



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : *Analyse Mathématique*

Par :

DAHMANE MOHAMMED

Sur le thème

**Etude de l'existence de solutions pour certaines
classes d'équations différentielles quasi-linéaires
d'ordre 4 avec conditions aux limites non locales.**

Soutenue publiquement le 12 / 05 / 2022 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr YEBDRI Mustapha	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr DERHAB Mohammed	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr MIRI Sofiane El Hadi	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr BENCHOHRA Mouffak	Professeur	Université de S-B-Abbès	Examineur
Mr OUAHAB Abdelghani	Professeur	Université de S-B-Abbès	Examineur
Mr LAKMECHE Abdelkader	Professeur	Université de S-B-Abbès	Examineur

*Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (SDA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

DÉDICACES

Je dédie cette thèse :

À mes très chers parents.

À mes fils Abdessamad, Yahia, Sid Ahmed et à ma fille Kawther, ainsi qu'à mon épouse.

À mon frère, mes sœurs, mes neveux et ma nièce.

À tous mes amis, mes enseignants, mes collègues et mes étudiants.

À tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

À tous ceux qui me sont chers et proches.

Je dédie tout particulièrement cette thèse :

À la mémoire, de mon frère Sid Ahmed qui nous a quitté le 22-11-2018 à l'âge de trente ans, mais il demeurera dans mon cœur et à jamais.

Qu'ALLAH l'accueille dans son paradis.

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à exprimer mes remerciements à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur Mohammed Derhab, pour m'avoir confié ce travail, après avoir réussi à me faire partager sa passion pour l'élégance des outils mathématiques. Il ne s'est pas contenté de me prodiguer ses précieux conseils éclairés, de m'orienter ou de m'encourager avec beaucoup de conviction au cours de chacune des nombreuses discussions que nous avons pu avoir ensemble. En effet, il s'est même efforcé de me transmettre une certaine maturité dans le domaine de la recherche. Je suis très heureux de lui exprimer ici toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur Mustapha Yebedri, Professeur au département de mathématiques, faculté des sciences, université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury auquel ce travail est soumis.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Sofiane El Hadi Miri, Professeur à l'université de Tlemcen, pour avoir accepté de juger cette thèse en qualité d'examineur.

Mes remerciements vont à Monsieur Mouffak Benchohra, Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbés pour l'intérêt qu'il porte à notre travail et de bien vouloir le juger.

Je tiens à associer à ces remerciements, Abdelghani Ouahab, Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbés, de bien vouloir accepter d'examiner notre travail.

J'adresse également un grand merci à Mr Abdelkader Lakmeche, Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbés, d'avoir accepté avec beaucoup de gentillesse d'examiner cette thèse et de m'avoir honoré par sa présence parmi les membres du jury.

Enfin, je dois tout particulièrement remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Table des matières

Introduction	3
1 Existence de solutions extrémales pour une équation différentielle quasi-linéaire du quatrième ordre sur la demi-droite avec conditions initiales multipoints sans conditions à l'infini	7
1.1 Introduction	7
1.2 Résultats préliminaires	8
1.3 Résultat principal	14
1.4 Applications	26
2 Existence de solutions extrémales pour une équation différentielle quasi-linéaire du quatrième ordre avec des conditions initiales non locales sur la demi-droite	29
2.1 Introduction	29
2.2 Définitions	30
2.3 Résultat principal	31
2.4 Application	39
3 Existence de solutions positives d'un problème à valeur finale pour des équations différentielles du quatrième ordre	41
3.1 Introduction	41
3.2 Préliminaires	42
3.2.1 Intégration d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ sur la demi-droite $\mathbb{R}^+$	42
3.2.2 Critère de compacité dans un intervalle non borné . . .	46
3.3 Résultat principal	48

3.4	Application	60
4	Existence et unicité de solutions d'un problème à valeur finale pour des équations différentielles quasi-linéaires du quatrième ordre avec déviation d'argument	63
4.1	Introduction	63
4.2	Preliminaires	64
4.3	Résultat principal	65
4.4	Applications	73
	Conclusion et perspectives	77
	Bibliographies	77

Introduction

L'objectif de cette thèse est l'étude de l'existence de solutions pour certaines classes d'équations différentielles quasi-linéaires du quatrième ordre faisant intervenir l'opérateur p -Laplacien avec des conditions initiales ou finales dans des domaines non bornés.

L'opérateur p -Laplacien joue un rôle important dans certaines applications physiques comme les problèmes des fluides non-Newtoniens, l'élasticité non-linéaire et la glaciologie (voir [30] et [66]).

Les problèmes aux limites sur des intervalles infinis se posent naturellement dans l'étude des solutions radiales symétriques d'équations elliptiques non-linéaires, la géophysique et divers phénomènes physiques, tels que la théorie de vidange des écoulements drainants, la physique des plasmas, le transfert de chaleur entre solides et gaz, la physique nucléaire, l'écoulement instationnaire de gaz à travers un milieu poreux semi-infini et dans la détermination du potentiel électrique dans un atome neutre isolé (voir [2], [9], [16], [37], [51], [61], [62] et [67]). Ces problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant les théorèmes des points fixes de Banach et Schauder, la théorie des points critiques, la théorie des sous et sur-solutions couplée avec la technique itérative, la théorie du degré topologique de Mawhin. (voir [2], [5], [9], [14], [15], [17], [[20]- [27]], [[32]- [34]], [36], [55], [68] et [79]).

