -\delta_n x_2 \leq 0$.

Ainsi, nous pouvons dire que Γ est positivement invariant.

1.2.2 Points d'équilibre et nombre de reproduction de base

Le système (1.5) a deux équilibres possibles dans l'intervalle $[0, 1] \times [0, 1]$ [22] : l'équilibre sans maladie, $P_0 = (0, 0)$, qui correspond à l'absence de malaria (autre nom du paludisme) et un équilibre endémique $P^* = (x_1^*, x_2^*)$, où x_1^*, x_2^* sont donnés par

$$x_1^* = \frac{lb^2c_1c_2 - \delta_n d}{lb^2c_1c_2 + dbc_2}, \quad x_2^* = \frac{lb^2c_1c_2 - \delta_n d}{lb^2c_1c_2 + lc_1b\delta_n}.$$

On note que $x_1^*, x_2^* > 0$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$R_0 = \frac{lb^2c_1c_2}{\delta_n d} > 1.$$

On appelle R_0 le nombre de reproduction de base qui est un concept clé en épidémiologie, il mesure le nombre moyen de personnes infectées par une personne infectée au début d'une épidémie.

1.2.3 Stabilité locale des points d'équilibre

Afin d'étudier la stabilité des points d'équilibre, nous faisons le calcul de la matrice Jacobienne à ces points.

La matrice jacobienne du système (1.5) est donnée par :

$$Jac(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -d - bc_1x_2 & bc_1(1 - x_1) \\ bc_2(1 - x_2) & -\delta_n - bc_2x_1 \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne au point P_0 est :

$$Jac(0, 0) = \begin{bmatrix} -d & lbc_1 \\ bc_2 & -\delta_n \end{bmatrix}$$

Dans ce cas nous avons :

$$tr(Jac(0, 0)) = -d - \delta_n = < 0$$

$$\det(Jac(0, 0)) = d\delta_n - lb^2c_1c_2 > 0, \quad si \quad R_0 < 1$$

Ainsi le point d'équilibre P_0 est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$, même s'il existe quelques malades, ils ne déclencheront pas une épidémie et instable si $R_0 > 1$, ils déclencheront une épidémie.

La matrice jacobienne au point $P^* = (x_1^*, x_2^*)$ est :

$$Jac(x_1^*, x_2^*) = \begin{bmatrix} -lbc_1 \frac{x_2^*}{x_1^*} & lbc_1(1 - x_1^*) \\ bc_2(1 - x_2^*) & -bc_2 \frac{x_1^*}{x_2^*} \end{bmatrix}$$

Nous avons $tr(Jac(x_1^*, x_2^*)) < 0$ et $\det(Jac(x_1^*, x_2^*)) = lb^2c_1c_2 - d\delta_n > 0$ si $R_0 > 1$, donc l'équilibre endémique $P^* = (x_1^*, x_2^*)$ est localement asymptotiquement stable si $R_0 > 1$, que l'épidémie ne s'arrêtera pas.

1.3 Le modèle SIR de Kermack-Mckendrick

Le modèle SIR de Kermack-Mckendrick [10] joue un rôle très important en l'épidémiologie, c'est un modèle qui permet de décrire la propagation d'une épidémie au sein d'une population, ce modèle suppose que la population totale N est divisée en trois compartiments notées S , I et R comme le montre la figure 1.2. où $S(t)$ est le nombre d'individus sensibles à la maladie dit susceptibles, c'est-à-dire qui ne sont pas encore infectés au temps t . $I(t)$ désigne le nombre d'individus infectés, supposés infectieux et capable de transmettre la maladie par contact avec les individus susceptibles. $R(t)$ désigne le nombre d'individus guéris. Dans le modèle, les personnes guéries sont immunisées pour le reste de leur vie.

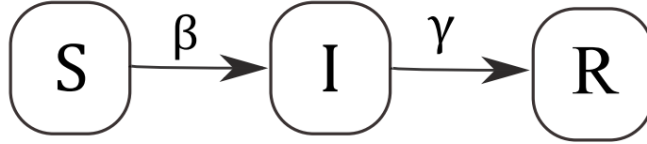


FIGURE 1.2 – Les compartiments du modèle SIR.

Les équations du modèle sont présentées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Le paramètre β est le taux de transmission de la maladie et γ est le taux de guérison.

Considérons les conditions initiales

$$S(0) = S_0 = N - I_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0 = 0,$$

avec $0 < I_0 < N$. Le nombre I_0 est en général très petit devant N .

1.4 Quelques propriétés du modèle de Kermack-Mckendrick

Proposition 1 *Le système (1.6) a une solution unique définie pour tout $t > 0$. De plus la solution est positive.*

Démonstration :

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution du système (1.6) sur un intervalle maximal $[0, T_{max}[$. D'après la première équation du système (1.6), on a pour tout $0 < t < T_{max}$,

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{N} \int_0^t I(\sigma) d\sigma} > 0,$$

car $S_0 > 0$. De même, à partir de la deuxième équation du système (1.6), on a aussi

$$I(t) = I_0 e^{\int_0^t \frac{\beta}{N}(S(\sigma)d\sigma - \gamma t)} > 0,$$

car $I_0 > 0$. Enfin, à partir de la troisième équation du système, (1.6)

$$R(t) = \gamma \int_0^t I(\sigma)d\sigma > 0$$

pour tout $t > 0$.

Par ailleurs

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0,$$

donc

$$S(t) + I(t) + R(t) = S(0) + I(0) + R(0) = N.$$

Ce modèle est une approximation de la réalité d'une épidémie, car dans la réalité, une population enregistre des décès et des naissances sa taille n'est pas constante et donc $0 < S(t) < N$, $0 < I(t) < N$ et $0 < R(t) < N$ pour tout $0 < t < T_{max}$. Comme les solutions restent bornées sur l'intervalle maximal $[0, T_{max}[$, il en résulte que $T_{max} = \infty$ (dans l'analyse d'une épidémie prendre un temps infini n'a pas de sens). Le système (1.6) a donc une unique solution définie pour tout $t > 0$.

Proposition 2 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t), I(t), R(t)) = (S(\infty), I(\infty), R(\infty))$ existe.

Démonstration : Nous avons

$$S'(t) = -\frac{\beta SI}{N} \leq 0,$$

ce qui implique que S est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $S(\infty) \geq 0$. De même

$$R'(t) = \gamma I \geq 0$$

alors R est croissante et majorée par N donc elle converge vers une limite $R(\infty) \leq N$.

Nous avons aussi

$$I(t) = N - S(t) - R(t),$$

alors $I(\infty) = N - S(\infty) - R(\infty)$ existe.

Proposition 3 [13] $S_0 > 0$ et $I_0 > 0$ implique $0 < S(\infty) \leq S_0$ et $I(\infty) = 0$.

Démonstration :

A partir du système (1.6), on trouve

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\beta}{\gamma N} S.$$

En résolvant cette équation pour S , on obtient

$$S(R) = S(R(0))e^{-\frac{\beta}{\gamma N} R(t)} = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma N} R(t)} \geq S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} > 0.$$

Ceci implique que

$$S(\infty) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma N} R(\infty)} \geq S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} > 0.$$

Par conséquent, $0 < S(\infty) \leq S_0$.

D'après l'équation S et le fait que $S(\infty)$ et $I(\infty)$ existent, nous savons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = -\frac{\beta}{N} S(\infty) I(\infty) \text{ existe.}$$

En outre, $\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = 0$.

On suppose par absurde qu'il existe un $\alpha < 0$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = \alpha.$$

alors $S'(t) < \frac{\alpha}{2}$ pour $t > T$, pour un temps T suffisamment grand, et donc

$$S(t) < S(T) + \frac{\alpha}{2}(t - T) < 0 \text{ pour } t > T - \frac{2S(T)}{\alpha}.$$

Cela contredit $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Par conséquent, $S(\infty)I(\infty) = 0$, et puisque $S(\infty) > 0$, alors $I(\infty) = 0$.

1.4.1 Formule de la taille finale d'une épidémie

L'intégration de la somme des deux premières équations de (1.6) de 0 à ∞ donne

$$\gamma \int_0^{\infty} I(t) dt = S_0 + I_0 - S(\infty) = N - S(\infty).$$

La division de la première équation de (1.6) par S et l'intégration de 0 à ∞ donne

$$\log \frac{S_0}{S(\infty)} = \frac{\beta}{N} \int_0^\infty I(t) dt = \frac{\beta}{\gamma N} (N - S(\infty)) = R_0 \left(1 - \frac{S(\infty)}{N}\right), \quad (1.7)$$

où $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, représente le nombre de reproduction de base.

L'équation (1.7) est appelée la relation de taille finale. Elle donne une relation entre le nombre de reproduction de base et la taille de l'épidémie. Notez que la taille finale de l'épidémie, c'est-à-dire le nombre d'individus de la population qui sont infectés au cours de l'épidémie, est

$$R(\infty) = N - S(\infty). \quad (1.8)$$

Nous remplaçons $S(\infty)$ par $N - R(\infty)$ dans l'équation (1.7), ce qui donne

$$\log \frac{S_0}{N - R(\infty)} = R_0 \left(1 - \frac{N - R(\infty)}{N}\right),$$

au début de l'épidémie $S_0 \simeq N$, on trouve donc l'approximation suivante pour la taille finale de l'épidémie

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} = e^{-R_0 \frac{R(\infty)}{N}}.$$

Ainsi la proportion totale des personnes infectées dans la population ($x = \frac{R(\infty)}{N}$) vérifiée

$$1 - x = e^{-R_0 x}.$$

On ne peut pas avoir une solution explicite de cette équation, mais on peut la résoudre numériquement par la méthode de Newton, ainsi la solution est donnée dans le tableau 3 avec différentes valeurs de R_0 .

R_0	1.1	1.2	1.5	2	2.5	3
x	17%	31%	58%	79%	89%	94%

Tableau 3 : Taille finale de l'épidémie en fonction de R_0 .

1.5 Modèle SIS

Dans le cas d'un modèle SIS, les individus infectés retournent dans le compartiment sensible après leur rétablissement.

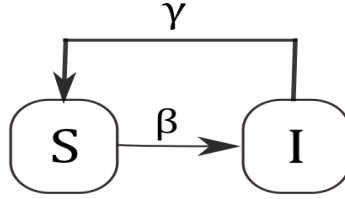


FIGURE 1.3 – Les compartiments du modèle SIS.

