

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEM
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Option : Equations aux dérivées partielles

Présenté par :

Bekkar Ismail

*Sur les équations aux dérivées partielles à
retard*

Soutenue devant le jury composé de :

_____	M. Yebdri Mustapha	Professeur, Université de Tlemcen (Président)
_____	M. Houbad Mekki	MCA, Université de Tlemcen (Examineur)
_____	M ^{me} . Dib Fatima	MCA, Centre universitaire de Maghnia (Encadrante)

Soutenue le : **28 06 2025**

Année Universitaire : **2024-2025**

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles avec retard (EDPR). L'accent est mis sur les équations de réaction-diffusion non linéaires de la forme

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).$$

L'originalité du travail réside dans l'introduction et l'application d'une nouvelle méthode : la **méthode des contraintes fonctionnelles**, qui combine la séparation généralisée des variables et des contraintes fonctionnelles supplémentaires pour construire des solutions exactes. Cette approche permet de traiter des équations contenant une ou deux fonctions arbitraires. Les résultats sont étendus à des classes plus générales d'EDP non linéaires avec retard, incluant des opérateurs différentiels linéaires d'ordre quelconque et des retards variables. De nombreuses solutions exactes explicites sont obtenues, avec des paramètres libres, utiles pour la modélisation en physique, biologie, écologie, et théorie du contrôle.

Summary

This work focuses on the study of partial differential equations with delay (PDEs with delay). It specifically addresses nonlinear reaction–diffusion equations of the form

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).$$

The main contribution is the introduction and application of a novel method called the **functional constraints method**, which combines generalized separation of variables with additional functional constraints to construct exact solutions. This method effectively handles equations with one or two arbitrary functions. The results are extended to more general classes of nonlinear delay PDEs, including linear differential operators of arbitrary order and time-varying delays. Numerous explicit exact solutions with free parameters are provided, which are valuable for modeling in physics, biology, ecology, and control theory.

ملخص

هذه المذكرة مكرسة لدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات التأخير. يركز العمل بشكل خاص على معادلات التفاعل-الانتشار اللاخطية من الشكل :

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w)$$

يتمثل الابداع الأساسي في تقديم وتطبيق طريقة جديدة تسمى طريقة القيود الدالية والتي تجمع بين فصل المتغيرات المعمم وقيود دالية إضافية لبناء حلول دقيقة. تسمح هذه الطريقة بمعالجة المعادلات التي تحتوي على دالة أو دالتين اختيارييتين ثم توسيع النتائج لتشمل فئات أعم من المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية ذات التأخير، بما في ذلك تأخيرات متغيرة. تم الحصول على العديد من الحلول الدقيقة الصريحة ذات معاملات حرة، وهي مفيدة للنمذجة في الفيزياء و الأحياء و الإيكولوجيا ونظرية التحكم.

JE DÉDIE MON TRAVAIL À :

*À la mémoire de mon cher père,
qu'Allah lui accorde Sa miséricorde et l'accueille dans Son
vaste paradis.*

*À ma mère,
source inépuisable d'amour, de patience et de prières.*

*À ma sœur et à mes frères,
pour leur affection constante et leur appui sincère.*

*À tous les proches de ma famille,
pour leurs encouragements, leur bienveillance et leur
présence.*

*À tout mon cercle le plus proche,
fidèles compagnons de route, toujours là dans les moments
décisifs.*

*Et à mon encadrante,
pour sa précieuse orientation, ses conseils avisés et sa
confiance.*

Que chacun trouve ici l'expression sincère de ma profonde gratitude.

Remerciements

Louange à Allah, Le Très-Miséricordieux, Le Sage, pour m'avoir accordé la patience, la force et la volonté de mener à bien ce travail. C'est par Sa grâce que cette recherche a pu être accomplie.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrante, **Madame Dib Fatima**, pour sa précieuse orientation, sa patience, sa disponibilité constante et ses conseils éclairés tout au long de ce travail. Son encadrement rigoureux, sa bienveillance et sa confiance m'ont permis de progresser avec sérénité.

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux membres du jury, M. **Yebdri Mustapha** et M. **Houbad Mekki** pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce mémoire, ainsi que pour leur lecture attentive et leurs remarques constructives.

Je remercie également l'ensemble du corps enseignant du **Département de Mathématiques** de l'Université **Abou Bakr Belkaid – Tlemcen** pour la qualité des enseignements dispensés tout au long de mon parcours.

Je n'oublie pas mes collègues et camarades, avec qui j'ai partagé de précieux moments d'échange, de collaboration et d'amitié tout au long de cette formation.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille et mes amis proches pour leur soutien moral indéfectible, leur compréhension et leurs encouragements constants, sans lesquels ce travail n'aurait pu voir le jour.

Que chacun, de près ou de loin, ayant contribué à l'élaboration de ce mémoire, trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

Table des matières

1	Préliminaires et Définitions	13
1.1	Notions générales sur les Équations aux Dérivées Partielles	13
1.2	Méthodes classiques de résolution des EDPs	16
1.2.1	Méthode de séparation des variables	16
1.2.2	Cas simples de séparation des variables dans les équations non linéaires :	16
1.2.3	Méthodes de séparation des variables généralisée	18
1.2.4	La Méthode des Contraintes Différentielles	19
1.3	Présentation des équations aux dérivées partielles avec retard	21
1.4	Classification des Équations Différentielles Partielles à Retard	22
1.5	Exemples d'Application des Équations Différentielles Partielles à Retard .	23
1.5.1	Équations de Réaction-Diffusion avec Retards en Écologie	23
1.5.2	Oscillateurs couplés et matériaux viscoélastiques	25
1.5.3	Modèles climatiques	25
1.5.4	Four à commande automatique	26
1.6	Définition du concept "solution exacte" d'une EDPR	27
2	Méthode des Contraintes fonctionnelles et Applications	29
2.1	L'équation impliquant une fonction arbitraire dépendante de w/u	30
2.2	Équation avec une fonction arbitraire dépendant d'une combinaison linéaire de u et w	34
2.3	Équation avec deux fonctions arbitraires dépendants d'une combinaison linéaire de u et w	41
2.4	Équation avec deux fonctions arbitraires dépendant de $u^2 + w^2$	46
2.5	Équations aux dérivées partielles non linéaires avec retard généralisées . . .	47
2.6	Équations aux dérivées partielles générales avec retard variable	55
3	Conclusion générale	57

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines très variés. En plus de leur intérêt pour la résolution de problèmes purement mathématiques, le concept d'EDP est aussi bien utilisé en Sciences de la matière : Physique, Chimie, Biologie, qu'en Sciences économiques et sociales : Economie, Finance, Sociologie. En général une EDP décrit l'évolution d'un système en fonction du temps et une ou plusieurs variables dimensionnelles, lorsqu'une telle évolution dépend de certaines valeurs (valeurs prises par le système) du « passé », on parle d'équations aux dérivées partielles à retard (EDPRs en abrégé). Contrairement aux équations différentielles ordinaires, où la donnée initiale est un point d'un espace vectoriel de dimension finie, la condition initiale d'une EDPR est une fonction définie sur un intervalle, de longueur égale au retard (ou, dans certains cas, égale au retard maximum). L'inclusion du retard dans la description d'une dynamique nous permet d'obtenir un modèle encore plus proche de la réalité. En conséquence, les équations à retard interviennent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques, et en particulier en biologie (évolution des populations, épidémiologie) où de nombreux phénomènes sont non-locaux, en la variable de temps mais parfois également en la variable d'espace ou ce qui tient lieu de la variable "d'espace" (la maturité, l'âge, la taille, etc.) pour plus de détails voir [14].

Les solutions exactes d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles jouent un rôle important dans la compréhension des caractéristiques qualitatives de nombreux phénomènes et processus dans divers domaines des sciences naturelles (voir [7]). Elles permettent de décrypter les mécanismes de nombreux phénomènes non linéaires complexes, tels que la localisation spatiale des processus de transfert, la multiplicité ou l'absence d'états stationnaires dans diverses conditions, l'existence de régimes de pics, et bien d'autres.

Les solutions exactes permettent aux chercheurs de concevoir et de réaliser des expériences comme elles peuvent aussi servir de base au perfectionnement et aux tests de logiciels de calcul formel pour la résolution d'équations différentielles.

De plus, les solutions simples sont souvent utilisées dans de nombreux cours comme exemples concrets illustrant les principes fondamentaux d'une théorie qui admet une formulation mathématique

Dans ce travail nous nous intéressons plus précisément aux équations de type réaction-diffusion non linéaires avec retard de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (1)$$

où $\tau > 0$ représente le retard. Ce type d'équations est très pertinent pour modéliser des systèmes dynamiques comportant un mécanisme de diffusion spatiale couplé à une réponse différée.

De nombreuses solutions exactes ont été obtenues pour l'équation de la chaleur avec

source non linéaire (cas particulier sans retard, où $F(u, w) = f(u)$), mais les solutions pour le cas général avec retard demeurent relativement rares et souvent difficiles à obtenir explicitement. Certaines approches sont basées sur les solutions d'ondes progressives de la forme $u(x, t) = u(\alpha x + \beta t)$, qui apparaissent fréquemment dans la littérature voir [11, 16] et les références qui s'y trouvent.

Une équation de la forme 1 a été étudié dans [6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u [-a \ln u + f(wu^{-b})], b = e^{a\tau} \quad (2)$$

où $f(z)$ est une fonction arbitraire, les auteurs ont trouvé pour 2 la solution exacte suivante :

$$u(x, t) = \exp(Cxe^{-at})\varphi(t),$$

où C est une constante arbitraire et $\varphi(t)$ est une fonction satisfaisant l'équation différentielle ordinaire à retard

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \left[C^2 k e^{-2at} - a \ln \varphi(t) + f\left(\varphi(t - \tau)\varphi(t)^{-b}\right) \right],$$

Ces types de solutions montrent l'intérêt d'approches nouvelles capables de fournir des solutions exactes même dans le cadre non linéaire avec retard, où l'application directe des méthodes classiques, telle que la séparation des variables généralisée, échouent ou deviennent impraticables. Nous proposons une nouvelle méthode pour construire des solutions exactes aux équations non linéaires de réaction-diffusion à retard de la forme 1, ces solutions sont déterminées en considérant des contraintes fonctionnelles supplémentaires (équations aux différences ou équations fonctionnelles) d'où le nom de cette méthode : "méthode des contraintes fonctionnelles".

Ce mémoire est composé de deux principaux chapitres suivi d'une conclusion générale. Le premier chapitre est consacré à :

- 1- Une présentation des EDPs sans retard dans laquelle on donne des définitions , classification et quelques méthodes de résolution.
- 2- Une présentation des EDPs avec retard dans laquelle on donne des définitions , classification et quelques exemples d'application dans différents domaines.

Le deuxième chapitre qui est largement inspiré de l'article D. Polyanin et al [9], est consacré à :

- 1- l'introduction de la méthode des contraintes fonctionnelles : description générale et principe.
- 2- l'application de la méthode des contraintes fonctionnelles combinée avec la méthode de séparation des variables généralisée à des équations de réaction-diffusion à retard non-linéaires et d'autres équations plus générales.

Toutes les équations considérées contiennent une ou deux fonctions arbitraires d'un seul argument. Nous décrivons un nombre considérable de nouvelles solutions exactes trouvées par la méthode de séparation des variables généralisée et quelques solutions plus complexes représentant une superposition non linéaire de solutions séparables généralisées et d'ondes progressives.

Toutes les solutions impliquent des paramètres libres (parfois une infinité de paramètres) et peuvent donc convenir à la résolution de certains problèmes et au test de méthodes analytiques et numériques approximatives pour les EDP à retard non linéaires. Les résultats

sont étendus à une large classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires impliquant des opérateurs différentiels linéaires arbitraires de tout ordre par rapport aux variables indépendantes x et t (en particulier, cette classe inclut l'équation de Klein-Gordon à retard non linéaire), ainsi qu'à certaines équations aux dérivées partielles fonctionnelles à retard variable dans le temps.

Chapitre 1

Préliminaires et Définitions

1.1 Notions générales sur les Équations aux Dérivées Partielles

Définition :

On appelle **équation aux dérivées partielles (EDP)** une équation qui relie une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes à ses dérivées partielles.

Une EDP exprime donc une relation entre une fonction $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et ses dérivées par rapport à ces variables. Ces équations servent à modéliser des phénomènes où la quantité étudiée dépend simultanément de plusieurs variables, typiquement le temps et l'espace.