Il est bien connu que la méthode des sous et sur-solutions couplée avec la technique itérative a été utilisée pour prouver l'existence de solutions pour les problèmes aux limites non-linéaires dans des domaines non bornés par plusieurs auteurs (voir [26], [46], [47], [53, Chapter 1 Section 6], [64] et [65]).

Les problèmes à valeurs finales pour les équations différentielles sur des domaines non bornés ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant les

théorèmes des points fixes dans les cônes, la théorie des points critiques, la méthode des sous et sur-solutions, la méthode des approximations successives, (voir [6], [31], [48], [49], [58], [60], [70] et [71]).

Dans [58], les auteurs ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi, \end{cases} \quad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue et $\xi > 0$.

En utilisant le théorème du point fixe bien connu de Guo–Krasnoselskii, les auteurs ont prouvé que le problème (1) admet au moins une solution positive.

Les équations différentielles avec déviation d'argument proviennent des modèles de croissance cellulaire biologique et d'une généralisation du modèle d'absorption de la lumière d'Ambartsumyan dans l'espace interstellaire (voir [35] et [74]).

Dans [73], les auteurs ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(\sigma_1(x)), \dots, u(\sigma_k(x))), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \zeta, \end{cases} \quad (2)$$

où $\zeta \in \mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}$ représente la droite réelle $\mathbb{R}$ ou le plan complexe $\mathbb{C}$, $f : [x_0, +\infty) \times (\mathbb{K}^n)^k \rightarrow \mathbb{K}^n$ est localement de Caratheodory et de plus les fonctions à valeurs réelles σ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ sont supposées continues sur $[x_0, +\infty)$ telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma_i(x) = +\infty$ pour $i = 1, 2, \dots, k$. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, les auteurs ont prouvé que le problème (2) admet au moins une solution et sous une condition généralisée de Lipschitz, les auteurs ont prouvé que le problème (2) admet une unique solution.

Cette thèse est constituée de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, en utilisant la méthode des sous et sur-solutions couplée avec la technique itérative, on montre l'existence de solutions minimales et maximales pour le problème suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''))'' = f(x, u, u''), & x \in I, \\ u(0) - au'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}u(\xi_{i1}), \\ \varphi_p(u'')(0) - b(\varphi_p(u''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2}u''(\xi_{i2}), \end{cases}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $I =]0, +\infty[$, $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $a_{ij} \geq 0$ et $\xi_{ij} \in I$ pour tout $i = 1, 2, \dots, m_j$ et $j = 1, 2$ et a, b sont des nombres réels positifs.

Le second chapitre est consacré à la construction des solutions extrémales en utilisant la méthode des sous et sur-solutions pour le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'''))' = f(x, u, u'', u'''), & x \in I, \\ u(0) - au'(0) = g_1(u), \\ u''(0) - bu'''(0) = g_2(u''), \end{cases}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $I =]0, +\infty[$, $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait des conditions de type WINTNER-NAGUMO, et $g_1 : C^3(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue croissante, $g_2 : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue décroissante et a et b sont des réels positifs.

Le troisième chapitre a pour objectif d'étudier l'existence de solutions positives, en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour le problème à valeur finale suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x, u(x), u''(x)), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, est continue et $\xi > 0$.

Dans le dernier chapitre, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on montre l'existence de solutions pour le problème à valeur finale avec déviation d'argument suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''))''(x) = f(x, u(\sigma(x))), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_p(u''))'(x) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est continue, $\xi \in \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) = +\infty$.

Chapitre 1

Existence de solutions extrêmes pour une équation différentielle quasi-linéaire du quatrième ordre sur la demi-droite avec conditions initiales multipoints sans conditions à l'infini

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence de solutions minimales et maximales pour le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(u''))'' = f(x, u, u''), \quad x \in I, \\ u(0) - au'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}u(\xi_{i1}), \\ \varphi_p(u'')(0) - b(\varphi_p(u''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2}u''(\xi_{i2}), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $I =]0, +\infty[$, $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a_{ij} \geq 0$ et $\xi_{ij} \in I$ pour tout $i = 1, 2, \dots, m_j$ et $j = 1, 2$ et

a, b sont des nombres réels positifs.

Le but de ce chapitre est de montrer que la méthode des sous et sur-solutions couplée avec la technique itérative, peut être appliquée avec succès pour des problèmes de type (1.1). Notons également qu'à notre connaissance, il s'agit de la première fois qu'on utilise cette méthode pour prouver l'existence de solutions pour des équations différentielles quasi-linéaires du quatrième ordre sur la demi-droite avec des valeurs initiales non locales et sans conditions à l'infini.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la deuxième section, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires. Le résultat principal est présenté et prouvé dans la troisième section, suivi de quelques exemples dans la dernière section illustrant l'application de notre résultat.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [20].

1.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utiles dans la suite de ce chapitre. On considère les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} -u''(x) = g_1(x), & 0 < x < r, \\ u(0) - au'(0) = r_1, \\ u(r) + bu'(r) = r_2, \end{cases} \quad (1.2)$$

et

$$\begin{cases} -u''(x) + M_1 u(x) = g_2(x), & 0 < x < r, \\ u(0) - cu'(0) = r_3, \\ u(r) + du'(r) = r_4, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $g_1, g_2 : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, a, b, c et d sont des nombres réels positifs, M_1 est un nombre réel strictement positif et r_i sont des nombres réels pour $i = 1, \dots, 4$.