C'est-à-dire que l'on peut être infectés plusieurs fois par le même virus (comme pour le Covid-19)

Les équations du modèle sont présentées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I. \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec les conditions initiales

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0$$

La population totale N est constante, avec :

$$N = S + I \text{ car } \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0.$$

Dans ce type de modèles, il y aura deux résultats possibles pour une épidémie initiale : soit l'épidémie se termine, soit la maladie devient endémique. Pour le voir remplaçons $S = N - I$ dans la deuxième équation, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \beta(N - I)\frac{I}{N} - \gamma I = (\beta - \gamma)I - \frac{\beta}{N}I^2, \\ &= (\beta - \gamma)I \left(1 - \frac{I}{N - \frac{\gamma N}{\beta}}\right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

C'est une équation différentielle de type logistique de la forme suivante :

$$\frac{dI}{dt} = rI\left(1 - \frac{I}{K}\right),$$

avec $r = \beta - \gamma$ et $K = N - \frac{\gamma N}{\beta}$. Rappelons l'analyse de l'équation logistique.

L'équation logistique peut être résolue explicitement en utilisant la séparation des variables, la solution satisfaisant la condition initiale $x(0) = x_0$ est la suivante :

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{rt}}{K - x_0 + x_0e^{rt}} = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}. \quad (1.11)$$

L'expression (1.11) de la solution du problème de valeur initiale logistique montre que $x(t)$ se rapproche de la limite K lorsque $t \rightarrow \infty$ si $x_0 > 0$ à condition que $r > 0$. Si $r < 0$ alors $K < 0$ et $x(t)$ s'approche de 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Nous résumons ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 4

1. Si $\frac{\beta}{\gamma} < 1$, alors, pour tout $0 < I_0 < N, I(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans ce cas l'infection s'éteint.
2. Si $\frac{\beta}{\gamma} > 1$, alors, pour tout $0 < I_0 < N, I(t) \rightarrow N\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans ce cas l'infection persiste.

En notant comme pour le modèle *SIR*, R_0 le nombre de reproduction de base

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

La proposition 4 peut être réinterprétée ainsi pour les solutions du modèle *SIS*.

1. Si $R_0 < 1$, alors $(S(t), I(t)) \rightarrow (N, 0)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
2. Si $R_0 > 1$, alors $(S(t), I(t)) \rightarrow \left(\frac{\gamma N}{\beta}, N\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Mais dans la réalité le cas $R_0 > 1$ conduit à un nombre constant de malade pendant un temps infini (ou au moins très long) à la condition que l'on puisse être réinfecté un nombre infini de fois, ce qui ne se rencontre jamais dans l'histoire de l'humanité car toutes les épidémies (Peste, choléra, grippe espagnole, ebola) qui ont frappé l'humanité ont eu une fin, en raison de la modification dans le temps du facteur R_0 , à la suite de la diminution de virulence des virus et de l'augmentation de l'immunisation de la population.

Chapitre 2

Le modèle SIR avec âge d'infection

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle épidémique sous forme d'une équation aux dérivées partiales, où on introduit l'âge d'infection, pour avoir plus de précisions comme par exemple dans le taux d'infectiosité prendre une constante en EDO n'est pas vrai en réalité car il vari en fonction de l'âge d'infection. Ce modèle est déjà étudié dans ([14], [15]). Le modèle suppose que la population totale N est répartie en trois classes : les susceptibles S , les infectés I , les réfractaires R . Dans ce modèle, les infectés sont structurés en âge d'infection.

Les équations du modèle sont présentées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - S(t) \int_0^{+\infty} b(a)i(t, a)da - mS(t), \\ \frac{\partial i}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial i}{\partial a}(t, a) = -(c(a) + d(a) + m)i(t, a), \\ i(t, 0) = S(t) \int_0^{+\infty} b(a)i(t, a)da, \\ \frac{dR}{dt} = \int_0^{+\infty} c(a)i(t, a)da - mR(t). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Considérons les conditions initiales

$$S(0) = S_0, \quad i(0, a) = i_0(a), \quad R(0) = 0,$$

où $a \geq 0$ la durée depuis le début de l'infection et $i(t, a)$ est la densité d'individus infectés depuis un temps a à l'instant t ,

Λ est le taux de recrutement, m est le taux de mortalité naturel, $b(a)$ est le taux d'infectiosité de la maladie à l'âge a , $c(a)$ est le taux de guérison à l'âge a et $d(a)$ représente le taux de mortalité dû à la maladie à l'âge a . On note par $I(t) = \int_0^{+\infty} i(t, a) da$ le nombre total de personnes infectées à l'instant t .

2.1 Etats d'équilibre et nombre de reproduction de base :

Les équilibres du modèle (2.1) satisfont le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \Lambda - S^* \int_0^{+\infty} b(a) i^*(a) da - m S^*, \\ \frac{\partial i^*}{\partial a}(a) = -(c(a) + d(a) + m) i^*(a), \\ i^*(0) = S^* \int_0^{+\infty} b(a) i^*(a) da, \\ 0 = \int_0^{+\infty} c(a) i^*(a) da - m R^*. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Le système (2.1) a un équilibre sans maladie, où $i^*(a) = 0$ et $R^* = 0$. Les susceptibles satisfont $S^* = \frac{\Lambda}{m}$. Ainsi, l'équilibre sans maladie est donné par

$$\xi_0 = \left(\frac{\Lambda}{m}, 0, 0 \right).$$

On s'intéresse maintenant à l'équilibre endémique. En résolvant l'équation différentielle vérifiée par i^* , on obtient

$$i^*(a) = i^*(0) \pi(a)$$

où

$$\pi(a) = e^{-ma - \int_0^a c(\sigma) + d(\sigma) d\sigma}$$

est la probabilité de rester dans la classe infectée.

En remplaçant l'expression de $i^*(a)$ dans la condition initiale, on obtient une valeur pour S^*

$$S^* = \frac{1}{\int_0^{+\infty} b(a)\pi(a)da}.$$

D'après la quatrième équation du système (2.2), on a

$$R^* = \frac{i^*(0) \int_0^{+\infty} c(a)\pi(a)da}{m}.$$

De même, à partir de la première équation du système (2.2), on a aussi

$$i^*(0) = mS^*(R_0 - 1).$$

où R_0 est le nombre de reproduction de base, défini comme suit :

$$R_0 = \frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)\pi(a)da.$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 5 *Le système (2.1) a un équilibre endémique si et seulement si $R_0 > 1$ et cet équilibre est unique.*

2.2 Stabilité locale de l'état d'équilibre sans maladie

Proposition 6 *L'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$ et instable si $R_0 > 1$.*

Preuve :

Pour voir ce résultat, nous linéarisons le système (2.1) autour de l'équilibre sans maladie. Pour cela nous considérons les perturbations suivantes :

$$S(t) = \frac{\Lambda}{m} + w(t), \quad i(t, a) = y(t, a), \quad R(t) = z(t).$$

Le système linéarisé s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = -\frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)y(t,a)da - mw(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} = -(c(a) + d(a) + m)y(t,a), \\ y(t,0) = \frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)y(t,a)da, \\ \frac{dz}{dt} = \int_0^{+\infty} c(a)y(t,a)da - mz(t). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Nous cherchons une solution de la forme

$$w(t) = C_w e^{\lambda t}, \quad y(t,a) = C_y(a) e^{\lambda t}, \quad z(t) = C_z e^{\lambda t}.$$

Avec λ est une valeur propre complexe ($\lambda \in \mathbf{C}$). En remplaçant ces solutions dans le système (2.3), nous obtenons le problème linéaire de valeur propre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda C_w = -\frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)C_y(a)da - mC_w, \\ \frac{\partial C_y}{\partial a} + \lambda C_y(a) = -(c(a) + d(a) + m)C_y(a), \\ C_y(0) = \frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)C_y(a)da, \\ \lambda C_z = \int_0^{+\infty} c(a)C_y(a)da - mC_z. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

En résolvant la deuxième équation du système (2.4), on obtient

$$C_y(a) = C_y(0)\pi(a)e^{-\lambda a}.$$

En substituant dans la condition initiale du système (2.4), on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da = 1. \quad (2.5)$$

On pose :

$$G(\lambda) = \frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe un $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, tel que

$$\lambda_1 \geq 0.$$

On a :

$$|G(\lambda)| \leq \frac{\Lambda}{m} \int_0^{+\infty} b(a)\pi(a)e^{-\lambda_1 a} da = G(\lambda_1) \leq G(0) = R_0 < 1.$$

Cela contredit (2.5), et donc l'équation caractéristique n'a pas de racines avec une partie réelle positive ou nulle. Ainsi, l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$, ce qui signifie que si quelques cas de personnes infectées apparaissent, leur nombre va se réduire à 0 et la maladie ne va pas se propager.

Si $R_0 > 1$, il existe au moins une valeur propre λ réelle pure, tel que $G'(\lambda) < 0$, ce qui implique que G est strictement décroissante et $G(0) = R_0 > 1$. De plus $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda) = 0$. Par conséquent, il existe un λ^* positif tel que $G(\lambda^*)=1$. Ainsi, l'équilibre sans maladie est instable. Dans ce cas, si quelques cas de personnes infectées apparaissent, la maladie va se propager.

