République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Aboubekr BELKAÏD - TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

TITRE

COURBES ET SURFACES PARAMÉTRÉES

AVEC EXERCICES CORRIGÉS

Adressé aux étudiants niveau : Licences (L 2)

Domaine : MI
Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques

Etabli Par :

BENALLAL HAFIDA

Année 2019-2020

Faculté des Sciences Tidjani HADDAM
Tél.: 043 21 63 70 / Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71
Site Web: www.fs.univ-tlemcen.dz
Email : vdrpg.facscience@gmail.com

Université de Abou-Bakr Belkaid
TLEMCEN

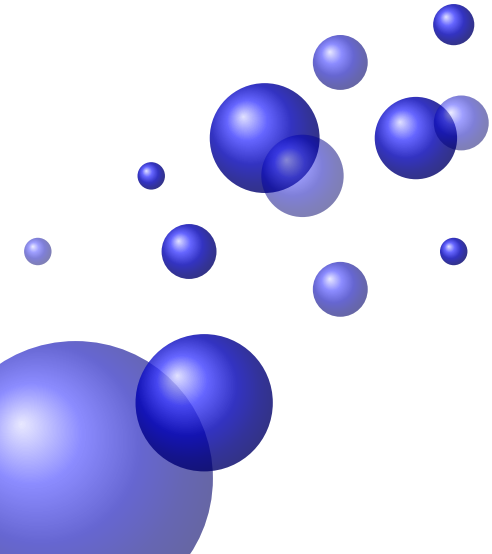
Faculté des sciences
Département de Mathématiques



Polycopié de Géométrie
Courbes et Surfaces paramétrées

Avec Exercices corrigés

Hafida BENALLAL
Maître de conférences au département de Mathématiques



2ème Année Licence en Mathématiques
Année universitaire 2019-2020

BENALLAL Hafida
Polycopié de Géométrie
2ème année Licence Mathématiques

Courbes et Surfaces Paramétrées
Avec Exercices Corrigés

Université de TLEMCEN, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
2019-2020

Table des matières

Introduction **4**

I Les courbes paramétrées **5**
I.1 Courbes paramétrées: Généralités et études métriques 5
I.1.1 Définitions 5
I.1.2 Courbes paramétrées, espace tangent 6
I.2 Longueur d'une courbe paramétrée 8
I.2.1 longueur d'un arc de courbe 8
I.2.2 Paramétrisation par abscisse curviligne 11
I.3 La théorie locale d'une courbe 13
I.3.1 Cas d'une courbe plane 13
I.3.2 Courbes dans $\mathbb{R}^3$ 17
I.4 Aspect d'une courbe paramétrée régulière 24
I.5 Exercices 26

II Surfaces paramétrées **28**
II.1 Rappel sur les différentielles 28
II.2 Représentation paramétrique des surfaces régulières 29
II.2.1 Reparamétrisation 29
II.2.2 Exemples 30
II.3 Plan tangent à une surface régulière 32
II.3.1 Courbe tracée sur une surface de $\mathbb{R}^3$ 32
II.3.2 Plan tangent à une surface 33
II.3.3 Équation du plan tangent 34
II.4 Les deux formes fondamentales 35
II.4.1 Première forme fondamentale 35
II.4.2 Longueur et Aire 36
II.4.3 Application de Gauss 37
II.4.4 Dérivée directionnelle 37
II.4.5 Opérateur de forme 38
II.4.6 Deuxième forme fondamentale 40
II.4.7 Courbure normale 41
II.4.8 Courbures principales de la surface 42
II.4.9 Calculs explicites de K en fonction des deux formes fondamentales 43
II.4.10 Interprétation géométrique 46
II.4.11 Étude d'un exemple: surface de révolution 47
II.5 Équations de Codazzi et Gauss 50
II.5.1 Symboles de Christoffel 50

II.5.2 Le calcul des symboles de Christoffel 51
II.5.3 Équations de Codazzi et équations de Gauss 52
II.6 Exercices 54

Solutions des exercices **56**

Bibliographie **5**

Introduction

Le présent polycopié est écrit à l'intention des étudiants de la deuxième année de la licence de mathématiques fondamentales. Nous allons présenter, dans ce cours, quelques notions de base qui concernent les courbes et les surfaces paramétrées.
Le manuel est composé de deux parties:
Nous étudions dans le premier chapitre les courbes qui sont des applications définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Nous donnons quelques propriétés fondamentales d'une courbe, puis nous définirons dans la suite, les éléments métriques d'un arc paramétré en l'un de ses points. Nous montrerons que les courbes sont caractérisées par deux invariants riemanniens à savoir la courbure et la torsion.
Le deuxième chapitre concerne l'étude des surfaces de $\mathbb{R}^3$qui sont des applications définies sur un domaine connexe de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Nous expliquerons que sur chaque surface de $\mathbb{R}^3$ ont détermine deux quantités qui sont localement invariantes, la première forme fondamentale (métrique riemannienne) et la deuxième forme fondamentale qui détermine la géométrie de la surface par rapport à l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.
Pour aborder ce cours, nous supposons connues les notions de calcul différentiel sur $\mathbb{R}^3$ (applications différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, dérivées de ces applications, ...) et quelques notions d'algèbres linéaires élémentaires (espaces vectoriels de dimensions finie, bases, dualité, matrices, ...).
Chaque chapitre comporte des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, et de nombreux exercices corrigés.

Chapitre I

Les courbes paramétrées

On se place dans ce cours, dans un espace affine qui est de dimension soit 2, soit 3.

Un point p dans un espace de dimension $d \in \{2,3\}$ sera repéré par ses coordonnées $(u_1,...,u_d)$ dans un repère orthonormé $(O,e_1,...,e_d)$, cet espace est identifié à $\mathbb{R}^d$.

Le produit scalaire de deux vecteurs $u=(u_1,...,u_d)$ et $v=(v_1,...,v_d)$ est donné par

$$u.v = \langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

.

I.1 Courbes paramétrées: Généralités et études métriques

I.1.1 Définitions

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ telle que $I=[a,b]\,, I=]a,b[$ ou $I=\mathbb{R}$ et $\{e_1,...,e_d\}$ une base canonique de $\mathbb{R}^d$, $d\in\{2,3\}$

Soit $x=(x_1,...,x_d)\in\mathbb{R}^d$, la norme euclidienne est $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_d^2}$.

Soit $f: I\longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles, on écrit

$$f(t)=f_1(t)e_1+f_2(t)e_2+...+f_d(t)e_d$$

les fonctions $f_1(t),f_2(t),...,f_d(t)$ sont les composantes de f.

Définition I.1.

1) *une fonction vectorielle $f: I\longrightarrow\mathbb{R}^d$ est dite de classe $C^k(k\geq 1)$ si f et ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues. (Ou si et seulement si toutes les fonctions $f_j(j=1,...,d)$ sont de classe C^k).*

2) *$f: I\longrightarrow\mathbb{R}^d$ est dite de classe C^∞ ou fonction lisse si f est de classe C^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.*

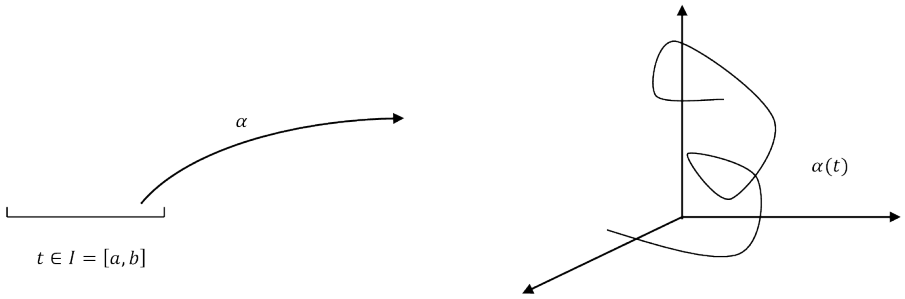
Définition I.2. *(Courbe paramétrée)*

On appelle courbe(paramétrée) de $\mathbb{R}^d$, $d\in\{2,3\}$, la donnée d'une application différentiable (de classe $C^k, k\geq 1$): $\alpha: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^d$.

L'image de α, noté $C=\{\alpha(t), t\in I\}$, est appelé le support géométrique de α.

On dit que C est une courbe géométrique et que α, définit une paramétrisation de C.

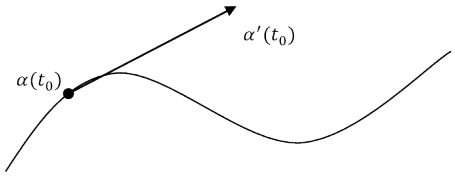
Quand le paramètre t parcourt l'intervalle I, le point $\alpha(t)$ parcourt la courbe.



I.1.2 Courbes paramétrées, espace tangent

La tangente en un point $\alpha(t_0)$ à une courbe paramétrée $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est la limite des droites passant par $\alpha(t)$ et $\alpha(t_0)$ quand t tend vers t_0.

Définition I.3.
Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1, et $\alpha(t_0)(t_0 \in I)$ un point de C tel que $\alpha'(t_0) \neq 0$. La tangente au point $\alpha(t_0)$ à la courbe C est la droite affine passant par le point $\alpha(t_0)$ et de vecteur directeur $\alpha'(t_0)$.



Définition I.4.

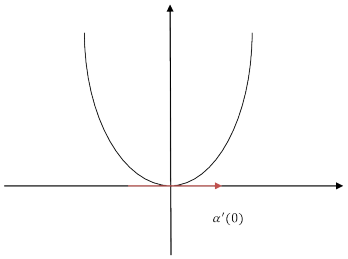
Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1. La courbe α est dite régulière (immersion) si pour tout $t \in I$: $\alpha'(t_0) \neq 0$.

Un point $\alpha(t_0)$ de C tel que $\alpha'(t_0) = 0$ est appelé un point singulier de la courbe.

Remarque 1. *Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point , la réciproque est fausse. En effet:*

Considérons la courbe paramétrée suivante: $\alpha(t) = (t^2, t^4)$ *avec* $t \in \mathbb{R}$.

La courbe géométrique associée est la parabole d'équation : $y = x^2$. *On a* $\alpha'(0) = 0$, *mais la parabole admet un vecteur tangent horizontal au point* $\alpha(0)$.



Exemple I.5.

1) *Le support géométrique de la courbe paramétrée* $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donné par:* $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin(t))$ *est un cercle de rayon a centré à l'origine*

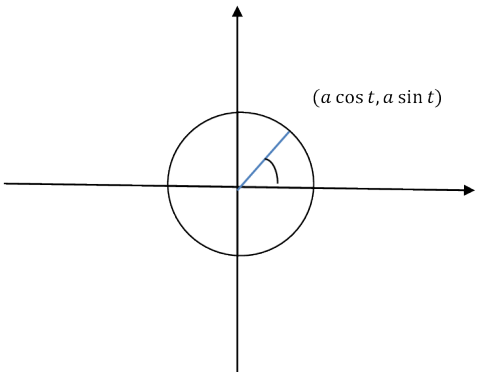


Figure I.1:

Cette paramétrisation est régulière. En effet: $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$ *de norme euclidienne:* $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2} = a \neq 0$.

2) *L'application:* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $\alpha(t) = (t, t^2)$ *a pour courbe géométrique* C *la parabole d'équation* $y = x^2$. *Cette paramétrisation est régulière :* $\alpha'(t) = (1, 2t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

3) *L'application* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ *définie une paramétrisation de la cubique d'équation* $y^2 = x^3$.

Dans cet exemple , la courbe présente un point singulier en $(0, 0)$, *donc* α *n'est pas une paramétrisation régulière:* $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$, *si* $t = 0$, $\alpha'(0) = (0, 0)$.

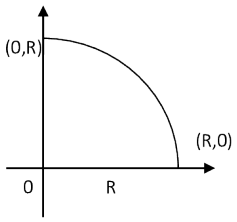
Remarque 2. *Une même courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations.*

Exemple I.6. *Considérons la courbe paramétrée*

$$\begin{array}{rcl} \alpha : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \alpha(t) = (Rt, R\sqrt{1-t^2}) \end{array}$$

$\alpha(t)$ appartient au cercle de rayon R et de centre $(0,0)$, plus précisément, le support géométrique de α est le quart de cercle entre les points $(R,0)$ et $(0,R)$.

Or ce support géométrique admet aussi une autre paramétrisation $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par: $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$.



I.2 Longueur d'une courbe paramétrée

I.2.1 longueur d'un arc de courbe

Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée et $A = \alpha([a', b'])$ un arc fermé de la courbe C, $([a', b']) \subset I$.

Un arc fermé est l'image d'un intervalle fermé de I. La restriction d'une courbe paramétrée α à un intervalle $J \subset I$ est parfois appelé arc de α.

Définition I.7.
On définit la longueur de l'arc A par: $L(A) = \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(t)\|\, dt$.

Lemme I.8.
La longueur de l'arc A est indépendante de la paramétrisation de cet arc.

Preuve.
On note $\gamma : [c, d] \longrightarrow [a', b']$ un changement de la paramétrisation et $\beta = \alpha \circ \gamma$ la nouvelle paramétrisation.

La longueur de l'arc de courbe A calculée avec la nouvelle paramétrisation est:

$$\int_c^d \|\beta'(u)\|\, du = \int_c^d \|\alpha'(\gamma(u))\| \,.\, |\gamma'(u)|\, du$$

Posons $t = \gamma(u)$ donc $dt = \gamma'(u)du$, on obtient

$$\int_c^d \|\beta'(u)\|\, du = \int_{\gamma(c)}^{\gamma(d)} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Qui est la longueur de l'arc A calculée avec la paramétrisation initiale.

Exemple I.9.

1) *On considère la courbe paramétrée par:* $t \in [0,\pi] \mapsto \alpha(t) = (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$. *On a*

$$\alpha'(t) = (-\sin t - \sin(2t), \cos t + \cos(2t))$$

donc

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2+2\cos t} = 2\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

Alors

$$l = 2\int_0^{\pi} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt$$

Mais $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ *est positif sur* $[0,\pi]$ *, donc*

$$l = 2\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4$$

2) *Le cercle* $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0,2\pi]$*:*

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Définition I.10.

Soit $\alpha : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *une courbe paramétrée. Considérons une partition:*

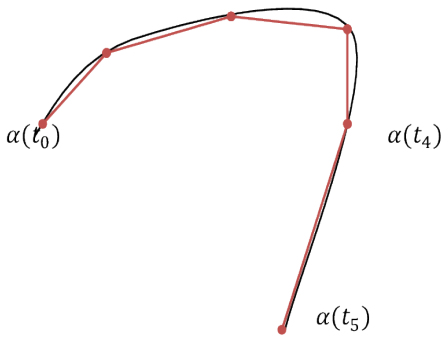
$$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b\} \text{ de l'intervalle } [a,b], k \text{ étant quelconque.}$$

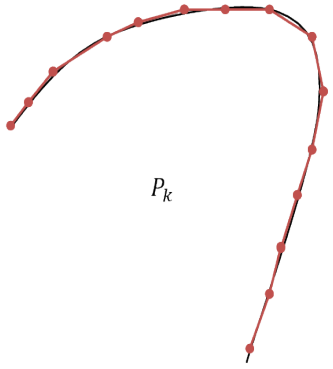
Soit $l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$ *la longueur de la ligne polygonale dont les sommets sont* $\alpha(t_0), \alpha(t_1), ..., \alpha(t_k)$.

On définit la longueur de la courbe paramétrée α *par:*

$$l(\alpha) = \sup\{l(\alpha,P); P \text{une partition de } [a,b]\} = \sup_{a=t_0<t_1<...<t_k=b} \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

Si $l(\alpha)$ *est fini, on dit que la courbe* α *est rectifiable.*





Théorème I.11.

Soit $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1, alors α est rectifiable et on a

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Preuve. *Considérons une subdivision $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ de l'intervalle $[a,b]$. Nous avons pour tout $i \in \{1,...,k\}$*

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t)dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\|\, dt$$

En sommant sur i, on obtient:

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

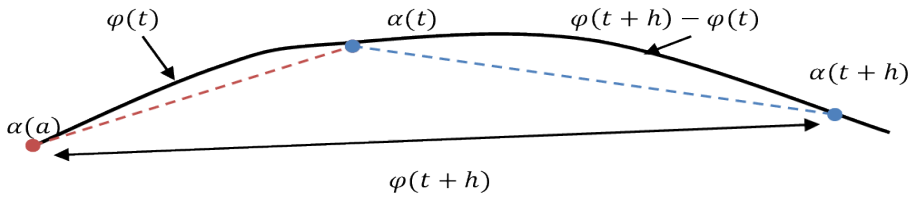
En passant au suprêmum sur toutes les subdivisions on obtient

$$l(\alpha) = \sup\{l(\alpha, P), P\} \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Donc α est rectifiable $(l(\alpha) < \infty)$.
Montrons maintenant l'égalité souhaitée. Pour cela introduisons la fonction

$$\begin{array}{ccc} \varphi : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) = l(\alpha|_{[a,t]}) \end{array}$$

$\varphi(t)$ est la longueur de la courbe entre a et t.
Soit $t \in [a,b]$ et $h > 0$ tel que $t + h \in [a,b]$



La longueur de la courbe entre les paramètres t et $t + h$ étant plus longue que la longueur du segment reliant $\alpha(t)$ à $\alpha(t + h)$, on a:

$$\left\| \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} \right\| = \frac{1}{h} \|\alpha(t+h) - \alpha(t)\| \leq \frac{1}{h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\left\|\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}\right\| \leq \frac{1}{h}\left|\varphi(t+h)-\varphi(t)\right| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|\alpha'(u)\|\,du$$

Maintenant

$$\lim_{h\mapsto 0^+}\left\|\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}\right\| = \lim_{h\mapsto 0^+}\frac{1}{h}\|\alpha(t+h)-\alpha(t)\|$$

$$= \|\alpha'(t)\| = \lim_{h\mapsto 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|\alpha'(u)\|\,du$$

Ce qui implique

$$\lim_{h\mapsto 0^+}\frac{1}{h}\left|\varphi(t+h)-\varphi(t)\right| = \|\alpha'(t)\|$$

(même travail pour $h<0$).
On conclut que φ est dérivable en t et que l'on a : $\varphi'(t)=\|\alpha'(t)\|$, c'est-à-dire

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\,du, \forall t\in[a,b]$$

En particulier: $\varphi(b) = l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$.

Exemple I.12.
Considérons l'arc paramétré $\alpha(t)=(t,t^2)$ pour $t\in[0,1]$. Cet arc est rectifiable. En effet : pour la subdivision $0=t_0<t_1<...<t_k=1$, on a

$$l(\alpha,P) = \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\|(t_ie_1+t_i^2e_2)-(t_{i-1}e_1+t_{i-1}^2e_2)\right\|$$

$$= \sum_{i=1}^k \left\|(t_i-t_{i-1})e_1+(t_i^2-t_{i-1}^2)e_2\right\| \leq \sum_{i=1}^k |t_i-t_{i-1}|\,\|e_1\| + |t_i^2-t_{i-1}^2|\,\|e_2\|$$

$$= \sum_{i=1}^k \left((t_i-t_{i-1})+(t_i^2-t_{i-1}^2)\right) = \sum_{i=1}^k (t_i-t_{i-1})(1+t_i+t_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^k (t_i-t_{i-1})(1+2t_i) \leq 3\sum_{i=1}^k (t_i-t_{i-1}) = 3(t_k-t_0) = 3$$

Nous avons utilisé le fait que : $0\leq t_{i-1}<t_i\leq 1$.

Ainsi la suite $l(\alpha,P)$ est croissante, bornée donc convergente, alors α est rectifiable.

I.2.2 Paramétrisation par abscisse curviligne

L'abscisse curviligne est un moyen de paramétrer une courbe par sa longueur . Soit $\alpha: I\longrightarrow\mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1.

Définition I.13.

On appelle abscisse curviligne de α toute application $s: I\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que: $\forall t_1,t_2\in I$ si $t_1<t_2$, alors : $s(t_2)-s(t_1)] = l(\alpha|_{[t_1,t_2]})$ c'est la longueur de l'arc de $\alpha(t_1)$ à $\alpha(t_2)$.