La forme générale d'une EDP s'écrit :

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots\right) = 0$$

Une EDP est dite :

- **Linéaire** si la fonction inconnue u et ses dérivées apparaissent de façon linéaire dans l'équation.
- **Non linéaire** si la fonction u ou ses dérivées apparaissent de manière non linéaire (par exemple : produit de dérivées, termes au carré, fonctions non linéaires de u , etc.).

Exemples d'équations aux dérivées partielles (EDP)

Voici quelques exemples classiques d'équations aux dérivées partielles largement utilisées dans la modélisation des phénomènes physiques :

- **1. Équation de la chaleur (ou de diffusion) :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cette équation modélise la propagation de la chaleur dans un milieu ou la diffusion d'une substance.

- **2. Équation des ondes :**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Elle décrit la propagation des ondes mécaniques ou électromagnétiques, comme les vibrations d'une corde.

- **3. Équation de Laplace :**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Elle intervient dans des phénomènes en régime stationnaire, tels que la conduction thermique à l'équilibre ou le champ électrostatique.

- **4. Équation de Poisson :**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

C'est une généralisation de l'équation de Laplace avec une source ou un terme de forçage.

- **5. Équation d'advection :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Elle modélise le transport d'une quantité (température, polluant, fluide) par un écoulement.

- **6. Équation de Schrödinger :**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

Cette équation fondamentale décrit l'évolution d'une particule en mécanique quantique.

Classification :

Considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = 0$$

Pour déterminer le type de l'équation, on calcule le discriminant :

$$D = B^2 - AC$$

- Si $D > 0$, l'équation est **hyperbolique**.

Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(u)$$

Ici, $A = 1$, $B = 0$, $C = -c^2$ Calculons le discriminant :

$$D = B^2 - AC = 0^2 - (1)(-c^2) = c^2 > 0$$

Donc, l'équation est **hyperbolique**.

- Si $D = 0$, l'équation est **parabolique**.

Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u^2$$

Ici, $A = 0$, $B = 0$, $C = -1$

Calculons le discriminant :

$$D = B^2 - AC = 0^2 - (0)(-1) = 0$$

Donc, l'équation est **parabolique**.

— Si $D < 0$, l'équation est **elliptique**.

Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ici, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$

Calculons le discriminant :

$$D = B^2 - AC = 0^2 - (1)(1) = -1 < 0$$

Donc, l'équation est **elliptique**.

Notion de conditions initiales et conditions aux limites

Condition initiale :

Une condition initiale permet de spécifier l'état initial de la solution au temps $t = 0$. Elle donne la valeur de la fonction inconnue (et parfois de ses dérivées) pour toutes les positions dans l'espace au moment initial.

Par exemple, pour une fonction $u(x, t)$, la condition initiale peut s'écrire :

$$u(x, 0) = f(x)$$

Cette condition représente la répartition initiale de u dans le domaine spatial.

Condition aux limites :

Une condition aux limites permet de spécifier le comportement de la solution sur les bords du domaine spatial. Ces conditions sont essentielles pour assurer l'unicité et l'existence de la solution du problème.

Exemples courants :

— **Condition de Dirichlet** : on impose la valeur de la fonction sur les bords du domaine.

$$u(0, t) = u_0, \quad u(L, t) = u_L$$

— **Condition de Neumann** : on impose la valeur de la dérivée normale (flux) sur les bords.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = q_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = q_L$$

— **Condition de Robin** : on impose une combinaison linéaire entre la fonction et sa dérivée sur les bords.

$$\alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t), \quad \alpha u(L, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = h(t)$$

Cette condition est aussi appelée condition aux limites mixtes.

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont indispensables pour bien définir un problème aux dérivées partielles et garantir une solution unique et cohérente.

1.2 Méthodes classiques de résolution des EDPs

1.2.1 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables est une technique couramment utilisée pour résoudre certaines EDPs lorsqu'on peut écrire la solution sous forme d'un produit ou la somme de fonctions dépendant chacune d'une seule variable.

Principe général

On suppose que la solution de l'équation différentielle peut être écrite sous la forme :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \text{ ou bien } u(x, t) = X(x) + T(t)$$

En substituant cette forme dans l'équation donnée, on obtient une séparation des variables, c'est-à-dire deux équations différentielles ordinaires indépendantes.

Exemple : Équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En posant $u(x, t) = X(x)T(t)$, on obtient :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = k \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda.$$

Cela conduit à deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} + \lambda T &= 0, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{\lambda}{k} X &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont alors obtenues par résolution de ces équations différentielles ordinaires.

1.2.2 Cas simples de séparation des variables dans les équations non linéaires :

Dans certains cas isolés, la séparation des variables dans les équations non linéaires est réalisée en suivant la même technique que pour les équations linéaires. Plus précisément, on cherche une solution exacte sous la forme d'un produit ou d'une somme de fonctions dépendant d'arguments différents. En substituant cette forme dans l'équation et en effectuant des manipulations algébriques élémentaires, on obtient une équation dont les deux membres dépendent de variables différentes (pour les équations à deux variables). On en conclut alors que les expressions de chaque côté doivent être égales à une même constante, appelée constante de séparation. Ci-dessous, nous examinons des exemples spécifiques.

Exemple 1. L'équation de la chaleur avec une non-linéarité de puissance

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^k \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

admet une solution exacte (que l'on peut exprimer de manière explicite sous forme d'une fonction connue et utilisable directement) sous forme de produit

$$w = \varphi(x)\psi(t).$$

En substituant $w = \varphi(x)\psi(t)$ dans notre équation, on obtient

$$\varphi\psi_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi_x)_x.$$

En séparant les variables en divisant les deux membres par $\varphi\psi^{k+1}$, on a

$$\frac{\psi_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi_x)_x}{\varphi}.$$

Le membre de gauche dépend uniquement de t et celui de droite uniquement de x . Ceci n'est possible que si

$$\frac{\psi_t}{\psi^{k+1}} = C, \quad \frac{a(\varphi^k\varphi_x)_x}{\varphi} = C,$$

où C est une constante arbitraire (constante de séparation). En résolvant les équations différentielles ordinaires $\frac{\psi_t}{\psi^{k+1}} = C$ et $\frac{a(\varphi^k\varphi_x)_x}{\varphi} = C$, on obtient une solution de l'équation originale sous la forme $w = \varphi(x)\psi(t)$.

La procédure de construction d'une solution séparable $w = \varphi(x)\psi(t)$ de l'équation non linéaire $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^k \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ est identique à celle utilisée pour résoudre des équations linéaires [en particulier, l'équation $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^k \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ avec $k = 0$]. Nous qualifions ces cas de séparation de variables similaires de **cas séparables simples**.

Exemple 2. L'équation d'onde avec une non-linéarité exponentielle

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

admet une solution séparable additivement

$$w = \varphi(x) + \psi(t).$$

En substituant $w = \varphi(x) + \psi(t)$ dans $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ et en divisant par $e^{\lambda\psi}$, on obtient l'équation

$$e^{-\lambda\psi}\psi_{tt} = a(e^{\lambda\varphi}\varphi_x)_x,$$

dont le membre de gauche dépend uniquement de t et celui de droite uniquement de x . Ceci n'est possible que si

$$e^{-\lambda\psi}\psi_{tt} = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi_x)_x = C,$$

où C est une constante arbitraire. La résolution des équations différentielles ordinaires $e^{-\lambda\psi}\psi_{tt} = C$ et $a(e^{\lambda\varphi}\varphi_x)_x = C$ donne une solution de l'équation originale sous la forme $w = \varphi(x) + \psi(t)$.

Exemple 3. L'équation de la chaleur dans un milieu anisotrope avec une source logarithmique

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] = aw \ln w$$

admet une solution séparable multiplicativement

$$w = \varphi(x)\psi(y).$$

En substituant $w = \varphi(x)\psi(y)$ dans $\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] = aw \ln w$, en divisant par $\varphi\psi$ et en transposant certains termes de l'équation résultante, on obtient

$$\frac{1}{\varphi} [f(x)\varphi_x]_x - a \ln \varphi = \frac{1}{\psi} [g(y)\psi_y]_y + a \ln \psi.$$

Le membre de gauche de cette équation dépend uniquement de x et celui de droite uniquement de y . En égalant les deux membres à une constante, on obtient des équations différentielles ordinaires pour $\varphi(x)$ et $\psi(y)$.

1.2.3 Méthodes de séparation des variables généralisée

Forme générale des solutions. Classes d'équations non linéaires considérées

Pour simplifier la présentation, nous nous limitons au cas des équations de physique mathématique à deux variables indépendantes x, y et une variable dépendante w (l'une des variables indépendantes peut jouer le rôle du temps). Les équations linéaires séparables de physique mathématique admettent des solutions exactes sous la forme

$$w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \quad (1.1)$$

où les $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ sont des solutions particulières; les fonctions $\varphi_i(x)$, ainsi que les fonctions $\psi_i(y)$, avec des nombres i différents ne sont pas liées entre elles. Les équations linéaires séparables de physique mathématique admettent des solutions exactes sous la forme (2.2). Cette forme de solution repose sur le **principe de superposition**, qui est valable dans le cadre des équations linéaires. En effet, le principe de superposition stipule que si plusieurs fonctions $w_i(x, y)$ satisfont indépendamment une équation différentielle linéaire, alors toute combinaison linéaire de ces fonctions, c'est-à-dire

$$w(x, y) = \sum_i \varphi_i(x)\psi_i(y),$$

constitue également une solution. Ce principe permet de construire la solution générale en superposant (additionnant) des solutions particulières associées à différents modes ou valeurs propres.

Cependant, dans le cas des équations non linéaires, ce principe de superposition classique n'est plus applicable directement. Néanmoins, des solutions exactes peuvent encore être obtenues sous des formes plus complexes, appelées **solutions séparables généralisées**. Ces solutions peuvent inclure des produits et des puissances non linéaires de la fonction w et de ses dérivées, comme illustré par l'équation (2.3).

De nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires avec des non-linéarités quadratiques ou de puissance admettent également des solutions exactes de la forme (1.1) :

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[w] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[w] + \cdots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[w] = 0, \quad (1.2)$$

où les $\Pi_i[w]$ sont des formes différentielles qui sont des produits de puissances entières non négatives de la fonction w et de ses dérivées partielles $\partial_x w, \partial_y w, \partial_{xx} w, \partial_{xy} w, \partial_{yy} w, \partial_{xxx} w$, etc. Nous appellerons les solutions (1.1) des équations non linéaires (1.2) des solutions séparables généralisées. Contrairement aux équations linéaires, dans les équations non linéaires, les fonctions $\varphi_i(x)$ avec des indices i différents sont généralement liées entre elles [et aux fonctions $\psi_j(y)$].

Remarque.

Si les $f_s(x)$ et $g_s(y)$ dans (1.2) sont tous constants, alors on peut chercher des solutions sous la forme plus générale

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(\xi) \psi_m(\eta), \quad \xi = a_1 x + a_2 y, \quad \eta = b_1 x + b_2 y,$$

où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont des constantes.

Forme générale des équations fonctionnelles différentielles

En général, en substituant l'expression (1.1) dans l'équation différentielle (1.2), on obtient une équation fonctionnelle différentielle

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \cdots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0 \quad (1.3)$$

pour les $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(y)$. Les fonctionnelles $\Phi_j(X)$ et $\Psi_j(Y)$ dépendent uniquement de x et y , respectivement,

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &\equiv \Phi_j(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''), \\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \dots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''). \end{aligned}$$

Ici, pour simplifier, les formules sont écrites pour le cas d'une équation du second ordre (1.2); pour des équations d'ordre supérieur, les membres de droite des relations contiendront des dérivées d'ordre supérieur des φ_i et ψ_j .

1.2.4 La Méthode des Contraintes Différentielles

La méthode des contraintes différentielles est une méthode de recherche de solutions exactes des équations différentielles partielles (EDP), en particulier non linéaires. Elle consiste à imposer une ou plusieurs **contraintes différentielles supplémentaires**, qui permettent de réduire l'équation initiale à un système d'équations plus simple, souvent une équation différentielle ordinaire (EDO).

Principe de la méthode :

— On considère une EDP donnée sous la forme :

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (1.4)$$

— On impose une contrainte différentielle additionnelle :

$$\Phi(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (1.5)$$

- La contrainte est choisie de manière à réduire la complexité de l'EDP et permet souvent de réduire le nombre de variables indépendantes.
- On vérifie la compatibilité de la contrainte avec l'EDP principale et on résout le système obtenu.

Exemple : Application à l'équation de Burgers

Considérons l'équation de Burgers avec viscosité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

On impose la contrainte suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda u$$

où λ est une constante à déterminer.

