

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلكايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen

– Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de MASTER En**

: Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par : Bensaid shahrazed

Yahiaoui Mohammed

Sujet

Analyse dynamique des poutres en matériaux à gradient fonctionnel FGM

Soutenu publiquement, le 18 / 06 / 2022, devant le jury composé de:

Mr. CHORFI S. MOHAMMED	MAA	Université de Tlemcen	Président
Mr. SERDOUN M. NADJIB	MCA	ESSA de Tlemcen	Encadrant
Mr. belalia S. AHMED	Professeur	Université de Tlemcen	S.Encadrant
Mr. BELKAID MOHAMMED	MAA	Université de Tlemcen	Examineur

Année universitaire: 2024 /2025

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Je dédie ce travail :

A mes chers parents qui tiennent une place immense dans mon cœur :

*À ma chère maman,
pour son amour inconditionnel, sa patience et son soutien sans faille tout au long de mon parcours.*

*À mon cher papa,
pour sa force, ses conseils précieux et sa confiance qui m'ont toujours encouragé à aller de l'avant.*

*À ma sœur Nour el houda,
Pour son amour infini, sa patience et son soutien constant qui ont toujours été ma source de force et de courage.*

*À mes chers frères Mohammed et Khaled,
Pour votre soutien constant, vos encouragements et votre présence précieuse.*

À mes nièces loulou et hiba,

À ma famille,

A tous mes collègues de promo construction mécanique,

Et à tous ceux qui m'ont apporté leur aide.

Bensaid shahrazed

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents

A mon frère, mes sœurs, et à toute ma famille

A mon binôme

A tous mes amis (es)

A mes collègues de la promotion « Construction génie mécanique »

A tous mes enseignants.

Yahiaoui Mohammed

Remerciements



*Tout d'abord, nous tiens à présenter toute notre gratitude à **le bon dieu** le tout puissant de m'avoir donnée la force, le courage et la volonté de mener à bien ce modeste travail.*

*Nous tenons mes remerciements, et vive gratitude à mon directeur de mémoire **serdoun nadjib**, de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir consacré beaucoup de son temps à la réalisation de ce mémoire. De plus, nous tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses compétences, sa confiance, ses conseils et ses encouragements et nous remercier le professeur **belalia sidi Mohammed** qui a sous encadrer notre travaille.*

*Nous tenons à remercier les membres du jury, particulièrement monsieur **Belkaïd Mohamed** qui nous fait l'honneur de présider le jury, et monsieur **chorfi sidi Mohamed** qui a accepté d'examiner mon mémoire.*

*Nous remercions très chaleureusement **notre cher parent** pour leurs sacrifices, encouragements et aides durant mon cursus d'étude.*

*Je remercie sincèrement Mon amie **KARIMA BOUSMAHA** de travailler avec, je lui serai toujours reconnaissante pour son aide précieuse.*

*Enfin nos remerciements vont aussi à tous **nos collègues** pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme nos remercie toute personne de près ou de loin qui ont aidé à la réalisation de ce mémoire*



Résumé

Ce mémoire porte sur l'analyse dynamique des poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM), qui se distinguent par une variation continue de leurs propriétés mécaniques et thermiques à travers l'épaisseur. Ces matériaux hybrides permettent de combiner les avantages de plusieurs constituants, tout en réduisant les problèmes liés aux interfaces abruptes, tels que les concentrations de contraintes ou le délaminage.

L'étude se concentre sur le comportement vibratoire des poutres FGM, en utilisant des modèles mécaniques avancés, notamment la théorie de Timoshenko et une approche hiérarchique des éléments finis. Cette méthodologie permet de tenir compte des effets de cisaillement transversal et d'inertie rotationnelle, souvent négligés dans les modèles classiques. Les équations du mouvement ont été résolues numériquement à l'aide d'un programme développé spécifiquement, dont l'organigramme et les étapes de calcul sont détaillés.

Les résultats obtenus incluent l'analyse des fréquences propres et des modes de vibration sous différentes conditions aux limites. Une étude paramétrique approfondie a permis d'évaluer l'impact de l'indice de gradient, du rapport longueur/épaisseur et des conditions aux limites sur la réponse dynamique des poutres. Les résultats ont été validés par comparaison avec des travaux existants dans la littérature, confirmant la justesse du modèle proposé.

Ce travail contribue à une meilleure compréhension du comportement vibratoire des structures en FGM et fournit des outils utiles pour leur conception et optimisation dans des domaines de haute exigence tels que l'aéronautique, le biomédical et la défense. Il ouvre également des perspectives pour intégrer des effets supplémentaires comme la porosité, les charges thermiques ou l'amortissement afin de modéliser plus finement ces structures dans des contextes réels.

Mots clés: Poutre FGM, la théorie de Timoshenko, version-p de la méthode des éléments finis, vibration libre,

Abstract

This thesis focuses on the dynamic analysis of beams made of Functionally Graded Materials (FGMs), which are characterized by a continuous variation of their mechanical and thermal properties across the thickness. These hybrid materials combine the advantages of different constituents while minimizing issues associated with abrupt interfaces, such as stress concentrations or delamination.

The study centers on the vibrational behavior of FGM beams using advanced mechanical models, particularly Timoshenko beam theory and a hierarchical finite element approach. This methodology accounts for transverse shear deformation and rotary inertia effects, which are often neglected in classical models. The equations of motion are solved numerically using a specifically developed computational program, with detailed descriptions of its flowchart and calculation steps.

The results include an analysis of natural frequencies and vibration modes under various boundary conditions. A comprehensive parametric study was conducted to evaluate the influence of the gradient index, length-to-thickness ratio, and boundary conditions on the dynamic response of FGM beams. The accuracy of the proposed model was validated through comparison with existing literature results.

This work contributes to a better understanding of the vibrational behavior of FGM structures and provides valuable tools for their design and optimization in demanding fields such as aerospace, biomedical engineering, and defense. It also opens up perspectives for incorporating additional effects such as porosity, thermal loads, and damping, in order to enhance the modeling and durability of FGM beams under real-world conditions.

Keywords: FGM beam, Timoshenko theory, p-version finite element method, free vibration

الملخص

يركز هذا البحث على التحليل الديناميكي للعوارض المصنوعة من المواد متدرجة الوظائف (FGMs)، والتي تتميز بتغيير مستمر في خصائصها الميكانيكية والحرارية عبر السمك. تجمع هذه المواد الهجينة بين مزايا مكونات مختلفة، مع تقليل المشكلات المرتبطة بالفواصل المفاجئة، مثل تركيز الإجهادات أو الانفصال الطبقي.

تتمحور الدراسة حول السلوك الاهتزازي لعوارض FGM باستخدام نماذج ميكانيكية متقدمة، وبشكل خاص نظرية العارضة لتيموشينكو ومنهج العناصر المحددة الهرمي. تأخذ هذه المنهجية في الاعتبار تأثيرات القص العرضي وعزم العطالة الدوراني، وهي تأثيرات غالبًا ما يتم تجاهلها في النماذج الكلاسيكية. وقد تم حل معادلات الحركة عدديًا باستخدام برنامج حاسوبي تم تطويره خصيصًا، مع توضيح مفصل لمخطط سير العمليات وخطوات الحساب.

تشمل النتائج تحليل الترددات الطبيعية وأشكال الاهتزاز تحت شروط حدودية مختلفة. كما أُجريت دراسة معيارية شاملة لتقييم تأثير معامل التدرج ونسبة الطول إلى السمك والشروط الحدودية على الاستجابة الديناميكية للعوارض. وقد تم التحقق من دقة النموذج المقترح من خلال المقارنة مع نتائج منشورة في المراجع العلمية.

يساهم هذا العمل في تعزيز فهم السلوك الاهتزازي للهياكل المصنوعة من مواد FGM، ويوفر أدوات مهمة لتصميمها وتحسينها في مجالات تتطلب أداءً عاليًا، مثل الطيران، والهندسة الطبية الحيوية، والدفاع. كما يفتح آفاقًا مستقبلية لدمج تأثيرات إضافية مثل المسامية، الأحمال الحرارية، والتخميد، من أجل تحسين النمذجة وزيادة موثوقية هذه العوارض في ظروف التشغيل الواقعية.

الكلمات المفتاحية: عارضة FGM، نظرية تيموشينكو، طريقة العناصر المحددة بإصدار p ، الاهتزاز الحر

Sommaire

Sommaire	
Liste des figures	1
Chapitre 1	1
Liste des symboles	1
Introduction générale	1
Recherche bibliographie	2
Chapitre 1	6
Matériaux FGM	6
1.1. Introduction	6
1.2. Les avantages et les inconvénients	7
1.2.1. Avantages des poutres FGM	7
1.2.2. Inconvénients des poutres FGM	7
1.3.1. Applications des Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM)	8
1.4. Propriétés physiques et mécaniques des FGM	13
1.4.1. Propriétés de l'aluminium	13
1.4.2. Propriétés de la céramique :	14
1.5. Lois de variation des propriétés à travers l'épaisseur POUTRE FGM	15
1.5.1. Loi de puissance (P-FGM)	15
1.5.2. Loi exponentielle (E-FGM) :	16
1.5.4. La loi sigmoïde S-FGM	18
3.conclusion :	19
Chapitre 2	21
Théorie des poutres	21
2.1. Introduction	21
2.2. Théorie de Bernoulli Euler	21
2.2.1. Historique	21
2.2.2. Définition	21
2.2.3. Hypothèses	22

2.2.4. Champ des déplacements	22
2.2.5. Relation contrainte-déformation	22
2.3. Théorie de Timoshenko	23
2.3.1. Définition	23
2.3.2. Champ de déplacement	23
2.3.3. Champ de déformation	24
2.4. Théorie d'Ordre Elevé (HSDT) :	25
2.5. Conclusion	27
Chapitre 3	29
Modélisation des poutres Timochenko par la méthode des élément finis hiérarchiques .	29
3.1. Introduction	29
3.2. Méthode des éléments finis hiérarchiques	29
3.2.1. Définition	29
3.2.2. Avantages de la méthode des éléments finis.....	30
3.3. Application de la méthode des éléments finis hiérarchiques	30
3.4. Choix de l'élément.....	30
3.4.1. Fonction de forme	30
3.5. Energie déformation	30
3.5.1. Développement de l'Énergie de Déformation :	32
3.4.3. Rigidités Axiale, de Couplage et de Flexion :	32
3.6. Matrice de rigidité.....	33
3.6.1. Expression :	33
3.7. Energie cinétique.....	35
3.7.2. Formulation matricielle de l'énergie cinétique	36
3.8. La matrice de masse.....	36
3.7.3. Composantes de la matrice de masse :	37
3.9. Equation du mouvement.....	37
Chapitre 4	40
Programmation.....	40

4.1. Introduction	40
4.2. Environnement de programme	40
4.3. Organigramme du programme	40
4.4. Analyse de vibration libre	42
4.5. Résolutions	43
Chapitre 5	46
Résultats et discussions	46
5.1 Introduction	46
5.2 études de convergence et comparaison	47
5.2.1 poutres isotropes	47
5.2.2 Poutres FGM	50
5.3 Résultats numériques et interprétations	55
5.3.1 Poutre (F.G.M.) avec plusieurs conditions aux limites	55
5.4. Étude paramétrique	58
5.4.1. Poutre FGM Simplement appuyée	59
5.4.2. Poutre FGM encastrée en deux extrémités	62
5.4.3. Poutre FGM encastrée libre	65
5.4.4 Poutre FGM encastrée appyée	68
Conclusion générale	71
Bibliographie	72

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1.1 : Vue d'ensemble d'historique de la recherche et du développement des FGM (Ahmed, Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée , 2022).....6

Figure 1.2 : Domaines d'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023).....9

Figure 1.3 : usage des matériaux fonctionnel en aérospatial (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023)10

Figure 1.4: Usage des matériaux fonctionnel en médecine, (a)Prothèse de hanche (bandyopadhyay, 2009) (b) Implant dentaire (Watari, 2004) (c) ménisque artificiel (Bakarich S. E., 2017)..... 11

Figure 1.5 : Utilisation dans l'industrie de la défense (Samir, 2019).....12

Figure 1.6 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....15

Figure 1.7: Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023).....16

Figure 1.8 : Variation du module de Young d'un matériau E-FGM (Samir, 2019).....17

Figure 1.9 : Variation du module de Young d'un matériau S-FGM (Samir, 2019).....19

Chapitre 2

Figure 2.1: Rotation de la section transversale (Meziane, ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS, 2022)24

Figure 2.2 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé. (Bouzateur Med Salah Eddine, 2017)25

Chapitre 4

Figure 4.1 : organigramme principale.....41

Chapitre 5

Figure 5.1: convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées. 51

Figure 5.2: convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) encastree libre.52

Figure 5.3: convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) encastree a deux extremités53

Figure 5.4: convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) encastree a une extremité.54

Figure 5.5: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence pour k=0..59

Figure 5.6: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=1$	59
Figure 5.7: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=2$	60
Figure 5.8: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=5$	60
Figure 5.9: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=\infty$.	61
Figure 5.10: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence pour $k=0$	62
Figure 5.11: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=1$	62
Figure 5.12: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=2$	63
Figure 5.13: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=5$	63
Figure 5.14: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=\infty$	64
Figure 5.15: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence pour $k=0$	65
Figure 5.16: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=1$	65
Figure 5.17: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=2$	66
Figure 5.18: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=5$	66
Figure 5.19 : L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=\infty$	67
Figure 5.20: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence pour $k=0$	68
Figure 5.21: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=1$	68
Figure 5.22: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=2$	69
Figure 5.23 : L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=5$	69
Figure 5.24: L'influence le rapport l/h sur les 5 premier paramétré de la fréquence Pour $k=\infty$...	70

Liste des tableaux

Chapitre 1

Tableau 1.1 : Avantages et inconvénients des matériaux constituant les FGM. (Abdelkader, 2021).....	8
--	----------

Chapitre 4

Tableau 4.1 : Degrés de liberté aux nœuds.....	43
---	-----------

Tableau 4.2 : Degrés de liberté aux bords.....	43
---	-----------

Chapitre 5

Tableau 5.1 : Poutres isotrope simplement appuyées (4 modes)	48
---	-----------

Tableau 5.2 : Poutres isotrope en porte-à-faux (3 modes).....	49
--	-----------

Tableau 5.3 : poutre (F.G.M.) simplement appuyée	51
---	-----------

Tableau 5.4 : Poutre (F.G.M.) encastrée libre	52
--	-----------

Tableau 5.5 : Poutre (F.G.M.) encastrée a deux extrémités	53
--	-----------

Tableau 5.6 : Poutre (F.G.M.) encastrée a une extrémité	54
--	-----------

Tableau 5.7 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées	56
--	-----------

Tableau 5.8 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées encastrée libre	57
--	-----------

Tableau 5.9 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées encastrée en deux extrémités.	57
---	-----------

Tableau 10 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées encastrée à une extrémité.	58
---	-----------

Liste des symboles

- $E(z)$: Module de Young (fonction de l'épaisseur z)
- $G(z)$: Module de cisaillement
- ν : Coefficient de Poisson
- $\rho(z)$: Masse volumique (fonction de z)
- ρ_m : Masse volumique du métal (Al)
- ρ_c : Masse volumique de la céramique (Al_2O_3)
- e : Épaisseur de la poutre
- L : Longueur de la poutre
- h : Largeur de la poutre
- A : Aire de la section transversale
- I : Moment d'inertie
- $\nu(z)$: Fraction volumique de la phase céramique
- P, k : Exposant de la loi de puissance
- ν_1, ν_2 : Fonctions de fraction volumique pour S-FGM (loi sigmoïde)
- u, w : Déplacements axial et transversal
- ϕ : Rotation due au cisaillement (théorie de Timoshenko)
- θy : Angle de rotation (théorie d'Euler-Bernoulli)
- ϵ_{xx} : Déformations normale
- γ_{xz} : Déformations de cisaillement
- σ_{xx} : Contraintes normale
- τ_{xz} : Contraintes de cisaillement
- T : Énergie cinétique
- V : Énergie de déformation
- L : Lagrangien ($L=T-V$)
- $[K]$: Matrice de rigidité

- $[\mathbf{M}]$: Matrice de masse
- $\{q\}$: Vecteur des déplacements généralisés
- $N(\xi)$: Matrice des fonctions de forme
- ξ : Coordonnée naturelle
- P : Nombre de fonctions de forme
- ω : Fréquence naturelle (rad/s)
- Ω : Paramètre de fréquence adimensionnel
- $\tilde{\omega}$: Fréquence normalisée (pour les poutres isotropes)
- **A-A** : Appuyé-appuyé (simplement supporté)
- **E-E** : Encastré aux deux extrémités
- **E-L** : Encastré-libre (en porte-à-faux)
- **E-A** : Encastré à une extrémité, libre à l'autre

Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM, *Functionally Graded Materials*) représentent une avancée significative dans le domaine des matériaux composites, en offrant des propriétés mécaniques et thermiques qui varient continuellement dans l'espace. Conçus pour combiner les avantages de plusieurs constituants, tels que la résistance mécanique des métaux et la résistance thermique des céramiques, les FGM permettent d'éviter les inconvénients liés aux interfaces abruptes, notamment les concentrations de contraintes ou le délaminage. Leur utilisation s'est largement répandue dans des secteurs exigeants comme l'aéronautique, le biomédical, l'automobile ou encore le génie civil, où les performances et la durabilité sont essentielles.

Dans ce contexte, le présent mémoire de fin d'études s'intéresse à l'analyse dynamique des poutres en matériaux FGM, avec un accent particulier sur leur comportement vibratoire sous différentes conditions aux limites et configurations géométriques. Les poutres FGM, en raison de leurs propriétés matérielles variant progressivement, posent des défis spécifiques en matière de modélisation et de simulation, nécessitant des approches théoriques et numériques avancées pour représenter fidèlement leur réponse dynamique.

L'objectif principal de ce travail est d'explorer différentes théories de poutres, notamment les modèles d'Euler-Bernoulli, de Timoshenko et de théorie d'ordre supérieur (HSDT), afin d'analyser les vibrations libres et forcées des poutres FGM. La méthode des éléments finis hiérarchiques est utilisée pour résoudre les équations du mouvement, en prenant en compte les effets de cisaillement transversal et d'inertie rotationnelle, souvent négligés dans les modèles classiques. Une attention particulière est portée à l'influence des paramètres matériaux (indice de gradient, rapport longueur/épaisseur) et des conditions aux limites sur les fréquences propres et les modes vibratoires.