On a les résultats suivants :

Lemme 1.1 *Le problème (1.2) admet une unique solution donnée par*

$$u(x) = h_0(x)r_1 + \frac{1}{\rho_0}k_0(x)r_2 + \int_0^r G_0(x, s)g_1(s)ds,$$

où

$$G_0(x, s) = \begin{cases} h_0(x)k_0(s) & \text{si } 0 \leq s \leq x \leq r, \\ k_0(x)h_0(s) & \text{si } 0 \leq x \leq s \leq r, \end{cases}$$

avec

$$h_0(x) = \frac{1}{\rho_0} (r + b - x), \quad k_0(x) = a + x \quad \text{et} \quad \rho_0 = a + b + r.$$

Preuve: La preuve est une conséquence du Lemme 2.1 dans [1]. ■

Lemme 1.2 *Le problème (1.3) admet une unique solution donnée par*

$$u(x) = H_0(x)r_3 + \frac{1}{\rho} K_0(x)r_4 + \int_0^r G_{M_1}(x, s) g_2(s) ds,$$

où

$$G_{M_1}(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{M_1}} \begin{cases} H_0(x)K_0(s) & \text{si } 0 \leq s \leq x \leq r, \\ K_0(x)H_0(s) & \text{si } 0 \leq x \leq s \leq r, \end{cases}$$

avec

$$H_0(x) = \frac{1}{\rho} \left[(1 + d\sqrt{M_1})e^{\sqrt{M_1}(r-x)} - (1 - d\sqrt{M_1})e^{-\sqrt{M_1}(r-x)} \right],$$

$$K_0(x) = (1 + c\sqrt{M_1})e^{\sqrt{M_1}x} - (1 - c\sqrt{M_1})e^{-\sqrt{M_1}x},$$

et

$$\rho = (1 + c\sqrt{M_1})(1 + d\sqrt{M_1})e^{\sqrt{M_1}r} - (1 - c\sqrt{M_1})(1 - d\sqrt{M_1})e^{-\sqrt{M_1}r}.$$

Preuve: On pose par définition

$$y(x) = u'(x) + \sqrt{M_1}u(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, r]. \quad (1.4)$$

Alors d'après l'équation dans (1.3), on a

$$y'(x) - \sqrt{M_1}y(x) = -g_2(x), \quad \text{pour tout } x \in]0, r[.$$

Ce qui entraîne

$$y(x) = e^{\sqrt{M_1}x} \left(y(0) - \int_0^x e^{-\sqrt{M_1}s} g_2(s) ds \right), \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

D'autre part, d'après (1.4), on a

$$u(x) = e^{-\sqrt{M_1}x} \left(u(0) + \int_0^x e^{\sqrt{M_1}s} y(s) ds \right), \text{ pour tout } x \in [0, r].$$

Maintenant, comme

$$y(0) = u'(0) + \sqrt{M_1}u(0),$$

alors si on pose

$$A = y(0) = u'(0) + \sqrt{M_1}u(0), \quad (1.5)$$

et

$$B = \sqrt{M_1}u(0) - u'(0), \quad (1.6)$$

on obtient

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{M_1}} \left(Ae^{\sqrt{M_1}x} + Be^{-\sqrt{M_1}x} + \int_0^x (e^{-\sqrt{M_1}(x-s)} - e^{\sqrt{M_1}(x-s)}) g_2(s) ds \right).$$

En utilisant les conditions aux limites dans (1.3) et les relations (1.5) et (1.6), on obtient

$$A = \frac{1}{\rho} \left(-2\sqrt{M_1}(1 - d\sqrt{M_1})e^{-\sqrt{M_1}r}r_3 + 2\sqrt{M_1}(1 + c\sqrt{M_1})r_4 \right) + \frac{1}{\rho}(1 + c\sqrt{M_1}) \int_0^r \left((1 + d\sqrt{M_1})e^{\sqrt{M_1}(r-s)} - (1 - d\sqrt{M_1})e^{-\sqrt{M_1}(r-s)} \right) g_2(s) ds,$$

et

$$B = \frac{1}{\rho} \left(2\sqrt{M_1}(1 + d\sqrt{M_1})e^{\sqrt{M_1}r}r_3 - 2\sqrt{M_1}(1 - c\sqrt{M_1})r_4 \right) - \frac{1}{\rho}(1 - c\sqrt{M_1}) \int_0^r \left((1 + d\sqrt{M_1})e^{\sqrt{M_1}(r-s)} - (1 - d\sqrt{M_1})e^{-\sqrt{M_1}(r-s)} \right) g_2(s) ds.$$

Après quelques simples calculs, on obtient

$$u(x) = H_0(x)r_3 + \frac{1}{\rho}K_0(x)r_4 + \int_0^r G_{M_1}(x, s) g_2(s) ds.$$

■

On considère à présent le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''))''(x) - M_2\varphi_p(u''(x)) = h(x), & 0 < x < r, \\ u(0) - au'(0) = r_1, \\ u(r) + bu'(r) = r_2, \\ \varphi_p(u'')(0) - c(\varphi_p(u''))'(0) = r_3, \\ \varphi_p(u'')(r) + d(\varphi_p(u''))'(r) = r_4, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $h : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et M_2 est un nombre réel positif.