2.3 Stabilité locale de l'état d'équilibre endémique

Proposition 7 *Si $R_0 > 1$, alors l'unique équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.*

Démonstration :

Nous linéarisons le système (2.1) autour de l'équilibre endémique. Soit $S(t) = S^* + w(t)$, $i(t, a) = i^*(a) + y(t, a)$ et $R(t) = R^* + z(t)$. Le système

linéarisé s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = -S^* \int_0^{+\infty} b(a)y(t,a)da - w(t) \int_0^{+\infty} b(a)i^*(a)da - mw(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} = -(c(a) + d(a) + m)y(t,a), \\ y(t,0) = S^* \int_0^{+\infty} b(a)y(t,a)da + w(t) \int_0^{+\infty} b(a)i^*(a)da, \\ \frac{dz}{dt} = \int_0^{+\infty} c(a)y(t,a)da - mz(t). \end{array} \right. \quad (2.6)$$

En cherchant des solutions exponentielles, nous obtenons le problème linéaire de valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda C_w = -S^* \int_0^{+\infty} b(a)C_y(a)da - C_w \int_0^{+\infty} b(a)i^*(a)da - mC_w, \\ \frac{\partial C_y}{\partial a} + \lambda C_y(a) = -(c(a) + d(a) + m)C_y(a), \\ C_y(0) = S^* \int_0^{+\infty} b(a)C_y(a)da + C_w \int_0^{+\infty} b(a)i^*(a)da, \\ \lambda C_z = \int_0^{+\infty} c(a)C_y(a)da - mC_z. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

En résolvant la deuxième équation du système (2.7), on obtient

$$C_y(a) = C_y(0)e^{-\lambda a}\pi(a).$$

La première et la troisième équations du système (2.7) impliquent

$$C_w = -\frac{C_y(0)}{\lambda + m}, \quad \lambda \neq -m.$$

En remplaçant w et $y(x)$ dans l'équation de $y(0)$, on obtient

$$C_y(0) = S^* \int_0^{+\infty} b(a)C_y(0)e^{-\lambda a}\pi(a)da - \frac{C_y(0)}{\lambda + m} \int_0^{+\infty} b(a)i^*(a)da.$$

En annulant $C_y(0)$ et on pose $A = \int_0^{+\infty} b(a)i^*(a)da$, on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{\lambda + m + A}{\lambda + m} = S^* \int_0^{+\infty} b(a)e^{-\lambda a}\pi(a)da.$$

On considère $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ avec $\lambda_1 \geq 0$, alors

$$|S^* \int_0^{+\infty} b(a)e^{-\lambda a} \pi(a) da| \leq S^* \int_0^{+\infty} b(a) \pi(a) da = 1.$$

Car $S^* = \frac{1}{\int_0^{+\infty} b(a) \pi(a) da}$. De même, on a

$$\left| \frac{\lambda + m + A}{\lambda + m} \right| = \frac{\sqrt{(\lambda_1 + m + A)^2 + (\lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + m)^2 + (\lambda_2)^2}} > 1,$$

contradiction. L'équation caractéristique n'a pas de racines avec une partie réelle positive ou nulle. Par conséquent l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable si $R_0 > 1$. Dans ce cas, la maladie va persister quelle que soit la valeur de t , on ne pourra pas l'éliminer.

2.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous souhaitons fournir des représentations graphiques qui confirmeront les résultats mathématiques obtenus dans les sections précédentes. En effet pour ce but on va discrétiser chaque équation différentiel, d'abord on s'intéresse à la discrétisation de l'équation différentiel de S en utilisant la méthode d'Euler explicite :

$$S^{k+1} = S^k + \left(\Lambda - S^k \sum_{j=1}^M b_j i_j^k \Delta x \right) \Delta t,$$

avec Δt est le pas de discrétisation par rapport à t .

Ensuite, on s'intéresse à la discrétisation de l'équation différentiel partiel de i en utilisant le schéma différences finies décentré amont :

$$i_j^{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t(c_j + d_j + m) i_j^k \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} i_{j-1}^k,$$

avec Δx est le pas de discrétisation par rapport à la variable âge a .

afin de calculer le nombre de reproduction de base en utilisant l'approximation suivante :

$$R_0 = \frac{\Lambda}{m} \sum_{j=1}^M b_j \pi_j \Delta x.$$

Dans les deux exemples suivants, le jour sera considérée comme une unité de temps, le nombre de personnes susceptibles au début de l'épidémie ($t = 0$) est $S(0) = 250$ et la densité d'individus infectés pour $t = 0$ est $i(0, a) = 5e^{-0.8a}$.

Exemple 1 :

Dans cet exemple, nous choisissons les valeurs des paramètres de manière à avoir $R_0 < 1$, pour cela nous considérons le système (2.1) avec le choix des fonctions suivantes :

$$\Lambda = 39, m = 0.3, b(a) = 0.09ae^{-4a}, c(a) = 0.05e^{0.001a}, d(a) = 0.006e^{0.2a},$$

dans ce cas, on trouve $R_0 = 0.42 < 1$.

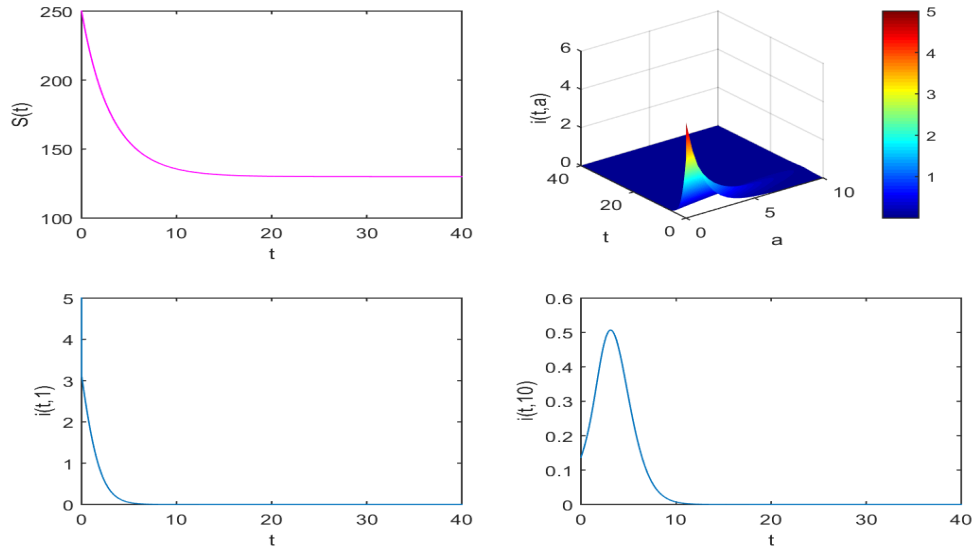


FIGURE 2.1 – La solution $(S(t), i(t, a))$ s'approche de l'équilibre sans maladie lorsque $t \rightarrow +\infty$

Dans la figure 2.1, nous remarquons que le scénario d'extinction de l'infection se tient c'est-à-dire si certains cas de personnes infectées se présentent, leur nombre diminuera à 0.

Exemple 2 :

Dans cet exemple, les paramètres sont choisis pour avoir $R_0 > 1$, pour cela, en choisissant les fonctions suivantes pour le système (2.1) :

$$\Lambda = 2, m = 0.09, b(a) = 0.3ae^{-5a}, c(a) = 0.05e^{0.001a}, d(a) = 0.006e^{0.2a},$$

dans ce cas, on obtient $R_0 = 1.49 > 1$.

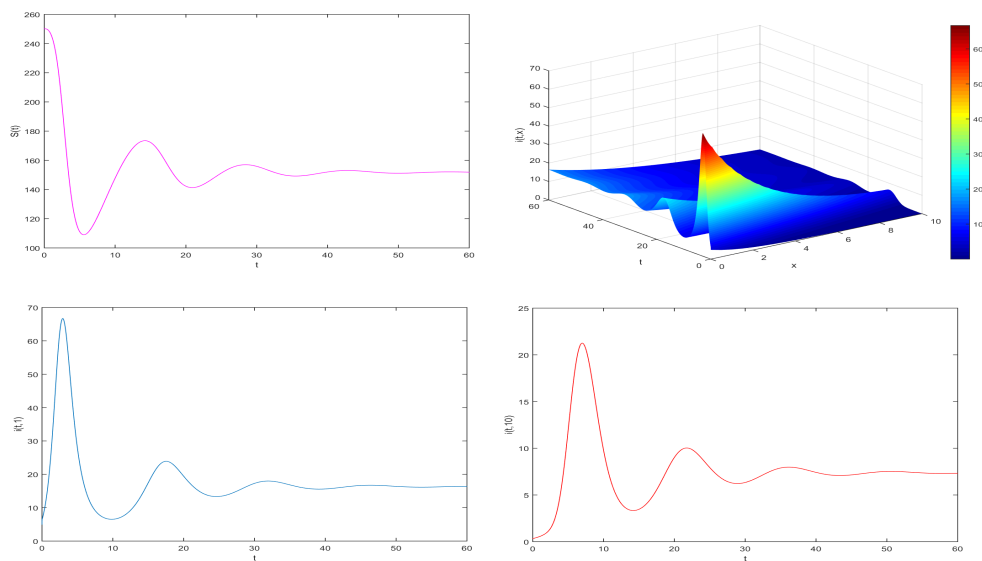


FIGURE 2.2 – La solution $(S(t), i(t, a))$ s’approche de l’équilibre endémique lorsque $t \rightarrow +\infty$

Dans la figure 2.2, nous remarquons la persistance de l’infection à une valeur positive, ce qui signifie que l’épidémie ne s’arrêtera pas.

Chapitre 3

Un modèle SEIR avec âge de latence

Nous étudions dans ce chapitre un modèle épidémiologique sous forme d'équation aux dérivées partiales. La population totale est divisée en quatre compartiments : sensibles, exposés (i.e sont des individus infectés mais ils ne sont pas infectieux), infectés, réfractaires. Le nombre de personnes sensibles au temps t est noté par $S(t)$, la sous population des exposés comprend une structure d'âge, c'est-à-dire qu'au temps t , cette classe est décrite par une fonction de densité $E(t, a)$, stratifiée par la durée a pendant laquelle les individus sont infectés, le nombre de personnes infectieux est noté par $I(t)$ et $R(t)$ désigne le nombre de personnes guéries. Le modèle est décrit par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t), \\ \frac{\partial E}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial E}{\partial a}(t, a) = -(\alpha(a) + \mu)E(t, a), \\ E(t, 0) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)E(t, a)da - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad E(0, a) = E_0(\cdot) \in L^1(\mathbf{R}^+), \quad R(0) = 0,$$

où β représente le taux de transmission de la maladie, μ est le taux de mortalité naturelle, γ est le taux de guérison et $\alpha(a)$ représente le taux de passage du compartiment E au compartiment I . Dans ce modèle tout recrutement dans la population se fait dans la classe des susceptibles et se produit avec un flux constant Λ . Pour que le modèle soit bien défini, on suppose que :

(H_1) Tous les paramètres mentionnés dans le modèle (3.1) sont positifs.
 (H_2) La fonction $\alpha(a)$ appartient à $L^1_+(\mathbf{R}^+)$. De plus, il existe un $\alpha_{min} > 0$ tel que $\alpha(a) \geq \alpha_{min}$ pour presque tous les $a \geq 0$.

Remarquons que la dynamique est indépendante de R donc on peut négliger le compartiment des remis. Maintenant, nous définissons les espaces fonctionnels du système(3.1)

$$X = \mathbf{R} \times L^1(\mathbf{R}^+) \times \mathbf{R}$$

$$X^+ = \mathbf{R}^+ \times L^1_+(\mathbf{R}^+) \times \mathbf{R}^+$$

Dans la section suivante, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution du système (3.1).

