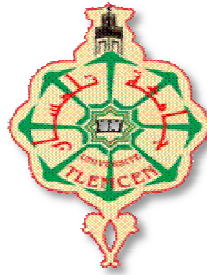


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou bakr Belkaid
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



Mémoire Pour L'Obtention Du Diplôme
De Magistère

Option : Seismic risk & Earthquake Engineering

Thème :

APPROCHE SEMI-GLOBALE 3D POUR LE CALCUL DES
STRUCTURES EN BETON ARME

Présenté en 18 Février 2012 par :

M^{elle} MEDJAHED Amina

Devant le Jury composé de :

Dr : D. ZENDAGUI	Maître de conférences UABB- Tlemcen	Président
Dr : A.MEGNOUNIF	Maître de conférences UABB- Tlemcen	Examineur
Dr : B.BENMANSOUR	Maître de conférences USTO- Oran	Examineur
Dr : M.MATALLAH	Maître de conférences UABB- Tlemcen	Encadreur
Dr : M.DJAFOUR	Maître de conférences UABB- Tlemcen	Co-Encadreur

REMERCIEMENTS

Juste quelques mots pour ne pas être ingrate envers tous ceux et celles qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Et si cette page peut ne paraître qu'un exercice convenu de politesse, j'espère que celles et ceux auxquels elle s'adresse, sauront y trouver l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux, plus particulièrement à Dr D.ZENDAGUI pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de la présente thèse.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux Dr M.MATALLAH et Dr M.DJAFOUR qui ont initiés et encadrés avec pertinence mes travaux de thèse. Je leur suis extrêmement reconnaissante de m'avoir accordé leur entière confiance et d'avoir su partager leur dynamisme et leur excellence scientifique avec une grande attention.

Je tiens également à remercier le Professeur C. La Borderie pour sa contribution qui a consistée à apporter son regard critique, son expérience et ses conseils.

Je remercie enfin Dr A.MEGNOUNIF et Dr B.BENMANSOUR, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de cette contribution. Leurs remarques et leurs suggestions seront sans nul doute très utiles pour la suite de cette recherche.

Je tiens à exprimer tout du fond de mon cœur, ma reconnaissance à mes proches qui savent déjà combien je leur dois, Il s'agit de ma famille, surtout mes parents qui m'offrent toujours un appui sûr et sans réserves, par leur soutien et leur encouragement. Merci à tous mes amis (es) et collègues qui ont sus m'apporter leur entière disponibilité et leur soutien indéfectible dans les moments les plus difficiles.

Résumé

Dans ce travail, une stratégie de modélisation simplifiée basée sur l'utilisation des poutres multifibre 3D a été adoptée afin de simuler le comportement non linéaire des structures en béton armé. Cette technique garantit une souplesse du calcul grâce au petit nombre de degrés de liberté. Des lois de comportement locales basées sur la théorie de l'endommagement et de la plasticité sont utilisées pour le béton et pour l'acier.

Malgré la simplicité de l'approche semi globale, les modèles utilisés ont démontré leur capacité à prédire le comportement global non linéaire. Ils sont capables de décrire correctement l'endommagement dans les structures en béton armé. Néanmoins, la prédiction des ouvertures des fissures reste un point problématique.

Comment calculer l'ouverture des fissures si on utilise une modélisation multifibre ??

Pour répondre à cette question, un modèle d'endommagement "OUF" [5] a été implémenté en multifibre sur CAST3M, ce modèle a l'avantage de décrire l'évolution des ouvertures des fissures, il utilise une variable tensorielle ϵ_{ouf} liée aux déformations anélastiques par une fonction S appelée Indicateur d'Ouverture de Fissures.

Pour éviter les problèmes de localisation, une technique de régularisation basée sur une approche énergétique a été utilisée. Enfin une méthode de post-traitement a été également développée pour l'évaluation des ouvertures de fissures au niveau local.

MOTS-CLÉS : Modélisation, Multifibre, Ouverture de fissures, Endommagement, Plasticité.

Abstract

Crack Opening computation is one of the most challenge for concrete structures applications. This work deals with the development of a simplified modeling strategy using fiber beams 3D in order to estimate crack opening in concrete. In contrast with macroscopic modeling, multifiber beams theory offers a flexibility of calculation thanks to the small number of freedom degrees. Constitutive laws based on damage and plasticity is introduced in order to take into account of non linearity.

In spite of the simplicity of semi global approach, the models used showed their capacities to predict the nonlinear global behavior. They are able to correctly describe the damage in the concrete structures. However, the prediction of the openings cracks remains a problem.

How to calculate the opening cracks if we use a multifiber modeling??

To answer this question, a model of damage "OUF" [5] « Unitair Opening Cracks » on the finite Element Code Cast3M into fiber element. This model has the advantage of describing the evolution of opening cracks, it uses a tensorial variable ε^{uco} related to the anelastic deformations by a function S called Indicator of Opening Cracks.

To avoid the problems of localization, a technique of regularization based on an energy approach was used. Finally a method of the post-processing was also developed for the evaluation of the openings- cracks at the local level.

Keywords: Crack opening, Multifiber beams, Damage, Plasticity.

المخلص

هذا العمل يتناول كيفية وضع استراتيجيات لنماذج مبسطة تعتمد على استعمال اعمدة ثلاثية الابعاد لحساب التصدعات على الهياكل الخرسانية. هذه الطريقة توفر مرونة في الحسابات بفضل العدد القليل من درجات الحرية. قوانين السلوك المحلية تعتمد على نظرية التلف والمرونة تستخدم على الخرسانة و الفولاذ.

على الرغم من بساطة طريقة شبه اجمالية النماذج المستخدمة أثبتت قدرتها على التنبؤ السلوك العام لاطيية وقادرة على تحديد نوعي لمناطق الضرر في ال هياكل. ومع ذلك فإن التنبؤ لمعرفة تطور فتحات التصدعات لا يزال يمثل مشكلة.

كيف يتم حساب فتح التصدعات عند استخدام النموذج المتعدد الألياف؟

للإجابة على هذا السؤال نموذج الضرر "OUF" " "فتحة وحدة التصدعات" تم وضعه على برنامج CAST3M في المتعدد الألياف. هذا النموذج لديه ميزة لوصف تطور فتحة وحدة التصدعات، يستخدم متغير ϵ_{ouf} يرتبط بالاعوجاجات الانبساطية بواسطة دالة S تسمى مؤشر افتتاح التصدعات.

لتجنب المشاكل الموضوعية ، تم استخدام تقنية تسوية تستند إلى نهج الطاقة. وقد وضعت طريقة في مرحلة ما بعد المعالجة لتقييم فتحات التصدعات على المستوى الموضوعي.

مفتاح الكلمات: المرونة, فتحة التصدعات, الضرر, المتعدد الألياف

Table des Matières

INTRODUCTION GENERALE	13
CHAPITRE1 ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE	16
1.1 INTRODUCTION.....	17
1.2. COMPORTEMENT EXPERIMENTAL DU BETON.....	17
1.2.1. <i>Comportement uni-axial du béton</i>	17
1.2.1.1. Traction directe	17
1.2.1.2. Traction cyclique	18
1.2.1.3. Compression simple	19
1.2.1.4. Compression cyclique.....	19
1.2.2. <i>L'effet unilatéral</i>	20
1.2.3. <i>Sollicitation bi-axiale</i>	20
1.2.4. <i>Sollicitation tri-axiale</i>	21
1.2.5. <i>Conclusions</i>	22
1.3. MODELISATION DU COMPORTEMENT DU BETON	22
1.3.1. <i>Plasticité</i>	22
1.3.2. <i>Endommagement</i>	25
1.3.2.1. Variable d'endommagement [8]	25
1.3.2.2. Contrainte effective [7]	26
1.3.2.3. Principe d'équivalence en déformation [5].....	26
1.3.2.5. Principe d'équivalence en énergie [5].....	27
1.3.3. <i>Modélisation de l'anisotropie du béton</i>	28
1.3.4. <i>Couplage Endommagement et Plasticité</i>	28
1.3.5. <i>Etude des problèmes de localisation</i>	29
1.3.5.1. Limiteurs de localisation.....	29
1.3.5.2. Conservation de l'énergie de rupture	29
1.3.6. <i>Exemples de Modèle d'endommagement</i>	30
1.3.6.1. Modèle de Mazars (1984) [1] [10].....	30
1.3.6.2. Modèle de A.Dragon et D.Halm [11] [15]	31
1.3.6.3. Modèle de La Borderie (1991) [12] [17].....	32
1.3.6.4. Modèle de Nechnech Wahid (2000) [3]	34
1.3.6.5. Modèle de S. Fichant (1996) [13]	36
1.3.7. <i>Conclusions</i>	38
1.4. ECHELLES DE MODELISATION	38
1.4.1. <i>Approche globale [15]</i>	39
1.4.2. <i>Approche macroscopique</i>	39
1.4.3. <i>Approche semi-globale [14]</i>	41
1.4.4. <i>Code aux éléments finis EFICOS [16]</i>	42
1.4.4.1. Introduction.....	42
1.4.4.2. Principe.....	42
1.4.4.3 Principe de calcul.....	43
1.4.4.4. Equilibre de l'élément	43
1.4.4.5. La matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des efforts anélastiques	44
1.4.4.6. Matrice de rigidité élémentaire	44

1.4.4.7. Prise en compte d'armatures	44
1.4.4.8. Conclusion	45
CHAPITRE 2 ELEMENT POUTRE MULTIFIBRE	46
2.1. INTRODUCTION.....	47
2.2. ÉLÉMENT DE LA THEORIE DES POUTRES [19] [20] [21].....	47
2.3. ELEMENT FINI POUTRE MULTIFIBRE TIMOSHENKO A DEUX NOEUDS AVEC DES FONCTIONS D'INTERPOLATION D'ORDRE SUPERIEUR [20] [21] [22].....	49
2.3.1 Fonctions d'interpolation.....	50
2.3.2 Matrices de rigidités	51
2.3.3 Intégration dans le cas non-linéaire (matrice de rigidité)	52
2.3.4 Matrices de masse.....	53
2.3.5 Efforts internes et efforts résultants.....	54
2.4. ELEMENT FINI POUTRE MULTIFIBRE TIMOSHENKO A DEUX NCEUDS AVEC DES FONCTIONS D'INTERPOLATION D'ORDRE 1 [20] [21] [22].....	54
2.4.1 Fonctions d'interpolation.....	54
2.4.2 Matrices de rigidité.....	55
2.4.3 Matrices de masse	56
2.4.4 Efforts internes.....	56
2.5 ELEMENT FINI POUTRE MULTIFIBRE EULER – BERNOULLI [20] [21] [22]	56
2.5.1 Fonctions d'interpolation.....	56
2.5.2 Matrices de rigidité.....	56
2.5.3 Matrices de masse	57
2.5.4 Efforts internes et efforts résultants.....	58
2.6 MODELISATION NUMERIQUE SUR CAST3M [20] [21] [22]	58
2.6.1 Eléments finis de poutre [23].....	58
2.6.2 Principe du modèle à fibre pour l'élément Timoshenko	59
2.7 CONCLUSION.....	60
CHAPITRE 3 MODELISATION NON LINEAIRE ENDOMMAGEABLE,APPLICATION AUX STRUCTURES EN BETON ARME	61
3.1 INTRODUCTION.....	62
3.2 MODELISATION DES POUTRES	62
3.2.1 Les modèles utilisés pour la simulation.....	64
3.2.1.1 Le modèle unilatéral (La Borderie) [17]	64
3. 1.1.2 Le modèle Béton-uni	64
3.2.2 Loi de comportement de l'acier	68
3.2.2.1 Modèle élasto-plastique [23]	68
3.2.2.2. Modèle Pinto – Menegotto [23].....	68
3. 2.3 Histoire de chargement.....	71
3.2.4. Caractéristiques mécaniques des aciers et du béton.....	72
3.3 TRAITEMENT DES RESULTATS	72
3.3.1 Poutre1	73
3.3.1.1 Modèle unilatéral pour le béton et élasto-plastique pour l'acier.....	73
3. 3.1.2 Modèle Béton_UNI pour le béton et élasto-plastique pour l'acier.....	74
3.3.2 Poutre 8.....	76
3.3.2.1 Modèle unilatéral pour le béton et élasto-plastique pour l'acier.....	76
3.3.2.2 Modèle Béton_Uni pour le béton et élasto-plastique pour l'acier	77
3.4 POUTRE LMT.....	79
3.4.1 Traitement des résultats.....	79

3.4.1.1 La réponse globale par le modèle unilatéral pour le béton et élasto-plastique pour l'acier	79
3.4.1.2 La réponse globale par le modèle unilatéral pour le béton et le modèle Pinto – Menegotto pour l'acier	82
3.4.1.3 Evaluation de l'endommagement	85
3.5 CONCLUSION.....	91
CHAPITRE 4 EVALUATIONS DES OUVERTURES DES FISSURES	92
4.1. INTRODUCTION.....	93
4.2 MODELE DE OUF « OUVERTURE UNITAIRE DE FISSURES » [5]	93
4.3 ECRITURE UNI-AXIALE DU MODELE [5]	96
4.4 IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU MODELE SUR CAST3M [5]	96
4.4.1 Critère de traction actif ($f_t > 0$).....	98
4.5 L'ÉVALUATION DES OUVERTURES DE FISSURES OUVFISS [26]	99
4.6 APPLICATION DE L'ÉNERGIE DE FISSURATION SUR LE MODELE	100
4.7 APPLICATION SUR CAST3M PAR LE MODELE DE OUF	103
4.7.1 Résultats des simulations.....	103
4.7.1.1 Réponses globales	103
4.7.2 Les résultats de simulation avec le modèle d'acier élasto - plastique	110
4.7.3 Les résultats de simulation avec le modèle d'acier Pinto – Menegotto.....	112
4.7.4 Evolution de l'endommagement.....	114
4.7.4.1 Cas statique monotone	114
4.7.4.2 Cas cyclique	116
4.7.5. Evaluation des ouvertures de fissures.....	118
4.7.5.1 Cas statique monotone	118
4.7.5.2 Cas cyclique	120
4.8 CONCLUSIONS	122
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	123
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	125

Liste des figures

Figure 1.1 Comportement fragile du béton en traction (Terrien 1980) [4].	18
Figure 1.2 Comportement cyclique fragile du béton en traction (Reinhardt et Corneillesen) [3]	18
Figure 1.3 Comportement du béton en compression simple (Chen 1982) [3]	19
Figure 1.4 Comportement cyclique du béton en compression simple [3].	20
Figure 1.5 Comportement cyclique expérimental du béton (d'après Terrien) [5]	20
Figure 1.6 Résistance du béton dans le cas d'une sollicitation bi-axiale [6]	21
Figure 1.7 Essai de compression triaxiale (Jamet & al) [3].	22
Figure 1.8 Critère bi-axial couplé (Feenstra 1993) [18].	24
Figure 1.9 Schéma illustrant la notion d'endommagement dans un milieu continu [8]	25
Figure 1.10 Principe d'équivalence en déformation	27
Figure 1.11 Principe d'équivalence en contrainte	27
Figure 1.12 Principe d'équivalence en énergie	28
Figure 1.13 Zone de localisation de déformation [5].	30
Figure 1.15 Les échelles de modélisations [10]	39
Figure 1.16 Élément de poutre à couches superposées [16].	42
Figure 2.1 : Description d'une modélisation de type poutre multifibre [19]	47
Figure 2.2 Poutre d'Euler 3D	48
Figure 2.3 : Élément poutre	50
Figure 2.4 Principe du modèle à fibre	59
Figure 2.5 Eléments bidimensionnels utilisés pour la description des sections	60
Figure 3.1 Le schéma principal pour les trois poutres (1, 8 et LMT).	62
Figure 3.2 La coupe longitudinale de ferrailage pour les trois poutres (1, 8 et LMT).	63
Figure 3.3 La coupe transversale (A-A) pour la poutre 8.	63
Figure 3.4 La coupe transversale (A-A) pour la poutre 1 et LMT.	63
Figure 3.5 Le maillage des poutres multifibre sur CAST3M.	63
Figure 3.6 Loi de comportement BETON_UNI [23].	65
Figure 3.7 Loi de comportement de l'acier élasto-plastique.	68
Figure 3.8 Loi de comportement ACIER_UNI.	69
Figure 3.9 Le chargement appliqué sur la poutre 1	71
Figure 3.10 Le chargement appliqué sur la poutre 8	71
Figure 3.11 Le chargement appliqué sur la poutre LMT	72
Figure 3.12 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.	73
Figure 3.13 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	73
(pour n=12).	73
Figure 3.14 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	74
(pour n=20).	74
Figure 3.15 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.	74
Figure 3.16 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	75
(pour n=12).	75
Figure 3.17 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	75
(pour n=20).	75

Figure 3.18 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.	76
Figure 3.19 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	76
(pour n=12).	76
Figure 3.20 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	77
(pour n=20).	77
Figure 3.21 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.	77
Figure 3.22 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	78
(pour n=12).	78
Figure 3.23 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation.	78
(pour n=20).	78
Figure 3.24 Cycle1	79
Figure3.25 Cycle3	80
Figure3.26 Cycle 6.	80
Figure 3.27 Cycle 9.	81
Figure 3.28 Comparaison entre la réponse expérimentale globale de la poutre.	81
et la réponse numérique (Modèle d'acier élasto-plastique).	81
Figure 3.29 Cycle1	82
Figure 3.30 Cycle3	83
Figure 3.31 Cycle6	83
Figure 3.32 Cycle9.	84
Figure 3.33 Comparaison entre la réponse expérimentale globale de la poutre.	84
et la réponse numérique (modèle d'acier Pinto – Menegotto).	84
Figure 3.34 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 2mm.	85
Figure 3.35 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 8mm.	86
Figure 3.36 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 12mm.	86
Figure 3.37 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 15mm.	87
Figure 3.38 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 2mm.	87
Figure 3.39 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement 8mm.	88
Figure 3.40 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 12mm.	88
Figure 3.41 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 15mm.	89
Figure 3.42 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 1mm.	89
Figure 3.43 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 2mm.	90
Figure 3.44 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 4mm.	90
Figure 3.45 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 8mm.	91
Figure 4.1 Surface de rupture dans le plan (σ_1, σ_2)	95
Figure 4.2 Schéma de "GCP" (Cas d'une seule fonction de charge).	98
Figure 4.2 Ecrouissage isotrope	100
Figure 4.3 Energie de fissuration en traction	101
Figure 4.4 Apport de l'endommagement sur l'énergie de fissuration.	102
Figure 4.5 La réponse globale de la poutre LMT dans le cas statique.	104
Figure 4.6 Le chargement appliqué sur la poutre LMT.	104
Les réponses globales obtenues pour les différentes longueurs caractéristiques lc pour le cas d'un chargement cyclique sont présentés dans les figures (4.7, 4.8 et 4.9) :	105
Figure 4.7 La réponse globale numérique de la poutre pour $lc=10cm$.	105
Figure 4.8 La réponse globale numérique de la poutre pour $lc=5cm$.	105
Figure 4.9 La réponse globale numérique de poutre pour $lc=2cm$.	106
Figure 4.10 : Résultats globaux Force-Flèche sur l'ensemble des cycles pour deux poutres 'Identiques'	107

Figure 4.11 Comparaison entre la réponse globale de la poutre en Expérimental avec la simulation en statique.	107
Figure 4.12 Comparaison entre les deux réponses globales expérimentales et numériques avec le modèle d'acier élasto-plastique (cyclique).....	108
Figure 4.13 Comparaison entre les deux réponses globales expérimentales et numériques ... avec le modèle d'acier Pinto-Menegotto (cyclique).....	109
Figure 4.14 Cycle 1.	110
Figure 4.15 Cycle 3.	110
Figure 4.16 Cycle 6.	111
Figure 4.17 Cycle 9.	111
Figure 4.18 Cycle 1.	112
Figure 4.19 Cycle 3.	112
Figure 4.20 Cycle 6.	113
Figure 4.21 Cycle 9.	113
Figure 4.22 La carte d'endommagement pour un déplacement de 1mm.	114
Figure 4.23 La carte d'endommagement pour un déplacement de 3mm.	115
Figure 4.24 La carte d'endommagement pour un déplacement de 6mm.	115
Figure 4.25 La carte d'endommagement pour un déplacement de 8mm.	116
Figure 4.26 La carte d'endommagement pour un déplacement de 1mm.	116
Figure 4.27 La carte d'endommagement pour un déplacement de 2mm.	117
Figure 4.28 La carte d'endommagement pour un déplacement de 3mm.	117
Figure 4.29 La carte d'endommagement pour un déplacement de 6 jusqu'à 8mm.	118
Figure 4.30 L'évolution de l'ouverture de fissures en fonction de déplacement.	118
Figure 4.31 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 3mm.	119
Figure 4.32 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 6mm.	119
Figure 4.33 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 8mm.	120
Figure 4.34 L'évolution de l'ouverture de fissures d'un élément en fonction de déplacement.	120
Figure 4.35 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 1mm.	121
Figure 4.36 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de -2mm.	121
Figure 4.37 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de +2mm.	122

Liste des tableaux

Tableau 3.1	Tableau des paramètres du modèle Unilatéral utilisés dans la simulation.	64
Tableau 3.2	Tableau des paramètres du modèle Béton_Uni utilisés dans la simulation.....	67
Tableau 3.3	Tableau des paramètres du modèle élasto-plastique utilisés dans la simulation. ...	68
	Les paramètres utilisés pour la loi Pinto – Menegotto sont :	70
Tableau 3.4	Tableau des paramètres du modèle Pinto – Menegotto utilisés dans la simulation.	70
Tableau 3.2	Tableau des paramètres du modèle ‘OUF’ utilisés dans la simulation.....	103

Introduction générale

L'acte de bâtir exige, dans de nombreuses disciplines, des connaissances de plus en plus approfondies. Celles qui concernent la prévision du comportement des structures apparaissent prépondérantes dès que la construction est exceptionnelle ou que sa pérennité est une exigence de sécurité.

Les outils de simulations sont de plus en plus performants permettant une description très fine des phénomènes. De plus ces outils ne se limitent plus à la mécanique linéaire, mais sont développés pour décrire des comportements plus compliqués allant jusqu'à la ruine des structures. Ce qui intéresse le domaine de la sécurité.

La particularité des structures du génie civil en béton armé est que le béton est largement utilisé dans son domaine non linéaire. Ce matériau étant fragile, les non linéarités s'accompagnent de microfissures et parfois de macro-fissures. La dégradation du béton sous un chargement statique ou cyclique (dynamique) est caractérisée par plusieurs phénomènes principalement non linéaires (plasticité, fissuration, refermeture de fissures, ...). La modélisation du comportement non linéaire du béton nécessite la prise en compte de la plupart de ces phénomènes.

A nos jours, plusieurs modèles d'endommagement ont été développés dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversible afin de modéliser le comportement complexe du béton, d'autres phénomènes non linéaires sont associés pour traiter les différents phénomènes liés au comportement complexe : l'anisotropie, la plasticité et l'effet unilatéral. Malgré ces efforts les modèles actuels restent limites, surtout en ce qui concerne la prédiction de la fissuration.

L'évaluation des ouvertures de fissures constitue une des clefs de la modélisation du comportement du béton. Les fissures dans le béton représentent des discontinuités géométriques. Plusieurs modèles existent pour l'évaluation de ces fissures, basées sur la méthode des éléments finis ou X-Fem, ces modèles sont dans la plupart des cas basés sur une approche macroscopique. Par conséquent, même si les résultats de modélisation sont riches et permettent de représenter finement les dégradations, le temps de calcul reste prohibitif voir irréaliste dans les cas des structures complexes. Ainsi l'approche semi-globale représente une alternative à l'approche macroscopique, elle représente un bon compromis pour le calcul des structures à géométrie simple où on utilise moins de paramètre avec plus d'informations au niveau local de la structure.

Pour reproduire correctement le comportement de ces structures, il faut porter une attention particulière au comportement mécanique du matériau, mais également aux méthodes de régularisation, qui permettent de maîtriser la localisation des déformations.

Organisation de travail

Le travail de la présente thèse est développé en quatre chapitres :

Le premier chapitre présente une analyse bibliographique, le comportement expérimental du béton est évoqué ainsi que les différents modèles d'endommagement existants et les échelles de modélisation possibles.

Le deuxième chapitre présente la théorie permettant de mettre en place les éléments poutres multifibres. Après une introduction qui porte sur l'intérêt des méthodes simplifiées, les échelles de modélisation et de discrétisation, plusieurs éléments finis poutres multifibres de cinématique Timoshenko et Euler - Bernoulli sont détaillés. L'élément de poutre multifibre Timoshenko est ensuite choisi pour le reste de ce travail.

Le troisième chapitre traite des exemples à l'échelle semi-globale sur des éléments poutre multifibre type Timoshenko avec le logiciel CAST3M, ces simulations ont pour but d'étudier la capacité et les performances des modèles élasto-plastique endommageable à reproduire le comportement structurel du béton.

Le quatrième chapitre est consacré à l'implémentation du modèle OUF "ouverture unitaire de fissures" sur CAST3M en multifibre, ce modèle a été développé par M. Matallah qui propose de formuler le concept d'ouverture de fissures avec une approche similaire à celle de la plasticité. Une variable appelée ϵ^{ouf} de caractère anisotrope est introduite afin de décrire le caractère anélastique du matériau. Cette nouvelle variable permet d'introduire les effets unilatéraux (ouverture-refermeture de fissures). Une méthode de post-traitement est développée pour interpréter les résultats en termes d'ouverture de fissure. Cette méthode peut être appliquée à tous les modèles continus d'endommagement /plasticité sauf que le modèle doit être régularisé afin d'éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase d'adoucissement. Enfin, la thèse se termine par des conclusions et des perspectives.

Chapitre1 Analyse bibliographique

1.1 Introduction

Le béton, largement utilisé dans la construction, présente un comportement non linéaire très complexe dû à son caractère hétérogène et quasi-fragile. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, cette hétérogénéité de la microstructure favorise le développement de divers modes de rupture et de propagation de fissures. Il est nécessaire de tenir en compte correctement de l'évolution des différents paramètres lors de la dégradation du béton, pour cela une attention particulière doit être portée au comportement de ce matériau.

L'objectif de l'analyse bibliographique est de tirer les conclusions utiles pour notre travail. L'étude expérimentale du béton permet de mieux comprendre le comportement mécanique de ce matériau surtout avec l'apparition des fissures. Le béton présente un comportement adoucissant et anisotrope. La résistance en compression est beaucoup plus élevée que celle en traction. De plus, un béton préalablement fissuré en traction récupère sa rigidité quand on le comprime, ce phénomène est dû à la refermeture des fissures. Face à la complexité du comportement du béton (hétérogénéité, aspect multiphasique, fissuration, anisotropie, unilatéralité avec déformation permanente...) plusieurs modèles mécaniques ont été proposés. Nous citerons : les modèles de plasticité, les modèles d'endommagement et les modèles couplants l'endommagement et la plasticité.

Avant de commencer un calcul linéaire ou non linéaire. Il faut choisir le niveau de modélisation et l'échelle de discrétisation. Il existe différentes approches pour modéliser le comportement du béton telle que l'approche globale qui représente les phénomènes locaux d'une manière grossière et vise à donner une indication sur la répartition des efforts d'ensemble dans les principaux éléments porteurs. L'approche macroscopique est une modélisation plus fine car l'état du matériau est pris en compte en chaque point d'intégration de l'élément fini considéré. L'approche semi-globale constitue une approche intermédiaire par rapport aux deux précédentes. Le champ de déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, d'un élément plaque ou d'une coque, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local.

1.2. Comportement expérimental du béton

1.2.1. Comportement uni-axial du béton

Généralement la formulation principale du béton est schématisée par trois constituants : la pâte du ciment, les granulats, les cavités et microfissures. On peut démontrer facilement qu'une simple sollicitation unidirectionnelle de traction engendre un état complexe de contrainte au sein du matériau et notamment une concentration des contraintes dues principalement à la différence de rigidité entre les granulats et le ciment et à la présence des microfissures et cavités [1].

1.2.1.1. Traction directe

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante pour une description complète de son comportement matériel.

La figure 1.1 représente la réponse d'un essai de traction. Au début du chargement (jusqu'à 50-60% de la résistance en traction, f_t) le comportement est quasiment linéaire. Le module

d'Young commence ensuite à diminuer lentement jusqu'au pic de contrainte. Une fois le pic atteint ($\sigma = f_t$), la contrainte chute brutalement (on parle d'adoucissement) et les fissures s'orientent perpendiculairement au chargement [2]. Comme la déformation à la rupture en traction est faible (0,2 %), il est courant de ne pas modéliser les déformations anélastiques. L'endommagement est alors défini à partir du module sécant mesuré sur la courbe de l'essai.

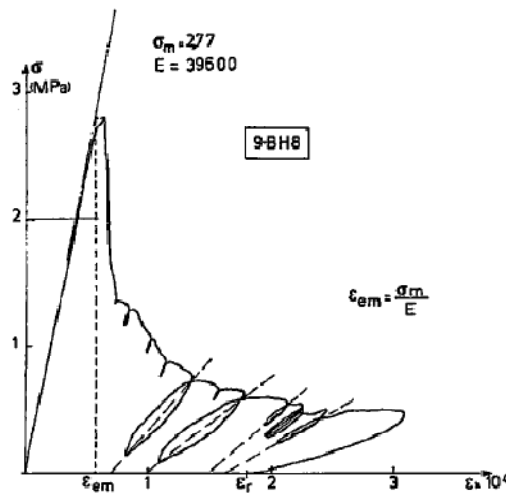


Figure 1.1 Comportement fragile du béton en traction (Terrien 1980) [4].

1.2.1.2. Traction cyclique

La figure 1.2 montre que les boucles d'hystérésis sont très faibles. Ceci paraît logique si l'on admet qu'elles sont principalement dues à des phénomènes de frottement entre lèvres de microfissures (phénomènes peu importants dans ce type de sollicitation), ainsi l'essai de traction permet de confirmer que la dégradation des caractéristiques élastiques du matériau est due essentiellement au développement de la microfissuration [3].

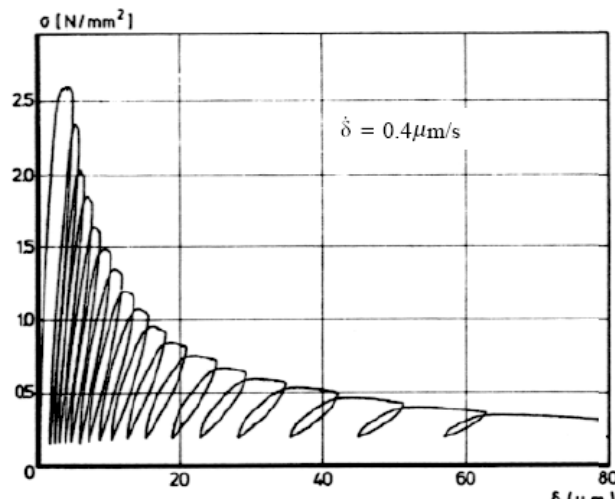


Figure 1.2 Comportement cyclique fragile du béton en traction (Reinhardt et Corneillesen) [3]

1.2.1.3. Compression simple

Le comportement en compression est obtenu plus facilement du fait de la plus grande ductilité du matériau. Les microfissures sont parallèles à l'axe de chargement jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

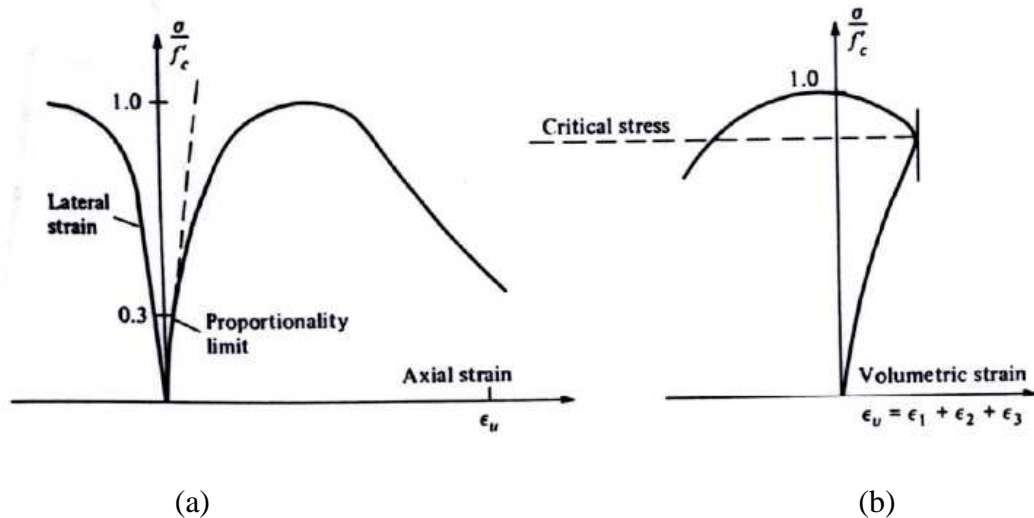


Figure 1.3 Comportement du béton en compression simple (Chen 1982) [3]

Pour un essai de compression, l'allure générale de la courbe contrainte-déformation est donnée par la figure 1.3. On observe principalement que la réponse est presque linéaire jusqu'à 30% de la limite en compression simple f_c . En dépassant ce point, la raideur décroît sensiblement, et on observe que la courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% de la limite en compression simple avec une diminution de volume de l'éprouvette. Puis, à partir de 85% de la résistance, la rupture devient inévitable même si l'accroissement de la charge reste nul. Les déformations latérales augmentent plus vite que les déformations longitudinales, le volume apparent de l'éprouvette augmente. Cette caractéristique est appelée dilatance. Les fissures se propagent progressivement dans la pâte de ciment sous la forme de macro-fissures, jusqu'à la rupture du matériau [6].

Sur des tranches de matériaux pré-sollicités, des observations au microscope optique ont montré que des microfissures sont perpendiculaires aux directions d'extensions, créant dans un premier stade une anisotropie du comportement du béton, et dans un stade ultime des surfaces de rupture de même sens [3].

1.2.1.4. Compression cyclique

L'essai cyclique en compression simple présenté à la figure 1.4, permet de tirer d'autres explications sur le comportement du béton. D'une part les différences de diminution de rigidité longitudinale et transversale mettent en évidence l'anisotropie induite par la fissuration orientée sur des plans parallèles au chargement, et d'autre part les imperfections des fissures empêchent leur complète refermeture après décharge générant des déformations irréversibles. Le frottement entre les lèvres de fissures rugueuses est en partie responsable de la boucle d'hystérésis au delà d'un certain niveau de chargement [3] [4].

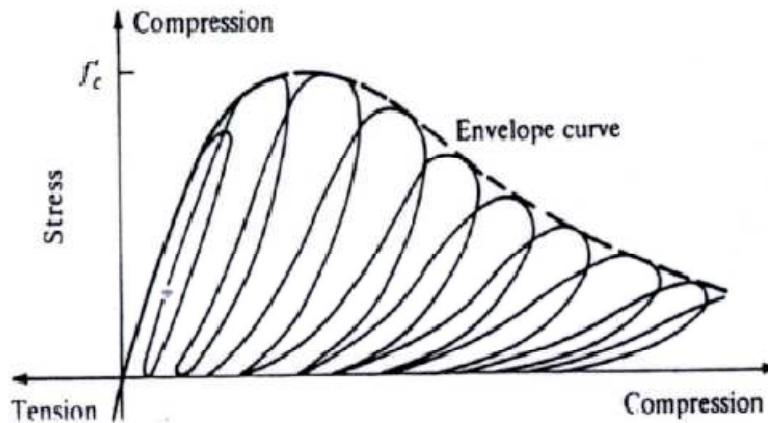


Figure 1.4 Comportement cyclique du béton en compression simple [3]

1.2.2. L'effet unilatéral

Le comportement unilatéral du béton dans le cas d'une rupture localisée a été mis en évidence par Terrien figure (1.5), par la suite il a été confirmé par Ramtani [5] dans le cas d'un endommagement diffus.

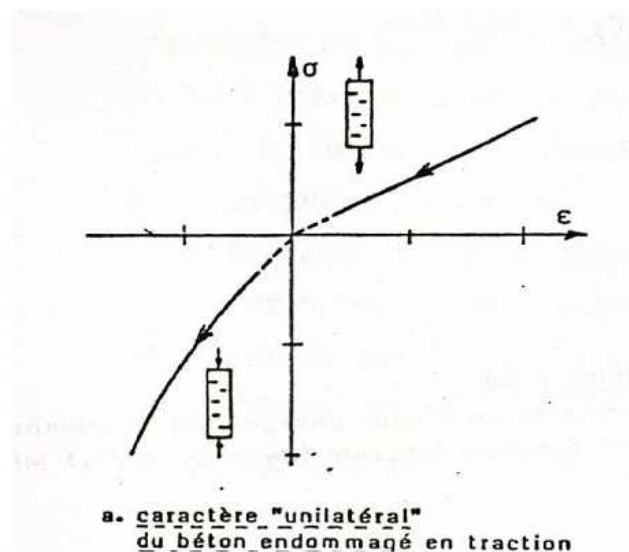


Figure 1.5 Comportement cyclique expérimental du béton (d'après Terrien) [5]

L'information principale de cet essai est que lorsque l'on sollicite en compression une éprouvette préalablement endommagée en traction, la raideur du matériau n'est pas la raideur endommagée ($\tilde{E} = (1 - D)E$ pour un endommagement scalaire), mais une raideur "restaurée" proche de la raideur initiale du matériau sain, ce phénomène est connu sous le nom d'effet unilatéral. Cet effet unilatéral se manifeste d'abord par une phase transitoire non-linéaire due à la refermeture des fissures lors du changement de signe de la contrainte et puis la restauration de la raideur en compression.

1.2.3. Sollicitation bi-axiale

Dans le cas de la bi-compression, on constate une augmentation de la résistance par rapport à la résistance uni-axiale. La résistance devient maximale pour un rapport des

contraintes égal à 0,5. Le gain de résistance pour des contraintes bi-axiales est d'environ 25%. De plus, on constate une augmentation de la ductilité du matériau.

Dans le cas des contraintes de compression-traction (figure 1.6, résultats de Kupfer et Gerstle 1973) [6], on observe une diminution progressive (à peu près linéaire) de la résistance ultime en compression, lorsque la contrainte de traction augmente (figure 1.6). De plus, le comportement du matériau devient de plus en plus fragile.

Dans le cas d'un chargement de bi-traction, on n'observe pas de différence appréciable entre la résistance en traction bi-axiale et la résistance en traction uni-axiale (fig 1.6). On remarque alors que la surface de rupture est orthogonale à la direction de la contrainte principale maximale (Chen et Schreyer 1995) [6]. Ce comportement suggère que les fissures orthogonales, induites par des chargements de traction, n'interagissent pas significativement.

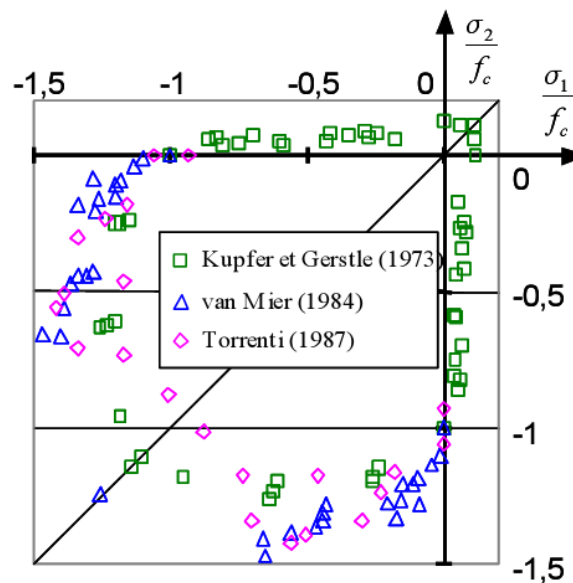


Figure 1.6 Résistance du béton dans le cas d'une sollicitation bi-axiale [6]

1.2.4. Sollicitation tri-axiale

D'après la figure 1.7 on constate que la réponse du béton est d'autant moins fragile si le confinement est important et on obtient un comportement ductile pour les très grands confinements. Ce gain de rigidité est lié à l'augmentation des contacts au sein de la microstructure du matériau béton qui est une conséquence de la destruction des pores (Chen 1982, Ramtani 1990) [3] [6].

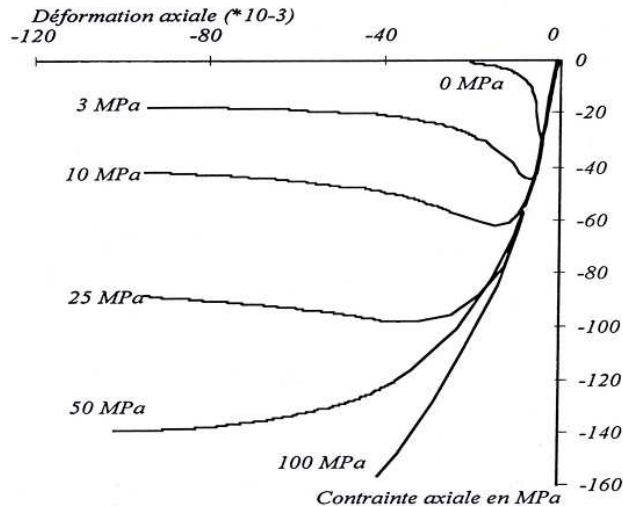


Figure 1.7 Essai de compression triaxiale (Jamet & al) [3].

1.2.5. Conclusions

D'après cette étude bibliographique sur le comportement expérimental du béton on peut tirer les conclusions suivantes :

- Le comportement élastique initial du béton en traction comme en compression est linéaire.
- Le comportement présente en post pic un caractère adoucissant aussi bien en traction qu'en compression.
- La dissymétrie du comportement se constate aussi bien sur les contraintes pic (10 fois plus élevées en traction qu'en compression) que sur les déformations.
- Le comportement non linéaire du béton a pour origine deux phénomènes distincts, s'interprète comme étant de l'endommagement du fait de la perte de raideur constatée sur les décharges élastiques et l'existence de déformations anélastiques.
- Des déformations permanentes apparaissent du fait de l'ouverture des microfissures. Ces déformations sont plus importantes en compression qu'en traction.
- Restauration de la raideur lors de l'inversion du signe de la contrainte (chargement cyclique).

1.3. Modélisation du comportement du béton

1.3.1. Plasticité

Le comportement du béton irréversible peut être décrit en utilisant la théorie de la plasticité. Il est à noter que la théorie de la plasticité a été développée à l'origine dans le but de caractériser les déformations irréversibles des métaux dues aux processus de dislocation (Von Mises 1913) [3]. Cette théorie fut ensuite adaptée dans le cas des matériaux quasi-fragiles tel que le béton qui ont un comportement différent des métaux : phénomène de dilatance, influence importante du confinement.

Dans l'écriture tridimensionnelle des lois de comportement, l'hypothèse d'isotropie conduit à utiliser les invariants des tenseurs de contraintes et de son déviateur s défini par :

$$s = \sigma - \frac{1}{3} Tr(\sigma)1 \quad (1.1)$$

Où 1 est le tenseur unité et $Tr(\sigma)$ définit la trace du tenseur de contrainte donnée par :

$$Tr(\sigma) = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \quad (1.2)$$

En plasticité on fait souvent intervenir le premier invariant du tenseur de contrainte I_1 , ainsi que le deuxième invariant du tenseur de déviateur de contrainte définis par :

$$I_1 = Tr(\sigma) \quad \text{Et} \quad J_2 = \frac{1}{2} s : s \quad (1.3)$$

Où : (:) est le produit tensoriel deux fois contracté.

Dans le cas du béton si on utilise uniquement une fonction du second invariant du déviateur des contraintes J_2 ce critère n'est pas réaliste. Il ne permet pas d'atteindre la limite d'élasticité pour un chargement hydrostatique pur. L'introduction du premier invariant ($I_1 = tr \sigma$), permet de prendre en compte la dilatance ainsi que les effets de confinement sous compression triaxial. La combinaison des deux précédents invariants conduit au critère de Drucker-Prager (Drücker & Prager 1952) [4] :

$$f = \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (1.4)$$

α est l'angle de cohésion interne à identifier.

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad \text{Et} \quad k = \frac{2c \cos \phi}{3 - \sin \phi}$$

ϕ : Angle de frottement et c : La cohésion du matériau.

Sous chargements hydrostatiques, le critère de Drücker-Prager n'est pas suffisant car l'un des inconvénients réside dans l'impossibilité de franchir le seuil de plasticité sollicitant les hauts confinements du matériau [4]. En compression triaxiale il est alors nécessaire de fermer la surface, c'est l'objectif de la méthode "cap model" (Di Maggio & Sander 1971, Hofstetter & Simo 1993) [4]. Une autre solution consiste à adopter une surface de Gurson (Gurson 1977) [4] analytiquement fermée en tri-compression évitant ainsi les points anguleux de raccordement.

Dans le but de mieux représenter la réponse du béton, le principe de plasticité multi-surfaces peut être appliqué, chaque mécanisme étant géré par sa propre surface de charge (Yang et al. 1985) [6] [18]. Le comportement fragile peut ainsi être géré par un critère en contrainte maximale (Rankine) et les phases plus ductiles (compression multiaxiales) par la plasticité du type Drücker-Prager tenant compte de la pression hydrostatique (Yazdani & Schreyer 1990, Feenstra 1993). La figure 1.8 donne une représentation dans un plan bi-axial de ces critères couplés.

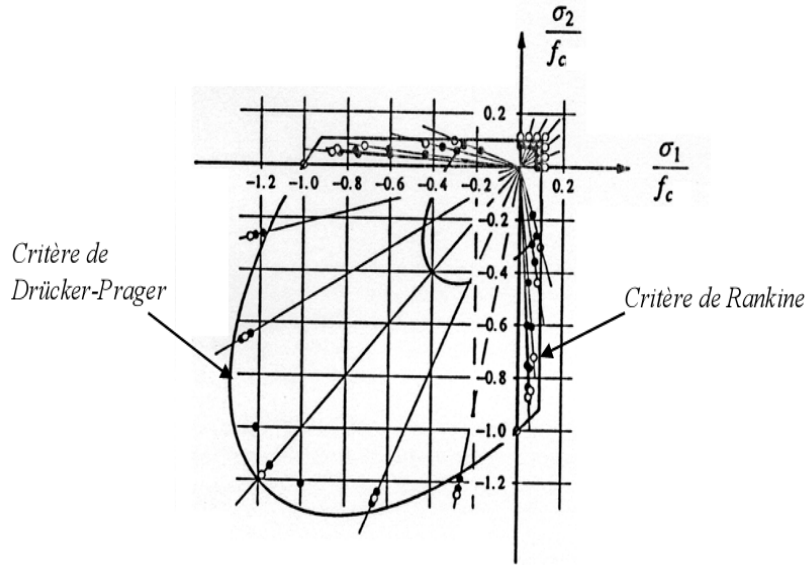


Figure 1.8 Critère bi-axial couplé (Feenstra 1993) [18]

A tout modèle élasto-plastique est associé un critère de plasticité qui définit le domaine d'élasticité C_E , dans lequel le comportement du matériau reste réversible. Il définit également le domaine plastique et permet ainsi de spécifier l'écoulement plastique. Cette fonction, appelée fonction de charge (critère de charge), est donnée sous la forme suivante :

$$\sigma \in C_E \Leftrightarrow F(\sigma, A_i) < 0 \quad (1.5)$$

L'écoulement plastique est régi par la règle d'écoulement définie à partir d'une fonction convexe $G(\sigma, A_i)$, appelée potentiel plastique.