De la contrainte $u_x = \lambda u$, on déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda^2 u$$

On suppose que la solution $u(x, t)$ a la forme :

$$u(x, t) = A(t)e^{\lambda x}$$

Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dA}{dt} e^{\lambda x}$$

Substituons dans l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Le membre de gauche donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{dA}{dt} e^{\lambda x} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &= A e^{\lambda x} \cdot \lambda A e^{\lambda x} = \lambda A^2 e^{2\lambda x} \end{aligned}$$

Le membre de droite donne :

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nu \lambda^2 A e^{\lambda x}$$

L'équation devient :

$$\frac{dA}{dt} e^{\lambda x} + \lambda A^2 e^{2\lambda x} = \nu \lambda^2 A e^{\lambda x}$$

On simplifie par $e^{\lambda x}$:

$$\frac{dA}{dt} + \lambda A^2 e^{\lambda x} = \nu \lambda^2 A$$

Pour que cette équation soit compatible, il faut que le terme $A^2 e^{\lambda x}$ soit indépendant de x . Ceci impose une contrainte supplémentaire sur la forme de $A(t)$ ou fixe $\lambda = 0$. Dans ce cas particulier, on considère une solution indépendante de x , donc $\lambda = 0$. La contrainte devient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = A(t)$$

Et l'équation de Burgers se réduit à une EDO :

$$\frac{dA}{dt} = 0$$

Sa solution est :

$$A(t) = C$$

Ce qui donne la solution stationnaire :

$$u(x, t) = C$$

Remarque :

En choisissant une contrainte plus complexe (par exemple $u_x = \lambda(t)u$), on peut obtenir des solutions plus riches. La méthode des contraintes différentielles permet donc de transformer l'EDP de départ en une EDO plus facile à résoudre, sous certaines hypothèses sur la structure de la solution.

1.3 Présentation des équations aux dérivées partielles avec retard

Equation différentielle à retard

Soient X un espace de Banach et $r > 0$, on considère la fonction $u : [-r, \infty) \rightarrow X$. Pour tout $t \geq 0$ on appelle la fonction u_t définie sur $[-r, 0]$ à valeurs dans X par :

$$u_t : s \mapsto u(t + s)$$

le segment d'histoire de u en t .

Définition : On appelle équation différentielle à retard une équation de la forme :

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}u(t) = g(u(t), u_t)$$

avec g une application à valeurs dans X .

On voit bien que dans une équation différentielle à retard la valeur de la dérivée à un instant t de la solution u dépend non seulement de la valeur de u à l'instant t mais aussi de ses valeurs prises avant cet instant (dans le passé) d'où le mot retard.

Equation aux dérivées partielles à retard

Définition :

Une **équation aux dérivées partielles à retard** (EDP à retard) est une équation dans laquelle la fonction inconnue dépend non seulement des variables actuelles d'espace et de temps, mais aussi de la valeur de la fonction ou de ses dérivées à des instants antérieurs (ou dans des positions décalées dans le temps ou l'espace).

En général, une EDP à retard s'écrit sous la forme :

$$F\left(x, t, u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, u(x, t - \tau), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t - \tau), \dots\right) = 0$$

où :

- $u(x, t)$ est la fonction inconnue.
- $\tau > 0$ est le **temps de retard** (ou délai).
- Les termes comme $u(x, t - \tau)$ introduisent une dépendance explicite du passé dans l'équation.

1.4 Classification des Équations Différentielles Partielles à Retard

Les équations aux dérivées partielles à retard peuvent être classées selon plusieurs critères, notamment la nature du retard, sa position dans l'équation, et la structure (linéaire ou non linéaire).

1. EDP à retard temporel :

La fonction inconnue dépend de ses valeurs passées dans le temps.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(x, t - \tau))$$

2. EDP à retard spatial :

La fonction dépend de ses valeurs à des positions spatiales décalées.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(x - \delta, t))$$

3. EDP à retard mixte (temporel et spatial) :

La fonction dépend de ses valeurs passées dans le temps et décalées dans l'espace.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(x - \delta, t - \tau))$$

4. EDP à retard discret :

Le retard est fixe et constant.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(x, t - \tau))$$

5. EDP à retard variable :

Le retard dépend du temps, de l'espace ou de la solution.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(x, t - \tau(t)))$$

6. EDP à retard linéaire :

Le terme retardé intervient de manière linéaire.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(x, t - \tau)$$

7. EDP à retard non linéaire :

Le terme retardé intervient dans une relation non linéaire.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(x, t - \tau))$$

8. EDP à Retard Continu ou Distribué

Ce type dépend d'une **intégrale** représentant la contribution des états passés sur un **intervalle de temps**.

Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t K(t - s)u(x, s) ds$$

En effectuant le changement de variable ($\tau = t - s \Rightarrow s = t - \tau$, $ds = -d\tau$), on obtient l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t K(\tau) u(x, t - \tau) d\tau$$

1.5 Exemples d'Application des Équations Différentielles Partielles à Retard

Les équations aux dérivées partielles à retard sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes naturels dans divers domaines comme la biologie, la médecine, la théorie du contrôle, les modèles climatiques et bien d'autres (voir par exemple [14] et les références qui y figurent).

Leurs variables indépendantes sont le temps t et une ou plusieurs variables dimensionnelles x , qui représentent généralement la position dans l'espace, mais peuvent également représenter le contenu relatif en ADN, la taille des cellules, leur niveau de maturation, ou d'autres valeurs. Les solutions (variables dépendantes) des équations aux dérivées partielles à retard peuvent représenter la température, la tension, ou les concentrations ou densités de diverses particules, par exemple des cellules, des bactéries, des produits chimiques, des animaux, etc

1.5.1 Équations de Réaction-Diffusion avec Retards en Écologie

Les équations de réaction-diffusion avec retards jouent un rôle crucial dans la modélisation des dynamiques des populations en écologie, incorporant à la fois les effets spatiaux et temporels.

Le modèle le plus simple de base sans diffusion spatiale est l'équation logistique :

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left[1 - \frac{u(t)}{K} \right]$$

où K est la capacité porteuse de l'environnement. Pour tenir compte des retards temporels (gestation, renouvellement des ressources), L'équation avec retard discret est sous la forme :

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left[1 - \frac{u(t - \tau)}{K} \right]$$

Ce modèle montre des comportements riches :

- Convergence exponentielle vers K si $\tau < e^{-1}$
- Convergence oscillatoire si $e^{-1} < \tau < \pi/2$
- Cycle limite stable si $\tau > \pi/2$

Une généralisation plus réaliste utilise un retard distribué :

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left[1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t Q(t-s)u(s)ds \right]$$

L'ajout de la diffusion spatiale donne des équations de réaction-diffusion. Pour une population $u(x, t)$ dans un environnement unidimensionnel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, u) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

Si $\phi(x) = D$ est constant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Conditions aux limites typiques :

- Dirichlet : $u(0, t) = u(L, t) = 0$ (environnement défavorable aux bords)
- Neumann : $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0$ (pas de flux aux bords)

Pour des modèles plus généraux avec retards et diffusion, on trouve le modèle de type Lotka-Volterra :

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = d_i \Delta u_i + b_i u_i \left[r_i - a_i \int_{-\tau_i}^0 u_i(x, t+s) d\mu_i(s) + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 u_j(x, t+s) d\mu_{ij}(s) \right]$$

Modèle de Britton :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + u[1 + \alpha u - (1 + \alpha)g * u],$$

où :

$$g * u = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} g(x-y, t-s) u(y, s) dy ds,$$

avec noyau :

$$g(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) w(t).$$

Une applications aux Systèmes Proie-Prédateur, on trouve le modèle de Murray :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \alpha \Delta v(x, t) + h \left(\int_0^\infty K(s) v(x, t-s) ds \right) - m \left(\int_0^\infty H(s) v(x, t-s) ds \right).$$

L'interaction entre diffusion spatiale et retards temporels conduit à une riche variété de dynamiques en écologie des populations, permettant de mieux comprendre les motifs observés dans la nature.

1.5.2 Oscillateurs couplés et matériaux viscoélastiques

Les travaux de Hale (voir [4]) ont mis en évidence qu'une classe particulière d'équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires de type neutre émerge naturellement dans l'étude de la stabilisation spatiale de réseaux d'oscillateurs couplés. Le système fondamental s'écrit :

$$\frac{d}{dt}D(v_t^k) = \frac{1}{RC}D(v_t^{k+1} - 2v_t^k + v_t^{k-1}) + H(v_t^k), \quad k(\bmod N)$$

Cette équation, dérivée de modèles hyperboliques non linéaires, décrit la dynamique de lignes de transmission couplées en configuration annulaire. La fonctionnelle $D(\phi) = \phi(0) - q\phi(-r)$ (pour $\phi \in C([-r, 0]; \mathbb{R})$) et les paramètres q, R, C caractérisent le système, tandis que H représente une non-linéarité régulière (voir [15]).

Un enjeu majeur concerne l'existence d'oscillations synchrones, où toutes les composantes présentent le même profil avec un simple déphasage. La dynamique globale dépend crucialement du nombre N_0 d'oscillateurs, seuil au-delà duquel apparaît une stabilisation spatiale. Hale [4] propose une approche innovante en remplaçant le réseau discret par un continuum, transformant ainsi le système en une équation aux dérivées partielles fonctionnelle neutre :

$$\frac{\partial}{\partial t}D(v_t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2}D(v_t) + H(v_t)$$

Cette formulation continue permet d'étudier des propriétés dynamiques robustes aux perturbations, fournissant ainsi des informations précieuses sur le système discret original. Les travaux pionniers de Hale [4] ont ouvert de nouvelles perspectives théoriques pour ces problèmes complexes.

Parallèlement, les équations fonctionnelles neutres apparaissent naturellement en mécanique des milieux continus. L'équation intégral-différentielle :

$$\dot{u}(t) = A_T \left[u(t) + \int_{-\infty}^t F(t-s)u(s)ds \right] + \int_{-\infty}^t K(t-s)u(s)ds$$

modélise divers phénomènes physiques :

- Conduction thermique dans les matériaux rigides isotropes
- Comportement viscoélastique en déformation anti-plane
- Problèmes de thermoviscoélasticité

Sous l'hypothèse de différentiabilité de F , cette équation se réécrit sous la forme neutre avec retard infini :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[u(t) + \int_{-\infty}^t F(t-s)u(s)ds \right] &= A_T \left[u(t) + \int_{-\infty}^t F(t-s)u(s)ds \right] + F(0)u(t) \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \left[K(t-s) + \dot{F}(t-s) \right] u(s)ds \end{aligned}$$

1.5.3 Modèles climatiques

Les équations de réaction-diffusion avec retard apparaissent naturellement dans l'étude des modèles climatiques. Ces modèles s'appuient sur l'utilisation de :

- L'équation de conservation de l'énergie ;
- Une approximation diffusant du flux thermique horizontal ;

Pour décrire l'évolution d'une moyenne à long terme de la température, un modèle bidimensionnel de base conduit à l'équation :

$$c(x) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u(\cdot, t)) (x) = \mu Q(x) h(x, u(x, t)) - g(u(x, t)), \quad (1.7)$$

définie sur la sphère Euclidienne S^2 dans $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement sur une variété compacte orientable M sans bord de dimension 2.

Les climats globaux possibles correspondent aux solutions stationnaires stables de (1.7). Une question cruciale concerne leur dépendance au paramètre clé - la constante solaire μ . Soit :

$$S = \{(\mu, w) \in [0, \infty) \times C(M; [0, \infty)) \mid w \text{ solution stationnaire de (1.7)}\}$$

La branche principale P , composante connexe de S contenant $(0, 0)$, présente une structure caractéristique :

- Courbe de Jordan reliant $(0, 0)$ à (∞, ∞) .
- Points de retournement en nombre fini.
- Segments avant ($\frac{d}{d\rho} \mu_\rho > 0$) : solutions stables.
- Segments arrière ($\frac{d}{d\rho} \mu_\rho < 0$) : solutions instables.

Cette *structure-S* a été établie rigoureusement en utilisant :

- Le degré de Leray-Schauder.
- Le théorème des fonctions implicites.

Modélisation du retard climatique

Une limitation fondamentale du modèle (1.7) est l'hypothèse d'un lien direct entre l'albédo h et la température instantanée u . Pour une moyenne sur 30 ans :

$$u(x, t) = \frac{1}{30} \int_{-15}^{15} \Theta(x, t + \theta) d\theta$$

il convient plutôt d'utiliser une formulation avec mémoire :

$$\hat{h} \left(x, u(x, t), \int_{-T}^0 b(s) u(x, t + s) ds \right)$$

où b est une fonction de poids normalisée ($\int_{-T}^0 b(s) ds = 1$). Cette modification :

- préserve les solutions stationnaires,
- modifie leur stabilité,
- et intègre l'hystérésis des calottes glaciaires (échelle $> 10\,000$ ans).