3.1 Existence et unicité de la solution

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial E}{\partial a}(t, a) = -(\alpha(a) + \mu)E(t, a), \\ E(t, 0) = f(t), \\ E(0, a) = E_0(a). \end{cases} \quad (3.2)$$

où $f(t)$ est une fonction donnée. L'existence et l'unicité de la solution du système (3.1) sont établies par le théorème 1. Pour démontrer ce théorème nous avons besoin du lemme suivant (voir [18]) :

Lemme 1 *Supposons que f est lipschitzienne, alors pour tout $T > 0$, il existe une solution positive faible unique $E \in C([0, T], L^1(\mathbf{R}^+))$ du problème (3.2).*

Théorème 1 *Supposons $(S_0, E_0, I_0) \in \mathbf{R}^+ \times L^1_+(\mathbf{R}^+) \times \mathbf{R}^+$, le système (3.1) possède une solution positive faible unique $(S, E, I) \in C^1(\mathbf{R}^+) \times C(\mathbf{R}^+, L^1_+(\mathbf{R}^+)) \times C^1(\mathbf{R}^+)$*

Preuve : Pour démontrer ce théorème, on utilise le théorème de Banach-Picard [9] dans un espace de Banach approprié. Considérons l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} B : C_+([0, T]) &\longrightarrow C_+([0, T]) \\ \int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da &\longmapsto I(t), \end{aligned}$$

avec I est la solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ I(0) = I_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous introduisons l'opérateur A comme suit

$$\begin{aligned} A : F_+ &\longrightarrow F_+ \\ \phi &\longmapsto E(t, a), \end{aligned}$$

défini sur l'espace de Banach $F_+ = C_+(0, T, L^1_+(\mathbf{R}^+))$ qui désigne l'ensemble des fonctions continues positives ou nulles sur l'intervalle $[0, T]$ à valeur dans $L^1(\mathbf{R}^+)$ munit de la norme suivante

$$\|m\|_{F_+} = \sup_{t \in [0, T]} \|m(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^+)}$$

et E est défini comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial E}{\partial a}(t, a) = -(\alpha(a) + \mu)E(t, a), \\ E(t, 0) = \frac{\beta S(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da)}{N}, \\ E(0, a) = E_0(a), \end{cases} \quad (3.4)$$

avec S est la solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da)}{N} - \mu S(t), \\ S(0) = S_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

D'après le lemme 1 , l'opérateur A est bien défini. Pour montrer l'existence et l'unicité des solutions, il suffit de prouver que A est une contraction.

On pose

$$S(t) = S_1(t) - S_2(t), \quad E(t, a) = E_1(t, a) - E_2(t, a), \quad I(t) = I_1(t) - I_2(t),$$

où $I_k = B\left(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_k(t, a)da\right)$ et $E_i(t, a)$, ($i = 1, 2$) deux solutions associées à $\phi_i(t, a)$ respectivement et vérifient le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial E}{\partial a}(t, a) = -(\alpha(a) + \mu)E(t, a), \\ E(t, 0) = \frac{\beta}{N}S_1(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da) - \frac{\beta}{N}S_2(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_2(t, a)da). \end{cases}$$

Par un argument d'une approximation de la fonction valeur absolue appliqué au problème ci-dessus nous pouvons conclure que $|E(t, a)|$ vérifiée (au sens de distributions),

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}|E(t, a)| + \frac{\partial}{\partial a}|E(t, a)| = -(\alpha(a) + \mu)|E(t, a)|, \\ |E(t, 0)| = \left| \frac{\beta}{N}S_1(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da) - \frac{\beta}{N}S_2(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_2(t, a)da) \right|, \end{cases} \quad (3.6)$$

L'intégration de l'équation (3.6) par rapport à l'âge d'infection a donne

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} |E(t, a)|da + |E(t, \infty)| - |E(t, 0)| = - \int_0^{+\infty} (\alpha(a) + \mu)|E(t, a)|da$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} |E(t, a)|da &\leq |E(t, 0)|, \\ &\leq \left| \frac{\beta}{N}S_1(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da) - \frac{\beta}{N}S_2(t)B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_2(t, a)da) \right|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} |E(t, a)|da \leq \left| f(S_1(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da)) - f(S_2(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_2(t, a)da)) \right|$$

Comme f est lipschitzienne, il existe une constante L telle que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} |E(t, a)| da \leq L(|S(t)| + |I(t)|). \quad (3.7)$$

De même la fonction $I(t) = I_1(t) - I_2(t)$ satisfait

$$\frac{dI}{dt} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da - \gamma I(t) - \mu I(t) \quad \text{et} \quad I(0) = 0$$

alors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|I(t)| &\leq \left| \int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da \right|, \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \int_0^{+\infty} |\phi(t, a)|da \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \|\phi\|_{F^+}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

On intègre l'équation (3.8), on trouve

$$|I(t)| \leq T\|\alpha\|_\infty\|\phi\|_{F^+} \quad (3.9)$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{dS}{dt} = -\mu S - f(S_1(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da)) + f(S_2(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_2(t, a)da))$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|S(t)| &\leq -\mu|S(t)| - f(S_1(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da)) + f(S_2(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_2(t, a)da)) \\ &\quad + f(S_2(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da)) - f(S_2(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da)), \\ &\leq -\mu|S(t)| + |f(S(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi_1(t, a)da))| + |f(S_2(t), B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da))|, \\ &\leq -\mu|S(t)| + L|S(t)| + L|B(\int_0^{+\infty} \alpha(a)\phi(t, a)da)|, \\ &\leq L|S(t)| + L|I(t)|, \\ &\leq L|S(t)| + LT\|\alpha\|_\infty\|\phi\|_{F^+}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|S(t)| \leq T(e^{LT} - 1)\|\alpha\|_\infty\|\phi\|_{F^+}. \quad (3.10)$$

En remplaçant (3.9) et (3.10) dans (3.7), on obtient

$$\int_0^{+\infty} |E(t, a)| da \leq LT^2 \|\alpha\|_\infty \|\phi\|_{F^+} e^{LT},$$

par conséquent,

$$\|E\|_{F^+} \leq LT^2 \|\alpha\|_\infty \|\phi\|_{F^+} e^{LT}.$$

Pour que l'opérateur A soit contractant dans l'espace de Banach F_+ , il suffit de choisir T , tel que

$$LT^2 \|\alpha\|_\infty \|\phi\|_{F^+} e^{LT} < 1.$$

En appliquant à chaque fois la même procédure entre $[kT, (k+1)T]$ on aura la solution globale, d'où le résultat du théorème.

3.2 États stationnaires

Les équilibres du modèle (3.1) sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \Lambda - \frac{\beta S^* I^*}{N} - \mu S^*, \\ \frac{\partial E^*}{\partial a} = -(\alpha(a) + \mu) E^*(a), \\ E^*(0) = \frac{\beta S^* I^*}{N}, \\ 0 = \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) da - \gamma I^* - \mu I^*, \\ 0 = \gamma I^* - \mu R^*. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Le système (3.1) a un unique équilibre sans maladie, défini comme suit

$$P_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right).$$

On s'intéresse maintenant à l'équilibre endémique P^* . Par la résolution de l'équation différentielle du système (3.11), on obtient

$$E^*(a) = E^*(0) K(a)$$

où

$$K(a) = e^{-\mu a - \int_0^a \alpha(\sigma) d\sigma},$$

représente la probabilité de rester dans le compartiment des exposés.

En remplaçant l'expression de $E^*(a)$ dans la quatrième équation du système (3.11), cela donne

$$I^* = \frac{E^*(0) \int_0^{+\infty} \alpha(a) K(a) da}{\gamma + \mu}.$$

En substituant I^* par sa formule dans la condition initiale du système (3.11), on obtient

$$S^* = \frac{N(\mu + \gamma)}{\beta \int_0^{+\infty} \alpha(a) K(a) da}.$$

De même, en remplaçant la formule de I^* dans la cinquième équation du système (3.11), on obtient aussi

$$R^* = \frac{\gamma E^*(0) \int_0^{+\infty} \alpha(a) K(a) da}{\mu(\gamma + \mu)}.$$

D'après la première équation du système (3.11), on a

$$E^*(0) = \mu S^*(R_0 - 1),$$

où

$$R_0 = \frac{\Lambda \beta}{\mu N(\mu + \gamma)} \int_0^{+\infty} \alpha(a) K(a) da.$$

Ainsi l'équilibre endémique P^* existe si et seulement si la condition suivante est vérifiée

$$R_0 > 1.$$

On appelle R_0 le nombre de reproduction de base.

3.3 Stabilité locale de l'équilibre sans maladie

Proposition 8 *L'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$ et instable si $R_0 > 1$.*

Preuve

Pour étudier la stabilité locale de l'équilibre sans maladie, nous linéarisons le système (3.1) autour de cet équilibre. Pour cela, considérons les perturbations suivantes :

$$S(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + x(t), \quad E(t, a) = y(t, a), \quad I(t) = z(t), \quad R(t) = w(t).$$

Le système linéarisé prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\frac{\Lambda\beta}{\mu N}z(t) - \mu x(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} = -(\alpha(a) + \mu)y(t, a), \\ y(t, 0) = \frac{\Lambda\beta}{\mu N}z(t), \\ \frac{dz}{dt} = (\gamma + \mu)z(t) \int_0^{+\infty} \alpha(a)y(t, a)da, \\ \frac{dw}{dt} = cz(t) - \mu w(t). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

En cherchant des solutions exponentielles de la forme $x(t) = C_x e^{\lambda t}$, $y(t, a) = C_y(a) e^{\lambda t}$, $z(t) = C_z e^{\lambda t}$ et $w(t) = C_w e^{\lambda t}$, on obtient le problème linéaire de valeurs propres suivant ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda C_x = -\frac{\Lambda\beta}{\mu N}C_z - \mu C_x, \\ \frac{\partial C_y}{\partial a} + \lambda C_y(a) = -(\alpha(a) + \mu)C_y(a), \\ C_y(0) = \frac{\Lambda\beta}{\mu N}C_z, \\ \lambda C_z = \int_0^{+\infty} \alpha(a)C_y(a)da - (\gamma + \mu)C_z, \\ \lambda C_w = \gamma C_z - \mu C_w. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

La solution de la deuxième équation du système (3.13) est donnée par

$$C_y(a) = C_y(0)K(a)e^{-\lambda a}.$$

À partir de la quatrième équation du système (3.13), on a

$$C_z = \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a)C_y(a)da}{\lambda + \gamma + \mu}, \quad \lambda \neq -\gamma - \mu$$

d'où

$$C_z = \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a)C_y(0)K(a)e^{-\lambda a} da}{\lambda + \gamma + \mu}.$$

En remplaçant la formule de C_z dans la condition initiale du système (3.13), on obtient l'équation caractéristique suivante

$$\lambda + \gamma + \mu = \frac{\Lambda\beta}{\mu N} \int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)e^{-\lambda a} da,$$

ceci implique

$$\frac{\lambda}{\gamma + \mu} + 1 = R_0 \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)e^{-\lambda a} da}{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)da}. \quad (3.14)$$

Notons par

$$F(\lambda) = R_0 \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)e^{-\lambda a} da}{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)da} - \frac{\lambda}{\gamma + \mu} - 1 = 0. \quad (3.15)$$

Supposons d'abord $R_0 > 1$. Dans ce cas, F est strictement décroissante, si λ est considéré comme une variable réelle. On a aussi $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} F(\lambda) = \mp\infty$ et $F(0) = R_0 - 1 > 0$, l'équation caractéristique possède une valeur propre réelle positive, ce qui implique que l'équilibre sans maladie est instable, ce qui signifie que si quelques personnes sont infectées, la maladie se répandra.