Les déformations plastiques sont conventionnellement définies par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (1.6)$$

Avec :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } F = 0 \text{ et } \dot{F} = 0 \quad (1.7)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ et } \dot{F} < 0 \quad (1.8)$$

Où : $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique que l'on détermine à partir de la condition de consistance :

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial A_i} \dot{A}_i = 0 \quad (1.9)$$

Où : A_i les variables d'écrouissage.

On suppose ainsi dans la théorie de la plasticité qu'il n'y a pas des évolutions plastiques que si le point de charge est sur la surface de charge ($F=0$) et y reste ($\dot{F} = 0$).

Si $G(\sigma, A_i) = F(\sigma, A_i)$, l'écoulement plastique est dit associé, et la direction des incréments de déformations plastiques est normale à la frontière du domaine d'élasticité C_E . Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non associé. Il est important de noter que dans le

cadre de la modélisation des géomatériaux, la plasticité est en général considérée comme non associée afin de mieux représenter le comportement dilatant de ces matériaux (Chen 1994) [3].

1.3.2. Endommagement

La théorie d'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique dans un matériau au moyen d'une variable continue (scalaire ou tensorielle) décrivant la détérioration progressive de ce matériau.

Cette idée a été développée par Kachanov [7] pour modéliser la rupture par fluage des métaux en sollicitation uni-axiale, elle a été reprise en France dans les années 70 par Lemaitre et Chaboche [4].

1.3.2.1. Variable d'endommagement [8]

Pour introduire la notion d'endommagement dans le cadre des milieux continus, on fait l'hypothèse que l'élément de volume considéré est suffisamment grand devant les dimensions des hétérogénéités (cavités) dues à l'endommagement. La figure 1.9 illustre la définition des efforts internes dans un matériau endommagé. La section dS (de normale unitaire \vec{n}) utilisée pour définir le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ contient des traces de microfissures et de cavités constituant l'endommagement du matériau.

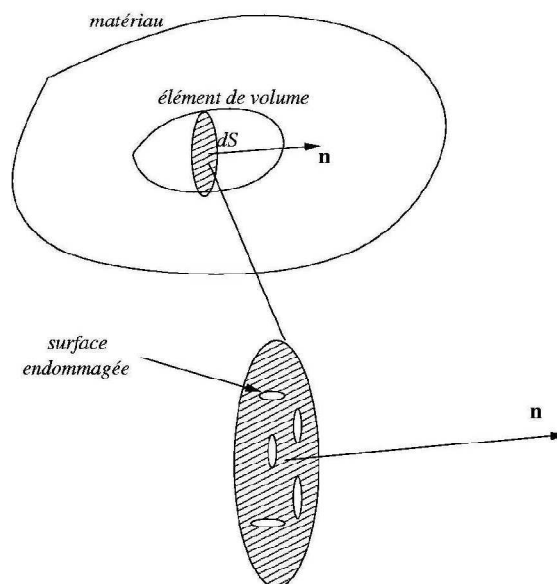


Figure 1.9 Schéma illustrant la notion d'endommagement dans un milieu continu [8]

$$dS_n = dS - dS_D \quad (1.10)$$

dS : La section totale.

dS_D : L'aire totale de l'ensemble des défauts présents dans la surface dS

$$D = \frac{dS_D}{dS} = \frac{dS - dS_n}{dS} \quad (1.11)$$

En notant dS_D la surface projetée sur dS des traces d'endommagement, on mesure l'endommagement local, dans la direction \vec{n} par le rapport entre la surface dS_D et la surface

dS . Cet endommagement vaudra 0 pour un matériau non endommagé, et 1 pour un matériau totalement rompu perpendiculairement à \vec{n} . En conséquence, la variable d'endommagement ainsi définie :

- dépend de la direction \vec{n} considérée dans le matériau,
- est un scalaire toujours compris entre 0 et 1.

1.3.2.2. Contrainte effective [7]

La contrainte effective $\tilde{\sigma}$ est alors définie comme la force rapportée à la section de résistance effective dS_n :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{dS_n} \quad (1.12)$$

$\tilde{\sigma}$ Peut alors s'exprimer en fonction de la contrainte usuelle σ et de la variable d'endommagement D .

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{dS_n} = \frac{F}{(dS - dS_D)} = \frac{F}{dS \left(1 - \frac{dS_D}{dS}\right)} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (1.13)$$

Le tenseur de contraintes effectives vaut :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (1.14)$$

On a évidemment $\tilde{\sigma} \geq \sigma$

$\tilde{\sigma} = \sigma$ Pour un matériau vierge.

$\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ Au moment de la rupture.

De la même manière on peut définir le module d'Young du matériau endommagé ou module effectif \tilde{E} par le principe d'équivalence en déformations :

$$\tilde{\sigma} = E \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \sigma = \tilde{E} \cdot \varepsilon \text{ et } \tilde{E} = E(1 - D) \quad (1.15)$$

Dans la pratique l'évolution de l'endommagement est déduite des mesures expérimentales du module de Young faites lors de décharges élastiques. Toutefois, lors de telles mesures, il est évident que les pentes mesurées rendent également compte d'autres phénomènes que de l'endommagement. Par exemple, il peut y avoir plastification locale dès le début des recharges, près des cavités ou des inclusions, cette plastification ayant pour effet de modifier par écrouissage la pente apparente dans le domaine d'élasticité [3] [8].

1.3.2.3. Principe d'équivalence en déformation [5]

Les tenseurs de déformations effectives et réelles sont égaux, alors que les tenseurs de contraintes sont différents :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \\ \sigma_{ij} = M(D_{ij})\tilde{\sigma}_{ij} \end{cases} \quad (1.16)$$

Tel que $M(D)$ est un tenseur d'ordre 4 fonction de l'endommagement. La relation macroscopique entre les quantités réelles est donnée par :

$$\sigma_{ij} = M(D)C_{ijkl}^e \tilde{\varepsilon}_{kl} = M(D)C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad (1.17)$$

C_{ijkl}^e est le tenseur de rigidité initiale.

$$\boxed{\varepsilon} \xrightarrow{I} \boxed{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{C_{ijkl}^e} \boxed{\tilde{\sigma}} \xrightarrow{M(D)} \boxed{\sigma}$$

Figure 1.10 Principe d'équivalence en déformation

1.3.2.4. Principe d'équivalence en contrainte [5]

C'est le dual du principe d'équivalence en déformation

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = M(D_{ij})\tilde{\varepsilon}_{ij} \end{cases} \quad (1.18)$$

La relation de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^0 M(D)^T \varepsilon_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl} \quad (1.19)$$

$$\boxed{\varepsilon} \xrightarrow{M(D)^T} \boxed{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{C_{ijkl}^e} \boxed{\tilde{\sigma}} \xrightarrow{I} \boxed{\sigma}$$

Figure 1.11 Principe d'équivalence en contrainte

1.3.2.5. Principe d'équivalence en énergie [5]

L'inconvénient majeur et commun des deux premiers principes est qu'ils ne garantissent pas la symétrie du tenseur de rigidité. En revanche le principe d'équivalence en énergie conduit automatiquement à un tenseur de rigidité symétrique. Il consiste à considérer que les énergies élastiques du matériau endommagé et du matériau sain sont équivalentes :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} : \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (1.20)$$

La relation entre les contraintes effectives et réelles est donnée par :

$$\sigma_{ij} = M(D)\tilde{\sigma}_{ij} \quad (1.21)$$

Substituant la dernière équation dans (1.20)

$$\frac{1}{2} M(D)\tilde{\sigma}_{ij} : \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} : \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (1.22)$$

On obtient l'expression des déformations effectives

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = M(D)^T : \varepsilon_{ij} \quad (1.23)$$

Une équation duale de (1.21). La relation contraintes-déformations est alors

$$\sigma_{ij} = M(D)\tilde{\sigma}_{ij} = M(D) : C_{ijkl}^e : \tilde{\varepsilon}_{kl} = M(D) : C_{ijkl}^e : M(D)^T : \varepsilon_{kl} \quad (1.24)$$

Le tenseur de rigidité est donné par :

$$C_{ijkl} = M(D):C_{ijkl}^e:M(D)^T \quad (1.25)$$

$$\boxed{\varepsilon} \xrightarrow{M(D)^T} \boxed{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{C_{ijkl}^e} \boxed{\tilde{\sigma}} \xrightarrow{M(D)} \boxed{\sigma}$$

Figure 1.12 Principe d'équivalence en énergie

1.3.3. Modélisation de l'anisotropie du béton

La relation liant les contraintes effectives et réelles est donnée par la relation :

$$\sigma_{ij} = M(D)_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl} \quad (1.26)$$

Généralement pour modéliser l'anisotropie on considère un tenseur d'endommagement d'ordre 4. L'ingrédient clé, de chaque modèle, est de définir une loi d'évolution du tenseur caractérisant la dégradation de matériau $M(D)$. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 4, les lois d'évolutions sont difficiles à établir vu le nombre important de composantes du tenseur.

La théorie des microplans représente une alternative à l'utilisation d'un tenseur d'ordre supérieur. Bazant (1985) a utilisé ce concept pour décrire la dégradation des matériaux fragiles comme le béton. Sur chaque plan d'orientation \vec{n} , des relations uniaxiales reliant les composantes du vecteur déformation aux composantes du vecteur contrainte sont définies. Le paramètre qui caractérise l'endommagement sur chaque microplan est désormais un scalaire, sa valeur est différente d'un microplan à l'autre, ce qui conduit à une description anisotrope à l'échelle macroscopique [5] [9].

Une autre alternative est de choisir un tenseur d'endommagement d'ordre 2. En fonction des extensions on calcul l'évolution de l'endommagement qui est calculé dans la base propre de déformation (Fichant (1996), Desmorat *et al.* (2007), Badel *et al.* (2007)). En effet, les directions principales du tenseur d'endommagement et de déformation coïncident pour des trajets de chargement non complexes; c'est une hypothèse beaucoup moins réaliste dans le cas de chargements complexes. Badel *et al.* (2007) utilisent l'anisotropie de l'endommagement pour la traction. Pour la compression, ils emploient une seule variable d'endommagement isotrope. [5] [7]

1.3.4. Couplage Endommagement et Plasticité

Afin d'allier les avantages de la théorie de l'endommagement (modélisation des effets de la microfissuration sur la rigidité du matériau au niveau macroscopique) et de la théorie de plasticité (modélisation des déformations irréversibles ou permanentes). Le couplage entre la plasticité et l'endommagement a initialement été proposé pour les métaux dans les modèles dit de "rupture ductile" (Par, Lemaitre et Chaboche (1991)). Cette approche considère que l'évolution de l'endommagement est pilotée par le développement des déformations. Ils ont utilisées cette approche pour modéliser le comportement du béton en compression. Du point de vue phénoménologique, les déformations irréversibles dans le béton sont considérées comme le résultat du glissement des microfissures et de la friction interne [3] [9].

La deuxième possibilité est d'utiliser le concept de la contrainte effective. La surface seuil n'est plus exprimée en terme de contraintes totales, mais devient une fonction des contraintes effectives (contraintes dans le matériau non endommagé) (Simo et Ju (1987a), Simo et Ju (1987b), Ju (1989), dans cette solution l'endommagement peut être piloté en fonction de la déformation élastique (Jason (2004)), ou de la déformation plastique (Grassl et Jirasek (2006a)) ou encore de la déformation totale [3] [9].

La dernière approche suppose un couplage dit ‘‘fort’’ car c’est la contrainte totale qui apparaît dans l’expression de la surface seuil, qui devient alors couplée à l’endommagement.

Il est à noter qu’il existe aussi d’autres modèles qui intègrent dans leur formulation un terme de déformation irréversible lié aux variables d’endommagement, sans pour autant introduire de variables supplémentaires. C’est par exemple le cas du modèle de La Borderie et celui de Halm et Dragon (1998) [3] [9].

1.3.5. Etude des problèmes de localisation

Les matériaux présentant un comportement adoucissant subissent, dès l’atteinte du pic, une localisation des déformations qui a tendance à se concentrer dans la zone la plus petite possible causant une perte d’ellipticité (dans le cas statique) du système d’équations différentielles décrivant le processus de déformation. En dynamique le problème décrivant le mouvement passe d’un problème hyperbolique (avant adoucissement) à un problème parabolique ou elliptique (en phase d’adoucissement). Lors de calculs numériques, l’emploi de modèles locaux en présence de ce phénomène aboutit à une incohérence. En effet, la bande minimale dans laquelle se localisent les déformations est de la taille de l’élément fini le plus petit. En raffinant le maillage, cette zone tendant vers zéro, l’énergie dissipée par la structure tend elle aussi à s’annuler. Il s’ensuit une dépendance de la réponse de la structure par rapport au maillage. Il est donc impératif de limiter la taille de la zone endommageable, c’est le but des limiteurs de localisation [5] [9]

1.3.5.1. Limiteurs de localisation

L’objectif des limiteurs de localisation, appelés également techniques de régularisation, est d’enrichir la description mécanique du milieu de manière à pouvoir décrire des états non homogènes de déformation, afin d’éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase d’adoucissement.

L’idée générale consiste à introduire une information spatiale, généralement sous la forme d’une longueur interne, liée aux interactions entre les défauts et donc à la microstructure du matériau. Plusieurs méthodes sont disponibles :

- Théories non locales (Pijaudier-Cabot et Bazant (1987), Bazant et Pijaudier-Cabot (1988)).
- Conservation de l’énergie de rupture (Bazant & Oh 1983, Pietruszak & Mroz 1981).
- Méthodes basées sur la formulation en gradient (Peerlings *et al.* (1996a)).
- Modèles avec effets de vitesse (Sluys (1992), Burlion (1997)).
- Modèles d’ordres supérieurs tels que Cosserat (1909). Cette technique n’est pas valide pour des problèmes de localisation en mode I (de Borst (1991), de Borst *et al.* (1993a) et Dufour et Pijaudier-Cabot (2005)).

Dans la suite du paragraphe nous allons détailler la technique de l’énergie de rupture

1.3.5.2. Conservation de l’énergie de rupture

Le modèle d’Hillerborg *et al.* (1976) qui utilise la notion de fissure fictive ‘‘ Fictitious Crack model’’. Est un modèle non linéaire dans lequel la fissure est modélisée en deux parties, la première correspond à la fissure physique (fissure réelle), pour laquelle la contrainte est nulle, la deuxième est la fissure fictive, pour laquelle la contrainte, non nulle, dépend de l’ouverture de la fissure [4] [5]. La fissuration commence à se propager, lorsque la contrainte en pointe de fissure atteint la contrainte maximale en traction, ft.

Le concept de la fissure fictive à été adapté aux formulations diffuses 'continues'. Bazant et Oh [5] ont développés le modèle de la bande de fissure'' Crack Band Model'' la zone de localisation est considérée comme une bande de largeur L_c au lieu d'une fissure discrète. Le champ de déformation est continu et l'énergie de fissuration est exprimée ainsi :

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma \cdot du \quad (1.27)$$

En générale, une distribution constante des déformations sur la bande de fissures est admise ce qui permet de calculer le déplacement au niveau de la fissure comme le produit de la déformation de rupture ε^f et la largeur de la bande L_c (Voir figure 1.13) :

$$du = L_c \cdot d\varepsilon^f \rightarrow G_f = L_c \int_0^{\infty} \sigma \cdot d\varepsilon^f \quad (1.28)$$

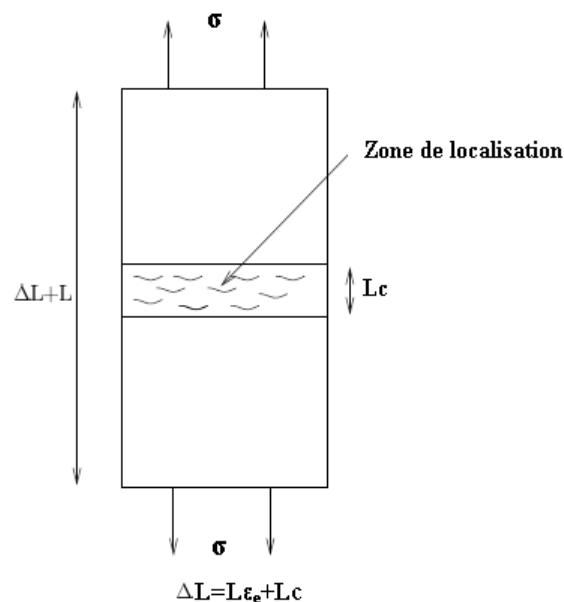


Figure 1.13 Zone de localisation de déformation [5].

Cette approche est très efficace pour les problèmes de fissuration lorsque le maillage présente une orientation fixe durant les calculs. Cependant, la perte d'ellipticité se pose toujours localement même si l'énergie dissipée reste constante [5].

1.3.6. Exemples de Modèle d'endommagement

1.3.6.1. Modèle de Mazars (1984) [1] [10]

Le point particulier de ce modèle est d'utiliser le critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente. Le modèle prend en compte la dissymétrie du comportement du béton. Cependant, ce modèle ne tient pas compte des autres phénomènes liés au comportement du béton comme l'irréversibilité de la déformation, l'anisotropie et l'effet unilatéral on peut résumer ce modèle comme suit :

Pour un état d'endommagement donné D, le seuil d'évolution est exprimé par :

$$f(\varepsilon, K) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0 \quad (1.29)$$

Où l'expression de la déformation équivalente :

$$\tilde{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (1.30)$$

Avec : ε_i est la déformation principale dans la direction i

$\langle \rangle_+$: désigne les crochets de *Mac Cauley*. Si la valeur entre crochets est négative, alors cet opérateur rend une valeur nulle. Sinon, la valeur est inchangée.

Pour le comportement dissymétrique du béton, Mazars propose deux modes d'endommagement d_T de traction et d_C de compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$d = \alpha_T d_T + \alpha_C d_C \quad (1.31)$$

Avec:

$$\begin{cases} \alpha_C = 0 & \text{Pour la traction} \\ \alpha_T = 0 & \text{en compression} \\ \alpha_T + \alpha_C = 1 & \text{en cas de combinaison} \end{cases}$$

La détermination de α_T est effectuée en distinguant les extensions dues à des contraintes positives et celles dues à des contraintes négatives.

L'évolution de d_T et d_C est de la forme suivante :

$$d_T = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}_{eq}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\tilde{\varepsilon}_{eq} - \varepsilon_{D0})]} \quad (1.32)$$

$$d_C = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}_{eq}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\tilde{\varepsilon}_{eq} - \varepsilon_{D0})]} \quad (1.33)$$

Où A_T , A_C , B_T et B_C sont des caractéristiques du matériau ; ε_{D0} est le seuil d'endommagement et $\tilde{\varepsilon}_M$ est la déformation équivalente maximale atteinte.

Ce modèle ne tient pas compte, des déformations permanentes ni de l'effet unilatéral. Le fait de prendre α_T constant limite le domaine d'application du modèle. L'introduction de l'expression de déformation équivalente conduit à une condition stricte : L'endommagement se produit si et seulement s'il y a au moins une extension dans le repère principal de déformation.

1.3.6.2. Modèle de A.Dragon et D.Halm [11] [15]

Dragon & Halm (1998), proposent une modélisation anisotrope de l'endommagement dans laquelle l'endommagement est le seul phénomène dissipatif considéré; au sein d'un volume représentatif il consiste en la création et la propagation de méso-surfaces de décohésion. Le modèle utilise une variable interne tensorielle d'ordre 2 d'endommagement D décrivant l'orientation et l'étendue des méso-fissures.

$$D = \sum_i d^i(s) n^i \otimes n^i \quad (1.34)$$

Où : n^i représente la normale unitaire au système (i) de méso-fissures parallèles, $d^i(s)$ est une fonction scalaire adimensionnelle traduisant la densité de méso-fissures du système (i).

Un tenseur d'endommagement est construit en considérant l'ensemble des réseaux de fissures parallèles au sein du volume élémentaire. Ecrivant dans le repère principal d'endommagement, en considérant ses 3 valeurs propres D_k ainsi que les normales aux trois familles de fissures v_k , nous obtenons :

$$D = \sum_{k=1}^3 D_k v^k \otimes v^k \quad (1.35)$$

Les valeurs principales d'endommagement sont dérivées d'une fonction de charge f (fonction de la force thermodynamique associée (F^D)) par la propriété de normalité :

$$f(F^{D1+}; D) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}[(F^{D1+}) \cdot (F^{D1+})] + \beta \text{tr}[(F^{D1+}) \cdot D] - (C_0 + C_1 \text{tr} D)} \leq 0 \quad (1.36)$$

$$\dot{D} = A_D \frac{\partial f}{\partial F^D} = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \text{ or } f = 0, \quad \dot{f} < 0 \\ A_D \left[\frac{\varepsilon^+}{2 \text{tr}(\varepsilon^+ \cdot \varepsilon^+)} + BD \right] & \text{si } f = 0 \text{ et, } \quad \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

A_D désigne le multiplicateur d'endommagement ($A_D \geq 0$), B est un paramètre du modèle.

Cette formulation, quoique basée sur des considérations micromécaniques, ne rentre pas dans le formalisme direct de l'analyse micromécanique de l'endommagement par méso-fissuration [3] [4] [5] [11].

1.3.6.3. Modèle de La Borderie (1991) [12] [17]

Le point particulier de ce modèle est l'utilisation de l'énergie de Gibbs comme potentiel. Après des analyses de continuité de la loi de comportement et la vérification de convexité du potentiel, l'énergie s'écrit de la manière suivante :

$$\chi_e = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E(1-d_1)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E(1-d_2)} + \frac{\nu}{2E} (\sigma : \sigma - \text{Tr} \sigma^2) \quad (1.38)$$

$$\chi_{an} = \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} f(\text{tr} \sigma) + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} \text{tr} \sigma + G_1(z_1) + G_2(z_2) \quad (1.39)$$

σ^+ et σ^- sont respectivement le tenseur des contraintes "de traction" et le tenseur des contraintes "de compression".

Où d_1 et d_2 sont deux scalaires d'endommagement relatifs à deux modes de dégradation, la fonction $f(\text{tr} \sigma)$ assure le processus de l'unilatéralité. La décomposition du tenseur de contraintes est définie selon l'expression de Ju (1989). Les forces thermodynamiques Y_1 , Y_2 sont trouvées par la dérivation du potentiel.

β_1 et β_2 Sont des constantes et $f(\text{tr} \sigma)$ permet de gérer la refermeture des fissures.

G_1 et G_2 Sont des fonctions d'évolution de l'écrouissage associé aux variables z_1 et z_2 .

Si on dérive le potentiel par rapport aux variables d'état, nous obtenons les lois d'évolution des variables associées :

La déformation : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an}$

$$\varepsilon^e = \frac{\partial \chi_e}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^+}{E(1-d_1)} + \frac{\sigma^-}{E(1-d_2)} + \frac{\nu}{E} (\sigma - \text{Tr} \sigma \cdot I) \quad (1.40)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\partial \chi_{an}}{\partial \sigma} = \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} \frac{\partial f(tr\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} I \quad (1.41)$$

L'évolution de l'écroutissement est donnée par

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = g_i(z_i) = + \left[Y_{0i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{-z_i}{1+z_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1,2) \quad (1.42)$$

Où : A_i, B_i et Y_{0i} Sont des paramètres à identifier.

On définit alors la surface seuil F_i pour chaque évolution ($i=1,2$).

$$F_i = Y_i - Z_i \quad (1.43)$$

Y_i est la variable associée à l'endommagement D_i et Z_i la variable associée à la variable d'écroutissement, Les lois d'évolution de l'endommagement s'expriment comme suit :

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i(Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad i = 1,2 \quad (1.44)$$

La fonction de refermeture de fissure f est continue par morceaux et définie sur trois domaines : traction (fissure ouvertes), traction-compression (ouverture-refermeture de fissures), compression (fissures fermées).

$$\begin{cases} Tr\sigma \in [0, +\infty[\Rightarrow f(tr\sigma) = tr\sigma \\ Tr\sigma \in [-\sigma_f, 0[\Rightarrow f(tr\sigma) = \left(1 + \frac{tr\sigma}{2\sigma_f}\right) tr\sigma \\ Tr\sigma \in]-\infty, 0[\Rightarrow f(tr\sigma) = -\frac{\sigma_f}{2} tr\sigma \end{cases} \quad (1.45)$$

La difficulté de ce modèle réside dans sa formulation implicite qui impose de faire des itérations pour sa résolution. La loi de comportement doit être inversée à chaque itération. Cependant, le tenseur de déformation anélastique reste toujours sphérique dû au choix de χ_{an} . Cela implique, la déformation résiduelle ne dépend pas du cisaillement. Ceci peut constituer une limitation du modèle, dans la mesure où le rôle de cisaillement peut être prépondérant dans la génération des déformations irréversibles. De ce fait, le modèle risque de conduire à une interprétation peu fidèle dans des cas dominés par le cisaillement.

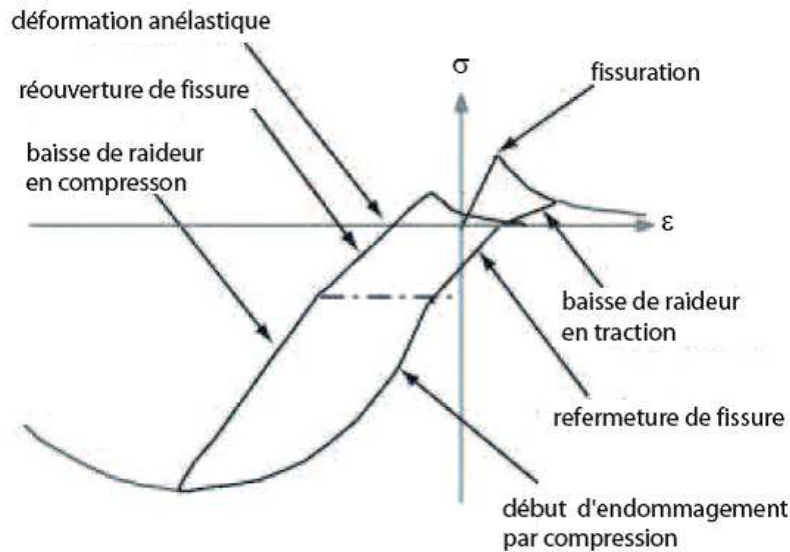


Figure 1.14 Réponse en traction-compression du modèle de La borderie [9].

1.3.6.4. Modèle de Nechnech Wahid (2000) [3]

Le modèle formulé dans le cadre de la théorie de l'endommagement couplé à la plasticité est proposé pour la description du comportement non linéaire du béton sous chargement thermomécanique. Il traite d'une façon complète le comportement du béton sous chargement mécanique et thermique et la fermeture de fissures lors d'un chargement cyclique à haute température.

Le modèle thermoplastique couplé à l'endommagement est formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles en postulant l'existence d'un potentiel thermodynamique élasto-plastique selon la forme suivante :

$$\psi = \psi_e(\varepsilon^e, \theta, D, \Lambda) + \psi_p(\kappa, \theta, D, \Lambda) \quad (1.46)$$

ψ : Énergie libre de Helmholtz ; ψ_p : Potentiel thermoplastique endommageable.

ψ_e : Potentiel thermo-élastique endommageable ;

ε^e : Tenseur de déformation élastique ;

κ : Paramètre d'écrouissage ;

θ : Température relative.

D : Variable d'endommagement mécanique ;

Λ : Variable d'endommagement thermique

La déformation totale ε est alors décomposée en une part réversible ε^e , une part irréversible ε^p et une part thermomécanique ε^{tm} comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^{tm} \quad (1.47)$$

L'influence du chargement mécanique sur le processus de déformation thermique, décrit sous le terme d'interaction thermomécanique, est introduite en utilisant le concept de

déformation d'interaction thermomécanique développé par Anderberg & Thelandersson (1973) [3].

La variable d'endommagement total d , peut alors être définie à partir d'une combinaison des deux endommagements mécanique et thermique, considérés comme complètement indépendants, comme suit :

$$d = 1 - (1 - D)(1 - \Lambda) \quad (1.48)$$

Où : D est la variable d'endommagement mécanique fonction de la variable d'écrouissage κ et Λ représente la variable d'endommagement thermique fonction de la température.

Une loi exponentielle en fonction de la variable d'écrouissage κ_x (déformation plastique cumulée) pour la variation de la variable d'endommagement.

$$1 - D_x = \exp(-c_x \kappa_x) \quad (1.49)$$

Où c_x est un paramètre du matériau ($x=t$ pour la traction et $x=c$ pour la compression).

Pour décrire au mieux le comportement différent du béton en traction et en compression, l'endommagement total est ainsi subdivisé en deux parties (Mazars 1984, Lee 1998, Ragueneau 1999) [3]. Une première partie pour décrire le comportement de traction et une deuxième part pour décrire celui de compression.

$$D(\kappa) = 1 - (1 - D_c(\kappa_c))(1 - D_t(\kappa_t)) \text{ et } \kappa = \{\kappa_c, \kappa_t\}^T \quad (1.50)$$

Le phénomène unilatéral observé lors d'un chargement cyclique est introduit en modifiant l'endommagement de traction en le multipliant par un paramètre p fonction de l'état de contrainte (Lee 1998, Nechnech & al. 2000), tels que $0 \leq p \leq 1$

L'équation (1.50) devient alors :

$$D(\kappa, \tilde{\sigma}) = 1 - (1 - D_c(\kappa_c))(1 - p(\tilde{\sigma})D_t(\kappa_t)) \quad (1.51)$$

Le paramètre p est choisi de telle manière à bien représenter la fermeture de fissure. Dans le cas d'un chargement tridimensionnel, ce paramètre peut s'écrire en fonction du tenseur de contrainte effective de la manière suivante :

$$p(\tilde{\sigma}) = p_0 + (1 - p_0)r(\tilde{\sigma}) \quad (1.52)$$

Dans cette équation, $0 \leq p_0 \leq 1$ est un paramètre matériau et $r(\tilde{\sigma})$ une fonction poids scalaire (Cette fonction sert à quantifier le pourcentage des contraintes de traction par rapport aux contraintes de compression dans le cas tridimensionnel) qui s'écrit :

$$r(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\tilde{\sigma}} = 0 \\ \frac{[\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\tilde{\sigma}}_i \rangle_+]}{[\sum_{i=1}^3 |\hat{\tilde{\sigma}}_i|]} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.53)$$

Où $\hat{\tilde{\sigma}}_i$ représente la $i^{\text{ème}}$ composante du tenseur de contrainte effective principale, et

$\langle x \rangle_+ = \frac{(|x|+x)}{2}$, désigne la partie positive de x .

La définition (1.48) signifie que la prise en compte du phénomène unilatéral, lors du passage d'une sollicitation de traction à une sollicitation de compression, se fait par une diminution de l'endommagement de traction affecté par la fonction $p(\tilde{\sigma})$ qui pilote la fermeture de fissure.

L'endommagement thermique peut être défini à partir de la relation liant la variation du module d'élasticité à la température $E(T)$, d'une manière analogue à celle qui a été utilisée pour définir l'endommagement mécanique, de telle sorte que :

$$\Lambda(T) = 1 - \frac{E(T)}{E_0} \quad \text{avec} \quad \dot{\Lambda} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\theta} > 0 \quad \text{où} \quad \dot{\Lambda} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\theta} \leq 0 \quad (1.54)$$

Les limites du modèle proposé sont le choix d'une variable d'endommagement, un endommagement isotrope ne décrit pas l'anisotropie liée à la fissuration qui peut nous conduire à une réponse erronée du modèle dans le cas de chargement non radiaux. La déformation d'interaction thermomécanique adoptée dans le modèle ne peut pas expliquer certains phénomènes au niveau mésoscopique ou à l'échelle locale.

1.3.6.5. Modèle de S. Fichant (1996) [13]

Ce modèle est basé sur l'interpolation d'une surface d'endommagement (Décrit à partir des trois endommagements principaux dus aux extensions). Dans le cas d'un endommagement isotrope la forme de surface est sphérique mais pour le cas d'une surface ellipsoïdale on aura un endommagement anisotrope.

Dans le cas d'un endommagement isotrope on a :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)\tilde{\sigma}_{ij} \quad (1.55)$$

Pour un nombre fini de direction \vec{n} , la relation des contraintes effective s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}n_j = (1 - d(\vec{n}))\tilde{\sigma}_{ij}n_j \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.56)$$

σ_{ij} et $\tilde{\sigma}_{ij}$ Les composantes du vecteur contraintes.

$d(\vec{n})$: est une variables scalaire d'endommagement

$(1 - d(\vec{n}))$: Définit une surface d'endommagement $S(\vec{n})$ pour chaque normale(\vec{n}).

On vérifie la stabilité du système dans son comportement adoucissant selon Bazant [17], les déformations sur les micro-plans sont les projections du vecteur des déformations normales aux plans. L'approximation des contraintes est obtenue en intégrant sur une sphère de rayon unité.

Utilisant le principe des travaux virtuel. Taylor et Bazant [16] ont proposés que :

$\forall \varepsilon^*$ Cinématiquement admissible

$$\frac{3}{4}\pi\sigma\varepsilon^* = \int_{\Omega} (1 - d_n(\vec{n}))\tilde{\sigma}_N\varepsilon^*_N + (1 - d_t(\vec{n}))\tilde{\sigma}_{T_i}\varepsilon^*_{T_i} d\Omega \quad (1.57)$$

Où : Ω Représente une sphère de rayon unité.

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_N = \vec{n} \tilde{\sigma} \vec{n} \\ \tilde{\sigma}_{T_i} = \vec{t}_i \tilde{\sigma} \vec{n} \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_N = \vec{n} \varepsilon \vec{n} \\ \tilde{\varepsilon}_{T_i} = \vec{t}_i \varepsilon \vec{n} \end{cases} \quad (1.58)$$

La première partie à gauche représente le travail virtuel des contraintes macro pour une sphère élémentaire.

La deuxième partie à droite décrit le travail virtuel des vecteurs contraintes sur les micro-plans.

- Cas d'une surface d'endommagement ellipsoïdale

L'équation d'un ellipsoïde en coordonnées sphérique (r, θ , ρ) est

$$S(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{(1-d_2)^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{(1-d_1)^2} \right\} + \frac{\cos^2 \theta}{(1-d_3)^2}}} \quad (1.59)$$

Où : d_1, d_2 et d_3 sont les valeurs principales de l'endommagement.

La relation entre les composantes du tenseur des contraintes et du tenseur des contraintes effectives s'écrit d'une façon générale :

$$d(\vec{n}) = \frac{\tilde{\sigma}(\vec{n}) - \sigma(\vec{n})}{\tilde{\sigma}(\vec{n})} \quad (1.60)$$

$$\sigma_{ij} = I_{abcd} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (1.61)$$

$$I_{abcd} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega'} (1 - d(\vec{n})) \cos^a \theta \cos^b \theta \cos^c \varphi \cos^d \varphi d\Omega' \quad (1.62)$$

On vérifie l'évolution des variables d'endommagement par la surface seuil f :

$$f(\vec{n}) = \vec{n} \varepsilon \vec{n} - \varepsilon_{d0} - K(d(\vec{n})) \quad (1.63)$$

Où : ε_{d0} est le seuil en traction

La loi d'évolution s'écrit :

$$d_i = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\vec{n} \varepsilon \vec{n}} \exp[B_t(\varepsilon_{d0} - \vec{n} \varepsilon \vec{n})] \quad (1.64)$$

d_i : l'endommagement qui décrit l'accroissement de fissuration en compression est induit par les extensions transverses et positive [13]. Quand la déformation normale atteint le seuil en traction ε_{d0} l'endommagement apparaît.

- Comportement en traction compression- Reformation de fissure

La décomposition est effectuée suivant le signe des contraintes effectives principales :

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle_+ = P^{-1} \langle \tilde{\sigma}^d \rangle_+ P \quad (1.65)$$

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle_- = P^{-1} \langle \tilde{\sigma}^d \rangle_- P \quad (1.66)$$

Où : P est la matrice de passage.

Le tenseur des contraintes effectives s'écrit dans le repère de travail :

$$\tilde{\sigma} = \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ + \langle \tilde{\sigma} \rangle_- \quad (1.67)$$

1.3.7. Conclusions

Dans cette partie d'étude bibliographique, plusieurs points sont à retenir qui seront utiles par la suite du travail :

✓ La plasticité est caractérisée par une surface seuil continue capable de représenter quantitativement l'évolution des déformations irréversibles. Les surfaces seuils les plus utilisées à l'heure actuelle prennent en compte trois invariants, ce qui permet d'avoir une évolution des déformations plastiques réaliste, surtout quand le chargement est multiaxial.

✓ La théorie d'endommagement se base sur la théorie de la thermodynamique des milieux continus. Les modèles d'endommagement représentent une description du phénomène de perte de rigidité observée expérimentalement, ainsi que le phénomène de refmeture des fissures lors de chargement cycliques (phénomène unilatéral). Le couplage entre la plasticité et l'endommagement semble être la meilleure façon d'allier les avantages des deux théories.

✓ Le caractère adoucissant du comportement du béton qui est à l'origine de la dépendance de la solution numérique vis-à-vis du maillage, nécessite d'introduire une technique de régularisation pour éviter le phénomène de localisation de variables ainsi que le choix de l'approche pour l'obtention d'une réponse numériquement acceptable

✓ Cependant, à nos jours, quels que soient les modèles qui ont été développés, il n'existe aucun modèle capable de décrire de façon fiable et simple le comportement du béton, surtout lorsque l'on veut prendre en compte l'anisotropie, le comportement unilatéral et les déformations permanentes.

1.4. Echelles de modélisation

Plusieurs approches peuvent être adoptées afin de modéliser le comportement d'un élément de structure soumise à des chargements mécaniques : on peut citer trois approches approche globale, approche semi globale, approche macroscopique et ils existent d'autres approches de modélisation, voir la figure 1.15.

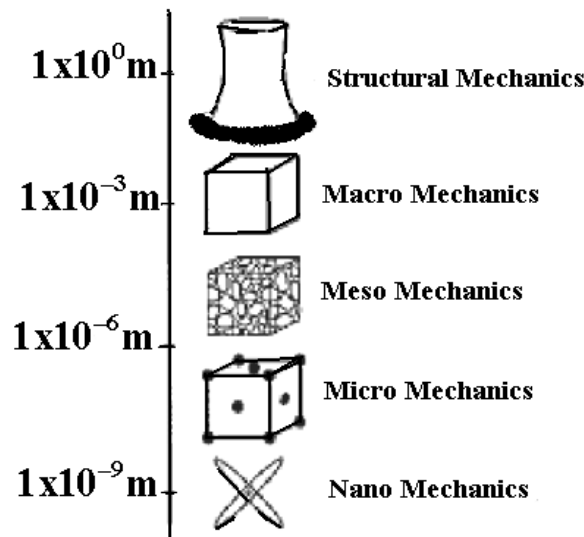


Figure 1.15 Les échelles de modélisations [10]

1.4.1. Approche globale [15]

A ce niveau de modélisation le comportement du composite béton armé est décrit en variables généralisées (N - ε_n , V - γ , M - Φ). La formulation peut s'appuyer sur des observations phénoménologiques ou bien peut être basée sur les théories classiques de la plasticité avec l'introduction de surfaces de plasticité ou surfaces seuils type $f(N, V, M) = 0$, ou de la mécanique de l'endommagement par l'introduction d'une variable interne représentative de l'état de détérioration du matériau.

La loi de comportement porte sur les variables globales telles que les moments, l'effort normal, les rotations, les déplacements. Il faut alors identifier cette loi pour chaque géométrie et chaque matériau [4].

Le calcul proprement dit sera peu coûteux mais des calculs préalables seront nécessaires pour identifier le comportement de chaque type de sous structure [4]. D'autre part, les informations locales sont difficilement accessibles et nécessitent un calcul supplémentaire.

1.4.2. Approche macroscopique

La modélisation macroscopique du comportement mécanique du béton a beaucoup évolué et les modèles actuels permettent de prendre en compte des phénomènes de plus en plus complexes. Les modèles macroscopiques utilisés classiquement pour le béton possèdent généralement un nombre important de paramètres qui permettent de décrire la complexité du comportement du matériau sous diverses sollicitations [7] [14].

Souvent l'approche macroscopique est basée sur la théorie de la thermodynamique qui constitue un cadre très précieux pour guider et limiter les choix de la modélisation phénoménologique. En effet, la thermodynamique permet d'associer à chaque phénomène sa variable et à chaque variable sa loi d'évolution. On postule l'existence de deux potentiels :

1. Potentiel thermodynamique : qui permet de définir des variables d'état en fonction des phénomènes à modéliser, et duquel dérivent les lois d'état.
2. Potentiel de dissipation : qui permet de décrire les lois d'évolution décrivant les processus irréversibles [7] [14].

L'équation du premier principe est la suivante

$$\rho \cdot \frac{de}{dt} = \sigma : D + r - \text{div } \vec{q} \quad (1.68)$$

Ou, dans l'hypothèse des petites perturbations

$$\rho \cdot \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} + r - \text{div } \vec{q} \quad \text{ou} \quad \rho \cdot \dot{e} = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} + r - q_{i,i} \quad (1.69)$$

Cette relation donne la variation d'énergie interne du matériau, par unité de volume, en fonction de sa vitesse de déformation (et des contraintes associées) et de son flux de chaleur reçu (en surface et en volume).

- L'équation du second principe est la suivante

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (1.70)$$

$\dot{\varepsilon}$: Vitesse de déformation.

ρ : Densité volumique.

- Variables d'état, potentiel thermodynamique

L'inégalité de Clausius-Duhem devient alors, en utilisant la partition en vitesses de déformations $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$ où $\dot{\varepsilon}^e$ est le tenseur de déformation élastique, et $\dot{\varepsilon}^p$ celui des vitesses des déformations plastiques:

$$\left(\sigma - \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \right) : \dot{\varepsilon}^e + \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \geq 0 \quad (1.71)$$

À partir de cette inégalité qui doit être respectée, en ne considérant que les transformations réversibles, on en déduit les lois de la thermo-élasticité:

$$\sigma = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (1.72)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.73)$$

$$A_k = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (1.74)$$

L'ensemble de ces égalités forme les lois d'états. En pratique le potentiel thermodynamique n'est pas une grandeur mesurable, ce sont les variables observables qui le sont et donc, l'expérimentation permettra d'établir directement les lois d'état, le potentiel ne servant qu'à l'écriture du modèle.

- Potentiel de dissipation

Compte tenu des relations précédentes, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit sous la forme d'un terme de dissipation Φ positif ou nul:

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \cdot \dot{V}_k - \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.75)$$

On admet généralement le découplage entre la dissipation mécanique et la dissipation thermique :

$$\Phi \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_m = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial \psi}{\partial V_i} \dot{V}_i \geq 0 & \text{dissipation mécanique} \\ \Phi_{th} = -\frac{\vec{q}}{T} \overrightarrow{grad}(T) \geq 0 & \text{Dissipation thermique} \end{cases} \quad (1.76)$$

Les lois d'évolution associées à ce potentiel s'expriment alors par la propriété de normalité

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon^p} \\ A_k = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{V}_k} \\ \overrightarrow{grad}(T) = -\frac{\partial \phi}{\partial \frac{\vec{q}}{T}} \end{cases} \quad (1.77)$$

À partir de l'expression du potentiel dual, on peut obtenir de façon simple les propriétés de normalité qui nous permettent d'écrire les lois complémentaires d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon^p = \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma} \\ \dot{V}_k A_k = -\frac{\partial \phi^*}{\partial A_k} \\ \frac{\vec{q}}{T} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial \overrightarrow{grad}(T)} \end{cases} \quad (1.78)$$

- **Commentaire**

L'approche globale donne une idée générale sur le comportement de la structure c'est-à-dire les relations contrainte-déformation, moment-effort normale, mais les informations au niveau local de la structure nécessite un calcul supplémentaire ; l'approche macroscopique est basée sur l'utilisation de plusieurs paramètre pour décrire la complexité géométrique où de chargement. Ce calcul est très coûteux d'un point de vue temps et identification de paramètre. L'approche semi-globale est une combinaison entre les deux approches précédentes où on utilise moins de paramètre avec plus d'information au niveau local de la structure sans calcul supplémentaire.

1.4.3. Approche semi-globale [14]

La discrétisation est la même que pour les approches globales. Des hypothèses permettent de calculer les variables cinématiques locales (déformations) en fonction des variables cinématiques globales (déplacements, rotations). Une loi de comportement permet de calculer les variables statiques locales (contraintes) qui sont ensuite intégrées pour déterminer les variables statiques généralisées (moments, efforts).

Cette méthode est un bon compromis pour les structures à géométrie simple car elle est beaucoup moins coûteuse que les méthodes locales et permet d'accéder à un niveau d'informations intéressant compte tenu des restrictions imposées par les hypothèses.

1.4.4. Code aux éléments finis EFICOS [16]

1.4.4.1. Introduction

De nombreuses structures sont composées de poutres et de poteaux, les outils de dimensionnement et de vérification de telles structures étaient à l'époque de la création de EFICOS : soit des programmes aux éléments finis basés sur des éléments de poutres utilisant des modèles de comportement globaux (Moment/ courbure), soit des modèles éléments finis classiques 2D ou 3D intégrant le comportement local du matériau.

1.4.4.2. Principe

Le programme aux éléments finis EFICOS : (Éléments Finis à Couches Superposées) est basée sur une idée décrite par Owen et Bazant [16] qui consiste à utiliser des éléments finis de poutres. Dans la version bidimensionnelle (poutres planes chargées dans leur plan) utilisée dans EFICOS, les éléments sont discrétisés en couches. Chaque couche est affectée d'un comportement mécanique uni-axial qui est a priori quelconque. La raideur de chaque couche est intégrée en prenant en compte son excentricité par rapport à la fibre moyenne pour obtenir les relations au niveau des degrés de liberté de l'élément poutre.