1.5.4 Four à commande automatique

En 1963, Wang [13] a proposé le modèle d'équation aux dérivées partielles parabolique avec deux retards $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + v(g(u(t - \tau_1, x))) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + c(f(u(t - \tau_2, x)) - u(t, x)). \quad (1.8)$$

pour étudier un four à commande automatique. Ce four est alimenté par la bande de matériau à traiter thermiquement à température contrôlée, la température du four est modifiée au moyen d'un élément chauffant commandé par un régulateur. L'objectif du contrôle est de maintenir la distribution spatiale de température souhaitée dans le matériau entrant, alimenté par des rouleaux dont la vitesse est régulée par un variateur de vitesse. Ceci peut être réalisé en plaçant des transducteurs de température le long de la bande de matériau. Ces transducteurs fournissent des informations à un ordinateur, qui génère les signaux de commande appropriés pour les régulateurs de vitesse du réchauffeur et des rouleaux d'alimentation.

Dans (1.8), x désigne une position dans le four, t un temps, $u(t, x)$ une moyenne spatiale de la distribution de température, v la vitesse instantanée de la bande de matériau en fonction de la distribution de température temporisée $u(t - \tau_1, x)$ et f une fonction de source de température distribuée en fonction de $u(t - \tau_2, x)$. Les signaux de commande peuvent être temporisés en raison de la présence éventuelle de retards dans les actionnements, la transmission et le traitement des informations. Par conséquent, le comportement du système de contrôle global dépend non seulement des valeurs actuelles $u(t, x)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$ mais aussi des valeurs temporisées $u(t - \tau_1, x)$, $u(t - \tau_2, x)$.

En raison des retards τ_1 et τ_2 , l'équation (1.8) est complétée par la condition initiale suivante

$$\begin{cases} u(t, x) = u_0(t, x), & -\max\{\tau_1, \tau_2\} \leq t \leq 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases},$$

1.6 Définition du concept "solution exacte" d'une EDPR

On appelle « solution exacte » pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, y compris les équations aux dérivées partielles à retard, toute solution qui vérifie l'un des cas suivants :

- (i) la solution peut être exprimée en termes de fonctions élémentaires ou sous forme fermée, c'est-à-dire une expression explicite utilisant des fonctions usuelles (telles que exponentielle, sinus, cosinus, logarithme, etc.) ou des intégrales définies ou indéfinies qui peuvent être laissées sous forme d'intégrale sans nécessiter de résolution numérique ;
- (ii) la solution peut être exprimée en termes de solutions d'équations différentielles ordinaires ou d'équations aux dérivées partielles (ou de systèmes de telles équations) ;
- (iii) la solution peut être exprimée en termes de solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Les combinaisons des cas (i) à (iii) sont également autorisées.

Cette définition généralise la notion de solution exacte utilisée dans la référence [7] pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.

Chapitre 2

Méthode des Contraintes fonctionnelles et Applications

Ce chapitre est largement inspiré du travail de [9], dont les contributions ont grandement orienté notre démarche. Nous nous sommes appuyés sur ses résultats et sa méthodologie pour développer l'analyse présentée ici.

Nous introduisons le terme contrainte fonctionnelle par analogie avec le terme contrainte différentielle, utilisé dans la méthode des contraintes différentielles pour rechercher des solutions exactes aux équations aux dérivées partielles non linéaires. (voir les refs [9, ?, 1])

Description générale de la méthode des contraintes fonctionnelles

Considérons une large classe d'équations de réaction-diffusion non linéaires avec retard :

$$u_t = ku_{xx} + uf(z) + wg(z) + h(z), \quad (2.1)$$

$$w = u(x, t - \tau), \quad z = z(u, w), \quad (2.2)$$

où $f(z)$, $g(z)$ et $h(z)$ sont des fonctions arbitraires et $z = z(u, w)$ est une fonction donnée. Dans certains cas, on considère des formes plus complexes où f, g et h dépendent explicitement des variables indépendantes x et/ou t .

Nous recherchons des solutions par la méthode des variables séparables généralisée de la forme :

$$u = \sum_{n=1}^N \Phi_n(x) \Psi_n(t), \quad (2.3)$$

où les fonctions $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(t)$ sont à déterminer au cours de l'analyse (voir [7, 8, 2]).

Pour les équations différentielles partielles non linéaires de ce type impliquant des fonctions arbitraires, l'application directe de la méthode de séparation généralisée des variables s'avère inefficace.

L'approche proposée ici repose sur la recherche de solutions séparables généralisées satisfaisant des **contraintes fonctionnelles** supplémentaires :

$$z(u, w) = p(x), \quad w = u(x, t - \tau); \quad (2.4)$$

$$z(u, w) = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (2.5)$$

Ces contraintes représentent des équations aux différences en t , où x joue le rôle d'un paramètre libre. La fonction $z = z(u, w)$ apparaît dans l'équation comme argument des fonctions arbitraires. Les fonctions $p(x)$ et $q(t)$ dépendent implicitement de x et t (et peuvent être exprimées en termes de $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(t)$, respectivement). Elles sont déterminées en analysant ces contraintes en tenant compte de la forme des solutions recherchées. Il est important de noter qu'il n'est pas nécessaire de résoudre ces équations de manière générale ; En effet, une solution particulière suffit amplement pour construire une solution exacte de l'équation aux dérivées partielles considérée. Ces contraintes fonctionnelles jouent principalement un rôle de support structurel dans la recherche de solutions exactes. Il n'est donc pas indispensable de résoudre ces contraintes dans leur généralité : il est suffisant de déterminer une solution particulière qui permet de satisfaire les exigences de la méthode..

Une solution de ces équations détermine une forme admissible pour la solution exacte, dont l'expression finale est ensuite obtenue en la substituant dans l'équation de départ.

Ces contraintes sont appelées **contrainte fonctionnelle du premier type** (2.4) et **contrainte fonctionnelle du second type** (2.5), respectivement.

Pour la contrainte fonctionnelle du premier type, les fonctions $\Psi_n(t)$ utilisées dans la solution séparée sont généralement de la forme :

$$\Psi_0(t) = 1, \quad \Psi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \Psi_2(t) = e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

$$\Psi_n(t) = e^{\lambda t} \cos(\beta_n t), \quad \Psi_n(t) = e^{\lambda t} \sin(\beta_n t), \quad (2.7)$$

où les paramètres λ_n et β_n sont déterminés par la première contrainte.

Cette approche fournit une méthode systématique pour construire des solutions séparables généralisées à certaines équations différentielles partielles non linéaires avec retard.

2.1 L'équation impliquant une fonction arbitraire dépendante de w/u

Analysons l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u f(w/u), \quad (2.8)$$

qui représente un cas spécifique où $g = h = 0$ et $z = w/u$.

Dans ce cas, on considère la contrainte fonctionnelle suivante :

$$w/u = q(t), \quad w = u(x, t - \tau).$$

On considère l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u f(w/u).$$

On suppose une solution sous la forme séparée :

$$u(x, t) = \varphi(x) \psi(t).$$

En substituant cette expression dans l'équation de départ, on obtient :

$$\varphi(x) \psi'(t) = k \varphi''(x) \psi(t) + \varphi(x) \psi(t) f\left(\frac{\psi(t - \tau)}{\psi(t)}\right).$$

En divisant par $\varphi(x)\psi(t)$, on obtient :

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = k \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + f\left(\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right).$$

Comme le premier terme dépend uniquement de t et le second uniquement de x , ils doivent être égaux à une constante a . On en déduit deux équations distinctes :

$$\varphi''(x) = a\varphi(x),$$

$$\psi'(t) = ak\psi(t) + \psi(t)f\left(\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right).$$

La première équation est une équation différentielle ordinaire dont la solution générale est donnée par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{|a|x}) + C_2 \sin(\sqrt{|a|x}), & \text{si } a < 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{a}x} + C_2 e^{\sqrt{a}x}, & \text{si } a > 0, \\ C_1 x + C_2, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

La seconde équation décrit l'évolution temporelle de $\psi(t)$ avec un terme retardé.

Cas $p(x) = p_0$

Dans ce contexte :

$$w/u = p_0, \quad w = u(x, t - \tau).$$

Les solutions correspondantes sont recherchées sous la forme :

$$u = e^{ct}\nu(x, t), \quad \nu(x, t) = \nu(x, t - \tau).$$

où $\nu(x, t)$ est τ -périodique.

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u f\left(\frac{w}{u}\right), \quad \text{où } w = u(x, t - \tau).$$

on prend comme contrainte $\frac{w}{u} = p_0$ (constante positive). On suppose que :

$$\frac{u(x, t - \tau)}{u(x, t)} = p_0.$$

d'où :

$$\frac{e^{c(t-\tau)}\nu(x, t - \tau)}{e^{ct}\nu(x, t)} = e^{-c\tau} = p_0,$$

Donc :

$$c = -\frac{\ln p_0}{\tau}.$$

C'est pourquoi il est nécessaire de prendre $p_0 > 0$ afin que c soit bien défini

On remplace dans l'équation originale (2.8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{ct}v) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{ct}v) + e^{ct}v f(p_0).$$

$$\Rightarrow ce^{ct}v + e^{ct}\frac{\partial v}{\partial t} = ke^{ct}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + e^{ct}vf(p_0).$$

Donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (f(p_0) - c)v.$$

On pose :

$$b = f(p_0) - c.$$

On suppose que v est séparable :

$$v(x, t) = X(x)T(t).$$

Donc :

$$XT' = kX''T + bXT.$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = k\frac{X''}{X} + b.$$

Et donc T admet comme solution :

$$T(t) = e^{i\beta_n t}, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

déterminons l'équation caractéristique :

$$X'' - \mu^2 X = 0, \quad \mu^2 = \frac{b - i\beta_n}{k}.$$

d'où :

$$X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Calcul de $\mu = \gamma + i\lambda$:

$$(\gamma + i\lambda)^2 = \frac{b}{k} - i\frac{\beta_n}{k}.$$

considérons le système :

$$\begin{cases} \lambda^2 - \gamma^2 = \frac{b}{k}, \\ 2\lambda\gamma = -\frac{\beta_n}{k}, \\ \lambda^2 + \gamma^2 = \left(\frac{b}{k}\right)^2 + \left(\frac{\beta_n}{k}\right)^2. \end{cases}$$

Et donc :

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2k}},$$

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2k}}.$$

La solution générale est une superposition de tous les modes, car chaque mode correspond à une solution particulière de l'équation, et grâce au principe de superposition, la somme de ces solutions représente la solution complète du problème :

$$V_1(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n e^{(\lambda_n + i\gamma_n)x} + b_n e^{-(\lambda_n + i\gamma_n)x}] e^{i\beta_n t} \quad (2.9)$$

En prenant la partie réelle et regroupant les termes, on obtient :

$$V_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n x} [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x} [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)] \quad (2.10)$$

où Les coefficients A_n, B_n, C_n, D_n sont des constantes arbitraires, $\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}$ sont les fréquences temporelles discrètes et λ_n et γ_n sont les paramètres spatiaux déterminés par :

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2k}}, \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2k}} \quad (2.11)$$

Si $p_0 < 0$, on cherche les solutions sous la forme :

$$u = e^{ct} \nu(x, t), \quad \nu(x, t) = -\nu(x, t - \tau). \quad (2.12)$$

Cela conduit à :

$$\nu_t = k\nu_{xx} + b\nu, \quad \nu(x, t) = -\nu(x, t - \tau), \quad (2.13)$$

où $b = f(-e^{-c\tau}) - c$.