Proposition 1.1 *Le problème (1.7) admet une unique solution donnée par*

$$u(x) = h_0(x)r_1 + \frac{1}{\rho_0}k_0(x)r_2 - \int_0^r G_0(x, s) \varphi_p^{-1}(y)(s) ds,$$

où

$$y(x) = \begin{cases} h_0(x)r_3 + \frac{1}{\rho_0}k_0(x)r_4 - \int_0^r G_0(x, s) h(s) ds & \text{si } M_2 = 0, \\ H_0(x)r_3 + \frac{1}{\rho}K_0(x)r_4 - \int_0^r G_{M_2}(x, s) h(s) ds & \text{si } M_2 > 0, \end{cases}$$

et h_0, k_0, G_0 et ρ_0 sont définies dans le Lemme 1.1, avec $a = c$ et $b = d$.

Preuve: On pose par définition

$$y(x) = \varphi_p(u'')(x), \text{ pour tout } x \in [0, r].$$

Alors y est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} y''(x) - M_2y(x) = h(x), & 0 < x < r, \\ y(0) - cy'(0) = r_3, \\ y(r) + dy'(r) = r_4. \end{cases} \quad (1.8)$$

D'après les Lemmes 1.1 et 1.2, on déduit que le problème (1.8) admet une unique solution donnée par

$$y(x) = \begin{cases} h_0(x)r_3 + \frac{1}{\rho_0}k_0(x)r_4 - \int_0^r G_0(x, s) h(s) ds & \text{si } M_2 = 0, \\ H_0(x)r_3 + \frac{1}{\rho}K_0(x)r_4 - \int_0^r G_{M_2}(x, s) h(s) ds & \text{si } M_2 > 0. \end{cases}$$

Puisque $u'' = \varphi_p^{-1}(y)$, alors u est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = -\varphi_p^{-1}(y)(x), 0 < x < r, \\ u(0) - au'(0) = r_1, \\ u(r) + bu'(r) = r_2, \end{cases} \quad (1.9)$$

et par conséquent d'après le Lemme 1.1, il s'ensuit que le problème (1.9) admet une unique solution donnée par

$$u(x) = h_0(x)r_1 + \frac{1}{\rho_0}k_0(x)r_2 - \int_0^r G_0(x, s) \varphi_p^{-1}(y)(s) ds.$$

■

Lemme 1.3 *On suppose que u satisfait*

$$\begin{cases} -u''(x) \geq 0, 0 < x < r, \\ u(0) - au'(0) \geq 0, \\ u(r) + bu'(r) \geq 0, \end{cases}$$

alors $u(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0, r]$.

Preuve: La preuve est une conséquence immédiate du Lemme 1.1. ■

Lemme 1.4 *On suppose que u satisfait*

$$\begin{cases} -u''(x) + M u(x) \geq 0, 0 < x < r, \\ u(0) - a u'(0) \geq 0, \\ u(r) + b u'(r) \geq 0, \end{cases}$$

où M est un nombre réel strictement positif, alors $u(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0, r]$.

Preuve: La preuve est une conséquence immédiate du Lemme 1.2. ■

Dans tout ce qui suit, on pose par définition

$$(A_p u)(x) = (\varphi_p(u''))''(x) - M \varphi_p(u'')(x), \text{ pour tout } x \in]0, r[,$$

où M est un nombre réel strictement positif.

On a le résultat suivant :

Lemme 1.5 (*Principe de comparaison faible*)

Soient v_1 et v_2 telles que $v_i \in C^2([0, r])$, $\varphi_p(v_i'') \in C^2([0, r])$, $i = 1, 2$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_p v_1)(x) \leq (A_p v_2)(x), \quad 0 < x < r, \\ v_1(0) - av_1'(0) \leq v_2(0) - av_2'(0), \\ v_1(r) + bv_1'(r) \leq v_2(r) + bv_2'(r), \\ \varphi_p(v_1'')(0) - c(\varphi_p(v_1''))'(0) \geq \varphi_p(v_2'')(0) - c(\varphi_p(v_2''))'(0), \\ \varphi_p(v_1'')(r) + d(\varphi_p(v_1''))'(r) \geq \varphi_p(v_2'')(r) + d(\varphi_p(v_2''))'(r), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

alors $v_1(x) \leq v_2(x)$ et $v_1''(x) \geq v_2''(x)$, pour tout $x \in [0, r]$.

Preuve: On pose par définition

$$y(x) = \varphi_p(v_1'')(x) - \varphi_p(v_2'')(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

D'après (1.10), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) - M y(x) \leq 0, \quad 0 < x < r, \\ y(0) - cy'(0) \geq 0, \\ y(r) + dy'(r) \geq 0, \end{array} \right.$$

alors d'après le Lemme 1.4, on a

$$y(x) \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

C'est-à-dire

$$\varphi_p(v_1'')(x) \geq \varphi_p(v_2'')(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

Puisque φ_p^{-1} est une application croissante, on a

$$v_1''(x) \geq v_2''(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

Si on pose $z = u_1 - u_2$, alors de l'égalité précédente et (1.10), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} z''(x) \geq 0, \quad 0 < x < r, \\ z(0) - a z'(0) \leq 0, \\ z(r) + b z'(r) \leq 0, \end{array} \right.$$

et par conséquent d'après le Lemme 1.3, il s'ensuit que

$$z(x) \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

C'est-à-dire

$$v_1(x) \leq v_2(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, r].$$

■

1.3 Résultat principal

Dans cette section, on donne quelques définitions, on énonce et on montre notre résultat principal.

Notation : Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on note par $C_{loc}^2(A)$ l'espace des fonctions qui sont $C^2(K)$ pour chaque compact K dans A .