Autrement dit: si on fixe un point $c\in[a,b]\subset I$, la longueur d'arc s comptée à partir du point $\alpha(c)$ est la fonction:

$$s: t\mapsto s(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\|\,du$$

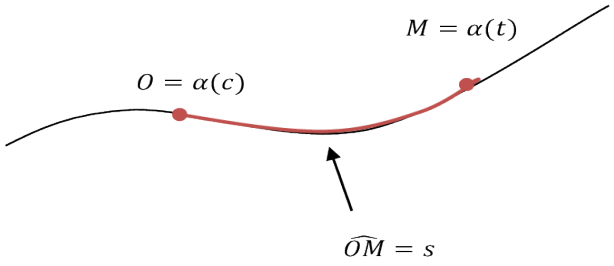
c'est-à-dire: les abscisses curvilignes de la courbe α sont les valeurs de la primitive de la fonction $\|\alpha'(.)\|$ qui s'annule au point c .

Remarque 3. *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3)$ est une courbe paramétrée par abscisse curviligne, alors $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1$, en effet:*

$$t - a = \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du$$

et en dérivant par rapport à t, on obtient:

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$



Proposition I.14. *Si s est une abscisse curviligne de la courbe α, alors s est une application strictement croissante de I sur $J = s(I)$. De plus, si on pose*

$$\begin{aligned} \beta : J &\to \mathbb{R}^d \\ u &\mapsto \alpha(s^{-1}(u)) = \beta(u) \end{aligned}$$

Alors β est un nouveau paramétrage de la courbe α qui vérifie: $\forall u \in J, \ \|\beta'(u)\| = 1$.

Le paramétrage β s'appelle paramétrage par abscisse curviligne ou paramétrage par la longueur de l'arc.

Preuve.

Comme $s'(t) = \left(\int_c^t \|\alpha'(u)\| \, du\right)' = \|\alpha'(t)\| > 0$, alors $s(t)$ est strictement croissante. Ce ci implique que s est injective et donc bijective de I sur $J = s(I)$. En conséquence $s^{-1} : J \to I$ existe et est de classe C^1:

$$s^{-1}(u) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))} = \frac{1}{\|\alpha'(s^{-1}(u))\|}$$

On définit la courbe paramétrée $\beta : J \to \mathbb{R}^d$ par:

$$\beta(u) = (\alpha \circ s^{-1})(u)$$

donc

$$\beta'(u) = \alpha'(s^{-1}(u)).(s^{-1})'(u) = \alpha'(s^{-1}(u)).\frac{1}{s'(s^{-1}(u)}$$

or $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, donc $s'(s^{-1}(u)) = \|\alpha'(s^{-1}(u))\|$. D'où

$$\|\beta'(u)\| = \frac{\|\alpha'(s^{-1}(u))\|}{\|\alpha'(s^{-1}(u))\|} = 1.$$

Exemple I.15.
Exemple 1:
On considère la courbe $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *avec* $\phi(t) = (t^2, t^3)$. *Cette paramétrisation n'est pas régulière puisque le point* $(0,0)$ *est un point singulier.*

On se restreint à l'intervalle $]0, +\infty[$, *la longueur d'arc comptée à partir de* $(0,0)$ *est*

$$s(t) = \int_0^t \|\phi'(u)du\| = \int_0^t u\sqrt{4+9u^2}du$$

$$= \left[\frac{1}{27}(4+9u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = \frac{1}{27}(4+9t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$$

Exemple 2: *On considère la courbe paramétrée* $\gamma :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ *telle que* $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$. *L'abscisse curviligne* $s :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est donnée par*

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin t$$

la fonction $\arcsin :]0,1[\longrightarrow \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *est une bijection. Donc la nouvelle paramétrisation est donnée par* $\beta : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ *telle que:*

$$\beta(u) = \gamma(s^{-1}(u)) = \gamma(\sin u) = (\sin u, \sqrt{1-\sin^2 u}) = (\sin u, \cos u).$$

I.3 La théorie locale d'une courbe

Dans cette partie, on s'intéresse à l'allure locale des courbes régulières. Une notion centrale pour connaître cette allure de la courbe est la courbure.
La courbure mesure l'écart entre la courbe et le fait qu'elle soit un morceau de droite.

I.3.1 Cas d'une courbe plane

Définition I.16. *Soit* $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une courbe paramétrée régulière de classe* C^1, *le vecteur:* $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ *est appelé le vecteur tangent unitaire (* $\|T(t)\| = 1$ *) à la courbe* α *au point* $\alpha(t)$.

Remarque 4. *Comme* $\|T(t)\| = 1$, *alors* $2T'(t).T(t) = 0$, *c'est-à-dire* $T'(t).T(t) = 0$. $T'(t)$ *est donc orthogonal à* $T(t)$.

Définition I.17.

Si $T'(t) \neq 0$, *on définit le vecteur* $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, $N(t)$ *est appelé le vecteur normal principal.*

Puisque $T'(t)$ *est orthogonal à* $T(t)$, *alors* $N(t)$ *est orthogonal à* $T(t)$.

Définition I.18. *(Repère de Frenet)*

Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *une courbe paramétrée régulière de classe* C^1. *Le repère de Frenet de* α *au point* $\alpha(t)$ *est le repère orthonormé* $(\alpha(t), T(t), N(t))$.
$\{T(t), N(t)\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^2$.

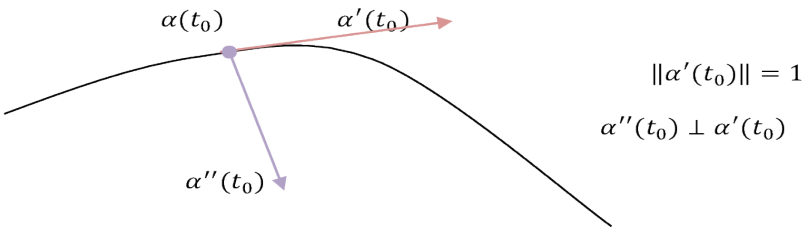
La courbure

Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2, on peut supposer que cette courbe est paramétrée par la longueur de l'arc (par abscisse curviligne). On effectue un développement limité de α à l'ordre 2 en t_0.

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\alpha''(t_0) - (t - t_0)^2\varepsilon(t)$$

avec $\lim_{t \mapsto t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$. Le vecteur $T(t) = \alpha'(t)$ est tangent à la courbe en $\alpha(t_0)$, si $\alpha''(t) \neq 0$, la courbe est attirée vers la direction du vecteur accélération $\alpha''(t_0)$.

On voit aussi que plus $\|\alpha''(t)\|$ est grand plus la courbe est courbée.



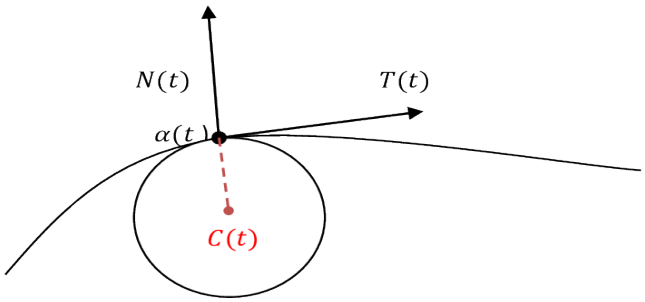
Proposition I.19. *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2. $\alpha''(t) = T'(t)$ est un vecteur colinéaire à $N(t)$. En particulier, il existe une application continue: $\tilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall t \in I : \alpha''(t) = T'(t) = \tilde{\kappa}(t).N(t)$$

Définition I.20. *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2.*

- *La courbure algébrique $\tilde{\kappa}(t)$ de α en $\alpha(t)$ est: $\tilde{\kappa}(t) = T'(t).N(t) = \alpha''(t).N(t)$.*
- *La courbure $\kappa(t)$ de α en $\alpha(t)$ est: $\kappa(t) = \|\alpha''(t)\| = \|T'(t)\| = |\tilde{\kappa}|$.*
- *Le point $p = \alpha(t)$ de α est birégulier si $\kappa(t) \neq 0$.*
- *On dit que p est un point d'inflexion de α si la droite tangente à α en p traverse α en ce point.*
- *Le cercle de rayon $\dfrac{1}{\tilde{\kappa}(t)}$ est tangent à la courbe au point $p = \alpha(t)$, s'appelle le cercle osculateur au point $\alpha(t)$ de centre*

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\tilde{\kappa}(t)}N(t)$$



Dans le cas des courbes paramétrées régulières, nous avons la proposition suivante:

Proposition I.21.
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2. Alors la courbure $\kappa(t)$ de α au point $\alpha(t)$ est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{|\det(\alpha'(t), \alpha''(t))|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Preuve.
Soit $\beta = \alpha \circ s_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^2$ la paramétrisation par abscisse curviligne et on pose $u = s_{t_0}(t), t_0 \in I$. La formule

$$(s_{t_0}^{-1})'(u) = \frac{1}{s'_{t_0}(s_{t_0}^{-1}(u))} = \frac{1}{\left\|\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))\right\|}$$

implique

$$\beta'(u) = (\alpha \circ s_{t_0}^{-1})'(u) = \alpha'(s_{t_0}^{-1}(u)).(s_{t_0}^{-1})'(u) = \frac{\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))}{\left\|\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))\right\|}$$

En dérivant une deuxième fois, on a

$$\beta''(u) = \frac{\alpha''(s_{t_0}^{-1}(u))}{\left\|\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))\right\|^2} - \frac{(\left\|\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))\right\|)'}{\left\|\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))\right\|^2}.\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))$$

On a donc

$$\det(\beta'(u), \beta''(u)) = \frac{\det(\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u)), \alpha''(s_{t_0}^{-1}(u))}{\left\|\alpha'(s_{t_0}^{-1}(u))\right\|^3}$$

Par ailleurs

$$\det(\beta'(u), \beta''(u)) = \det(T(u), \tilde{\kappa}N(u)) = \tilde{\kappa}(u)$$

ce qui permet de conclure.

Formule de Frenet

Proposition I.22. *(Formules de Frenet)*
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe C^2 paramétrée par abscisse curviligne. Alors $\forall t \in I$, on a

$$\begin{cases} T'(t) = \tilde{\kappa}(t)N(t) \\ N'(t) = -\tilde{\kappa}(t)T(t) \end{cases}$$

Preuve.

- *La première formule est la définition même de la courbure algébrique.*
- *Le vecteur $N(t)$ étant unitaire: $\forall t \in I : N(t).N(t) = 1$. En dérivant, on aura*

$$\forall t \in I : N'(t).N(t) = 0$$

Par ailleurs, on a: $\forall t \in I : T(t).N(t) = 0$. En dérivant, on obtient

$$T'(t).N(t) + T(t).N'(t) = 0 \implies \tilde{\kappa}(t) = -N'(t).T(t)$$

$$\implies \tilde{\kappa}(t)T(t) = -N'(t).T(t).T(t)$$

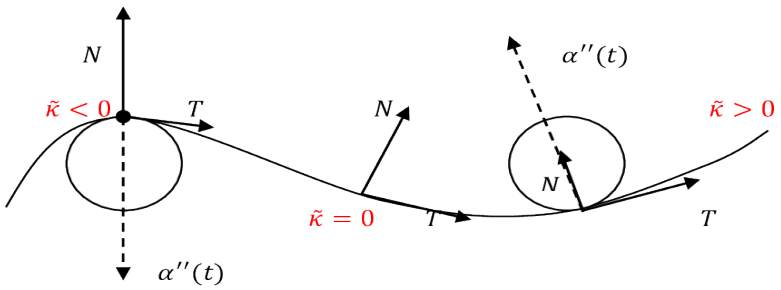
$$\implies N'(t) = -\tilde{\kappa}(t)T(t)$$

Car on a bien $T(t).T(t) = 1$

Interprétation géométrique
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par abscisse curviligne. Le développement limité de α à l'ordre deux en t_0 peut se réécrire dans le repère de Frenet $(\alpha(t_0), T(t_0), N(t_0))$ comme suit

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)T(t_0) + \tilde{\kappa}(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2}N(t_0) + (t - t_0)^2\varepsilon(t).$$

- Si $\tilde{\kappa}(t_0) < 0$, alors la courbe est en dessous de $T(t)$.
- Si $\tilde{\kappa}(t_0) > 0$, alors la courbe est au dessus de $T(t)$.



I.3.2 Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par abscisse curviligne de classe C^2. On note comme avant, $T(t) = \alpha'(t)$ le vecteur tangent unitaire. Comme $T(t)$ est unitaire, il est orthogonal à $T'(t)$. Nous supposons dans la suite que $T'(t) \neq 0$ et on définit

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

le vecteur normal principal unitaire.

Définition I.23. *La courbure $\kappa(t)$ de la courbe α au point $\alpha(t)$ est $\kappa(t) = \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$. On a donc par définition que:*

$$T'(t) = \kappa(t)N(t).$$

Binormale et repère de Frenet

Le repère de Frenet est un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée.

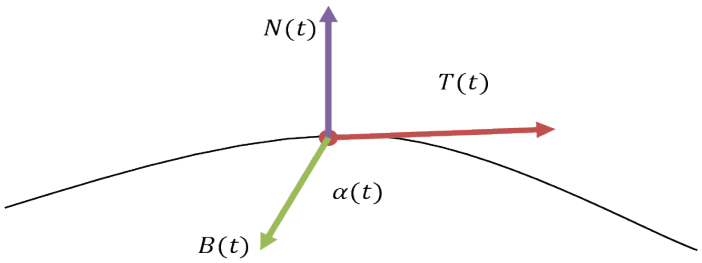
Le vecteur $T(t)$ est unitaire tangent à la courbe, la normale principale est orthogonale à $T(t)$, il est naturel de compléter cela en une base orthonormée en posant: $B(t) = T(t) \wedge N(t)$, où $\wedge$ est le produit vectoriel défini par:

Pour tout $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^3$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Définition I.24. *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par la longueur de l'arc.*

- *La binormale à α au point $\alpha(t)$ est le vecteur: $B(t) = T(t) \wedge N(t)$.*
- *Le repère de Frenet de α au point $\alpha(t)$ est le repère orthonormé direct: $(\alpha(t), T(t), N(t), B(t))$*



La torsion d'une courbe

Dans les courbes planes il y a un seul vecteur normal qui est orthogonal au vecteur tangent en tout point de la courbe tandis que pour une courbe gauche (courbe non plane), il y a tout un plan qui est orthogonal au vecteur tangent à la courbe en chaque point. La torsion d'une courbe, nous indique comment "tourne" le repère de Frenet autour de la droite tangente à la courbe.

On considère une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^3 paramétrée par la longueur de l'arc et $\alpha(t)$ un point birégulier.

Proposition I.25. *Le vecteur $B'(t)$ est colinéaire à $N(t)$.*

Preuve.
On a, pour tout $t \in I : B(t).B(t) = 1$. En dérivant, on obtient: $\forall t \in I : B'(t).B(t) = 0$.
De même, en dérivant le fait que: $\forall t \in I : B(t).T(t) = 0$, on a:

$$B'(t).T(t) + B(t).T'(t) = B'(t).T(t) = 0$$

Le vecteur $B'(t)$ est donc orthogonal à $T(t)$ et $B(t)$, il est donc colinéaire à $N(t)$. On pose $\tau(t) = N'(t).B(t) = -B'(t).N(t)$

Définition I.26. *La torsion $\tau(t)$ d'une courbe α paramétrée par abscisse curviligne en $\alpha(t)$ est:*

$$\tau(t) = -B'(t).N(t)$$

C'est la troisième coordonnée de $N'(t)$, celle dans la direction de $B(t)$.

Formules de Frenet

Les formules de Frenet expriment la dérivée du repère de Frenet.

Proposition I.27. *Soit α: $I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par la longueur de l'arc de classe C^3. Alors, on a*

$$\begin{cases} T'(t) &= k(t).N(t) \\ N'(t) &= -k(t).T(t) + \tau(t).B(t) \\ B'(t) &= -\tau(t).N(t) \end{cases}$$

Preuve.
Il nous reste que la deuxième formule à montrer. Soient a, b, c les coordonnées de $N'(t)$ dans la base $\{T, N, B\}$: $N'(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$.
Pour tout $t \in I$, on a: $N(t).N(t) = 1$. Cela donne: $N'(t).N(t) = 0$ et donc $b = 0$.
Puis: $\forall t \in I$:

$$N'(t).T(t) = -N(t).T'(t) = -N(t).k(t).N(t) = -k(t)$$

donc : $a = -k(t)$.
De même $\forall t \in, B(t).N(t) = 0$, donc

$$N'(t).B(t) = -B'(t).N(t) = -N(t)(-\tau(t).N(t)) = \tau(t)$$

d'où $c = \tau(t)$.
Ce qui donne: $N'(t) = -k(t).T(t) + \tau(t).B(t)$
Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

Exemple I.28. *L'hélice*
$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *telle que :* $\alpha(t) = (a\cos(\frac{t}{c}), a\sin(\frac{t}{c}), \frac{bt}{c})$ *où* $c = \sqrt{a^2+b^2}, a > 0.$

On a $\|\alpha'(t)\| = \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$

- *Vecteur tangent:*
  $T(t) = \alpha'(t) = \left(\frac{-a}{c}\sin(\frac{t}{c}), \frac{a}{c}\cos(\frac{t}{c}), \frac{b}{c}\right)$
- *La courbure: On a* $T'(t) = \frac{1}{c^2}\left(-a\cos(\frac{t}{c}), -a\sin(\frac{t}{c}), 0\right)$, *et*
  $k(t) = \|T'(t)\| = \frac{1}{c^2}\sqrt{a^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$
- *Le vecteur normal:* $N(t) = \frac{T'(t)}{\kappa(t)} = \frac{a^2+b^2}{a}.\frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos(\frac{t}{c}), -a\sin(\frac{t}{c}), 0\right)$, *d'où*

$$N(t) = \left(-\cos(\frac{t}{c}), -\sin(\frac{t}{c}), 0\right)$$

- *La binormale:*

$$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -\frac{a}{c}\sin(\frac{t}{c}) & \frac{a}{c}\cos(\frac{t}{c}) & \frac{b}{c} \\ -\cos(\frac{t}{c}) & -\sin(\frac{t}{c}) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{c}\sin(\frac{t}{c}), -\frac{b}{c}\cos(\frac{t}{c}), \frac{a}{c}\right)$$

Par suite:

$$B'(t) = \frac{b}{c^2}\left(\cos(\frac{t}{c}), \sin(\frac{t}{c}), 0\right)$$

Ainsi:

$$\tau(t) = -B'(t).N(t) = -\frac{b}{c^2}\left(\cos(\frac{t}{c}), \sin(\frac{t}{c}), 0\right).\left(-\cos(\frac{t}{c}), -\sin(\frac{t}{c}), 0\right) = -\left(-\frac{b}{c^2} + 0\right) = \frac{b}{c^2}.$$

D'où

$$\tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

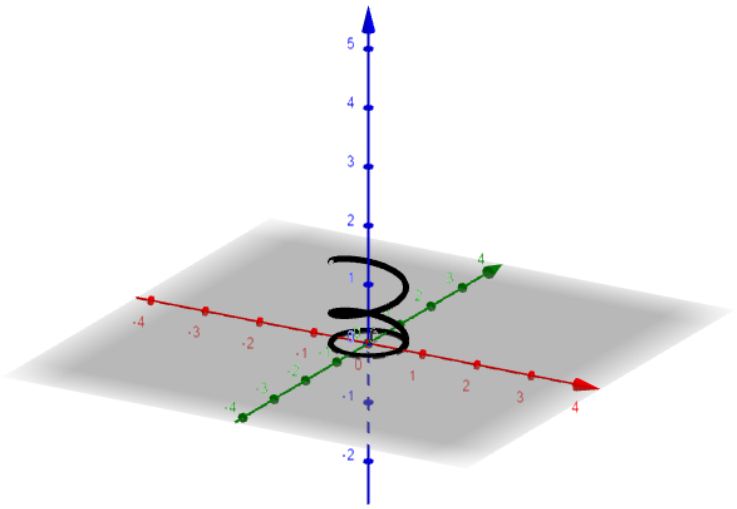


Figure I.2: l'hélice

Remarque 5.

Si α n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc, on peut donc la reparamétriser par une nouvelle courbe $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ telle que $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ où $s(t)$ est une abscisse curviligne: $I \to s(I) = J \to \mathbb{R}^3$. En dérivant, on obtient: $\alpha'(t) = \beta'(t).s'(t)$
Posons $v(t) = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ la vitesse de α.