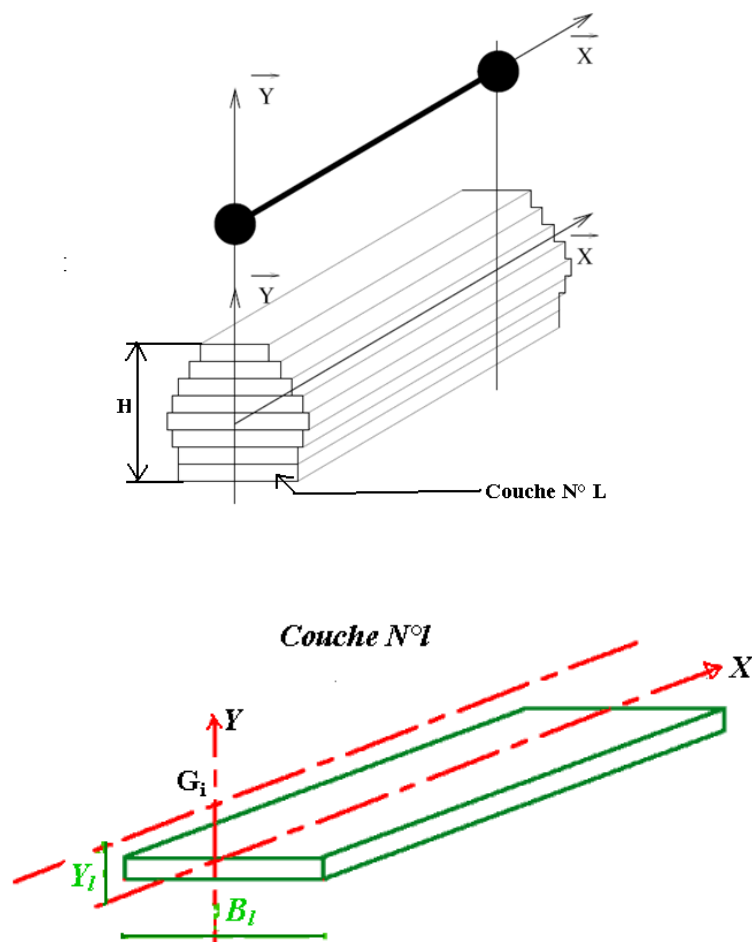


Figure 1.16 Élément de poutre à couches superposées [16].

1.4.4.3 Principe de calcul

L'élément de poutre à couches superposées est basé sur un élément de poutre classique à 2 nœuds dont chaque nœud possède 3 degrés de liberté u , v , θ (figure. 1.17).

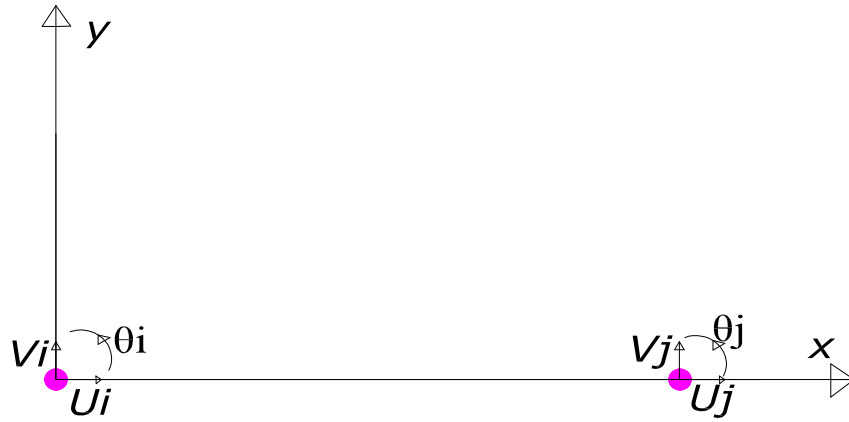


Figure 1.17 Degré de liberté pour les nœuds de la poutre

1.4.4.4. Equilibre de l'élément

La relation donnant l'équilibre de l'élément est donnée par le principe des puissances virtuelles :

$$\delta U^T F = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv \quad \text{Avec} \quad \delta U^T = \delta (BU)^T = \delta U^T B^T \quad (1.79)$$

Si nous écrivons la loi de comportement sous la forme

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(D)} + \varepsilon_{an}(D) \quad \text{Soit} \quad \sigma = E(D)[\varepsilon - \varepsilon_{an}(D)]$$

Où D désigne l'endommagement

$$\text{Nous obtenons : } \delta U^T F = \int_V \delta U^T B^T E(D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}(D))dv \quad (1.80)$$

Soit :

$$F = \int_V B^T E(D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}(D))dv \quad (1.81)$$

Où encore

$$F = \left\{ \int_V B^T E(D)B dv \right\} U - \int_V B^T E \varepsilon_{an(D)} dv \quad (1.82)$$

En posant : $K = \int_V B^T E(D)B dv$: Matrice de rigidité élémentaire

Et $F_{an} = - \int_V B^T E \varepsilon_{an(D)} dv$: Effort anélastique élémentaire.

Nous avons : $F=K(D).U+F_{an}(D)$

Cette répartition des non linéarités dans la matrice de rigidité et la matrice de rigidité des efforts permet de conserver une matrice de rigidité non-singulière lors de chargements cycliques.

1.4.4.5. La matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des efforts anélastiques

Les calculs sont réalisés en utilisant les approximations suivantes :

-L'éléments de base est discrétisé en N couches d'égaies épaisseurs $h = \frac{H}{N}$

-Le module d'élasticité et la déformation anélastique sont constants dans une couche.

1.4.4.6. Matrice de rigidité élémentaire

Les intégrales sont alors approximées par des sommes de Riemann et nous obtenons :

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & K_4 & -K_1 & 0 & -K_4 \\ & K_3 & K_5 & 0 & -K_3 & K_5 \\ & & K_6 & -K_4 & -K_5 & 0.5K_6 \\ & SYM & & K_1 & 0 & K_4 \\ & & & & K_3 & -K_5 \\ & & & & & K_6 \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

Avec :

$$K_1 = \frac{h}{L} \sum_{l=1}^N E_l b_l \quad K_5 = \frac{6h}{L^2} \sum_{l=1}^N E_l b_l y_l^2 \quad (1.84)$$

$$K_3 = \frac{12h}{L^3} \sum_{l=1}^N E_l b_l h_l y_l^2 \quad , \quad K_6 = \frac{4h}{L^2} \sum_{l=1}^N E_l b_l y_l^2 \quad , \quad K_4 = \frac{-h}{L} \sum_{l=1}^N E_l b_l y_l \quad (1.85)$$

E_l : Module d'élasticité

E_{anl} : Déformation anélastique

b_l : Largeur de couche.

y_l : Distance entre l'axe moyen de la couche et la fibre neutre de la poutre.

1.4.4.7. Prise en compte d'armatures

Chaque couche $N^{\circ}l$ peut être composée de béton et d'acier. On notera

C_{al} : La concentration volumique d'acier dans la couche $N^{\circ}l$

E_{al} : Module d'élasticité de l'acier dans la couche $N^{\circ}l$.

E_{bl} : Le module d'élasticité du béton dans la couche $N^{\circ}l$

ε_{pl} : La déformation plastique de l'acier dans la couche $N^{\circ}l$

ε_{anl} : La déformation anélastique du béton dans la couche $N^{\circ}l$

Nous supposons une adhérence parfaite entre l'acier et le béton et l'intégration de l'élément composite se fait en utilisant l'hypothèse de Voigt pour l'homogénéisation.

$$E_l = (1 - C_{al})E_{bl} + C_{al}E_{al} \quad (1.86)$$

$$\varepsilon_{anl} = (1 - C_{al})\varepsilon_{anl} + C_{al}\varepsilon_{pl} \quad (1.87)$$

On remarquera qu'en plus de l'hypothèse d'adhérence parfaite viennent se rajouter des hypothèses propres à la cinématique de l'élément utilisé qui font que les effets triaxiaux et les conséquences relatives à la différence des coefficients de poisson des matériaux ne sont pas pris en compte.

1.4.4.8. Conclusion

Le programme EFICOS permet d'effectuer des calculs sur des structures en béton et en béton armé construites à l'aide de poutres et poteaux, il fait des calculs dynamiques du type sismiques.

Le domaine d'application du programme pourra être étendu par l'introduction d'éléments de voiles et d'éléments spécifiques permettant de faire une connections correcte entre les poutres et les poteaux (En utilisant toujours la méthode semi globale et le modèle de comportement unilatéral).

Chapitre 2 Elément poutre multifibre

2.1. Introduction

Les modèles « classiques » E.F. sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, ...), leur application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type poutre multifibre (voir [Figure 2.1]), possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler Bernouli ou Timoschenko tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé. De plus, cette modélisation "intermédiaire" est relativement robuste et peu coûteuse en temps de calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires 1D [19].

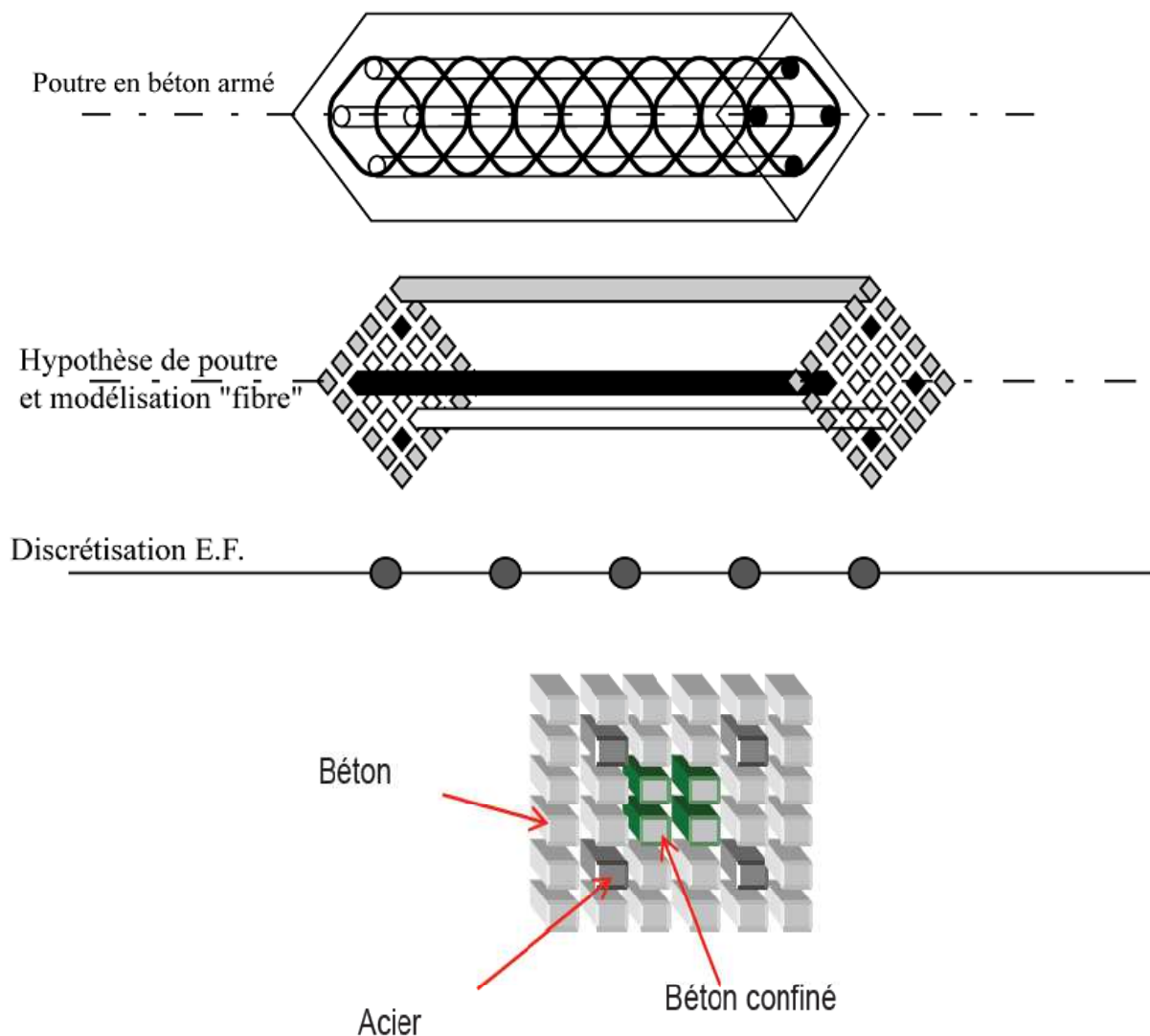


Figure 2.1 : Description d'une modélisation de type poutre multifibre [19]

2.2. Élément de la théorie des poutres [19] [20] [21]

Soit une poutre droite 3D de longueur L (figure 2.2) orientée selon la direction x et soumise à des efforts distribués q_y , q_z .

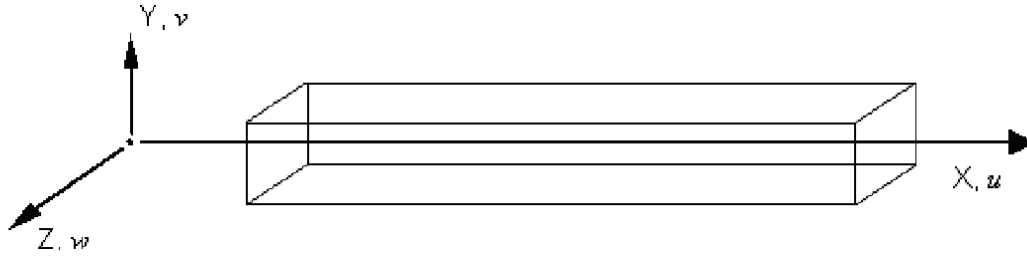


Figure 2.2 Poutre d'Euler 3D

L'hypothèse des sections planes (théorie Timoshenko) permet d'exprimer les déplacements $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements u_s , v_s , w_s d'un point situé sur l'axe de référence x et des déplacements dus aux rotations

θ_{sx} , θ_{sy} , θ_{sz} de la section S :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) - z\theta_{sx}(x) \quad (2.2)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) + y\theta_{sx}(x) \quad (2.3)$$

Le champ des déformations prend alors la forme suivante

$$\epsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (2.4)$$

$$2\epsilon_{xy} = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) - z\theta'_{sx}(x) \quad (2.5)$$

$$2\epsilon_{xz} = w'_s(x) + \theta_{sy}(x) + y\theta'_{sx}(x) \quad (2.6)$$

En introduisant le principe des travaux virtuels dans l'équation (2.1) et (2.6) on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\delta\epsilon_{xx} \cdot \sigma_{xx} + 2\delta\epsilon_{xy} \cdot \sigma_{xy} + 2\delta\epsilon_{xz} \cdot \sigma_{xz}) dV_0 &= \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^L (N\delta u'_s(x) + T_y\delta\beta_{sy}(x) + T_z\delta\beta_{sz}(x) + M_x\delta\theta'_{sx}(x) + M_y\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) \\ &= \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec :

L'effort normal :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS \quad (2.8)$$

Les efforts tranchants :

$$T_y = \int_S \sigma_{xy} dS ; \quad T_z = \int_S \sigma_{xz} dS \quad (2.9)$$

Les moments de flexion :

$$M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS ; \quad M_z = \int_S -y \sigma_{xx} dS \quad (2.10)$$

Le moment de torsion :

$$M_x = \int_S (-z \sigma_{xy} + y \sigma_{xz}) dS \quad (2.11)$$

$$\beta_{sy}(x) = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) ; \quad \beta_{sz}(x) = w'_s(x) + \theta_{sy}(x) \quad (2.12)$$

La théorie des poutres et les équations d'élasticité donnent:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} ; \quad \sigma_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} ; \quad \sigma_{xz} = 2G \cdot \varepsilon_{xz} ; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.13)$$

Avec E le module de Young de la section et G le module de cisaillement.

Dans le cadre de la théorie d'Euler - Bernoulli (les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre), les équations précédentes prennent la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (2.14)$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) \quad (2.15)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (2.18)$$

Contrairement à la poutre Timochenko, la poutre Euler - Bernoulli néglige les déformations dues au cisaillement (équation 2.18). En appliquant le principe des travaux virtuels, nous obtenons finalement :

$$\int_0^L (N\delta u'_s(x) + M_y\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) dx = \int_0^L (\delta v_s(x)q_y + \delta w_s(x)q_z) dx \quad (2.19)$$

Avec :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS ; \quad M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS ; \quad M_z = \int_S -y \sigma_{xx} dS \quad (2.20)$$

Le moment de torsion M_x et les efforts tranchants T_y et T_z ne peuvent pas être calculés par intégration des contraintes de cisaillement puisque ces dernières sont négligées. Dans la suite nous présentons en détail plusieurs éléments finis poutre multifibre existants dans la littérature basées sur la théorie de Timoshenko ou d'Euler - Bernoulli.

2.3. Élément fini poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur [20] [21] [22]

Prenons une poutre Timoshenko 3D à 2 noeuds, de longueur L , soumise à des efforts distribués q_y et q_z (figure 2.2). S est la section de la poutre discrétisée en fibres de coordonnées y, z . Nous présentons ici une généralisation où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique.

La discrétisation en éléments "exacts" de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux noeuds et six degrés de liberté par noeuds. Ces degrés de liberté sont les trois translations u, v, w et les trois rotations $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ [Figure 2.3].

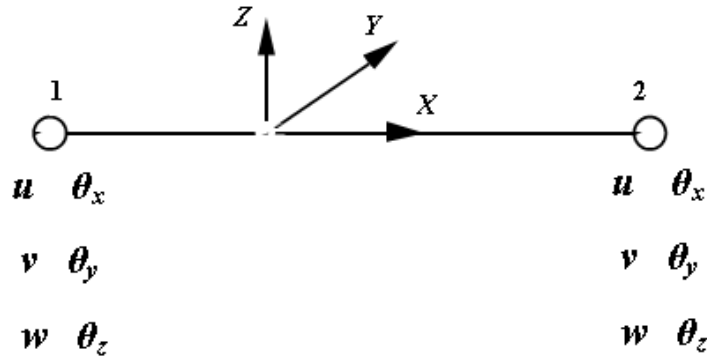


Figure 2.3 : Élément poutre

Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\{U^T\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}\} \quad (2.21)$$

2.3.1 Fonctions d'interpolation

Nous considérons le champ de déplacements continus en tout point de la ligne moyenne x en fonction du champ de déplacements discrétisés :

$$U_s = [N] \cdot \{U\} \quad (2.22)$$

$$\text{Avec } \{U_s\}^T = \{u_s(x) \quad v_s(x) \quad w_s(x) \quad \theta_{sx}(x) \quad \theta_{sy}(x) \quad \theta_{sz}(x)\} \quad (2.23)$$

Le choix des fonctions d'interpolation $[N]$ conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand l'élément est élancé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément [Stolarski et al. 1983].

Afin d'affranchir ce problème, la formulation présentée ci-dessous opte pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (par exemple cubique) et les rotations (par exemple quadratique) qui ne sont plus indépendants. Ce type d'approche conduit à des éléments finis à plus de deux nœuds (deux nœuds aux extrémités + des nœuds intérieurs), [Ibrahimbegovic et al. 1992] ou à des éléments finis à deux nœuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux [De Ville de Goyet 1989], [Friedman et al. 1993], [Kotronis et al. 2004, 2005], [Mazars et al. 2006]. Dans cette dernière formulation les fonctions d'interpolation prennent la forme suivante :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & -N_4^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.25)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.26)$$

$$N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left(\frac{x}{L} \right) + 1 + \phi \right\} \quad (2.27)$$

$$N_4 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left(2 + \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(1 + \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.28)$$

$$N_5 = -\frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.29)$$

$$N_6 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left(1 - \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{\phi}{2} \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.30)$$

$$N_7 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.31)$$

$$N_8 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - (4+\phi) \left(\frac{x}{L} \right) + (1+\phi) \right\} \quad (2.32)$$

$$N_9 = -\frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.33)$$

$$N_{10} = \frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - (2-\phi) \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.34)$$

$$N_i^* = N_i (\phi^*) \quad (2.35)$$

Les rapports entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement dans les axes y et z deviennent :

$$\phi = \frac{12}{L^2} \left(\frac{\int_S E y^2 dS}{\int_S G dS} \right) \quad (2.36)$$

$$\phi^* = \frac{12}{L^2} \left(\frac{\int_S E z^2 dS}{\int_S G dS} \right) \quad (2.37)$$

2.3.2 Matrices de rigidités

La relation entre les forces et les déformations « généralisées » dans la section prend la forme suivante [Guedes et al. 1994] :

$$\{F\} = [K_s] \cdot \{D\} \quad (2.38)$$

Avec :

$$\{F\}^T = \{N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z\} \quad (2.39)$$

$$\{D\}^T = \{u'_s(x), v'_s - \theta_{sz}(x), w'_s + \theta_{sy}(x), \theta'_{sx}(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x)\} \quad (2.40)$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement :

$$[K_S] = \begin{bmatrix} K_{S11} & 0 & 0 & 0 & K_{S15} & K_{S16} \\ & K_{S22} & 0 & K_{S24} & 0 & 0 \\ & & K_{S33} & K_{S34} & 0 & 0 \\ & & & K_{S44} & 0 & 0 \\ Sym & & & & K_{S55} & K_{S56} \\ & & & & & K_{S66} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$K_{S11} = \int_S EdS ; K_{S15} = \int_S EzdS ; K_{S16} = - \int_S EydS ; K_{S22} = k_y \int_S GdS \quad (2.42)$$

$$K_{S24} = -k_y \int_S GzdS ; K_{S33} = k_z \int_S GdS ; K_{S34} = k_z \int_S GydS \quad (2.43)$$

$$K_{S44} = \int_S G(k_z y^2 + k_y z^2) dS ; K_{S55} = \int_S Ez^2 dS \quad (2.44)$$

$$K_{S56} = - \int_S EyzdS ; K_{S66} = \int_S Ey^2 dS \quad (2.45)$$

Les variables k_y et k_z sont les coefficients de correction de cisaillement de la section définies dans [Cowper 1966]. L'introduction des équations 2.38 à 2.45 dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta \{D\}^T [K_S] \{D\} dx = \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \quad (2.46)$$

La déformation généralisée est calculée par :

$$\{D\} = [B] \cdot \{U\} \quad (2.47)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_3 - N_7 & 0 & 0 & 0 & N'_4 - N_8 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & 0 & 0 & N'_6 - N_{10} \\ 0 & 0 & N'_3 - N_7 & 0 & -N'_4 + N_8 & 0 & 0 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & -N'_6 + N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_7 & -N'_7 & 0 & N'_8 & 0 & 0 & 0 & -N'_9 & 0 & N'_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_8 & 0 & N'_9 & 0 & 0 & 0 & N'_{10} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_S] [B] dx \quad (2.49)$$

2.3.3 Intégration dans le cas non-linéaire (matrice de rigidité)

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, pour permettre une intégration correcte des efforts internes, il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration le long de la poutre. On utilise deux points de Gauss. La matrice de rigidité est calculée avec l'équation suivante :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T \cdot [K_S] \cdot [B] dx = J \sum_{i=1}^2 w_i [B(x_i)]^T \cdot K_S \cdot [B(x_i)] \quad (2.50)$$

Où : x_i est la position du point de Gauss i dans un élément de référence de longueur 1, c'est-à-dire :

$$1 \mp \frac{0.5773502698963}{2}$$

w_i est le poids du point de Gauss i . On prend ici $w_i = 0.5$ pour chacun des 2 points ; J est le Jacobien.

Cette formule est utilisée également avec les autres types de poutre multifibre que nous présentons dans la suite.

2.3.4 Matrices de masse

Le travail virtuel des efforts d'inertie et la matrice de masse de la section prennent la forme suivante [Guedes et al. 1994] :

$$W_{int} = \int_0^L \int_S \rho \left(\delta u(x, y, z) \cdot \frac{d^2 u(x, y, z)}{dt^2} + \delta v(x, y, z) \cdot \frac{d^2 v(x, y, z)}{dt^2} + \delta w(x, y, z) \cdot \frac{d^2 w(x, y, z)}{dt^2} \right) ds \cdot dx$$

$$W_{int} = \int_0^L \delta \{U_s\}^T \cdot [M_s] \cdot \frac{d^2 \{U_s\}}{dt^2} \cdot dx \quad (2.51)$$

Avec U_s le vecteur des déplacements "généralisés".

Ce qui donne pour la matrice de masse :

$$[M_s] = \begin{pmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s15} & M_{s16} \\ & M_{s22} & 0 & M_{s24} & 0 & 0 \\ & & M_{s33} & M_{s34} & 0 & 0 \\ & & & M_{s44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & M_{s55} & M_{s56} \\ & & & & & M_{s66} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$M_{s11} = \int_S \rho dS ; M_{s15} = \int_S \rho z dS ; M_{s16} = - \int_S \rho y dS ; M_{s22} = k_y \int_S \rho dS \quad (2.53)$$

$$M_{s24} = -k_y \int_S \rho z dS ; M_{s33} = k_z \int_S \rho dS ; M_{s34} = k_z \int_S \rho y dS \quad (2.54)$$

$$M_{s44} = \int_S \rho (k_z y^2 + k_y z^2) dS ; M_{s55} = \int_S \rho z^2 dS \quad (2.55)$$

$$M_{s56} = - \int_S \rho y z dS ; M_{s66} = \int_S \rho y^2 dS \quad (2.56)$$

Avec ρ masse volumique qui peut varier en fonction de y et z .

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = \int_0^L [N]^T [M_s] [M] dx \quad (2.57)$$

Remarque : Cette expression de la matrice de masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse de type

Euler - Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement interviennent uniquement dans la matrice de raideur). Pour le cas d'une poutre courte avec $L / r \approx 12$, ($r = \sqrt{\frac{I}{S}}$ le rayon de giration de la section, I le moment d'inertie), de section circulaire pleine S , l'utilisation de la matrice de masse de type Euler - Bernoulli conduit à une erreur relative de l'ordre de 30% dès le quatrième mode, alors que l'erreur est quasi nulle pour la matrice de masse de l'équation 2.56 [Corn 1998].

2.3.5 Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \cdot \{F\} \cdot dx \quad (2.58)$$

Avec $\{F\}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 2.8-2.11, 2.39) et $[B]$ qui est donné par l'équation 2.48.

Les efforts résultants sont donnés par : $\{F_{res}\} = \int_0^L [N]^T \cdot \{Q\} \cdot dx \quad (2.59)$

Avec $[N]$ qui est donné par les équations 2.24-2.37.

Le vecteur Q dépend du chargement extérieur : $\{Q\}^T = (0 \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (2.60)$

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces résultantes suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left(0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad (2.61)$$

Remarques :

- Pour des sections homogènes de comportement linéaire et quand l'axe de référence coïncide avec l'axe neutre de la poutre la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko [Przemieniecki 1985]. Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements exacts d'une poutre soumise à des chargements statiques. Pour des sections hétérogènes la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section.

- Lorsque l'élanement devient grand $\phi \rightarrow 0$ et $\phi^* \rightarrow 0$ et donc la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Bernoulli (voir §2.5)

2.4. Élément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 [20] [21] [22]

2.4.1 Fonctions d'interpolation

La matrice des fonctions d'interpolation $[N]$ est de la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.63)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.64)$$

2.4.2 Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section $[K_s]$ est donnée par les équations 2.41 à 2.45. La déformation généralisée est calculée comme avant par $\{D\} = [B]\{U\}$ avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$N'_1 = -\frac{1}{L} \quad , \quad N'_2 = \frac{1}{L} \quad (2.66)$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée selon l'équation (2.49):

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx$$

Remarque :

Le terme $v'_s(x) - \theta_{sz}(x)$ de la déformation généralisée s'écrit normalement sous la forme :

$$\begin{aligned} v'_s(x) - \theta_{sz}(x) &= -\frac{1}{L}v_1 - \frac{L-x}{L}\theta_{z1} + \frac{1}{L}v_2 - \frac{x}{L}\theta_{z2} \\ &= -\frac{1}{L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_{z1} + \frac{1}{L}v_2 - \frac{1}{2}\theta_{z2} + \frac{1}{2}(\theta_{z1} - \theta_{z2})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L} \\ w'_s(x) + \theta_{sy}(x) &= -\frac{1}{L}w_1 + \frac{L-x}{L}\theta_{y1} + \frac{1}{L}w_2 + \frac{x}{L}\theta_{y2} \\ &= -\frac{1}{L}w_1 + \frac{1}{2}\theta_{y1} + \frac{1}{L}w_2 + \frac{1}{2}\theta_{y2} + \frac{1}{2}(\theta_{y2} - \theta_{y1})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L} \end{aligned}$$

La matrice $[B]$ devait être alors :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L-x}{L} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x}{L} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$N'_1 = \frac{-1}{L} \quad , \quad N'_2 = \frac{1}{L} \quad (2.68)$$

Pour affranchir le problème de blocage par cisaillement, les déformations généralisées de cisaillement ($v'_s(x) - \theta_{sz}(x)$ et $w'_s(x) + \theta_{sy}(x)$) ont été simplifiées en éliminant les termes linéaires $\frac{1}{2}(\theta_{z1} - \theta_{z2})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L}$ et $\frac{1}{2}(\theta_{y2} - \theta_{y1})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L}$ [Donea et al. 1987], [Pegon 1994].

2.4.3 Matrices de masse

La matrice de masse de la section et la matrice de masse de l'élément sont données par les équations (2.52 à 2.57 voir §2.3.4).

2.4.4 Efforts internes

Voir paragraphe (voir §2.3.5).

2.5 Élément fini poutre multifibre Euler – Bernoulli [20] [21] [22]

2.5.1 Fonctions d'interpolation

La matrice des fonctions d'interpolation $[N]$ est de la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & 0 & -N'_5 & 0 & N'_6 & 0 \\ 0 & N'_3 & 0 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & -N'_5 & 0 & 0 & 0 & N'_6 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Avec les fonctions d'interpolation suivantes, et leurs dérivées utiles :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N'_1 = -\frac{1}{L} \quad (2.70)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad ; \quad N'_2 = \frac{1}{L} \quad (2.71)$$

$$N_3 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N'_3 = -\frac{6x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3} \quad (2.72)$$

$$N_4 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad ; \quad N'_4 = 1 - \frac{4x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \quad (2.73)$$

$$N_5 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N'_5 = \frac{6x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3} \quad (2.74)$$

$$N_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad ; \quad N'_6 = -\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \quad (2.75)$$

2.5.2 Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section devient :

$$\{F\} = [K_s].\{D\} \quad (2.76)$$

Où :

$$\{F\}^T = \{N, M_y, M_z, M_x\} \quad (2.77)$$

$$\{D\}^T = \{u'_s(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x), \theta'_{sx}(x)\} \quad (2.78)$$

La matrice K_s peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$K_s = \begin{pmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ \text{sym} & & K_{s33} & 0 \\ & & & K_{s44} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Avec

$$K_{s11} = \int_S E \cdot dS ; \quad K_{s12} = \int_S E \cdot z dS ; \quad K_{s13} = \int_S E \cdot y \cdot dS \quad (2.80)$$

$$K_{s22} = \int_S E \cdot z^2 \cdot dS ; \quad K_{s23} = \int_S E \cdot y \cdot z \cdot dS ; \quad K_{s33} = \int_S E \cdot y^2 \cdot dS \quad (2.81)$$

Remarque

Le terme de torsion $K_{s44}=G.J_x$ est donné par l'utilisateur à l'aide de la donnée de J_x .

Les déformations généralisées sont calculée par (Ds est donnée à l'équation [éq 11] et [éq 12])

$$[D] = [B][U] \quad (2.82)$$

Avec la matrice B suivante :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N''_3 & 0 & N''_4 & 0 & 0 & 0 & -N''_5 & 0 & N''_6 & 0 \\ 0 & N''_3 & 0 & 0 & 0 & N''_4 & 0 & N''_5 & 0 & 0 & 0 & N''_6 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$N''_3 = -\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} ; \quad N''_4 = -\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad (2.84)$$

$$N''_5 = \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} ; \quad N''_6 = -\frac{2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad (2.85)$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par l'équation (2.49) :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx$$

2.5.3 Matrices de masse

Les matrices de masse de la section et de l'élément prennent les formes suivantes :

$$M_s = \begin{pmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & M_{s23} & 0 \\ \text{Sym} & & & & M_{s33} & 0 \\ & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Avec

$$M_{s11} = \int_S \rho \cdot ds \quad ; \quad M_{s12} = \int_S \rho \cdot z \cdot ds \quad ; \quad M_{13} = - \int_S \rho \cdot y \cdot ds \quad (2.87)$$

$$M_{s22} = \int_S \rho \cdot z^2 \cdot ds \quad ; \quad M_{s23} = \int_S \rho \cdot y \cdot z \cdot ds \quad ; \quad M_{s33} = \int_S \rho \cdot y^2 \cdot ds \quad (2.88)$$

Avec ρ qui peut varier en fonction de y et z .

2.5.4 Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \cdot \{F\} \cdot dx \quad (2.58)$$

Avec $\{F\}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 2.8-2.11, 2.39) et $[B]$ qui est donné par l'équation 2.48. (Voir § 2.3.5).

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces résultantes suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left(0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad -\frac{L^2q_z}{2} \quad \frac{L^2q_y}{2} \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad \frac{L^2q_z}{2} \quad -\frac{L^2q_y}{2} \right) \quad (2.89)$$

2.6 Modélisation numérique sur Cast3m [20] [21] [22]

Ce niveau de modélisation est particulièrement bien adapté à l'étude de structures complexes sous chargement sismique. Les lois non linéaires s'appuient sur des éléments barre ou de poutre (Timoshenko ou Bernoulli) [23].

Dans le cadre d'une modélisation de type multifibre, il y a deux «niveaux» d'intégration. Il y a la modélisation dite «longitudinale» qui sera représentée par une poutre (de support géométrique linéique avec deux points de Gauss sur la longueur) et une modélisation plane de la section (perpendiculaire au support géométrique, discrétisée avec des fibres qui jouent le rôle des points d'intégration dans la section).

2.6.1 Eléments finis de poutre [23]

Le logiciel Cast3M possède deux éléments finis de poutre :

- l'élément POUT d'Euler-Bernoulli sans déformation de cisaillement et avec une répartition de courbure linéaire sur la hauteur de l'élément,
- l'élément TIMO avec déformation de cisaillement et une répartition de courbure constante sur l'élément.

Ces 2 éléments finis de poutre ont pour support géométrique l'élément SEG2 à 2 nœuds et fonctionnent en 3D et en 2D (contraintes planes et déformations planes).

Ils servent de support à plusieurs lois de comportement semi globales en traction-compression, flexion et cisaillement.

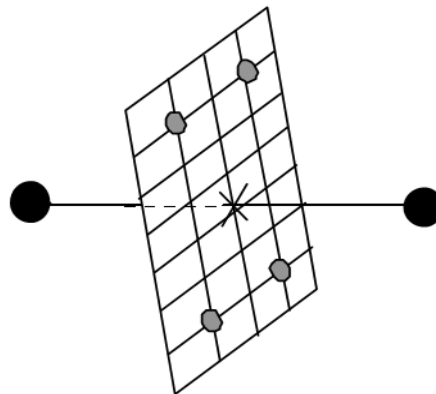
Pour ces 2 éléments, l'utilisateur doit fournir la section SECT, les inerties de flexion INRY (uniquement en 3D) et INRZ et l'inertie de torsion INRX (uniquement en 3D). Les sections réduites pour le cisaillement SECY et SECZ sont facultatives. Le module de cisaillement G est calculé à partir du module d'Young (E=YOUN) et du coefficient de Poisson ($\nu=NU$) : $G=E/2(1+\nu)$.

2.6.2 Principe du modèle à fibre pour l'élément Timoshenko

Sur CAST3M, la poutre Timoshenko est adaptée pour faire une modélisation multifibre. Le modèle à fibre permet de calculer la loi de comportement de l'élément de poutre de Timoshenko i.e. la relation entre déformation axiale, courbure, déformation de cisaillement et les contraintes généralisées associées (N, M et T) à partir d'une description géométrique de la section basée sur les éléments bidimensionnels TRIS et QUAS et de lois de comportement uniaxiales pour chaque matériau (béton, acier, ...) (Figure 2.4).

Il faut noter que la loi de comportement est intégrée en un seul point pour l'élément POJS et l'élément triangulaire à 3 nœuds TRIS, sur 2 points pour l'élément à 2 points SEGS et sur 4 points pour l'élément à 4 nœuds QUAS. Les positions de ces points d'intégration sont données (Fig.2.5) Pour les éléments SEGS et QUAS, la solution est donc exacte pour une section rectangulaire en élasticité avec un seul élément.

Remarquons aussi que les hypothèses cinématiques supposent l'absence de gauchissement et, en torsion, la répartition de contrainte de cisaillement n'est exacte que pour des sections circulaires. En élasticité, cette répartition ne vérifie pas la théorie de Saint-Venant.



Elément de poutre :	$(u, \theta) \Rightarrow (\varepsilon_0, \phi, \gamma)$		(M, N, T)
	\Downarrow		\Uparrow
Niveau de la fibre :	(ε, γ)	\Rightarrow	$(\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$

Figure 2.4 Principe du modèle à fibre

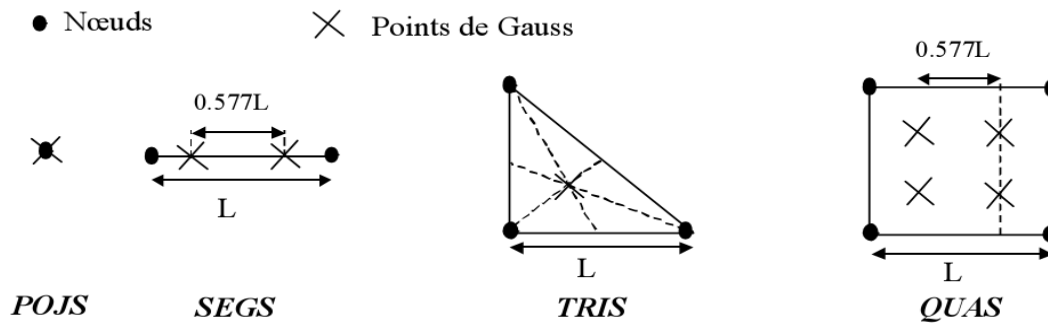


Fig2.5 Eléments bidimensionnels utilisés pour la description des sections

2.7 Conclusion

Avantages de la modélisation semi-globale poutre multifibre

- elle est adaptée à la modélisation des structures minces,
- elle permet de réduire la taille du problème par rapport à une modélisation en éléments massifs,
- elle est peu coûteuse en temps CPU et en taille mémoire,
- elle peut être combinée à l'emploi d'autres éléments de structure (coques multicouches, ...).

Inconvénients de la modélisation semi-globale poutre multifibre

- elle ne permet pas de représenter le ferrailage transverse,
- elle est plutôt adaptée aux structures relativement simples. Cependant on peut envisager de simuler le comportement global de structures en béton armé relativement complexes.

**Chapitre 3 Modélisation non linéaire endommageable,
application aux structures en béton armé**

3.1 Introduction

Dans le but d'étudier et de valider le comportement des structures en béton armé, plusieurs programmes de recherche ont été réalisés ces dernières années. Leur objectif est de classer par ordre de pertinence les modèles et les méthodes numériques dans le cadre de calcul des structures soumis à des chargements statiques monotones et des chargements cycliques.

Le but de ce chapitre est d'évaluer le comportement non linéaire des structures en béton armé sous différentes sollicitations cycliques et statiques en utilisant différentes lois de comportement pour l'acier et le béton, par une modélisation multifibre réalisée sous le logiciel d'élément finis CAST3M. Les résultats de simulation seront confrontés aux résultats d'expérimentation qui sont réalisées dans le cadre du projet national Français CEOS.fr (Comportement et Evaluation des Ouvrages Spéciaux Fissuration Retrait) et le projet MEFISTO (Maîtrise durable de la fissuration des infrastructures en béton), ces deux programmes sont organisés chronologiquement en deux tranches, la première (2008-2009) a pour but de faire l'état de l'art dans ce domaine, la seconde (2009-2011) de proposer des solutions aux problèmes identifiés, plus spécifiquement afin de faire progresser de façon significative les outils et les pratiques d'ingénierie en matière d'estimation et de prédiction de l'état d'endommagement lié à la fissuration des éléments de structures en béton armé, sous chargement statique monotone. A long terme, les chargements cyclique, dynamique et/ou le comportement sous gradients thermo-hydriques seront aussi abordés.

3.2 Modélisation des poutres

Les simulations sont effectuées sur trois poutres, deux poutres (1 et 8) proposées dans le cadre du projet CEOS.fr, la troisième poutre LMT a été proposée dans le cadre du projet MEFISTO, afin de compléter les différents résultats réalisés dans le projet CEOS.fr.

Les deux poutres de Benchmark (CEOS.fr) sont en béton armé et sollicitées en flexion alternée 3 points, les poutres ont une portée de 1.50 m, une hauteur de 20cm et une largeur de 15 cm avec un ferrailage différent. Les essais étant effectués en pseudo-dynamique, la vitesse de sollicitation permet de négliger les effets inertiels. Tous ces essais ont été effectués dans le cadre de la thèse du doctorat de A.Souid [24].

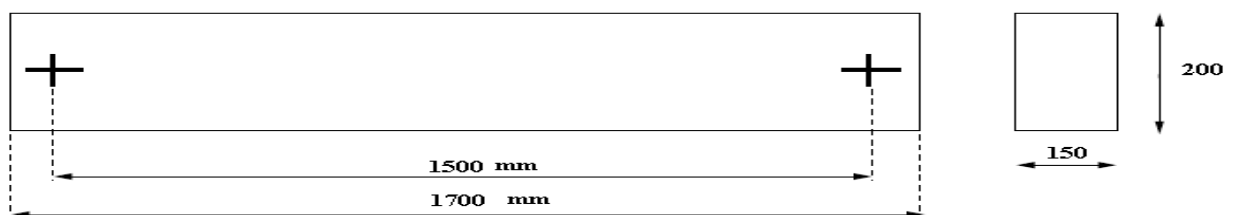


Figure3.1 Le schéma principal pour les trois poutres (1, 8 et LMT).

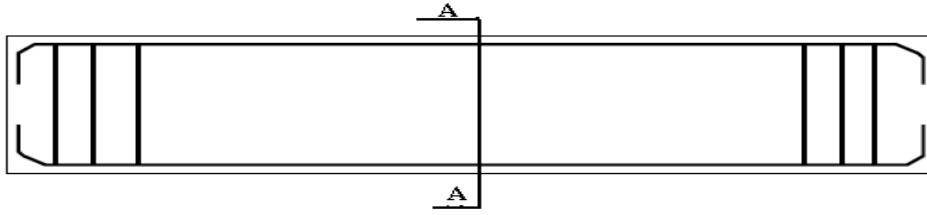


Figure 3.2 La coupe longitudinale de ferrailage pour les trois poutres (1, 8 et LMT).

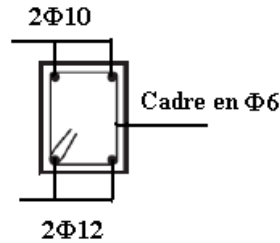


Figure 3.3 La coupe transversale (A-A) pour la poutre 8.

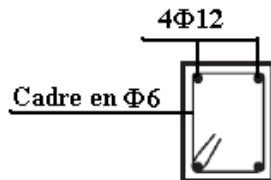


Figure 3.4 La coupe transversale (A-A) pour la poutre 1 et LMT.

La modélisation est effectuée sur des éléments en multifibres avec une poutre type Timoshenko à deux nœuds. Les lois de comportements sont basées sur la mécanique d'endommagement pour le béton et un modèle de plasticité parfaite avec écrouissage cinématique pour les aciers. Le calcul numérique est fait en multifibre 3D à l'aide de logiciel en élément finis CAST3M, les résultats de simulation seront comparés par la suite aux résultats expérimentaux.

Les poutres en multifibres sont décomposées le long de la poutre par des sections, chaque section comporte 10 fibres en béton, les aciers longitudinaux sont représentés sur chaque section suivant toute la longueur de poutre. On suppose qu'il y a une adhérence parfaite entre l'acier et le béton.

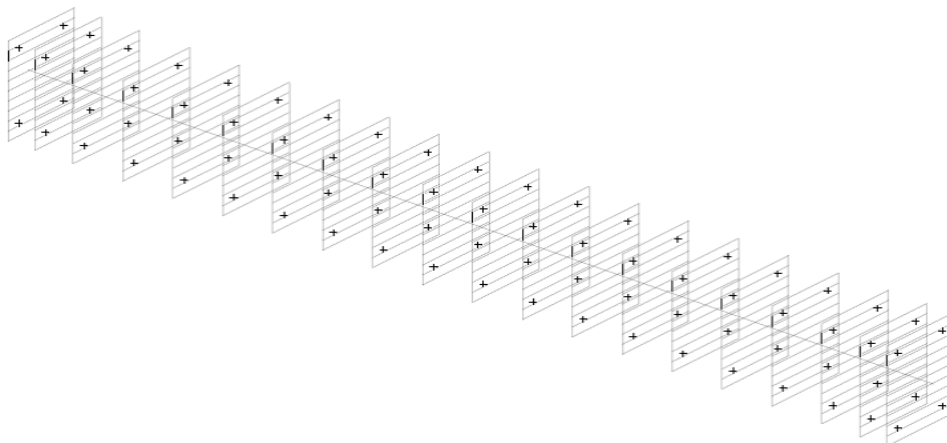


Figure 3.5 Le maillage des poutres multifibre sur CAST3M.

3.2.1 Les modèles utilisés pour la simulation

Afin de modéliser le comportement non linéaire du béton, on a choisit deux modèles d'endommagement, le modèle unilatéral de La Borderie [17] et le modèle béton_uni [23] qui tient en compte de l'effet de confinement.

3.2.1.1 Le modèle unilatéral (La Borderie) [17]

Cette loi est la version uni-axiale du modèle d'endommagement unilatéral de La Borderie [La Borderie, 1991] [17]. Ce modèle de béton est basé sur la théorie de l'endommagement. Il a la spécificité d'être unilatéral et de reproduire la reprise de raideur lors de la refermeture des fissures. Deux variables d'endommagement décrivent les comportements en traction et en compression. Le paramètre SIGF permet de contrôler le comportement lors de la refermeture de la fissure. Ce modèle a été détaillé dans le chapitre 1 (voir le paragraphe 1.3.6.3).