Recherche bibliographie

Les poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) présentent des propriétés matérielles variant continûment à travers l'épaisseur, ce qui permet d'optimiser leur comportement vibratoire et de réduire les concentrations de contraintes aux interfaces, souvent observées avec la loi de puissance classique. Pour analyser ces vibrations, différentes fonctions de distribution des propriétés sont utilisées, notamment la loi de puissance symétrique (SP-FGM) et la fonction sigmoïde antisymétrique (S-FGM), dont les effets sont comparés numériquement avec la distribution classique en loi de puissance (P-FGM), montrant que la loi symétrique tend à produire des fréquences plus élevées tandis que la fonction sigmoïde génère des fréquences plus basses. (Chahrazed & Amine, 2020) Les équations du mouvement sont dérivées à partir du principe d'Hamilton, en s'appuyant sur plusieurs théories de poutres, allant des modèles classiques aux théories raffinées intégrant le cisaillement d'ordre élevé et l'étirement de l'épaisseur, ce qui améliore la précision sans recourir à des facteurs de correction de cisaillement. (Yacine & Sidahmed, 2024) (Chahrazed & Amine, 2020) Ces théories raffinées prennent en compte la déformation normale souvent négligée, ce qui permet une meilleure prédiction des fréquences naturelles et des réponses vibratoires. (Yacine & Sidahmed, 2024) L'analyse numérique montre que des paramètres tels que l'indice de puissance, le rapport longueur/épaisseur, ainsi que la distribution de la phase céramique influencent significativement les fréquences propres. (Ahmed, Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée, 2022) (Chahrazed & Amine, 2020) Par ailleurs, des modèles récents intègrent l'effet de la porosité et des contraintes thermiques initiales, qui modifient également le comportement vibratoire des poutres FGM, bien que ces aspects soient moins développés dans les études consultées (Zenkour, 2010). (Horel, 2013) Les solutions analytiques sont souvent obtenues par la méthode de Navier ou par des méthodes numériques, et les résultats sont validés par comparaison avec la littérature, confirmant la précision et la simplicité des théories proposées pour prévoir le comportement statique et dynamique des poutres FGM reposant sur fondation élastique Winkler-Pasternak. (Amine, 2015) (Ahmed, Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée, 2022) (Chahrazed & Amine, 2020) Enfin, les modèles intégrant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques pour l'amortissement démontrent une meilleure dissipation d'énergie vibratoire, ce qui est crucial pour la durabilité des structures

soumises à des environnements sévères. (Amine, 2015) (Horel, 2013) Ces travaux fournissent une base complète pour la modélisation et l'optimisation des vibrations des poutres en naturelles ainsi que les modes vibratoires dépendent des propriétés matérielles (distribution des phases, porosité) et de la géométrie de la poutre (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023). Les vibrations forcées sont provoquées par des charges externes dynamiques ou périodiques, résultant de l'interaction entre les sollicitations appliquées et les caractéristiques de la poutre, leur analyse reposant sur des modèles analytiques ou numériques (Geronymos S. , Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact, 2014). Par ailleurs, les matériaux fonctionnellement gradués, en combinant lois de variation des propriétés, théories avancées de poutres et validation numérique rigoureuse. Concernant les types de vibrations des poutres FGM, celles-ci peuvent être classées en plusieurs catégories, chacune ayant des caractéristiques et des implications spécifiques pour le comportement dynamique des structures. (Geronymos S. , Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact, 2014). Les vibrations libres surviennent lorsqu'une poutre, initialement déformée, oscille sans force extérieure, et leurs fréquences naturelles ainsi que les modes vibratoires dépendent des propriétés matérielles (distribution des phases, porosité) et de la géométrie de la poutre (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023). Les vibrations forcées sont provoquées par des charges externes dynamiques ou périodiques, résultant de l'interaction entre les sollicitations appliquées et les caractéristiques de la poutre, leur analyse reposant sur des modèles analytiques ou numériques (Geronymos S. , Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact, 2014). Par ailleurs, les vibrations peuvent être classées selon leur direction : les vibrations axiales correspondent aux oscillations longitudinales de la poutre, souvent couplées aux vibrations transversales, ce qui complexifie la réponse dynamique globale (M.KADJA A. Z., 2016). Les vibrations transversales, dominantes sous charges latérales, se produisent perpendiculairement à l'axe de la poutre et sont cruciales pour évaluer la stabilité structurale (Zohra, 2017). En résumé, la compréhension de ces différents types de vibrations est essentielle pour optimiser le comportement dynamique et garantir l'intégrité des structures en matériaux fonctionnellement gradués.

Dans le présent travail, nous avons réalisé une analyse dynamique des poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ce travail est structuré en cinq chapitres.

- **Chapitre 1 – Matériaux FGM** : Ce chapitre présente les matériaux à gradient fonctionnel, en détaillant leurs propriétés, leurs avantages et inconvénients, ainsi que leurs principales applications dans divers secteurs industriels.
- **Chapitre 2 – Théorie des poutres** : Une revue des modèles mécaniques classiques et avancés (Euler-Bernoulli, Timoshenko, HSDT) est proposée afin d'analyser le comportement des poutres, en mettant en évidence les hypothèses sous-jacentes à chaque modèle ainsi que leurs limites.
- **Chapitre 3 – Modélisation par éléments finis** : Ce chapitre décrit l'application de la méthode des éléments finis hiérarchiques aux poutres FGM, avec une attention particulière portée à la formulation des matrices de rigidité et de masse, ainsi qu'aux équations du mouvement.
- **Chapitre 4 – Programmation** : L'implémentation numérique du modèle est présentée en détail, incluant l'organigramme du code de calcul ainsi que les différentes étapes de la procédure de résolution pour l'analyse vibratoire.
- **Chapitre 5 – Résultats et interprétations** : Ce chapitre est consacré à l'étude des fréquences propres des poutres FGM sous différentes conditions aux limites. Une analyse paramétrique est également menée, suivie d'une validation des résultats par comparaison avec les données de la littérature.



Chapitre 1
Matériaux FGM

Chapitre 1

Matériaux FGM

1.1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des composites innovants dont les propriétés mécaniques et physiques évoluent de manière contrôlée selon leur épaisseur.

Matériaux composites dont les propriétés varient graduellement à travers l'épaisseur, généralement entre un métal et une céramique.

L'idée générale des matériaux FGM a été initialement proposée pour les composites et les matériaux polymères.	Le concept de FGM a été appliqué pour la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai (Japon) par M. Niino et ses collègues en 1984 lors de la conception d'une navette spatiale.	Enquête et recherche menées pour les FGM avec des fonds spéciaux de coordination pour la promotion de la science et de la technologie.
1972	1984	1986
	Régulièrement, une conférence a lieu tous les deux ans.	
1987	1990	2021
Lancement du projet "La recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques"	La première conférence internationale sur les FGM a eu lieu à Sendai-city au Japon.	La 16 ^{ème} internationale conférence sur les FGM a eu lieu à Hartford dans USA.

Figure 1.1 : Vue d'ensemble d'historique de la recherche et du développement des FGM (Ahmed, Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée , 2022)

1.2. Les avantages et les inconvénients

1.2.1. Avantages des poutres FGM

- Les propriétés mécaniques et thermiques varient graduellement, ce qui évite les concentrations de contraintes aux interfaces entre matériaux différents (ex. métal et céramique) (Soraya, 2023) (Houda, 2022).
- Combinaison des avantages des matériaux constitutifs : dureté et résistance mécanique du métal, résistance à la chaleur et à l'usure de la céramique (Houda, 2022).
- Suppression du délaminage et meilleure cohésion entre matériaux, ce qui améliore la résistance globale et la durabilité (Soraya, 2023) (Houda, 2022).
- Adaptation locale des propriétés selon les besoins (ex. zone interne métallique dure, zone externe céramique résistante à haute température) (Houda, 2022).
- Meilleure gestion des flux thermiques et résistance aux gradients thermiques importants, utile dans les applications comme les rotors de turbines (Houda, 2022).

1.2.2. Inconvénients des poutres FGM

- Fabrication complexe : incompatibilité des matériaux (différences de fusion, affinité chimique, taille des particules) peut entraîner porosité, faible adhérence, et défauts. (Soraya, 2023).
- Nécessité de conditions de fabrication strictes (atmosphère protectrice, basse pression) pour éviter oxydation et évaporation des métaux, ce qui augmente les coûts (Soraya, 2023).
- Difficultés à produire des pièces de grande taille sans défauts, limitant certaines applications. (Soraya, 2023) .
- Modélisation et analyse plus complexes que pour les matériaux homogènes, nécessitant des méthodes avancées (éléments finis, théories de poutres raffinées). (Hadjer, 2021) (Abdelkader SAFA1) (Messaoud, 2017)

En résumé, les poutres FGM offrent un compromis performant entre propriétés mécaniques et thermiques, mais leur mise en œuvre reste techniquement et économiquement exigeante.

Matériau		Céramique La face à haute température	Céramique- Métal (La couche intermédiaire)	Métal (La face à basse température)
Avantages	Bonne résistance thermique	✓		
	Bonne résistance à l'oxydation.	✓		
	Elimination des problèmes de l'interface.		✓	
	Relaxer les contraintes thermiques		✓	
	Bonne résistance mécanique			✓
	Conductivité thermique élevée			✓
	Très bonne ténacité.			✓
Inconvénients	Faible conductivité thermique	✓		
	Fabrication compliquée		✓	
	Faible résistance a la corrosion			✓

Tableau 1.1 : Avantages et inconvénients des matériaux constituant les FGM. (Abdelkader, 2021)

1.3. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

1.3.1. Applications des Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM)

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) trouvent des applications variées dans de nombreux domaines. Leurs atouts majeurs comme leur capacité à allier des propriétés contradictoires, leur résistance améliorée à la rupture et leur aptitude à réduire les contraintes thermiques en font des solutions prometteuses pour diverses utilisations. Voici quelques exemples concrets de leurs applications : (Houari, 2011)

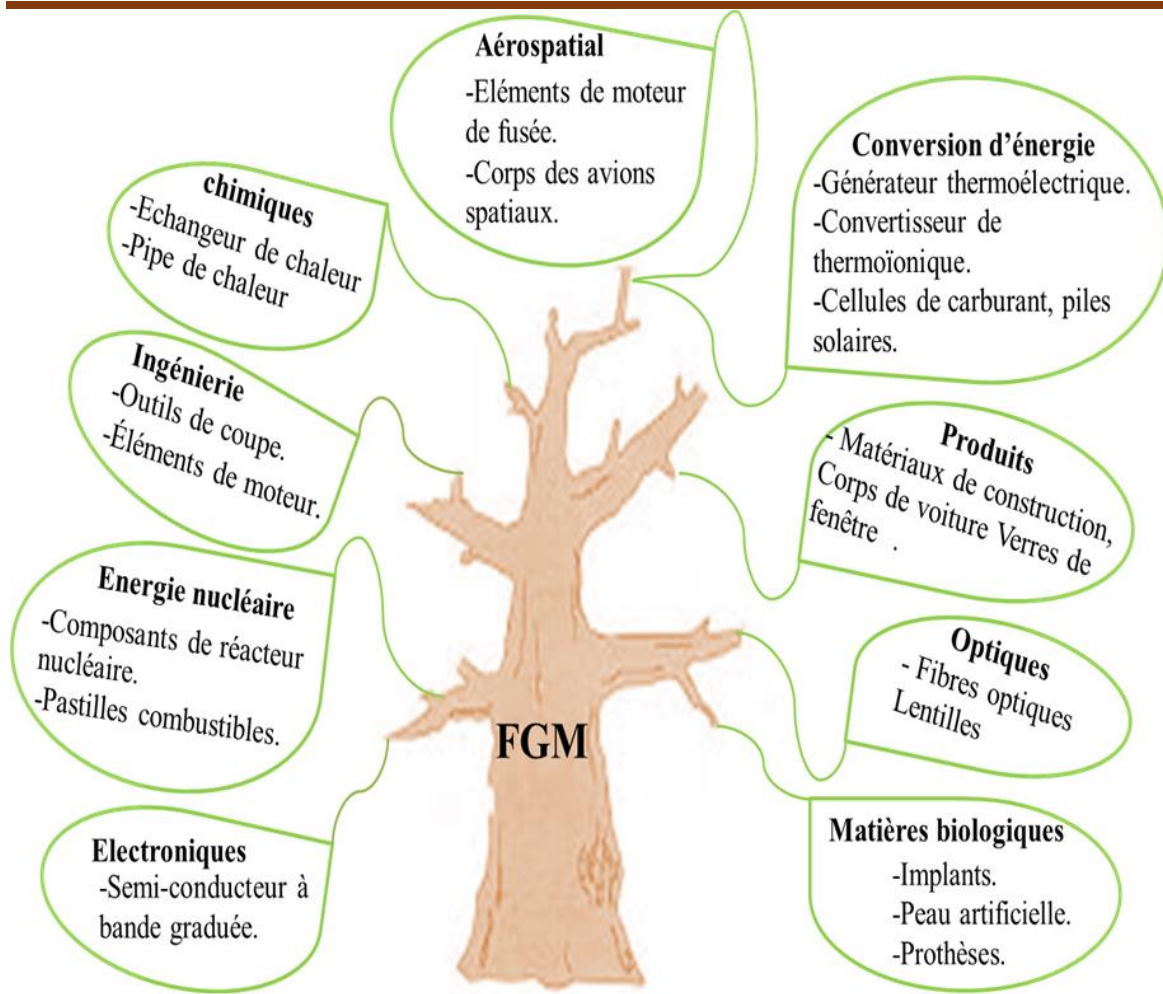


Figure 1.2 : Domaines d'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023)

1.3.1.1. Application Aérospatiale :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont été initialement conçus pour répondre aux défis thermiques de l'aérospatial, notamment pour réduire les contraintes entre les parois internes et externes des véhicules spatiaux. Leurs applications se sont depuis diversifiées pour inclure :

- **Systèmes de propulsion** : moteurs de fusée, roues de turbine
- **Composants structuraux** : engrenages spatiaux, bords d'attaque de missiles et navettes
- **Gestion thermique** : plaques d'échangeur de chaleur, réflecteurs
- **Équipements embarqués** : panneaux solaires, boîtiers de caméra

Comme le montre la Figure I.2, l'utilisation des FGM connaît une croissance continue dans le secteur aérospatial, principalement grâce à leur remarquable résistance aux chocs thermiques et à leurs performances mécaniques exceptionnelles. (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023)



Figure 1.2 : usage des matériaux fonctionnel en aérospatial (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023)

1.3.1.2. Application biomédicale

Ces dernières années, les chercheurs ont exploré l'utilisation de matériaux à gradient de propriétés pour les applications orthopédiques et les dents artificielles, visant à optimiser la biocompatibilité, la résistance à l'usure et la dureté. Des études ont été consacrées à l'amélioration de ces propriétés dans les matériaux biocompatibles intégrés au corps humain, grâce aux FGM (bandyopadhyay, 2009) (Gupta, 2017). Ces matériaux permettent également la conception de prothèses médicales sur mesure, adaptées à la morphologie spécifique de chaque patient (Figure I.3.a), ainsi que la fabrication d'implants dentaires (Figure I.3.b) (Bakarich S. E., 2017).

Parmi les réalisations récentes, un ménisque artificiel a été produit à partir de fibres d'hydrogel renforcées, dotées d'une dureté et d'une rigidité distribuées directionnellement via un procédé d'impression par extrusion. De même, un tendon artificiel bio-inspiré a été développé, constitué de tissu conjonctif aux propriétés mécaniques graduées entre le muscle et l'os (Figure I.3.c).

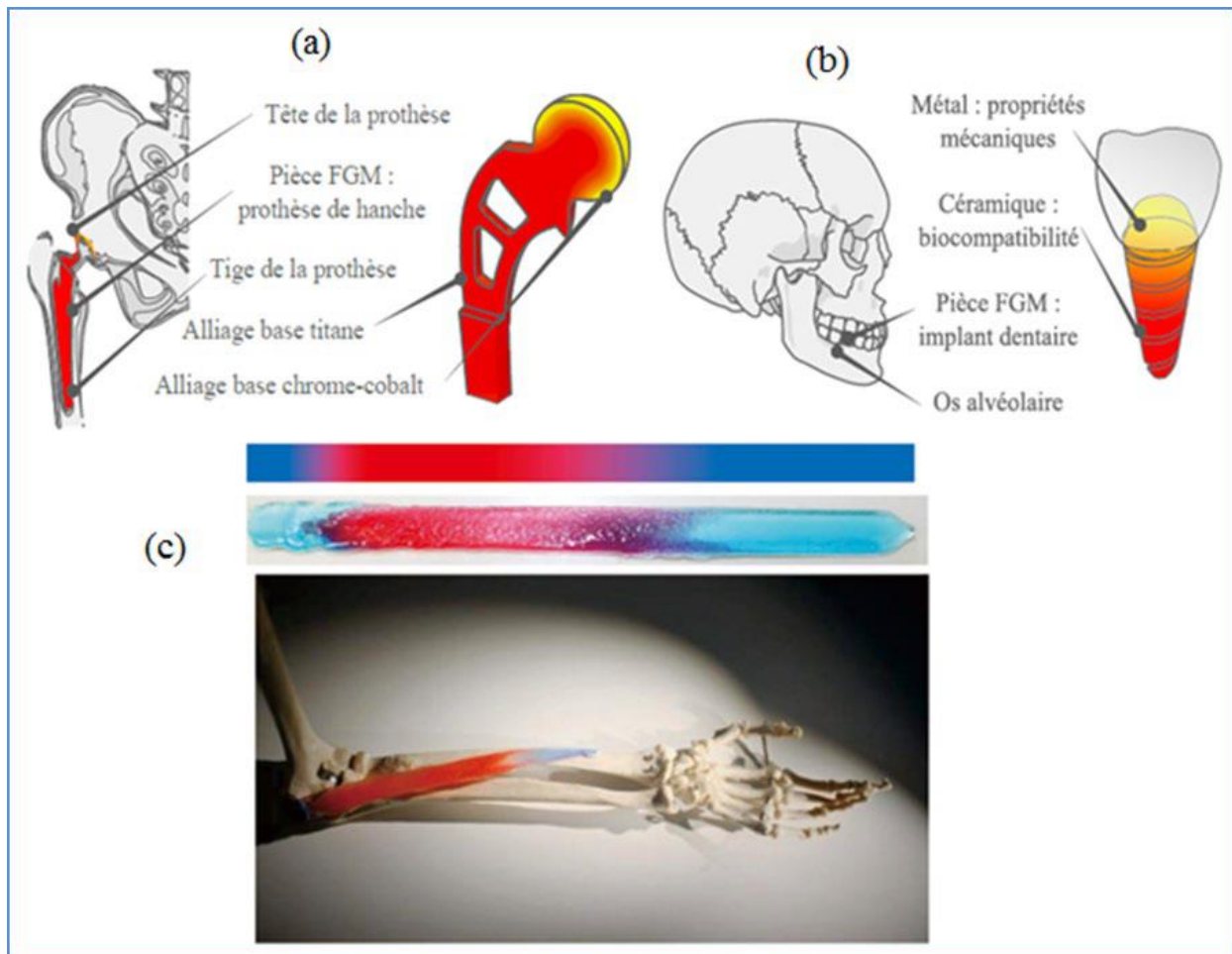


Figure 1.3: Usage des matériaux fonctionnel en médecine, (a)Prothèse de hanche (bandyopadhyay, 2009) (b) Implant dentaire (Watari, 2004) (c) ménisque artificiel (Bakarich S. E., 2017)

1.3.1.3. Industrie de la défense

La capacité des matériaux FGM (à gradient de propriétés) à résister à la pénétration tout en limitant la propagation des fissures en fait un choix privilégié dans l'industrie de la défense. Ces matériaux sont employés dans diverses applications militaires et de protection, notamment la fabrication de gilets pare-balles, d'épées japonaises traditionnelles, de blindages et de structures de véhicules blindés. Leur conception optimisée permet de combiner résistance mécanique et durabilité, répondant ainsi aux exigences critiques des équipements de défense. (Samir, 2019)



Figure 1.4 : Utilisation dans l'industrie de la défense (Samir, 2019)

1.3.1.4. Industrie automobile

Actuellement, l'utilisation des matériaux FGM (à gradient de propriétés) dans l'industrie automobile reste limitée en raison de leur coût de production élevé. Toutefois, leur emploi se justifie dans des composants critiques où leurs performances surpassent celles des matériaux conventionnels. Parmi les applications actuelles figurent :

- Les chemises de cylindre et pistons pour moteurs diesel
- Les ressorts à lames, bougies et chambres de combustion
- Les amortisseurs, volants et certaines parties de la carrosserie
- Les vitres et systèmes de freinage pour voitures de course (Figure 2.6).