Définition 1.1 On dit que u est une solution du problème (1.1) si

- i) $u \in C_{loc}^2([0, +\infty[)$ et $\varphi_p(u'') \in C_{loc}^2([0, +\infty[)$.
- ii) u satisfait (1.1)

Définition 1.2 On dit que α est une sur solution du problème (1.1) si

- i) $\alpha \in C_{loc}^2([0, +\infty[)$ et $\varphi_p(\alpha'') \in C_{loc}^2([0, +\infty[)$.
- ii)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(\alpha''))'' \geq f(x, \alpha, \alpha''), x \in I =]0, +\infty[, \\ \alpha(0) - a\alpha'(0) \geq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1} \alpha(\xi_{i_1}), \\ \varphi_p(\alpha'')(0) - b(\varphi_p(\alpha''))'(0) \leq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2} \alpha''(\xi_{i_2}). \end{array} \right.$$

Définition 1.3 On dit que β est une sous solution du problème (1.1) si

- i) $\beta \in C_{loc}^2([0, +\infty[)$ et $\varphi_p(\beta'') \in C_{loc}^2([0, +\infty[)$.
- ii)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(\beta''))'' \leq f(x, \beta, \beta''), x \in I =]0, +\infty[, \\ \beta(0) - a_1\beta'(0) \leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1} \beta(\xi_{i_1}), \\ \varphi_p(\beta'')(0) - a_2(\varphi_p(\beta''))'(0) \geq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2} \beta''(\xi_{i_2}). \end{array} \right.$$

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant :

Théorème 1.1 On Suppose que le problème (1.1) admet une sur solution α et une sous solution β satisfaisant

$$\beta(x) \leq \alpha(x) \text{ et } \beta''(x) \geq \alpha''(x), \text{ pour tout } x \in I.$$

Si $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H₁) $f(x, u_2, v) - f(x, u_1, v) \geq 0$ pour $\beta(x) \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \alpha(x)$ et $\alpha''(x) \leq v(x) \leq \beta''(x)$ pour tout $x \in \bar{I}$,

et

(H₂) Il existe un nombre réel positif M tel que $f(x, u, v_2) - M\varphi_p(v_2(x)) \leq f(x, u, v_1) - M\varphi_p(v_1(x))$ pour $\beta(x) \leq u(x) \leq \alpha(x)$, $\alpha''(x) \leq v_1(x) \leq v_2(x) \leq \beta''(x)$, $\forall x \in \bar{I}$.

Alors le problème (1.1) admet une solution maximale u^* et une solution minimale u_* telles que pour toute solution u de (1.1) avec

$$\beta(x) \leq u(x) \leq \alpha(x) \text{ et } \alpha''(x) \leq u''(x) \leq \beta''(x) \text{ dans } \bar{I},$$

on a

$$\begin{aligned} \beta(x) &\leq u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \leq \alpha(x) \text{ et} \\ \alpha''(x) &\leq u_*''(x) \leq u''(x) \leq u_*''(x) \leq \beta''(x) \text{ dans } \bar{I}. \end{aligned}$$

Preuve: On considère le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_p u_n)(x) = F_n(x), x \in I_n, \\ u_n(0) - a u_n'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} U_{n-1}(\xi_{i1}), \\ u_n(n) = u^{(0)}(n), \\ \varphi_p(u_n'')(0) - b(\varphi_p(u_n''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} U_{n-1}''(\xi_{i2}), \\ \varphi_p(u_n'')(n) = \varphi_p((u^{(0)})'')(n), \end{array} \right. \quad (1.11)$$

où la suite de fonctions $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$U_0 = u^{(0)} \text{ où } u^{(0)} \text{ est soit la sous solution } \beta \text{ ou la sur solution } \alpha,$$

et

$$U_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in \bar{I}_n, \\ u^{(0)}(x), & x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_n, \end{cases}$$

avec $I_n =]0, n[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$F_n(x) = f(x, U_{n-1}(x), U_{n-1}''(x)) - M\varphi_p(U_{n-1}''(x)).$$

Étape 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (1.11) admet une unique solution u_n telle que $u_n \in C^2(\bar{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n'') \in C^2(\bar{I}_n)$.

Pour $n = 1$, on a

$$\begin{cases} (A_p u_1)(x) = F_1(x), x \in I_1, \\ u_1(0) - a u_1'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} U_0(\xi_{i1}), \\ u_1(1) = u^{(0)}(1), \\ \varphi_p(u_1'')(0) - b(\varphi_p(u_1''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} U_0''(\xi_{i2}), \\ \varphi_p(u_1'')(1) = \varphi_p(u^{(0)''})(1), \end{cases} \quad (1.12)$$

comme $U_0 = u^{(0)} \in C^2(\bar{I}_1)$, f et φ_p sont continues, alors d'après le corollaire 1.1, le problème (1.12) admet une unique solution u_1 telle que $u_1 \in C^2(\bar{I}_1)$ et $\varphi_p(u_1'') \in C^2(\bar{I}_1)$.

On suppose pour $n > 1$ fixé, que le problème (1.11) admet une unique solution u_n telle que $u_n \in C^2(\bar{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n'') \in C^2(\bar{I}_n)$, et on montre que le problème suivant :

$$\begin{cases} (A_p u_{n+1})(x) = F_{n+1}(x), x \in I_{n+1}, \\ u_{n+1}(0) - a u_{n+1}'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} U_n(\xi_{i1}), \\ u_{n+1}(n+1) = u^{(0)}(n+1), \\ \varphi_p(u_{n+1}'')(0) - b(\varphi_p(u_{n+1}''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} U_n''(\xi_{i2}), \\ \varphi_p(u_{n+1}'')(n+1) = \varphi_p(u^{(0)''})(n+1), \end{cases} \quad (1.13)$$

admet une unique solution u_{n+1} telle que $u_{n+1} \in C^2(\bar{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}'') \in C^2(\bar{I}_{n+1})$.