La solution générale devient :

$$V_2(x, t; b) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x} [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)] \quad (2.14)$$

avec

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2k} \right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2k} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

En effet, on cherche des solutions sous la forme exponentielle-temporelle :

$$u = e^{ct} v(x, t),$$

où $v(x, t)$ doit satisfaire la condition d'anti-périodicité :

$$v(x, t) = -v(x, t - \tau).$$

En substituant dans l'équation originale, on obtient :

$$ce^{ct} v + e^{ct} v_t = ke^{ct} v_{xx} + e^{ct} v f\left(\frac{v(x, t - \tau)}{v(x, t)}\right).$$

Après simplification par e^{ct} et utilisation de la condition d'anti-périodicité :

$$v_t = kv_{xx} + v[f(-1) - c].$$

On pose $b = f(-1) - c$ pour obtenir l'équation linéarisée :

$$v_t = kv_{xx} + bv.$$

On utilise la méthode de séparation des variables avec $v(x, t) = X(x)T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k \frac{X''(x)}{X(x)} + b = -\lambda.$$

Cela donne le système :

$$\begin{aligned} X''(x) + \frac{\lambda - b}{k} X(x) &= 0, \\ T'(t) + \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

La condition $T(t) = -T(t - \tau)$ implique :

$$e^{-\lambda t} = -e^{-\lambda(t-\tau)} \Rightarrow e^{\lambda\tau} = -1.$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_n = \frac{i\pi(2n-1)}{\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions temporelles correspondantes sont :

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{i\pi(2n-1)}{\tau}t\right).$$

En combinant avec les solutions spatiales, on obtient la forme générale :

$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x) [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)],$$

La solution exacte est donc :

$$u = e^{ct} V_2(x, t; b), \quad b = f(-e^{-c\tau}) - c. \quad (2.16)$$

2.2 Équation avec une fonction arbitraire dépendant d'une combinaison linéaire de u et w

Nous considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - w), \quad (2.17)$$

où f est une fonction arbitraire.

Nous imposons la contrainte fonctionnelle suivante, qui relie u et w :

$$u - w = q(t), \quad w = u(x, t - \tau).$$

Cherchons une solution sous forme séparable additive :

$$u = \varphi(x) + \psi(t).$$

2.2. ÉQUATION AVEC UNE FONCTION ARBITRAIRE DÉPENDANT D'UNE COMBINAISON LINÉAIRE

En substituant cette forme dans l'équation donnée et en séparant les variables, nous obtenons deux équations distinctes :

Une équation en x

$$k\varphi''(x) + b\varphi = a,$$

où a est une constante arbitraire.

Une équation en t

$$\frac{d\psi}{dt} = b\psi(t) + a + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

Cette équation est une équation aux différences retardées.

— Résolvons l'équation en x

L'équation différentielle donnée est :

$$k\varphi''(x) + b\varphi(x) = a.$$

où k , b et a sont des constantes.

On a :

$$\varphi''(x) + \frac{b}{k}\varphi(x) = \frac{a}{k}.$$

L'équation homogène associée est :

$$\varphi''(x) + \frac{b}{k}\varphi(x) = 0.$$

L'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{b}{k} = 0.$$

Ce qui donne les racines :

$$r = \pm \sqrt{-\frac{b}{k}}.$$

On distingue plusieurs cas :

— **Si** $b > 0$: Les racines sont imaginaires pures :

$$r = \pm i\sqrt{\frac{b}{k}}.$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$\varphi_h(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x), \quad \text{où } \alpha = \sqrt{\frac{b}{k}}.$$

— **Si** $b < 0$: Les racines sont réelles :

$$r = \pm \sqrt{\frac{-b}{k}}.$$

La solution est exponentielle :

$$\varphi_h(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, \quad \text{où } \alpha = \sqrt{\frac{-b}{k}}.$$

— **Si** $b = 0$: L'équation devient :

$$\varphi''(x) = 0.$$

La solution est alors :

$$\varphi_h(x) = C_1x + C_2.$$

Puisque le second membre de l'équation est constant, on cherche une solution particulière constante $\varphi_p(x) = C$. En remplaçant dans l'équation :

$$0 + \frac{b}{k}C = \frac{a}{k}.$$

On trouve :

$$C = \frac{a}{b}, \quad (\text{si } b \neq 0).$$

En ajoutant la solution homogène et la solution particulière, on obtient la solution générale :

— **Si** $b > 0$:

$$\varphi(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + \frac{a}{b}.$$

— **Si** $b < 0$:

$$\varphi(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + \frac{a}{b}.$$

— **Si** $b = 0$:

$$\varphi(x) = \frac{a}{2k}x^2 + C_1x + C_2.$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions initiales.

Extension à une équation plus générale

Si la fonction cinétique dépend également du temps, nous avons une équation plus générale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(t, u - w). \quad (2.18)$$

Dans ce cas, nous utilisons une autre contrainte fonctionnelle :

$$u - w = p(x), \quad w = u(x, t - \tau).$$

Cela signifie que la dépendance entre u et w est définie spatialement par $p(x)$.

Théorème 1. (*Superposition non linéaire de solutions*) Soit $u_0(x, t)$ une solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - w) \quad (2.19)$$

et

$$\nu = V_1(x, t; b)$$

une solution anti-périodique (c'est à dire : $\nu(x, t - \tau) = -\nu(x, t)$) en t de l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + b\nu$$

Alors, la fonction

$$u = u_0(x, t) + V_1(x, t; b)$$

2.2. ÉQUATION AVEC UNE FONCTION ARBITRAIRE DÉPENDANT D'UNE COMBINAISON LINÉAIRE

est aussi une solution de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - w)$$

Démonstration. Posons :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + v(x, t), \quad \text{où} \quad v(x, t) = V_1(x, t; b)$$

Calculons les dérivées nécessaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

De plus on a :

$$w = u(x, t - \tau) = u_0(x, t - \tau) + v(x, t - \tau)$$

en remplaçant dans l'équation originale, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + b(u_0 + v) + f(u_0(x, t) - u_0(x, t - \tau)) \\ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - bu_0 - f(u_0(x, t) - u_0(x, t - \tau)) \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - bv \right) = 0$$

— Pour u_0 (par l'hypothèse 1) :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - bu_0 - f(u_0(x, t) - u_0(x, t - \tau)) = 0$$

— Pour v (par l'hypothèse 2) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - bv = 0$$

Et donc la somme satisfait bien l'équation originale

□

Remarques

— Pour l'équation non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - w)$$

la solution particulière $u_0(x, t)$ peut être prise sous la forme d'une onde progressive :

$$u_0 = u_0(\alpha x + \beta t)$$

— La formule

$$u = u_0(x, t) + V_1(x, t; b)$$

reste valable pour une équation plus générale de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(x, t, u - w)$$

dans laquelle la fonction cinétique dépend de trois arguments.

Si

$$f = f(x, u - w)$$

alors une solution stationnaire $u_0 = u_0(x)$ peut être utilisée pour le premier terme, et le second terme est pris sous la forme donnée par :

$$\nu_t = k\nu_{xx} + b\nu$$

Si

$$f = f(t, u - w)$$

alors une solution spatialement homogène $u_0 = u_0(t)$ peut être prise pour le premier terme.

Théorème 2. Soit $u_0(x, t)$ une solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - aw) \quad (2.20)$$

avec $a > 0$, et

$$\nu = V_1(x, t; b)$$

une solution τ -périodique de l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + b\nu \quad (2.21)$$

Alors, la fonction

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}V_1(x, t; b - c)$$

avec

$$c = \frac{1}{\tau} \ln a$$

est une solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - aw)$$

Démonstration. Posons $u = u_0 + e^{ct}v$ où v satisfait (2.21). Calculons chaque terme de (2.20) :

$$\begin{aligned} (u_0 + e^{ct}v)_t &= u_{0,t} + ce^{ct}v + e^{ct}v_t \\ k(u_0 + e^{ct}v)_{xx} &= ku_{0,xx} + ke^{ct}v_{xx} \\ f(u - aw) &= f(u_0 + e^{ct}v - a(u_0(x, t - \tau) + e^{c(t-\tau)}v(x, t - \tau))) \end{aligned}$$

2.2. ÉQUATION AVEC UNE FONCTION ARBITRAIRE DÉPENDANT D'UNE COMBINAISON LINÉAIRE

Notons que $e^{c\tau} = a$ par définition de c . Ainsi :

$$\begin{aligned} u - aw &= (u_0 - au_0(x, t - \tau)) + e^{ct}(v - e^{-c\tau}v(x, t - \tau)) \\ &= (u_0 - aw_0) + e^{ct}(v - v(x, t - \tau)) \\ &= u_0 - aw_0 \quad (\text{car } v \text{ est } \tau\text{-périodique}) \end{aligned}$$

En substituant dans (2.20) :

$$\begin{aligned} u_{0,t} + ce^{ct}v + e^{ct}v_t \\ = ku_{0,xx} + ke^{ct}v_{xx} + b(u_0 + e^{ct}v) + f(u_0 - aw_0) \end{aligned}$$

Or u_0 satisfait (2.20) donc les termes en u_0 s'annulent. Il reste :

$$e^{ct}(cv + v_t) = e^{ct}(kv_{xx} + bv)$$

ce qui donne après simplification :

$$v_t = kv_{xx} + (b - c)v$$

qui est exactement l'équation (2.21) satisfaite par v .

□

Remarque

La formule

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}V_1(x, t; b - c)$$

reste valable pour l'équation plus générale :

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(x, t, u - aw)$$

dans laquelle la fonction cinétique dépend de trois arguments.

Théorème 3. Soit $u_0(x, t)$ une solution de l'équation non linéaire suivante :

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(u + aw) \tag{2.22}$$

avec $a > 0$, et

$$\nu = V_2(x, t; b)$$

une solution τ -anti-périodique de l'équation linéaire suivante :

$$\nu_t = k\nu_{xx} + b\nu$$

Alors, la fonction

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}V_2(x, t; b - c)$$

avec

$$c = \frac{1}{\tau} \ln a$$

est une solution de l'équation non linéaire :

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(u + aw)$$

Remarque

La formule

$$u = u_0(x, t) + e^{ct}V_2(x, t; b - c)$$

reste valable pour l'équation plus générale :

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(x, t, u + aw)$$

dans laquelle la fonction cinétique dépend de trois arguments.

Démonstration. Posons :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + e^{\sigma t}v(x, t), \quad \text{où} \quad v(x, t) = V_2(x, t; b - c)$$

Calculons les dérivées nécessaires :

$$u_t = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sigma e^{\sigma t}v + e^{\sigma t} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + e^{\sigma t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Le terme retardé donne :

$$w = u(x, t - \tau) = u_0(x, t - \tau) + e^{\sigma(t-\tau)}v(x, t - \tau)$$

Remplaçons dans l'équation originale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sigma e^{\sigma t}v + e^{\sigma t} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + e^{\sigma t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + b(u_0 + e^{\sigma t}v) \\ &\quad + f(u_0 + e^{\sigma t}v + au_0(x, t - \tau) + ae^{\sigma(t-\tau)}v(x, t - \tau)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Séparons les contributions de u_0 et v :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - bu_0 - f(u_0 + au_0(x, t - \tau)) \right) + e^{\sigma t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (b - \sigma)v \right) \\ &+ f(u_0 + e^{\sigma t}v + au_0(x, t - \tau) + ae^{-\sigma\tau}e^{\sigma t}v(x, t - \tau)) - f(u_0 + au_0(x, t - \tau)) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

— Pour u_0 (par hypothèse 1) :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - bu_0 - f(u_0 + au_0(x, t - \tau)) = 0$$

— Pour v (par hypothèse 2 et choix de σ) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (b - \sigma)v = 0$$

— Terme non-linéaire (utilisant l'anti-périodicité $v(x, t) = -v(x, t - \tau)$ et $a = e^{\sigma\tau}$) :

$$f(u_0 + au_0(x, t - \tau) + e^{\sigma t}(v - v)) - f(u_0 + au_0(x, t - \tau)) = 0$$

La somme satisfait bien l'équation originale puisque tous les termes s'annulent

□

2.3 Équation avec deux fonctions arbitraires dépendants d'une combinaison linéaire de u et w

Considérons l'équation de forme générale :

$$u_t = ku_{xx} + uf(u - w) + wg(u - w) + h(u - w), \quad w = u(x, t - \tau) \quad (2.25)$$

Sous la condition :

$$u - w = p(x) \quad (2.26)$$

où :

- $w = u(x, t - \tau)$ représente le terme retardé ($\tau > 0$)
- f, g, h sont des fonctions non linéaires arbitraires
- $k > 0$ est le coefficient de diffusion

ce qui implique directement :

$$u(x, t) - u(x, t - \tau) = p(x)$$

Cherchons la solution sous la forme :

$$u(x, t) = t\varphi(x) + \psi(x)$$

Le terme retardé est donné sous la forme :

$$w = (t - \tau)\varphi(x) + \psi(x)$$

On applique la contrainte (2.26) :

$$t\varphi + \psi - [(t - \tau)\varphi + \psi] = \tau\varphi(x) = p(x)$$

Ce qui établit que :

$$p(x) = \tau\varphi(x)$$

On la substitue dans l'EDP originale (2.25) :

$$\varphi = k(t\varphi'' + \psi'') + (t\varphi + \psi)f(\tau\varphi) + [(t - \tau)\varphi + \psi]g(\tau\varphi) + h(\tau\varphi)$$

Détaillons chaque terme :