De plus, les FGM sont exploités pour des revêtements de carrosserie optimisés, notamment via des couches graduées intégrant des particules (ex. dioxyde/mica), améliorant ainsi la durabilité et les propriétés mécaniques.

1.3.1.5. Le domaine du Génie civil :

Les joints dans la charpente métallique

Lors de l'assemblage d'éléments en charpente métallique de nuances différentes (ex. acier/aluminium), des soudures sont nécessaires. Traditionnellement, des joints ordinaires en acier sont utilisés, mais ils présentent des risques de rupture et une durabilité limitée. **L'utilisation de joints FGM (à gradient de propriétés) offre une solution optimale**, améliorant la résistance et la longévité de l'assemblage.

Les grands vitrages dans les zones chaudes

Les vitrages en FGM permettent de :

- **Réguler la température** dans les zones chaudes,

-
- Éviter les multi-vitrages (simplification de la structure),
 - Réduire les coûts et le poids des installations. (ADDA, 2022)

1.4. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

1.4.1. Propriétés de l'aluminium

1.4.1.1. Définition :

L'aluminium est un métal de couleur blanc argenté qui, une fois poli, acquiert un aspect réfléchissant. (Eddine, 2016-2017)

1.4.1.2. Propriétés physiques :

- **Température de fusion** : Relativement basse (~ 660 °C), ce qui facilite sa mise en œuvre par fonderie.
- **Ductilité** : Excellente aptitude à la déformation sans rupture.
- **Masse volumique** : $2\,700$ kg/m³, ce qui en fait un matériau léger, idéal pour les applications aéronautiques et automobiles.

1.4.1.3. Propriétés mécaniques :

Les propriétés mécaniques des métaux, dont l'aluminium, sont classées en deux catégories :

1. Résistance mécanique :

- Résistance mécanique en traction
- Dureté (résistance à la pénétration).

2. Capacité de déformation sans rupture :

- Malléabilité (formabilité en feuilles).
- Ductilité (étirage en fils).

1.4.1.4. Propriétés des alliages d'aluminium :

Les alliages d'aluminium offrent des caractéristiques remarquables, notamment :

- Température de travail élevée.
- Excellente résistance à la corrosion.
- Faible densité (légereté).
- Solidité, dureté et rigidité accrues.
- Rapport résistance/poids avantageux.
- Protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique et électrique.

- Finition de surface optimale.
- Recyclabilité totale.

1.4.1.5. Résistance à la corrosion :

L'aluminium et ses alliages forment naturellement une couche d'oxyde protectrice en surface, améliorable par anodisation. Cette propriété permet leur utilisation en extérieur (façades, structures) sans revêtement supplémentaire. Cependant, en milieux agressifs (salins, acides...), ils peuvent subir :

- Corrosion par piqûres.
- Corrosion sous contrainte.
- Fatigue-corrosion.
- Corrosion généralisée.

1.4.2. Propriétés de la céramique :

1.4.2.1. Définition :

La céramique est obtenue à partir de terres, roches broyées ou argile, façonnée puis cuite à haute température, ce qui entraîne une transformation irréversible et la perte de plasticité.

1.4.2.2. Propriétés physiques :

- **Fusibilité (utilité en fonderie) :** Les argiles réfractaires résistent à la chaleur et sont utilisées en fonderie pour la confection de moules, tandis que d'autres types d'argiles peuvent fondre à plus basse température selon leur composition.
- **Masse volumique (~3800 kg/m³) :** La densité des céramiques dépend de la composition et de la porosité, mais elle est généralement inférieure à celle des métaux et supérieure à celle des polymères (BENSAID, 2020).
- **Applications :** Les céramiques sont utilisées dans l'habitat, le design, l'industrie métallurgique, l'aéronautique, le spatial, le médical et les revêtements. (BENSAID, 2020)

- **1.4.2.3. Propriétés mécaniques :**

Elles dépendent des matières premières et des méthodes de fabrication, qui influencent la microstructure et la répartition des phases. (BENSAID, 2020)

1.4.2.4. Caractéristiques :

- **Module de Young élevé (liaisons ioniques/covalentes) :** Le module de Young mesure la rigidité et est élevé pour les céramiques, ce qui leur confère une grande rigidité,

- **Grande dureté (abrasifs, outils coupants, résistance à l'usure) :** Les céramiques sont très dures, ce qui explique leur usage dans les outils de coupe et les applications anti-usure,
- **Bonne résistance à la compression (~200 MPa), mais faible en traction :** Elles résistent bien à la compression mais sont fragiles en traction,
- **Rigidité et tenue à haute température :** Leur rigidité et leur stabilité à haute température sont dues à leur structure cristalline et à la nature de leurs liaisons chimiques. (MICHEL, 1997) .

Phase		Caractéristiques mécaniques
Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre "couches intermédiaires"	- Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Figure 1.5 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

1.5. Lois de variation des propriétés à travers l'épaisseur POUTRE FGM

Les lois de variation des propriétés à travers l'épaisseur des poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) décrivent comment les caractéristiques mécaniques (les propriétés telles que le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson) changent continûment du métal vers la céramique. Voici les principales lois utilisées :

1.5.1. Loi de puissance (P-FGM)

- La fraction volumique d'un matériau varie selon une loi de puissance :

$$v(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k$$

Où k est un paramètre contrôlant la variation, z la position dans l'épaisseur h .

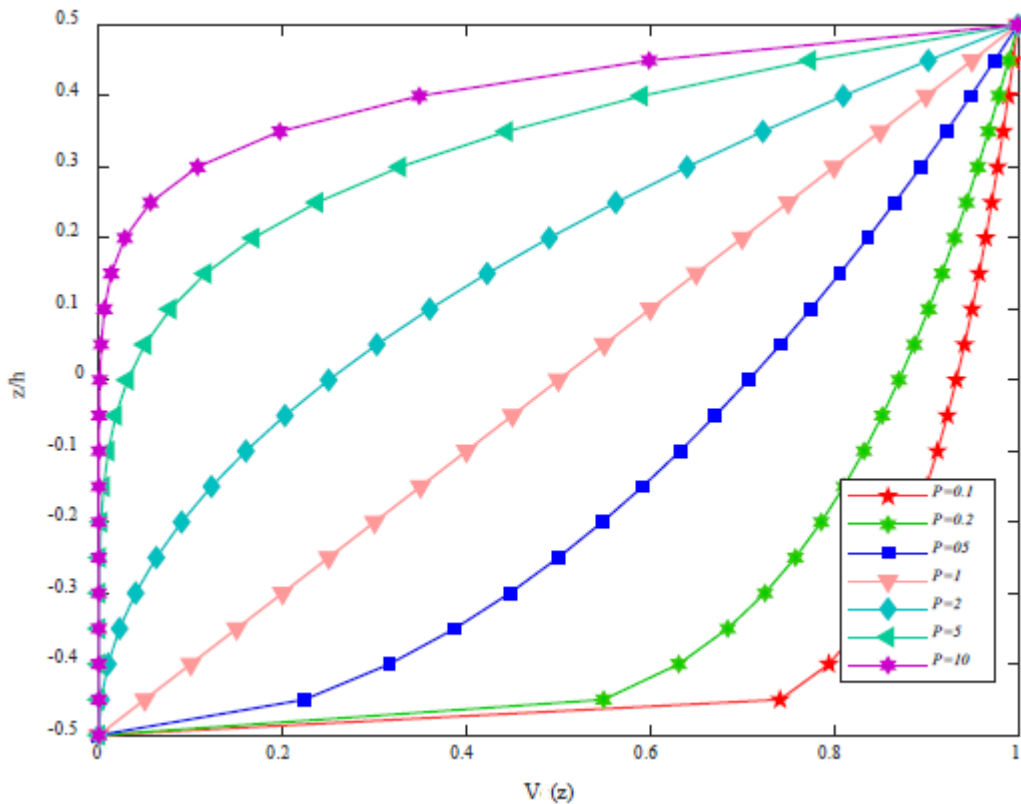


Figure 1.6: Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM (Abdelhak M. , Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis, 2023)

- Les propriétés effectives, par exemple le module de Young $E(z)$, sont calculées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_1 v(z) + E_2 (1 - v(z))$$

Avec E_1 et E_2 les modules aux surfaces inférieure et supérieure.

- Cette loi est la plus couramment utilisée pour modéliser les poutres FGM (Bouraada, 20018) (Abdelkader, 2021)

1.5.2. Loi exponentielle (E-FGM) :

Les propriétés varient selon une fonction exponentielle :

$$E(z) = A^{\beta(z+\frac{h}{2})}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = E_2 \\ \beta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \end{cases}$$

Où : E1 et E2 sont respectivement les propriétés matérielles de la structure E-FGM (modules de Young) de la surface inférieure $z = -\frac{h}{2}$ et de la surface supérieure $z = +\frac{h}{2}$. (Ahmed, Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée , 2022)

La figure montre La variation graduelle du module de Young dans la direction normale à la plaque E-FGM

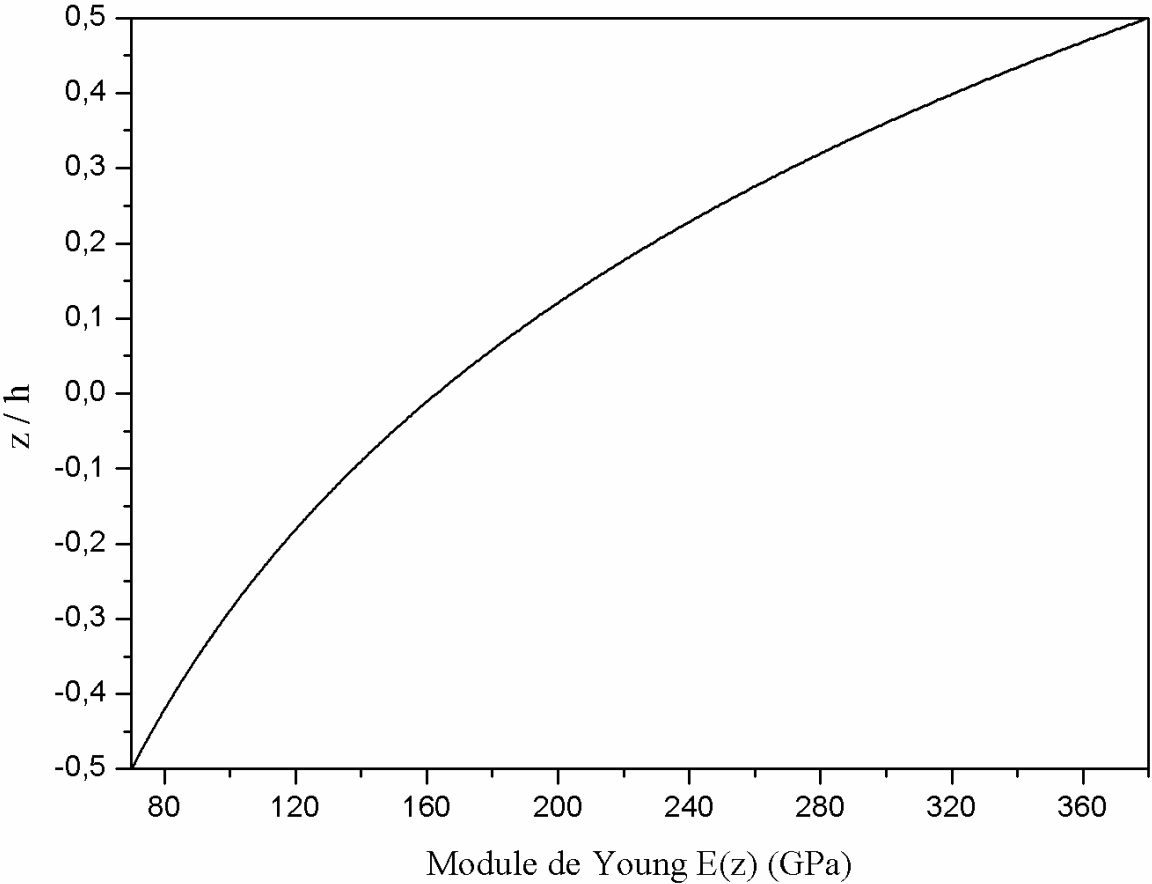


Figure 1.7 : Variation du module de Young d'un matériau E-FGM (Samir, 2019)

1.5.4. La loi sigmoïde S-FGM

La fraction volumique d'un matériau S-FGM varie selon les équations suivantes (Samir, 2019) :

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

$$v_2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

Où k est l'indice de gradient contrôlant la forme de la fonction.

La fraction volumique d'un matériau S-FGM est calculée par les équations suivantes :

$$E(z) = v_1(z) \cdot E_1 + [1 - v_1(z)] \cdot E_2 \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

$$E(z) = v_2(z) \cdot E_1 + [1 - v_2(z)] \cdot E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque S-FGM est représentée sur la figure.

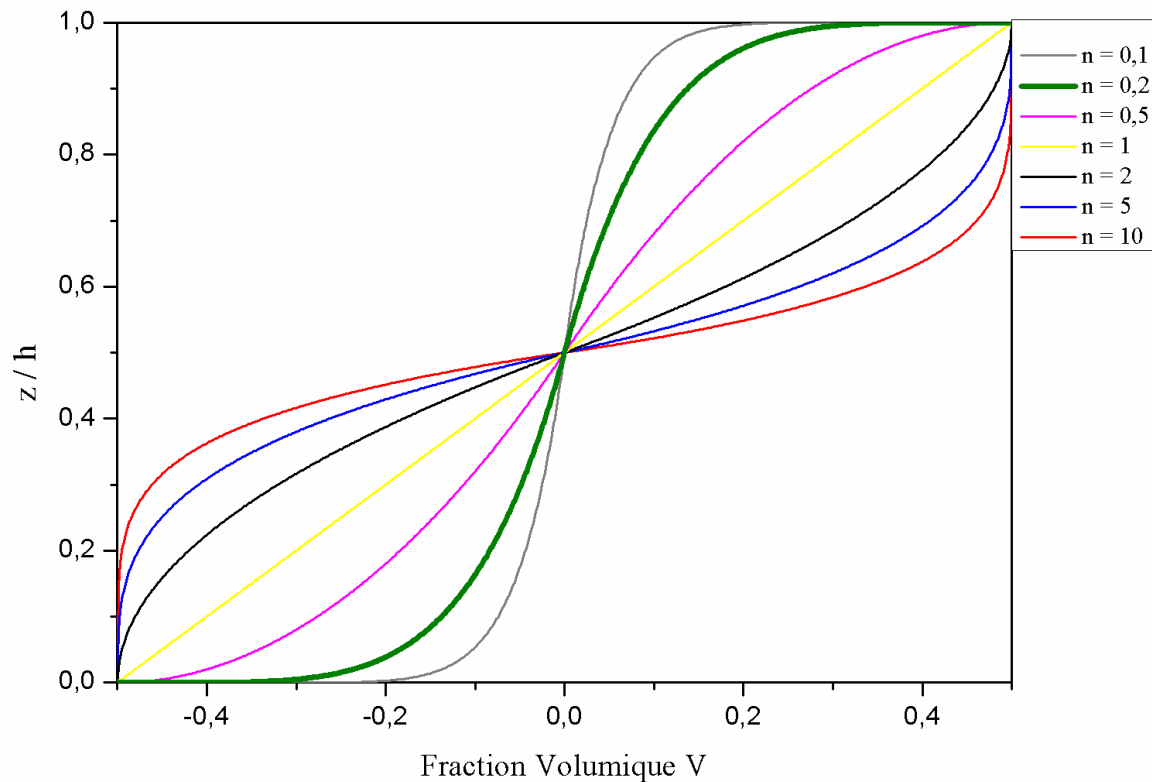



Figure 1.8 : Variation du module de Young d'un matériau S-FGM (Samir, 2019)

3.conclusion :

Dans ce chapitre en a vu L'étude des vibrations des poutres FGM révèle que leur comportement dynamique dépend fortement de la variation graduelle des propriétés matérielles, des conditions aux limites et des sollicitations externes. Puis Les vibrations (libres, forcées, axiales ou transversales) peuvent induire des effets complexes comme le couplage de modes ou l'amplification des déformations, impactant la durabilité des structures. Bien que les FGM offrent des avantages clés (résistance thermique, absence de délaminage), leur optimisation nécessite des modèles précis intégrant des lois de gradient (puissance, exponentielle, sigmoïde) et des théories de cisaillement avancées. Ces connaissances sont essentielles pour leur application dans des secteurs exigeants comme l'aérospatial ou le biomédical



Chapitre 2
Théorie des poutres

Chapitre 2

Théorie des poutres

2.1. Introduction

L'étude du comportement des poutres constitue un pilier fondamental de la mécanique des structures et de la résistance des matériaux. Depuis le XVIIIe siècle, plusieurs théories ont été développées afin de modéliser et de prédire la réponse des poutres soumises à diverses sollicitations. Parmi ces théories, celle d'Euler-Bernoulli occupe une place centrale, offrant une approche simplifiée mais efficace pour l'analyse des poutres longues et minces. Toutefois, l'évolution des besoins en ingénierie et la complexification des structures ont conduit à l'élaboration de modèles plus avancés, tels que la théorie d'ordre élevé (HSDT) et la théorie de Timoshenko, qui prennent en compte des phénomènes négligés dans la théorie classique, comme le cisaillement transversal et l'inertie rotationnelle. Ce chapitre présente les fondements, les hypothèses et les champs de déplacement de ces différentes théories, en mettant en évidence leur domaine d'application et leurs limites respectives.

2.2. Théorie de Bernoulli Euler

2.2.1. Historique

Leonhard Euler et Daniel Bernoulli ont proposé cette théorie pour la première fois en 1750. À cette époque, la science et l'ingénierie étaient perçues différemment de nos conceptions actuelles. Bien que la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli repose sur des bases mathématiques rigoureuses, elle était initialement considérée comme peu fiable pour des applications pratiques en ingénierie. Néanmoins, les ponts et les bâtiments ont continué à être conçus selon ses principes jusqu'à la fin du XIXe siècle. Ce n'est qu'avec la construction de structures emblématiques comme la tour Eiffel et la grande roue de Chicago que la validité de cette théorie à grande échelle a été clairement démontrée. (Bauchau, 2009).

2.2.2. Définition

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (également appelée théorie classique des poutres ou théorie des poutres d'ingénierie) constitue une approche simplifiée permettant de calculer la déflexion d'une poutre soumise à une charge. Elle est valable dans le cas de petites déflexions. (Ma, 1996).

La théorie d'Euler-Bernoulli est un modèle classique en résistance des matériaux qui décrit la flexion des poutres longues et fines en supposant que les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation, tout en négligeant les effets du cisaillement transverse. Cette simplification permet d'analyser efficacement les contraintes et déformations liées à la flexion, et constitue la base de nombreuses applications en ingénierie structurelle.

2.2.3. Hypothèses

La théorie d'Euler-Bernoulli est reposée sur les hypothèses suivantes (Han, 1999).

1. La poutre est considérée comme isotrope et élastique.
2. Elle est longue et mince, avec une section transversale constante le long de son axe.
3. La déformation de la poutre résulte principalement de la flexion et des déplacements latéraux.
4. Les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation sont négligés.
5. Une section plane avant déformation reste plane après déformation.
6. La section reste perpendiculaire à l'axe neutre déformé de la poutre.

2.2.4. Champ des déplacements

Ce champ de déplacements est donné par :

$$u(x, z, t) = -z\theta_y(x, t) \quad (2.1)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (2.2)$$

Où

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} \quad (2.3)$$

u Déplacement longitudinal.

θ Angle de rotation.