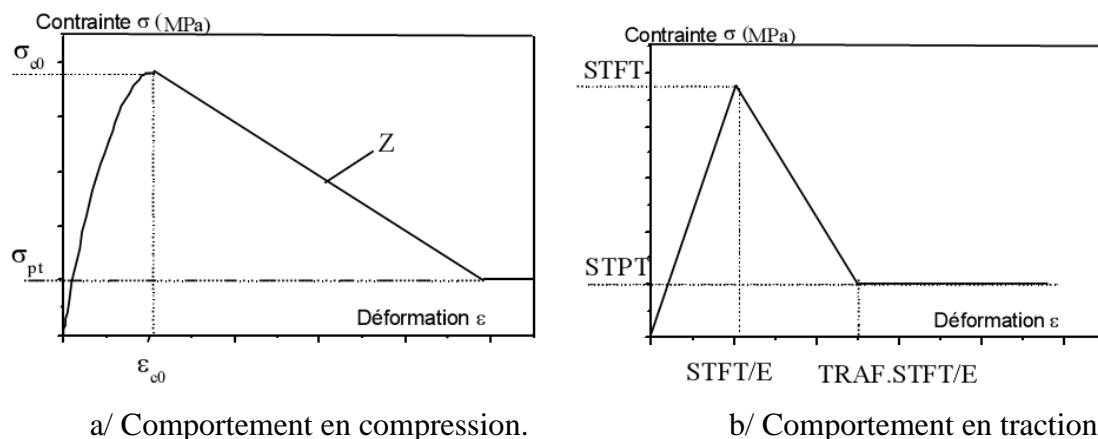
Les paramètres utilisés pour la loi Unilatérale sont :

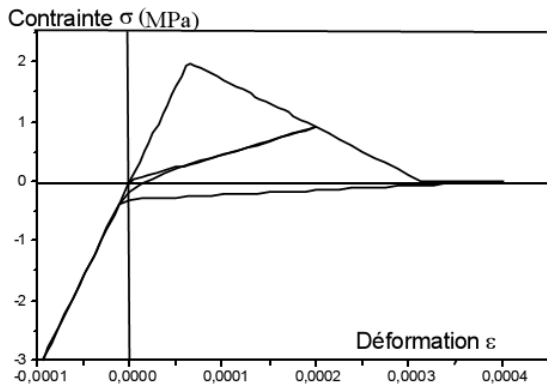
Paramètres de modèle	Valeur
Y_{01} (Seuil d'endommagement en traction)	$2.5 \times 10^{+2}$ (Pa)
Y_{02} (Seuil d'endommagement en compression)	$1.5 \times 10^{+4}$ (Pa)
A1 (Paramètre d'endommagement en traction)	4×10^{-3} (Pa)
A2 (Paramètre d'endommagement en compression)	6.5×10^{-5} (Pa)
B1 (Paramètre pour la traction)	1.2
B2 (Paramètre pour la compression)	1.5
BETA1 (Activation de la déformation permanente en traction)	$1 \times 10^{+6}$ (Pa)
BETA2 (Activation de la déformation permanente en compression)	$-40 \times 10^{+6}$ (Pa)
SIGF (Contrainte de refermeture de fissure)	$3.5 \times 10^{+6}$ (Pa)

Tableau 3.1 Tableau des paramètres du modèle Unilatéral utilisés dans la simulation [17].

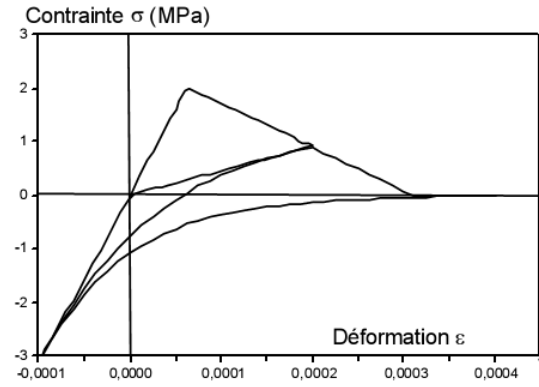
3. 1.1.2 Le modèle Béton-uni

La loi Béton_uni reprend le modèle d'Hognestad [Hognestad, 1951]. Elle permet de reproduire l'adoucissement après fissuration, le comportement unilatéral du béton (refermeture des fissures) ainsi que l'adoucissement après avoir atteint la résistance en compression. Le confinement est aussi pris en compte. Deux fonctionnements d'ouverture et refermeture de fissures sont possibles [Guedes, 1997] [23],





Fermeture raide.



Fermeture souple.

c/ Loi d'ouverture/refermeture de la fissure.

Figure 3.6 Loi de comportement BETON_UNI [23].

Sous chargement monotone, la loi est du type parabole puis linéaire avec adoucissement (Figure 3.6 (a)). Un plateau avec une contrainte résiduelle non nulle peut-être défini après l'adoucissement.

$$\text{Pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c0} \quad \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \cdot \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \quad (3.1)$$

$$\text{Pour } \varepsilon_{c0} < \varepsilon \quad \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = 1 + Z \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{c0}) \quad (3.2)$$

Sur le plateau, $\sigma = \sigma_{pt}$

Avec :

σ_{c0} : Contrainte au pic (paramètre STFC).

ε_{c0} : Déformation au pic (paramètre EZER).

Z : Pente après le pic (paramètre ZETA).

σ_{pt} : Contrainte résiduelle (paramètre ST85).

Il faut noter que le logiciel ne vérifie pas si l'utilisateur a défini une loi en compression avec une rigidité initiale différente du module d'Young élastique E. Pour avoir un jeu de paramètres cohérent, il faut prendre $\varepsilon_{c0} = 2 \cdot \frac{\sigma_{c0}}{E}$

De plus, il est conseillé de prendre une contrainte résiduelle valant 20% de la contrainte maximale.

2 Prise en compte du confinement en compression [23]

La ductilité d'une section en béton armé et donc le comportement sismique de la structure dépend fortement du confinement du béton et le paramètre Z est directement fonction du confinement apporté par les cadres.

Si l'utilisateur donne une valeur négative pour Z, la valeur de Z est calculée à partir des coefficients α (paramètre ALF1) et w_w (paramètre OME1). De plus, dans ce cas, la contrainte et la déformation au pic données par l'utilisateur sont corrigées d'un facteur β :

$$\sigma'_{c0} = \beta \cdot \sigma_{c0} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon'_{c0} = \beta^2 \cdot \varepsilon_{c0} \quad (3.4)$$

Avec :

$$\beta = \text{Min} (1 + 2.5\alpha\omega_w, 1.125 + 1.25\alpha\omega_w) \quad (3.5)$$

$$Z = \frac{\beta - 0.85}{\beta(0.1\alpha\omega_w + 0.0035 + \varepsilon'_{c0})} \quad (3.6)$$

Les coefficients α et ω_w sont déterminés à l'aide des formules suivantes :

$$\alpha = \left(1 - \frac{8}{3n}\right) \left(1 - \frac{s}{2b_c}\right) \left(1 - \frac{s}{2h_c}\right) \quad (3.7)$$

$$\omega_w = \frac{A_{cadre} \cdot f_{yt}}{b_c \cdot h_c \cdot f_{cu}} \sum \frac{l_w}{s} \quad (3.8)$$

n : nombre de barres de flexion.

B_c et h_c : dimension de la surface de béton confiné par les cadres. S : espacement des cadres.

A_{cadre} : section d'un cadre. L_w : longueur totale des cadres.

F_{cu} : contrainte ultime pour le béton. F_{yt} : contrainte de plastification des cadres.

- Si l'utilisateur donne une valeur positive pour Z , les coefficients α et ω_w sont ignorés et la valeur de Z donnée par l'utilisateur est utilisée. Cette valeur peut être déterminée à l'aide des formules précédentes ou de celles disponibles dans la littérature.

b. Dégradation de raideur en compression [23]

La non linéarité en compression s'accompagne d'une dégradation de raideur :

$$E_d = E \cdot \left(1 - \frac{(\varepsilon'_{max})^2}{1 + (\varepsilon'_{max}) + (\varepsilon'_{max})^2}\right) \quad (3.9)$$

Avec E : module élastique

$$\varepsilon'_{max} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{\varepsilon_{c0}} \quad (3.10)$$

La déformation plastique vaut donc :

$$\varepsilon_{pla} = \varepsilon_{cmax} - \frac{\sigma_{cmax}}{E_d} \quad (3.11)$$

ε_{cmax} : est la déformation maximale déjà atteinte en compression

σ_{cmax} : est la contrainte associée.

c. Comportement en traction [23]

Le béton possède une résistance en traction mais est fragile après fissuration. La loi est linéaire par morceau en traction (Figure 3.6 (b)) :

- jusqu'au pic, le comportement est linéaire, la résistance en traction est notée STFT,

- l'adoucissement est linéaire la déformation ultime est proportionnelle à la déformation au pic, le facteur de proportionnalité étant noté TRAF,

- un plateau résiduel a été introduit, la résistance résiduelle est notée STPT.

d. Loïs de refermeture de la fissure [23]

Deux lois de refermeture/ouverture de la fissure sont possibles (Figure 3.6 ©) :

Refermeture raide

Cette loi de fermeture/ouverture de la fissure est bilinéaire :

- avant refermeture, la décharge a lieu avec un module fissuré,
- après refermeture, le béton retrouve sa rigidité initiale.

Cette loi de refermeture très raide a tendance à surestimer le pincement des courbes force-déplacement et moment-courbure, le pincement étant lié à la refermeture des fissures de flexion [Combesure 1998 et 1999a] [23].

Refermeture souple

La loi contrainte déformation n'est plus bilinéaire mais hyperbolique et passe par les points (ϵ_t, σ_t) et (ϵ_c, σ_c) avec une pente σ_t' et σ_c' respectivement.

La figure (3.6 ©) présente la relation σ - ϵ pour deux jeux de paramètres :

Jeu de paramètre « souple » : $F_1=FAMX=1$, $F_2=FACL=1$,

$$F_1'=FAM1=10 \text{ et } F_2'=FAM2=10$$

Jeu de paramètre « moins souple » : $F_1=FAMX=10$, $F_2=FACL=1$,

$$F_1'=FAM1=1 \text{ et } F_2'=FAM2=10.$$

Si le paramètre FAMX est pris négatif, la première loi de refermeture/ouverture est adoptée et les autres paramètres n'ont pas de signification. Dans le cas contraire, les 4 paramètres supplémentaires permettent de moduler la reprise de raideur lors de la refermeture de la fissure.

Les paramètres de modèle utilisés pour le calcul sont regroupés dans le tableau suivant :

Paramètres de modèle	Poutre1 Valeur	Poutre8 Valeur
STFC (Contrainte de compression au pic)	$24 \times 10^{+6}$ (Pa)	$24 \times 10^{+6}$ (Pa)
EZER (déformation de compression au pic)	0.0025	0.0012
STFT (Contrainte de traction au pic)	$3. \times 10^{+6}$ (Pa)	$3. \times 10^{+6}$ (Pa)
ALF1 (Paramètre de confinement)	0.1042	0.1042
OME1 (Paramètre de confinement)	0.1722	0.6887
ZETA (Pente de la partie descendante de la courbe de compression)	21.43	22.622
ST85 (Plateau de la courbe de compression)	$4.8 \times 10^{+6}$ (Pa)	$4.8 \times 10^{+6}$ (Pa)
TRAF (Facteur définissant l'adoucissement de traction)	5.	5.
STPT (Contrainte résiduelle en traction)	0	0
FAMX (Facteur définissant le point de refermeture)	1	1
FACL (Facteur définissant le point d'ouverture complète)	1	1
FAM1 (Facteur définissant la pente associé à F1)	10	10
FAM2 (Facteur définissant la pente associé à F2)	10	10

Tableau 3.2 Tableau des paramètres du modèle Béton_Uni utilisés dans la simulation [23].

3.2.2 Loi de comportement de l'acier

Deux lois de comportement sont utilisées pour modéliser le comportement de l'acier.

3.2.2.1 Modèle élasto-plastique [23]

Les aciers peuvent être modélisés avec une loi élasto-plastique avec écrouissage cinématique. Les deux paramètres de cette loi sont :

- la contrainte de plastification (paramètre SIGY),
- le module d'écrouissage (paramètre H) qui vaut 0 pour un matériau parfaitement plastique.

Remarque : le module d'écrouissage est lié à la pente après plastification E_p avec la relation suivante : $E_p = \frac{E.H}{(E+H)}$

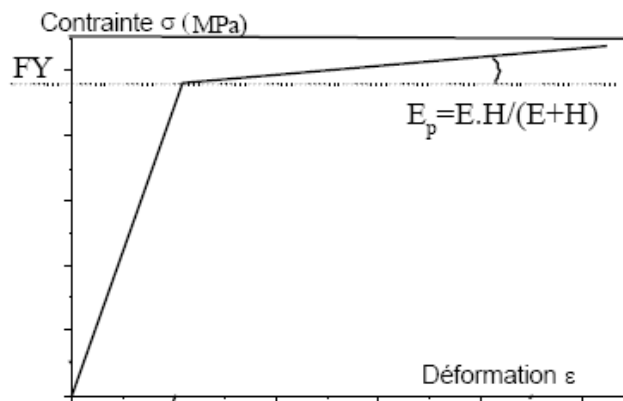


Figure 3.7 Loi de comportement de l'acier élasto-plastique.

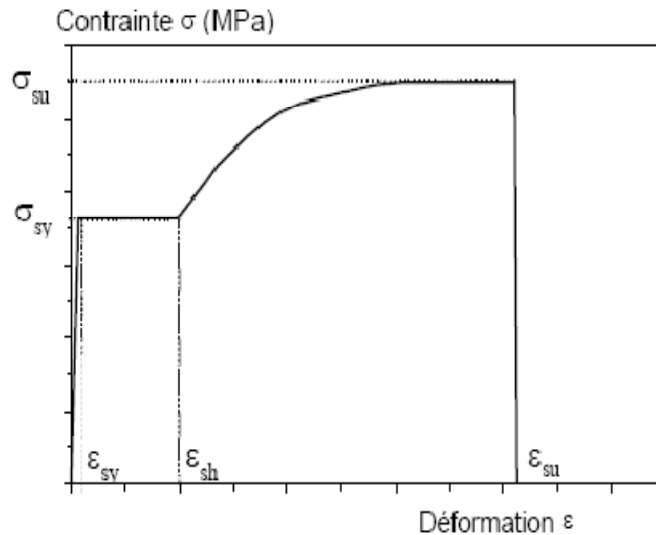
Les paramètres utilisés pour la loi élasto-plastique sont :

Paramètres de modèle	Valeur
E (Module de young)	20×10^{10} (Pa)
σ_y (Limite d'élasticité)	610×10^6 (Pa)
H (Module d'écrouissage linéaire)	1000×10^6 (Pa)

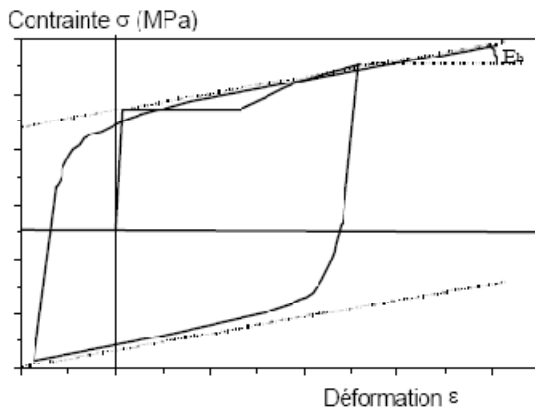
Tableau 3.3 Tableau des paramètres du modèle élasto-plastique utilisés dans la simulation [23].

3.2.2.2. Modèle Pinto – Menegotto [23]

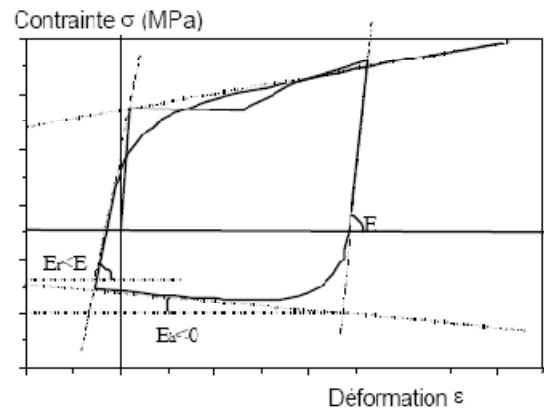
Cette loi reprend le modèle de Menegotto-Pinto [Menegotto, 1973].



a/ Comportement sous chargement monotone.



b/ Comportement sous chargement cyclique.



c/ Prise en compte du flambement.

Figure 3.8 Loi de comportement ACIER_UNI

Sous chargement monotone, la loi possède un plateau plastique ($\sigma = \sigma_{sy}$) suivi d'un écrouissage jusqu'au point $(\epsilon_{su}, \sigma_{su})$ (Figure 3.8-a) :

$$\sigma = \sigma_{su} - (\sigma_{su} - \sigma_{sy}) \cdot \left(\frac{\epsilon_{su} - \epsilon}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \right)^4 \quad (3.12)$$

Sous chargement cyclique, l'écrouissage est cinématique et l'effet Bauschinger est reproduit (Figure 3.7-b-). La pente de l'écrouissage peut être estimée à l'aide de la relation :

$E_h = \frac{(\sigma_{su} - \sigma_{sy})}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sy}}$. Les deux droites asymptotes de la courbe $(\sigma - \epsilon)$ sous chargement cyclique passent par les points de début de plastification $(+/-\epsilon_{sy}, +/-\sigma_{sy})$. La loi inclut un modèle de flambement (Figure 3.8-c-). Ce phénomène doit être pris en compte si le rapport entre la distance entre deux cadres L et le diamètre des aciers de flexion D est supérieur à 5. L'asymptote de la courbe (σ, ϵ) sous chargement cyclique devient alors négative (adoucissement) : sa pente est proportionnelle à : $E_h = a \cdot \left(5 - \frac{L}{D}\right) \cdot E$

De plus, le module de décharge élastique E_r est alors inférieur au module élastique E : $E_r = a_5 \cdot E$ avec $a_5 = 1.0 + \frac{5 - \frac{L}{D}}{7.5}$.

Le modèle de flambement est valable pour des rapports L/D compris entre 5 et 11.

Le modèle est détaillé dans [Guedes, 1997].

L'acier est caractérisé par :

- sa raideur élastique E ,
- sa contrainte de plastification σ_{sy} (paramètre STSY).
- sa contrainte ultime σ_{su} (paramètre STSU),
- sa déformation de début d'écrouissage ϵ_{sh} (paramètre EPSH),
- sa déformation ultime ϵ_{su} (paramètre EPSU),
- le ratio entre le module d'écrouissage et le module élastique pour des chargements cycliques (paramètre BFAC),
- les paramètres ROFA, A1FA et A2FA gouvernant l'effet Bauschinger (un jeu de paramètre standard est donné dans [1] : ROFA=20, A1FA=18.5 et A2FA=0.15),
- le rapport entre la distance entre 2 cadres L et le diamètre des aciers de flexion D (paramètre FALD),
- les paramètres AFAC, CFAC, A6FAC et FALD permettant de traiter les problèmes de flambement des aciers (le jeu de paramètres standard étant AFAC=0.006, CFAC=0.500 et A6FA=620 pour un acier à 450Mpa et une valeur de FALD comprise entre 5 et 11).

Les paramètres utilisés pour la loi Pinto – Menegotto sont :

Paramètres de modèle	Valeur
E (Module de young)	20×10^{10} (Pa)
STSY (Contrainte d'élasticité)	600×10^6 (Pa)
EPSH (Déformation au début d'écrouissage)	0.030
EPSU (Déformation ultime)	0.17
STSU (Contrainte ultime)	680×10^6 (Pa)
ROFA	20
A1FA	18.5
A2FA	0.15
AFAC	0.006
CFAC	0.5
A6FAC	650
FALD	3.125

Tableau 3.4 Tableau des paramètres du modèle Pinto – Menegotto utilisés dans la simulation.

[23]

3. 2.3 Histoire de chargement

Le chargement appliqué est un déplacement imposé au centre de la poutre en fonction du temps, il est sous la forme suivante :

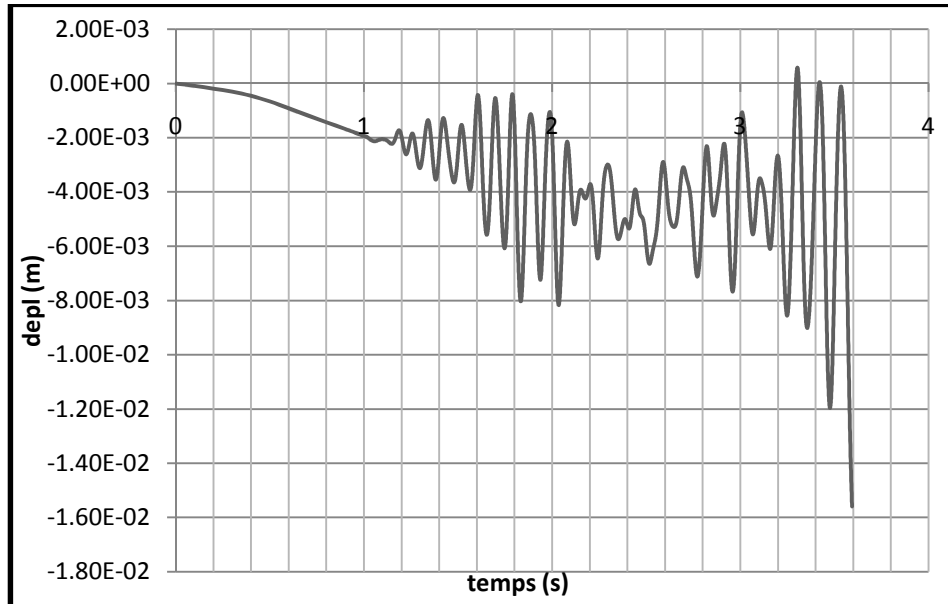


Figure 3.9 Le chargement appliqué sur la poutre 1

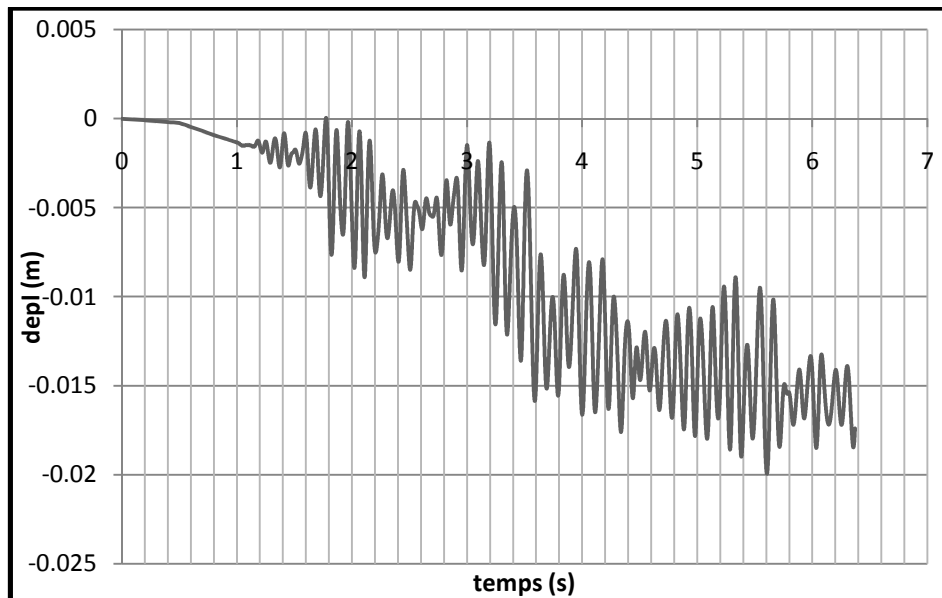


Figure 3.10 Le chargement appliqué sur la poutre 8

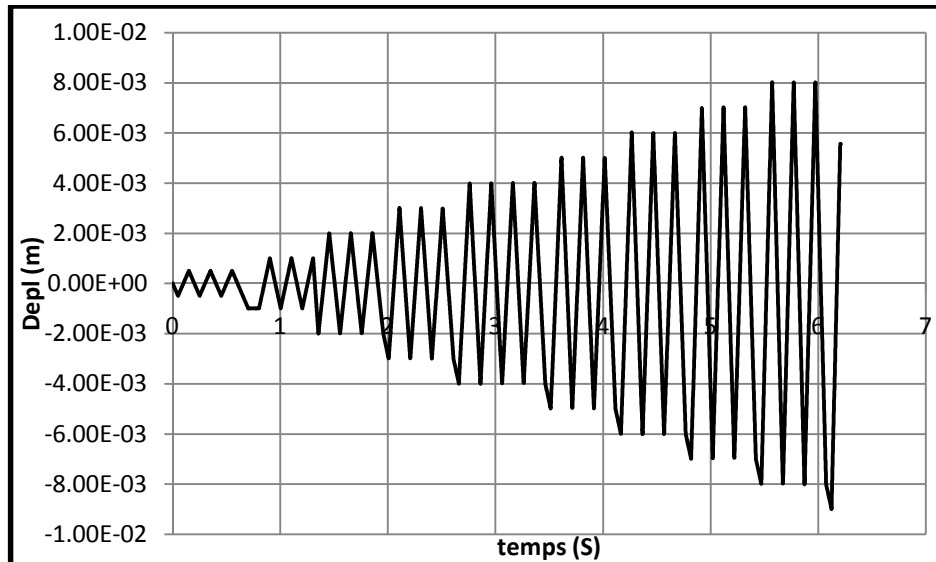


Figure 3.11 Le chargement appliqué sur la poutre LMT

3.2.4. Caractéristiques mécaniques des aciers et du béton

Acier :

	Ferrailage longitudinal	Ferrailage transversal
Poutre 1	4HA 12	Φ6/ 30cm
Poutre 8	2 HA 10 (haut) + 2HA 12 (bas)	Φ6/ 15 cm
Poutre LMT	4HA 12	Φ6/ 15cm

Béton :

- Module d'élasticité poutre 1: $E=19500\text{Mpa}$.
- Module d'élasticité poutre 8: $E=40000\text{Mpa}$.
- Coefficient de Poisson $\nu=0.2$.
- Résistance à la compression $f_c=24\text{MPa}$.
- Résistance à la traction $f_t=3\text{MPa}$.

3.3 Traitement des résultats

Pour la simulation des poutres 1 et 8 du projet CEOS.fr, on a utilisé deux lois de comportement Unilatéral (La Borderie 1991) et Béton_uni pour le béton, une loi élasto-plastique pour l'acier.

On a choisit deux niveaux de discrétisation $n=12$ et $n=20$ (n : nombre de section en fibre sur la poutre).

3.3.1 Poutre1

3.3.1.1 Modèle unilatéral pour le béton et élasto-plastique pour l'acier

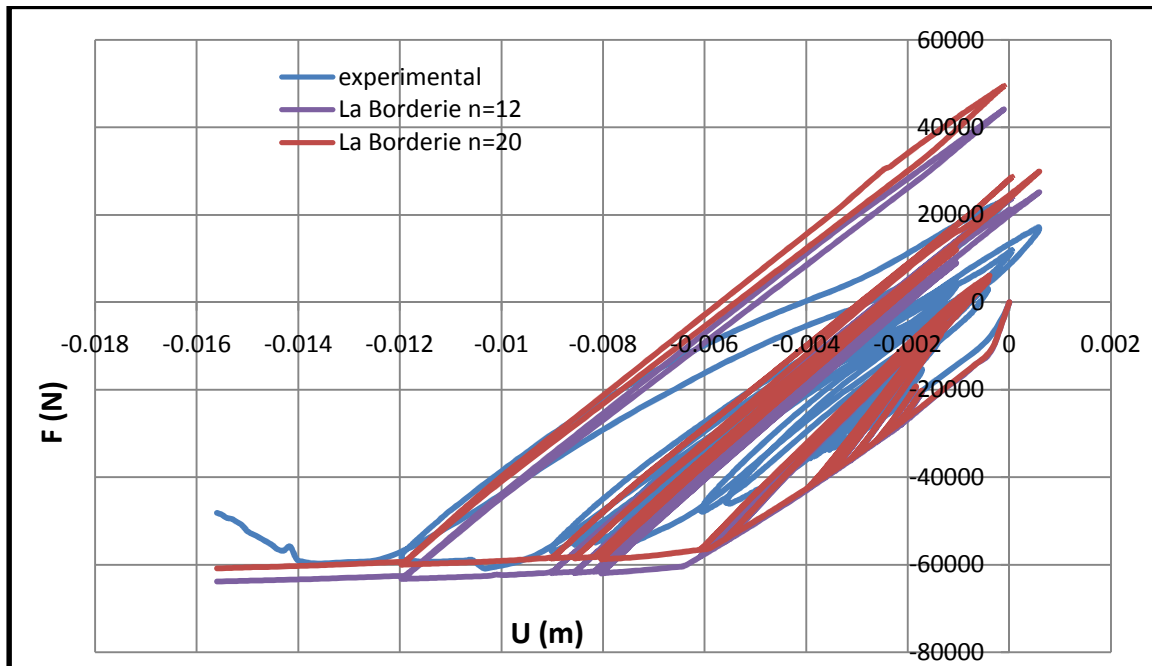


Figure 3.12 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.

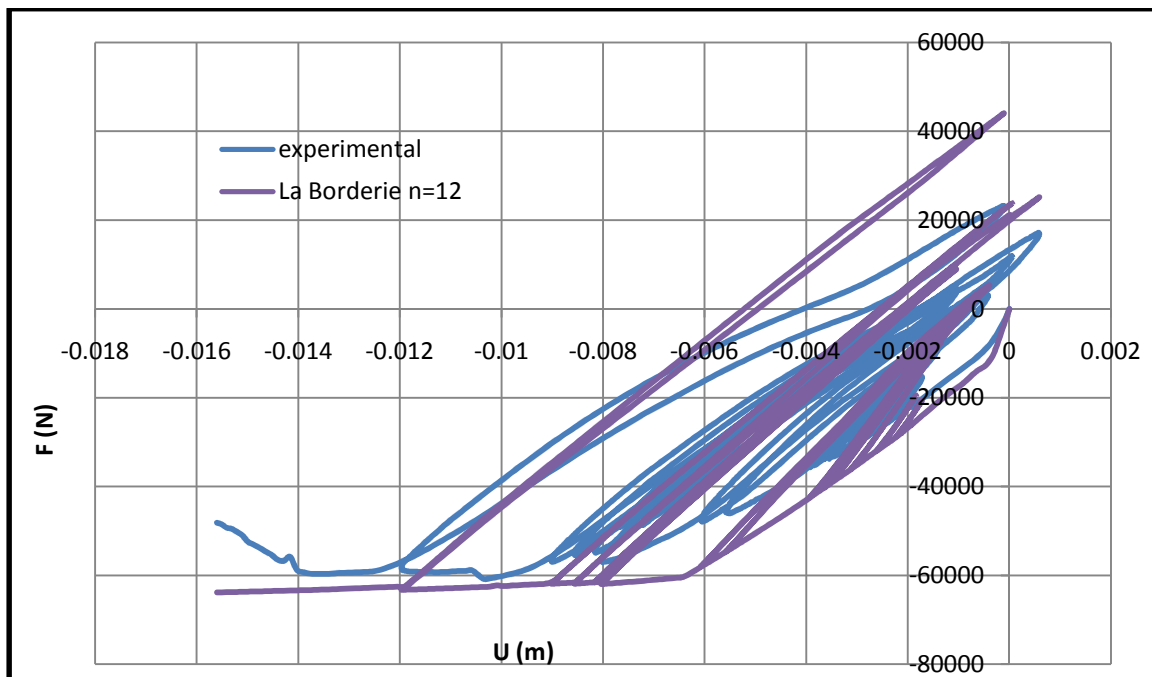


Figure 3.13 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour n=12)

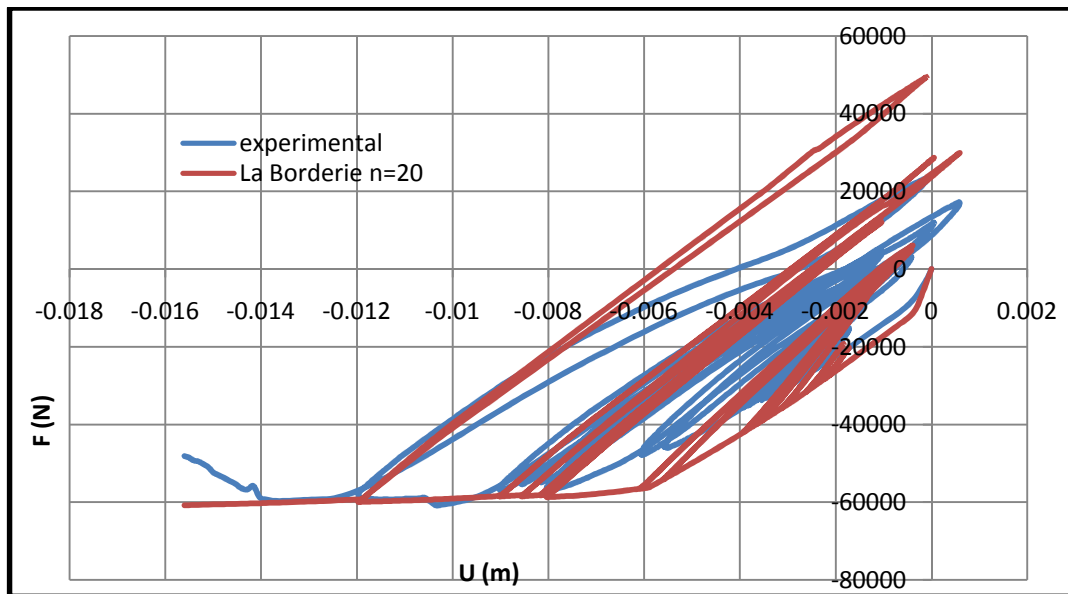


Figure 3.14 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=20$)

Les deux simulations avec différentes sections produisent une réponse globale quasi-identique. En expérimental le changement de signe reproduit un assouplissement suivi d'un raidissement qui engendre une courbe en S, dans la simulation on remarque que l'absence de la zone correspondant à l'assouplissement reproduit des efforts positifs plus importants que dans la réalité.

Pour la simulation de la poutre 1 ; l'enveloppe de la courbe montre que la participation du béton est surestimée ainsi on remarque que les aciers supérieurs se plastifient sur les derniers cycles. Pour un nombre de section $n=20$, les résultats sont proches de l'expérimentation.

3. 3.1.2 Modèle Béton_UNI pour le béton et élasto-plastique pour l'acier

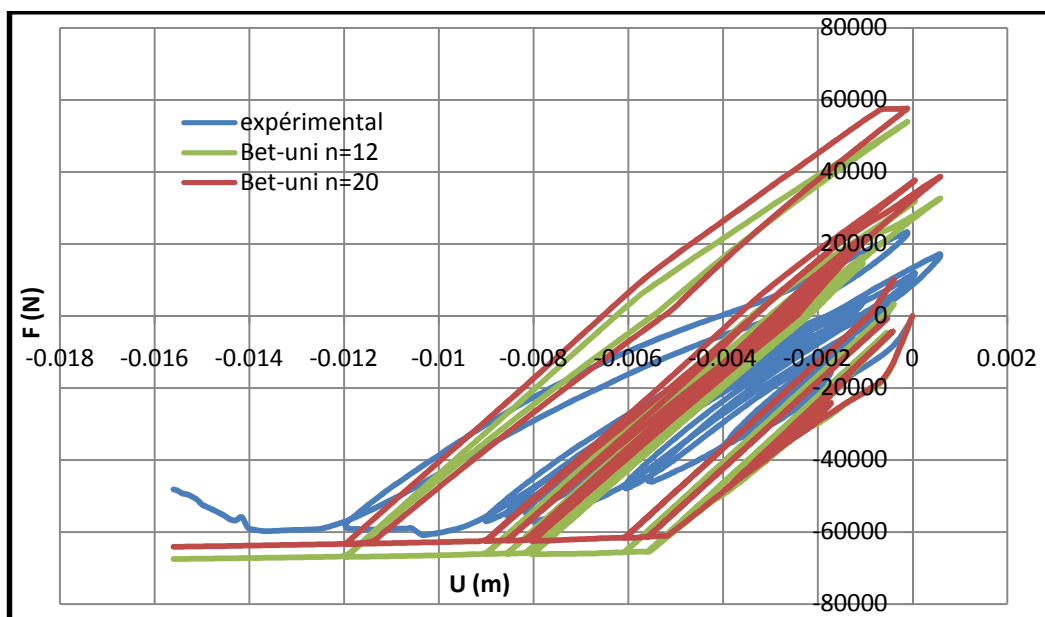


Figure 3.15 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.

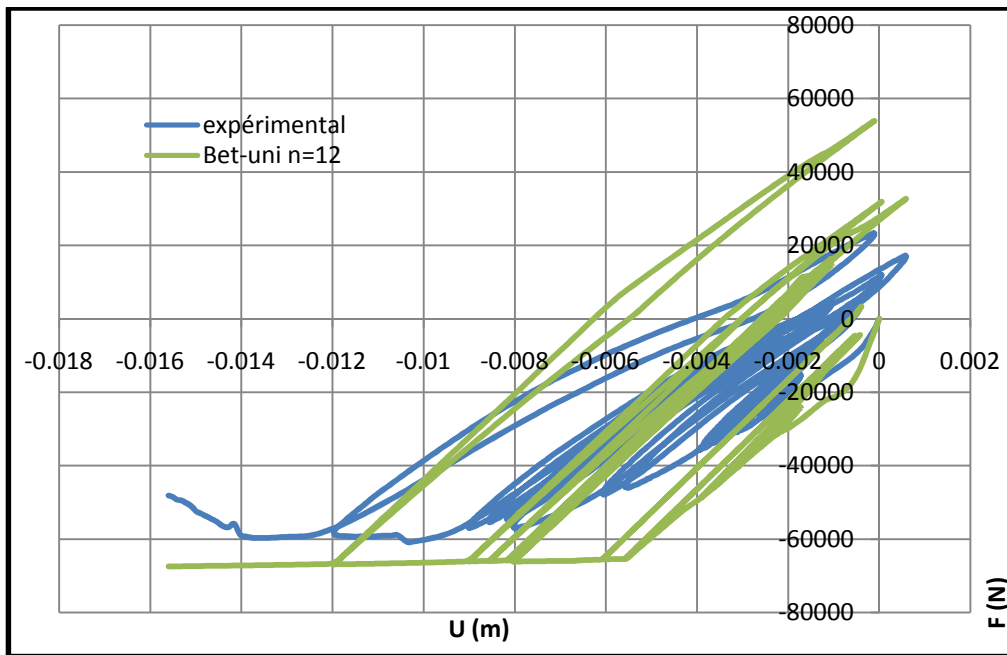


Figure 3.16 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=12$).

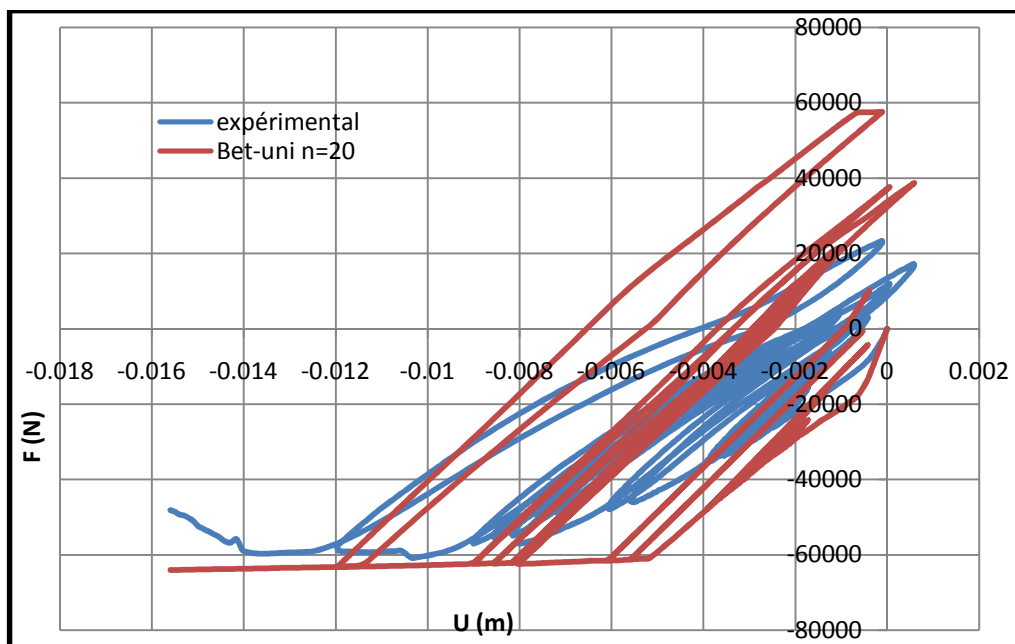


Figure 3.17 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=20$)

La simulation de la poutre 1 par le modèle béton_uni reproduit un effort supérieur à celui de l'expérimental et les décharges sont linéaires ce qui conduit à la plastification des armatures supérieures lors du dernier cycle.

N.B

On remarque que si on augmente le nombre de section en fibre ($n=20$), le comportement de béton est mieux estimé sauf que le travail du béton est surestimé.

3.3.2 Poutre 8

3.3.2.1 Modèle unilatéral pour le béton et élasto-plastique pour l'acier

Les remarques effectuées sur la poutre 1 sont également valables pour la poutre 8. L'effort ultime est surestimé si la poutre contient 12 sections en fibre, pour $n=20$, l'effort est correctement estimé.

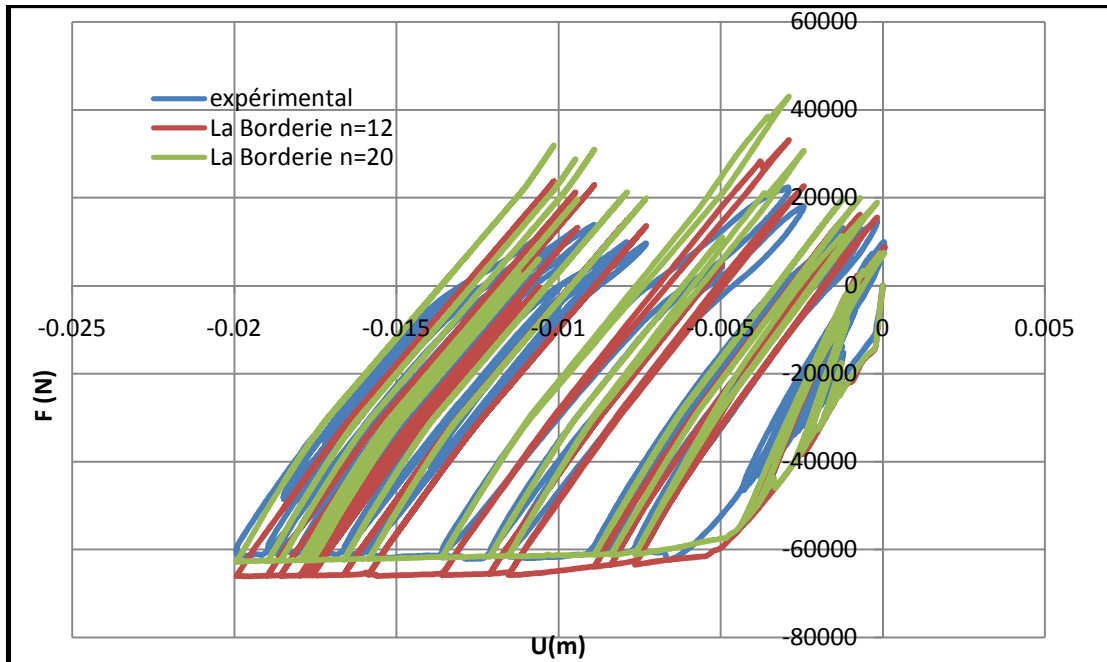


Figure 3.18 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.

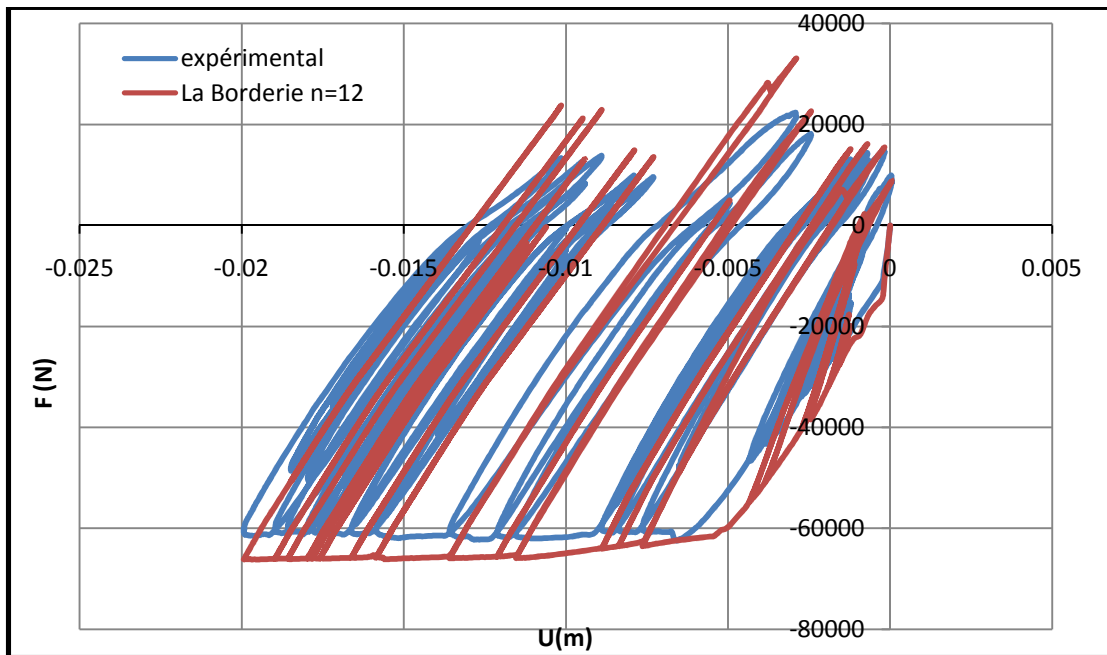


Figure 3.19 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=12$)

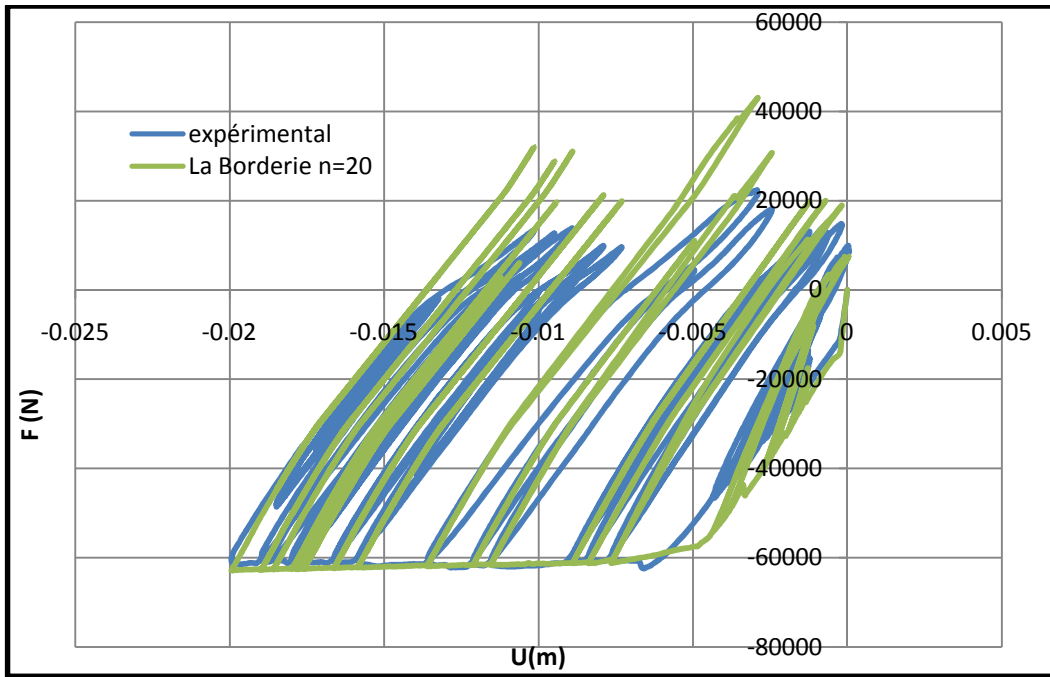


Figure 3.20 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=20$)

3.3.2.2 Modèle Béton_Uni pour le béton et élasto-plastique pour l'acier

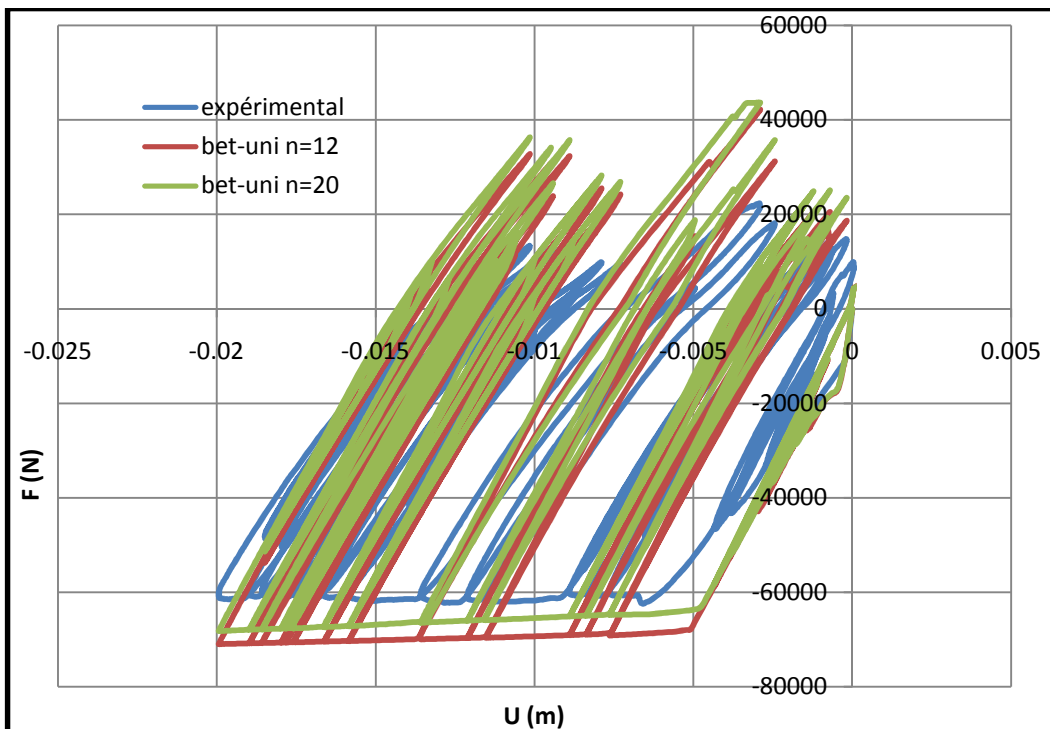


Figure 3.21 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec les différentes simulations.