- *Le vecteur tangent:* $\alpha'(t) = v(t).T(s(t)) \Rightarrow T(s(t)) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)}$

- *La courbure:*
  $(T'(s(t)))' = T'(s(t)).s'(t) = v(t).\kappa(s(t)).N(s(t))$
  C-à-d:
  $$\frac{T(s(t))}{dt} = \frac{dT}{ds}.\frac{ds}{dt} = v(t).\kappa(s(t)).N(t)$$
  Ou encore
  $$\kappa(s(t)).N(s(t)) = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}.\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}.\frac{dT}{dt}$$
  De même:
  $$-\tau((s(t)).N(s(t)) = \frac{dB(s(t))}{ds} = \frac{dB}{dt}.\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}.\frac{dB}{dt}$$
  Donc
  $$B'(t) = -v(t).\tau(s(t)).N(s(t))$$
  Finalement:
  $$T'(t) = v.\kappa.N \text{ et } B'(t) = -v.\tau.N$$

Exemple I.29.
Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par:

$$\alpha(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right)$$

On a $\forall t \in \mathbb{R} : \alpha'(t) = 3\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right)$ et $\|\alpha'(t)\| = 3\sqrt{2}(1 + t^2) \neq 1$. Donc α n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc.
Soit $v(t) = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$, déterminons (T, κ, N, τ, B).

- *Le vecteur tangent: $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)}\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right)$.*

- *La courbure: $T'(t) = v(t).\kappa(t).N(t)$. Or $T'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)$. Donc*

$$\kappa(t).N(t) = \frac{1}{v}.T'(t) = \frac{1}{3(1+t^2)}\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3(1+t^2)^2}}_{\kappa} \cdot \underbrace{\left(-\frac{2t}{(1+t^2)}, \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}, 0\right)}_{N} = \kappa.N$$

Ou simplement: $\kappa(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{1}{3(1+t^2)^2}$ et $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T(t)\|} = \left(-\dfrac{2t}{(1+t^2)}, \dfrac{(1-t^2)}{(1+t^2)}, 0\right)$
$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}, 1\right)$. Donc

$$-\tau(t).N = \frac{1}{v}.B'(t) = -\frac{1}{3(1+t^2)^2}\left(-\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right)$$

Ce qui donne: $\tau(t) = \kappa(t) = \dfrac{1}{3(1+t^2)}$

Théorème I.30.
Soit α une courbe régulière paramétrée de classe C^2, alors la courbure et la torsion sont données par:

$$\kappa(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Et

$$\tau(s(t)) = \frac{\alpha'(t).(\alpha''(t) \wedge \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

Où le produit mixte: $u.(v \wedge w) = \det(u, v, w)$

Preuve.
Soit α une courbe régulière paramétrée de classe C^2, on note par $s(t)$ une abscisse curviligne de α et $v(t) = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$.

- *Montrer que $\kappa(s(t)) = \dfrac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$.*

Comme

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}.\frac{ds}{dt} = T(s(t)).s'(t) = v(t).T(s(t))$$

Alors

$$\alpha''(t) = \frac{d}{dt}(v(t).T(s(t))) = v'(t).T(s(t)) + v(t).(T(s(t)))' = v'(t).T(s(t)) + v^2(t)\kappa(s(t)).N(s(t))$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= (v(t).T(s(t))) \wedge \left(v'(t).T(s(t)) + v^2(t)\kappa(s(t)).N(s(t))\right) \\ &= v(t)v'(t).(T(s(t)) \wedge T(s(t))) + v^3(t)\kappa(s(t)).(T(s(t)) \wedge N(s(t))) \\ &= v^3(t)\kappa(s(t)).B(s(t))\end{aligned}$$

car $T \wedge T = 0$ *et* $T \wedge N = B$

Donc

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| &= v^3(t)\kappa(s(t)).\,\|B(s(t))\| = v^3(t)\kappa(s(t)) \\ &= \|\alpha'(t)\|^3 \kappa(s(t))\end{aligned}$$

car $\|B(s(t))\| = 1$.

Par conséquent

$$\kappa(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

- *Montrer que* $\tau(s(t)) = \dfrac{\alpha'(t).(\alpha''(t) \wedge \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$.

On utilise les formules de Frenet

$$\left\{\begin{array}{lcc} T'(s(t)) & = & v(t)\kappa(s(t)).N(s(t)) \\ N'(s(t)) & = & -v(t)\kappa(s(t)).T(s(t)) + v(t)\tau(s(t)).B(s(t)) \\ B'(s(t)) & = & -v(t)\tau(s(t)).N(s(t)) \end{array}\right.$$

On a

$$\alpha'(t) = v(t).T(s(t)) \ ,\ \alpha''(t) = v'(t).T(s(t)) + v^2(t)\kappa(s(t)).N(s(t))$$

Et

$$\begin{aligned}\alpha'''(t) &= v''(t).T(s(t)) + v'(t)v(t)\kappa(s(t)).N(s(t)) + 2v'(t)v(t)\kappa(s(t)).N(s(t)) \\ &\quad + v^2(t)(\kappa(s(t)))'.N(s(t)) + v^2(t)\kappa(s(t)).N'(s(t)) \\ &= v''(t).T(s(t)) + 3v'(t)v(t)\kappa(s(t)).N(s(t)) + v^2(t)(\kappa(s(t)))'.N(s(t)) \\ &\quad - v^3(t)\kappa^2(s(t)).T(s(t)) + v^3(t)\tau(s(t))\kappa(s(t)).B(s(t)) \\ &= (v''(t) - v^3(t)\kappa^2(s(t))).T(s(t)) + (3v'(t)v(t)\kappa(s(t)) + v^2(t)(\kappa(s(t)))').N(s(t)) \\ &\quad + v^3(t)\tau(s(t))\kappa(s(t)).B(s(t))\end{aligned}$$

On a déjà montré que

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = v^3(t)\kappa(s(t)).B(s(t)).$$

D'où $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2 = v^6(t)(\kappa(s(t)))^2$.

D'autre part

$$\begin{aligned}\alpha''(t) \wedge \alpha'''(t) &= v'(t)(3v'(t)v(t)\kappa(s(t)) + v^2(t)(\kappa(s(t)))').B(s(t)) - v'(t)v^3(t)\tau(s(t))\kappa(s(t)).N(s(t)) \\ &\quad - v^2(t)\kappa(s(t))(v''(t) - v^3(t)\kappa^2(s(t))).B(s(t)) + v^5(t)\kappa^2(s(t))\tau(s(t)).T(s(t)) \\ &= v^5(t)\kappa^2(s(t))\tau(s(t)).T(s(t)) - v'(t)v^3(t)\tau(s(t))k(s(t)).N(s(t)) \\ &\quad + \left(3v'^2(t)v(t)\kappa(s(t)) + v'(t)v^2(t)(\kappa(s(t)))' - v^2(t)\kappa(s(t))v''(t) - v^5(t)\kappa^3(s(t))\right).B(s(t))\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\alpha'(t).(\alpha''(t)\wedge\alpha'''(t)) &= v^6(t)\kappa^2 s(t))\tau(s(t))\,\|T(s(t))\| \\ &= v^6(t)\kappa^2(s(t))\tau(s(t))\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\alpha'(t).(\alpha''(t)\wedge\alpha'''(t))}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|^2} = \frac{v^6(t)\kappa^2(s(t))\tau(s(t))}{v^6(t)(\kappa(s(t)))^2} = \tau(s(t))$$

Proposition I.31. *Une courbe est une droite si et seulement si sa courbure est nulle.*

Preuve.

1. *Soit α une droite: $\alpha(t) = tv(t) + c$ où v vecteur unitaire et c vecteur constant. On a: $\alpha'(t) = v$ et $\|\alpha'(t)\| = \|v\| = 1$, donc $T(t) = v = constant$.*
   C'est-à-dire $T'(t) = 0$. Ce qui donne: $\kappa(t) = \|T'(t)\| = 0$.

2. *Inversement, Soit α une courbe paramétrée par la longueur de l'arc telle que sa courbure $\kappa(t) = 0, \forall t \in I$.*
   On a $T(t) = \alpha'(t)$, et $T'(t) = \alpha''(t) = \kappa(t).N(t) = 0, \forall t \in I$. C-à-d: $T(t) = T_0$ constant $\forall t \in I$. Ainsi $\alpha'(t) = T_0$, d'où $\alpha(t) = tT_0 + c$, (c vecteur constant). Par suite α est une droite.

Proposition I.32. *Une courbe α est plane si et seulement si sa torsion est partout nulle.*

Preuve. 1. *Soit α une courbe plane régulière paramétrée par abscisse curviligne, c-à-d α est dans un plan P engendré par les vecteurs T et N.*
Le vecteur $B = T \wedge N$ unitaire et orthogonal au plan P . Donc $\alpha(t).B(t) = 0$.
En dérivant: $\alpha'(t).B(t) + \alpha(t).B'(t) = 0$. Or $\alpha'(t).B(t) = T(t).B(t) = 0$. Donc $\alpha(t).B'(t) = 0$.
Ou bien $-\tau(t).\alpha(t).N(t) = 0 \quad \forall t$. Ce qui donne $-\tau(t).\alpha(t).\|N(t)\| = 0 \quad \forall t$. C-à-d $\tau(t).\alpha(t) = 0 \quad \forall t$.
Or $\alpha(t)$ peut être nulle en un nombre fini de points, et comme $\tau(t)$ est continue, alors $\tau \equiv 0$.

2. *Inversement*
   Si $\alpha(t)$ est de torsion partout nulle, alors

$$B'(t) = -\tau(t).N(t) = 0$$

D'où le vecteur binormal $B(t) = B_0$ est un vecteur constant.
Considérons $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t).B_0) = \alpha'(t).B_0 = T(t).B_0$. Comme T et B sont orthogonaux, alors: $T(t).B_0 = 0$. Par suite: $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t).B_0) = 0$
En intégrant, on trouve: $\alpha(t).B_0 = constant$. C-à-d: $\alpha(t)$ est dans le plan défini par l'équation $\alpha(t).B_0 = C$ où C une constante quelconque.
Si on pose $B_0 = (a, b, d)$ et $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ on aura

$$\alpha(t).B_0 = ax(t) + by(t) + dz(t) = C$$

$\alpha(t)$ est donc appartient au plan d'équation caractéristique $ax + by + dz = C$, ce ci implique que α est une courbe plane.

I.4 Aspect d'une courbe paramétrée régulière

Proposition I.33. *Soit α une courbe régulière de classe C^3, α est supposée paramétrée par abscisse curviligne. Si $\alpha(0) = 0$, alors, au voisinage de 0 on a:*

$$\alpha(t) = \left(t - \frac{\kappa_0^2}{6}t^3 + t^3\varepsilon_1(t)\right)T(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}t^2 + \frac{\kappa_0'}{6}t^3 + t^3\varepsilon_2(t)\right)N(0)$$

$$+ \left(\frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 t^3 + t^3\varepsilon_3(t)\right)B(0)$$

Où $\kappa_0 = \kappa(0), \tau_0 = \tau(0), \kappa_0' = \kappa'(0)$ et $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

Preuve. *Le développement de Taylor de α au voisinage de 0 donne:*

$$\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0) + \frac{t^2}{2}\alpha''(0) + \frac{t^3}{6}\alpha'''(0) + t^3\varepsilon(t).$$

On a $\alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = T(0),\ \alpha''(0) = T'(t) = \kappa(0).N(0),$
$\alpha'''(0) = T''(0) = -\kappa^2(0)T(0) + \kappa'(0).N(0) + \kappa(0).\tau(0).B(0)$. *D'où*

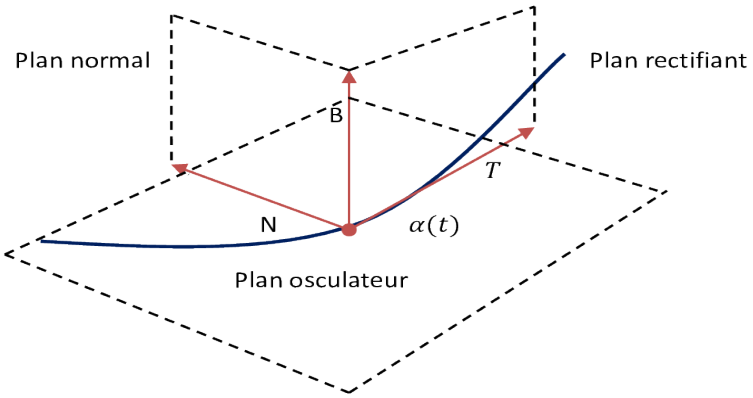
$$\alpha(t) = tT(0) + \frac{t^2}{2}\kappa_0 N(0) + \frac{t^3}{6}\left(-\kappa_0^2 T(0) + \kappa_0' N(0) + \kappa_0\tau_0 B(0)\right) + t^3\varepsilon(t)$$

$$= \left(t - \frac{\kappa_0^2}{6}t^3 + t^3\varepsilon_1(t)\right)T(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}t^2 + \frac{\kappa_0'}{6}t^3 + t^3\varepsilon_2(t)\right)N(0)$$

$$+ \left(\frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 t^3 + t^3\varepsilon_3(t)\right)B(0)$$

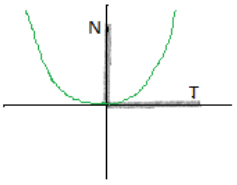
On introduit les trois plans du trièdre de Frenet au point $\alpha(0) = 0$, donnée par:

1. Plan osculateur: engendré par $T(0)$ et $N(0)$.
2. Plan rectifiant: engendré par $T(0)$ et $B(0)$.
3. Plan normal: engendrée par $N(0)$ et $B(0)$

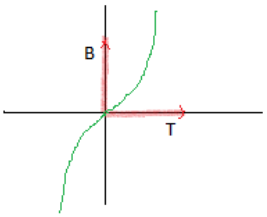


On remarque que les projections de α sur ces plans sont:

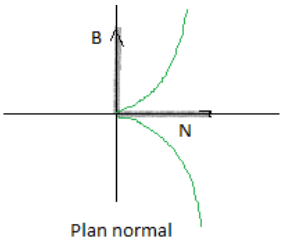
1. Sur le plan osculateur: $\left(u, \frac{\kappa_0}{2}u^2 + ...\right)$.
2. Sur le plan rectifiant: $\left(u, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}u^3 + ...\right)$.
3. Sur le plan normal: $\left(u^2, \frac{\sqrt{2}}{3}.\frac{\tau_0}{\kappa_0}u^3 + ...\right)$.



Plan osculateur



Plan réctifiant



Plan normal

I.5 Énoncés des exercices

Exercice I.1.

1. *Déterminer une équation cartésienne de la courbe paramétrée* $\alpha \to \alpha(t) = \left(\frac{t}{1-t^4}, \frac{t^3}{1-t^4}\right)$.
2. *Paramétriser le graphe* $y = f(x), \quad a \leq x \leq b$, *et montrer que sa longueur est donnée par*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

.

Exercice I.2. *Calculer les longueurs des courbes suivantes :*

1. $\alpha(t) = (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.
2. $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi]$.
3. $\alpha(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), t \in [0, 2\pi]$.
4. $\alpha(t) = (t, t^2), \quad t \in [-1, 1]$.

Exercice I.3. *Considérer la courbe* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\alpha(t) = (a\exp(-bt)\cos(t), a\exp(-bt)\sin(t)) \quad \text{où } a, b > 0$$

1. *Donner une limite de* $\alpha(t)$ *et* $\alpha'(t)$ *quand* t *tend vers* $+\infty$.
2. *Montrer que* α *a une longueur finie sur* $[0, +\infty[$.

Exercice I.4. *Considérer la courbe* $\alpha(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$. *Soit* β *sa projection orthogonale sur le plan d'équation* $z = 0$ *définie par :* $\beta(t) = (t, t^2, 0)$ *pour* t *parcourant* $[0, 1]$.

1. *Donner une expression intégrale pour la longueur de* β *puis celle de* α, *puis les comparer.*
2. *Calculer la longueur de* β *puis celle de* α.

Exercice I.5. *On considère la courbe* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $\gamma(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3\right)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

1. *Trouver deux équations cartésiennes (en* x, y *et* z*) qui décrivent le support de* γ.
2. *Déterminer les points réguliers de* γ.
3. *Calculer la longueur de* γ *entre* $\gamma(0)$ *et* $\gamma(10)$.

Exercice I.6. *Déterminer une abscisse curviligne pour chacune des courbes suivantes :*

1. $\alpha(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2\cosh t)$.
2. $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.
3. $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$.

Exercice I.7. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée avec $\alpha(a) = P$ et $\alpha(b) = Q$. Posons $v = Q - P$. Montrer que la longueur de α vérifie:*

$$l(\alpha) \geq \|v\|$$

C'est-à-dire le segment PQ est le plus court chemin joignant P et Q.

Exercice I.8. *Montrer que la courbure de la courbe plane $y = f(x)$ est donnée par*

$$\kappa = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice I.9. *Calculer les éléments de Fresnet (T, κ, N, B, τ) des courbes suivantes:*

1. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right), t \in]-1,1[$
2. $\alpha(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)$.

Exercice I.10. *On considère la courbe paramétrée $\beta :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du, e^{-t}\right)$$

1. *La courbe β est-elle paramétrée par longueur d'arc?*
2. *Soit C_p la droite tangente à la courbe β au point $p = \beta(t)$, on note q l'intersection de C_p avec l'axe (ox). Prouver que, pour tout $t > 0$, la distance entre p et q vaut un.*
3. *Calculer la courbure de β en chaque point.*

Exercice I.11. *Soit γ la courbe paramétrée définie par*

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \frac{(1+ch^2u)\cos u}{ch^2u}du, \int_0^t \frac{(1+ch^2u)\sin u}{ch^2u}du, \int_0^t \frac{(1+ch^2u)\,shu}{ch^2u}du\right)$$

1. *Déterminer, en un point de γ, le repère de Frenet.*
2. *Calculer la courbure κ et la torsion τ en un point $\gamma(t)$.*
3. *Vérifier que la fonction $\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$ est constante.*

Exercice I.12.

Montrer que si $\kappa = \kappa_0$ et $\tau = \tau_0$ sont deux constantes non nulles alors la courbe est l'hélice circulaire.

Chapitre II

Les surfaces paramétrées

L'étude des surfaces paramétrées est une généralisation de celle des arcs paramétrées. Nous nous intéressons ici aux propriétés affines des surfaces paramétrées et nous introduisons la notion de surface géométrique.

II.1 Rappel sur les différentielles

On rappelle dans cette partie les notions différentielles utiles pour les surfaces.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ (ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$).

Définition II.1.
Une fonction

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto f(u,v) \end{aligned}$$

est dite de classe C^1 si f et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ existent et sont continues.

Définition II.2. *La fonction f est dite de classe C^k si les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et soient continues.*

f est dite de classe C^∞ si f est de classe $C^k, \forall k$.

Si f est de classe C^2, alors: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

Notations: On note par:

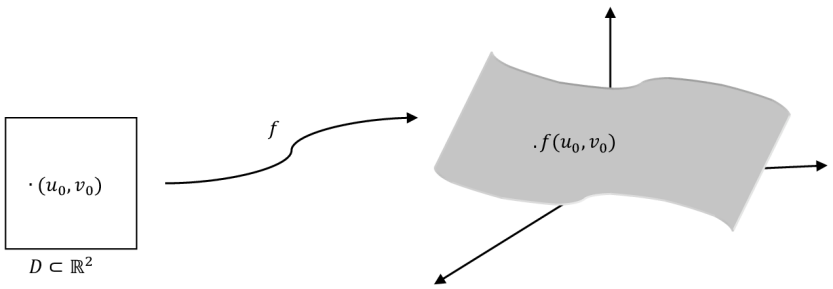
$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v}, f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, f_{vu} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.$$

II.2 Représentation paramétrique des surfaces régulières

Définition II.3. (Surfaces paramétrées)
Une représentation paramétrique de classe C^k d'un sous ensemble des points M dans $\mathbb{R}^3$ est une application de classe C^k:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto f(u, v)$$

L'image $M = f(D) = \{f(u, v), u, v \in D\}$ est appelée la surface géométrique ou le support géométrique de la surface paramétrée.
(une surface de classe C^∞ est dite lisse)



Exemple II.4. *La sphère $S^2(0, a)$ est définie par l'application*

$$f : [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(v, u) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$$

II.2.1 Reparamétrisation

On peut reparamétrer les surfaces paramétrées par les difféomorphismes.
Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^1 et $g : X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D$ un C^1 difféomorphisme. Alors: $f \circ g : X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique de f.
On dit que $f \circ g$ est une nouvelle paramétrisation de la surface.