2.2.5. Relation contrainte-déformation

À partir du champ de déformation d'un solide 3D on trouve :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -Z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.5)$$

La poutre est dans un état de contrainte axiale pure ε_x . La contrainte axiale σ_x est liée à ε_x par la loi de Hooke comme suit :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -z \cdot E \frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad (2.6)$$

E est le Module de Young.

2.3. Théorie de Timoshenko

2.3.1. Définition

La théorie de Timoshenko modélise le comportement des poutres épaisses en intégrant l'effet de cisaillement transversal et l'inertie rotationnelle des sections, contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli qui les néglige. Cette approche permet une analyse plus précise des vibrations et des déformations pour des rapports longueur/épaisseur réduits. (Salah, 2012)

2.3.2. Champ de déplacement

Le champ cinématique s'exprime par :

$$\begin{cases} u_x(x, z) = u_x^0 - z\phi(x, t) \\ u_y = 0 \\ u_z(x, t) = w(x, t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Où :

- $w(x, t)$: déplacement transverse (flèche) selon z
- $\phi(x, t)$: rotation indépendante de la section due au cisaillement
- z : coordonnée selon l'épaisseur

Cette formulation introduit deux variables indépendantes (w et ϕ), permettant de découpler la flexion et le cisaillement. (Madjid, 2016)

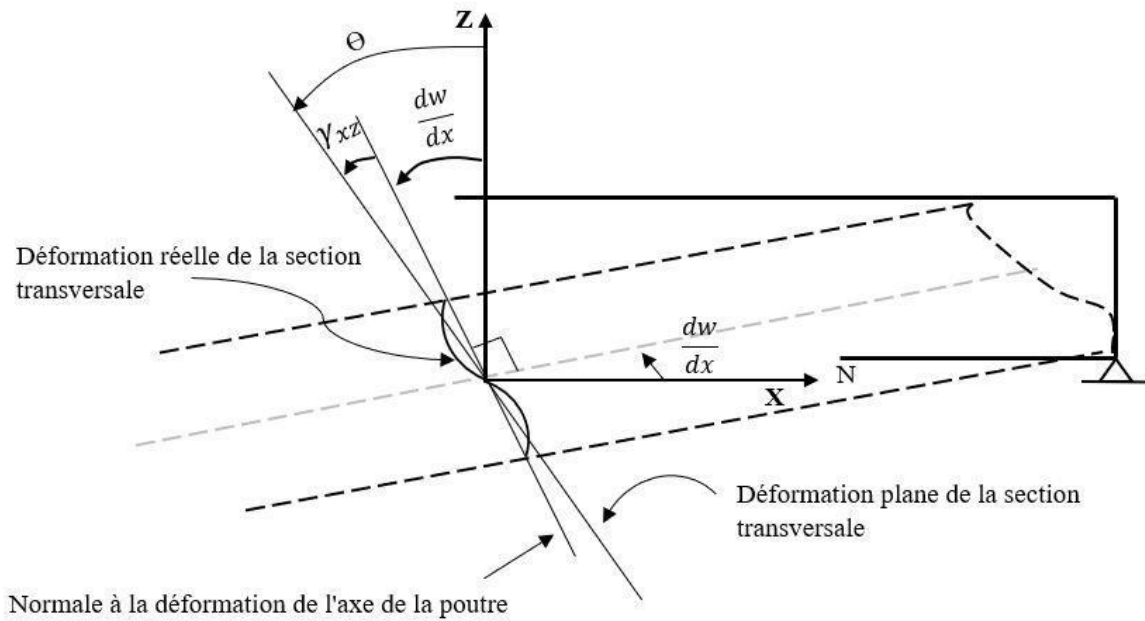


Figure 9.1 : Rotation de la section transversale (Meziane, ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS, 2022)

2.3.3. Champ de déformation

Les déformations s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \end{cases} \quad (2.8)$$

Avec :

- ε_{xx} : déformation normale de flexion
- γ_{xz} : déformation de cisaillement transverse

Par conséquent, la théorie de Timoshenko introduit une déformation de cisaillement transverse γ_{xz} .

Les contraintes axiales et de cisaillement σ_{xx} et τ_{xz} en un point de la section transversale de la poutre sont liées aux déformations correspondantes par la formule suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = -z \cdot E \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

Où G est le module de cisaillement ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$) et ν est le coefficient de Poisson (Abdelhak K.)

2.4. Théorie d'Ordre Elevé (HSDT) :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre, car elle intègre une fonction qui prend en compte le phénomène de gauchissement, lequel survient lorsque la section transversale de la poutre ne demeure plus plane après déformation. (figure 2.1). (Bouzateur Med Salah Eddine, 2017)

La fonction représente le gauchissement et sa dérivée $\Psi'(z)$ représente le cisaillement.

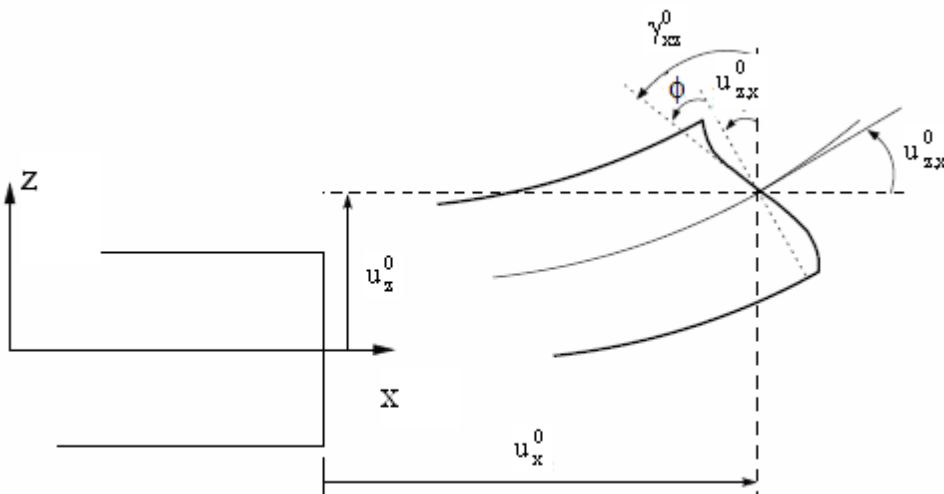


Figure 2.2 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé. (Bouzateur Med Salah Eddine, 2017)

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$u(M), \begin{cases} U(x, z) = U^0(x) - z w^{0,x}(x) + \phi(z) \gamma_{xz}^0(x) \\ \omega(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \phi'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \phi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (2.12)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$\phi'(z)|_{z = \pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (2.13)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition. (Madjid, 2016)

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM :

- Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) :

$$\psi(z) = 0 \quad (2.14)$$

- Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT) :

$$\psi(z) = z \quad (2.15)$$

- Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.16)$$

- Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) :

$$\psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.17)$$

-
- Le modèle trigonométrique :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (2.18)$$

Avec, h : épaisseur de la poutre.

2.5. Conclusion

Les théories des poutres évoluent selon la complexité des phénomènes à modéliser. La théorie de Timoshenko, plus complète que celle d'Euler-Bernoulli, intègre des effets essentiels pour une meilleure précision. La méthode des éléments finis sera alors présentée comme une solution performante pour appliquer cette théorie dans la modélisation et l'analyse des poutres, Qui va être dans le chapitre suivant.



Chapitre 3
Modélisation
des poutres
Timochenko
par la méthode
des élément
finis
Hiérarchiques

Chapitre 3

Modélisation des poutres Timochenko par la méthode des élément finis hiérarchiques

3.1. Introduction

La modélisation des poutres selon la théorie de Timoshenko par la méthode des éléments finis repose sur une approche qui intègre à la fois les effets de flexion et de cisaillement, contrairement au modèle classique d'Euler-Bernoulli qui néglige les déformations de cisaillement. Dans cette méthode, la poutre est discrétisée en éléments finis où chaque élément est représenté par des fonctions de forme associées aux déplacements et rotations nodaux.

3.2. Méthode des éléments finis hiérarchiques

3.2.1. Définition

La méthode des éléments finis hiérarchiques est une extension de la méthode classique des éléments finis qui utilise des bases de fonctions hiérarchiques pour construire les espaces d'approximation. Contrairement aux éléments finis traditionnels où les fonctions de base sont généralement définies de manière fixe sur chaque élément, la méthode hiérarchique introduit des fonctions supplémentaires par niveaux, permettant un enrichissement progressif de l'espace d'approximation. (Garon, 1997-2006)

Principes de la méthode des éléments finis hiérarchiques

- **Hiérarchie des fonctions de base** : Il s'agit de fonctions utilisées pour organisées en niveaux hiérarchiques, ce qui permet d'ajouter ou de retirer des fonctions sans modifier complètement la base initiale. Cela facilite le raffinement adaptatif du maillage, car on peut augmenter localement la précision en ajoutant des fonctions de plus haut degré ou de plus petits supports.
- **Raffinement adaptatif** : Grâce à la nature hiérarchique des fonctions, on peut affiner la solution dans certaines régions du domaine sans avoir à refaire entièrement le maillage ou la base, ce qui améliore l'efficacité du calcul.
- **Éléments mortiers et contraintes** : L'introduction d'éléments hiérarchiques peut se faire via des techniques comme les éléments mortiers, qui permettent de gérer les contraintes entre sous-domaines ou éléments avec différents niveaux de raffinement. (Marchai, 1992)

3.2.2. Avantages de la méthode des éléments finis

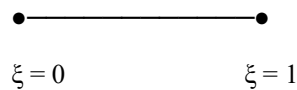
- Meilleure gestion du raffinement local et adaptatif.
- Réduction de la taille des systèmes linéaires à résoudre en ne considérant que les fonctions nécessaires.
- Flexibilité dans la construction des espaces d'approximation. (CAVIN, 2006)

3.3. Application de la méthode des éléments finis hiérarchiques

La méthode est utilisée dans des contextes où la précision locale est cruciale, notamment en mécanique des milieux continus, en élasticité non linéaire, ou pour des problèmes où la solution présente des singularités ou des zones de forte variation. (tie, 1993)

3.4. Choix de l'élément

Le choix de l'élément fini dépend principalement de la précision requise, de la nature du problème à résoudre, ainsi que des contraintes liées au temps de calcul. Parmi les différentes familles d'éléments disponibles, nous avons opté pour un élément linéaire à deux nœuds, qui offre un compromis satisfaisant entre simplicité, efficacité et précision pour notre étude. (Garon, 1997-2006)



La relation suivante permet d'exprimer les coordonnées adimensionnelles en fonction des coordonnées cartésiennes

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (3.1)$$

3.4.1. Fonction de forme

Les fonctions de forme hiérarchiques de type trigonométrique sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f_1 = 1 - \xi \\ f_2 = \xi \\ f_{n+2} = \sin(\delta r \pi) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\delta r = r \pi \quad (3.3)$$

Où

- $r=1,2,3$

3.5. Energie déformation

L'expression de l'énergie de déformation d'une plaque est donnée par l'équation :

$$v = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \quad (3.4)$$

- Contrainte normale (σ_{xx}) et déformation axiale (ε_{xx})
- Contrainte de cisaillement (τ_{xz}) et déformation de cisaillement (γ_{xz})

Où

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E(z) & 0 \\ 0 & G(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E(z) \varepsilon_{xx} \\ \tau_{xz} = G(z) \gamma_{xz} \end{cases} \quad (3.6)$$

- $E(z)$ = Module d'Young longitudinal
- $G(z)$ = Module de cisaillement

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x}^0 - z \phi_{,x} \\ \gamma_{xz} = -\phi + w_{,x}^0 \end{cases} \quad (3.7)$$

- u_0 = Déplacement axial
- ϕ = Rotation due à la flexion
- w = Déplacement transversal
- Z = Position le long de la hauteur de la poutre

Contraintes en Fonction des Déplacements :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E(z)(u_{,x}^0 - Z \phi_{,x}) \\ \tau_{xz} = G(z)(-\phi + w_{,x}^0) \end{cases} \quad (3.8)$$

- **Loi de variation du module d'Young**

$$E(z) = (Ec - Em) \cdot \left[\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right]^k + Em \quad (3.9)$$

Cette équation modélise l'évolution graduelle du module d'Young (E) dans un matériau composite à gradient fonctionnel. La propriété mécanique passe progressivement de la valeur Em (substrat) à Ec (couche supérieure) selon une loi de puissance contrôlée par l'exposant k, avec z/h représentant la position normalisée dans l'épaisseur h.

- **Relation contrainte-déformation en cisaillement**

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

Cette formule relie le module de cisaillement (G) au module d'Young (E) et au coefficient de Poisson (ν). Elle illustre la dépendance directe entre rigidité en traction et résistance au glissement interne, valable pour des matériaux isotropes homogènes ou à gradient.

3.5.1. Développement de l'Énergie de Déformation :

En substituant σ_{xx} et τ_{xz} dans l'expression de V , on obtient :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx = \\ V &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_A E(z) (u_{,x}^0 - z \phi_{,x})^2 + G(z) (\phi - w_{,x}^0)^2 dA dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

Développement complet :

$$V = \frac{1}{2} b h \int_0^1 \left(\frac{A}{L^2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{C}{L^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{2A}{L^2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + D \Phi^2 + \frac{D}{L^2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{D}{L} \Phi \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right) \right) \partial \xi \quad (3.11)$$

3.4.3. Rigidités Axiale, de Couplage et de Flexion :

Les intégrales A, B, C et D sont calculer par les relations suivantes :

$$A = \int_{h/2}^{-h/2} E(z) dz \quad (3.12)$$

$$B = \int_{h/2}^{-h/2} E(z) \cdot z \cdot dz \quad (3.13)$$

$$C = \int_{h/2}^{-h/2} E(z) \cdot z^2 dz \quad (3.14)$$

$$D = \int_{h/2}^{-h/2} G(z) dz \quad (3.15)$$

- $G(z)$: Module de cisaillement.
- h : Épaisseur de la poutre ou de la plaque

3.6. Matrice de rigidité

La matrice globale est symétrique et s'écrit :

$$k = \begin{bmatrix} k_{uu} & k_{uw} & k_{u\phi} \\ k_{uw}^T & k_{ww} & k_{w\phi} \\ k_{u\phi}^T & k_{w\phi}^T & k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.6.1. Expression :

$$k_{uu} = E(z) \cdot u_{,x}^2 \quad (3.17)$$

k_{uu} Ce terme représente la rigidité axiale dans la direction longitudinale (ux).

$$k_{ww} = G(z) \cdot w_{,x}^2 \quad (3.18)$$

k_{ww} Ce terme correspond à la rigidité en cisaillement

Où G est le module de cisaillement et w_x est le gradient de déformation due au cisaillement.

$$k_{\phi\phi} = E \cdot z^2 \cdot \phi_{,x}^2 + G(z) \cdot \phi^2 \quad (3.19)$$

Cette équation combine la rigidité en flexion $E \cdot z^2 \cdot \phi_{,x}^2$ et la rigidité en cisaillement $G(z) \cdot \phi^2$. Le terme z^2 montre que la flexion dépend de la position dans l'épaisseur, tandis que ϕ représente l'angle de rotation dû au cisaillement.

$$k_{uw} = 0 \quad (3.20)$$

$$k_{u\phi} = -2 \cdot E(z) u_{,x}^0 \cdot z \cdot \phi_{,x} \quad (3.21)$$

$k_{u\phi}$ Ce terme décrit le couplage entre la déformation axiale u_x et la rotation due à la flexion $\phi_{,x}$

$$k_{w\phi} = -2 \cdot G(z) \cdot \phi \cdot w_{,x}^0 \quad (3.22)$$

$k_{w\phi}$ Ce terme Décrit l'interaction entre le cisaillement transverse (w) et la rotation due à la flexion (ϕ)

Les sous matrices sont définies par les relations suivantes

$$K_{uu} = \frac{1}{2} b h \int_0^1 \left(\frac{A}{L^2} \frac{\partial[N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial[N]}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (3.23)$$

$$k_{ww} = b \cdot h \int_0^1 \left(\frac{D}{L^2} \frac{\partial[N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial[N]}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (3.24)$$

$$k_{u\phi} = -2bh \int_0^1 \left(\frac{A}{L^2} \frac{\partial[N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial[N]}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (3.25)$$

$$k_{w\phi} = -2 \frac{D}{L} \int_0^1 \left([N]^T \frac{\partial[N]}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (3.26)$$

$$k_{uw} = 0 \quad (3.27)$$

La matrice N :

$$N = [f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_i(\xi), \dots, f_P(\xi)] \quad (3.28)$$

Avec $i = 1, 2, \dots, P$

P : Le nombre de fonctions de formes

3.7. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un élément de poutre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A^b \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dA dx \quad (3.29)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A^b \rho(z) [\dot{u}_0^2(x, t) - z^2 \dot{\phi}^2(x, t) + \dot{w}_0^2(x, t)] dA dx \quad (3.30)$$

- $\dot{u}_0^2(x, t) = \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi}\right)^2$ Le déplacement axiale moyen
- $\dot{w}_0^2(x, t) = \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi}\right)^2$ Le déplacement transversal
- $\phi(x, t)$ La rotation de la section
- Z : coordonnée dans l'épaisseur
- ρ : masse volumique
- A : aire de la section
- L : longueur de l'élément

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A^b \rho(z) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi}\right)^2 - \rho A \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)^2 + \rho(z) \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi}\right)^2 \quad (3.31)$$

- **Distribution de la masse volumique**

$$\rho(z) = (\rho c - \rho m) \cdot \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho m \quad (3.32)$$

Décrit la variation spatiale de la masse volumique (ρ) dans le matériau, suivant la même loi de puissance que le module d'Young. Cette symétrie mathématique assure une cohérence physique entre rigidité et inertie, cruciale pour les applications dynamiques.

ρc : La masse volumique de la céramique

ρm : La masse volumique du métal

$$\rho A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad (3.33)$$

3.7.2. Formulation matricielle de l'énergie cinétique

On définit le vecteur des degrés de liberté généralisés :

$$q = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{w}_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{q}^T M \dot{q} dx \quad (3.35)$$

En éléments finis, avec fonctions de forme $N_i(x)$ pour chaque degré de liberté, la matrice masse élémentaire est :

$$[M] = \int_0^L [N]^T M [N] dx \quad (3.36)$$

- $[N]$: matrice des fonctions de forme associées aux degrés de liberté (u_0, w_0, ϕ)
- L : longueur de l'élément

3.8. La matrice de masse

La matrice globale est symétrique et s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} Muu & Muw & Mu\phi \\ Muw^T & Mww & Mw\phi \\ Mu\phi^T & Mw\phi^T & M\phi\phi \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.7.3. Composantes de la matrice de masse :

$$M_{uu} = bh \int_0^L \rho B. [N]^T(\xi)[N](\xi) d\xi \quad (3.37)$$

$$M_{ww} = bh \int_0^L \rho B. [N]^T(\xi)[N](\xi) d\xi \quad (3.38)$$

$$M_{\phi\phi} = bh \int_0^L \rho A. [N]^T(\xi)[N](\xi) d\xi \quad (3.39)$$

$$M_{u\phi} = -bh \int_0^L \rho c. [N]^T(\xi)[N](\xi) d\xi \quad (3.40)$$

$$M_{w\phi} = 0 \quad (3.41)$$

$$M_{uw} = 0 \quad (3.42)$$

Avec

$$\bullet \quad \rho A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \quad (3.43)$$

$$\bullet \quad \rho c = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z). z. dz \quad (3.44)$$

3.9. Equation du mouvement

En utilisant la fonction de Lagrange formulée à partir de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation donnée par :

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V} \quad (3.45)$$

La fonction précédente permet d'établir les équations de mouvement de la plaque par la formule de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

Pour les petits mouvements des corps élastiques les énergies cinétiques et de déformation nous pouvons écrire :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (3.47)$$

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (3.48)$$

Où $[M]$ est la matrice masse, $[K]$ la matrice rigidité et $\{q\}$ le vecteur généralisé des déplacements.