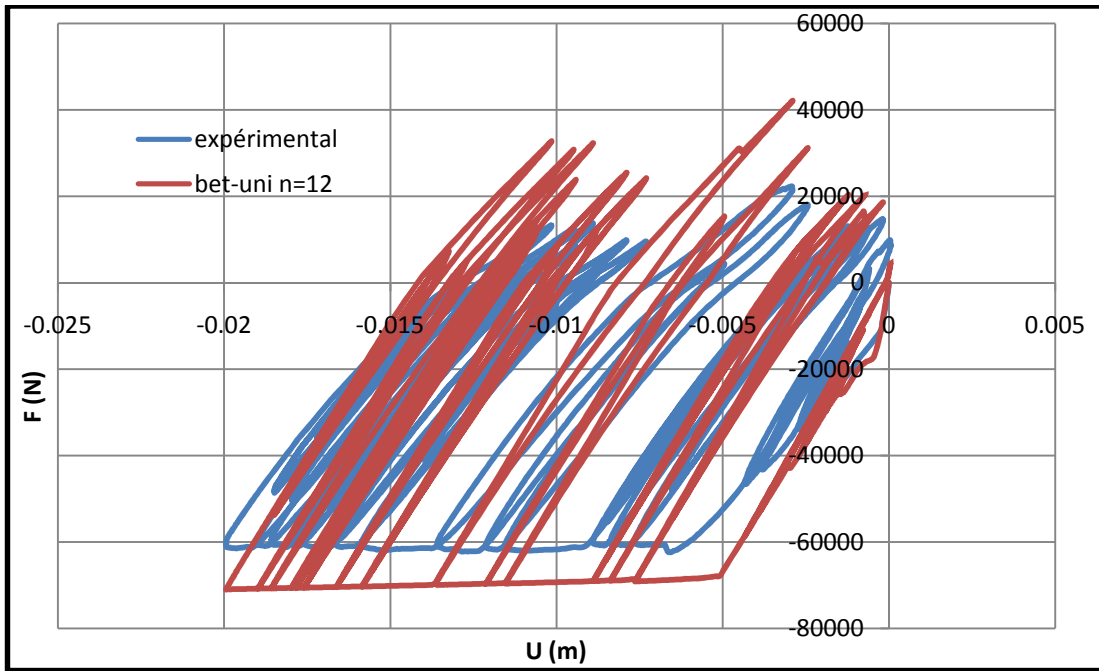


Figure 3.22 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=12$)

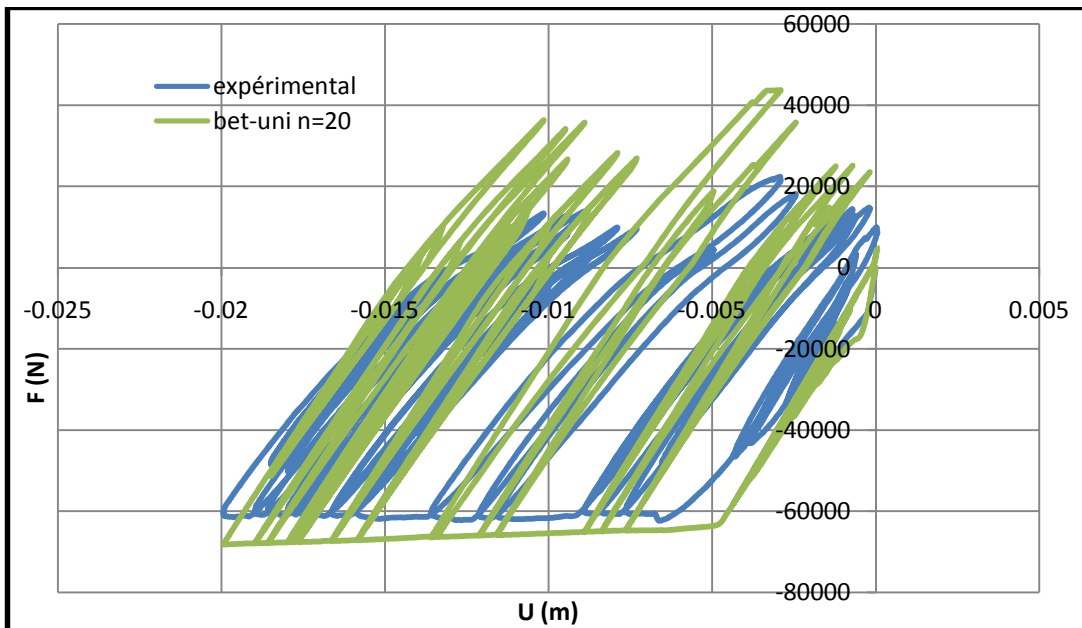


Figure 3.23 Comparaison de la réponse globale expérimentale avec la simulation (pour $n=20$).

On remarque aussi que la partie élastique est correctement reproduite. Néanmoins l'effort ultime est surestimé pour les deux niveaux de discrétisation, les décharges sont linéaires ce qui conduit à la plastification des armatures supérieures. La simulation pour $n=20$ donne des résultats meilleurs.

Afin de compléter les différents essais réalisés dans le cadre du Projet National CEOS.fr, d'autres essais complémentaires dans le cadre cyclique ont semblé obligatoire. Ainsi, la poutre LMT a été proposée en utilisant des corrélations numériques permettant d'apprécier les déformations subies par les corps d'épreuve au cours de l'application du chargement pour déterminer les fissures sur la poutre.

3.4 Poutre LMT

A partir des premiers résultats des poutres 1 et 8, on remarque que le modèle Unilatéral (La Borderie) reproduit mieux les réponses globales donc on a choisit pour la simulation de la poutre LMT, les paramètres du modèle qu'on a utilisés sont ceux proposés pour la poutre 1 et 8. Le ferrailage utilisé est de 2T12 dans la partie supérieure et inférieure avec un espacement de 15 cm. Le comportement des aciers est modélisé par la loi élasto-plastique et la loi Pinto-Menegotto.

Béton : de caractéristique ordinaire, des essais sur cylindre 16*32 ont donné des caractéristiques moyennes de $E = 28\ 000\ \text{MPa}$ pour le module d'Young pour une valeur moyenne de 35 MPa de résistance en compression.

Concernant les aciers, des essais en traction simple ont été effectués sur des échantillons de ces derniers permettant de mesure le module d'Young $E = 205\ 000\ \text{MPa}$ et une limite en traction de 600 MPa.

Le chargement appliqué sur la poutre est un déplacement imposé. Pour chaque niveau de chargement, trois trains de cycles sont imposés permettant de stabiliser la fissuration voir figure (3.11).

3.4.1 Traitement des résultats

La réponse globale est décomposée de neuf (09) cycles afin de faciliter la comparaison entre les différents cycles.

3.4.1.1 La réponse globale par le modèle unilatéral pour le béton et élasto-plastique pour l'acier

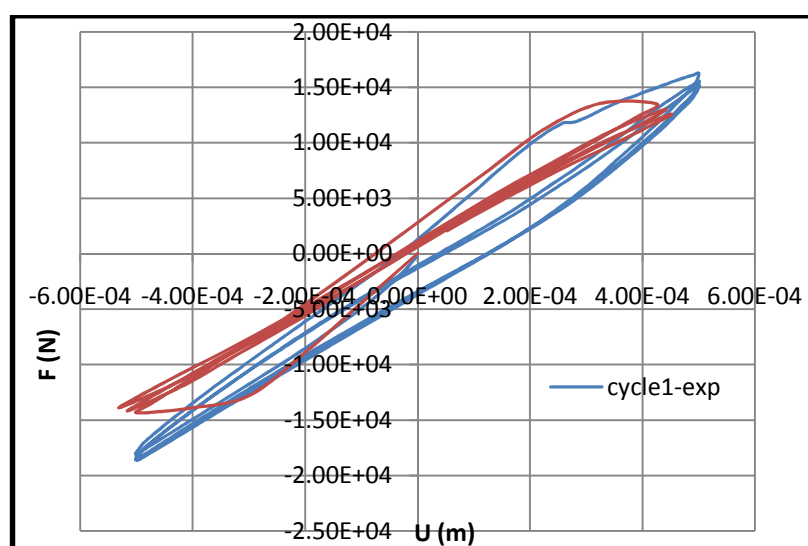


Figure 3.24 Cycle1

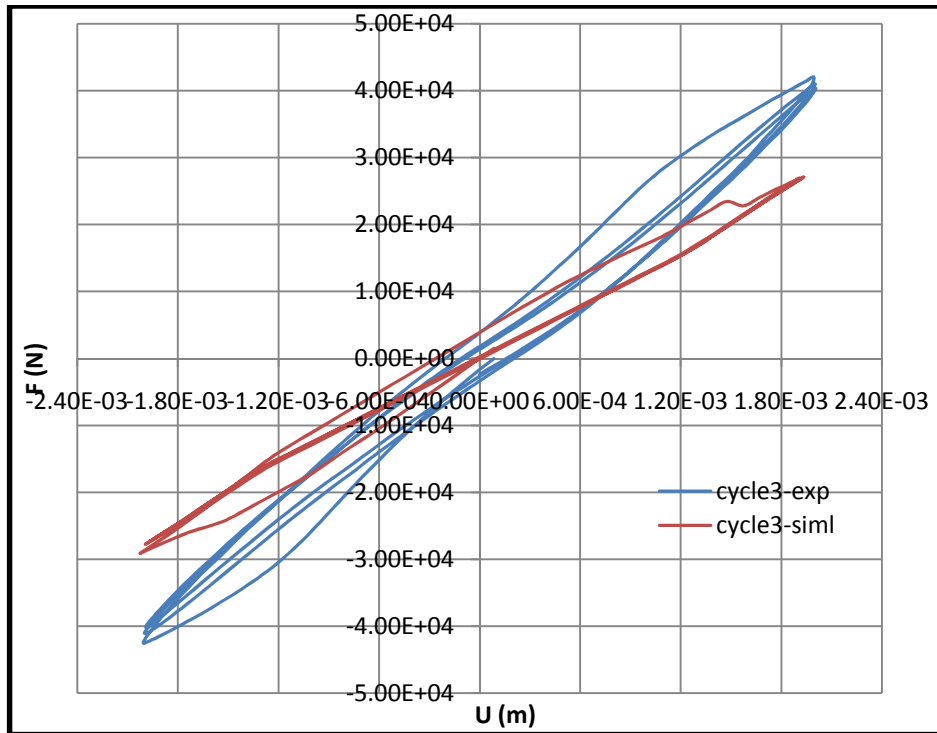


Figure3.25 Cycle3

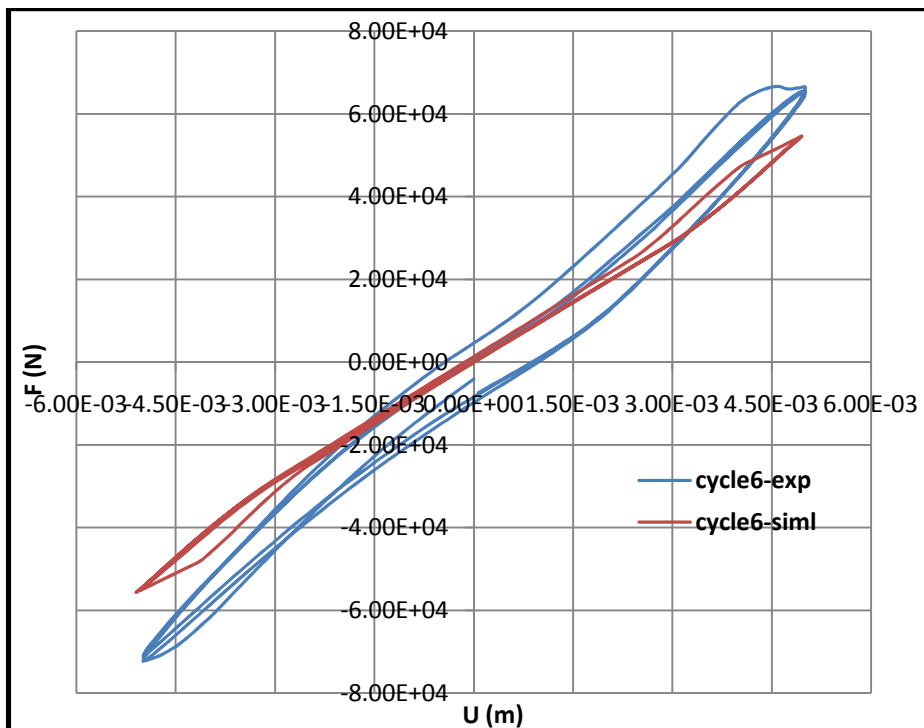


Figure3.26 Cycle 6.

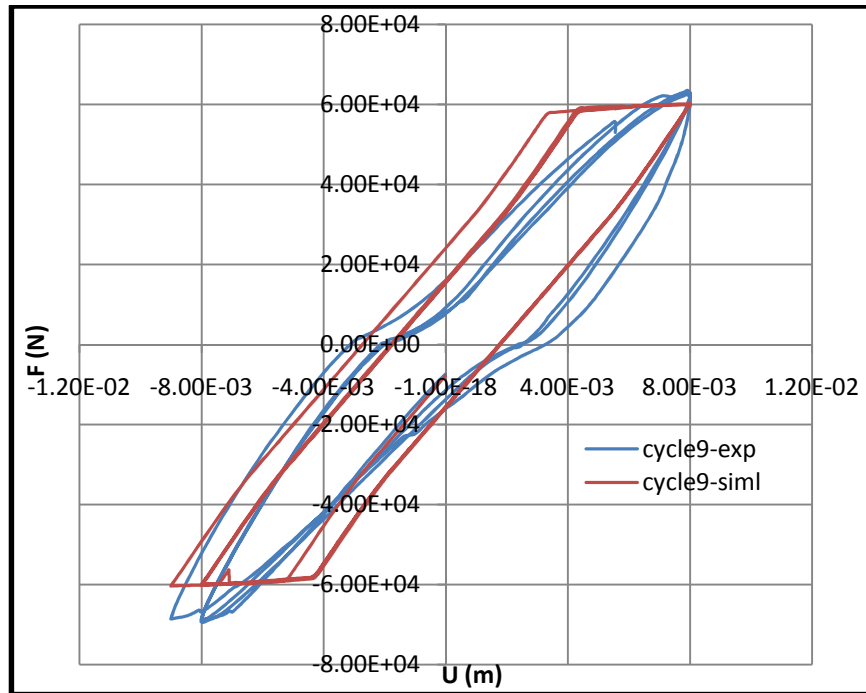


Figure 3.27 Cycle 9.

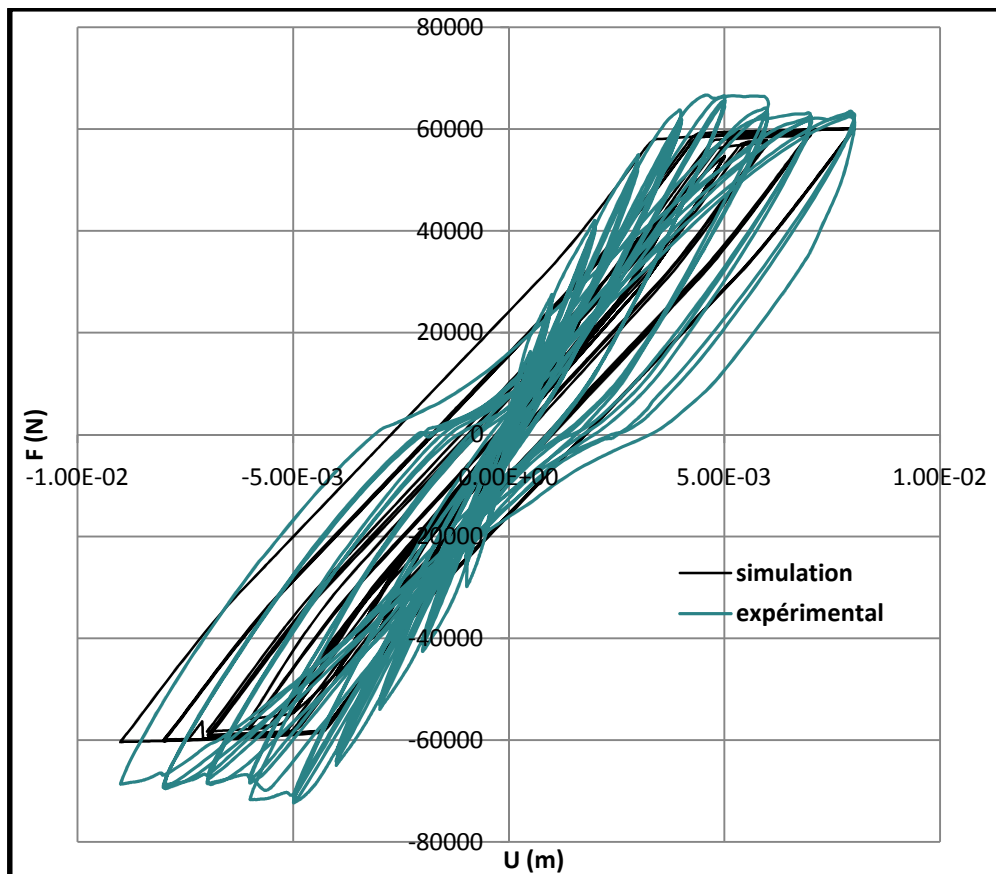


Figure 3.28 Comparaison entre la réponse expérimentale globale de la poutre et la réponse numérique (Modèle d'acier élasto-plastique).

Les résultats détaillés sont présentés dans un diagramme Force-Flèche des différents cycles réalisés. Les cycles ont été imposés à différents niveaux : +/- 0,5 mm, +/- 1mm, +/- 2 mm, +/- 3 mm, +/- 4 mm, +/- 5 mm, +/- 6 mm, +/- 7 mm et +/- 8 mm (figure 3.24-3.27)

La superposition des résultats expérimentaux et calculés montre que les efforts ultimes ont été bien estimés mais les résultats numériques montrent aussi que les cycles 3 et 6 dissipent légèrement, une fois il y a une plastification des aciers on remarque qu'il y a une dissipation d'énergie (voir cycle 9).

On peut noter que la diminution de la raideur globale augmente avec l'amplitude des cycles, signe d'une macro-fissuration ainsi que l'augmentation de l'énergie dissipée au sein de chacun des cycles simultanément à l'accroissement de la fissuration.

3.4.1.2 La réponse globale par le modèle unilatéral pour le béton et le modèle Pinto – Menegotto pour l'acier

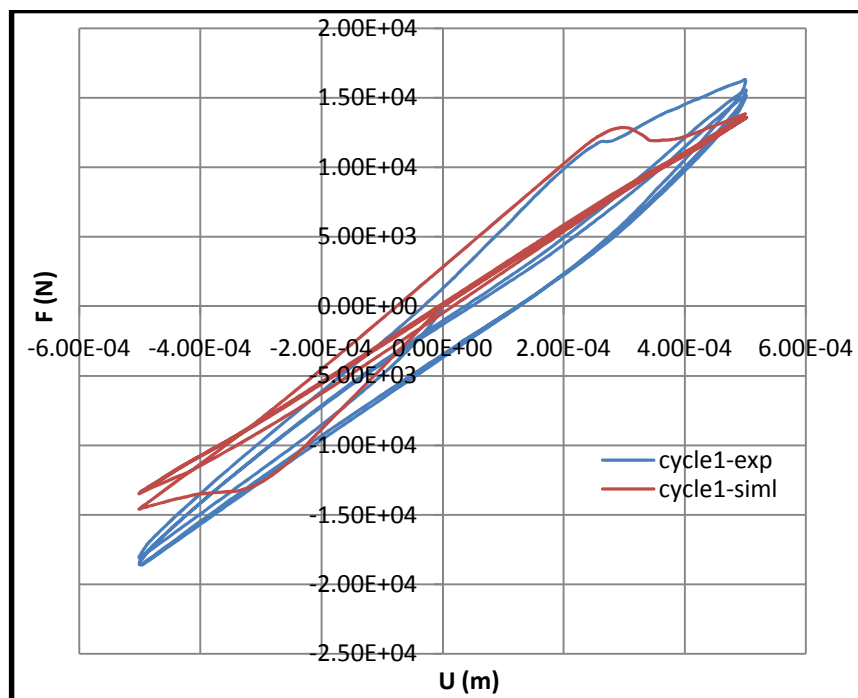


Figure 3.29 Cycle1

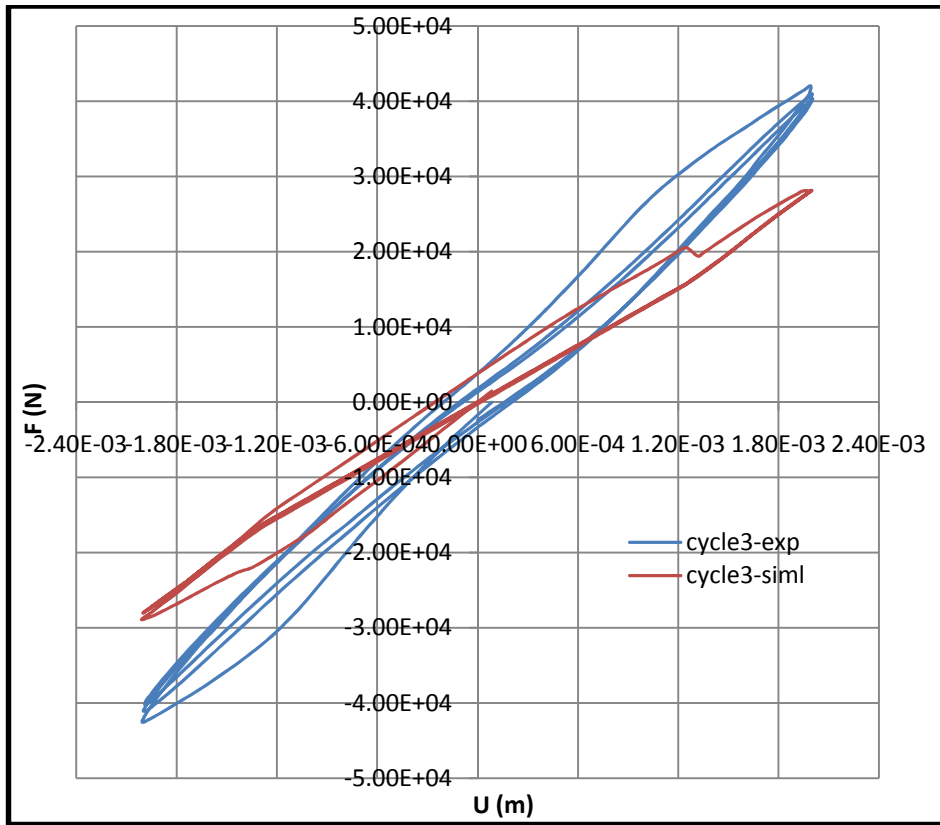


Figure 3.30 Cycle3

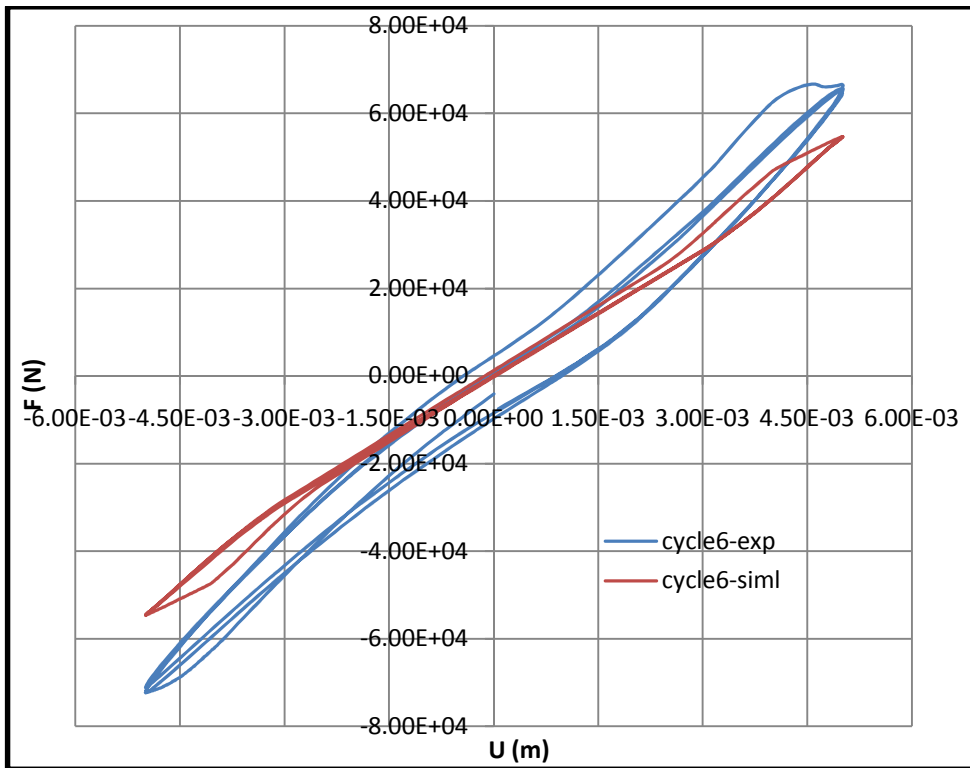


Figure 3.31 Cycle6

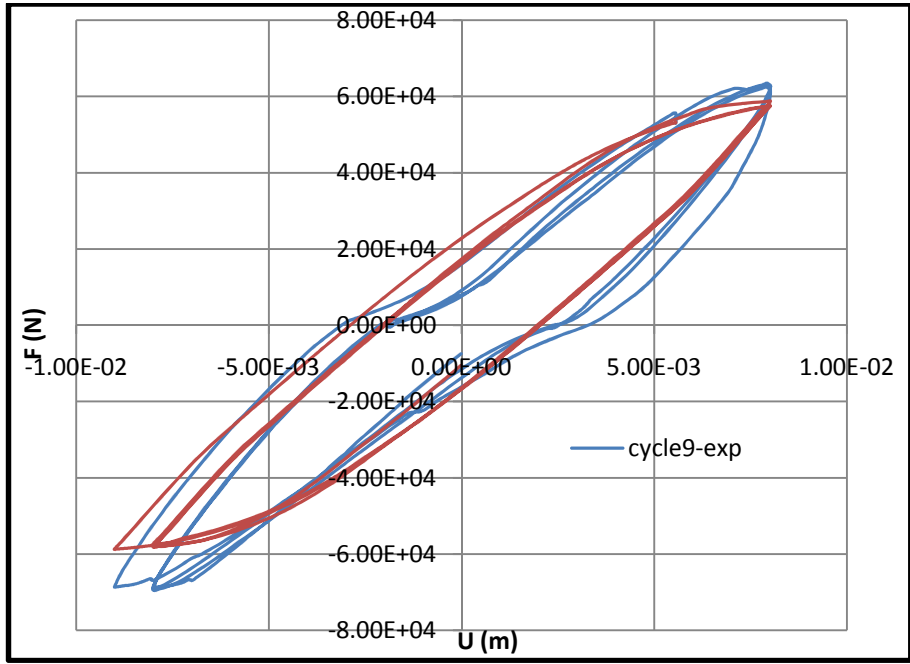


Figure 3.32 Cycle9.

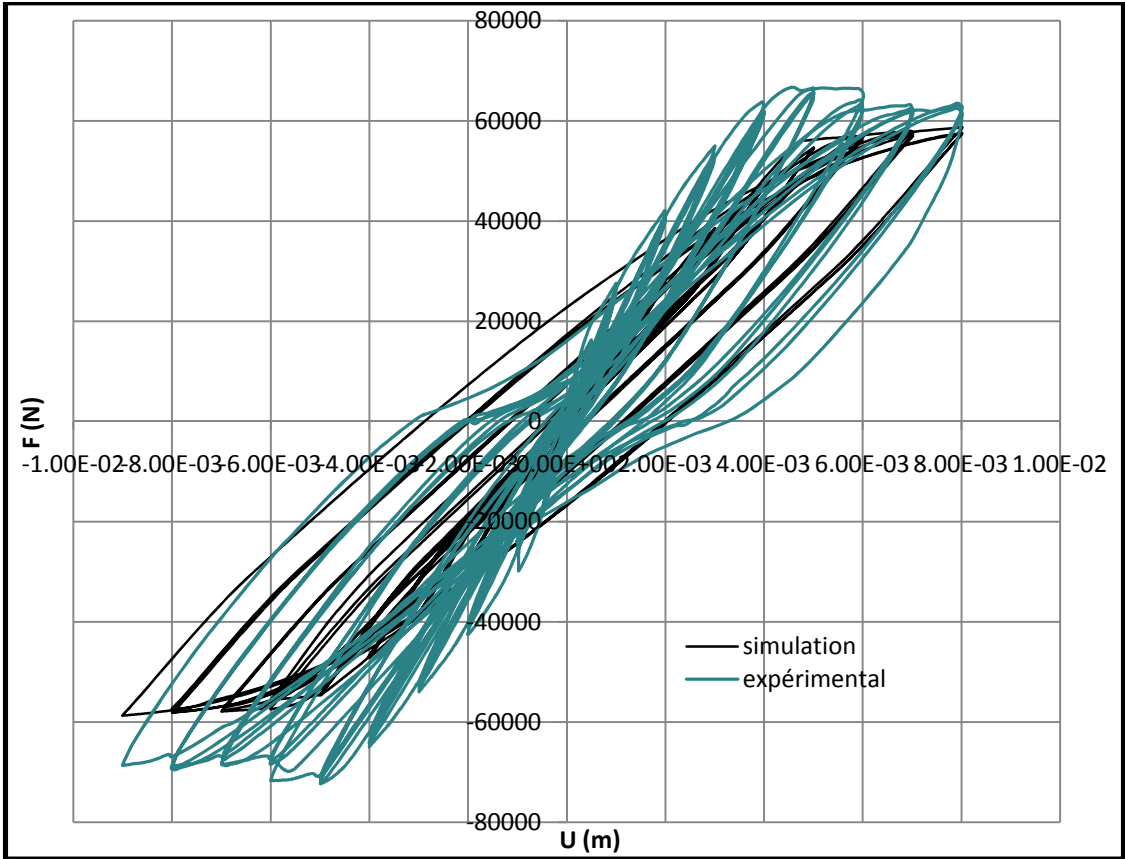


Figure 3.33 Comparaison entre la réponse expérimentale globale de la poutre et la réponse numérique (modèle d'acier Pinto – Menegotto).

On comparant les résultats de calculs numériques et les résultats expérimentaux pour les différents niveaux de chargement on remarque que les réponses globales de la poutre avec les deux différents modèles de comportement de l'acier sont identique pour les premiers cycles 1,3 et 6 sauf pour les derniers cycles (9) où le rôle du béton est désactivé (le béton est fortement endommagé), la courbe évolue en suivant le comportement des armatures longitudinales.

3.4.1.3 Evaluation de l'endommagement

Les figures suivantes présentent l'endommagement de traction au cours de chargement pour les trois différentes poutres en utilisant le modèle Unilatéral (La Borderie).

a. Poutre1

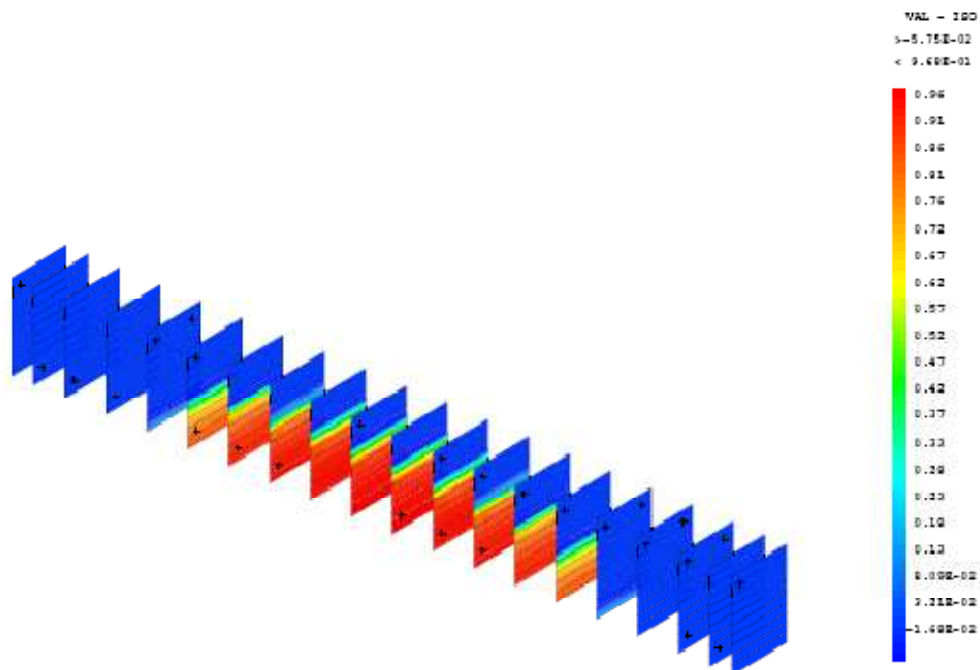


Figure 3.34 La carte d'endommagement d_1 pour un déplacement de 2mm.

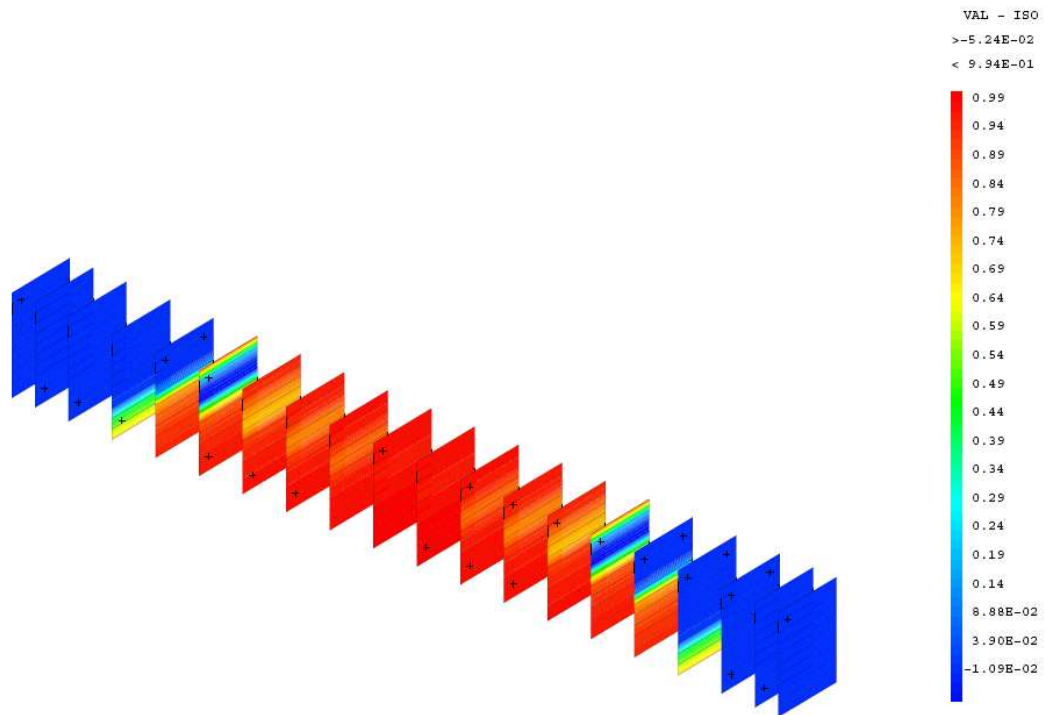


Figure 3.35 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 8mm.

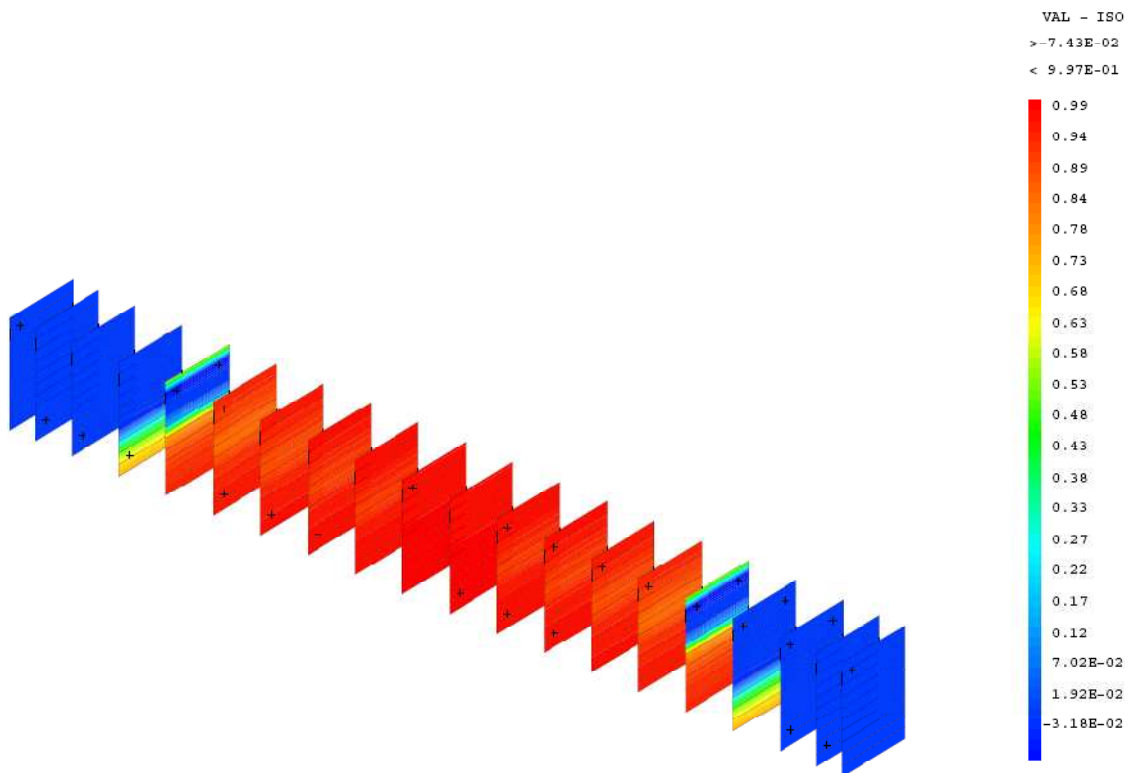


Figure 3.36 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 12mm.

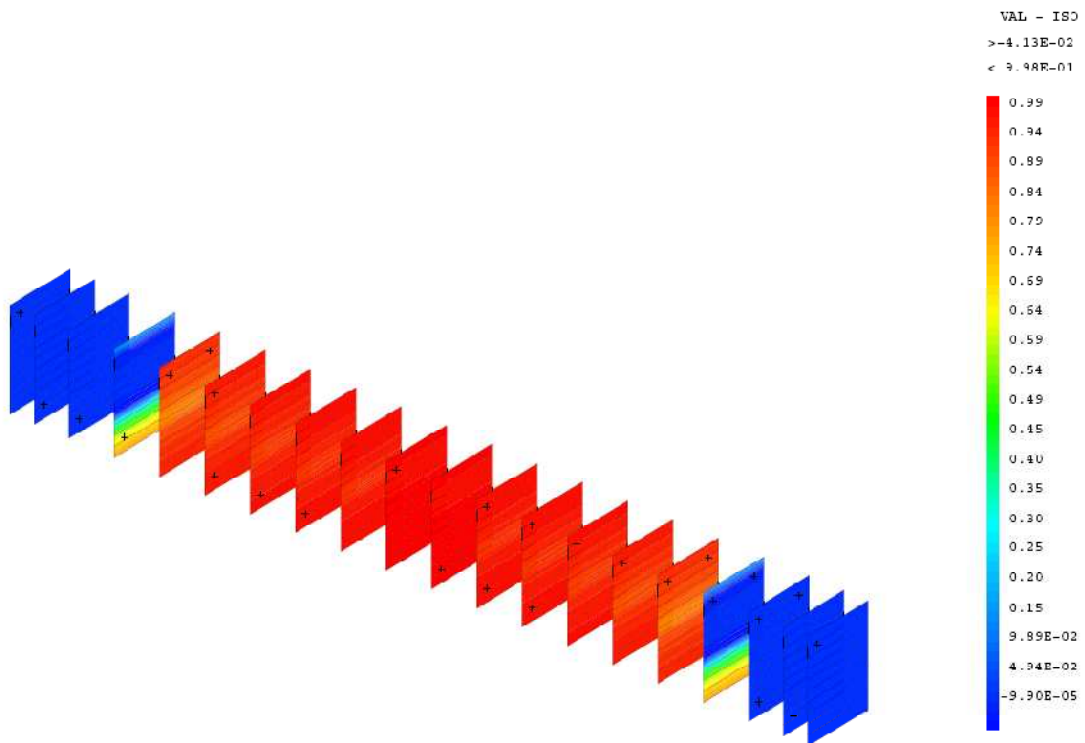


Figure 3.37 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 15mm.

b. Poutre 8

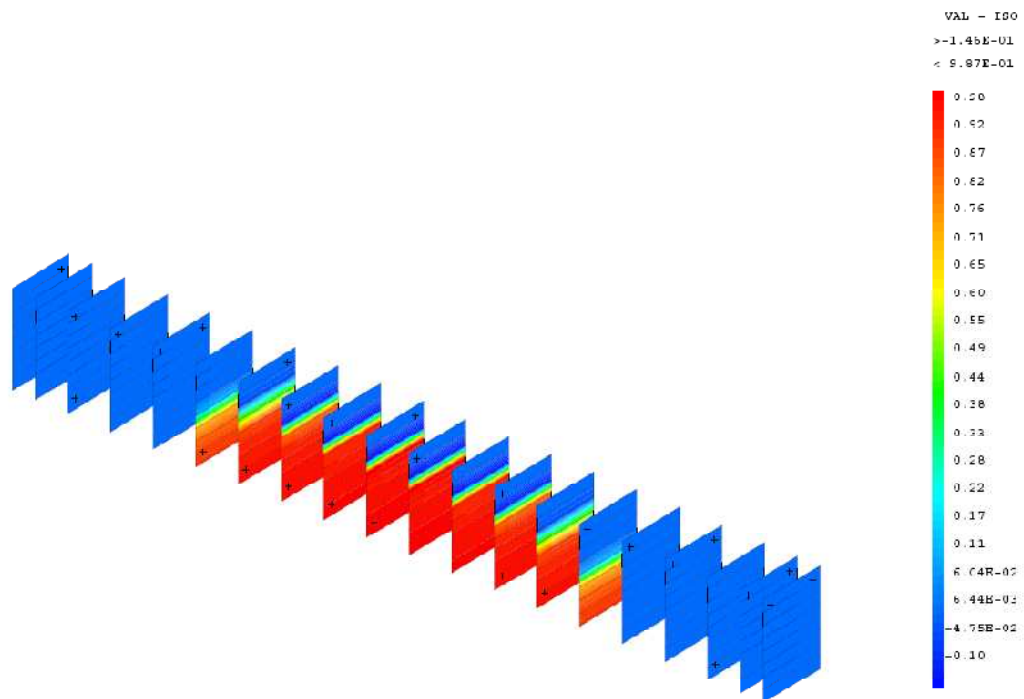


Figure 3.38 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 2mm.

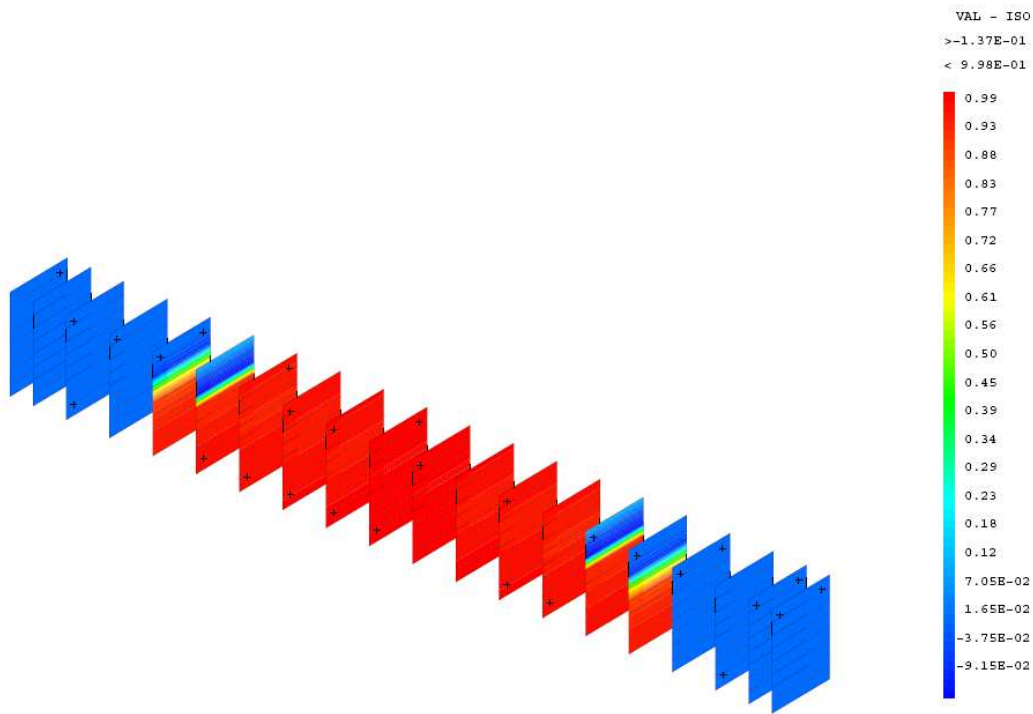


Figure 3.39 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement 8mm.