Définition II.5. *On dit qu'une surface paramétrée est simple si et seulement si l'application f est injective.*

Définition II.6. *On dit qu'une surface paramétrée est cartésienne si et seulement si, il existe un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ tel que l'on ait:*

$$\forall (u, v) \in D : f(u, v) = O + u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + h(u, v)\overrightarrow{k}$$

Définition II.7. *Soit $f : (u, v) \longmapsto f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$. La matrice jacobienne de la surface est la fonction matricielle*

$$J : (u, v) \longmapsto J(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Définition II.8. *Une surface paramétrée: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite régulière au point $p = f(u, v)$ si et seulement si la matrice jacobienne est de rang 2. Ce-ci est équivalent à:*

$$f_u \wedge f_v \neq 0, \quad \forall u, v \in D$$

Définition II.9. *Un sous ensemble M de $\mathbb{R}^3$ connexe est appelé une surface si chaque point de M admet un voisinage qui soit régulièrement paramétré.*

II.2.2 Exemples

1) Le graphe d'une fonction de classe C^2

$$\begin{array}{c} g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto g(u, v) \end{array}$$

définie par:

$$G_g = \big\{(u, v, g(u, v)) \in \mathbb{R}^3, u, v \in D\big\}$$

La paramétrisation $f(u, v) = (u, v, g(u, v))$ de G_g est régulière. En effet:

$$f_u = (1, 0, g_u),\ f_v = (0, 1, g_v) \text{ et } f_u \wedge f_v = (-g_u, -g_v, 1) \neq 0 \ \ \forall u, v \in D$$

2) La représentation paramétrique:

$$f(u, v) = (u + v, u - v, u^2 + v^2)$$

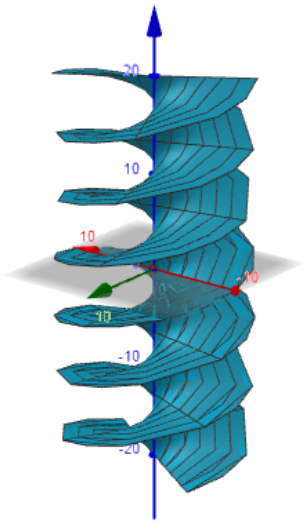
est régulière: $f_u = (1, 1, 2u), \quad f_v = (1, -1, 2v)$ et

$$f_u \wedge f_v = (2v + 2u, 2u - 2v, -2) \neq 0 \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

3) L'hélicoïde:

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv) \ \ u \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}, b > 0$$

On a: $f_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$ et $f_u \wedge f_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \neq 0$

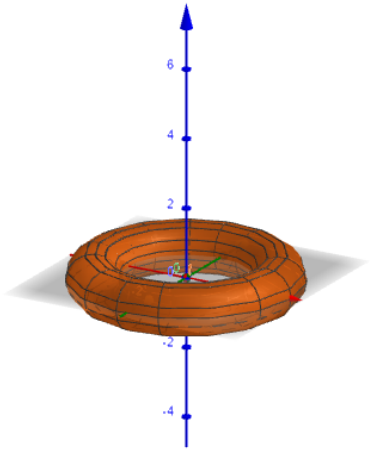


4) Le tore:

$$f(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

$0 \leq u, v < 2\pi, R > r > 0$, On a:

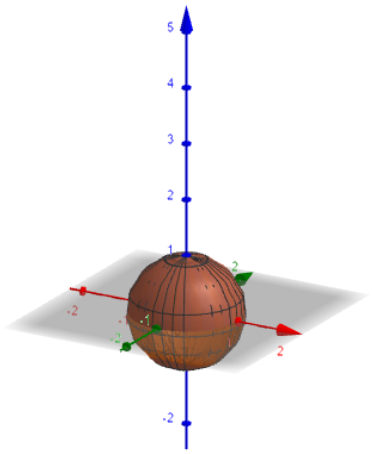
$$f_u \wedge f_v = -r(R + r \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \neq 0, \forall u, v$$



5) La sphère unité:

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), (u,v) \in]0,\pi[\times]0,2\pi[$$

On a: $f_u \wedge f_v = (\sin u) f(u,v) \neq 0, \forall u, v$



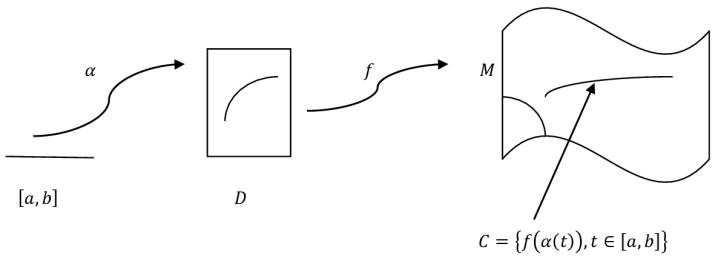
II.3 Plan tangent à une surface régulière

II.3.1 Courbe tracée sur une surface de $\mathbb{R}^3$

Soit $f(u,v)$ une représentation paramétrique d'une surface M de classe C^1. Soit

$$\begin{array}{c} \alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \alpha(t) = (u(t), v(t)) \end{array}$$

une courbe paramétrée régulière plane de classe C^1. Considérons l'image de cette courbe dans la surface M. Alors l'application $f \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée de classe C^1, dont le support est inclus dans le support: $M = f(D)$.



Considérons la courbe $\alpha_1 : u \in I \longmapsto \alpha_1(u) = f(u, v_0)$. Si α_1 est régulière, alors le vecteur $\alpha_1'(u_0)$ est tangent à la courbe α_1 au point $\alpha_1(u_0)$.

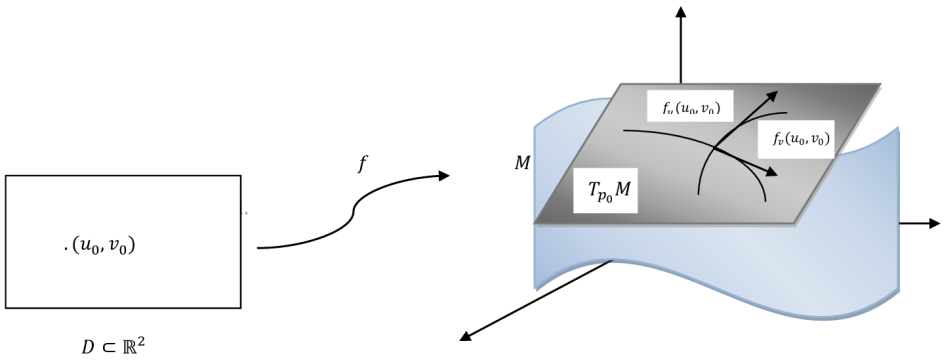
De même si la courbe: $\alpha_2 : v \in J \longmapsto \alpha_2(v) = f(u_0, v)$ est régulière, alors le vecteur $\alpha_2'(v_0)$ est tangent à la courbe α_2 au point $\alpha_2(v_0)$. Où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que: $(u_0, v_0) \in I \times J \subset D$. Et

$$\alpha_1'(u_0) = f_u(u_0, v_0), \alpha_2'(v_0) = f_v(u_0, v_0)$$

Et comme $f_u \wedge f_v \neq 0$ par hypothèse, alors les vecteurs f_u et f_v sont linéairement indépendants et ils engendrent un plan.

II.3.2 Plan tangent à une surface

Définition II.10.
Le plan tangent à une surface paramétrée $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ au point $p_0 = f(u_0, v_0)$ est l'espace vectoriel de dimension 2, noté $T_{p_0}M$, passant par le point régulier p_0 est engendré par les vecteurs $f_u(u_0, v_0)$ et $f_v(u_0, v_0)$.



Définition II.11. *Soit $T_{p_0}M$ le plan tangent passant par le point p_0, le vecteur $N = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ s'appelle le vecteur unitaire normal.*

Exemple II.12. *L'hélicoïde:*

$$f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, bv) \quad u \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}, b > 0$$

On a: $f_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = (-u\sin v, u\cos v, b)$, $f_u \wedge f_v = (b\sin v, -b\cos v, u) \neq 0$ *et* $\|f_u \wedge f_v\| = \sqrt{b^2 + u^2} \neq 0$, *d'où:*

$$N = \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b\sin v, -b\cos v, u)$$

II.3.3 Équation du plan tangent

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathbb{R}^3$ dans lequel $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ s'écrit:

$$(u,v) \longmapsto f(u,v) = f_1(u,v)\overrightarrow{i} + f_2(u,v)\overrightarrow{j} + f_3(u,v)\overrightarrow{k}$$

$p_0 = f(u_0, v_0)$ étant un point régulier de la surface M.

Le plan tangent $T_{p_0}M$ est l'ensemble des points $m = (x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que le système $(\overrightarrow{p_0m}, f_u(u_0,v_0), f_v(u_0,v_0))$ soit lié, Une façon d'exprimer cela est de dire que le déterminant de ces trois vecteurs est nul. Nous obtenons l'équation cartésienne du Plan tangent:

$$\begin{vmatrix} x - f_1(u_0,v_0) & f_{1,u}(u_0,v_0) & f_{1,v}(u_0,v_0) \\ y - f_2(u_0,v_0) & f_{2,u}(u_0,v_0) & f_{2,v}(u_0,v_0) \\ z - f_3(u_0,v_0) & f_{3,u}(u_0,v_0) & f_{3,v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0$$

c-à-d: $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{p_0m} = af_u + bf_v$.

Exemple II.13.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que:

$$f(u,v) = (5u - 3v^2 + 3, -u + v^2, 3u + 4v^2)$$

L'équation de l'espace tangent à M au point $p_0 = f(0,0) = (3,0,0)$.
On a: $f_u = (5,-1,3), f_v = (-6v, 2v, 8v)$.
Soit $m = (x,y,z) \in T_{p_0}M$, $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{p_0m} = af_u + bf_v = (5a, -a, 3a) + (-6bv, 2bv, 8bv)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 3 &= 5a - 6bv \\ y &= -a + 2bv \\ z &= 3a + 8bv \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= 5a - 6bv + 3 \\ y &= -a + 2bv \\ z &= 3a + 8bv \end{cases} \quad \textit{L'équation paramétrique}$$

l'équation cartésienne au point $p_0 = f(0,0)$:

$$\begin{cases} x &= 5a + 3 \\ y &= -a \\ z &= 3a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= -5y + 3 \\ a &= -y \\ z &= -3y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x - z = -2y + 3$$

$$\Longrightarrow \boxed{x+2y-z-3=0}$$

II.4 Les deux formes fondamentales

II.4.1 Première forme fondamentale

Soit $f : (u, v) \longmapsto f(u, v)$ une surface régulière de classe $C^k, k \geq 2$.

Définition II.14. *On appelle la différentielle de $f(u, v)$, noté df, une application bijective du vecteur (du, dv) associe le vecteur: $df = f_u du + f_v dv$ dans le plan tangent.*

Pour mieux comprendre la notion de la forme fondamentale, nous allons d'abord lui donner une forme plus simple en utilisant les propriétés des formes quadratiques du plan euclidien. Commençons par en rappeler la définition.

Définition II.15. *Une forme quadratique du plan est une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme*

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

Une forme quadratique est dite définie positive si $Q(x, y) > 0$ dès que $(x, y) \neq (0, 0)$.

Définition II.16. *La première forme fondamentale I_p (une forme bilinéaire symétrique) est la restriction de la forme quadratique $X \longmapsto \|X\|^2$ au plan tangent à M au point $p = f(u, v)$:*

$$\forall V, W \in T_pM : I_p(V, W) = V.W$$

où $V.W$ est le produit scalaire des vecteurs V, W dans $\mathbb{R}^3$.

Le plan vectoriel tangent à M est engendré par les deux vecteurs f_u et f_v. Un vecteur du plan tangent est donc de la forme $V = \lambda f_u + \mu f_v$ est on a:

$$I_p(V, V) = \lambda^2 \|f_u\|^2 + 2\lambda\mu f_u.f_v + \mu^2 \|f_v\|^2$$

Elle s'exprime dans la base $\{f_u, f_v\}$ de T_pM par:

$$\begin{aligned} I_p(df, df) = df.df &= (f_u du + f_v dv) \,.\, (f_u du + f_v dv) \\ &= f_u.f_u du^2 + 2 f_u.f_v du.dv + f_v.f_v dv^2 \\ &= E du^2 + 2F du.dv + G dv^2 \end{aligned}$$

En désignant par: $E = f_u.f_u$, $F = f_u.f_v$ et $G = f_u.f_v$ des applications de classe C^{k-1} de D dans $\mathbb{R}$.

Les coefficients E, F et G s'appellent coefficients de la première forme fondamentale.

Théorème II.17. *La forme I_p est une forme définie positive.*

Preuve.

$$\begin{aligned} I_p = df.df &= E du^2 + 2F du.dv + G dv^2 \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E du + F dv \\ F du + G dv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors la forme I_p est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Pour qu'elle soit définie positive il faut et il suffit que:

$$E > 0 \text{ et } EG - F^2 > 0$$

On a bien: $E = |f_u|^2 > 0$ et

$$EG - F^2 = (f_u.f_u)(f_v.f_v) - (f_u.f_v)^2 = (f_u \wedge f_v)^2 > 0$$

(On utilisera la formule : $(a \wedge b).(c \wedge d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$).

Exemple II.18. *Considérons la surface définie par:*

$$f(u,v) = (u+v, u-v, uv) : f_u(u,v) = (1,1,v) \quad et\ f_v(u,v) = (1,-1,u)$$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont:

$$E = f_u.f_u = 2+v^2, G = f_v.f_v = 2+u^2 \quad et\ F = f_u.f_v = uv$$

D'où

$$I_p = (2+v^2)du^2 + 2uvdu.dv + (2+u^2)dv^2$$

Cette forme est définie positive, car

$$E = 2+v^2 > 0\ et\ EG - F^2 = 2u^2 + 2v^2 + 4 > 0$$

II.4.2 Longueur et Aire

longueur d'un arc tracé sur une surface

Prenons une surface paramétrée: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$ une courbe paramétrée plane. Alors $f \circ \alpha = \gamma$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans $f(D)$.

$$\alpha : t \longmapsto (u(t), v(t)) \longmapsto f(u(t), v(t)) = \gamma(t)$$

Le vecteur tangent à γ en $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ est $\gamma'(t) = f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)$.

γ est ainsi rectifiable, sa longueur est donnée par:

$$L(\gamma(t)) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)\|dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2\|f_u(u(t), v(t))\|^2 + (v'(t))^2\|f_v(u(t), v(t))\|^2 + 2u'(t)v'(t)f_u.f_v\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2 E(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 G(u(t), v(t)) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2 E(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 G(u(t), v(t)) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

Donc

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{I_p(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$$

l'aire d'une surface

La norme du produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ c-à-d: $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \,|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$.

Considérons $\triangle\ s = du.dv$ un élément de surface encadrée par du et dv du point (u,v). Soit ΔS, l'image de $\triangle\ s$ par f:

$$\Delta S = |df \wedge df| = |f_u \wedge f_v|\, dudv = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Définition II.19. *L'aire de la surface paramétrée $M = f(D)$ où $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est égale à*

$$Aire(M) = \iint_D \sqrt{FG - F^2}dudv$$

D est le domaine de la paramétrisation.

Exemple II.20. *Soit M la surface d'un tore*

$$f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

$0 \leq u, v < 2\pi, R > r > 0$, *On a:*

$$f_u(u,v) = -r(\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u), f_v(u,v) = (R + r\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)$$

Ainsi

$$E = f_u.f_u = r^2, \quad F = f_u.f_v = 0, \quad G = f_v.f_v = (R + r\cos u)^2.$$

L'aire de cette surface est donc

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (r(R + r\cos u))dudv$$

$$= \int_0^{2\pi} [r(Ru + r\sin u)]_0^{2\pi}\, dv = r\int_0^{2\pi} 2R\pi dv = 2Rr\pi[v]_0^{2\pi} = 4\pi^2 rR.$$

II.4.3 Application de Gauss

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface régulière en tout point et $N(u,v) = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ le vecteur normal unitaire au point $p = f(u,v)$ de M.

Soit $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

L'application $N : M \longrightarrow S^2$ qui associe à chaque point $p = f(u,v)$, le vecteur unitaire normal en $f(u,v)$ est appelée application de Gauss de la surface:

$$N : p \in M \longmapsto N(p) \in S^2$$

On montre qu'elle est de classe C^∞ . Sa différentielle d_pN est une application linéaire de T_pM dans $T_{N(p)}S^2$.

II.4.4 Dérivée directionnelle

Soit $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelle, p un point de M et V un vecteur tangent à M au point p ($V \in T_pM$).

On donne $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ une courbe de classe C^1 telle que $\beta(0) = p$ et $\beta'(0) = V$. Alors:

$$\begin{array}{c} F \circ \beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (F \circ \beta)(t) \end{array}$$

Définition II.21. $(F \circ \beta)'(t)$ *est appelée la dérivée directionnelle de la fonction F dans la direction du vecteur V.*

$$D_V F(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F \circ \beta)(t) = \lim_{s \mapsto 0} \frac{F(t + sV) - F(t)}{s}$$

II.4.5 Opérateur de forme

Soit M une surface régulière paramétrée par $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et V un vecteur tangent à M au point $p \in M$: $V = af_u + bf_v$.
Soit $N(p)$ le vecteur unitaire normal à M au point p : c-à-d : $\forall\ V \in T_pM : V.N(p) = 0$.

Soit maintenant $\alpha : I \longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'origine) et telle que:

$$\alpha(0) = p \text{ et } \alpha'(0) = V \ (\alpha'(t) = u'(t)f_u(u(t), v(t)) + v'(t)f_v(u(t) + v(t))).$$

Comme $(N \circ \alpha)(t).T(t) = 0 \quad \forall t$ proche de 0, où T le vecteur tangent à α. Alors $T'(t).(N \circ \alpha)(t) = -(N \circ \alpha)'(t).T(t)$

Au point $t = 0$, on a :

$$-T(0).(N \circ \alpha)'(0) = T'(0).N(\alpha(0)) = T'(0).N(p)$$

c-à-d

$$-D_V N(p).V = T'(0).N(p)$$

$(T(0) = \alpha'(0) = V)$.

Proposition II.22.
Pour tout $V \in T_pM$, la dérivée directionnelle $D_V N(p)$ appartient à T_pM.

De plus, l'application définie par

$$S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

$$V \mapsto S_p(V) = -D_V N(p)$$

est une application linéaire auto-adjointe. C-à-d :

$$\forall\ U, V \in T_p(M) : S_p(U).V = U.S_p(V)$$

S_p est appelé l'opérateur de forme de la surface M.

Preuve.
1) *Montrons que $D_V N(p) \in T_pM$.*
Soit $\alpha : I =]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc avec $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = V$. On a :

$$\|(N \circ \alpha)(t)\| = 1 \implies (N \circ \alpha)'(t).(N \circ \alpha)(t) = 0$$

Donc en $t = 0$: $\dfrac{d}{dt}N(\alpha(t))\Big|_{t=0}.N(\alpha(0)) = 0$. C-à-d: $D_V N(p).N(p) = 0$. Ce qui montre que $D_V N(p)$ est orthogonal à $N(p)$, ainsi $D_V N(p) \in T_pM$.