A partir des équations précédentes nous pouvons écrire l'équation du mouvement suivante :

$$[M]\ddot{X} + [K]X = 0 \quad (3.49)$$

La solution d'équation est une fonction sinusoïdale :

$$X = Ae^{i\omega t} \quad (3.50)$$

A decorative wreath composed of blue flowers and butterflies. The wreath is circular and features several blue butterflies of various sizes and shades, interspersed with clusters of small blue flowers and green leaves on thin, brownish stems. The background is plain white.

Chapitre 4

Programmation

Chapitre 4

Programmation

4.1. Introduction

Le code de calcul utilisé vise à déterminer les fréquences grâce à la méthode des éléments finis hiérarchiques, basée sur la théorie des poutres de Timoshenko. Il intègre l'organigramme du programme principal ainsi que les différents sous-programmes.

4.2. Environnement de programme

Le matériel utilisé pour la programmation est un ordinateur portable équipé d'un processeur Intel (R) Core. (TM) i3-4005U CPU @ 1.70GHz 1.70 GHz, et une Ram de 4,00 Go. Le logiciel Mathcad a été utilisé pour la réalisation du programme.

4.3. Organigramme du programme

La figure (4.1) montre les différentes étapes du programme élaboré.

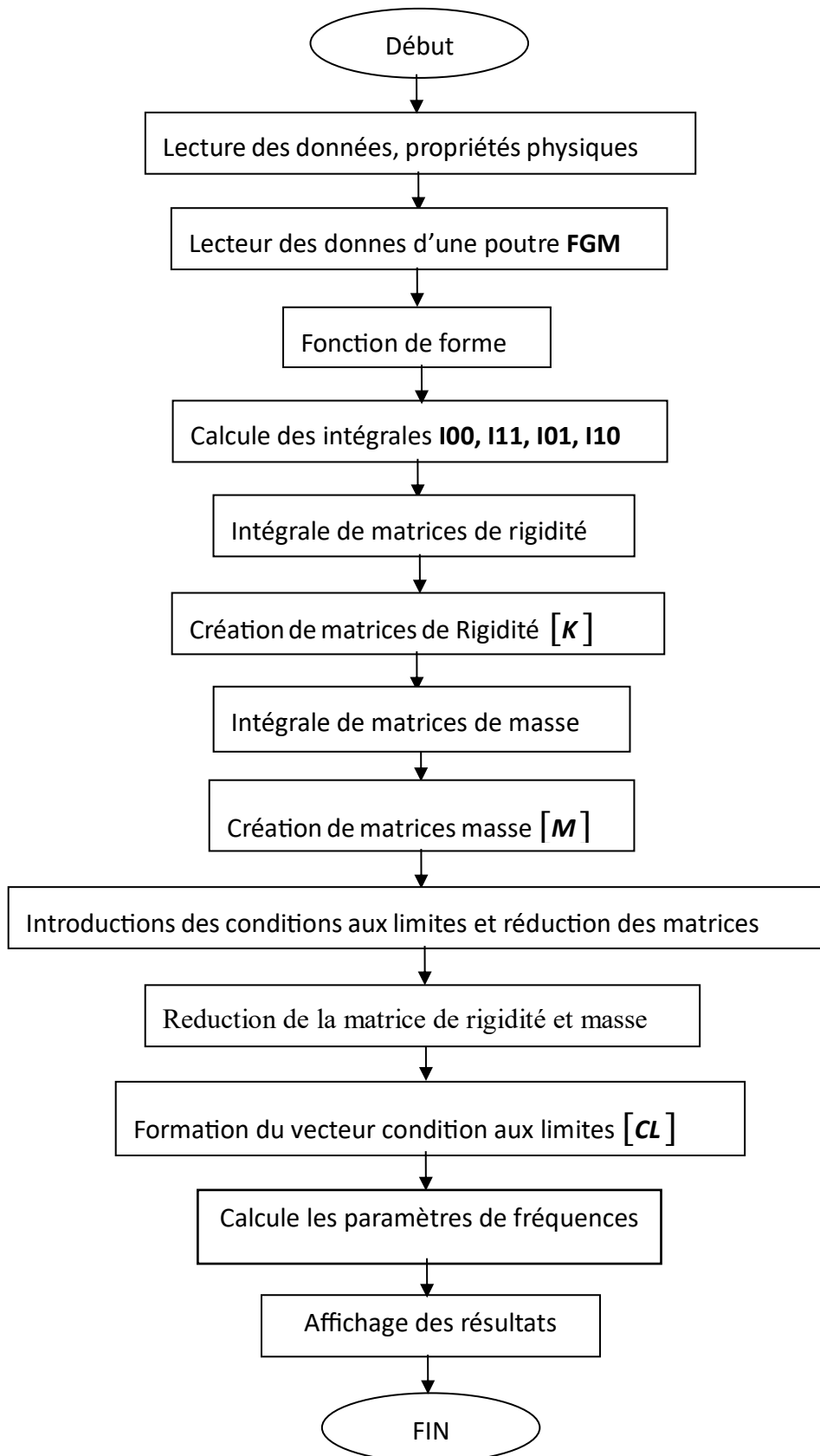


Figure 4.1 : organigramme principale

4.4. Analyse de vibration libre

Le programme d'analyse des vibrations libres nécessite en entrée les données suivantes :

- P : Nombre de fonctions de formes
- L : Longueur de poutre
- e : Epaisseur de la poutre
- ρ_m : masse volumique du métal
- ρ_c : masse volumique de la céramique
- ν_m : Coefficient de Poisson du métal
- ν_c : Coefficient de Poisson de la céramique
- E_m : module de Yong du métal
- E_c : module de Yong de la céramique
- z : $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$
- $cor = \frac{\pi}{12}$: facteur de correction
- CL : vecteur des conditions aux limites
- KR : Matrice de rigidité réduite
- MR : Matrice de masse réduite
- ω : la fréquence propre
- **Sous-programme FONCTG**
- Ce programme calcule les fonctions de forme ainsi que leurs dérivées.
- **Sous-programme JAC**
- Ce programme permet de calculer le Jacobien utilisés pour le calcul des matrices masse et rigidité élémentaires.
- **Sous-programme STIFFB**
- Ce programme effectue le calcul de la matrice de rigidité élémentaire liée à la flexion.
- **Sous-programme STIFFS**
- Ce programme permet d'obtenir la matrice de rigidité élémentaire due au cisaillement.
- **Sous-programme MASS**
- Ce programme permet de calculer la matrice masse élémentaire.
- **Sous-programme JACOBI**
- Il permet de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.
- **Sous-programme SORT**
- Il trie les valeurs propres et les vecteurs propres associés par ordre croissant.

- **Application des conditions aux limites**

Les déplacements aux nœuds peuvent prendre deux valeurs (1 ou 0), ou 1 signifie qu'il y'a un déplacement et 0 signifie qu'il n'y a pas de déplacement. Il existe 3 degrés de liberté qui peuvent prendre ces deux valeurs au niveau des nœuds, pour le bord il prend toujours la valeur 1 (le tableaux 4.2). Le tableaux 4.1 donnent les détails des nœuds et la représentation de l'élément- p est donnée

Tableau 4.1 : Degrés de liberté aux nœuds

Nœuds	u	W	ϕ
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

Tableau 4.2 : Degrés de liberté aux bords

Bords	V
1	1 ou 0

Les déplacements aux nœuds et aux bords sont représentés sous forme de vecteur. Les matrices de rigidité $[K]$ et de masse $[M]$ sont réduites en supprimant les lignes et colonnes correspondant aux degrés de liberté dont la valeur est nulle.

4.5. Résolutions

Dans cette partie on veut transformer le problème généralisé aux valeurs propres qui se présente sous la forme suivante:

$$([K] - W^2[M])\{q\} = 0 \quad (4.1)$$

A un problème standard de la forme suivante:

$$([A] - W^2I)\{q\} = 0 \quad (4.2)$$

Avec

w : Fréquences propres de la poutre

$\{q\}$: Vecteurs coordonnées généralisés

La méthode de Cholesky utilisée permet dans un premier temps de décomposer la matrice masse symétrique et définie positive

$$M = L^T L \quad (4.3)$$

Où

L : est une matrice triangulaire inférieure (tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls).

Un vecteur y est créé tel que:

$$Y = L^T q \quad (4.4)$$

En remplaçant les relations (4.3) et (4.4) dans (4.2) nous obtenons l'équation suivante:

$$(L^{-1} K L^{-T} - W^2 I) Y = 0 \quad (4.5)$$

Avec

$$A = L^{-1} K L^{-T} \quad (4.6)$$

La dernière relation peut être écrite sous la forme

$$K = L A L^T \quad (4.7)$$

La dernière relation subira une première substitution en arrière ou:

$$Z = A L^T \quad (4.8)$$


Dans la deuxième substitution:

$$L Z = K \quad (4.9)$$

La relation (4.8) peut être exprimée Comme suit:

$$L A = Z^T \quad (4.10)$$

En dernier l'équation (4.10) subit une substitutions en arrière pour déterminer la matrice $[A]$

A decorative wreath composed of blue flowers and butterflies. The wreath is circular and features several blue butterflies of various sizes and shades, interspersed with clusters of small blue flowers and green leaves on thin, brownish stems. The background is plain white.

Chapitre 5
Résultats et
discussions

Chapitre 5

Résultats et discussions

5.1 Introduction

Ce chapitre est divisé en trois parties : la première est consacrée à la partie de l'étude de convergence, la deuxième aux résultats numériques et à l'interprétation, et la dernière partie est réservée à l'étude paramétrique.

Les propriétés matérielles d'une poutre isotrope en à utiliser les donner suivant :

- $E = 2.1.10^{11}$; $\nu = 0.3$; $\rho = 7850$; $L = 1$; $I = \frac{b.h^3}{12}$; $G = 8.077.10^{10}$; $r = \sqrt{\frac{I}{s}}$; $s = b.h$
- Pour les paramètres de fréquence ont été utilisées comme la formule suivante pour une poutre isotrope :

$$\tilde{\omega} = \Omega \cdot \frac{r}{\sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$

La poutre FGM est composé d'une surface inférieure en Aluminium, alors que la surface supérieure est de l'alumine pure. Les propriétés matérielles sont les suivantes :

- Métal (Aluminium, Al) : $E_m = 70 N/m$; $\nu = 0.3$; $\rho_m = 2702kg/m^3$
- Céramique (Alumine, Al₂O₃) : $E_c = 380N/m$; $\nu = 0.3$; $\rho_c = 3960Kg/m^3$

En à utiliser c'est paramètre pour la partie de convergence et la comparaison aussi pour l'étude paramétrique.

- Pour les paramètres de fréquence ont été utilisées comme la formule suivante pour une poutre (FGM) :

$$\omega = \Omega \cdot \frac{L^2}{h} \cdot \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

5.2 études de convergence et comparaison

5.2.1 poutres isotropes

Les résultats obtenus à l'aide du code développé dans ce travail, basé sur le modèle de Timoshenko, sont présentés. Dans le tableau 5.1, les quatre premiers paramètres de fréquence sont obtenus pour les rapports $L/r=12,5$ et $L/r=25$, dans le cas d'une poutre simplement appuyée. Dans le tableau 5.2, les trois premiers paramètres de fréquence sont présentés pour les rapports $L/r=20$ et $L/r=50$, dans le cas d'une poutre en porte-à-faux, Dans le présent travaille en fait varier le nombre de fonction de forme pour un élément poutre Timochenko de $p=10$, $p=12$, $p=14$, $p=20$, $p=24$, $p=30$, $p=36$, $p=42$ dans les deux tableaux

Tableau 5.1 : Poutres isotrope simplement appuyées (4 modes)

L/r	Mod	Modèle	1T2 (10)	1T3 (12)	1T4 (14)	1T5 (16)	2T2 (20)	2T3 (24)	5P (30)	6P (36)	7P (42)	Solution exact (HOUMAT, 1995)	
12.5	1	Présent modèle	0.09124	0.09123	0.09123	0.09123	0.09122	0.09122	0.09122	0.09122	0.09122	0.09122	0,09122
		(HOUMAT, 1995)	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	
	2	Présent	0.29392	0.29382	0.29377	0.29375	0.29373	0.29372	0.29372	0.29372	0.29371	0.29371	0,29371
		(HOUMAT, 1995)	0,29424	0,29372	0,29371	0,29371	0,29371	0,29371	0,29371	0,29373	0,29372	0,29371	
	3	Présent modèle	0.53191	0.53169	0.53159	0.53154	0.53149	0.53147	0.53146	0.53146	0.53145	0.53145	0,53144
		(HOUMAT, 1995)	0,58058	0,53328	0,53147	0,53146	0,53151	0,53145	0,53165	0,53155	0,53145		
	4	Présent modèle	0.77924	0.77844	0.77812	0.77797	0.77784	0.7778	0.77777	0.77775	0.77775	0.77775	0,77774
		(HOUMAT, 1995)	0,93542	0,86756	0,78125	0,77781	0,77846	0,77775	0,77902	0,778819	0,77793		
25	1	Présent modèle	0.0247	0.02469	0.02469	0.02469	0.02469	0.02469	0.02469	0.02469	0.02469	0.02469	0,02469
		(HOUMAT, 1995)	0,02469	0,02496	0,02469	0,02469	0,02469	0,02469	0,02469	0,02469	0,02469		
	2	Présent modèle	0.09131	0.09127	0.09125	0.09124	0.09123	0.09123	0.09123	0.09123	0.09122	0.09122	0,09122
		(HOUMAT, 1995)	0,09149	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09122	0,09123	0,09122	0,09122		
	3	Présent modèle	0.18515	0.18501	0.18495	0.18492	0.18489	0.18488	0.18488	0.18488	0.18487	0.18487	0,18487
		(HOUMAT, 1995)	0,21409	0,18606	0,18489	0,18488	0,18491	0,18487	0,185	0,18492	0,18488		
	4	Présent modèle	0.29475	0.29419	0.29397	0.29387	0.29378	0.29375	0.29373	0.29372	0.29372	0.29372	0,293711
		(HOUMAT, 1995)	0,39596	0,34575	0,29644	0,29377	0,29423	0,29372	0,29454	0,29401	0,29384		

Tableau 5.2 : Poutres isotrope en porte-à-faux (3 modes)

L/r	Mod	Modèle	1T2 (10)	1T3 (12)	1T4 (14)	1T5 (16)	2T2 (20)	2T3 (24)	5P (30)	6P (36)	7P (42)	Solution exact (HOUMAT, 1995)	
20	1	Présent modèle	0.01389	0.01387	0.01386	0.01386	0.01386	0.01385	0.01385	0.01385	0.01385	0,01378	
		(HOUMAT, 1995)	0,1387	0,1387	0,1387	0,1387	0,1387	0,1387	0,1387	0,1387	0,1387		0,1387
	2	Présent	0.07735	0.07726	0.07722	0.07719	0.07717	0.07716	0.07716	0.07716	0.07716	0.07715	0,07503
		(HOUMAT, 1995)	0,07503	0,07506	0,07504	0,07503	0,07503	0,07503	0,07503	0,07503	0,07503	0,07503	
	3	Présent modèle	0.1889	0.1887	0.1886	0.18855	0.1885	0.18848	0.18847	0.18847	0.18847	0.18846	0,17988
		(HOUMAT, 1995)	0,18175	0,18002	0,17989	0,17988	0,17988	0,17988	0,17991	0,1799	0,17989	0,17989	
50	1	Présent modèle	0.00229	0.00228	0.00227	0.00227	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0,00226
		(HOUMAT, 1995)	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	0.00226	
	2	Présent modèle	0.01403	0.01396	0.01392	0.0139	0.01387	0.01387	0.01386	0.01386	0.01386	0.01386	0,01378
		(HOUMAT, 1995)	0,0138	0,01378	0,01378	0,01378	0,01378	0,0138	0,01378	0,01378	0,01378	0,01378	
	3	Présent modèle	0.03802	0.03781	0.03771	0.03765	0.03759	0.03757	0.03755	0.03755	0.03754	0.03754	0,03712
		(HOUMAT, 1995)	0,03794	0,03723	0,03712	0,03712	0,03712	0,03712	0,03714	0,03713	0,03712	0,03712	

- D'après le travail de (HOUMAT, 1995), Le paramètre de fréquence ω utilisé ici est sans dimension et s'obtient en multipliant la fréquence naturelle ω par r et en la divisant par la vitesse de l'onde de cisaillement. Dans les tableaux (5.1) et (5.2), les colonnes nTm correspondent à des solutions avec n éléments de poutre Timoshenko d'ordre variable dans la poutre complète, avec m termes trigonométriques par élément. Les colonnes nP correspondent à des solutions avec n éléments de poutre Timoshenko sans termes trigonométriques dans la poutre complète. Les nombres entre parenthèses correspondent au nombre de degrés de liberté du système, à l'exclusion des degrés de liberté contraints. La poutre ne présentant aucune discontinuité géométrique ou matérielle, elle est d'abord discrétisée en un seul élément, puis le nombre de termes trigonométriques dans chaque élément varie. [La poutre est également discrétisée en deux éléments afin de montrer que plusieurs éléments peuvent être utilisés dans la poutre complète.] Les tableaux 5.1 et 5.2 présentent une comparaison entre les résultats obtenue dans notre travail et ceux de (HOUMAT, 1995), et cela pour différent
- Les résultats obtenus dans le présent travaille sont comparés à ceux de (HOUMAT, 1995) qui a utilisé la méthode des éléments finis hiérarchique combinée au modèle de Timoshenko ou exact.

5.2.2 Poutres FGM

Dans cette partie les tableaux de (5.3) a (5.6) et les figure de (5.1) a (5.4) présent l'étude de convergence pour une poutre FGM formés constitué d'un matériaux et paramètre de fréquence mentionné ci-dessus (dans l'introduction), pour plusieurs conditions aux limites.

Tableau 5.3 : poutre (F.G.M.) simplement appuyée

P	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
4	4.875	101.414	199.729	605.468	1181.67
5	3.73	21.405	196.739	202.583	600.75
6	3.73	15.149	48.685	199.442	312.784
7	3.68	15.149	34.331	85.367	199.546
8	3.68	14.785	34.328	61.165	130.537
9	3.671	14.783	33.356	61.154	95.495
10	3.671	14.704	33.35	59.363	95.474
11	3.669	14.703	33.11	59.354	92.727
12	3.669	14.679	33.107	58.861	92.715
13	3.668	14.678	33.024	58.857	91.894
14	3.668	14.669	33.023	58.674	91.89
15	3.667	14.669	32.988	58.672	91.567

La convergence est satisfaite pour un nombre de fonctions de formes égale à 15

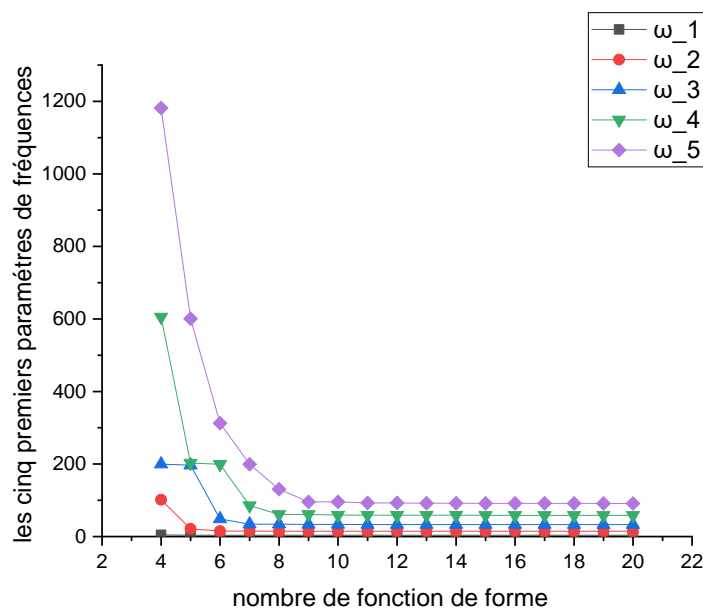


Figure 5.1 : convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées.