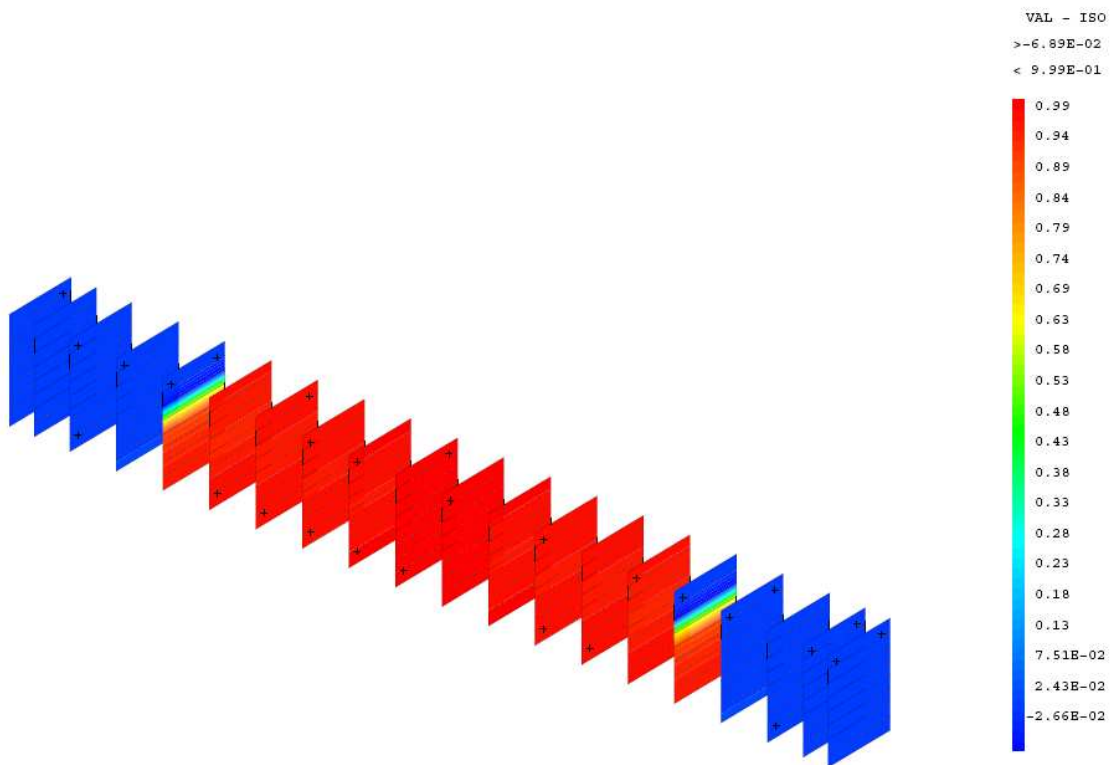


Figure 3.40 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 12mm.

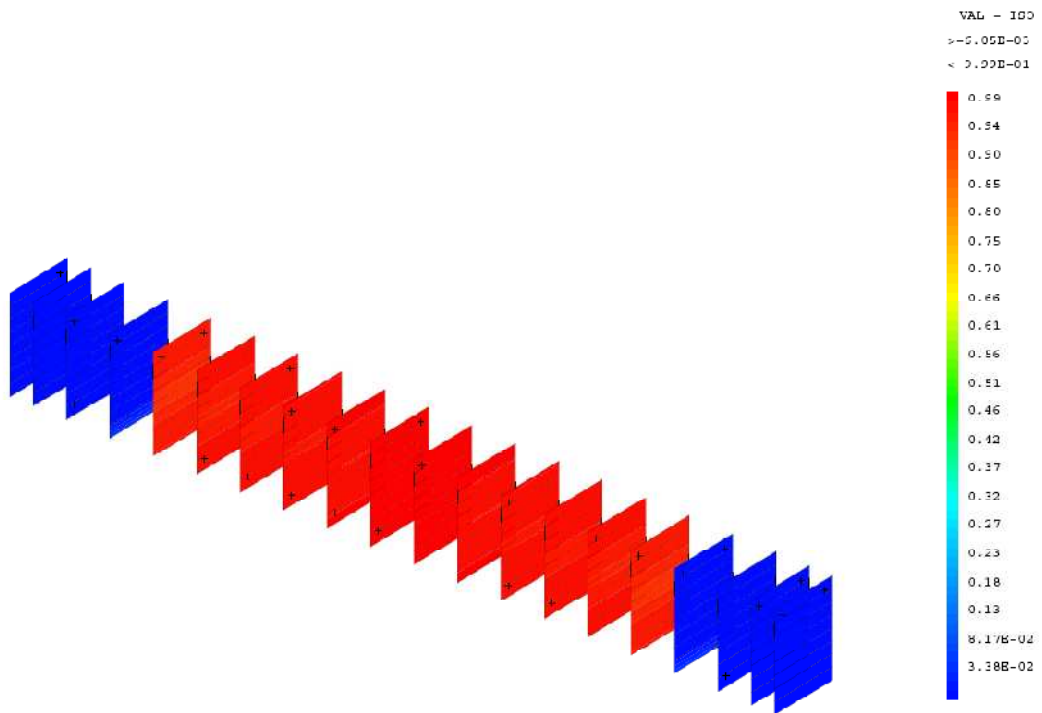


Figure 3.41 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 15mm.

c. Poutre LMT

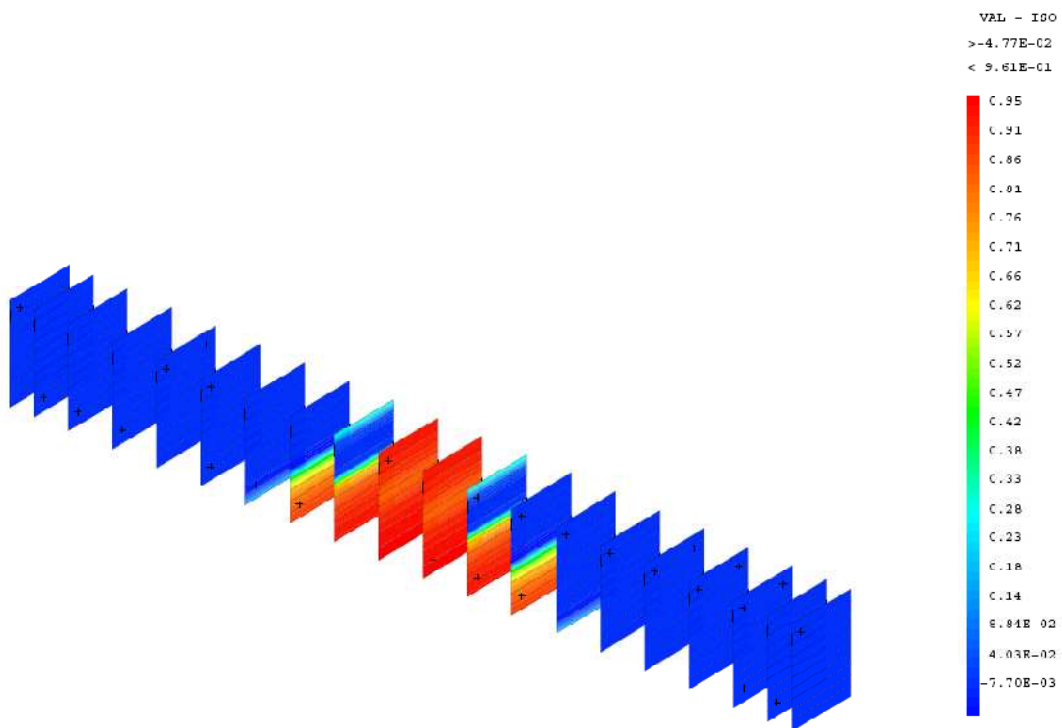


Figure 3.42 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 1mm.

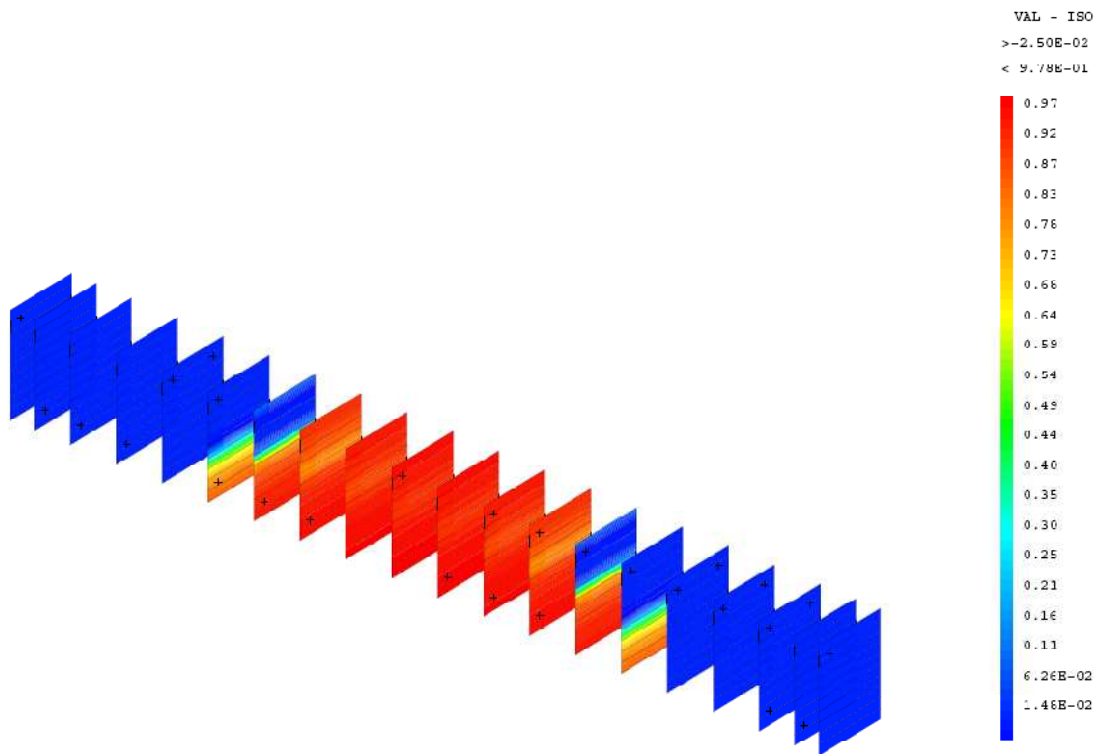


Figure 3.43 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 2mm.

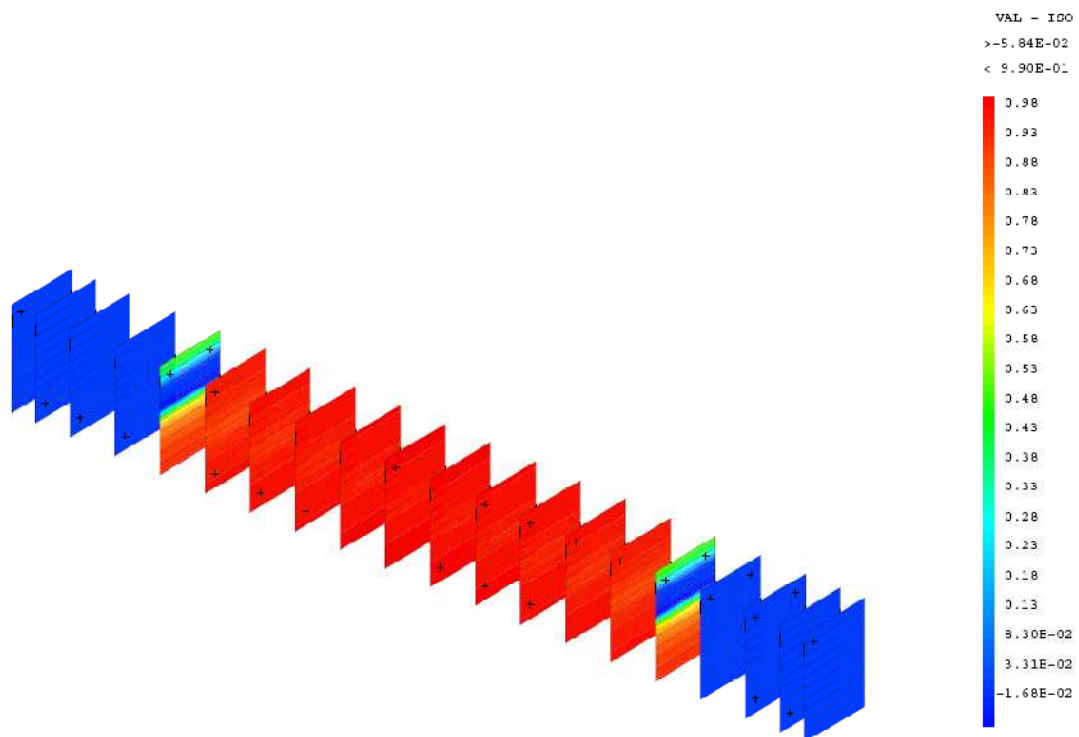


Figure 3.44 La carte d'endommagement d1 pour un déplacement de 4mm.

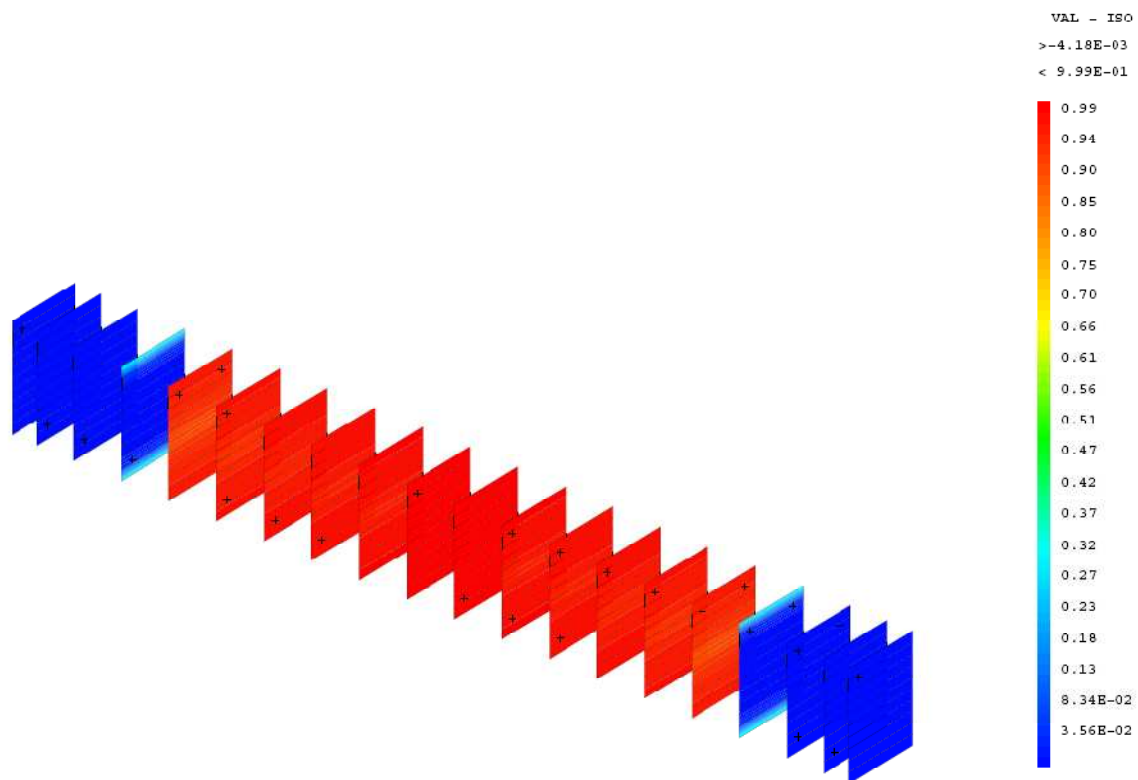


Figure 3.45 La carte d'endommagement $d1$ pour un déplacement de 8mm.

On remarque que l'endommagement évolue avec le chargement d'une manière significatif dans la partie centrale des poutres, on peut dire que le modèle est capable à prédire les zones d'endommagement critiques.

3.5 Conclusion

Les deux modèles (La Borderie et Béton_Uni) simulent correctement le comportement global des poutres jusqu'à la ruine, mais dans l'expérimentation ; la refermeture des fissures donne une courbe sous la forme de S, une caractéristique qu'on n'a pas pu reproduire par les modèles utilisés.

Afin d'améliorer les résultats expérimentaux, les essais sur la poutre LMT ont été effectués par des instruments de mesures de champs très développés, afin de déterminer les ouvertures de fissures le long du chargement. Dans ce présent chapitre les deux modèles utilisés (La Borderie et Béton_Uni) ne sont pas capables d'évaluer les ouvertures de fissures, c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4 Evaluation des ouvertures des fissures

4.1. Introduction

La modélisation numérique de l'amorçage et de la propagation de fissures est importante pour la sécurité et la durabilité des structures. Pour beaucoup des structures, la durabilité est non seulement liée au chargement mécanique mais à d'autres propriétés matérielles (par exemple les propriétés de transfert).

Les codes des structures en béton armé proposent des relations empiriques pour décrire les ouvertures de fissures sous chargement de service prenant en considération le type d'exposition environnemental. Les relations basées sur l'expérimentation sont applicables aux structures simples et ne peuvent pas être généralisées particulièrement quand la structure est exposée aux environnements agressifs.

Dans le chapitre précédent les modèles d'endommagement ont été incapables de reproduire la fissuration, seules les cartes d'endommagement sont accessibles. L'objectif de ce chapitre est de quantifier la fissuration, c'est-à-dire d'obtenir des informations concernant la position, l'ouverture et la direction des fissures induites par le chargement imposé. Pour cela on a proposé d'implémenter le modèle de "OUF" (M. Matallah 2006) sur Cast3m afin de réaliser des calculs en multifibre (3D) et évaluer les ouvertures de fissures par une approche semi globale.

4.2 Modèle de OUF « Ouverture Unitaire de Fissures » [5]

Ce modèle propose une formulation proche des modèles de la fissuration diffuse (Rashid, 1968; Deborst et al, 1985; Bazant et al, 1983) [5], il introduit la notion d'ouverture de fissure. Les conséquences des ouvertures des microfissures sur le champ de déformation sont modélisées par un tenseur symétrique d'ouverture de fissure ϵ_{ouf} . Le champ des déplacements dû à l'ouverture des fissures reste compatible avec la variable tensorielle ϵ_{ouf} .

Le modèle est basé sur la mécanique de l'endommagement et la thermodynamique des processus irréversibles. On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'états, ce potentiel doit être convexe par rapport aux variables d'état choisies [5].

$$\forall \epsilon_{kl}^{an}, \forall D, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - D S \epsilon_{kl}^{an}) \quad (4.1)$$

S : indicateur d'ouverture de fissure.

Si : S=1 Fissure complètement ouverte.

$$\epsilon_{kl}^{ouf} = S \epsilon_{kl}^{an} = \epsilon_{kl}^{an} \quad (4.2)$$

Si : S=0 Fissure complètement fermée.

$$\epsilon_{kl}^{ouf} = S \epsilon_{kl}^{an} = 0 \quad (4.3)$$

D : La variable scalaire d'endommagement.

La forme du potentiel énergie libre spécifique de Helmholtz Ψ est donnée sous la forme suivante:

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl} : (\epsilon_{kl} - D \epsilon_{kl}^{ouf}) : (\epsilon_{kl} - D \epsilon_{kl}^{ouf}) + f(p) \quad (4.4)$$

ρ : Masse volumique ; Ψ : Potentiel d'état.

C_{ijkl} : Tenseur d'élasticité du matériau vierge.

ϵ_{ij} : Tenseur d'ordre 2 de déformation totale; ϵ_{ij}^{an} : Tenseur de déformation anélastique.

ϵ_{ij}^{ouf} : Tenseur d'ouverture de fissures.

p : Variable interne représentant l'état d'écrouissage (déformation anélastique cumulée).

Les variables forces thermodynamique associées aux variables d'état sont données par :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad (4.5)$$

$$\sigma_f = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ouf}} = -D C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad (4.6)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = -\varepsilon_{kl}^{ouf} : C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad (4.7)$$

Les forces d'érouissage et leurs variables associées sont liées par une loi exponentielle :

$$R_i = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} = (a_i p_i + f_i^0) * \exp(-b_i p_i) - f_i^0 \quad (4.8)$$

Le paramètre (a) pilote le comportement avant pic (érouissage positif). Le comportement en traction est supposé linéaire jusqu'au pic $a=0$.

La convexité du potentiel thermodynamique par rapport à la déformation est toujours assurée :

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_k} = C_{ijkl} \geq 0 \quad (4.9)$$

Le critère de rupture proposé est un critère de rupture multi-surfaces formé de deux critères de Drucker Prager, l'un pour modéliser la traction et l'autre pour la compression.

L'écoulement anélastique est séparé (mathématiquement) de l'endommagement. La fonction de charge est exprimée en terme de contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ tel que :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - D \varepsilon_{kl}^{ouf}) - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{ouf} (1 - D) \quad (4.10)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad (4.11)$$

Le critère de traction s'écrit:

$$F_t = \alpha_t J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_t I_1(\tilde{\sigma}) - R_t - Knst_t \quad (4.12)$$

J_2 : est le deuxième invariant du tenseur de contraintes déviatoriques.

I_1 : est le premier invariant du tenseur de contraintes.

R_t : est l'érouissage de traction.

$Knst_t$: limite élastique en traction.

Le critère de compression s'écrit:

$$F_c = \alpha_c J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_c I_1(\tilde{\sigma}) - R_c - Knst_c \quad (4.13)$$

R_c , $Knst_c$: sont respectivement la fonction d'érouissage de compression et la limite élastique en compression.

Les paramètres α_t , β_t , α_c , β_c sont identifiés de manière à obtenir une surface seuil proche de celle donnée par l'expérimentation (figure 4.1).

Les lois d'évolution des variables internes sont données par la règle de normalité

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.14)$$

Pour décrire le comportement en traction et de garder le caractère associé du modèle en compression on propose une loi non associée, les potentiels anélastiques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} g_t = \alpha_g J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_g I_1(\tilde{\sigma}) - R_t - Knst_t \\ g_c = F_c \end{cases} \quad (4.15)$$

A l'intersection des deux surfaces de charge, l'ambiguïté sur la direction de l'écoulement anélastique est levée par la proposition de Koiter qui considère cette contribution conformément à l'écriture suivante :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = \dot{\lambda}_t \left\{ \frac{\partial g_t}{\partial \sigma_{ij}} \right\} + \dot{\lambda}_c \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (4.16)$$

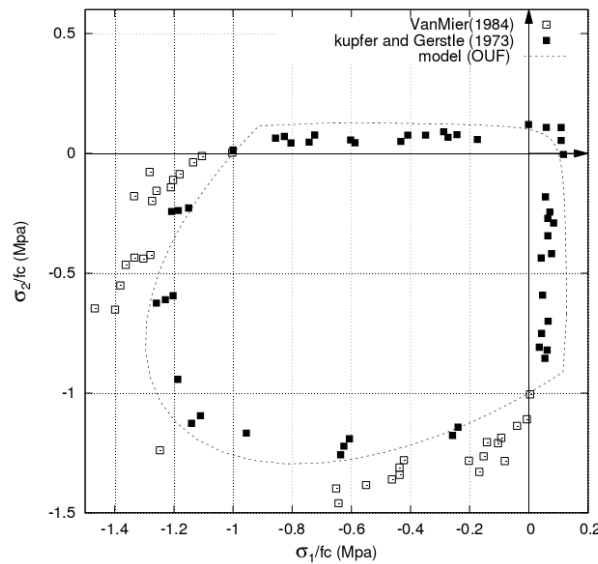


Figure 4.1 Surface de rupture dans le plan (σ_1, σ_2)

$$\varepsilon^{ouf} = \varepsilon_t^{ouf} + \varepsilon_c^{ouf} \quad (4.17)$$

Où $\dot{\lambda}_t, \dot{\lambda}_c$ représentent respectivement les multiplicateurs anélastiques en traction et en compression.

La prise en compte du caractère unilatéral est facile grâce à la nouvelle formulation proposée. La fonction S citée dans l'introduction permet d'annuler progressivement les déformations anélastiques créées en traction quand le matériau est soumis à un chargement de compression. La variable ε^{ouf} s'écrit:

$$\varepsilon^{ouf} = S \varepsilon_t^{an} + \varepsilon_c^{an} \quad (4.18)$$

La fonction S est donnée par :

$$S = 1 - \frac{f_t(\tilde{\sigma}, R)}{f_t(\sigma_f, R)} \quad (4.19)$$

σ_f : représente la contrainte au point de restauration de la raideur (donnée expérimentale).

La loi d'évolution d'endommagement :

$$D = 1 - \exp(-\xi \cdot p) \quad (4.20)$$

ξ : Paramètre intrinsèque du matériau à identifier.

L'introduction de la variable "OUF" nous a permis d'écartier les méthodes classiques de séparation de tenseurs de contraintes ou de déformations pour la prise en compte de l'effet unilatéral qui provoque des discontinuités dans la réponse contraintes-déformations [5].

4.3 Ecriture uni-axiale du modèle [5]

Afin d'implémenter le modèle en multifibre dans cast3m seule l'écriture uni-axial est nécessaire. En uni-axiale le modèle s'écrit :

$$\forall \varepsilon^{an}, \forall D, \quad \sigma = E(\varepsilon - DS\varepsilon^{an}) \quad (4.21)$$

S : indicateur d'ouverture de fissure.

Si : S=1 Fissure complètement ouverte.

$$\varepsilon^{ouf} = S\varepsilon^{an} = \varepsilon^{an} \quad (4.22)$$

Si : S=0 Fissure complètement fermée.

$$\varepsilon^{ouf} = S\varepsilon^{an} = 0 \quad (4.23)$$

Si : S=1, la contrainte effective est de la forme suivante :

$$\tilde{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon^{an}) = E(\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) \quad (4.24)$$

Dans le cas uni-axiale le choix de l'écrouissage est isotrope la fonction de charge s'écrit de la manière suivante :

$$F = \tilde{\sigma} - R - K_{nst} \quad (4.25)$$

$$R = R_{\infty} * [1 - \exp(-b * p)] \quad (4.26)$$

R_{∞} : La valeur d'écrouissage limite.

b : Paramètre à identifier.

Les lois d'évolution :

$$\dot{\varepsilon}^{ouf} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.27)$$

$$\dot{p} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (4.28)$$

$$D = 1 - \exp(-\xi \cdot p) \quad (4.29)$$

4.4 Implémentation numérique du modèle sur Cast3M [5]

La loi de comportement représente un point clé dans le processus de résolution, l'étape locale d'intégration précise et conditionne d'une manière significative la robustesse de la méthode de résolution.

L'algorithme utilisé pour l'intégration est connu sous le nom de "GCP" Generalized Cutting Plane Algorithm (Méthode du plan sécant). Il calcul les variables internes de la loi de

comportement au temps t_{n+1} connaissant l'état initial au temps t_n en utilisant des développements limités effectués sur les fonctions critères intervenant dans la modélisation du matériau. Comme pour les méthodes de type Newton, une initialisation élastique est effectuée (violation du critère de rupture $f_i > 0$). Les corrections sur les variables internes sont effectuées à déformation constante pour les problèmes à déformations imposées ou à contraintes constantes pour les problèmes à contrainte imposée (*elastic predictor-anelastic corrector*).

Comme on l'a vu précédemment, l'endommagement est calculé à partir des déformations anélastiques. L'écoulement anélastique intervient sans endommagement. A chaque itération, les variables du modèle sont corrigées. Les corrections anélastiques apportées aux déformations sont calculées au travers la déformation des multiplicateurs anélastiques à endommagement fixé.

Le processus de calcul est réitéré jusqu'à la convergence (respect du retour sur la surface seuil $f_i \approx 0$) figure 4.2. L'algorithme est en effet transformé en un problème d'optimisation gouverné par les conditions de Kuhn-Tucker.

Dans le cas d'un critère multi-surfaces, on écrit :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad F_i \leq 0 \quad \dot{\lambda} F_i = 0 \quad (4.26)$$

L'algorithme est traduit par une séquence d'approximations :

$$\Delta \lambda_i^{(n,k+1)} = \Delta \lambda_i^{(n,k)} + \delta \lambda_i \quad (4.27)$$

$$\sigma^{(n,k+1)} = \sigma^{(n,k)} - \sum_{i=1}^N \delta \lambda_i C_e \frac{\partial g_i^{(n,k)}}{\partial \sigma} \quad (4.28)$$

La valeur du multiplicateur anélastique λ_i est déterminée à partir d'un développement limité d'ordre 1 de l'équation $f_i = 0$:

$$f_i^{(n,k+1)} = f_i^{(n,k)} + \frac{\partial f_i^{(n,k)}}{\partial \sigma} \partial \sigma + \frac{\partial f_i^{(n,k)}}{\partial \lambda_i} \partial \lambda_i = 0 \quad (4.29)$$

Géométriquement, l'algorithme consiste à déterminer le point d'intersection de la surface de charge (ou potentiel plastique dans le cas de la théorie non associée) et la ligne définie par $(\sigma^{(n,k+1)} - \sigma^{(n,k)})$ dans la direction de l'écoulement anélastique au point $\sigma^{(n,k)}$.

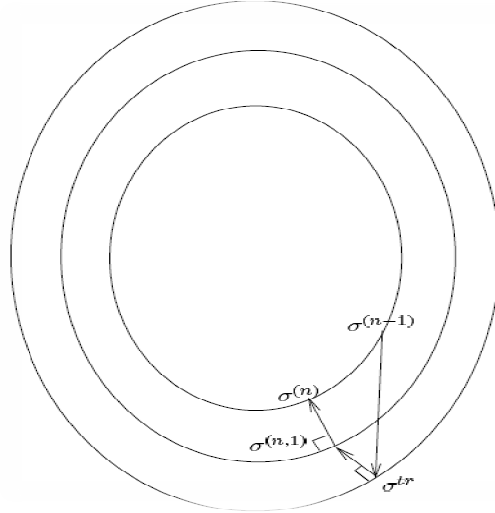


Figure 4.2 Schéma de "GCP" (Cas d'une seule fonction de charge).

La première étape consiste en une prédiction élastique des déformations :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{i+1} = \tilde{\sigma}_i + C : \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (4.30)$$

Les valeurs des fonctions de charges sont remises à jour. Selon le nombre de critères actifs ($f_i > 0$), différents cas existent. Nous allons décrire pour chacun la méthode de résolution employée.

4.4.1 Critère de traction actif ($f_t > 0$)

Prédiction élastique :

$$\dot{\tilde{\sigma}} = -C : \varepsilon^e \quad (4.31)$$

Les corrections anélastiques sont calculées à déformation constante :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 0 \\ \dot{\tilde{\sigma}} = -C : \dot{\varepsilon}_t^{ouf} \\ \dot{\varepsilon}^{ouf} = \lambda \frac{\partial g_t}{\partial \tilde{\sigma}} \end{cases} \quad (4.32)$$

L'expression du multiplicateur anélastique est obtenue en linéarisant la fonction seuil par rapport aux variables internes et en imposant le respect du critère de convergence à l'itération (i+1) :

$$\begin{cases} \dot{F}_t = F_t^{i+1} - F_t^i = \frac{\partial F_t}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\sigma}} + \frac{\partial F_t}{\partial R_t} \dot{R}_t \\ F_t^{i+1} \approx 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

On a :

$$\frac{\partial F_t}{\partial R_t} = \frac{\partial F_t}{\partial R_t} \frac{\partial R_t}{\partial \lambda_t} \partial \lambda_t \quad (4.34)$$

L'expression du multiplicateur anélastique est donnée par la relation :

$$\lambda_t = \frac{-F_t^i}{-\frac{\partial F_t^i}{\partial \tilde{\sigma}} : C : \frac{\partial g_t}{\partial \tilde{\sigma}} - \frac{\partial R_t}{\partial \lambda_t}} \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{ouf} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial g_t}{\partial \tilde{\sigma}} \\ \dot{P}_t = \dot{\lambda}_t \\ \sigma^{i+1} = \sigma^i - C : \dot{\varepsilon}_t^{ouf} \\ R_{i+1} = R_i + \dot{R} \end{cases} \quad (4.36)$$

Les itérations se poursuivent jusqu'à la vérification du critère de convergence $f_t \approx 0$. L'endommagement est par la suite calculé par la formule :

$$D = 1 - \exp(-\xi \cdot p_t) \quad (4.37)$$

Le tenseur de contrainte final est donné par :

$$\sigma = E(\varepsilon - D\varepsilon^{ouf}) \quad (4.38)$$

4.5 L'évaluation des ouvertures de fissures OUVFISS [26]

Une approche de modélisation continue basée sur la mécanique d'endommagement est employée pour calculer les ouvertures de fissure dans une structure en béton. M. Matallah et al [26] ont proposés une méthode de post traitement pour extraire les ouvertures de fissure à partir d'un calcul d'endommagement continu en éléments finis. Cette méthode peut être appliquée à tous les modèles continus d'endommagement ou/et plasticité.

On suppose que la fissure se localise dans une bande de largeur h sur laquelle, on considère que les microfissures sont uniformément distribuées.

La dissipation de l'énergie est constante, et donnée par la formule suivante :

$$G_f = \int_0^\infty \sigma d\delta \quad (4.30)$$

$d\delta$: Le saut de déplacement.

Le tenseur de déplacement au niveau de la fissure est calculé comme étant le produit de la déformation de rupture ε_{ij}^{ouf} et la largeur de la bande h .

$$\delta_{ij} = h * \varepsilon_{ij}^{ouf} \quad (4.31)$$

Dans la zone de rupture, la déformation totale contient la partie élastique et une partie de rupture. L'énergie de rupture représente la surface sous la courbe contrainte de déformation.

On considère que dans chaque élément il y a une fissure, la déformation de rupture totale est sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{ouf} \quad (4.32)$$

Lors d'un calcul par élément fini, on peut estimer les déformations des ouvertures de fissures à partir des contraintes anélastiques.

$$\sigma_{ij}^{in} = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij} \quad (4.33)$$

Les contraintes effectives sont calculées à partir des déformations élastiques :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.34)$$

La déformation d'ouverture de fissure est donnée par :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij}^{in} \quad (4.35)$$

L'ouverture normale à la direction de la fissure δ_n est donnée par :

$$\delta_n = n_i \delta_{ij} n_j \quad (4.36)$$

Avec δ_{ij} : Le tenseur de déplacement au niveau de la fissure.

L'ouverture des fissures est calculé on considère que chaque élément est traversé par une seule fissure, la valeur moyen du déplacement est :

$$\delta_n = \int_{element} \varepsilon_n^{ouf} dn = \int_{element} n_i \varepsilon_{ij}^{ouf} n_j dn \quad (4.37)$$

n : la direction normale à la fissure.

4.6 Application de l'énergie de fissuration sur le modèle

Pour régulariser le modèle, une approche énergétique a été proposée afin d'éviter le problème de dépendance au maillage, la méthode appliquée est "Crack band model" où les champs des déformations et des contraintes sont continus la zone de localisation est représentée par une bande de largeur l_c . L'énergie de fissuration est donnée par l'équation suivante :

$$G_f = l_c \int_0^\infty \sigma d\varepsilon^{ouf} \quad (4.38)$$

Pour plus de simplicité, l'équation d'écrouissage isotrope en cas de traction est sous la forme linéaire, et de garder la forme exponentielle en compression, supposons que R s'écrit :

$$R = \frac{-f_t}{\varepsilon_r} \cdot P \quad (4.39)$$

Où P est la déformation anélastique équivalente et ε_r est la déformation à la rupture.

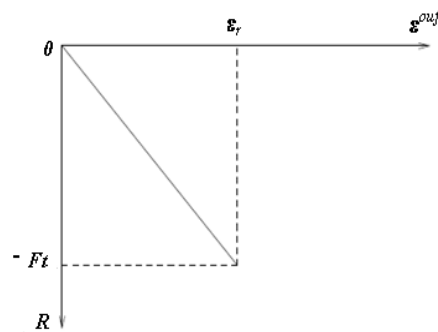


Figure 4.2 Ecrouissage isotrope

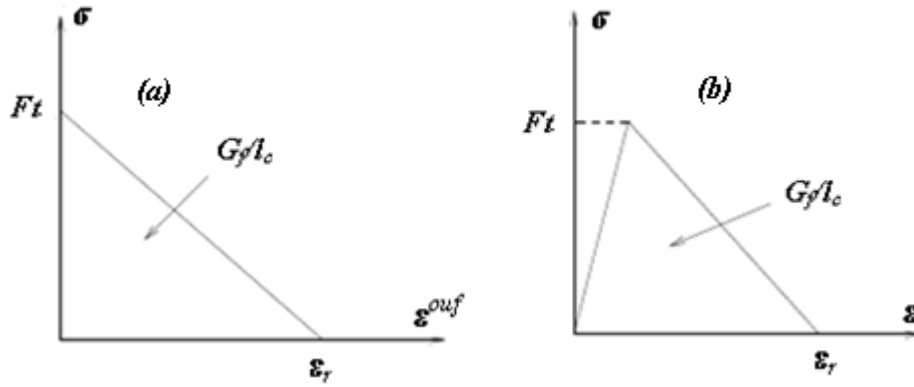


Figure 4.3 Energie de fissuration en traction

Dans le cas uni-axial R s'écrit

$$R = \frac{-f_t}{\varepsilon_r} \varepsilon^{ouf} \quad (4.40)$$

L'énergie de fissuration représente l'aire sous la courbe $(\sigma - \varepsilon^{ouf})$ La figure 4.3 (a) ou $(\sigma - \varepsilon)$ la figure 4.3 (b).

En traction uni-axiale, nous écrivons :

$$G_f = l_c \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon^{ouf} \quad (4.41)$$

$$G_f = l_c \int_0^{\infty} E(\varepsilon - D\varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} \quad (4.42)$$

Sachant D s'écrit :

$$D = 1 - \exp(-\xi \cdot \varepsilon^{ouf}) \quad (4.43)$$

En traction, on peut écrire (puisque l'écrouissage est linéaire).

$$\varepsilon^{ouf} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon - \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_r - \varepsilon_{d0}} \quad (4.44)$$

$$\frac{G_f}{El_c} = \int_0^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} + \int_0^{\infty} \varepsilon^{ouf} \exp(-\xi \cdot \varepsilon^{ouf}) \cdot d\varepsilon^{ouf} \quad (4.45)$$

$$\int_0^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} = \int_0^{\varepsilon_r} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} + \int_{\varepsilon_r}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} \quad (4.46)$$

Sachant que :

$$\int_{\varepsilon_r}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} = 0 \quad (4.47)$$

$$\int_0^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} = \int_0^{\varepsilon_r} (\varepsilon - \varepsilon^{ouf}) d\varepsilon^{ouf} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_{d0}}{2} \quad (4.48)$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{ouf} \exp(-\xi \cdot \varepsilon^{ouf}) \cdot d\varepsilon^{ouf} = \frac{1}{\xi^2} \quad (4.49)$$

$$G_f = El_c \left[\frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_{d0}}{2} + \frac{1}{\xi^2} \right] = l_c \frac{f_t \varepsilon_r}{2} + l_c \frac{E}{\xi^2} \quad (4.50)$$

Nous allons prendre le paramètre d'endommagement ξ comme variable constante, et calculer ε_r en fonction des paramètres (G_f, f_t, l_c, ξ).

$$\varepsilon_r = 2 \left[\frac{G_f}{l_c f_t} - \frac{1}{\xi^2 \varepsilon_{d0}} \right] \quad (4.51)$$

Le paramètre ε_r qui nous permet de calculer la branche descendante de la courbe, est fonction de la taille des éléments du maillage. L'énergie de fissuration, dans une bande d'éléments est indépendante de la taille des mailles.

Le deuxième paramètre dans l'équation (4.50) représente l'énergie de fissuration due à l'endommagement et fonction du paramètre ξ qui n'est pas une caractéristique intrinsèque du matériau

On calcule l'énergie de fissuration à partir de la contrainte réelle et la contrainte effective, pour savoir la contribution de l'endommagement sur l'énergie de fissuration :

$$G_f = l_c \int_0^\infty \sigma d\varepsilon^{ouf} \quad (4.52)$$

$$\tilde{G}_f = l_c \int_0^\infty \tilde{\sigma} d\varepsilon^{ouf} \quad (4.53)$$

G_f : Représente l'énergie de fissuration calculée à partir de la contrainte réelle.

\tilde{G}_f : Représente l'énergie de fissuration calculée à partir de la contrainte effective.

La contrainte effective ne fait pas intervenir l'endommagement, on a :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad (4.54)$$

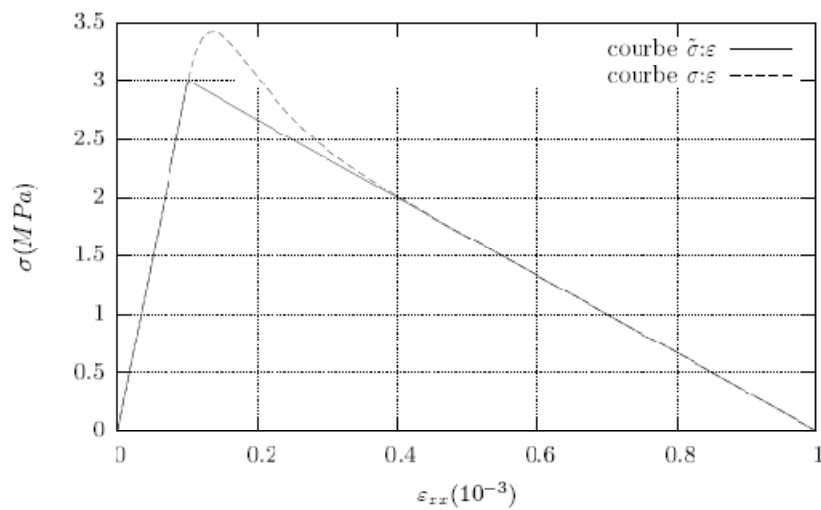


Figure 4.4 Apport de l'endommagement sur l'énergie de fissuration

Sur la figure (4.4), les deux aires $\frac{G_f}{L_c}$ et $\frac{\tilde{G}_f}{L_c}$ sont représentées. L'apport de l'endommagement sur l'énergie de fissuration est inférieur à 5%, ce qui nous permet de considérer :

$$G_f = \tilde{G}_f = l_c \frac{f_t \varepsilon_r}{2} \quad (4.55)$$

$$\varepsilon_r = \frac{2 G_f}{l_c f_t} \quad (4.56)$$

La déformation à la rupture est en fonction de trois paramètres caractéristiques du comportement du matériau (G_f , f_t , l_c).

4.7 Application sur CAST3M par le modèle de OUF

Pour valider les résultats avec le modèle implémenté en multifibre (3D) sur CAST3M on a choisit la poutre LMT, afin de trouver la réponse globale, l'endommagement et les ouvertures de fissures.

Pour simuler la poutre on a choisit trois différentes discrétisations $l_c = 10\text{cm}$, $l_c = 5\text{cm}$ et $l_c = 2\text{cm}$

l_c : La distance entre deux sections en multifibre.

Les paramètres du modèle sont donnés dans le tableau suivant :

Paramètres de modèle	Valeur
Kconst (Seuil d'endommagement en traction)	$3 \times 10^{+6}$ Pa
Beta (Seuil d'endommagement en compression)	$-3 \times 10^{+6}$ Pa
SSI (Constante du matériau)	$4 \times 10^{+4}$
G_f (Energie de rupture)	100 N/m
$\text{EPSR} = 2 \cdot G_f / l_c \cdot f_t$ (La déformation à la rupture)	2×10^{-3} m
SIGF (Contrainte de la refermeture de fissure)	$1.5 \times 10^{+6}$ Pa

Tableau 3.2 Tableau des paramètres du modèle "OUF" utilisés dans la simulation [5].

4.7.1 Résultats des simulations

4.7.1.1 Réponses globales

a. Cas statique monotone

La figure suivante (4.5) présente la réponse statique de la poutre pour différentes discrétisations caractéristique du maillage l_c .

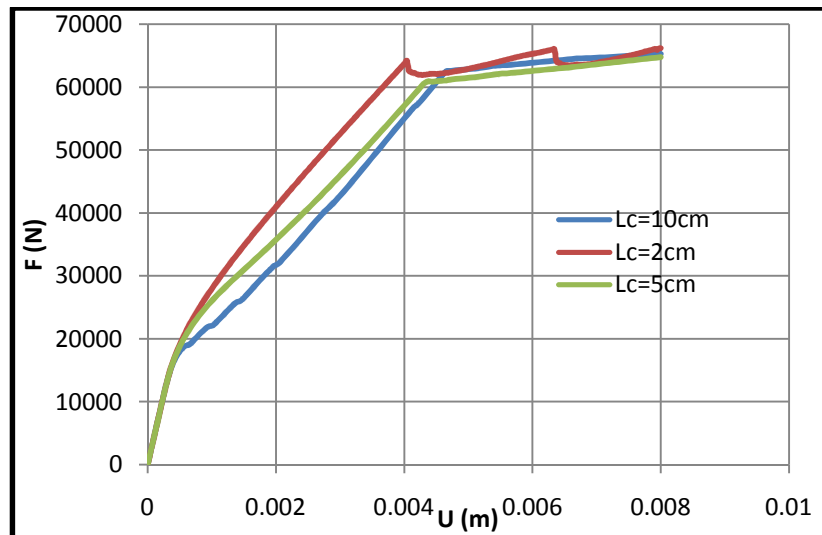


Figure 4.5 La réponse globale de la poutre LMT dans le cas statique.

La simulation de la poutre dans le cas statique en utilisant l'énergie de fissuration G_f avec différentes largeurs de localisation nous donne la même réponse globale. Les trois courbes sont confondues dans la partie élastique. Ainsi on remarque que l'effort ultime est correctement estimé sur le palier plastique pour les trois cas. Ceci montre aussi l'efficacité de l'approche énergétique.

b. Cas cyclique

La poutre LMT a été simulée par le modèle de OUF (M.Matallah 2006) le ferrailage utilisé est de 2T12 dans la partie supérieure et inférieure avec un espacement de 15 cm. Le comportement des aciers est modélisé par la loi élasto-plastique et la loi Pinto – Menegotto voir chapitre 3 (paragraphe 3.2.2). Le chargement appliqué sur la poutre est présenté sur la figure suivante.