Supposons maintenant que $R_0 < 1$, dans ce cas on a $F(0) = R_0 - 1 < 0$, ce qui implique que l'équation caractéristique admet une racine réelle négative. Si on considère que toutes les racines complexes ont des parties réelles non négatives, alors

$$\left| R_0 \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)e^{-\lambda a} da}{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)da} \right| \leq R_0 < 1.$$

Ceci est en contradiction avec l'équation (3.14), par conséquent l'équation caractéristique ne peut pas avoir de racines avec une partie réelle positive, d'où l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable, cela veut dire que si quelques cas de personnes infectées se présentent, leur nombre sera réduit à zéro et la maladie ne se propagera pas.

3.4 Stabilité locale de l'équilibre endémique

Premièrement, on linéarise le système (3.1) autour de l'équilibre endémique. Soit les perturbations suivantes ;

$$S(t) = S^* + x(t), \quad E(t, a) = E^*(a) + y(t, a), \quad I(t) = I^* + z(t), \quad R(t) = R^* + w(t).$$

Le système linéarisé du système (3.1) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{-\beta}{N} S^* z(t) - \frac{\beta}{N} x(t) I^* - \mu x(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} = -(\alpha(a) + \mu) y(t, a), \\ y(t, 0) = \frac{\beta}{N} S^* z(t) + \frac{\beta}{N} x(t) I^*, \\ \frac{dz}{dt} = \int_0^{+\infty} \alpha(a) y(t, a) da - (\gamma + \mu) z(t), \\ \frac{dw}{dt} = \gamma z(t) - \mu w(t). \end{array} \right. \quad (3.16)$$

On cherche une solution de la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= C_x e^{\lambda t}, & y(t, a) &= C_y(a) e^{\lambda t}, \\ z(t) &= C_z e^{\lambda t}, & w(t) &= C_w e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

En substituant ces solutions dans le système (3.16), on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda C_x = -\frac{\beta}{N} S^* C_z - \frac{\beta}{N} C_x I^* - \mu C_x, \\ \frac{\partial C_y}{\partial a} + \lambda C_y(a) = -(\alpha(a) + \mu) C_y(a), \\ C_y(0) = \frac{\beta}{N} S^* C_z + \frac{\beta}{N} C_x I^*, \\ \lambda C_z = \int_0^{+\infty} \alpha(a) C_y(a) da - (\gamma + \mu) C_z, \\ \lambda C_w = \gamma C_z - \mu C_w. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

En résolvant la deuxième équation du système (3.17), on trouve

$$C_y(a) = C_y(0)e^{-\lambda a}K(a).$$

D'après la première et la troisième équation du système (3.28), on a

$$C_x = -\frac{C_y(0)}{\lambda + \mu}, \quad \lambda \neq -\mu.$$

De même, à partir de la première équation du système (3.17), on a aussi

$$C_z = -\frac{\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*}{\frac{\beta}{N}S^*}C_x.$$

En remplaçant l'expression de z dans la quatrième équation du système (3.17), on obtient

$$\frac{-\lambda(\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*)}{\frac{\beta}{N}S^*}C_x = \int_0^{+\infty} \alpha(a)C_y(0)e^{-\lambda a}K(a)da + (\gamma + \mu) \left(\frac{\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*}{\frac{\beta}{N}S^*}C_x \right),$$

d'où

$$\frac{\lambda(\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*)}{\frac{\beta}{N}S^*} \frac{C_y(0)}{\lambda + \mu} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)C_y(0)e^{-\lambda a}K(a)da - (\gamma + \mu) \left(\frac{\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*}{\frac{\beta}{N}S^*} \frac{C_y(0)}{\lambda + \mu} \right),$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*}{\frac{\beta}{N}S^*} \frac{C_y(0)}{\lambda + \mu} \right) (\lambda + \gamma + \mu) = \int_0^{+\infty} \alpha(a)C_y(0)e^{-\lambda a}K(a)da.$$

Ainsi l'équation caractéristique du système (3.16) s'écrit comme suit :

$$\frac{(\lambda + \mu + \frac{\beta}{N}I^*)}{\frac{\beta}{N}S^*} \frac{(\lambda + \gamma + \mu)}{(\lambda + \mu)} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)e^{-\lambda a}K(a)da.$$

En remplaçant la formule de S^* et I^* dans l'équation caractéristique, on obtient

$$\left(\frac{\lambda}{\gamma + \mu} + 1 \right) (\lambda + \mu R_0) = (\lambda + \mu) \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a)e^{-\lambda a}K(a)da}{\int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)da}.$$

On considère $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ tel que $\lambda_1 \geq 0$. Dans ce cas

$$\left| \frac{\lambda}{\gamma + \mu} + 1 \right| \left| \lambda + \mu \right| < \left| \frac{\lambda}{\gamma + \mu} + 1 \right| \left| \lambda + \mu R_0 \right| = \left| \lambda + \mu \right| \left| \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(a) e^{-\lambda a} K(a) da}{\int_0^{+\infty} \alpha(a) K(a) da} \right| \leq \left| \lambda + \mu \right|$$

d'où

$$\left| \frac{\lambda}{\gamma + \mu} + 1 \right| \left| \lambda + \mu \right| < \left| \lambda + \mu \right|,$$

ce qui implique

$$1 \leq \left| \frac{\lambda}{\gamma + \mu} + 1 \right| < 1,$$

alors, dans ce cas, l'équation caractéristique n'a pas de racines complexes avec des parties réelles non négatives, ainsi l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable. Dans ce cas, la maladie persistera quelle que soit la valeur de t , nous ne serons pas en mesure de l'éradiquer.

3.5 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Théorème 2 *Lorsque $R_0 < 1$, l'équilibre sans maladie du système (3.1) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve : Selon la condition aux limites et les conditions initiales du système (3.1), on obtient

$$E(t, a) = \begin{cases} E(t - a, 0) e^{-\mu a} \pi(a), & 0 \leq a < t, \\ E_0(a - t) \frac{\pi(a)}{\pi(a - t)} e^{-\mu t}, & 0 < t \leq a, \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$$\pi(a) = e^{-\int_0^a \alpha(\sigma) d\sigma}.$$

On considère la fonction suivante :

$$B(a) = \int_a^{+\infty} \alpha(\sigma) e^{-\int_a^\sigma (\alpha(\theta) + \mu) d\theta} d\sigma,$$

alors

$$B'(a) = -\alpha(a) + (\alpha(a) + \mu)B(a).$$

On définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1(t) = V_E(t) + V_I(t),$$

où

$$V_E(t) = \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} B(a)E(t, a)da, \quad V_I(t) = \frac{1}{M}I(t) \text{ et } M = \int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)da.$$

On a

$$\begin{aligned} V_E(t) &= \frac{1}{M} \int_0^t B(a)E(t, a)da + \frac{1}{M} \int_t^{+\infty} B(a)E(t, a)da \\ &= \frac{1}{M} \int_0^t B(a)E(t - a, 0)e^{-\mu a} \pi(a)da + \frac{1}{M} \int_t^{+\infty} B(a)E(0, a - t) \frac{\pi(a - t)}{\pi(a)} e^{-\mu t} da \end{aligned}$$

On fait le changement de variable suivant

$$r = t - a, \quad p = a - t$$

on obtient

$$V_E(t) = \frac{1}{M} \int_0^t B(t - r)E(r, 0)e^{-\mu(t-r)} \pi(t - r)dr + \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} B(t + p)E(0, p) \frac{\pi(p + t)}{\pi(p)} e^{-\mu t} dp$$

La dérivée de V_E par rapport au temps t donne

$$\frac{dV_E}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a)E(t, a)da. \quad (3.19)$$

De même, on calcule la dérivée de V_I par rapport au temps t , on obtient

$$\frac{dV_I}{dt} = \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a)E(t, a)da - \frac{\gamma + \mu}{M}. \quad (3.20)$$

En additionnant (3.20) et (3.19), on trouve

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\gamma + \mu}{M} I(t) \left(\frac{\beta S(t)M}{N(\gamma + \mu)} - 1 \right).$$

D'après la première équation du système (3.1), on a

$$\frac{dS}{dt} \leq \Lambda - \mu S(t),$$

d'où

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Il en résulte que tous les points oméga limites satisfont $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, alors on considère juste les solutions pour lesquelles $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &\leq \frac{\gamma + \mu}{M} I(t) \left(\frac{\Lambda \beta M}{\mu N (\gamma + \mu)} - 1 \right), \\ &\leq \frac{\gamma + \mu}{M} I(t) (R_0 - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\frac{dV_1}{dt} \leq 0$ si $R_0 \leq 1$

Ensuite, on a $\frac{dV_1}{dt} = 0$, ce qui implique que $I(t) = 0$ ou $R_0 = 1$ et $S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$.

En remplaçant $S(t)$ par $\frac{\Lambda}{\mu}$ dans le modèle, on obtient $I(t) = 0$ et $E(t, 0) = 0$.

Ainsi, le théorème Lyapunov-LaSalle [8] et la proposition 8 impliquent que l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

3.6 Persistance uniforme

Dans cette section, nous étudions la persistance uniforme du système (3.1), pour cela on définit la fonction de persistance $\rho : X^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ par

$$\rho(S_0, E_0(a), I_0) = I_0 + \int_0^{+\infty} E_0(a) da. \quad (3.21)$$

De même, on définit $X^+ = X^0 \cup \partial X^0$, avec

$$X^0 = \{(S_0, E_0(\cdot), I_0) \in X^+ : \rho(S_0, E_0(\cdot), I_0) > 0\}$$

et

$$\partial X^0 = \{(S_0, E_0(\cdot), I_0) \in X^+ : \rho(S_0, E_0(\cdot), I_0) = 0\}.$$

On note,

$$\tilde{x} = (S_0, E_0(\cdot), I_0)$$

De même, on note U_t le semi-flot du système (3.1).