2) *Montrons la linéarité de $V \mapsto D_V N$.*

On considère la courbe α passant par p et telle que $\alpha'(0) = V + W$.

d'après la définition :

$$D_{V+W}N(p) = \frac{d}{dt}N(\alpha(t))\Big|_{t=0}.(V + W)$$

$$= \frac{d}{dt}N(\alpha(t))\Big|_{t=0}.V + \frac{d}{dt}N(\alpha(t))\Big|_{t=0}.W$$

$$= D_V N(p) + D_W N(p)$$

3)*Montrons que S_p est symétrique:*

Considérons $(f_u, f_v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)(p)$ *une base du plan tangent* T_pM *où* $f(u,v)$ *est la paramétrisation de la surface* M.

a) *Montrons que* $S_p(f_u).f_v = S_p(f_v).f_u$, *c-à-d:* $D_{f_u}N(p).f_v = D_{f_v}N(p).f_u$

Soit $t \mapsto \alpha(t) = f(u(t), v(t))$ *une courbe tracée sur* M *telle que* $\alpha(0) = p$. *On a*

$$D_{\alpha'(0)}N(p) = D_{u'(0)f_u + v'(0)f_v}N(p) = u'(0)D_{f_u}N(p) + v'(0)D_{f_v}N(p)$$

D'autre part:

$$\frac{d}{dt}N(u(t), v(t))\bigg|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0)$$

Et comme $D_{\alpha'(0)}N(p) = \dfrac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0}$. *Alors*

$$D_{f_u}N(p) = N_u \text{ et } D_{f_v}N(p) = N_v$$

Par ailleurs, comme N *est perpendiculaire au plan* T_pM, *alors* $N.f_u = N.f_v = 0$. *En dérivant respectivement par rapport à* v *et* u *on aura:* $N_v.f_u + N.f_{vu} = 0$ *et* $N_u.f_v + N.f_{vu} = 0$. *Ainsi* $N_v.f_u = -N.f_{uv} = N_u.f_v$

On en déduit

$$S_p(f_u).f_v = -(D_{f_u}N(p)).f_v = -N_u.f_v = -N_v.f_u$$
$$= (-D_{f_v}N(p)).f_u = S_p(f_v).f_u$$

b) *Prenons maintenant,* V, W *deux vecteurs quelconques dans* T_pM. *Montrons que:*

$$S_p(V).W = S_p(W).V$$

V *et* W *sont deux combinaisons linéaires de* f_u *et* f_v, *c-à-d:*

$$V = af_u + bf_v \text{ et } W = cf_u + df_v$$

Alors

$$S_p(V).W = S_p(af_u + bf_v).(cf_u + df_v) = (aS_p(f_u) + bS_p(f_v)).(cf_u + df_v)$$
$$= acS_p(f_u).f_u + adS_p(f_u).f_v + bcS_p(f_v).f_u + bdS_p(f_v).f_v$$
$$= acS_p(f_u).f_u + adS_p(f_v).f_u + bcS_p(f_u).f_v + bdS_p(f_v).f_v$$
$$= af_u.(cS_p(f_u) + dS_p(f_v)) + bf_v.(cS_p(f_u) + dS_p(f_v))$$
$$= (af_u + bf_v).(cS_p(f_u) + dS_p(f_v)) = V.S_p(W)$$

Proposition II.23.
Si l'opérateur S_p *est partout nul, alors la surface* M *est un sous ensemble du plan.*

Preuve.

$$S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$U \mapsto S_p(U) = -D_U N_p$$

Si $\forall U \in T_pM : S_p(U) = 0$ *pour tout* $p \in M$. *Alors* $N_u = N_v = 0$ *donc* $N(p) = cste$ *et par suite* M *est un sous ensemble d'un plan.*

Exemple II.24.
Soit $S^2(0,a)$ la sphère centrée à l'origine de rayon a. $f(u,v)$ une paramétrisation de la sphère $S^2(0,a)$.

$$f(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\cos u), \quad 0 < v \leq 2\pi, 0 < u < \pi$$

$f_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u), \quad f_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$ *et*

$$f_u \wedge f_v = (a^2\cos v\sin^2 u, a^2\sin v\sin^2 u, a^2\cos u\sin u)$$

$$= a\sin u(a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\cos u) = a\sin u f(u,v)$$

le vecteur normal unitaire:

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{a\sin u f(u,v)}{a\,|\sin u|\,\|f(u,v)\|} = \frac{a\sin u}{a\sin u}.\frac{1}{a}.f(u,v) = \frac{1}{a}f(u,v)$$

L'application de Gauss est: $N_p = \dfrac{1}{a}f(u,v)$

Soit $\{f_u, f_v\}$ une base de T_pS^2 l'espace tangent à S^2 au point p

$$\forall p \in S^2 : S_p(f_u) = -D_{f_u}N = -N_u = -\frac{1}{a}f_u \text{ et } S_p(f_v) = -\frac{1}{a}f_v$$

et par suite $\forall V \in T_pS^2 : V = cf_u + df_v$, on a

$$S_p(V) = cS_p(f_u) + dS_p(f_v) = -\left(\frac{c}{a}f_u + \frac{d}{a}f_v\right) = -\frac{1}{a}V$$

Donc $\forall\, V \in T_pS^2 : S_p(V) = -\dfrac{1}{a}V = -\dfrac{1}{a}cf_u - \dfrac{1}{a}df_v.$

$$S_p(.) = -\frac{1}{a}Id_{T_pS^2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

.

II.4.6 Deuxième forme fondamentale

La deuxième forme fondamentale mesure en quelque sorte l'écart que fait une courbe tracée sur la surface avec la plan tangent au point $f(u_0(t), v_0(t))$.

On munit l'espace vectoriel T_pM du produit scalaire induit par celui de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera $\langle,\rangle_p$. La collection $\left\{\langle,\rangle_p\right\}_{p\in M}$ varie de façon différentiable en fonction de p; c'est précisément ce qu'on appelle la métrique riemannienne induite sur M. Le fait que S_p soit auto-adjoint nous permet de lui associer une forme quadratique définie comme $S_p(U).U$ pour $U \in T_pM$.

Définition II.25.
Soit p un point de la surface M. La forme bilinéaire symétrique $II_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall V, W \in T_pM : II_p(V,W) = S_p(V).W$$

est dite la deuxième forme fondamentale de la surface M en p.

Dans la base $\{f_u, f_v\}$ *de* T_pM, *on note par:*

$$l = II_p(f_u, f_u) = -(D_{f_u}N).f_u = f_{uu}.N$$

$$m = II_p(f_u, f_v) = -(D_{f_u}N).f_v = f_{uv}.N = f_{vu}.N$$

$$q = II_p(f_v, f_v) = -(D_{f_v}N).f_v = f_{vv}.N$$

De plus, si $V = af_u + bf_v$ *et* $W = cf_u + df_v$. *Alors*

$$II_p(V, W) = II_p(af_u + bf_v, cf_u + df_v)$$

$$= acII_p(f_u, f_u) + bdII_p(f_v, f_v) + bcII_p(f_v, f_u) + adII_p(f_u, f_v)$$

$$= acl + (ad + bc) + bdq = (a \quad b)\begin{pmatrix} lc + dm \\ cm + dq \end{pmatrix}$$

$$= (a \quad b)\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}_{(f_u, f_v)}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

D'où la matrice associée à II_p : $\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}$.

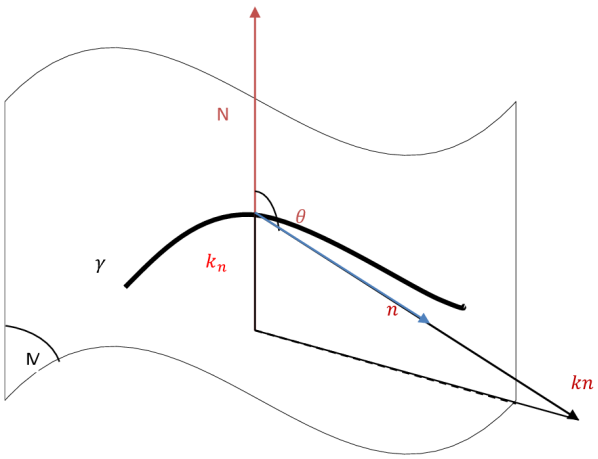
l, m *et* q *sont appelés les coefficients de la deuxième forme fondamentale.*

II.4.7 Courbure normale

Soit M une surface de classe C^k $(k \geq 2)$ paramétrée par $f(u, v)$ contenant le point $p = f(u_0, v_0)$. Soit T_pM le plan tangent à la surface M au point p et N la normale unitaire à T_pM au point p.

Considérons la courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ paramétrée par la longueur de l'arc (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'origine) donné par: $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ et $p = \gamma(0)$. La courbure de γ au point p est: $\kappa = \|T'(t)\|$.

Notons n et N les vecteurs normaux en p respectivement à la courbe γ et à la surface M, θ l'angle entre n et N.



Définition II.26.
On appelle courbure normale de γ en p le scalaire:

$$\kappa_n = \kappa.N = \kappa(\cos\theta).n$$

On montre en fait que: $\kappa_n(p) = II_p(\gamma'(0))$.
On a

$$II_p(\gamma'(0)) = S_p(\gamma'(0)).\gamma'(0)$$
$$= -D_{\gamma'(0)}N(p).\gamma'(0) = -(N\circ\gamma)'(0).\gamma'(0)$$

Comme $N(t)$ est orthogonal à $\gamma'(t)$, la relation $N(t).\gamma'(t) = 0$ implique que:

$$N'(t).\gamma'(t) = -N(t).\gamma''(t)$$

Par conséquent

$$II_p(\gamma'(0)) = N(0).\gamma''(0) = N(0).T'(0) = N(0).\kappa$$

On obtient : $II_p(\gamma'(0)) = \kappa_n(p)$.

Exemple II.27.
Pour une sphère S^2 de rayon a , dans les coordonnées sphériques :

$$f(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\cos u), \quad 0 < v \leq 2\pi, 0 < u < \pi$$

$f_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u)$, $f_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$ *et* $N = \frac{1}{a}f(u,v)$.

A chaque point p sur cette sphère on peut faire passer un cercle de rayon a, considéré comme l'équateur de S^2. Au point p les vecteurs n et N coïncident, donc la courbure du cercle $\kappa = \frac{1}{a}$ est égale à la courbure normale de la surface κ_n. Ou encore, comme $\theta = 0$, alors $\cos\theta = 1$ et $\kappa_n = \kappa.N = \frac{1}{a^2}f(u,v)$. D'où $|\kappa_n| = \frac{1}{a^2}.a = \frac{1}{a}$.

II.4.8 Courbures principales de la surface

Nous avons vu qu'à chaque plan contenant la normale à une surface est associé une courbure normale. Pour rendre compte du phénomène de courbure dans son intégralité, il faut prendre en compte toutes ces courbures normales et la façon dont elles varient.

Nous allons introduire la courbure de Gauss et la courbure moyenne. Nous commençons par citer un résultat assez connu d'algèbre linéaire concernant les opérateurs auto-adjoints.

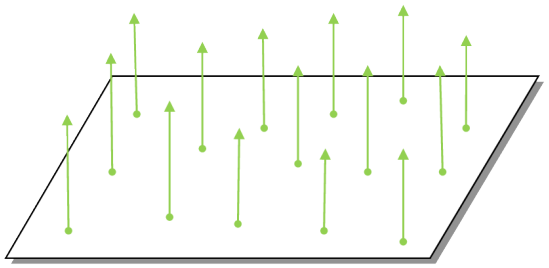
Théorème II.28. *Soit $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un opérateur auto-adjoint. Alors il existe une base de vecteurs orthogonaux $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $A(e_2) = \lambda_2 e_2$. Les valeurs λ_1 et λ_2 sont le maximum et le minimum respectivement des valeurs de la forme quadratique $X.AX$ pour X dans la cercle unité.*

Le théorème implique qu'il existe donc une base $\{e_1(p), e_2(p)\}$ de T_pM dans laquelle $S_p(e_1) = -DN_p(e_1) = \kappa_1 e_1$ et $S_p(e_2) = -DN_p(e_2) = \kappa_2 e_2$. De plus $\kappa_1 \geq \kappa_2$ sont les valeurs maximum et minimum de la deuxième forme fondamentale restreinte au cercle unité de T_pM. Cette à dire il s'agit des valeurs extrémaux de la courbure normale au point p.

Définition II.29. *La courbure normale maximale κ_1 et la courbure normale minimale κ_2 (les valeurs propres κ_1 et κ_2) sont appelées courbures principales de M au point p. Les directions des vecteurs e_1 et e_2 sont appelées directions principales de M au point p.*
On dit qu'une courbe tracée sur M est une ligne de courbure si ses vecteurs tangents sont tous des directions principales.

Définition II.30. *Le déterminant K de l'opérateur S_p: $K = \kappa_1\kappa_2$ est appelée courbure de Gauss de M en p. La moitié H de la trace de S_p: $H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ est appelée courbure moyenne de M en p.*

Exemple II.31.
1) *Dans la cas d'un plan affine l'application de Gauss est constante, donc de dérivée nulle, ainsi $\kappa_1 = \kappa_2 = K = H = 0$*



2) *Dans le cas de la sphère S^2: On rappelle que la sphère S^2 est définie par l'équation:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Et donc le champ de vecteur normal est donné au point $p = (x, y, z)$ sur la courbe γ tracée sur S^2 par $N(p) = (-x(t), -y(t), -z(t))$. Par suite: $DN(p) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t))$.
Donc $D_V N(p) = -V$ pour tout $V \in T_pS^2$
(On a déjà montrer que $S_p = -DN = -Id_{T_ps^2}$, donc $-\kappa_1 = -\kappa_2 = -H = K = 1$).

II.4.9 Calculs explicites de K en fonction des deux formes fondamentales

Soient l, m et q les coefficients de la seconde forme fondamentale dans la base $\{f_u, f_v\}$:

$$l = f_{uu}.N, \quad m = f_{uv}.N, \quad q = f_{vv}.N$$

Notons $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de l'opérateur S_p relativement à la base $\{f_u, f_v\}$. C-à-d

$$S_p(f_u) = af_u + bf_v, \quad S_p(f_v) = cf_u + df_v$$

.

En faisant le produit scalaire de ces deux égalités par f_u puis f_v, on obtient quatre égalités:

$$S_p(f_u).f_u = af_u.f_u + bf_v.f_u = l = aE + bF$$
$$S_p(f_u).f_v = af_u.f_v + bf_v.f_v = m = aF + bG$$
$$S_p(f_v).f_u = cf_u.f_u + df_v.f_u = m = cE + dF$$
$$S_p(f_v).f_v = cf_u.f_v + df_v.f_v = q = cF + dG$$

Ces égalités peuvent s'écrire matriciellement sous la forme:

$$\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = I_p^{-1}.II_p$$

La courbure de Gauss est le $\det S_p$:

$$K = \det(I_p^{-1}.II_p) = \frac{1}{\det I_p}.\det II_p = \frac{lq - m^2}{EG - F^2}$$

La courbure moyenne $H = \frac{1}{2} trace S_p$, or

$$S_p = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - Fm & Gm - Fq \\ Em - Fl & Eq - Fm \end{pmatrix}$$

D'où $H = \dfrac{Gl - 2Fm + Eq}{2(EG - F^2)}$.

Remarque 6.
Il est facile de calculer les courbures principales qui sont racines du polynôme $X^2 - 2HX + K$. *On trouve* $\kappa_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$, *et on a bien* $H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 > 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = H \\ \kappa_1.\kappa_2 = K \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 2H - \kappa_2 \\ 2\kappa_2 H - \kappa_2^2 = K \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \kappa_2^2 - 2H\kappa_2 + K = 0 \\ \kappa_1^2 - 2H\kappa_1 + K = 0 \end{cases}$$

On définie ainsi le polynôme $X^2 - 2HX + K = 0$.

Exemple II.32. *Surface d'Enneper*
Soit $f(u,v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\right)$ *la paramétrisation de la surface d'Enneper.*

1. *Déterminons le vecteur unitaire normal en chaque point: Soit* $p = f(u,v)$ *un point de la surface, le plan tangent au point p est engendré par* $\{f_u, f_v\}$ *où* $f_u = (1-(u^2-v^2), 2uv, 2u)$ *et* $f_v = (2uv, 1 + (u^2 - v^2), -2v)$ *donc*

$$f_u \wedge f_v = (1 + u^2 + v^2)(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2)$$

de norme $\|f_u \wedge f_v\| = (1 + u^2 + v^2)^2$.
On obtient, le vecteur normal

$$N(u,v) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}\left(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2\right)$$

2. *Calculons, en un point p de la surface, la deuxième forme fondamentale:*

   La deuxième forme fondamentale II_p est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}$.

   Où $l = \left\langle N, \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right\rangle$, $m = \left\langle N, \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right\rangle$ *et* $q = \left\langle N, \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right\rangle$

   On calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = (-2u, 2v, 2)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = (2v, 2u, 0)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (2u, -2v, -2)$$

   Or $N = \dfrac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2)$, *donc* $l = 2$, $m = 0$ *et* $q = -2$ *c-à-d*

$$II_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. *Montrons que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point*

   Rappelons Les dérivées premières du paramétrage:

$$f_u = (1-(u^2-v^2), 2uv, 2u) \text{ et } f_v = (2uv, 1+(u^2-v^2), -2v)$$

   D'où l'on tire les coefficients de la première forme fondamentale I_p:

$$E = \langle f_u, f_u \rangle = \left(1+u^2+v^2\right)^2\,,\ F = \langle f_u, f_v \rangle = 0,\ G = \langle f_v, f_v \rangle = \left(1+u^2+v^2\right)^2$$

   Et maintenant, l'opérateur de forme S_p a pour matrice $B = I_p^{-1} II_p$. Or

   $I_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$, *d'où*

$$B = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Par conséquent, les courbures principales sont:

$$\kappa_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \text{ et } \kappa_2 = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

   ce-ci implique que la courbure moyenne H est nulle $\left(H = -\dfrac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) = 0\right)$.

4. *Le calcul de la courbure de Gauss K est immédiat*

$$K = \det B = \frac{\det II_p}{\det I_p} = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}.$$

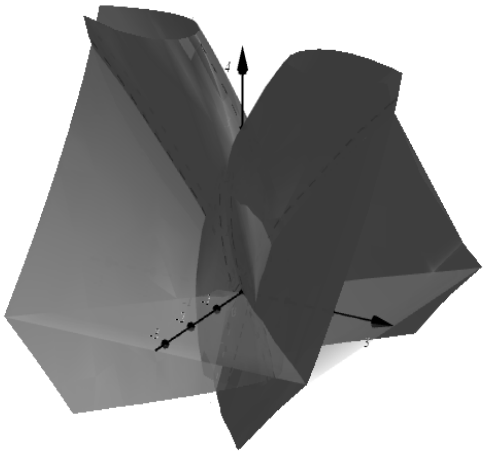


Figure II.1: Surface d'Enneper

Proposition II.33. *Soient e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires dans les directions principales en un point p de courbures principales correspondantes κ_1 et κ_2.*
Supposons que $V = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$, alors:

$$II_p(V,V) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

Preuve.
On a: $S_p(e_i) = \kappa_i e_i$ pour $i = 1, 2$. Alors:

$$II_p(V,V) = S_p(V).V = S_p((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2).((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2)$$

$$= (\kappa_1(\cos\theta)e_1 + \kappa_2(\sin\theta)e_2).((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

Cette expression pour la deuxième forme fondamentale s'appelle Formule d'Euler.

II.4.10 Interprétation géométrique

Fixons un point p de M.

Pour tout vecteur $V \in T_pM$, $II_p(V)$ est la courbure de la surface au point p dans la direction V. En particulier, κ_1 est la courbure de la surface M dans la direction e_1 et κ_2 est la courbure de la surface M dans la direction e_2.

Pour tout point de toute surface régulière de classe C^2, la direction dans laquelle la surface est la plus courbée et la direction dans laquelle la surface est la moins courbée sont orthogonales.

Il est clair que l'allure de la surface au voisinage du point p dépens du signe de κ_1 et de κ_2 :

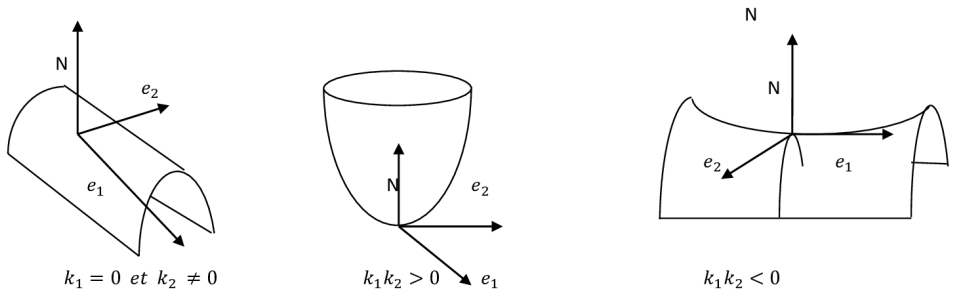
1) Si κ_1 et κ_2 ont une valeur commune κ ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$): c'est le cas où on peut représenter S_p et II_p par une matrice de la forme kId_2, c-à-d le cas où il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $II_p = kI_p$, égalité qui s'écrit: $(l = kE)$ et $(m = kF)$ et $(q = kG)$.

La surface représente localement une forme soit sphérique soit plane (cas de $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$).

2) Si $K = 0$ ($\kappa_1 = 0$ ou $\kappa_2 = 0$), p est un point parabolique (un cylindrique).

3) Si $K = \kappa_1\kappa_2 > 0$, p est un point elliptique .

4) Si $K = \kappa_1\kappa_2 < 0$, p est un point hyperbolique.