Comme $u^{(0)} \in C^2(\bar{I})$, $u_n \in C^2(\bar{I}_n)$, $u_n(n) = u^{(0)}(n)$ et $\varphi_p(u_n'')(n) = \varphi_p(u^{(0)''})(n)$, alors U_n et $\varphi_p(U_n'')$ sont continues sur $\bar{I}$ et comme f et φ_p sont continues, alors d'après le corollaire 1.1, le problème (1.13) admet une unique solution u_{n+1} telle que $u_{n+1} \in C^2(\bar{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}'') \in C^2(\bar{I}_{n+1})$.

La preuve de l'étape 1 est terminée.

D'après l'étape 1, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (1.11) admet une unique solution $\bar{u}_n$ si $u^{(0)} = \alpha$ et une unique solution $\underline{u}_n$ si $u^{(0)} = \beta$.

Maintenant, on définit les suites $(\bar{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\bar{U}_n(x) = \begin{cases} \bar{u}_n(x) & \text{si } x \in \bar{I}_n, \\ \alpha(x) & \text{si } x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_n, \end{cases}$$

et

$$\underline{U}_n(x) = \begin{cases} \underline{u}_n(x) & \text{si } x \in \bar{I}_n, \\ \beta(x) & \text{si } x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_n, \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 1.5, il n'est pas difficile de prouver que pour $k = 0, 1$ et $x \in \bar{I}$, on a

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \underline{U}_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x). \quad (1.14)$$

Étape 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I},$$

et

$$(-1)^k \underline{U}_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \underline{U}_{n+1}^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}.$$

On prouve seulement

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x).$$

On distingue trois cas :

(i) Si $x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_{n+1}$, on a

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) = (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \alpha^{(2k)}(x).$$

(ii) Si $x \in \bar{I}_{n+1} \setminus \bar{I}_n$, on a

$$\begin{aligned} (-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) &= (-1)^k \bar{u}_{n+1}^{(2k)}(x) \\ &\leq (-1)^k \beta^{(2k)}(x) \\ &\leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \\ &= (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x), \text{ pour tout } x \in \bar{I}_{n+1} \setminus \bar{I}_n.$$

(iii) Si $x \in \bar{I}_n$, on a

$$\bar{U}_{n+1} = \bar{u}_{n+1} \text{ et } \bar{U}_n = \bar{u}_n.$$

Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
& (A_p u_2)(x) - (A_p u_1)(x) \\
&= \left(f\left(x, \bar{U}_1, \bar{U}_1''\right) - M\varphi_p\left(\bar{U}_1''\right)(x) \right) - \left(f\left(x, \alpha, \alpha''\right) - M\varphi_p(\alpha'') \right) \\
&\leq \left(f\left(x, \alpha, \bar{U}_1''\right) - M\varphi_p\left(\bar{U}_1''\right)(x) \right) - \left(f\left(x, \alpha, \alpha''\right) - M\varphi_p(\alpha'') \right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(A_p u_2)(x) \leq (A_p u_1)(x). \quad (1.15)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2(0) - a\bar{u}_2'(0) &= \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} \bar{u}_1(\xi_{i1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} \alpha(\xi_{i1}) \\
&= \bar{u}_1(0) - a\bar{u}_1'(0).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\bar{u}_2(0) - a\bar{u}_2'(0) \leq \bar{u}_1(0) - a\bar{u}_1'(0). \quad (1.16)$$

Aussi, on a

$$\bar{u}_2(1) \leq \alpha(1) = \bar{u}_1(1), \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_p(\bar{u}_2'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_2''))'(0) &= \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} \bar{u}_1''(\xi_{i2}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} \alpha''(\xi_{i2}) \\
&= \varphi_p(\bar{u}_1'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_1''))'(0).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\varphi_p(\bar{u}_2'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_2''))'(0) \geq \varphi_p(\bar{u}_1'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_1''))'(0), \quad (1.18)$$

et

$$\bar{u}_2''(1) \geq \alpha''(1) = \bar{u}_1''(1). \quad (1.19)$$

Alors d'après (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), (1.19) et le Lemme 1.5 , il s'ensuit que

$$\bar{u}_2 \leq \bar{u}_1 \text{ et } \bar{u}_2'' \geq \bar{u}_1''.$$

Ce qui signifie que

$$(-1)^k \bar{U}_2^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_1^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}_1.$$

On suppose pour $n > 1$ fixé, qu'on a

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}_n,$$

et on montre que

$$(-1)^k \bar{U}_{n+2}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}_n.$$