La proposition suivante joue un rôle important dans la preuve du résultat principale de cette section.

Proposition 9 *Le sous ensemble X^0 est positivement invariant sous le semi flot $\{U_t(\tilde{x})\}_{t \in \mathbf{R}^+}$. En plus, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable pour le semi flot $\{U_t(\tilde{x})\}_{t \in \mathbf{R}^+}$ restreint à ∂X^0 .*

Preuve : Soit $(S_0, E_0(\cdot), I_0) \in X^0$ et posons

$$\rho(U_t(\tilde{x})) = I(t) + \int_0^{+\infty} E(t, a) da := K(t)$$

d'où

$$K'(t) = E(t, 0) - \mu \int_0^{+\infty} E(t, a) da - (\gamma + \mu)I(t)$$

Ce qui implique

$$K'(t) \geq -(\gamma + \mu)K(t).$$

En intégrant cette dernière inégalité par rapport à t , on trouve

$$K(t) \geq K(0)e^{-(\gamma + \mu)t}$$

c'est-à-dire

$$I(t) + \int_0^{+\infty} E(t, a) da \geq e^{-(\gamma + \mu)t} \left(I_0 + \int_0^{+\infty} E_0(a) da \right) > 0.$$

Par conséquent, X^0 est positivement invariant.

Supposons maintenant $(S_0, E_0(\cdot), I_0) \in \partial X^0$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial E}{\partial a}(t, a) = -(\alpha(a) + \mu)E(t, a), \\ \frac{dI}{dt} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)E(t, a) da - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ E(t, 0) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N}, \\ E(0, a) = E_0(a), \quad I(0) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Puisque $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ lorsque t est suffisamment grand, nous avons

$$E(t, a) \leq \tilde{E}(t, a) \text{ et } I(t) \leq \tilde{I}(t), \quad (3.23)$$

où

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial a}(t, a) = -(\alpha(a) + \mu)\tilde{E}(t, a), \\ \frac{d\tilde{I}}{dt} = \int_0^{+\infty} \alpha(a)\tilde{E}(t, a)da - \gamma\tilde{I}(t) - \mu\tilde{I}(t), \\ \tilde{E}(t, 0) = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\beta\tilde{I}(t)}{N}, \\ \tilde{E}(0, a) = E_0(a), \quad \tilde{I}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Par la formulation (3.18), on a

$$\tilde{E}(t, a) = \begin{cases} \tilde{E}(t-a, 0)e^{-\mu a}\pi(a), & 0 \leq a < t, \\ E_0(a-t)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}e^{-\mu t}, & 0 < t \leq a. \end{cases} \quad (3.25)$$

En substituant (3.25) à la deuxième équation de (3.24), on obtient

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{I}}{dt} = \frac{\Lambda\beta}{\mu N} \int_0^t \alpha(a)\tilde{I}(t-a)\pi(a)e^{-\mu a}da + H_{\tilde{I}}(t) - (\mu + \gamma)\tilde{I}(t), \\ \tilde{I}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

où

$$H_{\tilde{I}}(t) = \int_t^{+\infty} \alpha(a)E_0(a-t)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}e^{-\mu t}da.$$

Comme $(S_0, E_0(\cdot), I_0) \in \partial X^0$, en déduit que $H_{\tilde{I}}(t) = 0$. L'équation (3.26) a une solution unique $\tilde{I}(t) = 0$ (voir [23]).

Si $0 \leq a < t$, selon (3.25), on a $\tilde{E}(t, a) = 0$. Si $t \leq a$, alors on a

$$0 \leq \|\tilde{E}(t, a)\|_{L^1} = \|E_0(a-t)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}e^{-\mu t}\|_{L^1} \leq e^{-(\alpha_{\min} + \mu)t}\|E_0\|_{L^1},$$

ce qui donne $\tilde{E}(t, a) = 0$. En utilisant (3.23), on obtient que $E(t, a) = 0$ et $I(t) = 0$. Ceci complète la preuve.

Par conséquent, on a le théorème suivant.

Théorème 3 *Supposons que $R_0 > 1$, le semi flot $\{U_t(\tilde{x})\}_{t \in \mathbf{R}^+}$ est uniformément persistant par rapport à $(X^0, \partial X^0)$, c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ qui est indépendant des valeurs initiales de sorte que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(U_t(\tilde{x})) \geq \epsilon$ pour tout $\tilde{x} \in X^0$.*

Preuve : Puisque l'équilibre sans maladie $P_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable dans ∂X^0 , en appliquant le théorème 4.2 de Hale et Waltman [9], nous devons seulement étudier le comportement de la solution commençant dans X^0 dans un certain voisinage de P_0 . Ensuite, nous montrerons que

$$W^s(\{P_0\}) \cap X^0 = \emptyset,$$

où

$$P_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0) \text{ et } W^s(\{P_0\}) = \{\tilde{x} \in X^+ : \lim_{t \rightarrow \infty} U_t(\tilde{x}) = P_0\}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in W^s(\{P_0\}) \cap X^0$, il s'ensuit qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $I(t_0) + \int_0^{+\infty} E(t_0, a) da > 0$. On va prouver maintenant qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $I(t) \geq \epsilon$ pour $t \geq 0$ et $E(t, a) \geq \epsilon$ pour tout $(t, a) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. On suppose qu'il existe $b \in \mathbf{R}^+$ tel que $I(t) = 0$ pour tout $t \leq b$. De même on suppose

$$\int_0^{+\infty} E_0(a) \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} = 0,$$

on obtient donc

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} \int_b^t S(t-a) I(t-a) e^{-\mu a} \pi(a) da - \gamma I(t) - \mu I(t) \text{ pour } t > b.$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $I(t_1) = 0$, $I'(t_1) > 0$ et $I(t) = 0$ pour tout $t \leq t_1$. Puis, à partir de l'équation de I , on déduit que

$$0 < I'(t_1) = \frac{\beta}{N} \int_b^{t_1} S(t_1-a) I(t_1-a) e^{-\mu a} \pi(a) da = 0,$$

ce qui donne $I(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty)$. On déduit ensuite de (3.18) que $\int_0^{+\infty} E(t, a) da = 0$. Par conséquent $I(t) + \int_0^{+\infty} E(t, a) da = 0$, pour $t \geq 0$, contradiction.

Ensuite, nous considérons la fonction suivante

$$\Phi(t) = \int_0^{+\infty} B(a)E(t, a)da + I(t),$$

avec

$$B(a) = \int_a^{+\infty} \alpha(\sigma)e^{-\int_a^\sigma (\alpha(\theta)+\mu)d\theta} d\sigma$$

la dérivée de Φ par rapport au temps t est donné par

$$\frac{d\Phi}{dt} = (\gamma + \mu)I(t) \left(\frac{\beta S(t)M}{N(\gamma + \mu)} - 1 \right), \quad \text{où } M = \int_0^{+\infty} \alpha(a)K(a)da.$$

Puisque $y \in W^s(\{P_0\})$, nous avons $S(t) \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ et $I(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Lorsque $R_0 > 1$, on obtient que la fonction Φ est croissante pour t suffisamment grand. Ainsi, il existe $t_0 > 0$ assez grand tel que $\Phi(t) \geq \Phi(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$. Puisque $\Phi(t_0) > 0$, cela empêche la fonction $(I(t), E(t, a))$ de converger vers $(0, 0)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Contradiction avec $S(t) \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ceci complète la preuve.

Nous traiterons ensuite la stabilité globale de l'équilibre endémique pour le système (3.1) lorsque $R_0 > 1$.

3.7 Stabilité globale de l'équilibre endémique

Nous considérons la fonction suivante ;

$$g(x) = x - 1 - \ln(x).$$

Ainsi, la fonction g a un minimum global à 1 et satisfait $g(1) = 0$.

Théorème 4 *Si $R_0 > 1$, alors l'équilibre endémique du système (3.1) est globalement asymptotiquement stable dans X^0 .*

Preuve : On définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2(t) = V_S(t) + V_E(t) + V_I(t),$$

avec

$$V_S(t) = S(t) - S^* - \int_{S^*}^{S(t)} \frac{S^*}{\sigma} d\sigma,$$

$$V_E(t) = \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} B(a)E^*(a)g\left(\frac{E(t,a)}{E^*(a)}\right)da,$$

$$V_I(t) = \frac{1}{M} I^* g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right).$$

En prenant la dérivée de V_S par rapport au temps t , on trouve

$$\frac{dV_S}{dt} = \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(\Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t)\right). \quad (3.27)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} V_E(t) &= \frac{1}{W} \int_0^t B(a)E^*(a)g\left(\frac{E(t,a)}{E^*(a)}\right) da + \frac{1}{W} \int_t^{+\infty} B(a)E^*(a)g\left(\frac{E(t,a)}{E^*(a)}\right) da, \\ &= \frac{1}{M} \int_0^t B(a)E^*(a)g\left(\frac{E(t-a,0)e^{-\mu a}\pi(a)}{E^*(a)}\right) da + \frac{1}{M} \int_0^t B(a)E^*(a)g\left(\frac{E(0,a-t)e^{-\mu t}\Pi(a)}{E^*(a)\pi(a-t)}\right) da \\ &\quad + \frac{1}{M} \int_0^t B(a)E^*(a)g\left(\frac{E(0,a-t)e^{-\mu t}\Pi(a)}{E^*(a)\pi(a-t)}\right) da \end{aligned}$$

On fait un changement de variable, on pose

$$u = t - a, \quad v = a - t$$

ainsi,

$$\begin{aligned} V_E(t) &= \frac{1}{M} \int_0^t B(t-u)E^*(t-u)g\left(\frac{E(u,0)e^{-\mu(t-u)}\pi(t-u)}{E^*(t-u)}\right) du \\ &\quad + \frac{1}{M} \int_0^t B(v+t)E^*(v+t)g\left(\frac{E(0,v)e^{-\mu t}\pi(v+t)}{E^*(v+t)\pi(v)}\right) dv \end{aligned}$$