1. Terme de diffusion :

$$ku_{xx} = k(t\varphi'' + \psi'')$$

2. Terme non linéaire en u :

$$uf(u - w) = (t\varphi + \psi)f(\tau\varphi)$$

3. Terme non linéaire en w :

$$wg(u - w) = [(t - \tau)\varphi + \psi]g(\tau\varphi)$$

4. Terme source :

$$h(u - w) = h(\tau\varphi)$$

Regroupons par puissances de t et réorganisons l'équation selon les puissances de t :

$$\varphi = t[k\varphi'' + \varphi f(\tau\varphi) + \varphi g(\tau\varphi)] + [k\psi'' + \psi f(\tau\varphi) + (\psi - \tau\varphi)g(\tau\varphi) + h(\tau\varphi)]$$

Séparons les coefficients

Pour la puissance t^1 :

$$0 = k\varphi'' + \varphi f(\tau\varphi) + \varphi g(\tau\varphi)$$

Pour la puissance t^0 (terme constant) :

$$\varphi = k\psi'' + \psi f(\tau\varphi) + (\psi - \tau\varphi)g(\tau\varphi) + h(\tau\varphi)$$

Le système couplé s'écrit :

$$\begin{cases} k\varphi'' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0 \\ k\psi'' + \psi f(\tau\varphi) + (\psi - \tau\varphi)g(\tau\varphi) + h(\tau\varphi) = \varphi \end{cases}$$

Pour résoudre ce système :

1. Résoudre d'abord l'équation pour $\varphi(x)$
2. Injecter la solution dans l'équation pour $\psi(x)$
3. Résoudre l'équation non homogène résultante

Cas particuliers remarquables

1. **Cas linéaire** ($f = g = 0$) :

$$\varphi'' = 0 \quad \text{et} \quad k\psi'' + h(\tau\varphi) = \varphi$$

2. **Cas sans retard** ($\tau \rightarrow 0$) : Développement de Taylor au premier ordre :

$$f(\tau\varphi) \approx f(0) + \tau\varphi f'(0)$$

Nous considérons une solution de l'équation linéaire aux différences (2.26) :

$$u(x, t) = \underbrace{\sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)]}_{\text{Partie oscillante}} + \underbrace{t\theta(x) + \xi(x)}_{\text{Partie affine}}$$

avec les fréquences caractéristiques :

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau} \quad \text{pour} \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

En effet,

Calculons le terme retardé $w = u(x, t - \tau)$:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n(t - \tau)) + \psi_n(x) \sin(\beta_n(t - \tau))] \\ &\quad + (t - \tau)\theta(x) + \xi(x). \end{aligned}$$

En utilisant les identités trigonométriques :

$$\begin{aligned}\cos(\beta_n(t - \tau)) &= \cos(\beta_n t) \cos(\beta_n \tau) + \sin(\beta_n t) \sin(\beta_n \tau) \\ \sin(\beta_n(t - \tau)) &= \sin(\beta_n t) \cos(\beta_n \tau) - \cos(\beta_n t) \sin(\beta_n \tau)\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}u - w &= \sum_{n=1}^N [\varphi_n (\cos(\beta_n t) - \cos(\beta_n t) \cos(\beta_n \tau) - \sin(\beta_n t) \sin(\beta_n \tau)) \\ &\quad + \psi_n (\sin(\beta_n t) - \sin(\beta_n t) \cos(\beta_n \tau) + \cos(\beta_n t) \sin(\beta_n \tau))] \\ &\quad + \tau \theta(x).\end{aligned}$$

En factorisant par les fonctions trigonométriques on trouve :

$$\begin{aligned}u - w &= \sum_{n=1}^N [\cos(\beta_n t) (\varphi_n (1 - \cos(\beta_n \tau)) + \psi_n \sin(\beta_n \tau)) \\ &\quad + \sin(\beta_n t) (\psi_n (1 - \cos(\beta_n \tau)) - \varphi_n \sin(\beta_n \tau))] + \tau \theta(x).\end{aligned}$$

Pour que $u - w$ soit indépendant du temps, les coefficients des termes oscillants doivent s'annuler :

$$\begin{cases} \varphi_n (1 - \cos(\beta_n \tau)) + \psi_n \sin(\beta_n \tau) = 0 \\ \psi_n (1 - \cos(\beta_n \tau)) - \varphi_n \sin(\beta_n \tau) = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène admet une solution non triviale ssi :

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \cos(\beta_n \tau) & \sin(\beta_n \tau) \\ -\sin(\beta_n \tau) & 1 - \cos(\beta_n \tau) \end{pmatrix} = (1 - \cos(\beta_n \tau))^2 + \sin^2(\beta_n \tau) = 0$$

c'est-à-dire :

$$2(1 - \cos(\beta_n \tau)) = 0 \implies \cos(\beta_n \tau) = 1 \implies \beta_n \tau = 2\pi n$$

Ce qui est automatiquement satisfait car :

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau} \quad \text{pour } n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Posons :

$$p(x) = \tau \theta(x)$$

Substituons dans l'EDP originale (2.25) et calculons chaque terme :

1. Dérivées temporelles :

$$u_t = \sum_{n=1}^N [-\beta_n \varphi_n \sin(\beta_n t) + \beta_n \psi_n \cos(\beta_n t)] + \theta(x)$$

2. Dérivées spatiales :

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^N [\varphi_n'' \cos(\beta_n t) + \psi_n'' \sin(\beta_n t)] + t\theta'' + \xi''$$

3. Termes non linéaires :

$$f(u - w) = f(\tau\theta), \quad g(u - w) = g(\tau\theta), \quad h(u - w) = h(\tau\theta).$$

Nous obtenons

$$\sum_{n=1}^N [A_n \cos(\beta_n t) + B_n \sin(\beta_n t)] + Ct + D = 0,$$

où les coefficients fonctionnels A_n, B_n, C et D dépendent de $\varphi_n(x), \psi_n(x), \theta(x)$ et $\xi(x)$ ainsi que de leurs dérivées et sont indépendants de t . Dans (49), en égalant tous les coefficients fonctionnels à zéro, $A_n = B_n = C = D = 0$, en regroupant tous les termes et en séparant les harmoniques, on obtient les équations différentielles ordinaires suivantes pour les fonctions inconnues :

$$\begin{aligned} k\varphi_n'' + \varphi_n f(\tau\theta) + \varphi_n g(\tau\theta) - \beta_n \psi_n &= 0, \\ k\psi_n'' + \psi_n f(\tau\theta) + \psi_n g(\tau\theta) + \beta_n \varphi_n &= 0, \\ k\theta'' + \theta f(\tau\theta) + \theta g(\tau\theta) &= 0, \\ k\xi'' + \xi f(\tau\theta) + (\xi - \tau\theta)g(\tau\theta) + h(\tau\theta) - \theta &= 0. \end{aligned}$$

Notons que la troisième équation non linéaire admet la solution particulière triviale $\theta = 0$; dans ce cas, toutes les autres équations deviennent linéaires à coefficients constants. Le système admet des solutions sous les conditions suivantes :

Solutions triviales : Toujours existent si $\theta = 0$

Solutions non triviales :

- Existence locale garantie si $f, g \in C^0$ (théorème de Cauchy-Lipschitz).
- Existence globale requiert des hypothèses supplémentaires (bornitude, monotonie, etc.).
- Solutions explicites possibles pour des formes particulières de f, g, h (ex. constantes, linéaires, exponentielles).

Considérons maintenant l'équation aux dérivées partielles non linéaire avec retard :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u f(u - aw) + w g(u - aw) + h(u - aw) \quad (2.27)$$

où :

- $w = u(x, t - \tau)$ représente le terme retardé ($\tau > 0$)
- a est un paramètre de couplage
- f, g, h sont des fonctions non linéaires arbitraires
- $k > 0$ est le coefficient de diffusion

Nous recherchons des solutions sous forme d'une combinaison :

- d'une partie exponentielle-temporelle
- d'une partie oscillante
- d'une composante stationnaire

l'équation aux différences (2.26) peut être satisfaite par :

$$u(x, t) = e^{ct} \left\{ \theta(x) + \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)] \right\} + \xi(x) \quad (2.28)$$

avec :

- $c = \frac{1}{\tau} \ln a$ (taux de croissance exponentielle)
- $\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}$ (fréquences caractéristiques)
- $\theta(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$ fonctions spatiales à déterminer

La contrainte de différence (2.4) pour l'équation (2.27) a la forme

$$u - aw = p(x). \quad (2.29)$$

L'équation de différence linéaire (2.29) peut être satisfaite, comme précédemment, avec une solution séparable généralisée de la forme $u = e^{ct}\varphi(x) + \psi(t)$. On obtient ainsi des équations pour déterminer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$; un résultat bien plus général est donné ci-dessous.

L'équation de différence linéaire (2.26) peut être satisfaite en posant

$$u = e^{ct} \left\{ \theta(x) + \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)] \right\} + \xi(x), \quad (2.30)$$

avec

$$c = \frac{1}{\tau} \ln a, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

où N est un entier positif arbitraire. Dans ce cas, on a $p(x) = (1-a)\xi(x)$ dans le membre de droite de l'équation (2.29). En substituant (2.30) dans (2.27) et en raisonnant de manière similaire à l'équation (2.25), on arrive aux équations suivantes pour déterminer $\theta(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, et $\xi(x)$:

$$\begin{aligned} k\theta'' + \theta \left[f(\eta) + \frac{1}{a}g(\eta) - c \right] &= 0, \quad \eta = (1-a)\xi, \\ k\varphi_n'' + \varphi_n \left[f(\eta) + \frac{1}{a}g(\eta) - c \right] - \beta_n\psi_n &= 0, \\ k\psi_n'' + \psi_n \left[f(\eta) + \frac{1}{a}g(\eta) - c \right] + \beta_n\varphi_n &= 0, \\ k\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Remarque : Les solutions de la forme (2.30) sont également admises par l'équation plus générale

$$u_t = ku_{xx} + uf(x, u - aw) + wg(x, u - aw) + h(x, u - aw), \quad a > 0. \quad (2.31)$$

Considérons maintenant l'équation

$$u_t = ku_{xx} + uf(u + aw) + wg(u + aw) + h(u + aw), \quad a > 0,$$

où $f(z)$, $g(z)$, et $h(z)$ sont des fonctions arbitraires.

La contrainte de différence (2.4) pour l'équation (2.31) a la forme

$$u + aw = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (2.32)$$

L'équation de différence linéaire (2.32) peut être satisfaite en posant

$$u = e^{ct} \sum_{n=1}^N [\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)] + \xi(x), \quad (2.33)$$

avec

$$c = \frac{1}{\tau} \ln a, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{\tau},$$

où N est un entier positif arbitraire. Dans ce cas, on a $p(x) = (1+a)\xi(x)$ dans le membre de droite de l'équation (2.32). En substituant (2.3) dans (2.31) et en raisonnant de manière similaire à l'équation (2.25), on arrive aux équations suivantes pour déterminer $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, et $\xi(x)$:

$$\begin{aligned} k\varphi_n'' + \varphi_n \left[f(\eta) - \frac{1}{a}g(\eta) - c \right] - \beta_n \psi_n &= 0, \\ k\psi_n'' + \psi_n \left[f(\eta) - \frac{1}{a}g(\eta) - c \right] + \beta_n \varphi_n &= 0, \\ k\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) &= 0, \quad \eta = (1+a)\xi. \end{aligned}$$

La dernière équation est indépendante.

Remarque Les solutions de la forme sont également admises par l'équation plus générale

$$u_t = ku_{xx} + uf(x, u + aw) + wg(x, u + aw) + h(x, u + aw), \quad a > 0.$$

2.4 Équation avec deux fonctions arbitraires dépendant de $u^2 + w^2$

Nous étudions une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire avec retard de la forme :

$$u_t = ku_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2), \quad \text{où } w = u(x, t - \tau). \quad (2.34)$$

Cette équation dépend de deux fonctions arbitraires f et g évaluées en $z = u^2 + w^2$. Notre objectif est de trouver des solutions exactes en utilisant une **contrainte fonctionnelle**.

Pour simplifier l'équation (2.34), nous supposons que $u^2 + w^2$ ne dépend que de x :

$$u^2 + w^2 = p(x). \quad (2.35)$$

Cette contrainte permet de réduire la complexité en transformant $f(u^2 + w^2)$ et $g(u^2 + w^2)$ en des fonctions de x uniquement.

Nous cherchons une solution périodique en temps, de la forme :

$$u = \varphi_n(x) \cos(\lambda_n t) + \psi_n(x) \sin(\lambda_n t), \quad \text{avec } \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}. \quad (2.36)$$

Cette forme est choisie car elle satisfait naturellement la condition de retard $w = u(x, t - \tau)$.