Cette figure illustre convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme pour une poutre FGM simplement appuyée. On observe une décroissance marquée des fréquences lorsque p augmente, reflétant l'influence de la dégradation matérielle sur la rigidité de la poutre. La convergence vers une valeur stable à partir de $p = 15$ confirme le choix optimal du nombre de fonctions de forme.

Tableau 5.4 : Poutre (F.G.M.) encastrée libre

P	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
4	2.426	44.857	199.701	321.449	605.524
5	1.795	13.07	100.642	199.573	481.946
6	1.632	10.218	33.863	168.226	199.541
7	1.536	9.746	27.171	62.774	199.516
8	1.482	9.291	26.471	51.602	99.362
9	1.444	9.076	25.395	50.75	83.457
10	1.419	8.893	25.005	48.911	82.471
11	1.4	8.778	24.568	48.388	79.785
12	1.385	8.681	24.333	47.629	79.163
13	1.374	8.611	24.099	47.288	78.034
14	1.365	8.552	23.948	46.879	77.605
15	1.358	8.507	23.804	46.648	76.992
16	1.352	8.467	23.701	46.394	76.688
17	1.347	8.436	23.604	46.23	76.306
18	1.342	8.408	23.531	46.06	76.085
19	1.339	8.386	23.463	45.94	75.827

La convergence est satisfaite pour un nombre de fonctions de formes égale à 19

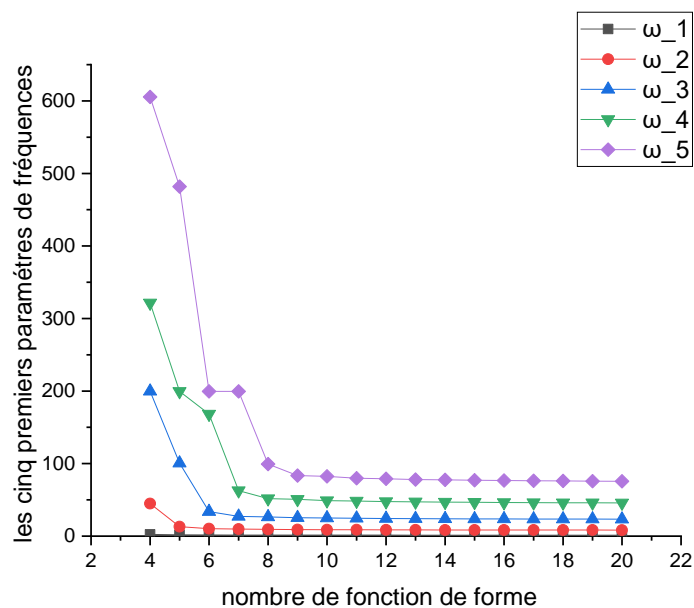
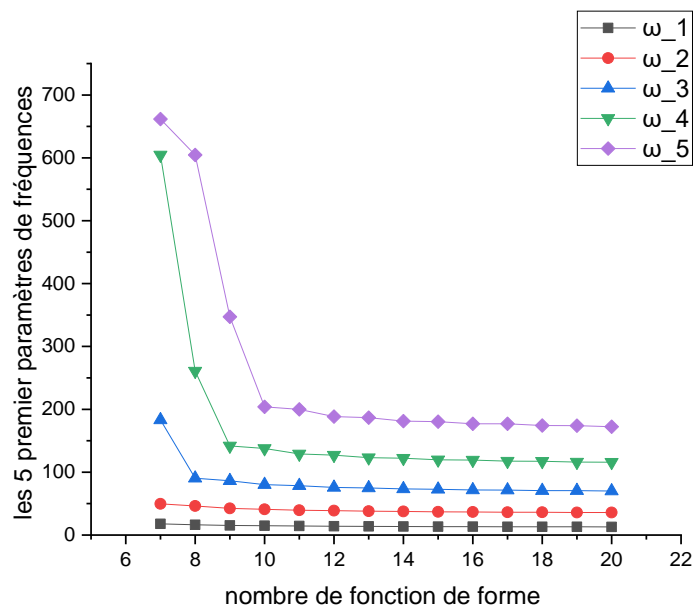


Figure 5.2 : convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) encastrée libre.

La tendance observée pour la poutre encastrée-libre est similaire à celle de la figure 5.1, avec une diminution progressive des fréquences en fonction de p. Cependant, les valeurs absolues sont plus faibles, ce qui s'explique par la condition aux limites moins rigide (extrémité libre). La stabilisation à $p = 19$ valide le choix des paramètres du modèle.

Tableau 5.5 : Poutre (F.G.M.) encastrée a deux extrémités

P	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
7	17.838	49.617	183.15	604.627	661.815
8	16.276	46.192	90.343	260.869	604.627
9	15.343	42.482	86.418	141.863	347.243
10	14.775	41.033	80.206	137.797	203.936
11	14.333	39.533	78.506	128.929	199.982
12	14.023	38.798	75.792	127.193	188.414
13	13.79	37.954	74.901	123.101	186.789
14	13.586	37.55	73.329	122.186	181.242
15	13.454	36.993	72.83	119.757	180.394
16	13.306	36.761	71.783	119.242	177.041
17	13.229	36.359	71.494	117.611	176.97
18	13.115	36.223	70.739	117.314	174.299
19	13.069	35.917	70.569	116.136	174.032
20	12.979	35.836	69.997	115.964	172.388

**Figure 5.3** : convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) encastrée a deux extrémités.

Pour la poutre encastrée aux deux extrémités, les fréquences sont globalement plus élevées que dans les cas précédents, en raison de la rigidité accrue imposée par les conditions aux limites. La décroissance avec p suit la même tendance, mais avec des variations plus prononcées pour les modes supérieurs (ω_3 à ω_5).

La convergence est satisfaite pour un nombre de fonctions de formes égale à 20

Tableau 5.6 : Poutre (F.G.M.) encastree a une extremité

P	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
5	37.453	220.217	398.98	594.171	797.929
6	13.486	75.81	326.117	398.978	781.36
7	11.915	33.03	121.057	398.972	436.776
8	10.854	30.854	60.19	172.501	398.979
9	10.252	28.343	57.72	94.563	229.708
10	9.863	27.416	53.528	92.03	135.984
11	9.579	26.396	52.451	86.059	133.547
12	9.366	25.927	50.613	84.972	125.775
13	9.216	25.353	50.051	82.211	124.771
14	9.077	25.096	48.985	81.64	121.04
15	8.993	24.717	48.672	80.001	120.519
16	8.892	24.571	47.963	79.682	118.264
17	8.843	24.298	47.783	78.582	117.976
18	8.766	24.213	47.273	78.4	116.451

La convergence est satisfaite pour un nombre de fonctions de formes égale à 18

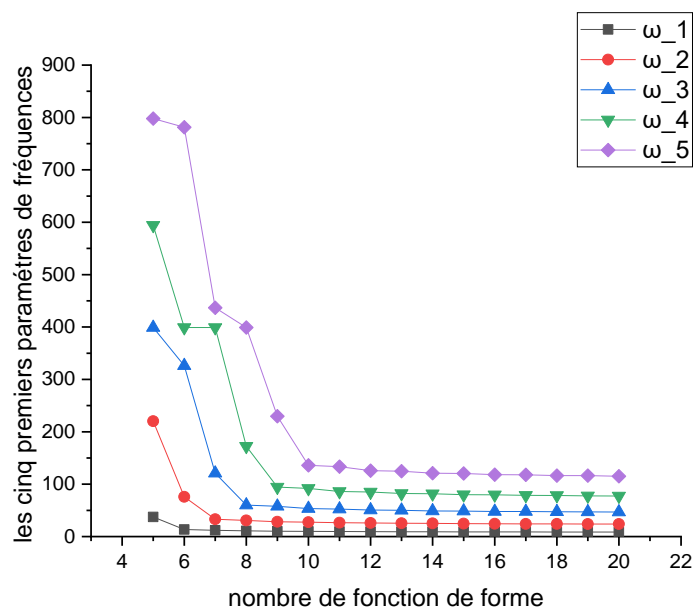


Figure 5.4 : convergence des cinq premières fréquences en fonction de nombre de fonction de forme des poutres en (F.G.M.) encastree a une extremité.

Cette figure montre le comportement d'une poutre encastree à une extremité. Les fréquences sont intermédiaires entre celles des poutres simplement appuyées et encastrees aux deux

extrémités. La convergence rapide des résultats pour $p \geq 18$ justifie le choix de ce paramètre dans les simulations.

5.3 Résultats numériques et interprétations

Dans cette section, plusieurs illustrations numériques sont présentées et analysées afin de démontrer l'efficacité et la précision des théories proposées pour l'analyse des réponses dynamiques des poutres isotropes homogènes et en matériaux à gradient de propriétés (F.G.M.) simplement appuyées.

Des grandeurs sans dimension ont été utilisées, selon la formule suivante :

$$\omega = \Omega \cdot \frac{L^2}{h} \cdot \sqrt{\frac{\rho_m}{Em}}$$

5.3.1 Poutre (F.G.M.) avec plusieurs conditions aux limites

En à utiliser les mêmes paramètres de fréquence pour faire la comparaison

5.3.2.1. Poutre simplement appuyée en (F.G.M.)

Le tableau (5.1) montre Les résultats des paramètres de la fréquence naturelle adimensionnelle des poutres élancées en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées sont comparé avec les résultats de (Avcar, 2018) et (Wattanasakulpong, 2012) et (Hafsa, Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak, 2022) sont basées sur la théorie d'Euler Bernoulli ou (C.B.T.) en conjonction avec la méthode de transformation différentielle, respectivement.

Tableau 5.7 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées

L/h	Mode	Modèle	K=0	K=1	K=2	K=5	k=∞
100	1	Présent modèle	5.483	4.221	3.851	3.667	2.849
		(Hafsa, Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak, 2022)	5.482	4.220	3.851	3.667	2.849
		(Avcar, 2018)	5.483	4.221	3.852	3.668	2.849
		(Wattanasakulpong, 2012)	5.483	4.221	3.852	3.668	2.849
	2	Présent modèle	21.922	16.876	15.399	14.66	11.391
		(Hafsa, Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak, 2022)	21.919	16.873	15.397	14.667	11.389
		(Avcar, 2018)	21.933	16.884	15,407	14,67	11.396
		(Wattanasakulpong, 2012)	21.933	16.884	15,407	14.658	11.396
	3	Présent modèle	49.299	37.952	34.628	32.962	25.615
		(Hafsa, Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak, 2022)	49.275	37.937	34.615	32.945	25.603
		(Avcar, 2018)	49,35	37,989	34,667	33,007	25,642
		(Wattanasakulpong, 2012)	49,35	37,989	34,667	33,007	25,642

Les tableaux (5.2) (5.3) et (5.4) montrent les résultats des paramètres de la fréquence naturelle adimensionnelle des poutres élancées en matériaux fonctionnellement gradués comparés avec les études de (Avcar, 2018) et (Wattanasakulpong, 2012) basées sur la théorie d'Euler-Bernoulli (C.B.T.) en conjonction avec la méthode de transformation différentielle, respectivement.

Tableau 5.8 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées encastrée libre

L/h	Mod	Modèle	K=0	K=1	K=2	K=5	k=∞
100	1	Présent modèle	1.997	1.54	1.405	1.336	1.038
		(Avcara, 2018)	1.953	1.504	1.372	1.307	1.015
		(Wattanasakulpong, 2012)	1.953	1.504	1.372	1.307	1.015
	2	Présent modèle	12.511	9.647	8.802	8.366	6.501
		(Avcara, 2018)	12.242	9.424	8.599	8.188	6.361
		(Wattanasakulpong, 2012)	12.242	9.424	8.599	8.188	6.361
	3	Présent modèle	35.011	26.999	24.633	23.409	18.192
		(Avcara, 2018)	34.278	26.386	24.079	22.926	17.810
		(Wattanasakulpong, 2012)	34.278	26.386	24.079	22.926	17.810

5.3.2.3. Poutre encastrée en deux extrémités en (F.G.M.)

Tableau 5.9 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées encastrée en deux extrémités

L/h	Mod	Modèle	k=0	K=1	K=2	K=5	k=∞
100	1	Présent modèle	12.979	10.029	9.149	8.676	6.744
		(Avcara, 2018)	12.43	9.569	8.732	8.314	6.459
		(Wattanasakulpong, 2012)	12.43	9.569	8.732	8.314	6.459
	2	Présent modèle	35.836	27.671	25.245	23.955	18.62
		(Avcara, 2018)	34.264	26.376	24.069	22.917	17.803
		(Wattanasakulpong, 2012)	34.264	26.376	24.069	22.917	17.803
	3	Présent modèle	69.997	54.102	49.353	46.783	36.37
		(Avcara, 2018)	67.172	51.707	47.185	44.927	34.902
		(Wattanasakulpong, 2012)	67.172	51.707	47.185	44.927	34.902

5.3.2.4. Poutre encastrée appuyée en (F.G.M.)

Tableau 5.10 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences des poutres fonctionnellement graduées encastrée à une extrémité

L/h	Mod	Modèle	K=0	K=1	K=2	K=5	k=∞
100	1	Présent modèle	8.756	6.751	6.16	5.854	4.549
		(Avcâr, 2018)	8.566	6.594	6.017	5.729	4.451
		(Wattanasakulpong, 2012)	8.566	6.594	6.017	5.729	4.451
	2	Présent modèle	28.365	21.874	19.958	18.965	14.738
		(Avcâr, 2018)	27.760	21.369	19.500	18.567	14.424
		(Wattanasakulpong, 2012)	27.760	21.369	19.500	18.567	14.424
	3	Présent modèle	59.12	45.593	41.598	39.526	30.718
		(Avcâr, 2018)	57.918	44.584	40.685	38.738	30.094
		(Wattanasakulpong, 2012)	57.918	44.584	40.685	38.738	30.094

On peut conclure qu'une bonne concordance est confirmée entre les résultats actuels et ceux des autres modèles existants. On constate à partir de ce tableau que la fréquence naturelle adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre de matériaux car en augmentant ces paramètres, la structure devient souple (métallique). Il est à noter aussi que l'augmentation du nombre du mode de vibration conduit à une augmentation des valeurs de la fréquence adimensionnelle.

5.4. Étude paramétrique

Une étude paramétrique approfondie est menée pour analyser l'impact des conditions aux limites et des paramètres géométriques sur les fréquences de vibration.

L'étude de l'influence du rapport l/h sur les 5 premiers paramètres de la fréquence pour $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=5$, $k=\infty$

5.4.1. Poutre FGM Simplement appuyée

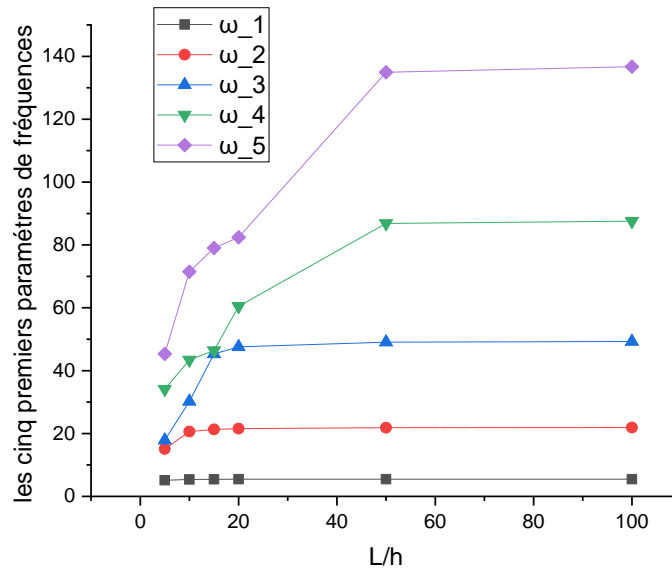


Figure 5.5 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence $k=0$, pour une poutre (A-A)

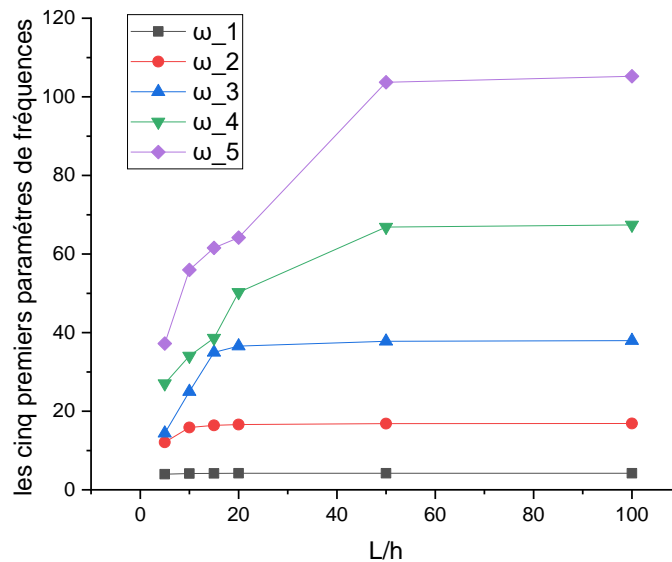


Figure 5.6 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence $k=1$, pour une poutre (A-A)

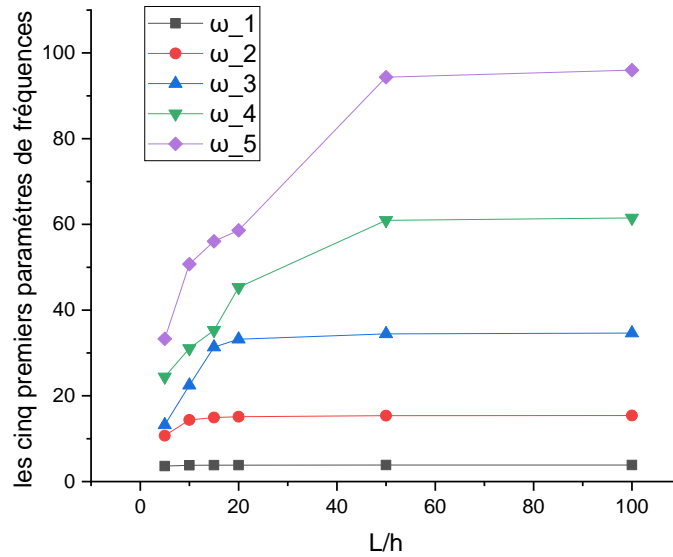


Figure 5.7: Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=2$, pour une poutre (A-A)

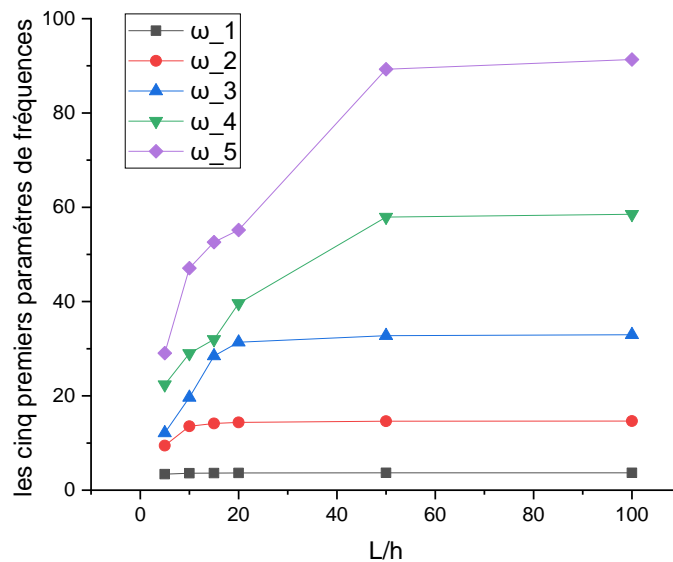


Figure 5.8 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=5$, pour une poutre (A-A)

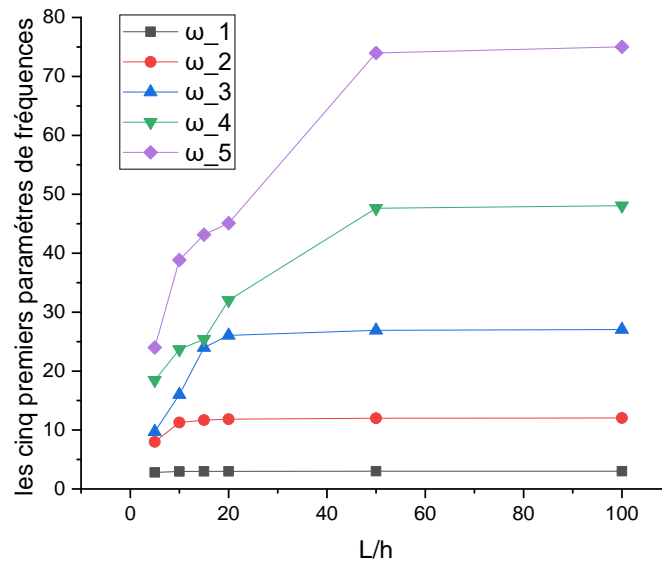


Figure 5.9 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=\infty$, pour une poutre (A-A)

Figures 5.5 à 5.9 : Cette série de figures met en évidence l'impact du rapport L/h sur les cinq premiers modes de vibration, pour différentes valeurs de k (gradation matérielle). On remarque que :

- L'augmentation de L/h réduit significativement les fréquences.
- Les courbes se stabilisent pour $L/h > 50$, indiquant un comportement asymptotique.
- L'effet de k est plus marqué pour les faibles valeurs de L/h .