II.4.11 Étude d'un exemple: surface de révolution

Définition II.34.

Une surface géométrique orienté M de classe C^k $(k \geq 1)$, est dite surface de révolution si et seulement si, on peut lui associer un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$, tel que M admette un représentant de la forme $(I \times \mathbb{R}, f)$ avec:

$$f(u,v) = O + g(u)\cos v\,\overrightarrow{i} + g(u)\sin v\,\overrightarrow{j} + h(u)\,\overrightarrow{k}$$

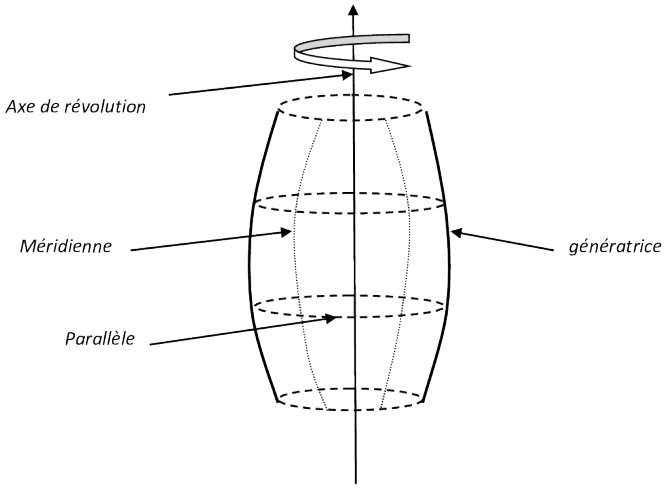
I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et où g et h sont des applications de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$, g ne prenant que des valeurs positives: $f(u,v) = (g(u)\cos v, g(u)\sin v, h(u))$.

Propriétés

La rotation d'une courbe appelée *génératrice* autour d'une droite fixe engendre une surface de révolution.

- Les sections d'une surfaces de révolution par des demi-plans bordé par l'axe de révolution, appelées *méridiennes*, en sont des génératrices particulières.
- Les sections d'une surfaces de révolution par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles appelés *parallèles* de la surface.

Illustration



Construction mathématique

1. On se donne une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c}\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \alpha(u) = (g(u), k(u), h(u))\end{array}$$

2. Engendrons *une surface de révolution* M par rotation de α autour de l'axe (Oz).

   - Rotation de $\alpha(u)$ d'un angle v autour de l'axe (Oz) (axe de révolution)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\tilde{g}(u)\\ \tilde{k}(u)\\ \tilde{h}(u)\end{pmatrix}}_{\tilde{\alpha}(u)} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{matrice } 3\times 3 \text{ de rotation } R_v} . \underbrace{\begin{pmatrix}g(u)\\ k(u)\\ h(u)\end{pmatrix}}_{\alpha(u)}$$

   - Équation paramétrique d'une surface de révolution: (cas général)

$$\begin{cases}\tilde{g}(u,v) = & g(u)\cos v - k(u)\sin v \\ \tilde{k}(u,v) = & g(u)\sin v + k(u)\cos v \\ \tilde{h}(u,v) = & h(u)\end{cases} \qquad u \in [a,b], v \in [0, 2\pi]$$

   - Si la courbe α est incluse dans le plan Oxz alors $k(u) = 0\ \forall u$: (cas particulier)

$$\begin{cases}\tilde{g}(u,v) = & g(u)\cos v \\ \tilde{k}(u,v) = & g(u)\sin v \\ \tilde{h}(u,v) = & h(u)\end{cases} \qquad u \in [a,b], v \in [0, 2\pi]$$

la régularité

On a

$$f_u(u,v) = (g'(u)\cos v, g'(u)\sin v, h'(u)) \text{ et } f_v(u,v) = g(u)(-\sin v, \cos v, 0)$$

D'où

$$f_u \wedge f_v = (-h'(u)g(u)\cos v, -h'(u)g(u)\sin v, g'(u)g(u))$$

de norme

$$\|f_u \wedge f_v\| = g(u)\sqrt{h'^2(u)+g'^2(u)},\ (g(u)>0, \forall u \in I)$$

Donc (g', h') ne prend pas la valeur $(0,0)$, et par suite la surface M est régulière ($\|f_u \wedge f_v\| > 0$). On déduit

$$N = \left(-\frac{h'(u)}{\sqrt{h'^2(u)+g'^2(u)}}\cos v, -\frac{h'(u)}{\sqrt{h'^2(u)+g'^2(u)}}\sin v, \frac{g'(u)}{\sqrt{h'^2(u)+g'^2(u)}} \right)$$

les formes fondamentales

On a

$$E = f_u.f_u = g'^2 + h'^2;\quad F = f_u.f_v = 0;\quad G = f_v.f_v = g^2$$

D'où la première forme fondamentale:

$$I_p = (f_u du + f_v dv).(f_u du + f_v dv) = (g'^2 + h'^2)du^2 + g^2 dv^2$$

On calcule en suite

$$f_{uu} = (g''(u)\cos v, g''(u)\sin v, h''(u)),\quad f_{uv} = (-g'(u)\sin v, g'(u)\cos v, 0),$$

$$f_{vv} = (-g(u)\cos v, -g(u)\sin v, 0)$$

d'où

$$\begin{cases} l = f_{uu}.N = \dfrac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{h'^2(u)+g'^2(u)}} \\ m = f_{uv}.N = 0 \\ q = f_{vv}.N = \dfrac{gh'}{\sqrt{g'^2+h'^2}} \end{cases}$$

et la seconde forme fondamentale

$$II_p = \sqrt{g'^2+h'^2}\left((g'h'' - g''h')du^2 + gh'dv^2\right)$$

Les courbures

Notons κ_u et κ_v les courbures principales de directions principales f_u et f_v. Un calcul simple donne

$$S_p(f_v) = -\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{h'}{\sqrt{g'^2+h'^2}}(-\sin v, \cos v, 0) = \frac{h'}{g\sqrt{g'^2+h'^2}}.f_v$$

et donc

$$\kappa_v = \frac{h'}{g\sqrt{g'^2+h'^2}}$$

La courbure de Gauss

$$K = \frac{lq - m^2}{EG - F^2} = \frac{lq}{EG} = \frac{gh'(g'h'' - g''h')}{g^2(g'^2+h'^2)^2}$$

$$= \frac{h'}{g\sqrt{g'^2+h'^2}}.\frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2+h'^2)^3}} = \kappa_v.\frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2+h'^2)^3}}$$

D'où

$$\kappa_u = \frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2+h'^2)^3}}$$

Finalement la courbure moyenne

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_u + \kappa_v) = \frac{1}{2}\left(\frac{h'}{\sqrt{g'^2+h'^2}} + \frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2+h'^2)^3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g'^2+h'^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(h'g'^2 + h'^3 + gg'h'' - gg''h'\right)$$

.

II.5 Équations de Codazzi et Gauss

II.5.1 Symboles de Christoffel

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface régulière. $p = f(u,v)$ un point de M.

Considérons la base $\{f_u, f_v, N_p\}$ de $\mathbb{R}^3$.Il existent des fonctions :

$$\Gamma^u_{uu},\ \Gamma^v_{uu},\ \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu},\ \ \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu},\ \ \Gamma^u_{vv}, \Gamma^v_{vv}$$

telles que:

$$f_{uu} = \Gamma^u_{uu} f_u + \Gamma^v_{uu} f_v + lN_p$$

$$f_{uv} = \Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN_p$$

$$f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + pN_p$$

Le fait que $f_{uv} = f_{vu}$ implique que $\Gamma^{\cdot}_{uv} = \Gamma^{\cdot}_{vu}$. Les fonctions $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ sont appelées symboles de Christoffel.

Exemple II.35.

Calculer les symboles de Christoffel de la sphère:

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u),\quad 0 < u < \pi,\quad 0 < v < 2\pi.$$

$f_u(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$ *et* $f_v(u,v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$.

Par suite $f_u \wedge f_v = \sin v.f(u,v)$ *et* $\|f_u \wedge f_v\| = \sin u$. *D'où* $N(p) = f(u,v)$.

On calcule en suite

$$f_{uu} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, cosu) = -f(u,v) = -N(p)$$

$$f_{vv} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0), f_{uv} = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

Calculons les $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$*: on a* $f_{uu} = -N(p)$*, donc* $\Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uu} = 0$.

D'autre part: $f_{uv} = (-\cot u \sin u \sin v, \cot u \sin u \cos v, 0) = (\cot u) f_v$. *Donc* $\Gamma^u_{uv} = 0$ *et* $\Gamma^v_{uv} = \cot u$.

Maintenant : $f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + qN(p)$. *En faisant le produit scalaire avec* f_u *puis* f_v*, on obtient*

$$f_{vv}.f_u = \Gamma^u_{vv} = -\sin u \cos u \implies \Gamma^u_{vv} = -\sin u \cos u$$

$$f_{vv}.f_v = \Gamma^v_{vv} = \sin^2 u \sin v \cos v - \sin^2 u \sin v \cos v = 0 \implies \Gamma^v_{vv} = 0$$

Conclusion:

$$\Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uu} = \Gamma^u_{uv} = \Gamma^v_{vv} = 0,\ \Gamma^v_{uv} = \cot u,\ \Gamma^u_{vv} = -\sin u \cos u.$$

II.5.2 Le calcul des symboles de Christoffel

$p = f(u,v)$ un point de la surface M ,$\{f_u, f_v\}$ une base de l'espace tangent T_pM au point p et $\{f_u, f_v, N(p)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, donc

$$f_{uu} = \Gamma^u_{uu} f_u + \Gamma^v_{uu} f_v + lN_p$$

$$f_{uv} = \Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN_p$$

$$f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + qN_p$$

En faisant le produit scalaire de ces trois égalités par f_u puis f_v, on obtient

$$f_{uu}.f_u = \Gamma^u_{uu} E + \Gamma^v_{uu} F \text{ et } f_{uu}.f_v = \Gamma^u_{uu} F + \Gamma^v_{uu} G$$

$$f_{uv}.f_u = \Gamma^u_{uv} E + \Gamma^v_{uv} F \text{ et } f_{uv}.f_v = \Gamma^u_{uv} F + \Gamma^v_{uv} G$$

$$f_{vv}.f_u = \Gamma^u_{vv} E + \Gamma^v_{vv} F \text{ et } f_{vv}.f_v = \Gamma^u_{vv} F + \Gamma^v_{vv} G$$

D'autre part

$$f_{uu}.f_u = \frac{1}{2}(f_u.f_u)_u = \frac{1}{2}E_u, \quad f_{uv}.f_u = \frac{1}{2}(f_u.f_u)_v = \frac{1}{2}E_v$$

$$f_{uv}.f_v = \frac{1}{2}(f_v.f_v)_u = \frac{1}{2}G_u, \quad f_{vv}.f_v = \frac{1}{2}(f_v.f_v)_v = \frac{1}{2}G_u$$

$$f_{uu}.f_v = (f_u.f_v)_u - f_u.f_{uv} = F_u - \frac{1}{2}E_v, \; f_{vv}.f_u = (f_v.f_u)_v - f_v.f_{uv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

D'où

$$\begin{cases} \Gamma^u_{uu}E + \Gamma^v_{uu}F = & \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^u_{uu}F + \Gamma^v_{uu}G = & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^u_{uv}E + \Gamma^v_{uv}F = & \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma^u_{uv}F + \Gamma^v_{uv}G = & \frac{1}{2}G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^u_{vv}E + \Gamma^v_{vv}F = & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma^u_{vv}F + \Gamma^v_{vv}G = & \frac{1}{2}G_v \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}$$

On peut donc calculer les symboles de Christoffel en déterminant la première forme fondamentale.

Exemple II.36. *La sphère unité*

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

$f_u(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$ *et* $f_v(u,v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$. *On a*

$$(E = f_u.f_u = 1 \implies E_u = E_v = 0), \quad (F = f_u.f_v = 0 \implies F_u = F_v = 0)$$

$$G = f_v.f_v = \sin^2 u \implies G_v = 0, G_u = \sin 2u$$

La matrice de la première forme fondamentale

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \Longrightarrow I_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos u \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cot u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

II.5.3 Équations de Codazzi et équations de Gauss

La matrice de l'opérateur de forme S_p dans la base $\{f_u, f_v\}$ est donnée par:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} lG - mF & mG - qF \\ mE - lF & qE - mF \end{pmatrix}$$

Notons que les coefficients a, b, c, d sont les composantes des dérivées N_u et N_v dans la base $\{f_u, f_v\}$:

$$N_u = D_{f_u} N = -S_p(f_u) = -(af_u + bf_v), \quad N_v = D_{f_v} N = -S_p(f_v) = -(cf_u + df_v)$$

Dérivons maintenant les équations suivantes

$$f_{uu} = \Gamma^u_{uu} f_u + \Gamma^v_{uu} f_v + lN_p$$

$$f_{uv} = \Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN_p$$

$$f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + pN_p$$

On obtient

$$\begin{aligned} f_{uuv} &= (\Gamma^u_{uu})_v f_u + \Gamma^u_{uu} f_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v f_v + \Gamma^v_{uu} f_{vv} + l_v N + l N_v \\ &= (\Gamma^u_{uu})_v f_u + \Gamma^u_{uu}(\Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN) + (\Gamma^v_{uu})_v f_v \\ &\quad + \Gamma^v_{uu}(\Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + qN) + l_v N - l(cf_u + df_v) \\ &= ((\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - cl) f_u + (\Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - dl) f_v \\ &\quad + (l_v + m\Gamma^u_{uu} + q\Gamma^v_{uu}) N \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} f_{uvu} &= (\Gamma^u_{uv})_u f_u + \Gamma^u_{uv} f_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u f_v + \Gamma^v_{uv} f_{vv} + m_u N + l N_u \\ &= ((\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu} - am) f_u + (\Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} - bm) f_v \\ &\quad + (m_u + m\Gamma^v_{uv} + l\Gamma^u_{uv}) N \end{aligned}$$

Et comme $f_{uuv} = f_{uvu}$ et en comparant ces deux dernières équations, on obtient:

$$(f_u) : (\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - cl = (\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu} - am$$
$$(f_v) : \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - dl = \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} - bm$$
$$(N) : l_v + m\Gamma^u_{uu} + q\Gamma^v_{uu} = m_u + m\Gamma^v_{uv} + l\Gamma^u_{uv}$$

De même: $f_{uvv} = f_{vvu}$, on trouve

$$(f_u) : (\Gamma^u_{uv})_v + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vv} - cm = (\Gamma^u_{vv})_u + \Gamma^u_{vv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{vv}\Gamma^u_{vu} - aq$$

$$(f_v) : \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} + (\Gamma^v_{uv})_v - md = (\Gamma^v_{vv})_u + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} - bq$$
$$(N) : q_u + l\Gamma^u_{vv} + m\Gamma^v_{vv} = m_v + m\Gamma^u_{uv} + q\Gamma^v_{uv}$$

Les deux équations obtenues pour la composante normale, nous donne les équations de Codazzi:

$$l_v - m_u = l\Gamma^u_{uv} + m(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}) - q\Gamma^v_{uu}$$

$$m_v - q_u = l\Gamma^u_{vv} + m(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}) - q\Gamma^v_{uv}$$

En utilisant le fait que $K = \dfrac{lq - m^2}{EG - F^2}$, on aura les équations de Gauss:

$$(f_v) : ld - mb = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})_u + (\Gamma^v_{uv})^2$$

Or

$$ld - mb = \frac{1}{EG - F^2}(l(qE - mF) - m(mE - lF)) = \frac{1}{EG - F^2}E(lq - m^2) = EK$$

Donc

$$EK = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})_u + (\Gamma^v_{uv})^2$$

De la même manière on obtient le reste des équations

$$FK = (\Gamma^v_{uv})_v - (\Gamma^v_{vv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} - \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv}$$

$$GK = (\Gamma^u_{vv})_u - (\Gamma^u_{uv})_v + \Gamma^v_{vv}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vv} - (\Gamma^u_{uv})^2$$

II.6 Énoncé des exercices

Exercice II.1. *Les deux surfaces paramétrées suivantes ont-elles le même support géométrique?*

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f_1(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f_2(t, \theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t^2)$.

Exercice II.2. *On considère l'ellipsoïde E d'équation* $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

1. *Montrer qu'une représentation paramétrique* $\varphi : [0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ *de l'ellipsoïde est donnée par :*
$$\begin{cases} x = & \cos u \sin v \\ y = & \sin u \sin v \\ z = & \frac{1}{\sqrt{5}} \cos v \end{cases}$$
2. *Calculer l'aire de la surface E.*

Exercice II.3. *Calculer l'aire de l'ellipsoïde de révolution engendré par la révolution de la courbe*
$$\gamma(t) = (a\cos t, 0, b\sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < a < b.$$
autour de l'axe (oz).

Exercice II.4. *Soit* $a > 0$*; on considère la caténoïde localement paramétrée par*
$$f(u, v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av)$$
Et l'hélicoïde localement paramétré par
$$g(s, t) = (t\cos s, t\sin s, as)$$

1. *Déterminer les coefficients* E, F, G *de la première forme fondamentale de la caténoïde (dans le paramétrage* $f(u, v)$ *).*
2. *En effectuant un changement de variable* $s = u$ *et* $t = a\sinh v$*, donner un nouveau paramétrage de l'hélicoïde.*
3. *Déterminer les coefficients* E', F', G' *de la première forme fondamentale de l'hélicoïde (dans ce nouveau paramétrage).*
4. *Que peut-on conclure?*

Exercice II.5. *Soit S la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation*
$$2(2z^2 + y^2) + x = 0$$

1. *Paramétrer la surface S en prenant les paramètres u et v parmi les variables x, y et z.*
2. *Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en* $A(-6, 1, -1)$.
3. *Calculer un vecteur normal à la surface S en* $A(-6, 1, -1)$.
4. *Calculer, en un point p de la surface, la première forme fondamentale* I_p.

Exercice II.6. *Soient F le point $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et H le plan d'équation $z=-1$. On pose*

$$S = \left\{ M \in \mathbb{R}^3 : \textit{distance de } M \textit{ à } F = \textit{distance de } M \textit{ à } H \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble S est défini par une équation de la forme $z = f(x,y)$ qu'on explicitera.*
2. *Donner un paramétrage régulier de S.*
3. *Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.*

Exercice II.7. *Calculer les deuxièmes formes fondamentales des surfaces paramétrées suivantes puis calculer la matrice associée à S_p et déterminer la courbure moyenne H et la courbure de Gauss K :*

1. *Le cylindre $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$.*
2. *Le tore $f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$ $(0 < r < R)$.*

Exercice II.8. *Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$.*

1. *Trouver une paramétrisation de S.*
2. *Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point.*
3. *Déterminer les courbures principales, moyenne et de Gauss en tout point de S.*
4. *Calculer les symboles de Christoffel de la surface paramétrée S.*

Solutions des exercices

Chapitre I : Courbes

Exercice I.1

1. Soit la courbe paramétrée $\alpha(t) = \left(\frac{t}{1-t^4}, \frac{t^3}{1-t^4}\right)$. Déterminons une équation cartésienne de α, on a

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1-t^4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = x(1-t^4) \\ y = x^3(1-t^4)^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t^2 = x^2(1-t^4)^2 \\ \dfrac{y}{x} = x^2(1-t^4)^2 \end{cases} \Longrightarrow t^2 = \frac{y}{x}$$

Ce qui donne: $x^2 = \dfrac{t^2}{1-t^4} = \dfrac{\frac{y}{x}}{(1-\frac{y^2}{x^2})}$, c-à-d: $x^2(x^2-y^2) = xy$.

Si $x \neq 0$, on a $x^4 - (xy)^2 - xy = 0$. Cette dernière équation est vraie même si $x = y = 0$.

2. Paramétrer le graphe $y = f(x), a \leq x \leq b$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, le graphe de f est donné par:

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que: } x \in [a,b]\right\}$$

On peut, donc, paramétrer G_f par l'application suivante: $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\alpha(t) = (t, f(t))$, c'est une courbe de classe C^1.

Calculons maintenant la longueur, on a: $\alpha'(t) = (1, f'(t))$, par suite

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt$$

.

Exercice I.2

1. $\alpha(t) = (2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$. Le vecteur vitesse de la courbe α est

$$\alpha'(t) = (-2\sin t + 2\sin(2t), 2\cos t - 2\cos(2t))$$

La longueur de la courbe α est donc

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(2\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2(\frac{t}{2})}dt = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt$$

Et comme $t \in [0, 2\pi]$ alors $\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$, donc

$$L(\alpha) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2\sqrt{2}[-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt]_0^{2\pi} = 8.\sqrt{2}.\sqrt{2} = 16$$

.