En remplaçant t par $t - \tau$ dans (2.36), on obtient :

$$w = \varphi_n(x) \cos(\lambda_n(t - \tau)) + \psi_n(x) \sin(\lambda_n(t - \tau)).$$

En utilisant les identités trigonométriques et la valeur de $\lambda_n \tau$, on simplifie :

$$w = (-1)^n (\varphi_n(x) \sin(\lambda_n t) - \psi_n(x) \cos(\lambda_n t)).$$

Calculons $u^2 + w^2$:

$$u^2 + w^2 = \varphi_n^2(x) + \psi_n^2(x) = p(x).$$

Ceci confirme que la contrainte (2.35) est satisfaite.

Calculons les dérivées nécessaires :

$$u_t = -\lambda_n \varphi_n(x) \sin(\lambda_n t) + \lambda_n \psi_n(x) \cos(\lambda_n t),$$

$$u_{xx} = \varphi_n''(x) \cos(\lambda_n t) + \psi_n''(x) \sin(\lambda_n t).$$

En substituant dans (2.34), on obtient :

$$-\lambda_n \varphi_n \sin(\lambda_n t) + \lambda_n \psi_n \cos(\lambda_n t) = k(\varphi_n'' \cos(\lambda_n t) + \psi_n'' \sin(\lambda_n t)) + \text{termes non linéaires}.$$

En regroupant les termes en $\cos(\lambda_n t)$ et $\sin(\lambda_n t)$, on obtient le système :

$$k\varphi_n'' + \varphi_n f(p(x)) + (-1)^{n+1} \psi_n g(p(x)) - \lambda_n \psi_n = 0, \quad (2.37)$$

$$k\psi_n'' + \psi_n f(p(x)) + (-1)^n \varphi_n g(p(x)) + \lambda_n \varphi_n = 0. \quad (2.38)$$

Conclusion Le système (2.37)-(2.38) peut être résolu numériquement ou analytiquement selon la forme de f et g . Cette méthode s'étend à des cas plus généraux où f et g dépendent explicitement de x .

2.5 Équations aux dérivées partielles non linéaires avec retard généralisées

L'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires avec retard peut être étendue à des opérateurs différentiels plus généraux que le simple opérateur de réaction-diffusion. Considérons une classe étendue d'équations de la forme :

$$L[u] = M[u] + uf(z) + wg(z) + h(z)$$

où les opérateurs différentiels linéaires L et M agissent respectivement sur les variables temporelle et spatiale, avec $w = u(x, t - \tau)$ représentant toujours le terme retardé. Les opérateurs s'expriment sous leur forme la plus générale comme :

$$L = \sum_{i=1}^k b_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \quad M = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial^i}{\partial x^i}$$

Cette formulation englobe une large variété de phénomènes physiques (voir [5, 10]). Pour illustrer cette généralisation, prenons le cas particulier important où $L = \partial_t^2$ et $M = a^2 \partial_x^2$, qui conduit à l'équation de Klein-Gordon non linéaire avec retard :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + u f(z) + w g(z) + h(z)$$

La recherche de solutions à ces équations généralisées repose sur des méthodes similaires à celles employées précédemment. En particulier, les solutions séparables multiplicatives de la forme $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ restent pertinentes. En substituant cette forme dans l'équation générale, on obtient après réarrangement :

$$\frac{L[\psi(t)]}{\psi(t)} = \frac{M[\varphi(x)]}{\varphi(x)} + f(z) + \frac{w}{u}g(z) + \frac{h(z)}{\varphi(x)\psi(t)}$$

La séparation des variables impose que chaque membre doit être égal à une constante de séparation c , ce qui conduit à un système de deux équations découplées :

$$M[\varphi] = c\varphi$$

$$L[\psi(t)] = c\psi(t) + \psi(t)f\left(\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right) + \frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}g\left(\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right) + \frac{h\left(\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right)}{\psi(t)}$$

Le caractère fonctionnel de ces équations provient de la dépendance complexe en $\psi(t)$ et $\psi(t-\tau)$. Dans le cas particulier où $h = 0$ et $g = 0$, le système se simplifie considérablement en :

$$M[\varphi] = c\varphi$$

$$L[\psi(t)] = c\psi(t) + \psi(t)f\left(\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right)$$

qui est analogue à la forme obtenue pour l'équation de réaction-diffusion, mais avec des opérateurs différentiels plus généraux. Cette similarité structurelle permet d'étendre les méthodes de résolution développées précédemment à cette classe plus large d'équations.

Remarque Beaucoup des résultats obtenus précédemment pour les équations de réaction-diffusion non linéaires avec retard s'appliquent également aux équations aux dérivées partielles non linéaires avec retard de la forme générale donnée.

Ensuite, pour dériver les équations de détermination, nous utilisons les propriétés simples suivantes des opérateurs L et M :

$$L(\varphi(x)\psi(t)) = \varphi(x)L[\psi(t)], \quad L(\varphi(x) + \psi(t)) = L[\psi(t)],$$

$$M(\varphi(x)\psi(t)) = \psi(t)M[\varphi(x)], \quad M(\varphi(x) + \psi(t)) = M[\varphi(x)].$$

L'équation

$$L[u] = M[u] + u f\left(\frac{w}{u}\right),$$

admet des solutions multiplicativement séparables de la forme :

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(t)$ satisfont respectivement :

2.5. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES AVEC RETARD GÉNÉRALISÉ

(i) Si $c = 0$, l'équation différentielle ordinaire linéaire

$$M[\varphi] = 0$$

admet des solutions polynomiales particulières.

(ii) Pour toute constante c , l'équation aux valeurs propres

$$M[\varphi] = c\varphi$$

admet des solutions exponentielles particulières $\varphi(x) = Ae^{\beta x}$, où A est une constante arbitraire et β est racine de l'équation polynomiale caractéristique

$$\sum_{i=1}^m a_i \beta^i = c.$$

(iii) L'équation différentielle-différence

$$L[\psi(t)] = c\psi(t) + \psi(t)f\left(t, \frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right)$$

admet des solutions exponentielles particulières $\psi(t) = Be^{\lambda t}$, où B est arbitraire et λ satisfait l'équation transcendante

$$\sum_{i=1}^k b_i \lambda^i = c + f(e^{-\lambda \tau}).$$

L'équation

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - w),$$

admet des solutions séparables additives de la forme :

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

En utilisant les propriétés des opérateurs M et L , on obtient :

$$L[\varphi(x) + \psi(t)] = M[\varphi(x) + \psi(t)] + b(\varphi(x) + \psi(t)) + f((\varphi(x) + \psi(t)) - (\varphi(x) + \psi(t - \tau)))$$

Donc :

$$L[\psi(t)] = M[\varphi(x)] + b\varphi(x) + b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

On arrive donc à l'égalité suivante :

$$L[\psi(t)] = M[\varphi(x)] + b\varphi(x) + b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

La séparation des variables impose que les termes en x et ceux en t doivent être séparés. On introduit donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} M[\varphi(x)] &= c - b\varphi(x), \\ L[\psi(t)] &= c + b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \end{aligned}$$

Il convient de noter que :

(i) Si $b = 0$, l'équation

$$L[\psi(t)] = c + f(\psi(t) - \psi(t - \tau))$$

admet des solutions particulières polynomiales ;

(ii) Si $c = 0$, l'équation

$$M[\varphi] = -b\varphi$$

admet des solutions particulières exponentielles de la forme $\varphi(x) = Ae^{\beta x}$, où A est une constante arbitraire et β est une racine de l'équation polynomiale

$$\sum_{i=1}^n a_i \beta^i = -b.$$

En utilisant la solution ci-dessus $u = \varphi(x) + \psi(t)$ et le théorème ci-dessous, on peut trouver des solutions exactes plus complexes à l'équation $L[u] = M[u] + bu + f(u - w)$; ces solutions peuvent contenir un nombre quelconque de paramètres libres arbitraires.

Théorème 4. *Supposons que $u_0(x, t)$ soit une solution de l'équation non linéaire suivante :*

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - w),$$

et que $\nu(x, t)$ soit une solution τ -périodique de l'équation linéaire :

$$L[\nu] = M[\nu] + b\nu, \quad \text{avec} \quad \nu(x, t) = \nu(x, t - \tau).$$

Alors, la somme :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \nu(x, t)$$

est aussi solution de l'équation non linéaire :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - w).$$

Ce théorème, tout comme les suivants, peut être démontré de façon analogue aux trois théorèmes précédents.

Outre la solution additive :

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

la solution particulière $u_0(x, t)$ peut aussi être cherchée sous forme d'onde progressive, c'est-à-dire :

$$u_0(x, t) = \theta(\alpha x + \beta t).$$

Les solutions particulières de l'équation linéaire :

$$L[\nu] = M[\nu] + b\nu,$$

sous la contrainte de périodicité $\nu(x, t) = \nu(x, t - \tau)$, peuvent être cherchées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \sum_{n=0}^N e^{-\lambda_n x} [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] \\ & + \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n x} [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)] \quad (2.39) \end{aligned}$$

2.5. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES AVEC RETARD GÉNÉRALISÉ

avec

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}.$$

Ici, N est un entier positif quelconque, et A_n, B_n, C_n, D_n sont des constantes arbitraires. Les constantes λ_n et γ_n sont déterminées à partir de la substitution de la série ci-dessus dans l'équation linéaire.

Démonstration. Considérons l'équation générale avec retard :

$$\mathcal{N}[u] \equiv L[u] - M[u] - F(u, w) = 0 \quad \text{avec} \quad w = u(x, t - \tau) \quad (2.40)$$

Posons

1. $u_0(x, t)$ est une solution particulière connue : $\mathcal{N}[u_0] = 0$
2. $v(x, t)$ est une solution τ -périodique de l'équation linéarisée :

$$\mathcal{L}[v] \equiv L[v] - M[v] - bv = 0 \quad \text{et} \quad v(x, t) = v(x, t - \tau) \quad (2.41)$$

Alors :

Soit $u = u_0 + v$ et développons $\mathcal{N}[u_0 + v]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[u_0 + v] &= L[u_0 + v] - M[u_0 + v] - F(u_0 + v, w_0 + w) \\ &= \underbrace{L[u_0] - M[u_0] - F(u_0, w_0)}_{=0 \text{ par hypothèse}} + \underbrace{L[v] - M[v]}_{=\mathcal{L}[v]+bv} \\ &\quad - \left[F(u_0 + v, w_0 + w) - F(u_0, w_0) \right] \end{aligned}$$

Par développement de Taylor autour de (u_0, w_0) :

$$F(u_0 + v, w_0 + w) \approx F(u_0, w_0) + \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u_0, w_0)} v + \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{(u_0, w_0)} w + \mathcal{O}(v^2, w^2) \quad (2.42)$$

En utilisant la τ -périodicité $w = v(x, t - \tau) = v(x, t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[u_0 + v] &= \mathcal{L}[v] + bv - \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} \right) v + \mathcal{O}(v^2) \\ &= \left[b - \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial w} \right] v + \mathcal{O}(v^2) \end{aligned}$$

L'hypothèse $\mathcal{L}[v] = 0$ impose que :

$$b = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} \quad (2.43)$$

ce qui garantit l'annulation du terme d'ordre 1.

Conclusion :

Les termes non linéaires restants $\mathcal{O}(v^2)$ s'annulent exactement pour :

- Les solutions linéaires exactes (où v est petit)
- Les solutions particulières où F est quadratique

Ainsi, $u = u_0 + v$ satisfait bien $\mathcal{N}[u] = 0$ à l'ordre considéré.

□

Considérons maintenant l'équation :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - aw), \quad \text{avec } a > 0,$$

où L et M sont des opérateurs différentiels linéaires.

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 5. *Supposons que $u_0(x, t)$ soit une solution de l'équation non linéaire précédente :*

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - aw),$$

et que $\nu(x, t)$ soit une solution τ -périodique de l'équation linéaire suivante :

$$L_1[\nu] = M[\nu] + b\nu, \quad \text{avec } \nu(x, t) = \nu(x, t - \tau),$$

où l'opérateur L_1 est défini par :

$$L_1[\nu] \equiv e^{-ct} L[e^{ct}\nu],$$

ce qui constitue un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants.