5.4.2. Poutre FGM encastree en deux extremités

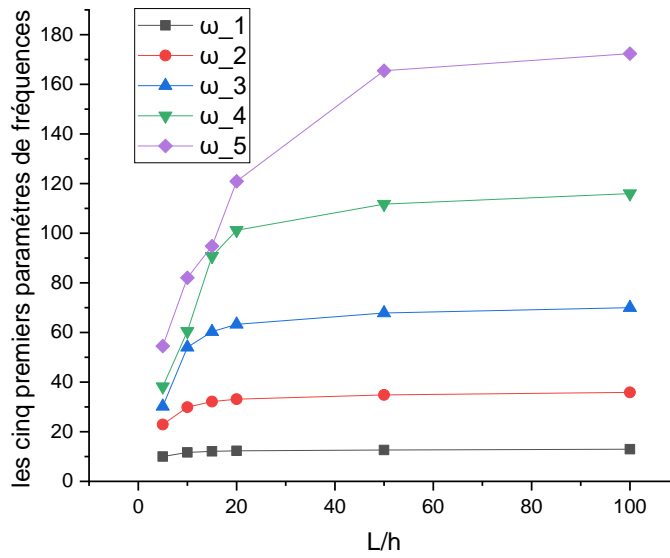


Figure 5.10 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence k=0, pour une poutre (E-E)

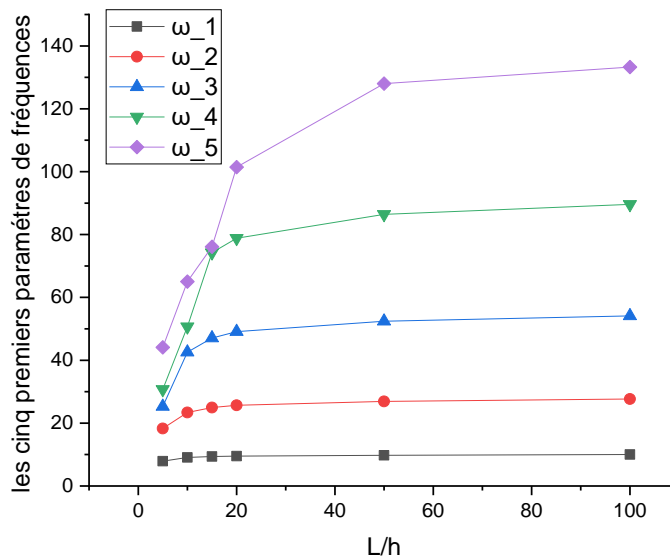


Figure 5.11 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour k=1, pour une poutre (E-E)

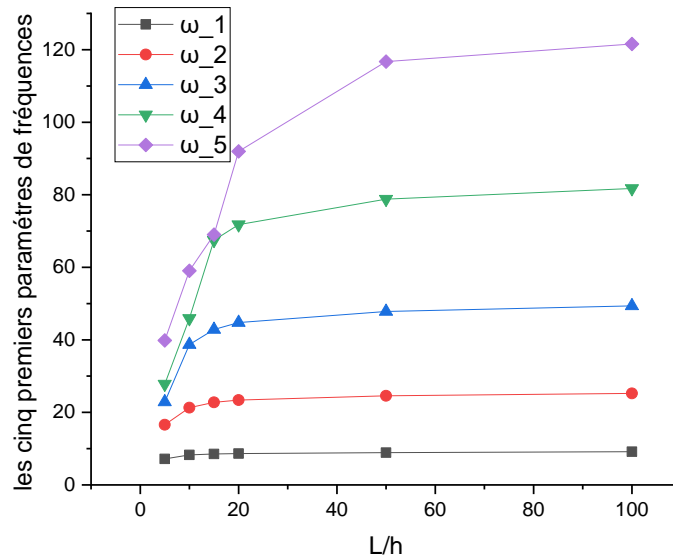


Figure 5.12 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence Pour $k=2$, pour une poutre (E-E)

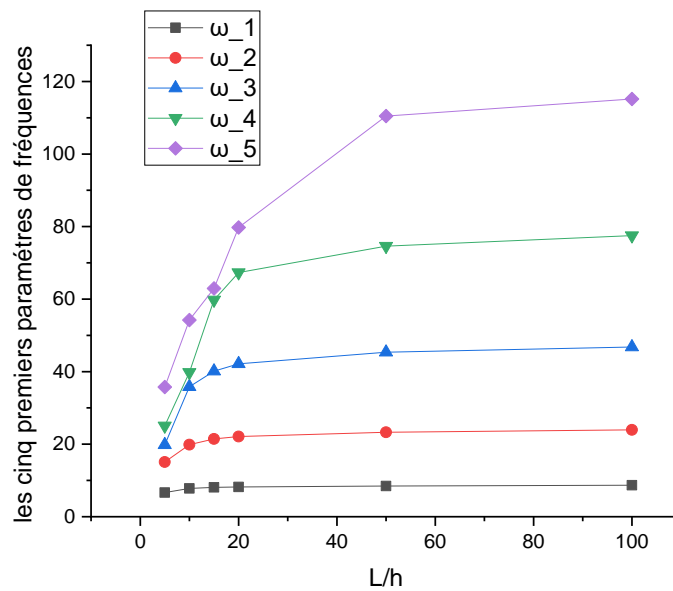


Figure 5.13 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence Pour $k=5$, pour une poutre (E-E)

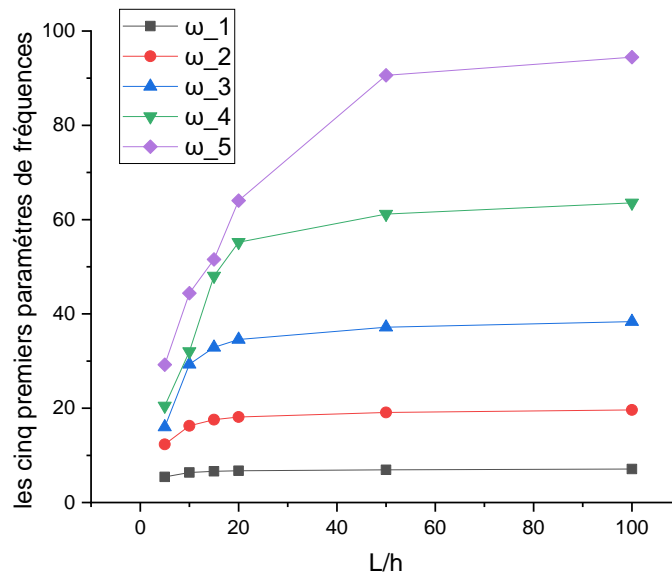


Figure 5.14 Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=\infty$, pour une poutre (E-E)

Figures 5.10 à 5.14 : Pour la poutre encadrée aux deux extrémités, les tendances sont similaires, mais avec des fréquences plus élevées en raison des conditions aux limites rigides. La sensibilité à k est particulièrement visible pour les modes supérieurs (ω_3 à ω_5).

5.4.3. Poutre FGM encastree libre

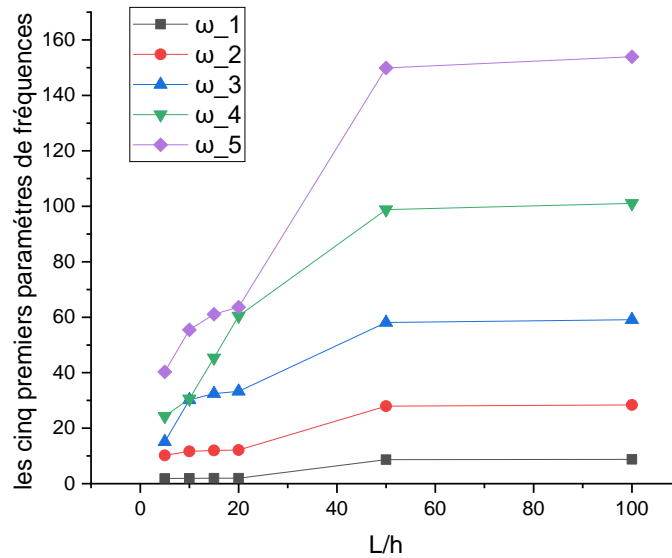


Figure 5.15 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence pour $k=0$, pour une poutre (E-L)

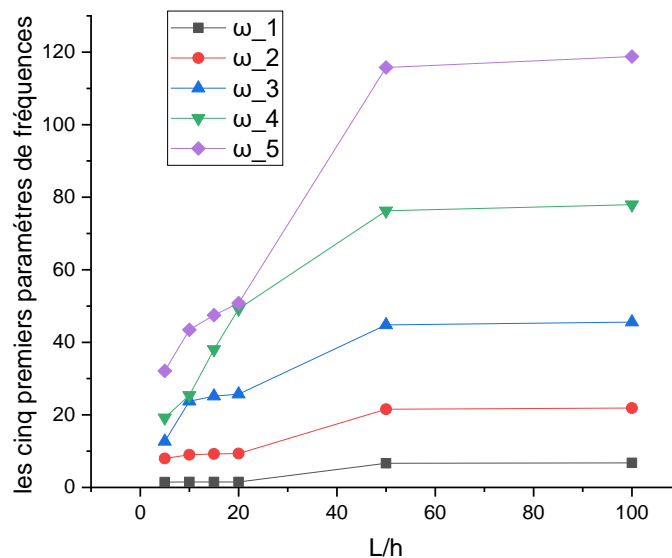


Figure 5.16 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence Pour $k=1$, pour une poutre (E-L)

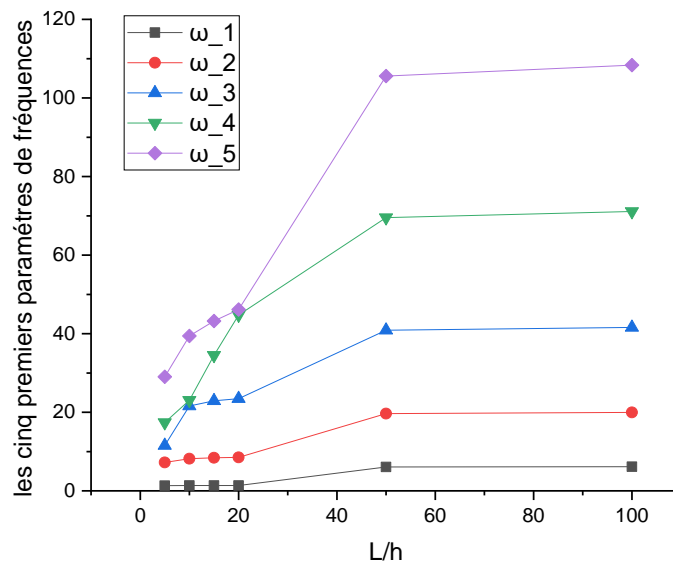


Figure 5.17 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence pour k=2, pour une poutre (E-L)

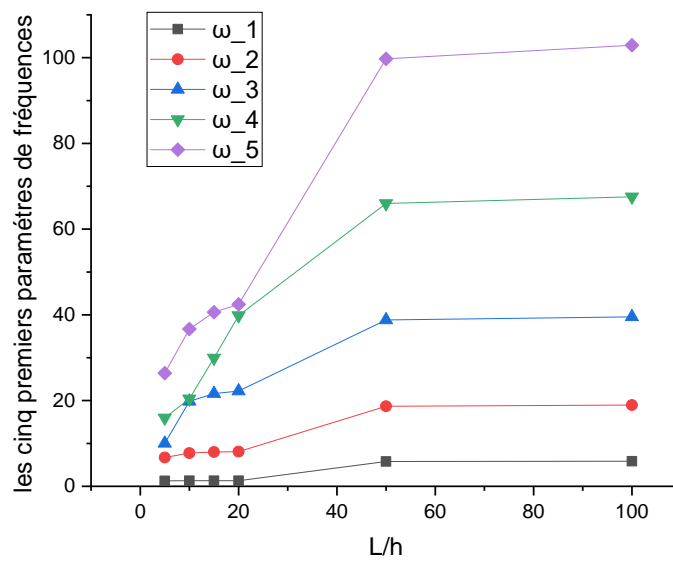


Figure 5.18 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence pour k=5, pour une poutre (E-L)

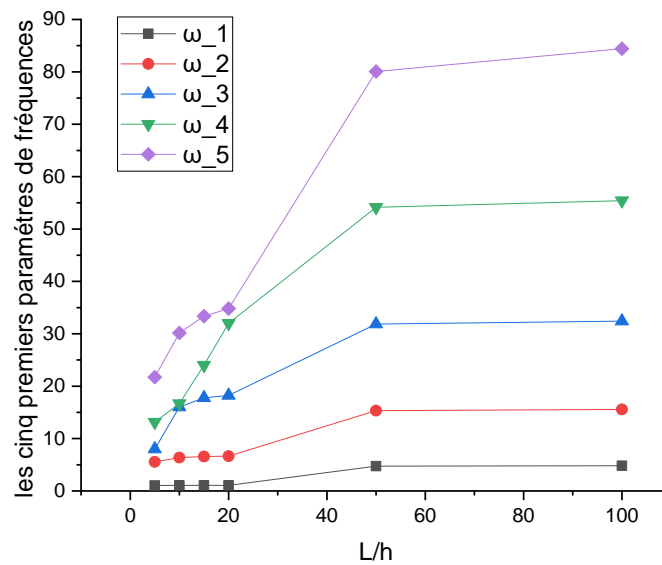


Figure 5.19 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence Pour $k=\infty$, pour une poutre (E-L)

Figures 5.15 à 5.19 : La poutre encadrée-libre présente des fréquences plus basses, avec une dépendance accrue au rapport L/h . L'effet de la gradation matérielle (k) est moins prononcé que pour les autres conditions aux limites, sauf pour le mode fondamental (ω_1).

5.4.4 Poutre FGM encastree appuyee

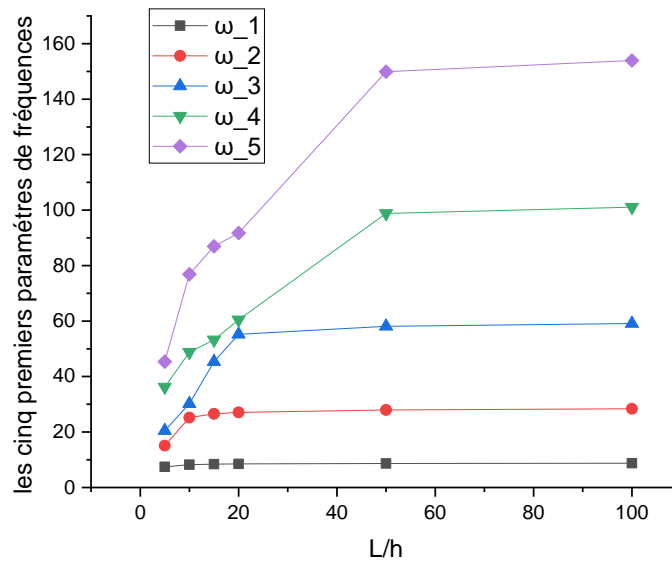


Figure 5.20 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence pour k=0, pour une poutre (E-A)

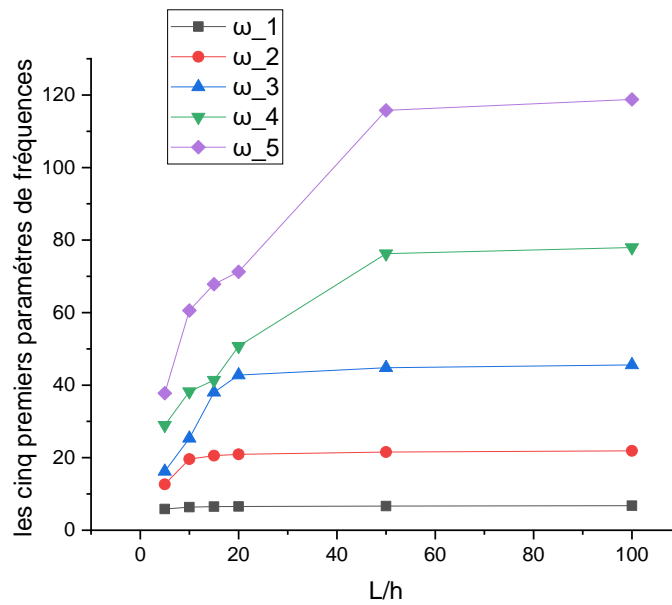


Figure 5.21: Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=1$, pour une poutre (E-A)

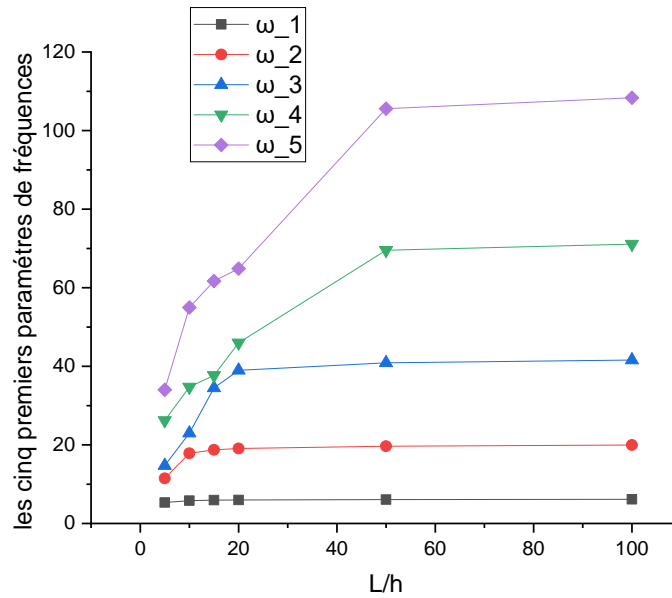


Figure 5.22 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=2$, pour une poutre (E-A)