2. $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Le vecteur vitesse de la courbe α est $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$. La longueur de la courbe α est donc

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t+\sin^2 t+2\cos t)dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8$$

3. $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Le vecteur vitesse de la courbe α est $\alpha'(t) = (-3\sin t\cos^2 t, 3\cos t\sin^2 t)$, de norme

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9\sin^2\cos^4 t + 9\cos^2\sin^4 t} = \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{3}{2}|\sin(2t)|$$

La longueur de la courbe α est donc

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}|\sin(2t)|\,dt = \frac{3}{2}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)dt - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(2t)dt\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = 6$$

4. La longueur de l'arc $A = \alpha([-1, 1])$ est

$$L(A) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+4t^2}dt = 2\int_0^1\sqrt{1+4t^2}dt$$

Posons

$$u = 2t, du = 2dt : L(A) = \int_0^2\sqrt{1+u^2}du.$$

Maintenant, soit $u = \sinh z,\ z = \arg\sinh u = \ln(u + \sqrt{1+u^2}),\ du = \cosh z.$

$$L(A) = \int_0^{\arg\sinh 2} \sqrt{1+\sinh^2 z}\cosh z dz = \int_0^{\arg\sinh 2} \cosh^2 z dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arg\sinh 2} (\cosh 2z + 1)dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2z + z\right]_0^{\arg\sinh 2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sinh z\cosh z + z\right]_0^{\arg\sinh 2} = \frac{1}{2}\left[\sinh z\sqrt{1+\sinh^2 z} + z\right]_0^{\arg\sinh 2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sinh(\arg\sinh 2)\sqrt{1+(\sinh(\arg\sinh 2))^2} + \arg\sinh 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right] = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

Exercice I.3
Soit la courbe suivante: $\alpha(t) = \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right),\quad a, b > 0$

1. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $+\infty$:
   $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right) = (0,0).$
   Le vecteur vitesse de la courbe α est: $\alpha'(t) = -a\left(be^{-bt}\cos t + e^{-bt}\sin t, be^{-bt}\sin t - e^{-bt}\cos t\right).$
   $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} -a\left(be^{-bt}\cos t + e^{-bt}\sin t, be^{-bt}\sin t - e^{-bt}\cos t\right) = (0,0).$

2. Montrer que α a une longueur finie sur $[0,+\infty[$
   La longueur de α sur $[0,+\infty[$ est donnée par: $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^t \|\alpha'(u)\| du.$
   Or $\|\alpha'(t)\| = a\sqrt{b^2+1}e^{-bt}$, donc $\int\limits_0^t \|\alpha'(u)\| du = \dfrac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1)$
   Ce qui donne: $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1) = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2+1} < +\infty$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice I.4
Soient les courbes suivantes: $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3 t)$ et sa projection sur le plan $z = 0$; $\beta(t) = (t, t^2, 0)$

1. Déterminer les expressions intégrales des longueurs:
   Le vecteur vitesse de la courbe β est: $\beta'(t) = (1, 2t, 0) \neq (0,0,0)$ pour tout $t \in [0,1]$, de norme: $\|\beta'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$.
   La longueur de la courbe β est: $L(\beta) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt$.
   Le vecteur vitesse de la courbe α est: $\alpha'(t) = (1, 2t, 2t^2) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, de norme
   $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = (1+2t^2)$$
   La longueur de la courbe α est donc $L(\alpha) = \int_0^1 (1+2t^2)dt$.
   Comme pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq 1+4t^2 \leq (1+2t^2)^2$, alors pour tout $t \in [0,1]$:
   $$\sqrt{1+4t^2} \leq (1+2t^2)$$
   et par intégration $L(\beta) \leq L(\alpha)$.

2. Calculer la longueur de β puis celle de α :

   En utilisant le changement de variable $2t = shu$, on obtient le calcul de primitive

$$\int \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u \; du = \frac{1}{4}\int (\cosh(2u)+1\;)\, du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sinh(2u)+u\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sinh u \cosh u + u) = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)\right)$$

   Par conséquent, la longueur de β est:

$$L(\beta) = \left[\frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$

   La longueur de α est: $L(\alpha) = 1 + \dfrac{2}{3}$.

Exercice I.5

Soit la courbe $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{3}{2}t^2, \dfrac{3}{2}t^3\right)$.

1. Trouver deux équations cartésiennes (en x, y, z) qui décrivent le support de γ.

   Posons $x = t, y = \dfrac{3}{2}t^2$ et $z = \dfrac{3}{2}t^3$. On voit alors que le support de γ est donné par les équations cartésiennes: $y = \dfrac{3}{2}x^2$ et $z = xy$ (ou bien $z = \dfrac{3}{2}x^3$), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $z \in \mathbb{R}$.

2. On a $\forall t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = (1, 3t, \frac{1}{2}t^2) \neq (0,0,0)$, donc γ est régulière $\forall t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer la longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(10)$.

   On a $\gamma'(t) = \left(1, 3t, \dfrac{9}{2}t^2\right) \neq (0,0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De norme

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+9t^2+\frac{81}{4}t^4} = \left(1+\frac{9}{2}t^2\right)$$

   La longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(10)$ est donnée donc par

$$L_0^{10}(\gamma) = \int_0^{10}\left(1+\frac{9}{2}t^2\right)dt = \left[t+\frac{3}{2}t^3\right]_0^{10} = 10 + \frac{3}{2}1000 = 1510$$

Exercice I.6

1. $\alpha(t) = (t - \sinh t\cosh t, 2\cosh t)$, On a $\forall t \in \mathbb{R} : \alpha'(t) = (1 - \cosh^2 t - \sinh^2 t, 2\sinh t)$, de norme $\|\alpha'(t)\| = 2\,|\sinh t|\cosh t$. L'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t) = \int_0^t 2\sinh u\cosh u du = \int_0^t \sinh 2u du = \left[\frac{1}{2}\cosh 2u\right]_0^t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1).$$

2. $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, On a $\forall t \in \mathbb{R} : \beta'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, de norme

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

   l'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}du = \left[\sqrt{a^2+b^2}u\right]_0^t = \sqrt{a^2+b^2}t.$$

3. $\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)$, On a

$$\forall t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$$

de norme $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. L'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t) = \int_0^t du = t.$$

Exercice I.7

On donne $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée telle que $\alpha(a) = P$ et $\alpha(b) = Q$, et on pose $v = Q - P = (v_1, v_2, v_3)$

Soit

$$\int_a^b \alpha'(t).vdt = \int_a^b \sum_{i=1}^3 \alpha_i'(t).v_i dt = \sum_{i=1}^3 \int_a^b \alpha_i'(t).v_i dt$$

$$= \sum_{i=1}^3 v_i \int_a^b \alpha_i'(t)dt = \sum_{i=1}^3 v_i(\alpha_i(b) - \alpha_i(a)) = v.(\alpha(b) - \alpha(a)) = \|v\|^2.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Schwartz, $\alpha'(t).v \leq \|\alpha'(t)\| . \|v\|$ Donc

$$\int_a^b \alpha'(t).vdt \leq \|v\| \int_a^b \alpha'(t).dt$$

c-à-d $\|v\|^2 \leq \|v\| .l(\alpha)$ et par suite $l(\alpha) \geq \|v\|$.

Exercice I.8

On donne la courbe α définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} : \alpha(t) = (t, f(t))$$

c'est le graphe d'une fonction réelle f.

On a $\alpha'(t) = (1, f'(t))$ de norme $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)} \neq 1$, donc la courbe α n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc.

On pose $v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$.

Le vecteur tangent

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(t)}}(1, f'(t))$$

de dérivée

$$T'(t) = \left(\frac{-f''(t).f'(t)}{(1 + f'^2(t))^{\frac{3}{2}}}, \frac{f''(t)}{(1 + f'^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La courbure

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(t)}}\sqrt{\frac{f''^2(t).f'^2(t) + f''^2(t)}{(1 + f'^2(t))^3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(t)}}\sqrt{\frac{f''^2(t)}{(1 + f'^2(t))^2}} = \frac{|f''^2(t)|}{(1 + f'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice I.9

Calculer les éléments de Frenet (T, κ, N, B, τ) des courbes suivantes:

1. $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right), t \in]-1, 1[$.

On a, $T(t) = \left(\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{-1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\kappa(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}$.

Le vecteur normal: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\kappa(t)} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{4}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \frac{1}{4}(1-t)^{\frac{-1}{2}}, 0\right)$ par suite:

$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1-t)^{\frac{1}{2}}, (1+t)^{\frac{1}{2}}, 0\right)$.

Le vecteur binormal

$$\begin{aligned} B(t) &= T(t) \wedge N(t) \\ &= \left(\left(\frac{-1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}.0\right) - \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{-1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}.0\right) + \frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)\right) \\ &= \left(\frac{-1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

La torsion $\tau(t) = B'(t).N(t)$, or $B'(t) = \left(\frac{-1}{4}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \frac{-1}{4}(1-t)^{\frac{-1}{2}}, 0\right)$, d'où

$\tau(t) = \frac{-1}{4\sqrt{2}}\left(\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

2. $\alpha(t) = \left(\sqrt{1+t^2}, t, \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)$

On a, $\alpha'(t) = \left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ de norme $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} \neq 1$, donc la courbe n'est pas paramétrée par la longueur de l'arc.

On pose $v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$.

Le vecteur tangent

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

Le vecteur normal $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ où

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$\|T'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{t^2}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}$$

et

$$N(t) = \left(\frac{\sqrt{2}(1+t^2)}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \left(\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Enfin, le vecteur binormal

$$\begin{aligned} B(t) &= T(t) \wedge N(t) \\ &= \left(\frac{-t}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} + \frac{t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \frac{-1}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \left(\frac{-t}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Calculons, maintenant, la courbure κ et la torsion τ:
La courbure:

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} = \frac{1}{2(1+t^2)}.$$

La torsion: $\tau(t) = -\dfrac{1}{v(t)} \left(B'(t).N(t)\right)$, or

$$B'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Donc

$$\tau(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

d'où

$$\tau(t) = \frac{-1}{2(1+t^2)}.$$

Exercice I.10

Considérons la courbe $\beta :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par: $\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du, e^{-t} \right)$.

1. La courbe β est-elle paramétrée par la longueur d'arc?
   On a: $\beta'(t) = \left(\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}\right)$ de norme: $\|\beta'(t)\| = 1$.
   β est bien paramétrée par longueur d'arc.

2. Calculons la distance entre $p = \beta(t)$ et $q = C_p \cap (ox)$.

   - Déterminons une équation paramétrique de la droite C_p:
     La droite C_p est dirigée par $\beta'(t)$, c'est l'ensemble des point $m(t) = (x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$ tels que le vecteur $\overrightarrow{\beta(t)m(t)}$ soit colinéaire à $\beta'(t)$, i.e, il existe une fonction $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\beta(t)m(t)} = \lambda(t)\beta'(t)$.
     Ce qui donne $\begin{cases} x(t) - \int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du = \lambda(t)\sqrt{1-e^{-2t}} \\ y(t) - e^{-t} = -\lambda(t)e^{-t} \end{cases}$.
     Par suite la représentation paramétrique de C_p est donnée par $\left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du + \lambda(t)\sqrt{1-e^{-2t}}, \right.$

   - Soit q l'intersection de la droite C_p avec l'axe (Ox) c'est-à-dire $(1-\lambda(t))\, e^{-t} = 0$ et donc $\lambda(t) = 1 \quad \forall t \in]0, +\infty[$.
     Par suite $q = \left(\sqrt{1-e^{-2t}} + \int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du, 0 \right)$

- La distance entre p et q est le réel $pq = \|\overrightarrow{pq}\|$, or $\overrightarrow{pq} = \left(\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}\right)$ de norme

$$\|\overrightarrow{pq}\| = \sqrt{1-e^{-2t}+e^{-2t}} = 1 = pq$$

3. Calculons la courbure de β:

$\kappa(t) = \|T'(t)\|$, et comme $T(t) = \beta'(t) = \left(\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}\right)$, alors $T'(t) = \left(\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}, e^{-t}\right)$

d'où $\kappa(t) = \|T'(t)\| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$.

Exercice I.11

Soit $\gamma(t) = \left(\int_0^t \dfrac{\left(1+\cosh^2 u\right)\cos u}{\cosh^2 u}du, \int_0^t \dfrac{\left(1+\cosh^2 u\right)\sin u}{\cosh^2 u}du, \int_0^t \dfrac{\left(1+\cosh^2 u\right)\sinh u}{\cosh^2 u}du\right)$.

Le vecteur vitesse de la courbe γ est: $\gamma'(t) = \dfrac{\left(1+\cosh^2 t\right)}{\cosh^2 t}(\cos t, \sin t, \sinh t)$ de norme:

$\|\gamma'(t)\| = \dfrac{\left(1+\cosh^2 t\right)}{\cosh t}$.

1. Déterminer le repère de Frenet:

- Posons $v(t) = \dfrac{\left(1+\cosh^2 t\right)}{\cosh t}$. Le vecteur tangent $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{\cosh t}(\cos t, \sin t, \sinh t)$
- Le vecteur normal: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ où

$$T'(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}(-\sin t\cosh t - \sinh t\cos t, \cos t\cosh t - \sin t\sinh t, 1)$$

de norme $\|T'(t)\| = \dfrac{\sqrt{2}}{\cosh t}$, d'où

$N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cosh t}(-\sin t\cosh t - \sinh t\cos t, \cos t\cosh t - \sin t\sinh t, 1)$

- Le vecteur binormal est:

$B(t) = T(t)\wedge N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cosh t}(\sin t\cosh t - \sinh t\cos t, -\cosh t\cos t - \sinh t\sin t, 1)$

2. Calculer la courbure κ et la torsion τ :

- La courbure: $\kappa(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{\cosh t}{\left(1+\cosh^2 t\right)}.\dfrac{\sqrt{2}}{\cosh t}$. Enfin $\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\cosh^2 t}$.
- La torsion:$\tau(t) = -\dfrac{1}{v(t)}\langle B'(t), N(t)\rangle$, or

$$B'(t) = \frac{\sinh t}{\sqrt{2}\cosh^2 t}(\cosh t\sin t + \sinh t\cos t, \sinh t\sin t - \cosh t\cos t, -1)$$

donc $\tau(t) = -\dfrac{\cosh t}{\left(1+\cosh^2 t\right)}\left(\dfrac{\sinh t}{2\cosh^3 t}(-2\cosh^2 t)\right)$ d'où $\tau(t) = \dfrac{sht}{1+ch^2 t}$.

3. Vérifier que la fonction $\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2}$ est constante:

$$\frac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\cosh^2 t\right)}{\left(\sinh^2 t+2\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\cosh^2 t\right)}{\left(1+\cosh^2 t\right)}$$

ainsi

$$\frac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2} = \sqrt{2}$$

Exercice I.12

Soit $\alpha(t)$ une représentation paramétrique en fonction de l'abscisse curviligne de la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes. $\alpha(t)$ s'obtient comme solution du système différentiel résultant des formules de Frenet:

$$\left\{\begin{array}{lcl} T'(t) &=& \kappa_0.N(t) \\ N'(t) &=& -\kappa_0.T(t)+\tau_0.B(t) \quad \text{où } T(t)=\alpha'(t) \text{ et } B=T\wedge N \\ B'(t) &=& -\tau_0.N(t) \end{array}\right.$$

- Si $\kappa_0=0$, Alors $\alpha''(t)=T'(t)=0$, d'où

$$\alpha(t)=at+b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ des vecteurs constants.}$$

La courbe est donc une droite.

- Supposons maintenant que $\kappa_0\neq 0$. Il vient

$$\begin{array}{rcl} N''(t) &=& -\kappa_0.T'(t)+\tau_0.B'(t) \\ &=& -\kappa_0^2.N(t)-\tau_0^2.N(t)=-(\kappa_0^2+\tau_0^2).N(t) \end{array}$$

Ou

$$N''(t)+(\kappa_0^2+\tau_0^2).N(t)=0$$

c'est une équation différentielle du seconde ordre avec équation caractéristique

$$r^2+(\kappa_0^2+\tau_0^2)=0$$

où la solution générale est donnée par

$$N(t)=a\cos\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)+b\sin\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right) \quad \text{avec des vecteurs constants } a \text{ et } b$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \alpha''(t) &=& T'(t)=\kappa_0 N(t) \\ &=& \kappa_0 a\cos\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)+\kappa_0 b\sin\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right) \end{array}$$

Par intégration, il vient

$$\alpha'(t)=T(t)=\frac{\kappa_0}{\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}}a\sin\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)-\frac{\kappa_0}{\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}}b\cos\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)+c$$

Et

$$\alpha(t)=\frac{-\kappa_0}{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}a\cos\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)-\frac{\kappa_0}{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}b\sin\left(\left(\sqrt{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}\right)t\right)+ct+d$$

Où a,b,c,d sont des vecteurs constants.

Les vecteurs a,b,c ne sont pas arbitraires: on a $N.N=1$ et $T.N=0$ impliquent

$$a.a=b.b=1 \text{ et } a.b=a.c=b.c=0$$

Les vecteurs a,b et $\dfrac{c}{\|c\|}$ sont donc orthonormaux.

Finalement $\alpha(t)$ représente une hélice circulaire de rayon $\dfrac{\kappa_0}{(\kappa_0^2+\tau_0^2)}$.

Chapitre II : Surfaces

Exercice II.1
Pour la surface M_1:

$$f(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

Posons $x = u, y = v$, alors $z = x^2 + y^2$, M_1 est donc d'équation caractéristique $x^2 + y^2 - z = 0$. De même, pour la surface M_2 :

$$f(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t^2)$$

Posons $x = t\cos\theta, y = t\sin\theta$, alors $z = x^2 + y^2$, M_2 est donc d'équation caractéristique $x^2 + y^2 - z = 0$. Par suite les deux surfaces ont le même support géométrique.

Exercice II.2
On considère l'ellipsoïde E d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

1. Montrer que $\varphi(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \frac{1}{\sqrt{5}}\cos v)$ avec $(u,v) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ est une paramétrisation régulière de E.
   On a bien $(\cos u \sin v)^2 + (\sin u \sin v)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos v\right)^2 = \sin^2 v + \cos^2 v = 1$. De plus, La différentielle de φ en un point (u,v) de $]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin v \end{pmatrix}$$

   Donc elle est toujours de rang 2.
   Par exemple: $\det \begin{pmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{pmatrix} \neq 0$. Cette représentation est donc régulière.

2. Calculer l'aire de la surface E.:
   Le plan tangent est engendré par les vecteurs φ_u et φ_v où: $\varphi_u = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)$ et $\varphi_v = \left(\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin v\right)$. Dans cette base, la matrice de la première forme fondamentale est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & \cos^2 v + \dfrac{1}{5}\sin^2 v \end{pmatrix}$. L'élément de volume est: $\sqrt{EG - F^2}dudv = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin v\sqrt{1 + 4\cos^2 v}dudv$.
   L'aire de l'ellipsoïde est donc

$$A[E] = \int_{v=0}^{\pi}\int_{u=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}}\sin v\sqrt{1 + 4\cos^2 v}dudv$$

$$= 2\pi\int_{v=0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{5}}\sin v\sqrt{1 + 4\cos^2 v}dudv = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_{t=-1}^{1}\sqrt{1 + 4t^2}dt$$

   En utilisant le changement de variable $2t = \sinh\theta$, on obtient le calcul de primitive

$$\int\sqrt{1 + 4t^2} = \frac{1}{2}\int\cosh^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\int(\cosh(2\theta) + 1)d\theta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sinh(2\theta) + \theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sinh\theta\cosh\theta) + \theta) = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1 + 4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2})\right)$$

Par conséquent, l'aire de E est:

$$A\left[E\right]=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})\right)=\pi\left(2+\frac{ln(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right)$$

Exercice II.3
En faisons tourner la courbe $\gamma(t)=(a\cos t,0,b\sin t)$ autour de l'axe $(0,0,1)$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos t\\ 0\\ b\sin t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a\cos t\cos\theta & a\cos t\sin\theta & b\sin t\end{pmatrix}.$$

Donc l'ellipsoïde Ξ est paramétrée par:

$$f(t,\theta)=(a\cos t\cos\theta,a\cos t\sin\theta,b\sin t)$$

avec $\theta\in[0,2\pi[\,,t\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $0<a<b$.
Calculons maintenant l'aire de Ξ:

Le plan tangent au point $p\in\Xi$ est engendré par $\dfrac{\partial f}{\partial t}=(-a\sin t\cos\theta,-a\sin t\sin\theta,b\cos t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=(-a\cos t\sin\theta,a\cos\theta\cos t,0)$. Dans cette base, la matrice de la première forme fondamentale est

$$I_p=\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t & 0\\ 0 & a^2\cos^2 t\end{pmatrix}.$$

L'élément de volume est

$$\sqrt{EG-F^2}d\theta dt=a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}d\theta dt$$

L'aire est donc:

$$A[\Xi]=\int_{t=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}d\theta dt$$

$$=2\pi\int_{t=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\sqrt{b^2-c^2\sin^2 t}dt\quad\text{ où }c=\sqrt{b^2-a^2}$$

On pose $u=\dfrac{c}{b}\sin t$, on obtient

$$A[\Xi]=2\pi\int_{-\frac{c}{b}}^{\frac{c}{b}}\frac{ab^2}{c}\sqrt{1-u^2}du=4\pi\frac{ab^2}{c}\int_0^{\frac{c}{b}}\sqrt{1-u^2}du$$

Posons $u=\sin v$, on aura:

$$A[\Xi]=2\pi\frac{ab^2}{c}\int_0^{\arcsin\frac{c}{b}}(1+\cos 2v)dv=2\pi\frac{ab^2}{c}\left[v+\frac{1}{2}\sin 2v\right]_0^{\arcsin\frac{c}{b}}$$

$$=2\pi\left[a^2+\frac{ab^2}{c}\arcsin\frac{c}{b}\right]=2\pi\left[a^2+\frac{ab^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)\right].$$

Exercice II.4

Soit $a > 0$.