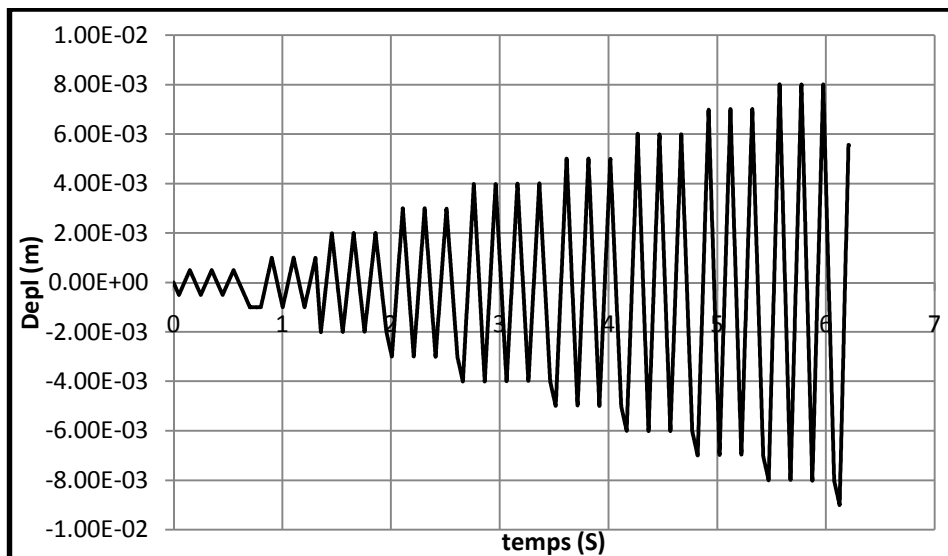


Figure 4.6 Le chargement appliqué sur la poutre LMT.

Les réponses globales obtenues pour les différentes longueurs caractéristiques lc pour le cas d'un chargement cyclique sont présentés dans les figures (4.7, 4.8 et 4.9) :

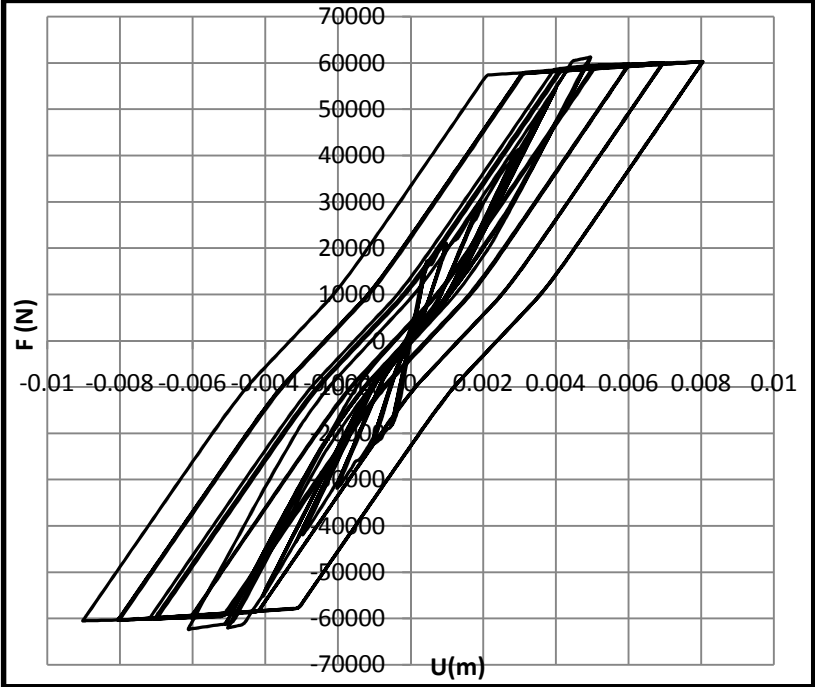


Figure 4.7 La réponse globale numérique de la poutre pour $lc=10\text{cm}$.

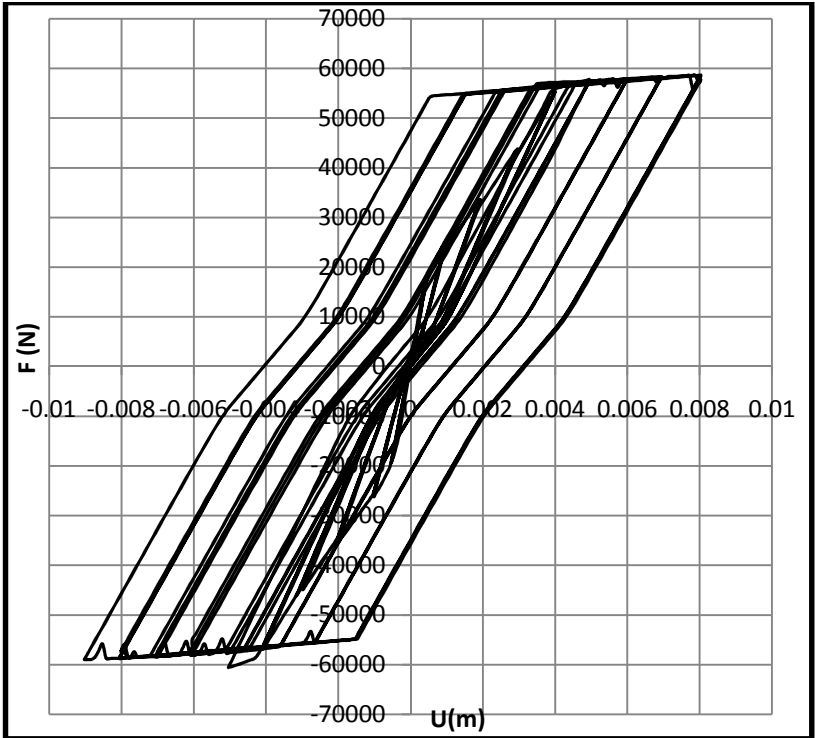


Figure 4.8 La réponse globale numérique de la poutre pour $lc=5\text{cm}$.

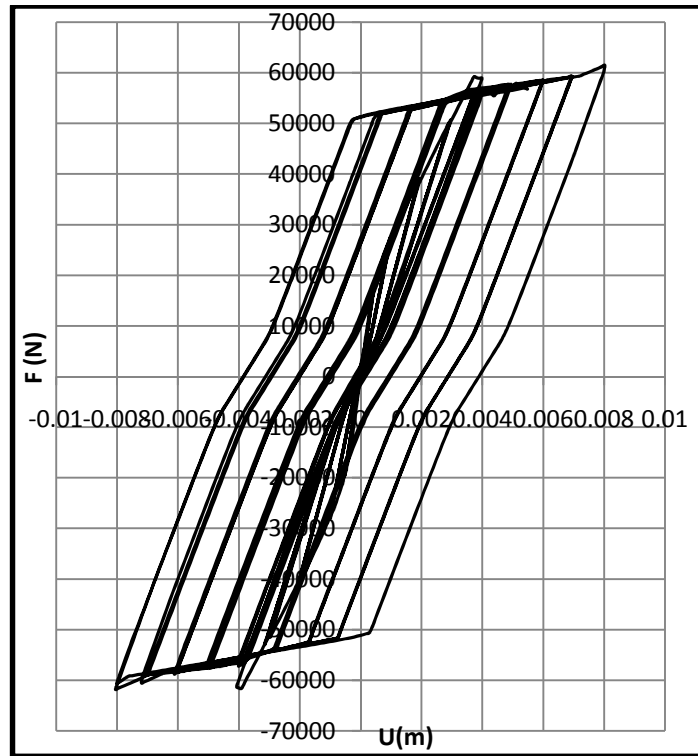
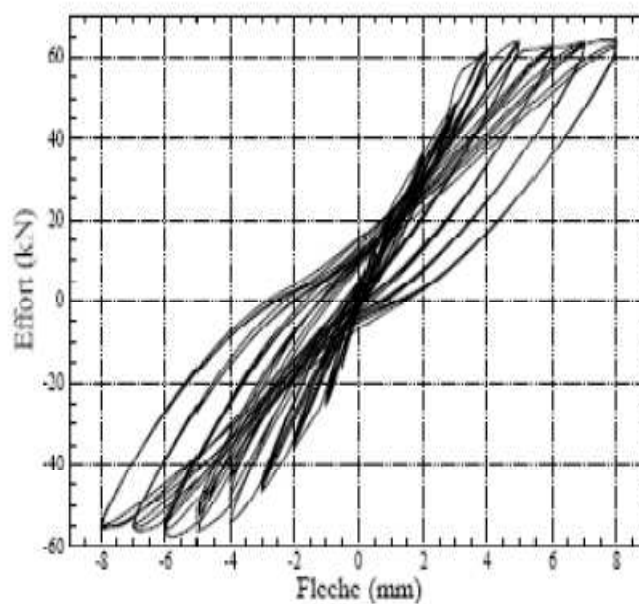


Figure 4.9 La réponse globale numérique de poutre pour $lc=2cm$.

On remarque que la réponse globale reproduite est la même pour les trois différentes simulations, la seule différence réside dans le temps de calcul qui est plus long pour $lc=2cm$ par rapport à $lc=10$ et $5cm$ dû à la densité du maillage.

Deux essais ont été effectués sur la même géométrie de la poutre permettant d'apprécier la répétabilité du protocole expérimental. La figure suivante présente les résultats Force/Flèche pour ces deux essais.



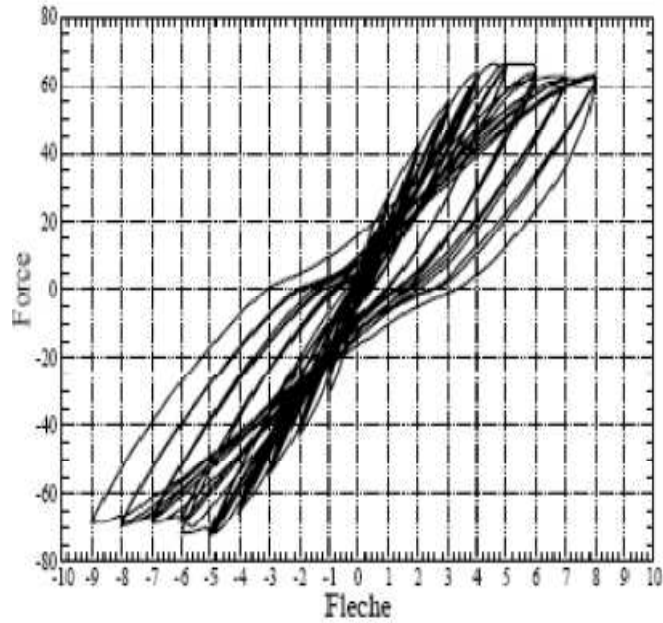


Figure 4.10 : Résultats globaux Force-Flèche sur l'ensemble des cycles pour deux poutres 'Identiques'

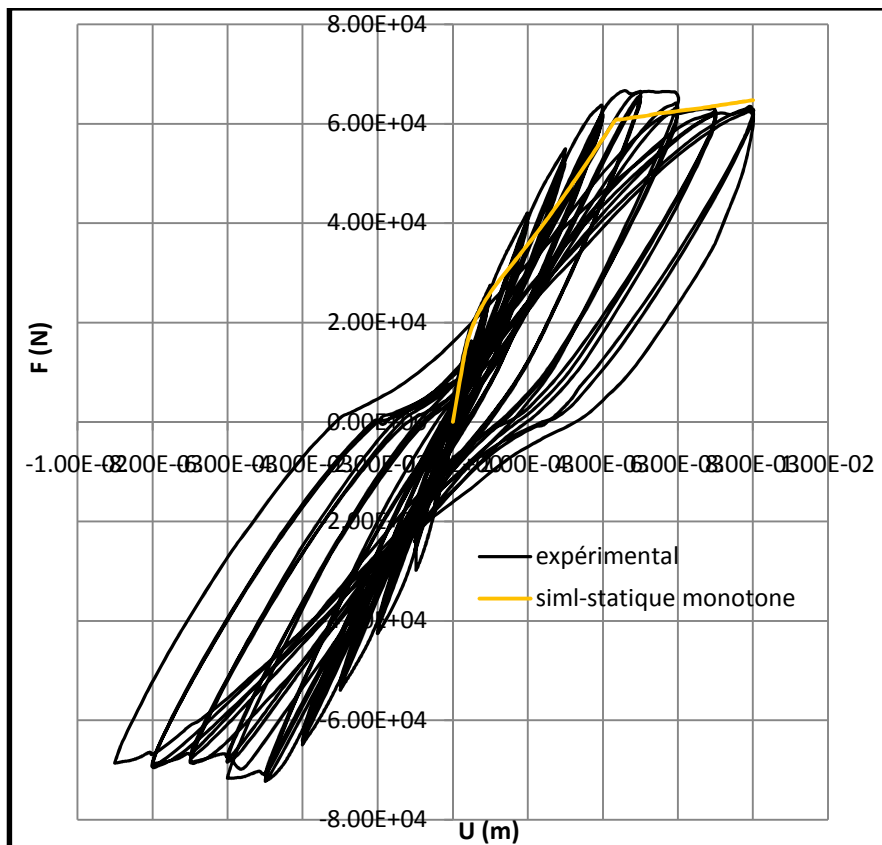


Figure 4.11 Comparaison entre la réponse globale de la poutre en Expérimental avec la simulation en statique.

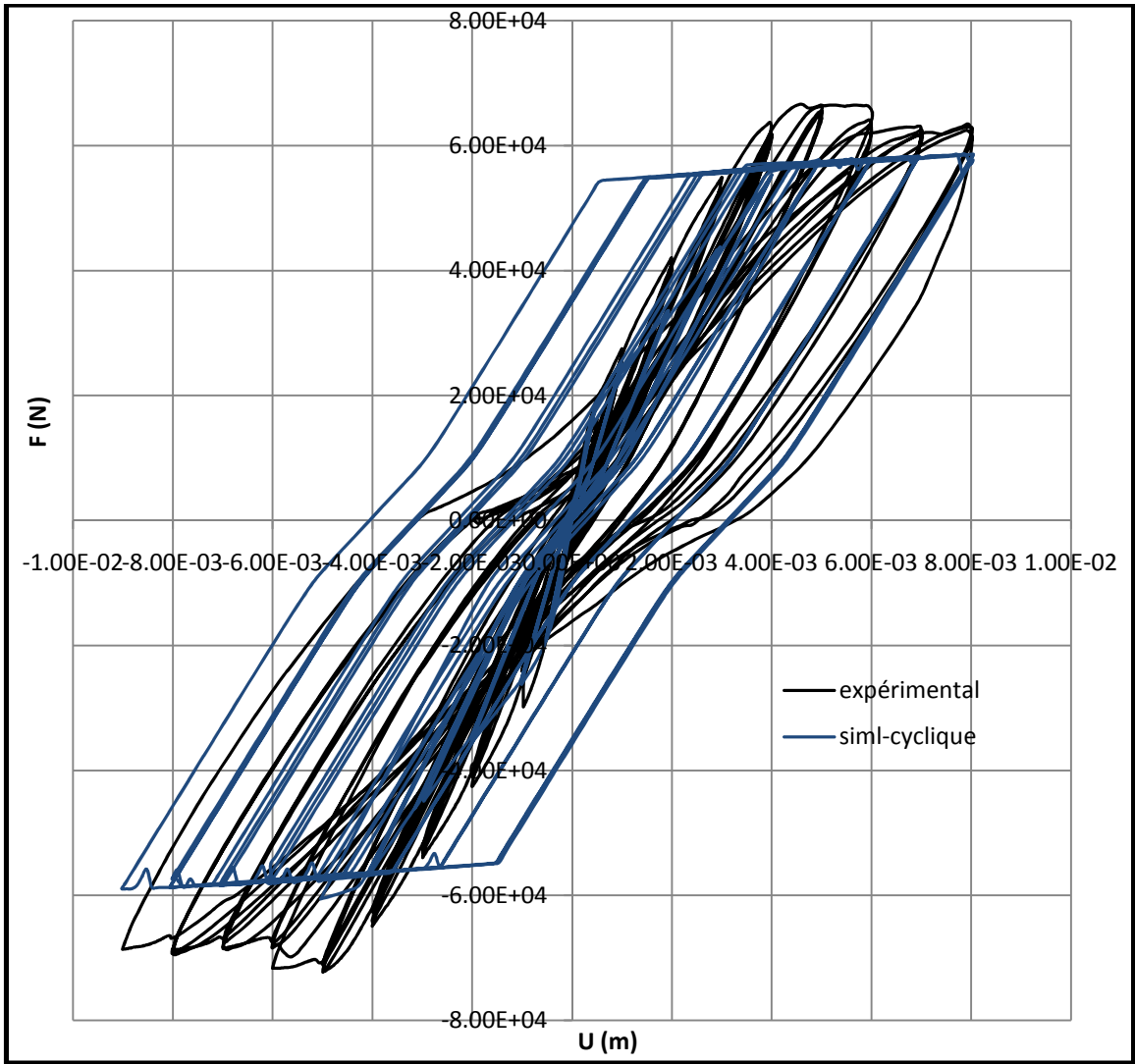


Figure 4.12 Comparaison entre les deux réponses globales expérimentales et numériques avec le modèle d'acier élasto-plastique (cyclique)

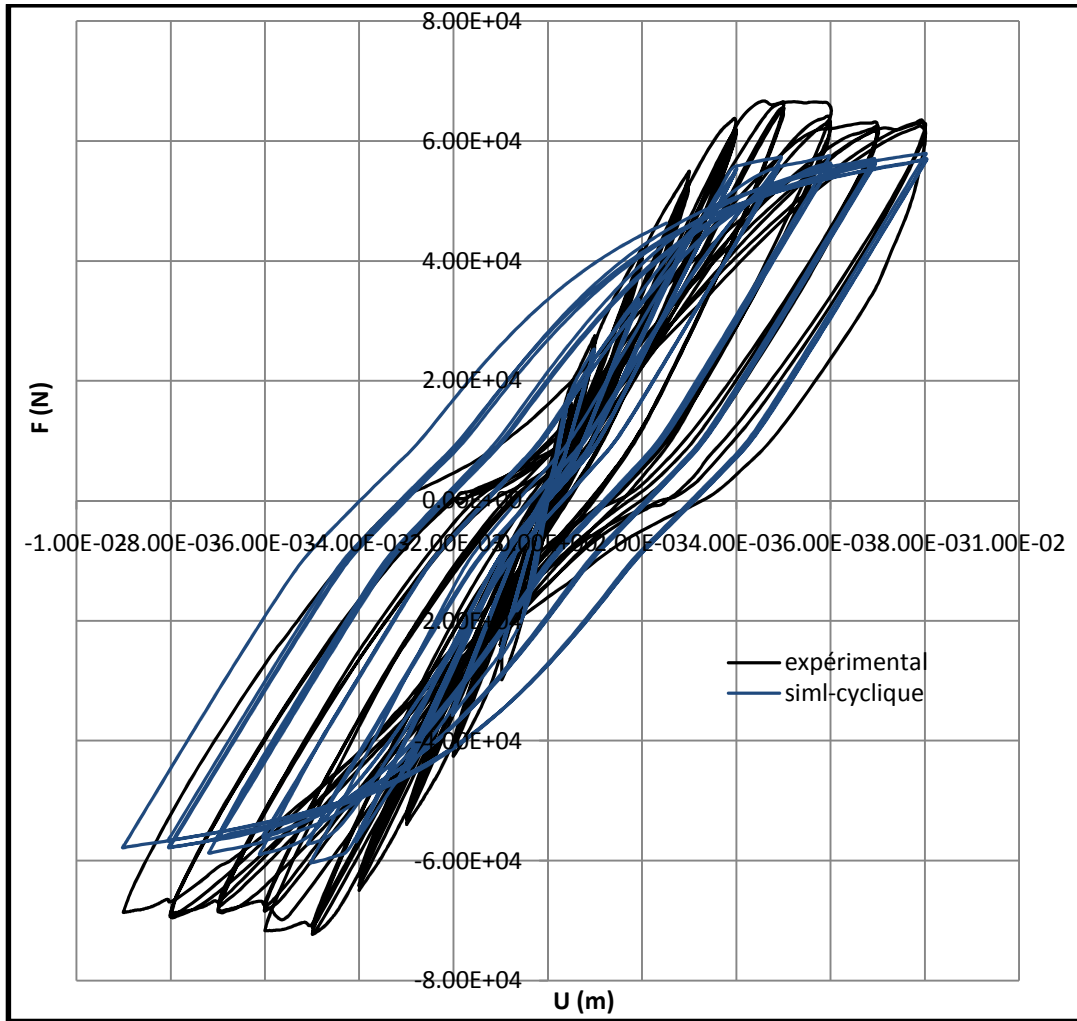


Figure 4.13 Comparaison entre les deux réponses globales expérimentales et numériques avec le modèle d'acier Pinto-Menegotto (cyclique)

Un chargement statique constitue une sorte de courbe enveloppe à la réponse non linéaire statique cyclique (figure 1.10). L'intérêt principal de ce calcul est d'analyser le comportement de la structure pour des niveaux de non linéarité (endommagement) proches de ceux rencontrés dans le cadre du calcul dynamique non linéaire.

La confrontation de la réponse globale expérimentale avec les résultats numériques montre que l'effort ultime estimé par le modèle se trouve entre les deux réponses globales expérimentales. Pour les deux différents modèles d'acier (élastoplastique et Pinto-menegotto). On peut dire aussi qu'après la plastification des armatures longitudinale la forme des cycles évolue suivant leurs comportements.

On choisit $l_c=5$ cm pour faire une comparaison entre la réponse globale numérique et expérimentale pour les différentes cycles.

4.7.2 Les résultats de simulation avec le modèle d'acier élasto - plastique

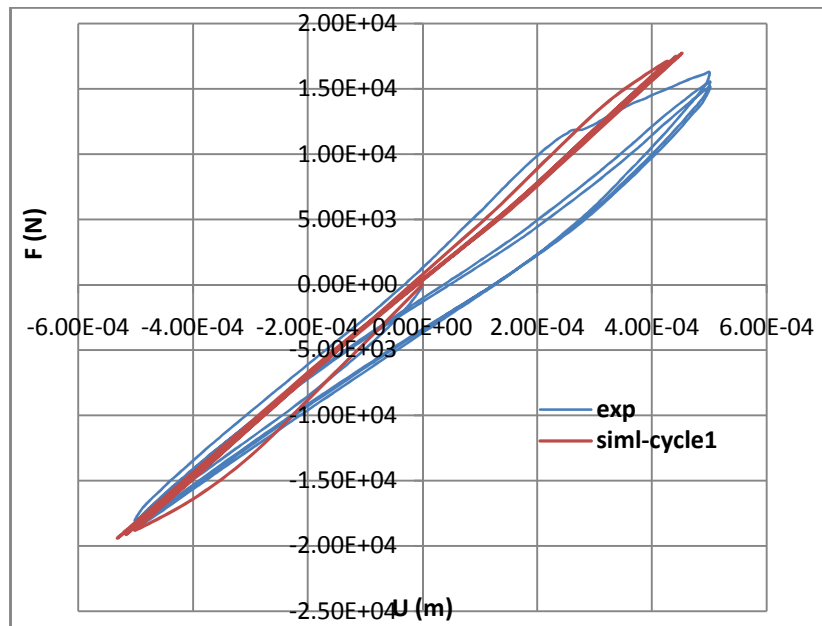


Figure 4.14 Cycle 1.

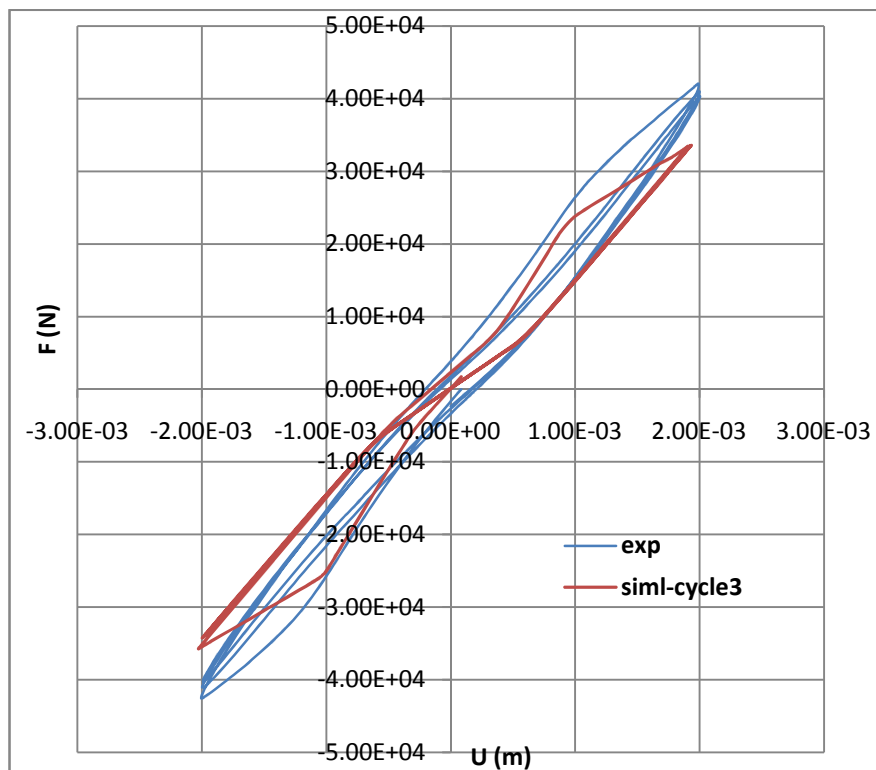


Figure 4.15 Cycle 3

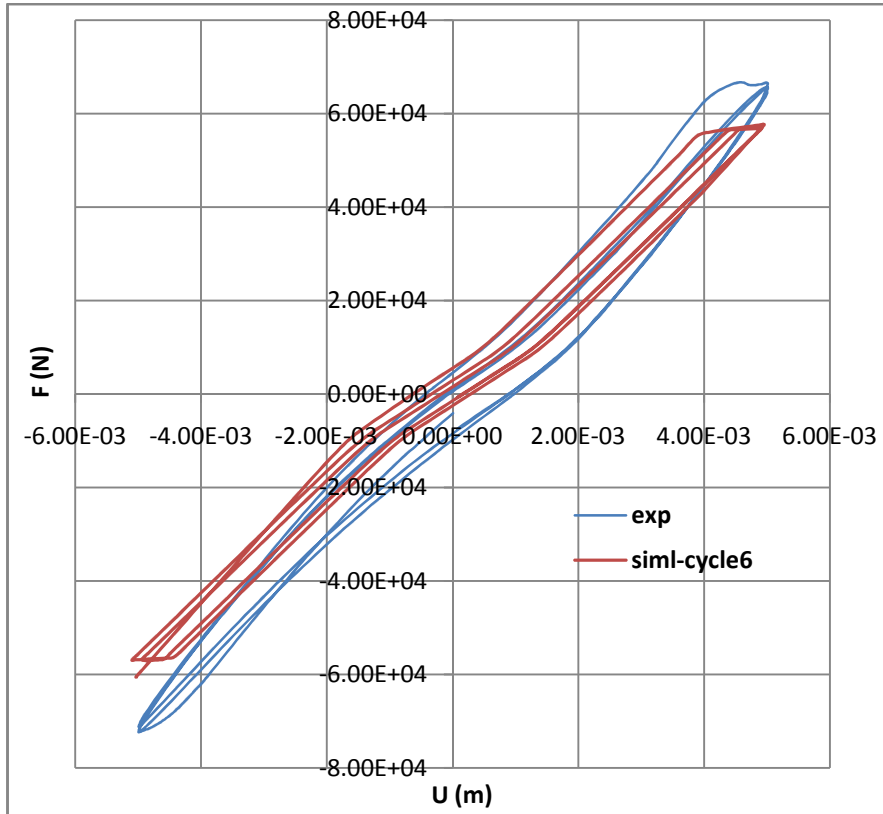


Figure 4.16 Cycle 6

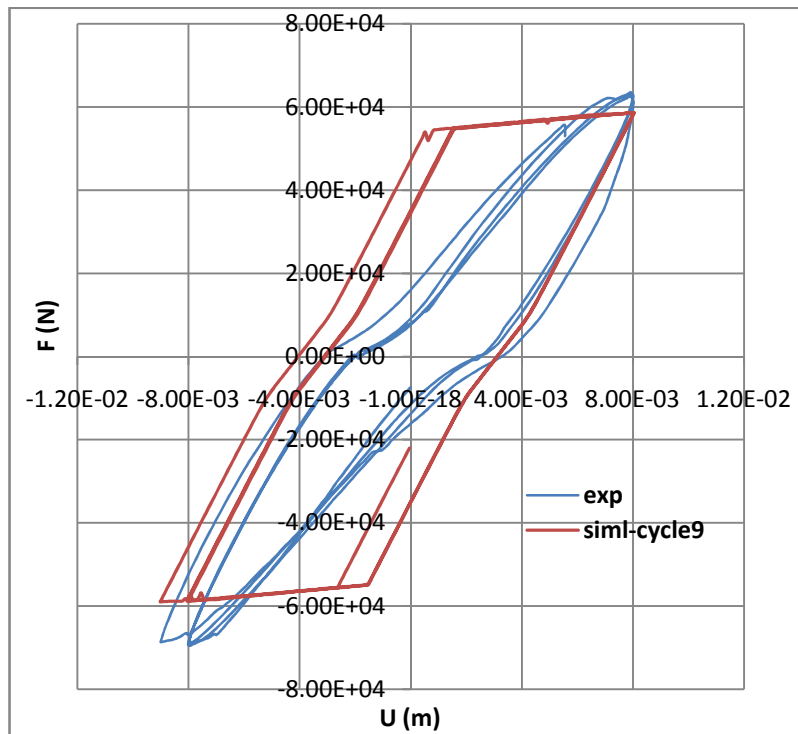


Figure 4.17 Cycle 9.

4.7.3 Les résultats de simulation avec le modèle d'acier Pinto – Menegotto

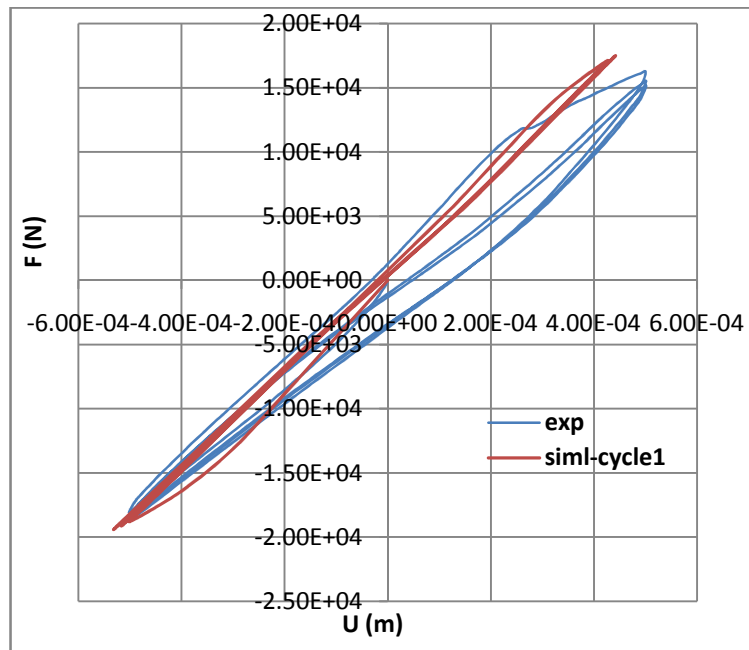


Figure 4.18 Cycle 1

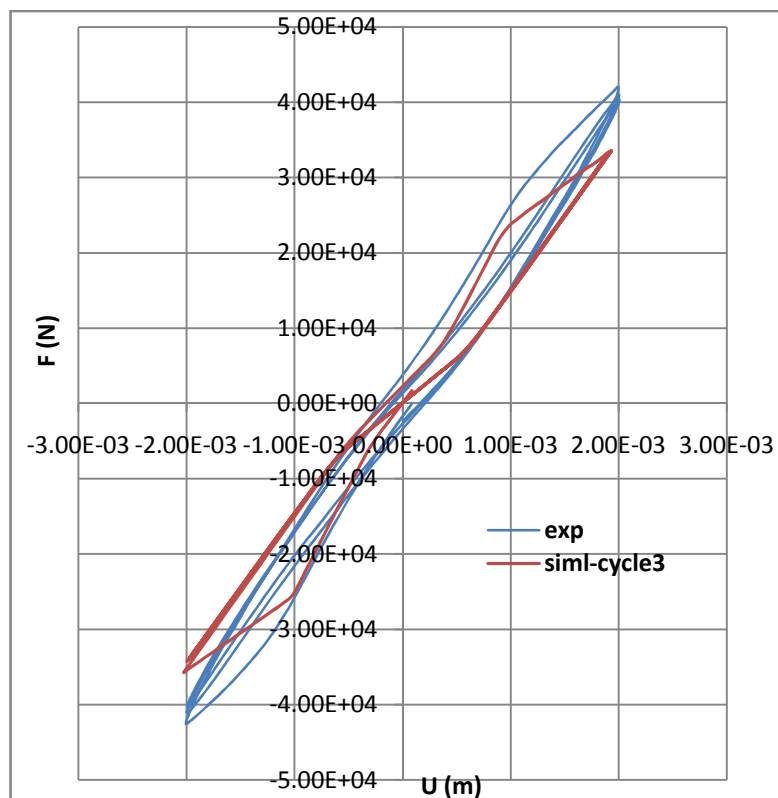


Figure 4.19 Cycle 3.

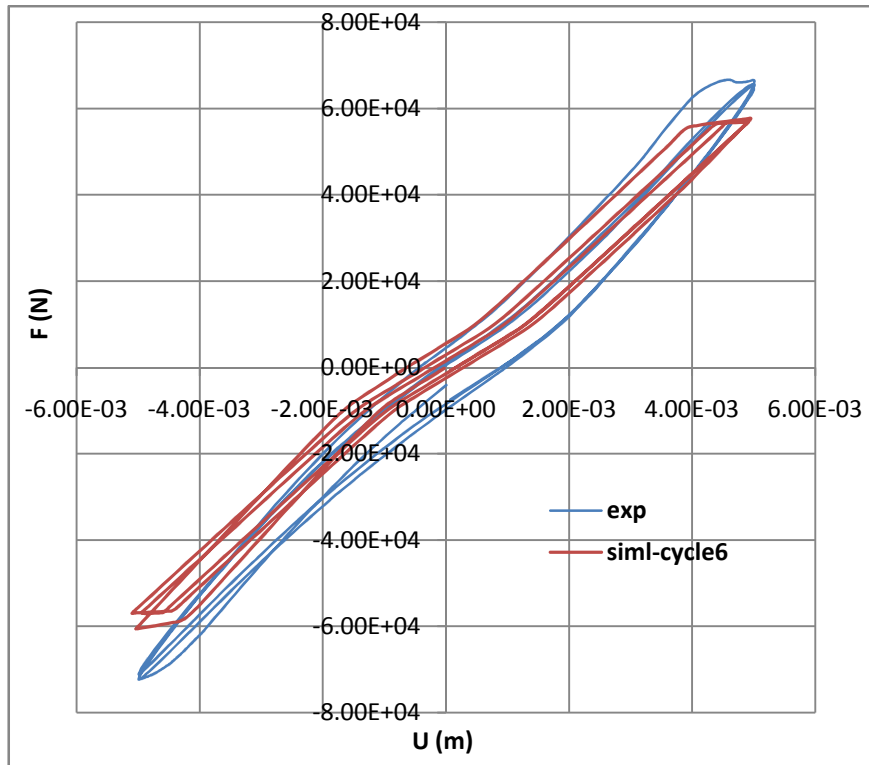


Figure 4.20 Cycle 6

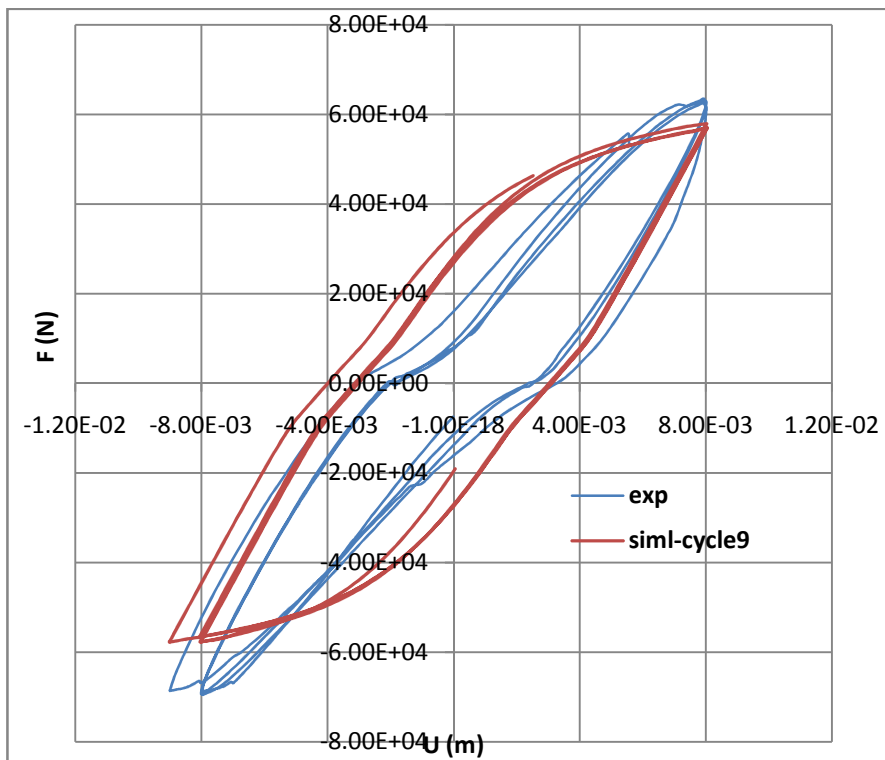


Figure 4.21 Cycle 9.

Sur différents cycles on remarque que l'énergie dissipée sur chaque cycle est la même sauf pour le premier cycle l'énergie dissipée en expérimental est plus grande par rapport à la simulation, l'augmentation de l'amplitude de la charge engendre une augmentation de l'amplitude des cycles donc abaissement de la raideur global. Ainsi on remarque que les boucles de la simulation ont une forme plus aplaties par rapport à l'expérimental surtout dans les derniers cycles où le béton est fortement endommagé, dû au modèle d'acier qu'on avait utilisé (modèle élasto-plastique) qui prend cette forme après la plastification.

Par le modèle d'acier Pinto–Menegotto, les cycles 1, 3 et 6 sont identiques si on fait la comparaison avec le modèle d'acier élasto-plastique juste pour le cycle 9 où la réponse global prend une forme plus arrondie.

4.7.4 Evolution de l'endommagement

4.7.4.1 Cas statique monotone

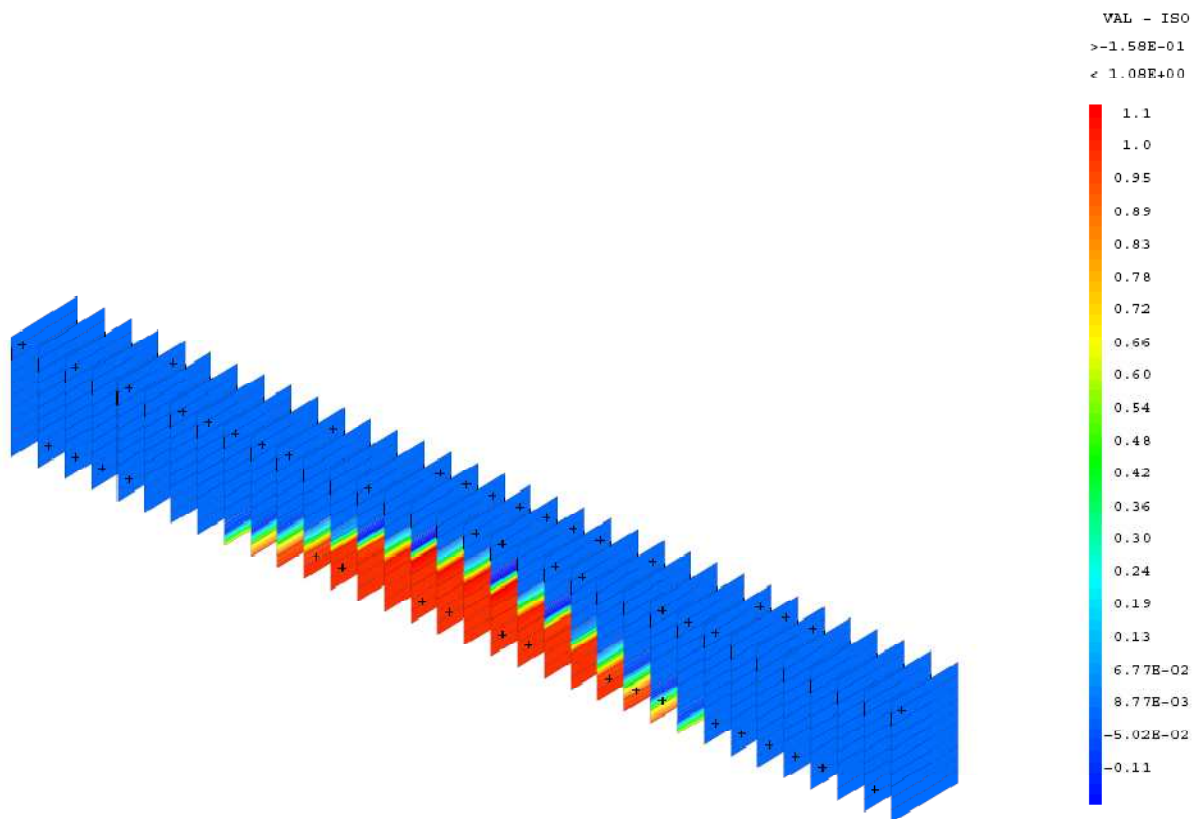


Figure 4.22 La carte d'endommagement pour un déplacement de 1mm.

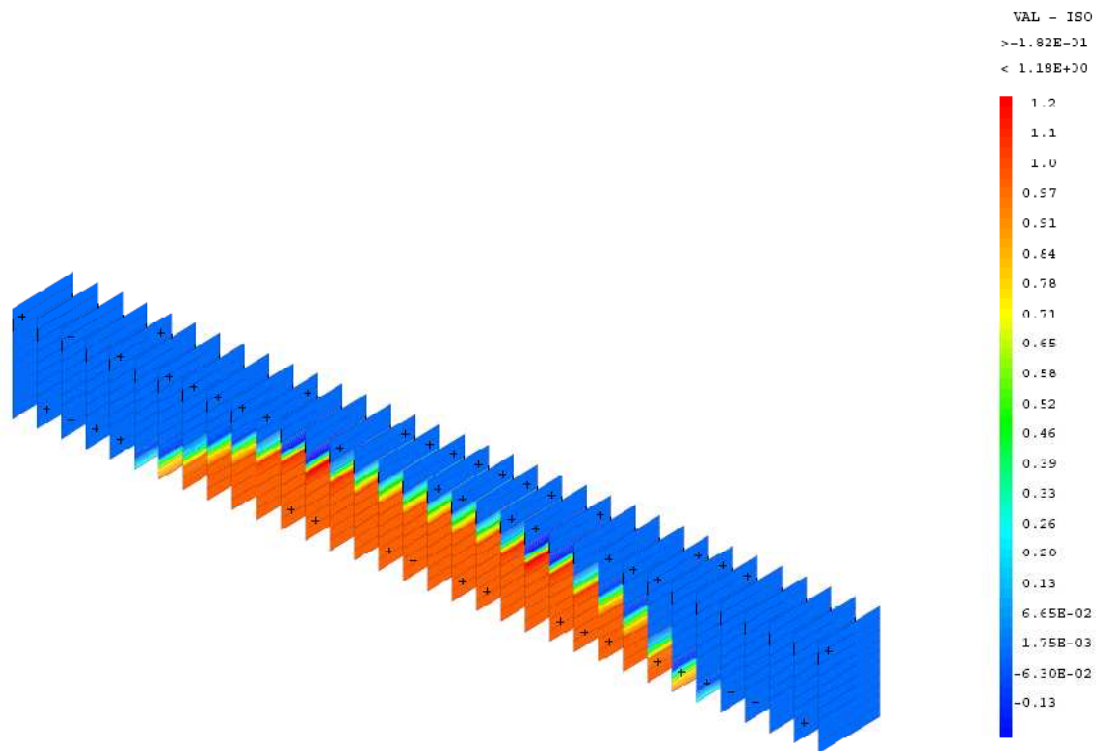


Figure 4.23 La carte d'endommagement pour un déplacement de 3mm.

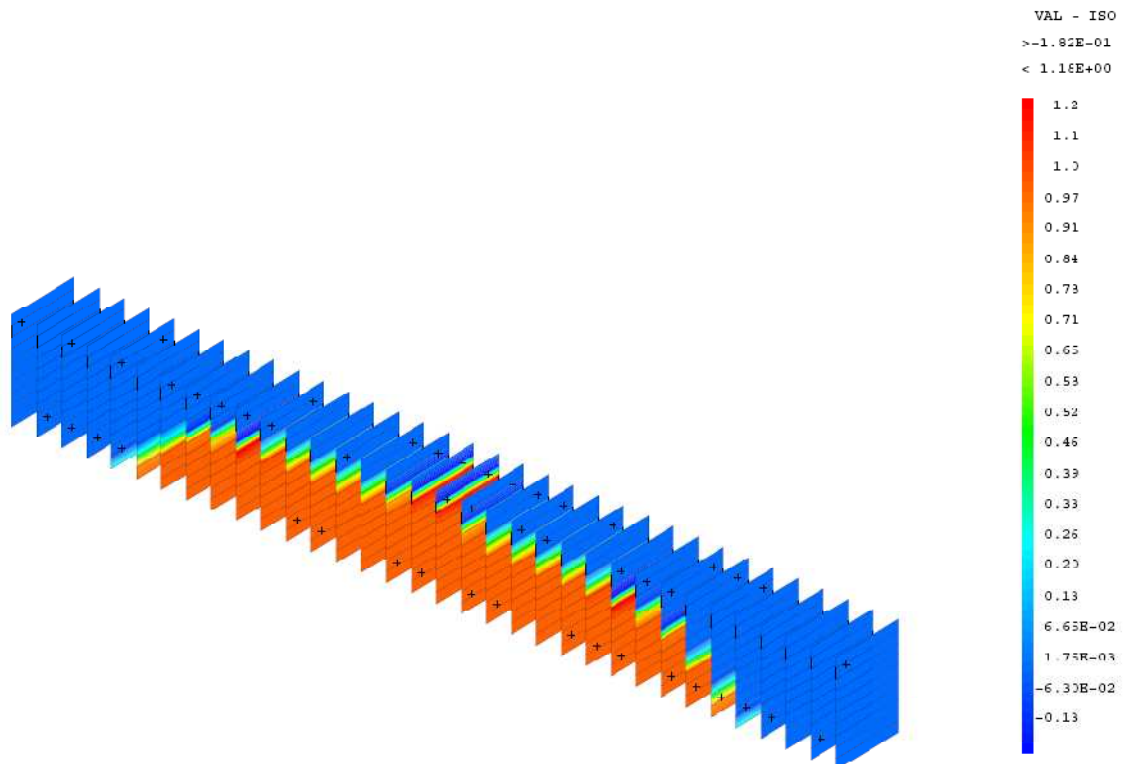


Figure 4.24 La carte d'endommagement pour un déplacement de 6mm.