La dérivée de V_E par rapport au temps t est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV_E}{dt} &= \frac{\beta S^* I^*}{N} g\left(\frac{SI}{S^* I^*}\right) - \frac{1}{M} \int_0^t \alpha(t-u)E^*(t-u)g\left(\frac{E(u,0)e^{-\mu(t-u)}\pi(t-u)}{E^*(t-u)}\right) du \\ &\quad - \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(t+v)E^*(t+v)g\left(\frac{E(0,v)\pi(v+t)e^{-\mu t}}{E^*(v+t)\pi(v)}\right) dv \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{dV_E}{dt} = \frac{\beta S^* I^*}{N} g\left(\frac{SI}{S^* I^*}\right) - \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) g\left(\frac{E(t, a)}{E^*(a)}\right) da \quad (3.28)$$

De même, la dérivée de V_I par rapport au temps t est donnée par

$$\frac{dV_I}{dt} = \frac{1}{M} \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) \left(\int_0^{+\infty} \alpha(a) E(t, a) da - \gamma I(t) - \mu I(t)\right) \quad (3.29)$$

En additionnant (3.27), (3.28) et (3.29), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(\Lambda - \frac{\beta S(t) I(t)}{N} - \mu S(t)\right) + \frac{\beta S^* I^*}{N} g\left(\frac{SI}{S^* I^*}\right) \\ &\quad - \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) g\left(\frac{E(t, a)}{E^*(a)}\right) da \\ &\quad + \frac{1}{M} \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) \left(\int_0^{+\infty} \alpha(a) E(t, a) da - \gamma I(t) - \mu I(t)\right) \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(-\mu(S^* - S) - \frac{\beta S(t) I(t)}{N} + \frac{\beta S^* I^*}{N}\right) \\ &\quad + \frac{\beta S(t) I(t)}{N} - \frac{\beta S^* I^*}{N} - \frac{\beta S^* I^*}{N} \ln \frac{S(t) I(t)}{S^* I^*} - \frac{\gamma + \mu}{M} I(t) \\ &\quad + \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) da + \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) \ln \frac{E(t, a)}{E^*(a)} da \\ &\quad - \frac{1}{M} \frac{I^*}{I(t)} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E(t, a) da + \frac{\gamma + \mu}{M} I^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\mu(S^* - S(t))^2}{S(t)} - \frac{\beta S^* I^*}{N} \left(\frac{S^*}{S(t)} - 1 \right) \\
&+ \frac{\beta S^* I(t)}{N} - \frac{\gamma + \mu}{M} I(t) - \frac{\beta S^* I^*}{N} \ln \frac{S(t) I(t)}{S^* I^*} \\
&+ \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) \left(1 + \ln \frac{E(t, a)}{E^*(a)} - \frac{I^* E(t, a)}{I(t) E^*(a)} \right) da \\
&= \frac{-\mu(S^* - S(t))^2}{S(t)} - \frac{\beta S^* I^*}{N} g \left(\frac{S^*}{S(t)} \right) - \frac{\beta S^* I^*}{N} \ln \frac{I(t)}{I^*} \\
&+ \frac{\beta S^* I(t)}{N} - \frac{\gamma + \mu}{M} I(t) - \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) g \left(\frac{E(t, a) I^*}{E^*(a) I(t)} \right) da \\
&- \frac{1}{M} \ln \frac{I^*}{I(t)} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) da \\
&= \frac{-\mu(S^* - S(t))^2}{S(t)} - \frac{\beta S^* I^*}{N} g \left(\frac{S^*}{S(t)} \right) - \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} \alpha(a) E^*(a) g \left(\frac{E(t, a) I^*}{E^*(a) I(t)} \right) da
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\frac{dV_2}{dt} \leq 0$, après des calculs on trouve que le plus grand ensemble invariant où $\frac{dV_2}{dt} = 0$ est le singleton $\{P^*\}$ (voir [23]). Par conséquent, l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

3.8 Simulations numériques

Dans cette section, on présente des simulations numériques afin d'illustrer nos résultats dans les sections qui précèdent. Dans les deux cas suivants, le jour sera considéré en tant qu'unité de temps, le nombre de personnes susceptibles au début de l'épidémie ($t = 0$) est $S(0) = 195$, le nombre d'individus infectés à $t = 0$ est $I(0) = 3$ et la densité d'individus exposés pour $t = 0$ est $E(0, x) = 2e^{-0.5x}$.

Cas 1 :

Dans ce cas, on choisit les paramètres de telle sorte que nous ayons $R_0 < 1$ et on peut observer la stabilité globale de l'équilibre sans maladie, pour cela nous prenons en considération le système (3.1) avec la sélection des

paramètres suivants :

$$\gamma = 0.1, \quad \mu = 0.05, \quad \beta = 0.1, \quad \Lambda = 8.$$

En choisissant la fonction suivante pour le taux d'incubation :

$$\alpha(a) = 0.09ae^{-0.08a}.$$

Dans ce cas, on trouve

$$R_0 = 0.41 < 1.$$

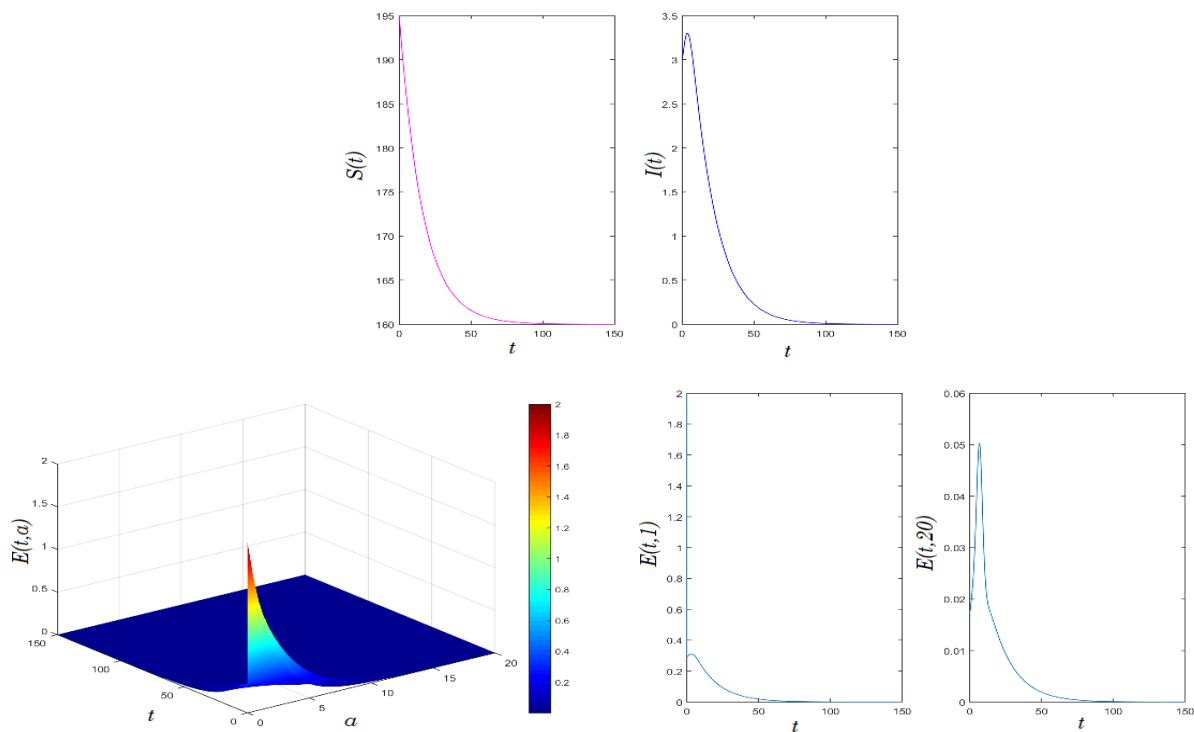


FIGURE 3.1 – La stabilité globale de l'équilibre sans maladie dans le cas de $R_0 \leq 1$.

On remarque dans la figure 3.1 que l'épidémie sera éradiquée après environ 50 jours.

Cas 2 :

Dans ce cas, les paramètres sont choisis pour avoir $R_0 > 1$ et nous pouvons observer la stabilité globale de l'équilibre endémique. Pour cela, en choisissant les paramètres suivants pour le système (3.1)

$$\gamma = 0.03, \quad \mu = 0.01, \quad \beta = 0.05, \quad \Lambda = 7, \quad \alpha(a) = 0.7ae^{-0.8a}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$R_0 = 2.65 > 1.$$

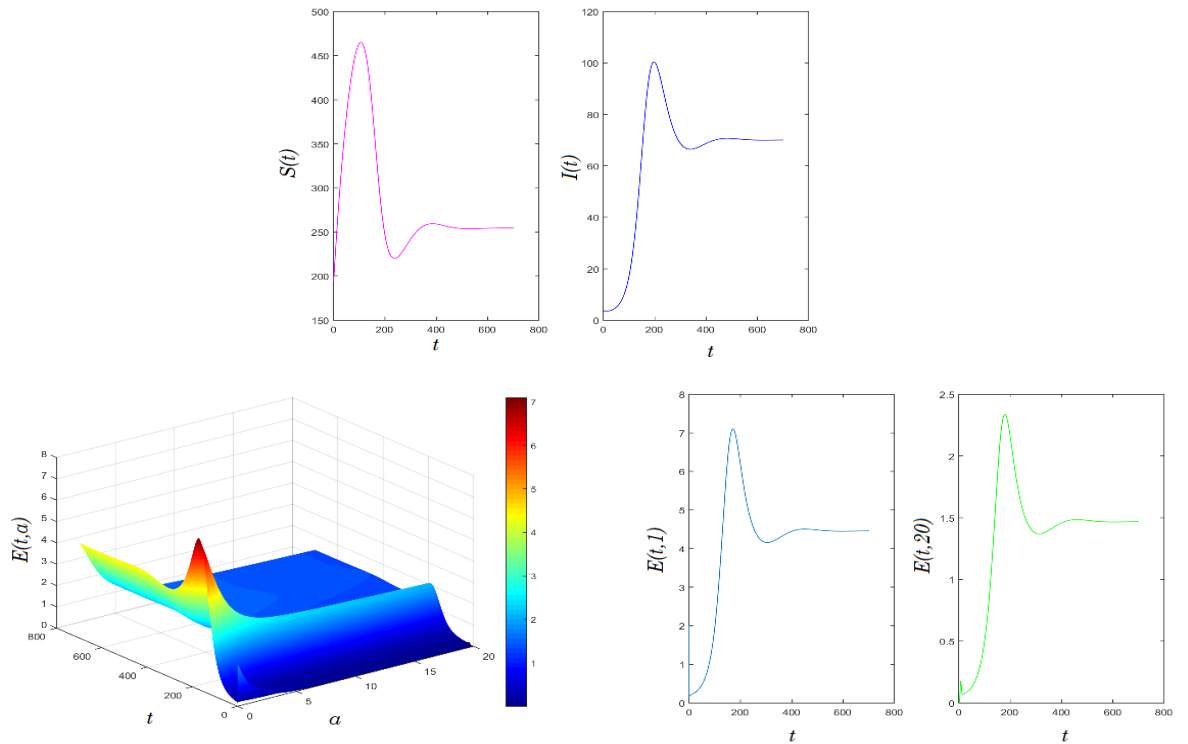


FIGURE 3.2 – La stabilité globale de l'équilibre endémique dans le cas de $R_0 > 1$.