On a

$$\begin{aligned} (A_p u_{n+2})(x) - (A_p u_{n+1})(x) &= f\left(x, \bar{U}_{n+1}, \bar{U}_{n+1}''\right) - f\left(x, \bar{U}_n, \bar{U}_n''\right) \\ &= f\left(x, \bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}''\right) - f\left(x, \bar{u}_n, \bar{u}_n''\right) \leq 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(A_p u_{n+2})(x) \leq (A_p u_{n+1})(x). \quad (1.20)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+2}(0) - a\bar{u}_{n+2}'(0) &= \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} \bar{u}_{n+1}(\xi_{i1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} \bar{u}_n(\xi_{i1}) \\ &= \bar{u}_{n+1}(0) - a\bar{u}_{n+1}'(0). \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\bar{u}_{n+2}(0) - a\bar{u}_{n+2}'(0) \leq \bar{u}_{n+1}(0) - a\bar{u}_{n+1}'(0). \quad (1.21)$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} \varphi_p(\bar{u}_{n+2}'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_{n+2}''))'(0) &= \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} \bar{u}_{n+1}''(\xi_{i2}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m_3} a_{i2} \bar{u}_n''(\xi_{i2}) \\ &= \varphi_p(\bar{u}_{n+1}'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_{n+1}''))'(0). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\varphi_p(\bar{u}_{n+2}'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_{n+2}''))'(0) \geq \varphi_p(\bar{u}_{n+1}'')(0) - b(\varphi_p(\bar{u}_{n+1}''))'(0). \quad (1.22)$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+2}(n+1) &\leq \alpha(n+1) \\ &= \bar{U}_{n+1}(n+1) \\ &= \bar{u}_{n+1}(n+1). \end{aligned}$$

Ça veut dire que

$$\bar{u}_{n+2}(n+1) \leq \bar{u}_{n+1}(n+1). \quad (1.23)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+2}''(n+1) &\geq \alpha''(n+1) \\ &= \bar{U}_{n+1}''(n+1) \\ &= \bar{u}_{n+1}''(n+1). \end{aligned}$$

Ce qui signifie que

$$\bar{u}_{n+2}''(n+1) \geq \bar{u}_{n+1}''(n+1). \quad (1.24)$$

Alors d'après (1.20), (1.21), (1.22), (1.23), (1.24) et le Lemme 1.5, on déduit

$$\bar{u}_{n+2} \leq \bar{u}_{n+1} \text{ et } \bar{u}_{n+1}'' \leq \bar{u}_{n+2}'', \text{ pour tout } x \in \bar{I}_n.$$

C'est-à-dire

$$\bar{U}_{n+2} \leq \bar{U}_{n+1} \text{ et } \bar{U}_{n+1}'' \leq \bar{U}_{n+2}'', \text{ pour tout } x \in \bar{I}_n.$$

Ce qui signifie que $(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x)$, pour $k = 0, 1$ et $x \in \bar{I}_n$.

Maintenant, soit $A = [0, R]$ avec $R > 0$, alors il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset \bar{I}_l = [0, l]$.

Soit l fixé et $k \geq l + 1$. Alors la restriction de la suite $(\bar{U}_k)_{k \geq l+1}$ à $\bar{I}_l$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_p \bar{U}_k)(x) = F_k(x), \quad x \in I_l, \\ \bar{U}_k(0) - a \bar{U}_k'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} \bar{U}_{k-1}(\xi_{i1}), \\ \bar{U}_k(l) \leq \bar{U}_l(l) = \alpha(l), \\ \varphi_p(\bar{U}_k'')(0) - b(\varphi_p(\bar{U}_k''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2} \bar{U}_{k-1}''(\xi_{i2}), \\ \bar{U}_k''(l) \geq \bar{U}_l''(l) = \alpha''(l). \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Étape 3 : Il existe une constante positive C_l telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq l + 1$,

on a

$$\left\| \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' \right\|_0 := \max_{x \in [0, l]} \left| \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' (x) \right| \leq C_l.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq l + 1$ et $x \in \overline{I_l} = [0, l]$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (l) - \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (0) = l \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' (\theta_k),$$

avec $\theta_k \in I_l =]0, l[$.

C'est-à-dire

$$\left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' (\theta_k) = \frac{\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (l) - \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (0)}{l}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' (x) &= \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' (\theta_k) + \int_{\theta_k}^x \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)'' (s) ds \\ &= \frac{\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (l) - \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (0)}{l} + \int_{\theta_k}^x \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)'' (s) ds \\ &= \frac{\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (l) - \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (0)}{l} + \int_{\theta_k}^x \widetilde{f}_k (s) ds, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{f}_k (s) = f \left(s, \overline{U}_{k-1}, \overline{U}_{k-1}'' \right) + M \left(\varphi_p \left(\overline{U}_{k-1}'' \right) (s) - \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (s) \right).$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \left| \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' (x) \right| &\leq \frac{\left| \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (l) - \varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (0) \right|}{l} + \int_{\theta_k}^x \left| \widetilde{f}_k (s) \right| ds, \\ &\leq \frac{2}{l} M_l + l \widetilde{M}_l, \end{aligned}$$

où

$$M_l = \max \left(\|\varphi_p(\alpha'')\|_0, \|\varphi_p(\beta'')\|_0 \right),$$

et

$$\widetilde{M}_l = \max_{x \in \bar{I}_l} \{ |f(x, u, v)|; \beta \leq u \leq \alpha \text{ et } \alpha'' \leq v \leq \beta'' \} + 2MM_l.$$

Alors si on pose

$$C_l = \frac{2}{l}M_l + l\widetilde{M}_l,$$

on obtient

$$\left\| \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' \right\|_0 \leq C_l.$$

La preuve de l'étape 3 est terminée.