1. Déterminons les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la caténoïde C:

   $$f_u = (-a\cosh v \sin u, a\cosh v \cos u, 0); f_v = (a\sinh v \cos u, a\sinh v \sin u, a)$$

   Ce qui donne

   $$E = f_u.f_u = a^2\cosh^2 v; F = f_u.f_v = 0; G = f_v.f_v = a_2.\cosh_2 v$$

   Et pour $p \in C$, on a donc

   $$I_p = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix}.$$

2. Le nouveau paramétrage de l'hélicoïde H: $g(s,t) = (t\cos s, t\sin s, as)$.
   Soit $\phi(u,v) = (s,t) = (u, a\sinh v)$, la matrice jacobienne de ϕ est

   $$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\cosh v \end{pmatrix}$$

   Le déterminant de A est: $\det A = a\cosh v \neq 0$ car $a > 0$.
   La matrice A est inversible et donc $g \circ \phi$ est un nouveau paramétrage de l'hélicoïde donné par: $g(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v \sin u, au)$

3. Déterminons les coefficients E', F', G':

   $$g_u = (-a\sinh v \sin u, a\sinh v\cos u, a); g_v = (a\cosh v\cos u, a\cosh v \sin u, 0)$$

   Ce qui donne

   $$E' = g_u.g_u = a^2\cosh^2 v; F' = g_u.g_v = 0; G' = g_v.g_v = a^2\cosh^2.$$

   Et pour $p \in H$, on a

   $$I'_p = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix} = I_p.$$

4. On conclut qu'il est possible de transformer la caténoïde en hélicoïde de manière continue. Ce qui implique que ces deux surfaces sont localement isométriques.

Exercice II.5

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2\left(2z^2+y^2\right)+x=0$

1. La surface S est paramétrée par $\phi(u,v)=\left(-2(u^2+2v^2),u,v\right)$.

2. Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6,1,-1)$:

   Le point A est obtenu au point du paramètre $(u,v)=(1,-1)$, on calcule

   $$\frac{\partial\phi}{\partial u}=\phi_u=(-4u,1,0) \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial v}=\phi_v=(-8v,0,1)$$

   Donc $\phi_u(1,-1)=(-4,1,0)$ et $\phi_v(1,-1)=(8,0,1)$. Ces deux vecteurs forment une base de l'espace tangent à S au point de paramètre $(u,v)=(1,-1)$.

3. Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6,1,-1)$:
   On a $N(u,v)=\phi_u\wedge\phi_v=(1,4u,8v)$ d'où $N(1,-1)=(1,4,-8)$.

4. Calculer, au point p de S, la première forme fondamentale I_p de S:
   Soit $p=\phi(u,v)\in S$, le plan tangent au point p est engendré par $\{\phi_u,\phi_v\}$ où

   $$\phi_u=(-4u,1,0) \text{ et } \phi_v=(-8v,0,1)$$

   La première forme fondamentale I_p de S est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, où $E=(\phi_u.\phi_u)$, $F=(\phi_u.\phi_v)$ et $G=(\phi_v.\phi_v)$. On calcule $E=16u^2+1$, $F=32uv$ et $G=64v^2+1$, donc

   $$I_p=\left(16u^2+1\right)du^2+64uvdudv+\left(64v^2+1\right)dv^2$$

Exercice II.6

Soient F le point $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et H le plan d'équation $z=-1$.
On pose $S=\{M\in\mathbb{R}^3$ telque : distance de M à $F=$ distansce de M à $H\}$

1. Montrer que l'ensemble S est défini par une équation de la forme $z=f(x,y)$ qu'on explicitera.

   Soit $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, la distance de M à F est donnée par: $d_1(M,F)=\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$, et celle de M à H est définie par: $d_2(M,H)=|z+1|$.

   Comme, par hypothèse, $d_1(M,F)=d_2(M,H)$, alors: $x^2+y^2+(z-1)^2=(z+1)^2$. Ce qui donne $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$. D'où $f(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

2. Donner un paramétrage régulier de S.

   On paramètre la surface S par

   $$\chi(u,v)=\left(u,v,\frac{1}{4}(u^2+v^2)\right)$$

   La différentielle de χ en un point (u,v) de $U\subset\mathbb{R}^2$ est donnée par la matrice

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2}u & \frac{1}{2}v \end{pmatrix}$$

   donc elle est toujours de rang 2. Cette représentation est donc régulière.

3. Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.

   le plan tangent à S en un point $p \in S$ est engendré par les vecteurs χ_u et χ_v où les dérivées premières du paramétrage sont:

$$\chi_u = \left(1, 0, \frac{1}{2}u\right) \text{ et } \chi_v = \left(0, 1, \frac{1}{2}v\right).$$

   Dans cette base, les coefficients de la première forme fondamentale sont donnés par:

$$E = \chi_u.\chi_u = 1 + \frac{1}{4}u^2,\ F = \chi_u.\chi_v = \frac{1}{4}uv \text{ et } G = \chi_v.\chi_v = 1 + \frac{1}{4}v^2.$$

   d'où, la matrice de la première forme fondamentale est:

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}u^2 & \frac{1}{4}uv \\ \frac{1}{4}uv & 1 + \frac{1}{4}v^2 \end{pmatrix}$$

Exercice II.7

1. Le cylindre C^2: $f(u, v) = (a\cos u, a\sin u, v)$ Soit $p = f(u_0, v_0)$ un point de C^2 et T_pC^2 l'espace tangent à C^2 au point p engendré par f_u et f_v, On a

$$f_u = (-a\sin u, a\cos u, 0), f_v = (0, 0, 1)$$

   D'où $f_u \wedge f_v = (a\cos u, a\sin u, 0)$ de norme $\|f_u \wedge f_v\| = a$. Le vecteur normal unitaire est donc: $N_p = (\cos u, \sin u, 0)$. Calculons en suite:

$$f_{uu} = (-a\cos u, -a\sin u, 0),\ f_{uv} = (0, 0, 0),\quad f_{vv} = (0, 0, 0)$$

   La deuxième forme fondamentale:

$$l = f_{uu}.N_p = -a,\quad m = f_{uv}.N_p = 0,\quad q = f_{vv}.N_p = 0.$$

   d'où

$$II_p = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice associé à la première forme fondamentale:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   de déterminant $\det I_p = a^2$.

   La matrice associée à l'opérateur S_p est

$$B = I_p^{-1} II_p = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, les courbures principales sont: $\kappa_1 = \dfrac{-1}{a},\quad \kappa_2 = 0.$
   La courbure de Gauss est $K = \kappa_1.\kappa_2 = \det B = 0.$
   Finalement la courbure moyenne

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-1}{2a}$$

2. Le Tore: Soit T^2 la surface du tore

$$f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

$0 \leq u, v < 2\pi, R > r > 0$,
Soit $p = f(u_0, v_0)$ un point de T^2 et T_pT^2 l'espace tangent à T^2 au point p engendré par f_u et f_v, On a

$$f_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u), f_v = (R + r\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)$$

D'où

$$f_u \wedge f_v = (R + r\cos u)(-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u)$$

de norme $\|f_u \wedge f_v\| = r(R + r\cos u)$.
Le vecteur normal unitaire est donné par

$$N_p(u,v) = \frac{f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)}{\|f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)\|}$$

En reprenant les formules ci-dessus, on a :

$$N_p = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

Calculons en suite:

$$f_{uu} = (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u),\ \ f_{uv} = (r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v, 0)$$

$$f_{vv} = (R + r\cos u)(-\cos v, -\sin v, 0)$$

La deuxième forme fondamentale:

$$l = f_{uu}.N_p = r, \quad m = f_{uv}.N_p = 0, \quad q = f_{vv}.N_p = (R + r\cos u)\cos u.$$

d'où

$$II_p = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

La matrice associé à la première forme fondamentale:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u.f_u & f_u.f_v \\ f_u.f_v & f_v.f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

de déterminant $\det I_p = r^2(R + r\cos u)^2$.
La matrice associée à l'opérateur S_p est

$$B = I_p^{-1}II_p = \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2}\begin{pmatrix} (R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2}\begin{pmatrix} r(R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2(R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R + r\cos u} \end{pmatrix}$$

Ainsi, les courbures principales sont

$$\kappa_1 = \frac{1}{r}, \quad \kappa_2 = \frac{\cos u}{R + r\cos u}$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \kappa_1.\kappa_2 = \det B = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}$$

Finalement la courbure moyenne

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{R + 2r\cos u}{2r(R + r\cos u)}$$

.

Exercice II.8
Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$.

1. Trouver une paramétrisation de S:
   On paramètre la surface S par $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:

   $$f(u, v) = (shu\cos v, shu\sin v, chu)$$

2. Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point.

   Soit $p = f(u, v)$ un point de la surface, le plan tangent au point p est engendré par $\{f_u, f_v\}$ où $f_u = (chu\cos v, chu\sin v, shu)$ et $f_v = (-shu\sin v, shu\cos v, 0)$.
   Donc $f_u \wedge f_v = (-sh^2u\cos v, -sh^2u\sin v, chushu)$ de norme $\|f_u \wedge f_v\| = shu\sqrt{ch2u}$.
   On obtient le vecteur normal

   $$N(u, v) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}(-shu\cos v, -shu\sin v, chu)$$

3. Déterminer les courbures principales, moyenne et de Gauss en tout point de S.

   Les coefficients de la première forme fondamentale sont donnés par:

   $$E = f_u.f_u = ch2u,\ F = f_u.f_v = 0 \text{ et } G = f_v.f_v = sh^2u$$

   D'où, la matrice de la première forme fondamentale est: $I_p = \begin{pmatrix} ch2u & 0 \\ 0 & sh^2u \end{pmatrix}$.

   On calcule

   $$f_{uu} = (shu\cos v, shu\sin v, chu)\,, f_{uv} = (-chu\sin v, chu\cos v, 0) \text{ et}$$

   $$f_{vv} = (-shu\cos v, -shu\sin v, 0)$$

   D'où l'on tire les coefficients de la 2ème forme fondamentale: $l = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}$, $m = 0$ et $q = \frac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}}$,

   Donc, la matrice de la deuxième forme fondamentale est: $II_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ch2u}} & 0 \\ 0 & \frac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix}$

L'opérateur de forme S_p a pour matrice

$$I_p^{-1}II_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ch2u}} & 0 \\ 0 & \frac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les courbures principales sont

$$\kappa_1 = \frac{1}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et } \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}$$

.

Le calcul de la courbure de Gauss K est immédiat, $K = \kappa_1.\kappa_2 = \frac{1}{(ch2u)^2}$

La courbure moyenne H est: $H = -\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{ch^2u}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}}$.

4. Calculer les symboles de Christoffel de la surfaces paramétrée S.
   Soit S la surface paramétrée par $f(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$.

   - Les dérivées premières du paramétrage:

   $$f_u = (chu \cos v, chu \sin v, \sinh u) \text{ et } f_v = (-shu \sin v, shu \cos v, 0)$$

   - Les symboles de Christoffel: On a

   $$E_u = 2\sinh 2u, \quad E_v = F_u = F_v = G_v = 0, \quad G_u = \sinh 2u$$

   donc

   $$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sh2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}sh2u \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}sh2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Ce qui donne $\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{sh2u}{ch2u} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{chu}{shu} \end{pmatrix}$.
   Et $\begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{sh2u}{2ch2u} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quelques épreuves d'évaluations

Année universitaire 2019-2020
Épreuve finale

Exercice 1.

1. Calculer la courbure et la torsion de la courbe α donnée par:

$$\alpha(t) = (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$$

2. La courbe précédente est-elle plane?
   Si oui, déterminer l'équation du plan contenant α.

Exercice 2.
La tractrice est la courbe paramétrée $\gamma : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^2$ donnée pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \ln(\tan \frac{t}{2}))$$

1. Montrer que γ est régulière.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite D_t tangente à γ au point $\gamma(t)$.
3. On note p_t le point d'intersection des droites D_t et (Oy). Montrer que le segment $[\gamma(t), p_t]$ est de longueur 1.

Exercice 3.
On prend deux nombres réels $0 < r < R$. On considère le tore

$$f : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$$

paramétré par

$$f(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

1. Calculer l'aire de cette surface.
2. Que représentent géométriquement les courbes $C_1 = \{f(0, v), v \in [0, 2\pi[\}$ et $C_2 = \{f(u, 0), u \in [0, 2\pi[\}$?
3. Calculer en tout point p de la surface la deuxième forme fondamentale, ainsi que les courbures principales.
4. En tout point $p = f(u, v)$ de la surface , calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

Année universitaire 2020-2021
Épreuve finale

Exercice 1. On considère la courbe paramétrée α qui à $t \in \mathbb{R}_+$ associe

$$\alpha(t) = \big(3(\cos t + t \sin t), 3(\sin t - t \cos t), 2t^2\big)$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe α.
2. Déterminer, en un point régulier de α, le repère de Frenet.
3. Trouver la courbure et la torsion de la courbe α.

Exercice 2. Une courbe plane est définie en coordonnées polaires par $r = r(\theta)$. Autrement dit, la paramétrisation de la courbe est de la forme

$$\gamma(\theta) = \Big(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta\Big)$$

où θ appartient à un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Calculer la longueur d'arc en coordonnées polaires.
2. On rappelle que, pour une courbe régulière $\gamma(\theta)$ de classe C^2, la courbure est donnée par $\kappa(\theta) = \dfrac{|\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))|}{\|\gamma'(\theta)\|^3}$. Calculer la courbure en coordonnées polaires.
3. Déterminer ces quantités dans le cas de la cardioïde où

$$r(\theta) = a(1 + \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad a > 0$$

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $x, y : I \to \mathbb{R}$ des fonctions de classeC^1.
On considère la surface de révolution S obtenue en faisant tourner la courbe paramétrée $c : I \to \mathbb{R}^3$ qui à t associe $c(t) = (x(t), 0, y(t))$, contenue dans le plan $y = 0$, autours de l'axe (Oz).
On suppose que c est paramétrée par la longueur de l'arc, c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$$

Un paramétrage de S est alors donné par:

$$f : [0, 2\pi[\times I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto f(s,t) = (x(t)\cos s, x(t)\sin s, y(t))$$

1. Quels sont les points singuliers de f?
2. On suppose que x et y sont de classe C^2. Lorsque $x(t) > 0$, exprimer la courbure de Gauss en tout point régulier en fonction de x et x''. On pourra dériver l'équation $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ pour simplifier l'expression.
3. A quelle condition sur les fonctions x et y la surface f est-elle à courbure de Gauss nulle?

Année universitaire 2020-2021
Examen de Rattrapage

Exercice 1. Soit f une fonction trois fois dérivable. On considère la courbe paramétrée γ qui à $t \in \mathbb{R}$ associe

$$\gamma(t) = \big(\exp t, \exp(-t), f(t)\big).$$

On suppose que f est telle que la courbure de γ ne s'annule pas. Montrer que γ est contenue dans un plan si et seulement si $f' - f^{(3)} = 0$.

Exercice 2. On fixe un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $b \neq 1$ et soit C le support de la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par

$$\alpha(t) = \big(ab^t \cos t, ab^t \sin t\big)$$

Cette courbe est appelée *spirale logarithmique*.

1. Montrer que α est birégulière.
2. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $-\infty$.
3. Soit M un point de C, que vaut le cosinus de l'angle entre la tangente au point M et la droite (OM)?
4. Notons $l(M)$ la longueur de l'arc de courbe compris entre O et M (c'est-à-dire sur $]-\infty, t]$). Calculer $\dfrac{l(M)}{OM}$.
5. On rappelle que, pour une courbe régulière $\alpha(t)$ de classe C^2, la courbure est donnée par $\kappa(t) = \dfrac{|\det(\alpha'(t), \alpha''(t))|}{\|\alpha'(t)\|^3}$. Calculer la courbure en tout point de C.

Exercice 3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^∞ dont les cefficients de la première forme fondamentale sont donnés par:

$$\forall (u, v) \in U : E = 1, \quad F = \cos\theta, \quad G = 1$$

avec $\theta : U \longrightarrow]0, \pi[$ de classe C^∞.

1. Montrer que f est régulière.
2. Montrer que f_{uv} est un vecteur normal à la surface.

Année universitaire 2021-2022
Contrôle continu

Exercice 1. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et Γ la partie de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ définie par les équations:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + z^2 - 2xy & = 1 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

Montrer que Γ est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ en la représentant à l'aide d'une paramétrisation régulière (pas forcément par la longueur de l'arc).

Exercice 2. On considère la courbe gauche $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$\gamma(t) = \Big(\exp(t), \exp(-t), \sqrt{2}\, t \Big)$$

1. Calculer $\gamma'(t), \gamma''(t)$, et montrer que la courbe γ est birégulière.
2. Déterminer le repère mobile de Frenet $(T(t), N(t), B(t))$.
3. Déterminer la courbure κ_γ et la torsion τ_γ de γ.
4. Déterminer le rapport $\dfrac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}$ et montrer que l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:
   $u(t) = \dfrac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} T(t) + B(t)$ est constante.

Exercice 3. On considère la courbe $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par la longueur d'arc. On note $(T(t), N(t), B(t))$ son repère de Frenet et on désigne par κ et τ la courbure et la torsion de α au point d'abscisse t.
On suppose que τ et $\left(\dfrac{1}{\kappa}\right)'$ ne s'annulent pas et que α satisfait l'équation

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{-\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2 = C$$

où C une constante strictement positive.

1. Montrer que $\left(\dfrac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = \dfrac{\tau}{\kappa}$.
2. Définissons la courbe $\Omega(t) = \alpha(t) + \left(\dfrac{1}{\kappa}\right) N(t) - \left(\dfrac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right) B(t)$. Déterminer $\Omega'(t)$.
3. Montrer qu'il existe un point Ω de $\mathbb{R}^3$ tel que $\|\alpha(t) - \Omega\|$ soit constant. Conclure.

Bibliographie

[1] Laurent Busé, Géométrie différentielle et Applications, HAL Id: inria-00101755, 2006.

[2] C.Doss-Bachelet,J.P.François, C.Piquet, Géométrie différentielle, Ellipse,2000.

[3] Hélène Fack, Mathématiques courbes et surfaces, Institut national des Sciences appliquées de Lyon, 2003.

[4] A.Fédenko, Recueil d'exercices de Géométrie différentielle, Edition Mir Mouscou, 1982.

[5] E.Ramis, C.Deschanps, J.Odoux, Applications de l'analyse à la géométrie, Masson, Paris, 1992.


FACULTÉ DES SCIENCES
Faculty of Sciences
كلية العلوم
Faculté des Sciences – Tidjani HALIDAM
Tél.: 043 21 63 70 / Tél&Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71
Site Web: www.fs.univ-tlemcen.dz