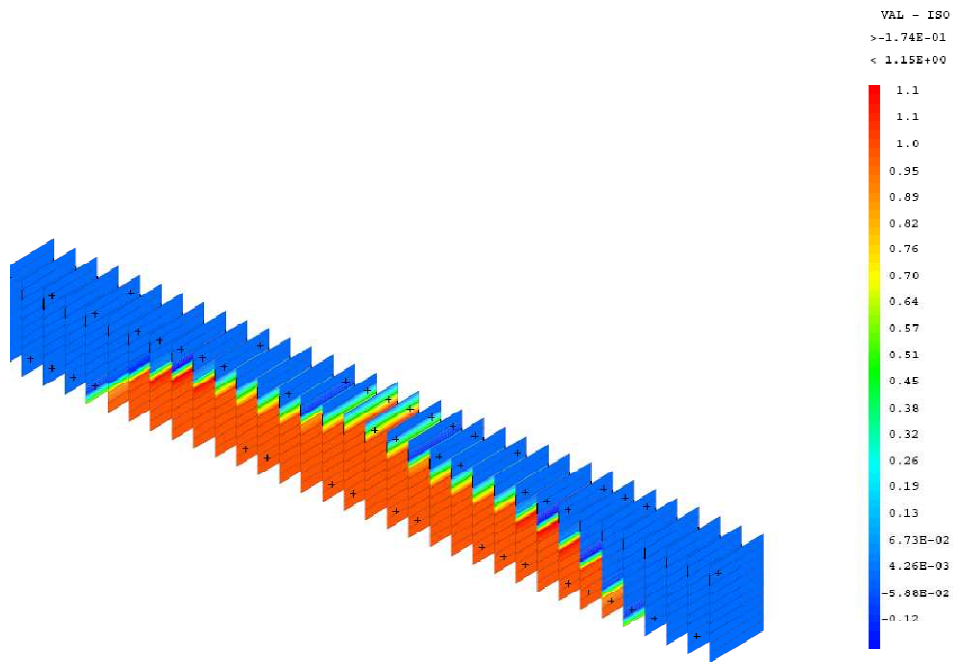


Figure 4.25 La carte d'endommagement pour un déplacement de 8mm

4.7.4.2 Cas cyclique

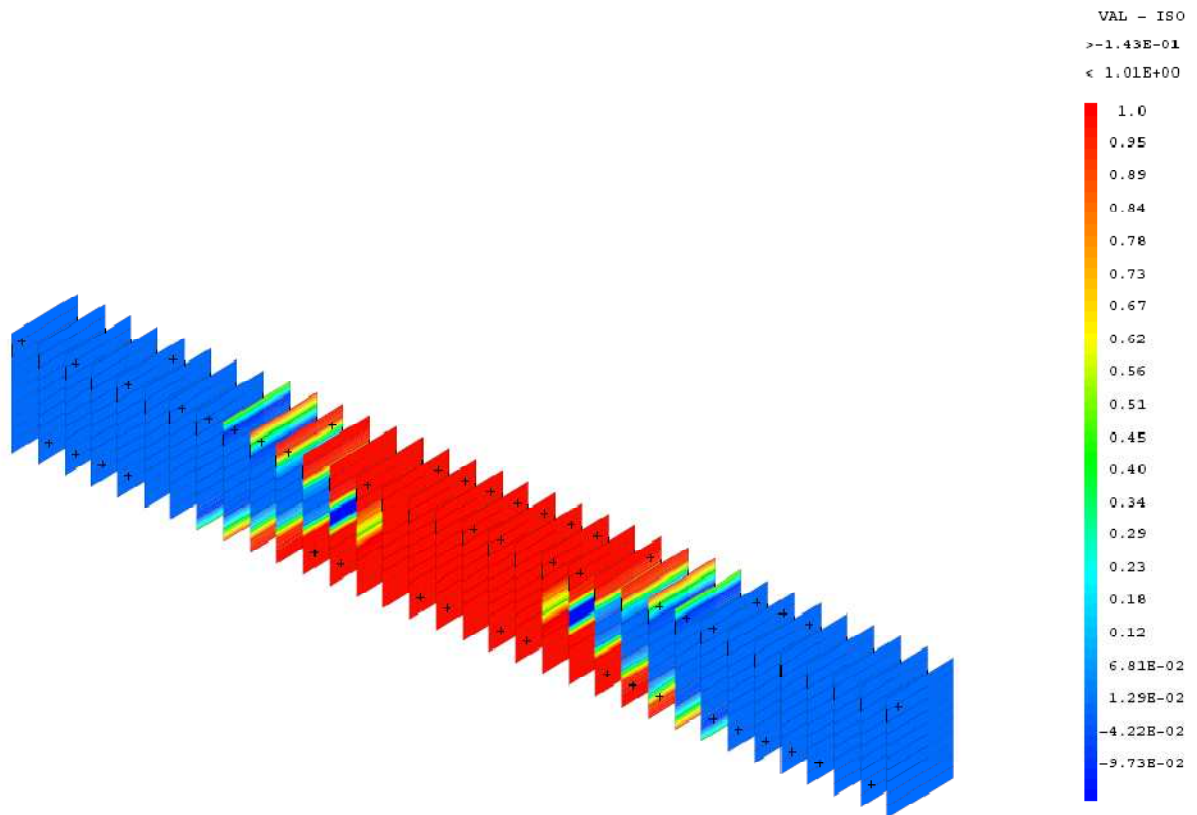


Figure 4.26 La carte d'endommagement pour un déplacement de 1mm.

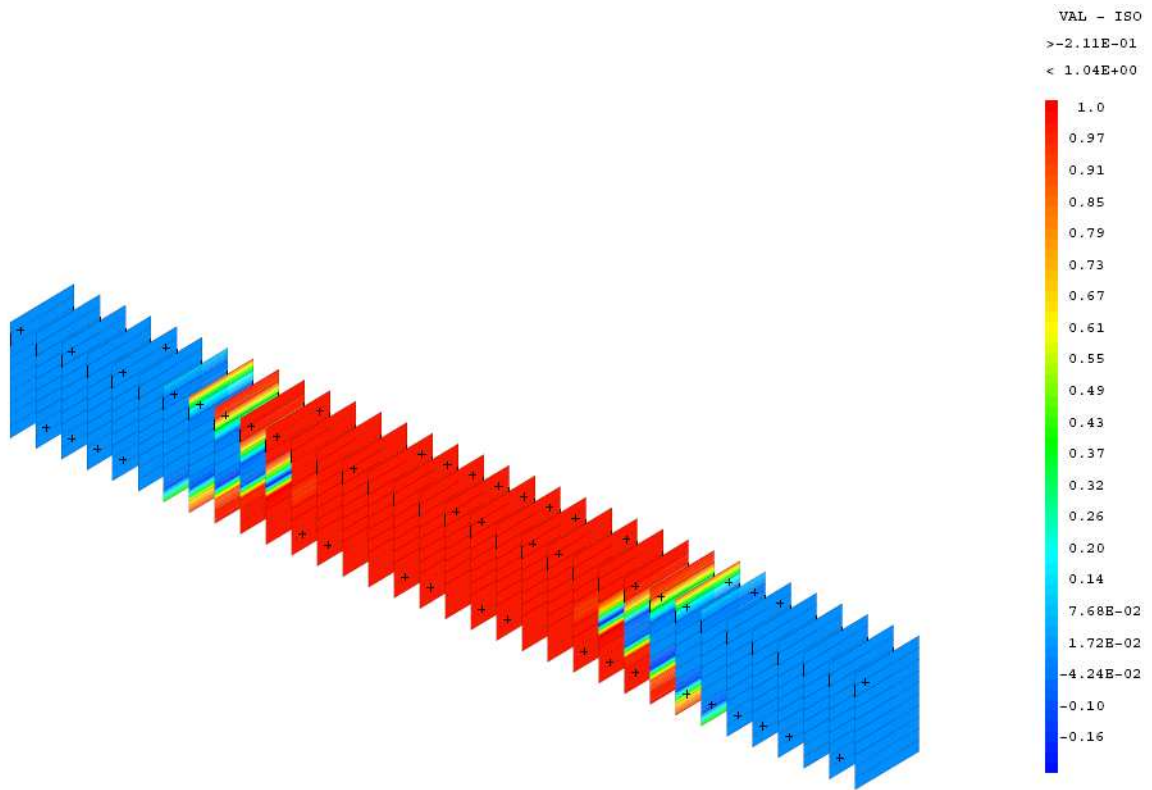


Figure 4.27 La carte d'endommagement pour un déplacement de 2mm.

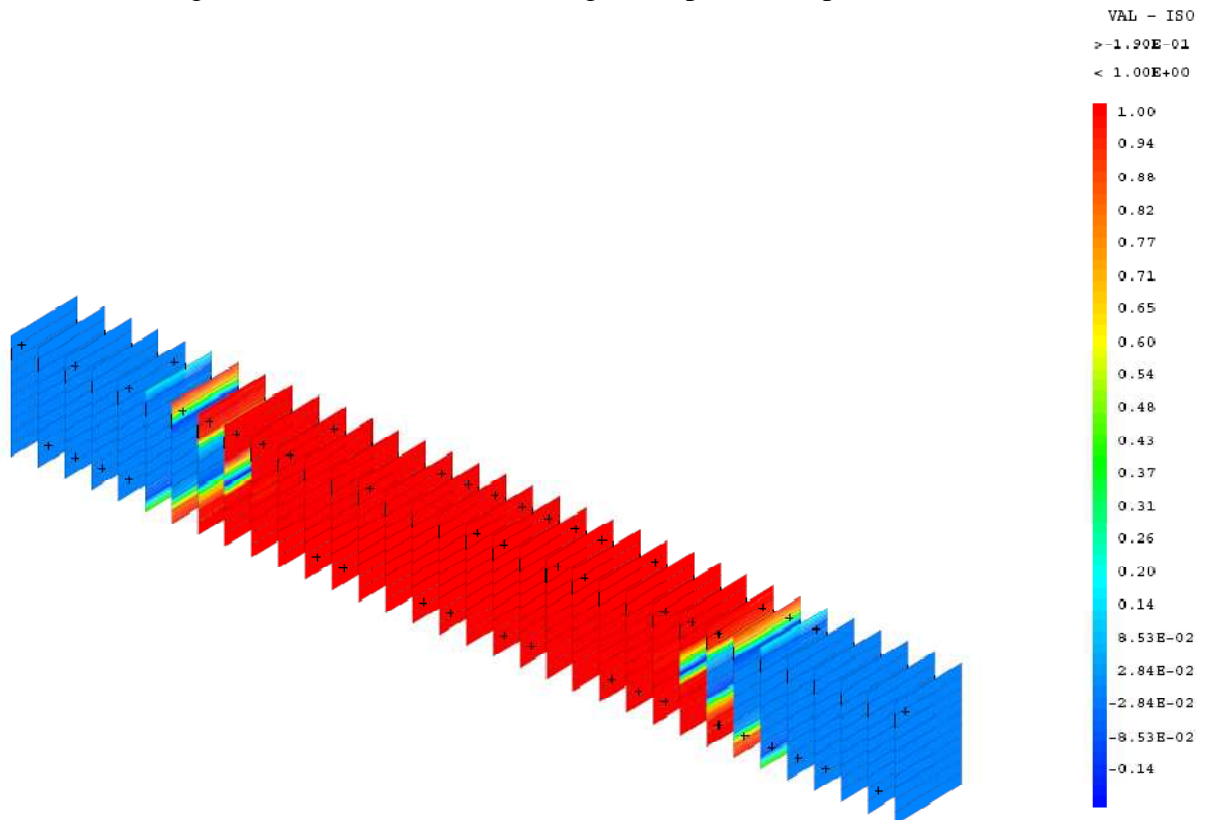


Figure 4.28 La carte d'endommagement pour un déplacement de 3mm.

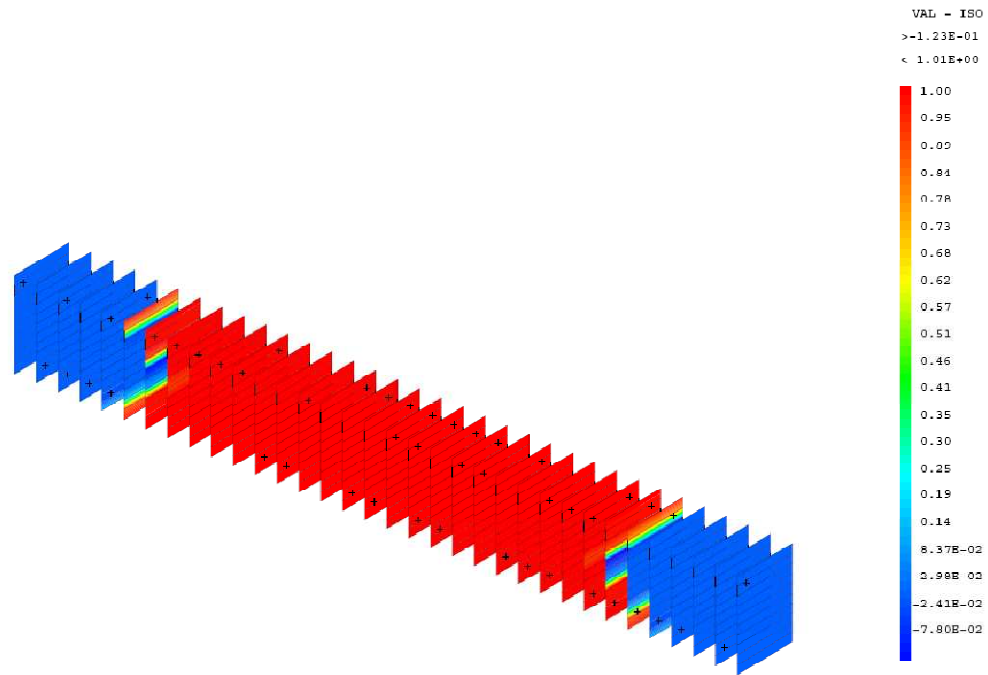


Figure 4.29 La carte d'endommagement pour un déplacement de 6 jusqu'à 8mm.

L'endommagement de la poutre évolue fortement dans la zone d'application de la charge pour le cas statique et cyclique. On remarque que l'endommagement commence dans la partie tracté de la poutre (partie inférieure) après il évolue sur toute la longueur de la poutre où la zone centrale est fortement endommagée pour un déplacement de 6mm.

4.7.5. Evaluation des ouvertures de fissures

4.7.5.1 Cas statique monotone

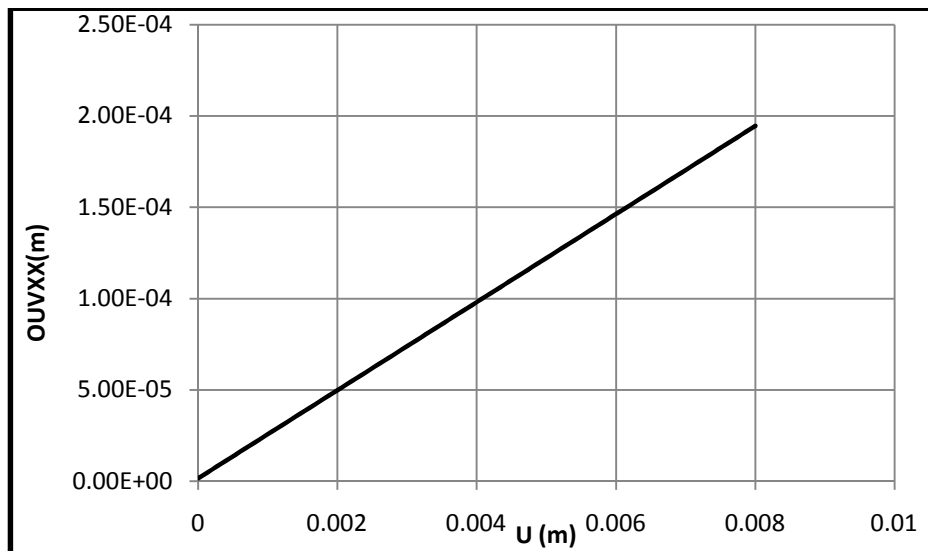


Figure 4.30 L'évolution de l'ouverture de fissures en fonction de déplacement.

La courbe 4.30 présente l'évolution de l'ouverture de fissure maximale en fonction de déplacement imposée pour un chargement statique monotone.

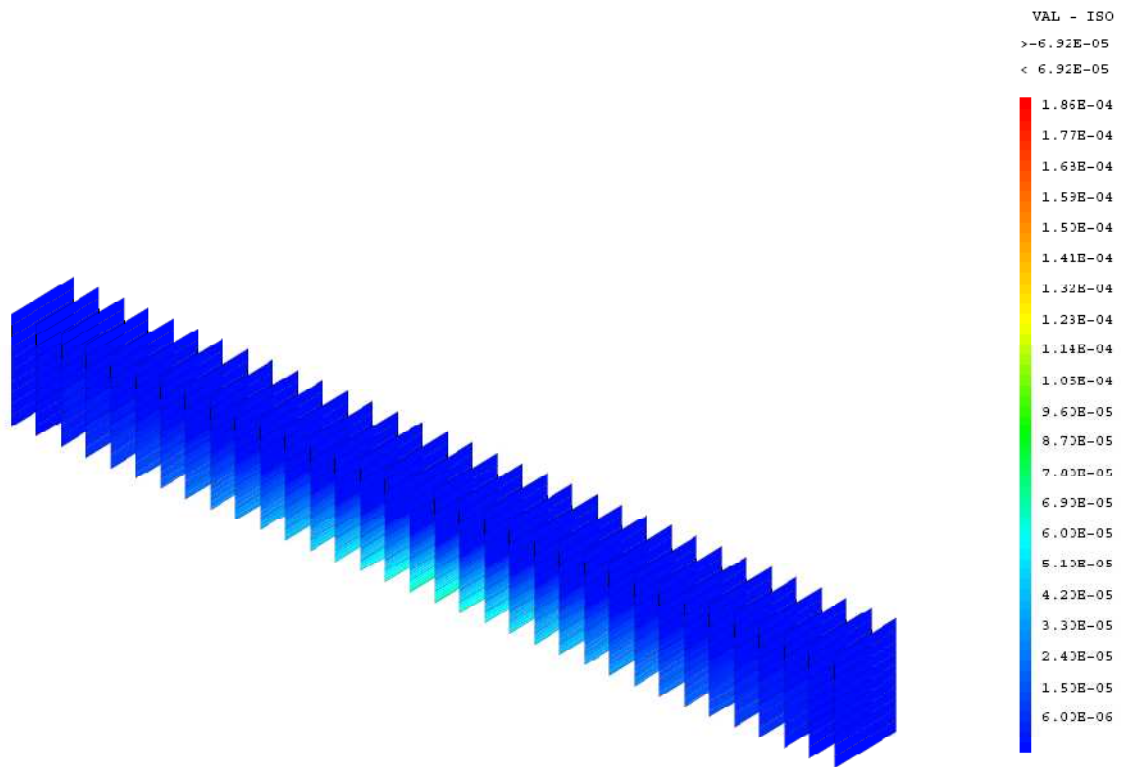


Figure 4.31 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 3mm.

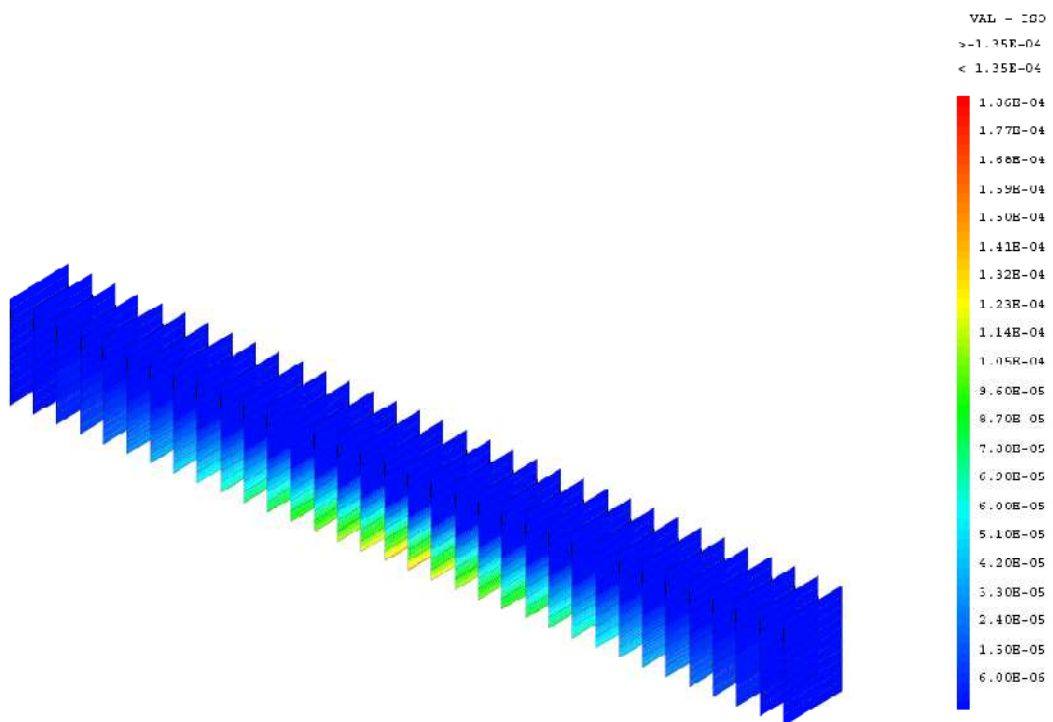


Figure 4.32 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 6mm.

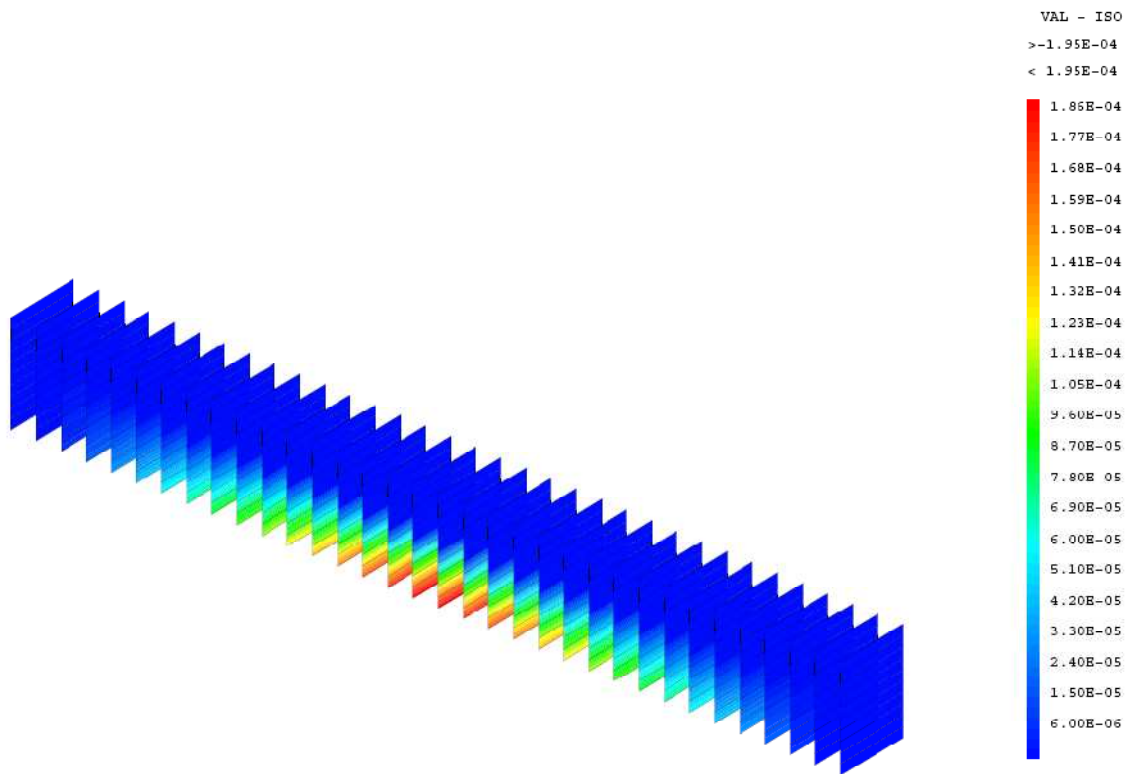


Figure 4.33 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 8mm.

4.7.5.2 Cas cyclique

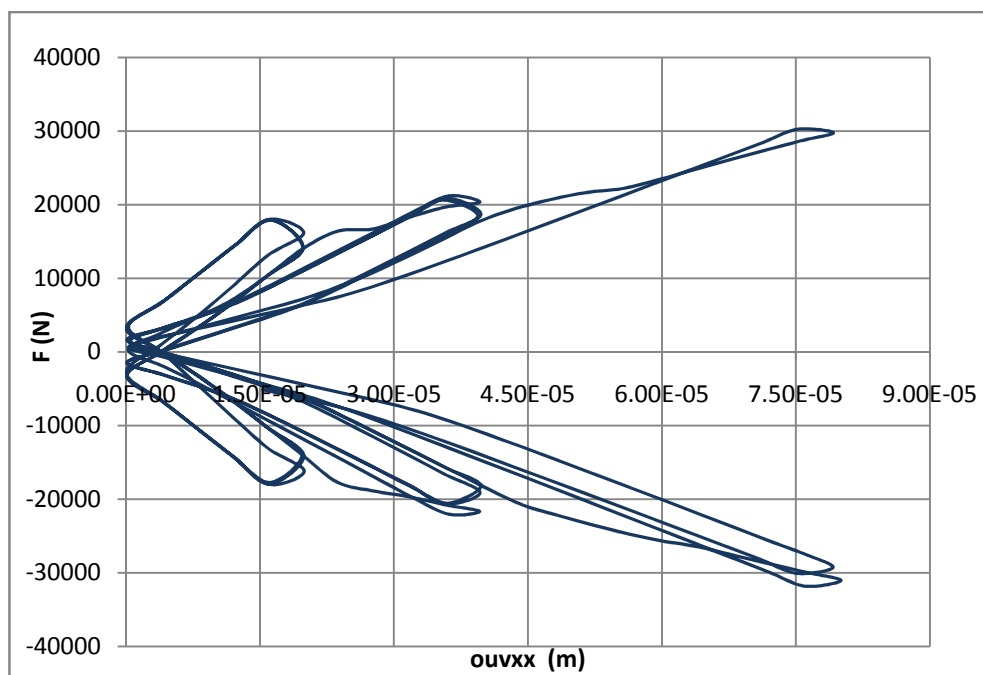


Figure 4.34 L'évolution de l'ouverture de fissures d'un élément en fonction de déplacement.

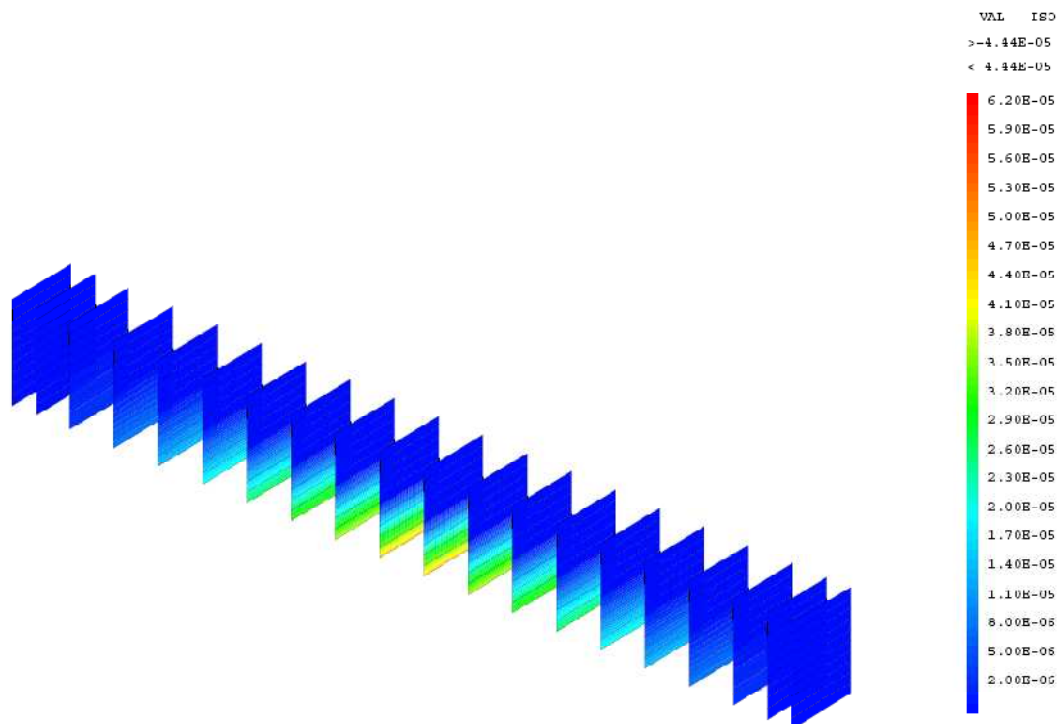


Figure 4.35 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de 1mm.

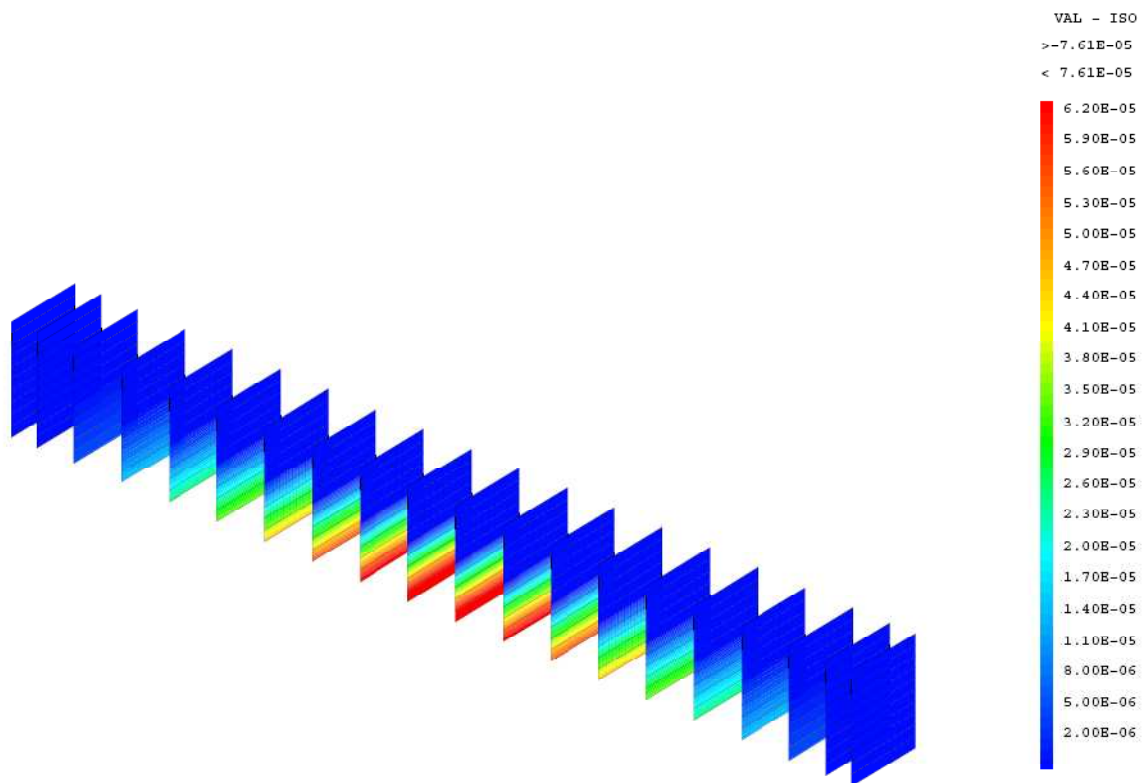


Figure 4.36 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de -2mm.

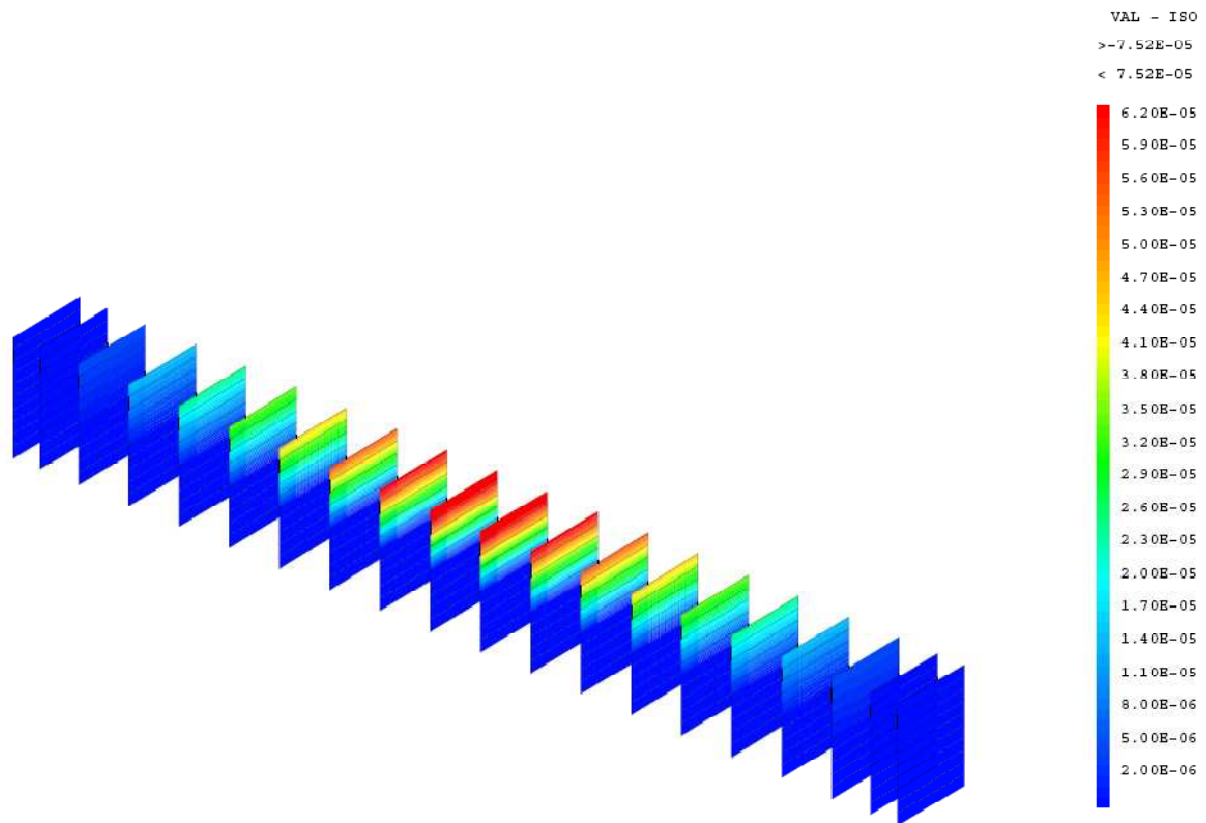


Figure 4.37 La carte de l'ouverture de fissures pour un déplacement de +2mm.

4.8 Conclusions

L'intérêt principal d'implémenter le modèle de "OUF" sur Cast3M est de calculer l'ouverture de fissures à l'échelle semi global. Le calcul nous a démontré que les zones critiques sont bien déterminées sur la carte de la fissuration, les valeurs numériques sont comparables avec celle de l'expérimentation, les limites sont le nombre et l'orientation (profil de la fissuration).

Conclusions et Perspectives

Nous avons présenté dans cette thèse une stratégie de modélisation simplifiée basée sur des éléments de poutre multifibre Timoshenko. L'utilisateur a la possibilité d'associer dans chaque fibre une loi d'endommagement et/ ou plasticité pour la simulation du comportement non- linéaire de béton ou de l'acier. De cette façon il arrive à diminuer le nombre nécessaire de degrés de liberté et ainsi le temps de calcul. Les lois utilisées pour le béton et l'acier sont basées sur la mécanique de l'endommagement et la plasticité respectivement. Les modèles utilisés permettent de modéliser de façon satisfaisante le comportement global des structures en béton armé sous chargement statique ou cyclique.

Les premiers résultats sur les poutres (1 et 8) montrent que les modèles utilisés doivent encore progresser dans le domaine de la refermeture de fissures qui est un point clairement essentiel dans le domaine du chargement cyclique. L'endommagement doit s'accompagner de déformations permanentes qui doivent s'annuler sous une contrainte de compression, ce qui n'est pas le cas pour les modèles utilisés. Cette particularité conduit à obtenir une forme caractéristique des cycles en forme de S.

Pour la poutre LMT, la superposition des résultats expérimentales et numérique montre que la forme des cycles reproduite par le modèle "OUF" est bien représentée par rapport à la forme des cycles obtenue par le modèle unilatéral (La Borderie).

La plastification des aciers empêchent les microfissures du béton de se refermer. Ce problème met en évidence une limite à l'hypothèse d'adhérence parfaite entre le béton et les armatures.

La modélisation avec des poutres multifibres permet d'avoir qualitativement de bonnes indications sur la distribution de l'endommagement et de la plasticité, à prédire la position des zones critiques et à réduire significativement le temps de calcul.

Pour le calcul des ouvertures de fissures qui est un problème d'actualité, on a utilisé une méthode de régularisation basée sur un aspect énergétique le modèle "OUF" implémenté sur Cast3M a l'avantage de pouvoir décrire le processus de fissuration la méthode de post-traitement développée permet d'évaluer le processus d'ouverture de fissures de mode I.

Un point qui n'est pas développé dans notre calcul et qui mérite sans doute que l'on s'y intéresse est le traitement de l'interaction entre les armatures et le béton. En effet, nous supposons pour tous nos calculs une adhérence parfaite entre l'acier et le béton. La mise en place d'éléments joints avec une loi d'adhérence adéquate pourrait améliorer les résultats.

Références bibliographiques

- [1] Hung UNG QUOC « Théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement en formulation incrémentale tangente. Calcul à la rupture appliqué au cas des chevilles de fixation ancrées dans le béton » Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées année 2004.
- [2] Marion Chambart « Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan septembre 2009.
- [3] Nechnech Wahid « Contribution à l'étude numérique du comportement du béton et de structures en béton armé soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques couplées : une approche thermo-élastoplastique endommageable » Thèse de doctorat- Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Décembre 2000.
- [4] Frédéric Ragueneau « Fonctionnement dynamique des structures en béton-influence des comportements hystérétiques locaux » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan année 1999.
- [5] Mohammed Matallah « Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton » Thèse de doctorat- Université de Pau et des Pays de l'Adour France année 2006.
- [6] Farid Benboudjema « Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations bi-axiales. Application aux enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires » Thèse de doctorat ; Université de Marne la vallée, décembre 2002.
- [7] Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche « Livre : Mécanique des matériaux solides ». 2^{ème} édition Dunod, Paris 1996.
- [8] FORTUNIER Roland « Cours sur le comportement mécanique des matériaux » Ecole Nationale Supérieure des Mines, 2008.
- [9] Krayani-Abbas « Contribution à la modélisation non linéaire du comportement mécanique du béton et des ouvrages en béton armé et précontraint ». Thèse de doctorat de l'école centrale de Nantes et l'université de Nantes Décembre 2007.
- [10] Mohammed Matallah « Cours sur la modélisation non linéaire des géomatériaux : Application au calcul des structures en béton armé » Université de Tlemcen Année 2009.
- [11] Th.Désoyer, D.Halm et A.Dragon « Anisotropic damage in quasi-brittle solids : modelling computational issues and applications ».Comput.Methods Appl.Mech.Engrg, 22 pages 06/04/1998 .
- [12] Jean-François Dubé « Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton. Applications aux séismes et aux chocs des ouvrages en béton armé » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan Décembre 1994.
- [13] Stéphanie Fichant « Endommagement et anisotropie induite du béton armé de structure. Modélisation approchées » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan Juin 1996.
- [14] Fabrice GATUINGT « Prévion de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan année 1999.

- [15] Peter H. Feenstra et René De Borst « Plasticity model and algorithm for mode I cracking in concrete. » International Journal for numerical methods in engineering, vol38, 2509 (1995).
- [16] Christian La Borderie « Stratégies et modèles de calculs pour les structures en béton » Thèse présentée pour l'obtention de L'habilitation à diriger les recherches année 2003 ; Université de Pau et des Pays de l'Adour France.
- [17] Christian La Borderie « Phénomène unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et application a l'analyse de structure » Thèse de doctorat de l'université Paris6 année 1991.
- [18] Nicolae Ion « Contribution à la compréhension du fonctionnement des voiles en béton armé sous sollicitation sismique. Chap. I : Problématique des voiles en béton armé ».
- [19] Stéphane MOULIN document R3.08.08 code aster « Élément de poutre multifibre (droite) » Année 2009.
- [20] Panagiotis Kotronis « Stratégies de Modélisation de Structures en Béton Soumises à des Chargements Sévères. » Thèse de diplôme d'habilitation à diriger des recherches- Université Joseph Fourier en France année 2008.
- [21] Stéphane MOULIN document U2.06.10 code aster « Réalisation d'une étude de génie civil sous chargement sismique » Année 2010.
- [22] Xuân Huy NGUYEN «Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation.» Thèse de doctorat-Institut national polytechnique de Grenoble en France année 2006.
- [23] D-Combescurie rapport DM2S « Modélisation des structures de génie civil sous chargement sismique à l'aide de CASTEM 2000 », 122 pages, année 06/03/2001.
- [24] Christian La Borderie, LASAGEC²/ UPPA. Rapport sur le benchmark cyclique. 20 pages, 2009.
- [25] Lebon G, Ragueneau F. & Delaplace A. Comportement et Evaluation des Ouvrages Spéciaux : Fissuration, Retrait, 15 pages, Octobre 2010.
- [26] M.Matallah, C. La Borderie, O.Maurel, A.Daoud « Crack openings computation using a plastic damage model », 29 pages, Août 2010.
- [27] Lien site internet projet national CEOS-FR : <http://www.ceosfr.org/> , 2011
- [28] Projet ANR Villes durables n° VD08_323065 « MEFISTO » 2009-2011, pilote du projet :
B.Capra.

Résumé

Dans ce travail, une stratégie de modélisation simplifiée basée sur l'utilisation des poutres multifibre 3D a été adoptée afin de simuler le comportement non linéaire des structures en béton armé. Cette technique garantit une souplesse du calcul grâce au petit nombre de degrés de liberté. Des lois de comportement locales basées sur la théorie de l'endommagement et de la plasticité sont utilisées pour le béton et pour l'acier.

Malgré la simplicité de l'approche semi globale, les modèles utilisés ont démontré leur capacité à prédire le comportement global non linéaire. Ils sont capables de décrire correctement l'endommagement dans les structures en béton armé. Néanmoins, la prédiction des ouvertures des fissures reste un point problématique.

Comment calculer l'ouverture des fissures si on utilise une modélisation multifibre ??

Pour répondre à cette question, un modèle d'endommagement "OUF" [5] a été implémenté en multifibre sur CAST3M, ce modèle a l'avantage de décrire l'évolution des ouvertures des fissures, il utilise une variable tensorielle ϵ_{ouf} liée aux déformations anélastiques par une fonction S appelée Indicateur d'Ouverture de Fissures. Pour éviter les problèmes de localisation, une technique de régularisation basée sur une approche énergétique a été utilisée. Enfin une méthode de post-traitement a été également développée pour l'évaluation des ouvertures de fissures au niveau local.

Mots clés : Modélisation, Multifibre, Ouverture de fissures, Endommagement, Plasticité.

Abstract

Crack Opening computation is one of the most challenge for concrete structures applications. This work deals with the development of a simplified modeling strategy using fiber beams 3D in order to estimate crack opening in concrete. In contrast with macroscopic modeling, multifiber beams theory offers a flexibility of calculation thanks to the small number of freedom degrees. Constitutive laws based on damage and plasticity is introduced in order to take into account of non linearity.

In spite of the simplicity of semi global approach, the models used showed their capacities to predict the nonlinear global behavior. They are able to correctly describe the damage in the concrete structures. However, the prediction of the openings cracks remains a problem.

How to calculate the opening cracks if we use a multifiber modeling??

To answer this question, a model of damage "OUF" [5] « Unitair Opening Cracks » on the finite Element Code Cast3M into fiber element. This model has the advantage of describing the evolution of opening cracks, it uses a tensorial variable ϵ^{uco} related to the anelastic deformations by a function S called Indicator of Opening Cracks. To avoid the problems of localization, a technique of regularization based on an energy approach was used. Finally a method of the post-processing was also developed for the evaluation of the openings- cracks at the local level.

Keywords: Crack opening, Multifiber beams, Damage, Plasticity.

المخلص

هذا العمل يتناول كيفية وضع استراتيجيات لنماذج مبسطة تعتمد على استعمال اعمدة ثلاثية الابعاد لحساب التصدعات على الهياكل الخرسانية. هذه الطريقة توفر مرونة في الحسابات بفضل العدد القليل من درجات الحرية. قوانين السلوك المحلية تعتمد على نظرية التلف والمرونة تستخدم على الخرسانة و الفولاذ.

على الرغم من بساطة طريقة شبه اجمالية النماذج المستخدمة أثبتت قدرتها على التنبؤ السلوك العام لاطخية وقادرة على تحديد نوعي لمناطق الضرر في الهياكل. ومع ذلك فإن التنبؤ لمعرفة تطور فتحات التصدعات لا يزال يمثل مشكلة.

كيف يتم حساب فتح التصدعات عند استخدام النموذج المتعدد الألياف؟

للإجابة على هذا السؤال نموذج الضرر "OUF" "فتحة وحدة التصدعات" تم وضعه على برنامج CAST3M في المتعدد الألياف. هذا النموذج لديه ميزة لوصف تطور فتحة وحدة التصدعات، يستخدم متغير ϵ_{ouf} يرتبط بالاعوجاجات الانبلاستيك بواسطة دالة S تسمى مؤشر افتتاح التصدعات. لتجنب المشاكل الموضوعية، تم استخدام تقنية تسوية تستند إلى نهج الطاقة. وقد وضعت طريقة في مرحلة ما بعد المعالجة لتقييم فتحات التصدعات على المستوى الموضوعي.

مفتاح الكلمات: المرونة، فتحة التصدعات، الضرر، المتعدد الألياف