Nous remarquons dans la figure 3.2 la persistance de l'infection à un niveau positif, ce qui veut dire que l'épidémie ne cessera pas.

Chapitre 4

Annexe

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad (4.1)$$

avec $g : D \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ est une fonction de classe C^1 .

4.1 Existence et unicité des solutions

Définition 1 $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est appelée localement Lipschitz en y_0 s'il existe un voisinage $B(y_0, \epsilon)$ avec $\epsilon > 0$ et $L > 0$, tel que

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \text{ pour tout } y_1, y_2 \in B(y_0, \epsilon).$$

$B(y_0, \epsilon) = \{y \in \mathbf{R}^n \text{ tel que } \|y - y_0\| < \epsilon\}$ et L est appelée une constante de Lipschitz.

Définition 2 F est localement Lipschitzienne en y uniformément par rapport à t , s'il existe un voisinage de y et il existe $L > 0$, tel que

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|.$$

Théorème 5 .(Théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard) [7] Soit g une fonction localement Lipschitzienne par rapport à x , et continue par rapport à t , donc pour tout (t_0, x_0) appartient à Ω , le système (4.1) admet une solution unique dans Ω , définie sur un intervalle maximal $[t_0, T_{max})$ avec $T_{max} \geq t_0 \geq 0$.

4.2 Points d'équilibre

Un système d'équations différentielles peut être défini comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = g(x). \quad (4.2)$$

avec $g : D \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ est une fonction de classe C^1 . On dit que l'état x_e est un point d'équilibre pour le système (4.1) si $g(x_e) = 0$. Un point d'équilibre d'un système dynamique représente une solution stationnaire pour la dynamique.

4.3 Stabilité locale des points d'équilibre

La stabilité d'un point d'équilibre détermine si les solutions proches du point d'équilibre restent proches ou non.

Définition 3 *Un point d'équilibre est stable si les conditions initiales qui commencent près d'un point d'équilibre restent près de ce point d'équilibre. Nous disons qu'un point d'équilibre x_e est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Un point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et aussi $x(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Cela correspond au cas où toutes les trajectoires proches convergent vers le point d'équilibre pour un temps long.

Un point d'équilibre est instable s'il n'est pas stable.

4.4 Fonction de Lyapunov

Soit $U \subset \mathcal{R}^n$ un voisinage de 0 et $V \in C^1(U, \mathbf{R})$ une fonction à valeur réelle. Le vecteur gradient de $V(x)$ est

$$\text{grad } V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right).$$

Soit $g(x)$ le champ de vecteurs du système (4.1). La dérivée de V dans la direction de g est définie comme un produit scalaire

$$\dot{V}(x) = \text{grad } V(x) \cdot g(x)$$

$\dot{V}(x)$ est aussi appelé la dérivée de Lyapunov par rapport au système (4.1). La fonction $V(x)$ est appelée une fonction de Lyapunov du système (4.1) au voisinage d'un équilibre $x = 0$ si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour $x \in U$. Soit $x(t)$ une solution du système (4.1) qui reste dans U , alors

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \text{grad } V(x(t)) \cdot x'(t) = \text{grad } V(x(t)) \cdot f(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$$

Par conséquent, $V(x(t))$ diminue le long d'une solution du système (4.1) dans un voisinage de $x = 0$. Les théorèmes 6-7 décrivent une méthode directe pour établir la stabilité en utilisant une fonction de Lyapunov.

Théorème 6 [13] *Supposons qu'il existe une fonction $V(x)$ telle que*

1. $V(x) \geq 0$ pour $x \in U$ et $V(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour $x \in U$

Alors l'équilibre $x = 0$ du système (4.1) est localement stable.

Théorème 7 [13] *Supposons qu'il existe une fonction $V(x)$ telle que*

1. $V(x) \geq 0$ pour $x \in U$ et $V(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour $x \in U$ et $\dot{V} = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Alors l'équilibre $x = 0$ du système (4.1) est localement asymptotiquement stable.

Une fonction V satisfaisant l'hypothèse (1) des théorèmes ci-dessus est dite définie positive en $x = 0$. De même, la dérivée de Lyapunov $\dot{V}(x)$ dans l'hypothèse (2) du théorème 7 est définie négative en $x = 0$.

4.5 Principe d'invariance de LaSalle

Soit $G \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble ouvert. On dit qu'une fonction $V(x)$ est une fonction de Lyapunov par rapport à G si

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \text{pour } x \in G.$$

Soit K le plus grand sous-ensemble invariant de l'ensemble $\{x \in G : \dot{V}(x) = 0\}$. Puisque $V(x(t))$ décroît le long d'une solution $x(t, x_0)$ du système (4.1), l'ensemble ω -limite de la solution,

$$\omega(x_0) = \{x \in G : \text{il existe } t_n \rightarrow +\infty \text{ tel que } x(t_n, x_0) \rightarrow x_1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\},$$

est contenu dans l'ensemble où $\dot{V}(x) = 0$. Puisque les ensembles ω -limites sont invariants, nous savons que $\omega(x_0)$ doit être contenu dans le plus grand sous-ensemble invariant K . C'est le principe d'invariance de LaSalle.

Théorème 8 [13] *Si une solution $x(t, x_0)$ reste entièrement dans G pour $t \geq 0$, alors son ensemble oméga-limite $\omega(x_0) \cap G \subset K$.*

Corollaire 1 [13] *Si K contient un seul point x_e , alors x_e est un équilibre et les solutions qui restent entièrement dans G pour $t \geq 0$ convergent vers x_e lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

Si nous savons également que x_e est localement stable, et que toutes les solutions commençant dans G restent dans G (dans ce cas, on dit que G est positivement invariant), alors le corollaire 1 implique que x_e est globalement asymptotiquement stable dans la région G .

Proposition 10 [21] *Nous considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(t, y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

avec

$$y = (y_1, \dots, y_n) \text{ et } F = (F_1, \dots, F_n).$$

Si la solution du système (4.3) existe et

$$F_j(t, y) \geq 0, \forall y \in [0, +\infty)^n, y_j = 0, t \geq 0$$

alors

$$y \in [0, +\infty)^n, \forall t \geq 0, \forall y_0 \geq 0.$$

4.6 Théorème de Banach Picard

Théorème 9 : [21] *Soit H un espace de Banach et T une application de H dans H telle que : $\forall (v, w) \in H^2 : \|T(v) - T(w)\|_H \leq k\|v - w\|_H$, où $k \in]0, 1[$, (T est contractante). Alors $\exists! u \in H$ tel que $T(u) = u$. On dit que u est le point fixe de T .*

Bibliographie

- [1] S.BENTOUT, Mathématiques Appliquées à Quelques modèles épidémiologiques , Université Abou Bekr BelKaid, Tlemcen, thèse de doctorat 2019 .
- [2] D.BERNOULLI, Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir, Histoire de l'Acad., Roy. Sci.(Paris) avec Mem, 1-45, 1760.
- [3] F.BRAUER, C..CASTILLO-CHAVEZ, Modèles mathématiques en biologie des populations et épidémiologie, Springer, 2012.
- [4] X.F.BRAUER, C.CASTILLO-CHAVEZ, Z.FENG, Mathematical models in epidemiology, Springer, 2019.
- [5] R. D. DEMASSE AND A. DUCROT, An age-structured within-host model for multistrain malaria infections, SIAM. J. Appl. Math., 73 (2013), 572–593
- [6] M.N.FRIOUI, Etude mathématique de quelques modèles épidémiologiques structurés en âge, Université Abou Bekr BelKaid Tlemcen, thèse de doctorat 2020.
- [7] T.GERALD, Ordinary differential equations and dynamical systems, American Mathematical Soc, 2012.
- [8] J.HALE, SM.VERDUYN LUNEL, Introduction to functional differential equations, Applied Mathematical Sciences 99, Springer-Verlag, New

York, 1993.

- [9] J.K.HALE, P.WALTMAN, Persistence in infinite dimensional systems, SIAM J. Math. Anal, 20 (1989), 388–395.
- [10] W.O. KERMACK, A.G.MCKENDRICK, A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. Royal Soc. London. 115 : 700–721, 1927
- [11] P.J.LASALLE, La stabilité des systèmes dynamiques, SIAM, 1976.
- [12] A.LEROY, Un exemple de modélisation, Bulletin de l'APMEP, 459 :469-476, 2005.
- [13] M.Y.LI, An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases, Springer International Publishing AG 2018.
- [14] X.LI, M.MARTCHEVA, J.YANG, Age Structured Epidemic Modeling, Springer, Springer Nature Switzerland AG 2020.
- [15] P.MAGAL, C.C.MCCLUSKEY, G.F.WEBB, Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model, Appl. Anal, 89 (2010), 1109–1140
- [16] C.C.MCCLUSKEY, Global stability for an SEI epidemiological model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes, American Institute of Mathematical Sciences, 9 (2012), 819-841.
- [17] A.NAVAS, Le jour où Bernoulli et d'Alembert se sont bagarrés sur la modélisation d'une pandémie, Vox-Fi, 2021.
- [18] B.PERTHAME, Transport Equations in Biology. Springer Science and Business Media, 2006.
- [19] J.M.ROHRBASSER, Les hasards de la variole, Astérian, 2011

- [20] R.ROSS, La prévention du paludisme , John Murray, 1911.
- [21] H.THIEME, Mathématiques en biologie des populations, Princeton University Press, 2018.
- [22] S.YACHEUR, Modélisation et étude mathématique de la propagation d'une maladie vectorielle (paludisme) au sein d'une population, Université de Lorraine ; Université Abou Bekr Belkaid (Tlemcen, Algérie), thèse de doctorat 2021.
- [23] Y.YANG, S.RUAN, X.DONGMEI, Stabilité globale d'un modèle dynamique de virus structuré par âge avec fonction d'infection de Beddington-DeAngelis . Biosciences Mathématiques & Ingénierie, 2015.