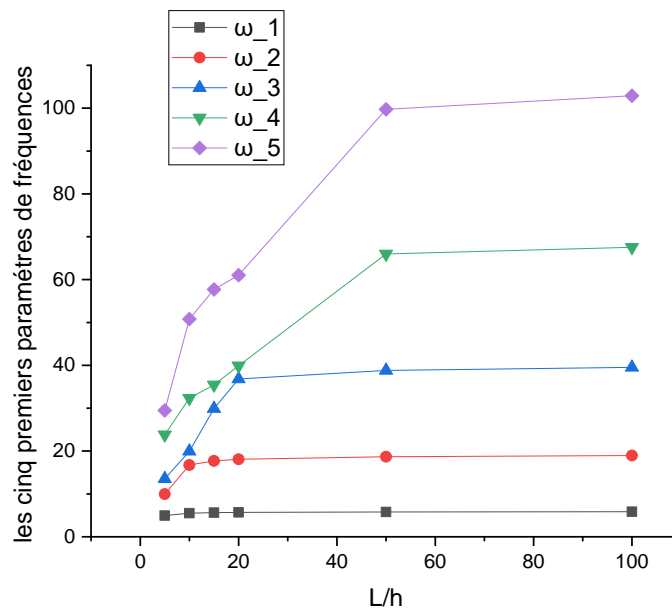


Figure 5.23 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramétrés de fréquence Pour $k=5$, pour une poutre (E-A)

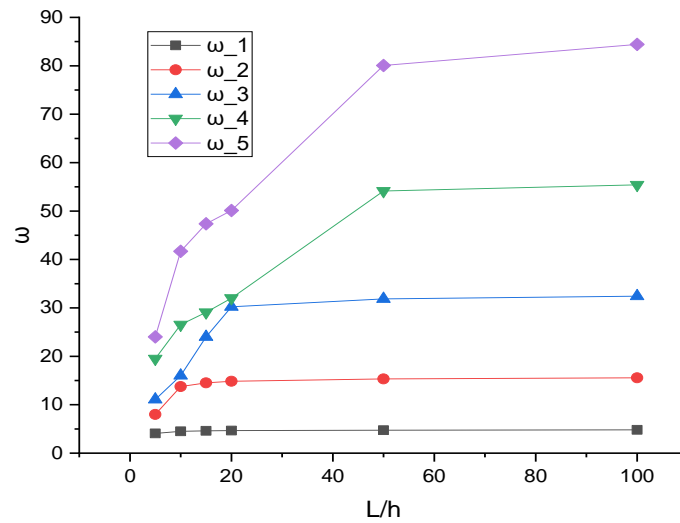


Figure 5.24 : Etude de l'influence du rapport L/h sur les cinq premiers paramètres de fréquence Pour $k=\infty$, pour une poutre (E-A)

Figures 5.20 à 5.24 : la poutre encastée à une extrémité montre un comportement intermédiaire, Les courbes mettent en évidence :

- Une forte sensibilité de ω_1 à L/h pour $k \leq 2$.
- Un effet limité de k sur les modes supérieurs (ω_4 et ω_5), surtout pour $L/h > 3$

Conclusion générale

En conclusion, ce mémoire a permis d'approfondir la compréhension du comportement dynamique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), en s'appuyant sur des modèles mécaniques avancés, notamment la théorie de Timoshenko, et sur l'utilisation de la méthode des éléments finis hiérarchiques. La variation continue des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur des FGM a été modélisée avec précision, permettant d'obtenir des résultats fiables concernant les fréquences propres et les modes vibratoires.

La validation du modèle par comparaison avec les données de la littérature a confirmé la pertinence et la robustesse de l'approche adoptée. Par ailleurs, l'étude paramétrique a mis en évidence l'influence significative des paramètres géométriques, des propriétés matérielles et des conditions aux limites sur le comportement vibratoire des poutres FGM.

Ces résultats contribuent à améliorer la conception et l'optimisation des structures utilisant ces matériaux innovants, en particulier dans des domaines exigeants tels que l'aérospatial, le biomédical ou encore la défense. Enfin, ce travail ouvre des perspectives intéressantes pour l'intégration d'effets supplémentaires — tels que la porosité, les contraintes thermiques ou l'amortissement — afin d'enrichir la modélisation et d'accroître la durabilité des poutres FGM dans des environnements complexes et réalistes.

Bibliographie

- Abdelhak, K. (s.d.). *cours, Méthode des éléments finis* .
- Abdelhak, M. (2023). *Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis*. Ain Témouchent.
- Abdelhak, M. (2023). *Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis*. Ain Témouchent.
- Abdelkader SAFA1, 3. L. (s.d.). *Analyse du comportement mécanique des poutres à gradient variable type FGM*.
- Abdelkader, C. (2021). *Modélisation du Flambement et de la Vibration des Poutres FGM par les Éléments Finis*. Université de Tlemcen.
- ABDELKADER, S. A. (2021). *Etude statique et dynamique des poutres FGM avec un nouveau champ de déplacement* . Université Ibn Khaldoun Tiaret .
- ADDA, B. (2022). *ETUDE DE LA MECANIQUE DES POUTRES FGM EPAISSES AVEC IMPERFECTION DANS LA COMPOSITION DU MATERIAU PAR LA THEORIE D'ELASTICITE D'ORDRE SUPERIEUR HYPERBOLIQUE- POLYNOMIALE* . UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Ahmed, B. (2022). *Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée* . Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen – .
- Ahmed, B. (2022). *Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée* . Tlemcen.
- Ahmed, B. (2022). *Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée*. Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –.
- Amine, D. A. (2015). *Vibration libre des poutres en matériaux FGM sur fondations élastiques dans un environnement thermique*. University M'hamed Bougara Bumerdes.
- Avcar, M. (2018). Free vibration of functionally graded beams resting. *Arabian Journal of Geosciences*, 232.
- Bakarich S. E., G. R. (2017). Manuf, M. in het Panhuis, G. M. Spinks, 14, 24.
- bandyopadhyay. (2009).
- Bauchau, O. A. (2009). Euler-Bernoulli beam theory. In *Structural analysis*. 173-221).

-
- BENSAID, A. M. (2020). *VIBRATION DES POUTRES FGM BIDIRECTIONNELLE*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Benyagoub, G. (2021/2022). *Vibration des poutres poreuses*. TIARET.
- Bouraada, S. H. (20018). *Analyse du comportement mécanique des poutres à gradient variable type FGM*. Département de Génie Civil, Université Ahmed Zabana de Rélizane.
- Bouzateur Med Salah Eddine, G. M. (2017). *ANALYSE DES POUTRES EN FGM EN UTILISANT THEORIE QAUSI3D*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- CAVIN, P. (2006). *METHODE ELEMENTS FINIS AVEC RAFFINEMENT SPATIAL ET TEMPOREL ADAPTATIF ET AUTOMATIQUE : "STAR-METHOD" (SPACE TIME AUTOMATIC REFINEMENT)*. ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE LYON : MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (M.E.G.A.) SPECIALITE : MECANIQUE.
- Chahrazed, Z., & Amine, H. M. (2020). *VIBRATION DES POUTRES EN FGM*. FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL.
- Eddine, B. M. (2016-2017). *analyse des poutre en fgm en utilisant théorie qausi3d*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Garon, A. F. (1997-2006). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. École Polytechnique de Montréal.
- Geronymos, S. (2014). *Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact*.
- Geronymos, S. (2014). *Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact. Doctoral dissertation, École Polytechnique de Montréal*.
- Geronymos, S. (2014). *Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact*.
- Gupta, B. (2017). *Few studies on biomedical applications of functionally graded material. Technol. Sci. Res.*
- Hadjer, K. F. (2021). *Nouvelle approche analytique pour l'étude du comportement mécanique des poutres sandwichs en matériaux composites avancés*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.

-
- Hafsa, K. (2022). *Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak*. Université de Tissemsilt.
- Hafsa, K. (2022). *Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak*. Université de Tissemsilt.
- Han, S. M. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*. 225(5), 935-988.
- Horel, F. (2013). *Modélisation analytique de l'amortissement des poutres composites sandwich contenant des couches viscoélastiques*. UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL .
- Houari, M. (2011). *Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances*. Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès.
- Houda, K. F. (2022). *Etude par éléments finis des rotors FGM sous un gradient thermique* . Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib.
- HOUMAT, A. (1995). VIBRATIONS OF TIMOSHENKO BEAMS BY. *Journal of Sound and Vibration (1995)*, 841-849.
- M.KADJA, A. Z. (2016). *ANALYSE DYNAMIQUE ET STATIQUE DES POUTRES NON-HOMOGENES EPAISSES AVEC L'UTILISATION DU CONCEPT DE L'AXE NEUTRE*. . Constantine,Algeria .
- M.KADJA, A. Z. (2016). *ANALYSE DYNAMIQUE ET STATIQUE DES POUTRES NON-HOMOGENES EPAISSES AVEC L'UTILISATION DU CONCEPT DE L'AXE NEUTRE*. Constantine,Algeria.
- Ma, J. R. (1996). Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 33(3), 971-996.
- Madjid, B. H. (2016). Analyse du gauchissement dans les poutres courtes par la théorie d'ordre élevé. *JOURNAL OF MATERIALS AND ENGINEERING STRUCTURES* 3, 83–93.
- mahi, a. (2012). *analyse et étude des paques composites fgm en vibration libre* . blida .
- Marchai, P. M. (1992). *METHODES D'ELEMENTS FINIS POUR LE CALCUL D'ECOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS A SURFACES LIBRES*. universite catholique de lovain.
- Messaoud, B. M. (2017). *ANALYSE DES POUTRES EN FGM EN UTILISANT THEORIE QAUSI3D*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Meziane, A. (2022). *ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS*. Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –.

-
- Meziane, A. (2022). *ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS*. Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –.
- MICHEL, D. (1997). *Matériaux céramiques Structure et propriétés*.
- Salah, B. (2012). *Reconstruction des charges dynamiques réparties sur la poutre de Bernoulli par la méthode de sélection des modes* . Université 08 Mai 1945 de Guelma .
- Samir, B. (2019). *ANALYSE DE LA DÉGRADATION DES*. Université Abou Bekr Belkaïd- Tlemcen.
- Soraya, F. (2023). *Modélisation et simulation numérique du comportement des poutres à base de matériaux à gradient fonctionnel chargées en flexion*.
- Soraya., F. (2023). *Modélisation et simulation numérique du comportement des poutres à base de matériaux à gradient fonctionnel chargées en flexion*. . TIZI-OUZOU .
- tie, B. (1993). *Éléments finis adaptatifs et hiérarchiques en elastoplasticité localisation des déformations*. Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.
- Wattanasakulpong, N. (2012). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with General Elastically End Constraints by DTM. *World Journal of Mechanics*, 298-310.
- Yacine, K. M., & Sidahmed, O. (2024). *Une Nouvelle théorie pour l'analyse vibratoire en flexion des poutres epaisses*. Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaïb .
- Yacine, M. K., & Sidahmed, M. O. (2024). *Une Nouvelle théorie pour l'analyse vibratoire en flexion des poutres epaisses*. . Ain Temouchent.
- ZABOUR Chahrazed et HAMEL Mohamed Amine. (2020). *VIBRATION DES POUTRES EN FGM*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Zaoui F. Zohra1*, H. H. (s.d.). *Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformation theory*.
- Zenkour, A. M. (2010). Free vibration analysis of functionally graded porous beams using a refined beam theory. *Composite Structures*, 282-289.
- Zohra, Z. F. (2017). Free vibration analysis of functionally graded beams using a refined hyperbolic shear deformation theory. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*.
- Abdelhak, K. (s.d.). *cours, Méthode des éléments finis* .

-
- Abdelhak, M. (2023). *Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis*. Ain Témouchent.
- Abdelhak, M. (2023). *Modélisation du Flambement et de La Vibration des Poutres FGM par Les éléments Finis*. Ain Témouchent.
- Abdelkader SAFA1, 3. L. (s.d.). *Analyse du comportement mécanique des poutres à gradient variable type FGM*.
- Abdelkader, C. (2021). *Modélisation du Flambement et de la Vibration des Poutres FGM par les Éléments Finis*. Université de Tlemcen.
- ABDELKADER, S. A. (2021). *Etude statique et dynamique des poutres FGM avec un nouveau champ de déplacement* . Université Ibn Khaldoun Tiaret .
- ADDA, B. (2022). *ETUDE DE LA MECANIQUE DES POUTRES FGM EPAISSES AVEC IMPERFECTION DANS LA COMPOSITION DU MATERIAU PAR LA THEORIE D'ELASTICITE D'ORDRE SUPERIEUR HYPERBOLIQUE- POLYNOMIALE* . UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Ahmed, B. (2022). *Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée* . Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen – .
- Ahmed, B. (2022). *Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée* . Tlemcen.
- Ahmed, B. (2022). *Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre Fonctionnellement Graduée*. Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –.
- Amine, D. A. (2015). *Vibration libre des poutres en matériaux FGM sur fondations élastiques dans un environnement thermique*. University M'hamed Bougara Boumerdes.
- Avcar, M. (2018). Free vibration of functionally graded beams resting. *Arabian Journal of Geosciences*, 232.
- Bakarich S. E., G. R. (2017). Manuf, M. in het Panhuis, G. M. Spinks, 14, 24.
- bandyopadhyay. (2009).
- Bauchau, O. A. (2009). Euler-Bernoulli beam theory. In *Structural analysis*. 173-221).
- BENSAID, A. M. (2020). *VIBRATION DES POUTRES FGM BIDIRECTIONNELLE* . UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET .
- Benyagoub, G. (2021/2022). *Vibration des poutres poreuses* . TIARET .

-
- Bouraada, S. H. (20018). *Analyse du comportement mécanique des poutres à gradient variable type FGM*. Département de Génie Civil, Université Ahmed Zabana de Rélizane.
- Bouzateur Med Salah Eddine, G. M. (2017). *ANALYSE DES POUTRES EN FGM EN UTILISANT THEORIE QAUSI3D*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- CAVIN, P. (2006). *METHODE ELEMENTS FINIS AVEC RAFFINEMENT SPATIAL ET TEMPOREL ADAPTATIF ET AUTOMATIQUE : "STAR-METHOD" (SPACE TIME AUTOMATIC REFINEMENT)*. ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE LYON : MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (M.E.G.A.) SPECIALITE : MECANIQUE.
- Chahrazed, Z., & Amine, H. M. (2020). *VIBRATION DES POUTRES EN FGM*. FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL.
- Eddine, B. M. (2016-2017). *analyse des poutre en fgm en utilisant théorie qausi3d*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Garon, A. F. (1997-2006). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. École Polytechnique de Montréal.
- Geronymos, S. (2014). *Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact*.
- Geronymos, S. (2014). Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact. *Doctoral dissertation, École Polytechnique de Montréal*.
- Geronymos, S. (2014). Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact.
- Gupta, B. (2017). Few studies on biomedical applications of functionally graded material. *Technol. Sci. Res.*
- Hadjer, K. F. (2021). *Nouvelle approche analytique pour l'étude du comportement mécanique des poutres sandwichs en matériaux composites avancés*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Hafsa, K. (2022). *Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak*. Université de Tissemsilt.
- Hafsa, K. (2022). *Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak*. Université de Tissemsilt.

-
- Han, S. M. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*. 225(5), 935-988.
- Horel, F. (2013). *Modélisation analytique de l'amortissement des poutres composites sandwich contenant des couches viscoélastiques*. UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL .
- Houari, M. (2011). *Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances*. Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès.
- Houda, K. F. (2022). *Etude par éléments finis des rotors FGM sous un gradient thermique* . Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaïb.
- HOUMAT, A. (1995). VIBRATIONS OF TIMOSHENKO BEAMS BY. *Journal of Sound and Vibration (1995)*, 841-849.
- M.KADJA, A. Z. (2016). *ANALYSE DYNAMIQUE ET STATIQUE DES POUTRES NON-HOMOGENES EPAISSES AVEC L'UTILISATION DU CONCEPT DE L'AXE NEUTRE* . Constantine,Algeria .
- M.KADJA, A. Z. (2016). *ANALYSE DYNAMIQUE ET STATIQUE DES POUTRES NON-HOMOGENES EPAISSES AVEC L'UTILISATION DU CONCEPT DE L'AXE NEUTRE*. Constantine,Algeria.
- Ma, J. R. (1996). Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions.SIAM Journal on Numerical Analysis. 33(3), 971-996.
- Madjid, B. H. (2016). Analyse du gauchissement dans les poutres courtes par la théorie d'ordre élevé. *JOURNAL OF MATERIALS AND ENGINEERING STRUCTURES* 3, 83–93.
- mahi, a. (2012). *analyse et étude des paques composites fgm en vibration libre* . blida .
- Marchai, P. M. (1992). *METHODES D'ELEMENTS FINIS POUR LE CALCUL D'ECOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS A SURFACES LIBRES*. universite catholique de lovain.
- Messaoud, B. M. (2017). *ANALYSE DES POUTRES EN FGM EN UTILISANT THEORIE QAUSI3D*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Meziane, A. (2022). *ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS*. Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –.
- Meziane, A. (2022). *ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS*. Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –.
- MICHEL, D. (1997). *Matériaux céramiques Structure et propriétés*.

-
- Salah, B. (2012). *Reconstruction des charges dynamiques réparties sur la poutre de Bernoulli par la méthode de sélection des modes* . Université 08 Mai 1945 de Guelma .
- Samir, B. (2019). *ANALYSE DE LA DÉGRADATION DES*. Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen.
- Soraya, F. (2023). *Modélisation et simulation numérique du comportement des poutres à base de matériaux à gradient fonctionnel chargées en flexion*.
- Soraya., F. (2023). *Modélisation et simulation numérique du comportement des poutres à base de matériaux à gradient fonctionnel chargées en flexion*. . TIZI-OUZOU .
- tie, B. (1993). *Éléments finis adaptatifs et hiérarchiques en elastoplasticité localisation des déformations*. Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.
- Wattanasakulpong, N. (2012). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with General Elastically End Constraints by DTM. *World Journal of Mechanics*, 298-310.
- Yacine, K. M., & Sidahmed, O. (2024). *Une Nouvelle théorie pour l'analyse vibratoire en flexion des poutres épaisses*. Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaïb .
- Yacine, M. K., & Sidahmed, M. O. (2024). *Une Nouvelle théorie pour l'analyse vibratoire en flexion des poutres épaisses*. . Ain Temouchent.
- ZABOUR Chahrazed et HAMEL Mohamed Amine. (2020). *VIBRATION DES POUTRES EN FGM*. UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.
- Zaoui F. Zohra1*, H. H. (s.d.). *Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformation theory*.
- Zenkour, A. M. (2010). Free vibration analysis of functionally graded porous beams using a refined beam theory. *Composite Structures*, 282-289.
- Zohra, Z. F. (2017). Free vibration analysis of functionally graded beams using a refined hyperbolic shear deformation theory. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*.

المحمد الذي بعثته صلى الله عليه وسلم

المحمد الذي بعثته صلى الله عليه وسلم

Shahrazed