Alors, la fonction

$$u(x, t) = u_0(x, t) + e^{ct}\nu(x, t), \quad \text{avec } c = \frac{1}{\tau} \ln a,$$

est aussi une solution de l'équation non linéaire :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - aw).$$

Démonstration. On considère l'équation non linéaire :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - aw), \quad a > 0.$$

Supposons que :

— $u_0(x, t)$ est une solution de cette équation, c'est-à-dire

$$L[u_0] = M[u_0] + bu_0 + f(u_0 - aw),$$

— $\nu(x, t)$ est une solution τ -périodique de l'équation linéaire suivante :

$$L_1[\nu] = M[\nu] + b\nu, \quad \text{avec } \nu(x, t) = \nu(x, t - \tau),$$

— où l'opérateur L_1 est défini par :

$$L_1[\nu] := e^{-ct} L[e^{ct}\nu], \quad \text{et } c = \frac{1}{\tau} \ln a.$$

Alors nous voulons montrer que la fonction suivante est une solution de notre équation non linéaire :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + e^{ct}\nu(x, t).$$

Calculons de $L[u]$ en utilisant sa linéarité :

$$L[u] = L[u_0 + e^{ct}\nu] = L[u_0] + L[e^{ct}\nu].$$

2.5. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES AVEC RETARD GÉNÉRALISÉ

Par définition de L_1 :

$$L[e^{ct}\nu] = e^{ct}L_1[\nu].$$

Donc :

$$L[u] = L[u_0] + e^{ct}L_1[\nu].$$

De plus on a :

$$M[u] = M[u_0 + e^{ct}\nu] = M[u_0] + e^{ct}M[\nu],$$

$$bu = b(u_0 + e^{ct}\nu) = bu_0 + be^{ct}\nu.$$

Ainsi :

$$M[u] + bu = M[u_0] + bu_0 + e^{ct}(M[\nu] + b\nu).$$

Pour le terme non linéaire f on a :

$$u - aw = u_0 + e^{ct}\nu - aw,$$

$$f(u - aw) = f(u_0 - aw + e^{ct}\nu).$$

Remplaçons dans l'équation :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - aw),$$

le membre de gauche donne :

$$L[u] = L[u_0] + e^{ct}L_1[\nu] = M[u_0] + bu_0 + f(u_0 - aw) + e^{ct}L_1[\nu],$$

tandis que le membre de droite devient :

$$M[u] + bu + f(u - aw) = M[u_0] + bu_0 + e^{ct}(M[\nu] + b\nu) + f(u_0 - aw + e^{ct}\nu).$$

On soustrait $f(u_0 - aw)$ des deux côtés :

$$e^{ct}L_1[\nu] = e^{ct}(M[\nu] + b\nu) + [f(u_0 - aw + e^{ct}\nu) - f(u_0 - aw)].$$

La dernière égalité est vérifiée si :

$$f(u_0 - aw + e^{ct}\nu) = f(u_0 - aw) + e^{ct}(M[\nu] + b\nu - L_1[\nu]),$$

ce qui est garanti si :

$$L_1[\nu] = M[\nu] + b\nu,$$

ce qui est exactement notre hypothèse.

Par conséquent,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + e^{ct}\nu(x, t)$$

est solution de l'équation non linéaire :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - aw),$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 5. □

Considérons l'équation non linéaire suivante :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u + aw), \quad a > 0.$$

Théorème 6. Supposons que $u_0(x, t)$ soit une solution de l'équation ci-dessus et que $\nu(x, t)$ soit une solution τ -**anti-périodique** de l'équation linéaire suivante :

$$L_1[\nu] = M[\nu] + b\nu, \quad \nu(x, t) = -\nu(x, t - \tau),$$

où l'opérateur différentiel L_1 est à coefficients constant défini par :

$$L_1[\nu] := e^{-ct} L[e^{ct}\nu], \quad \text{avec } c = \frac{1}{\tau} \ln a.$$

Alors la fonction

$$u(x, t) = u_0(x, t) + e^{ct}\nu(x, t)$$

est aussi solution de l'équation non linéaire de départ.

Démonstration. Posons :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + e^{ct}\nu(x, t).$$

Par linéarité de l'opérateur L , on a :

$$L[u] = L[u_0 + e^{ct}\nu] = L[u_0] + L[e^{ct}\nu] = L[u_0] + e^{ct}L_1[\nu],$$

par définition de L_1 .

Développons les termes :

$$M[u] + bu = M[u_0 + e^{ct}\nu] + b(u_0 + e^{ct}\nu) = M[u_0] + bu_0 + e^{ct}(M[\nu] + b\nu),$$

et :

$$f(u + aw) = f(u_0 + e^{ct}\nu + aw).$$

Puisque u_0 est solution de l'équation non linéaire, on a :

$$L[u_0] = M[u_0] + bu_0 + f(u_0 + aw).$$

Donc :

$$L[u] = L[u_0] + e^{ct}L_1[\nu] = M[u_0] + bu_0 + f(u_0 + aw) + e^{ct}L_1[\nu],$$

et aussi :

$$M[u] + bu + f(u + aw) = M[u_0] + bu_0 + e^{ct}(M[\nu] + b\nu) + f(u_0 + e^{ct}\nu + aw).$$

Vérifions que :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u + aw),$$

c'est-à-dire que :

$$f(u_0 + e^{ct}\nu + aw) - f(u_0 + aw) = e^{ct}(M[\nu] + b\nu - L_1[\nu]).$$

Mais comme ν satisfait :

$$L_1[\nu] = M[\nu] + b\nu,$$

on a bien :

$$M[\nu] + b\nu - L_1[\nu] = 0,$$

et donc :

$$f(u_0 + e^{ct}\nu + aw) = f(u_0 + aw).$$

Cela est compatible avec la condition d'anti-périodicité $\nu(x, t) = -\nu(x, t - \tau)$.

La fonction $u(x, t) = u_0(x, t) + e^{ct}\nu(x, t)$ satisfait bien l'équation non linéaire de départ, ce qui conclut la démonstration du théorème 6. $\square$

2.6 Équations aux dérivées partielles générales avec retard variable

La méthode précédente s'étend aux équations différentielles partielles non linéaires avec retard variable. Voici deux exemples fondamentaux :

Cas multiplicatif avec retard variable

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$L[u] = M[u] + uf\left(\frac{w}{u}\right)$$

où le retard variable est donné par :

$$w = u(x, \zeta(t))$$

avec $\zeta(t) = t - \tau(t)$ et $0 \leq \tau(t) < \tau_0$. (voir [12])

La contrainte fonctionnelle prend la forme :

$$\frac{w}{u} = q(t)$$

Une solution séparable multiplicative :

$$u = \varphi(x)\psi(t)$$

permet d'obtenir :

$$q(t) = \frac{\psi(\zeta(t))}{\psi(t)}$$

La substitution conduit au système découplé :

$$\begin{aligned} M[\varphi] &= c\varphi \\ L[\psi(t)] &= c\psi(t) + \psi(t)f\left(t, \frac{\psi(\zeta(t))}{\psi(t)}\right) \end{aligned}$$

Cas additif avec retard variable

Pour l'équation alternative :

$$L[u] = M[u] + bu + f(u - w)$$

avec le même retard $w = u(x, \zeta(t))$, la contrainte devient :

$$u - w = q(t)$$

La solution séparable additive :

$$u = \varphi(x) + \psi(t)$$

donne :

$$q(t) = \psi(t) - \psi(\zeta(t))$$

Le système résultant est :

$$\begin{aligned} M[\varphi] &= c - b\varphi \\ L[\psi(t)] &= c + b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(\zeta(t))) \end{aligned}$$

Remarques importantes

1. L'opérateur L peut inclure des dérivées temporelles d'ordre supérieur :

$$L = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

2. Le retard variable $\tau(t)$ doit satisfaire :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) < \infty$$

3. Les solutions particulières pour $\psi(t)$ dépendent crucialement de la forme de $\zeta(t)$

Chapitre 3

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons introduit et développé une méthode innovante, appelée *méthode des contraintes fonctionnelles*, dans le but de construire des solutions exactes pour des équations de type réaction-diffusion avec retard non linéaires prenant la forme suivante :

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w),$$

où la fonction inconnue $u = u(x, t)$, le terme retardé $w = u(x, t - \tau)$, et τ représente un paramètre positif désignant le *temps de retard*. Cette méthode repose sur la recherche de solutions par la méthode de séparation des variables généralisée.

Plus précisément, nous avons recherché des solutions particulières de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \xi_n(x) \eta_n(t),$$

dans laquelle les fonctions $\xi_n(x)$ et $\eta_n(t)$ sont déterminées à partir de contraintes fonctionnelles supplémentaires, généralement sous forme d'équations fonctionnelles ou de relations de différence, en complément de l'équation aux dérivées partielles d'origine.

Toutes les équations traitées dans ce travail admettent une ou deux fonctions arbitraires d'un seul argument, ce qui permet une grande souplesse dans la construction de solutions. Nous avons pu décrire un grand nombre de solutions exactes, incluant à la fois des solutions simples trouvées par la méthode de séparation des variables généralisée et des solutions plus complexes issues d'une superposition non linéaire de ces dernières.

Les solutions obtenues contiennent généralement plusieurs paramètres libres, parfois en nombre infini, ce qui permet de les adapter à divers problèmes pratiques ou de les utiliser comme base pour des approximations analytiques et des méthodes numériques appliquées à des EDPs à retard non linéaires.

Les résultats de cette méthode ont été étendus à plusieurs classes importantes d'équations, notamment :

- (i) Les équations différentielles partielles non linéaires à retard de la forme :

$$L[u] = M[u] + F(u, w),$$

où L et M sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants, et peuvent être de n'importe quel ordre par rapport aux variables indépendantes t et x . Cette classe générale inclut, en particulier, l'équation de Klein–Gordon avec retard non linéaire, qui est une équation du type hyperbolique avec mémoire.

- (ii) Les équations aux dérivées partielles non linéaires à retard qui dépendent explicitement d'une seule des variables indépendantes, par exemple x ou t . Ce type d'équations permet de modéliser des systèmes où le délai dépend du temps ou de la position dans l'espace.
- (iii) Certaines équations différentielles fonctionnelles aux dérivées partielles non linéaires où le délai varie dans le temps, représentant des systèmes dynamiques plus complexes à comportement variable.

Ainsi, la méthode des contraintes fonctionnelles s'avère particulièrement puissante et polyvalente. Elle offre un cadre analytique cohérent pour la construction de solutions exactes dans de nombreuses configurations, permettant de mieux comprendre le comportement de systèmes décrits par des équations de réaction-diffusion avec mémoire ou délai temporel.

Cette méthode ouvre également des perspectives d'application dans des domaines tels que la biologie mathématique, la physique des matériaux à mémoire, les systèmes neuro-naux, ou encore les processus chimiques à diffusion retardée.

Bibliographie

- [1] Andreev VK, Kaptsov OV, Pukhnachov VV, Rodionov AA. Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics. Dordrecht : Kluwer ; 1998.
- [2] Galaktionov VA, Svirshchevskii SR. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC Press ; 2006.
- [3] Hale, J.K. Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1977.
- [4] Hale, J.K. Coupled oscillators on a circle. Dynamical phase transitions, Resenhas 1 :441-457, 1994.
- [5] Lalli BS, Yu YH, Cui BT. Oscillations of hyperbolic equations with functional arguments. Appl Math Comput 1993 ;53 :97-110.
- [6] Meleshko SV, Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. J Math Anal Appl 2008 ;338 :448–66.
- [7] Polyanin AD, Zaitsev VF., Handbook of nonlinear partial differential equations. Second Edition. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC Press ; 2012.
- [8] Polyanin AD, Zaitsev VF, Zhurov AI., Methods for the solution of nonlinear equations of mathematical physics and mechanics [in Russian]. Moscow : Fizmatlit ; 2005.
- [9] Polyanin AD, Zhurov AI., Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 19 (2014) 417–430.
- [10] Peiguang W. Forced oscillations of a class of nonlinear delay hyperbolic equations. Math Slovaca 1999 ;49(4) :495-501.
- [11] Smith HL, Zhao X-Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction–diffusion equations. SIAM J Math Anal 2000 ;31 :514–34.
- [12] Wang L, Cao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays. Phys Lett A 2006 ;350 :342-8.
- [13] Wang, P.K.C. Asymptotic stability of a time-delayed diffusion system, J. Appl. Mech. 30 :500-504, 1963.
- [14] Wu, J., Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag New York, Inc. 1996.
- [15] Wu, J., Xia, H. Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines, J. Differential Equations, 124 :247-278, 1996.
- [16] Wu J, Zou X. Traveling wave fronts of reaction–diffusion systems with delay. J Dyn Diff Eq 2001 ;13(3) :651–87..
- [17] Yanenko, N. N., The Compatibility Theory and Methods of Integration of Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, Nauka, 1971.