Étape 4 : Il existe une constante positive $\widetilde{C}_l$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \geq l + 1$,

on a

$$\left\| \overline{U}_k' \right\|_0 := \max_{x \in [0, l]} \left| \overline{U}_k'(x) \right| \leq \widetilde{C}_l.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq l + 1$ et $x \in \bar{I}_l = [0, l]$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\overline{U}_k(l) - \overline{U}_k(0) = l\overline{U}_k'(\tau_k),$$

avec $\tau_k \in I_l =]0, l[$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} \left| \overline{U}_k'(x) \right| &= \left| \overline{U}_k'(\tau_k) + \int_{\tau_k}^x \overline{U}_k''(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{\overline{U}_k(l) - \overline{U}_k(0)}{l} + \int_{\tau_k}^x \overline{U}_k''(t) dt \right| \\ &\leq \left| \frac{\overline{U}_k(l) - \overline{U}_k(0)}{l} \right| + \left| \int_{\tau_k}^x \overline{U}_k''(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2 \max(\|\alpha\|_0, \|\beta\|_0)}{l} + l \max(\|\alpha''\|_0, \|\beta''\|_0) \end{aligned}$$

Maintenant, si on pose

$$\tilde{C}_l = \frac{2 \max(\|\alpha\|_0, \|\beta\|_0)}{l} + l \max(\|\alpha''\|_0, \|\beta''\|_0),$$

on obtient

$$\left\| \overline{U}'_k \right\|_0 := \max_{x \in [0, l]} \left| \overline{U}'_k(x) \right| \leq \tilde{C}_l.$$

La preuve de l'étape 4 est terminée.

Étape 5 : La suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ converge vers une solution maximale du problème (1.1).

D'après (1.14) et les étapes 3 et 4, on déduit que la suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ est uniformément bornée dans $C^2(\overline{I}_l)$ et que la suite $(\varphi_p(\overline{U}_k''))_{k \geq l+1}$ est uniformément bornée dans $C^1(\overline{I}_l)$.

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ et $s, t \in \overline{I}_l$ tels que $s < t$, alors pour chaque $k \geq l+1$, on a

$$\begin{aligned} & \left| (\varphi_p(\overline{U}_k''))'(t) - (\varphi_p(\overline{U}_k''))'(s) \right| \\ &= \left| \int_s^t (f(x, \overline{U}_{k-1}(x), \overline{U}_{k-1}''(x)) + M((\varphi_p(\overline{U}_k''))(x) - (\varphi_p(\overline{U}_{k-1}''))(x))) dx \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x, \overline{U}_{k-1}(x), \overline{U}_{k-1}''(x))| + M \left| ((\varphi_p(\overline{U}_k''))(x) - (\varphi_p(\overline{U}_{k-1}''))(x)) \right| dx \\ &\leq (M_f + 2M'M) |t - s|, \end{aligned}$$

où

$$M_f = \max_{x \in \overline{I}_l} \{ |f(x, u, u'')| ; x \in \overline{I}_l, \beta \leq u \leq \alpha, \text{ et } \alpha'' \leq u'' \leq \beta'' \},$$

et

$$M' = \max_{x \in \overline{I}_l} \{ |(\varphi_p(u''))| ; \alpha'' \leq u'' \leq \beta'' \}.$$

Alors si on choisit

$$|t - s| < \frac{\varepsilon}{M_f + 2M'M},$$

on obtient

$$\left| (\varphi_p(\overline{U}_k''))'(t) - (\varphi_p(\overline{U}_k''))'(s) \right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $\left(\left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' \right)_{k \geq l+1}$ est équicontinue sur $\overline{I}_l$.

D'autre part, puisque l'application φ_p^{-1} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit de la formule suivante :

$$\left| \overline{U}_k''(s) - \overline{U}_k''(t) \right| = \left| \varphi_p^{-1} \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (s) \right) - \varphi_p^{-1} \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) (t) \right) \right|$$

que la suite $\left(\overline{U}_k'' \right)_{k \geq l+1}$ est équicontinue sur $\overline{I}_l$.

D'où, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite $\left(\overline{U}_{k_j} \right)_{k_j \in \mathbb{N}}$ de la suite $\left(\overline{U}_k \right)_{k \geq l+1}$ qui converge dans $C^2(\overline{I}_l)$ telle que la suite $\left(\varphi_p \left(\overline{U}_{k_j}'' \right) \right)_{k_j \geq l+1}$ converge dans $C^1(\overline{I}_l)$.

Soit

$$u^{(m)} = \lim_{k_j \rightarrow +\infty} \overline{U}_{k_j}^{(m)} \text{ pour } m = 0, 1, 2,$$

et

$$\left(\varphi_p(u'') \right)' = \lim_{k_j \rightarrow +\infty} \left(\varphi_p \left(\overline{U}_{k_j}'' \right) \right)'.$$

Mais, d'après l'étape 2, la suite $\left(\overline{U}_k \right)_{k \geq l+1}$ est décroissante et bornée, alors la limite ponctuelle de cette suite existe et elle est notée par u^* . Alors on a $u = u^*$ et de plus, la suite converge dans $C^2(\overline{I}_l)$ vers u^* et $\left(\left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)' \right)_{k \geq l+1}$ converge vers $\left(\varphi_p(u^{*''}) \right)'$.

Soit $x \in I_l$, on a

$$\left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)'(x) = \left(\varphi_p \left(\overline{U}_k'' \right) \right)'(0) + \int_0^x \widetilde{f}_k(s) ds.$$

Maintenant, quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\widetilde{f}_k(s) \rightarrow f(s, u^*(s), u^{*''}(s)).$$

On a aussi

$$\exists K > 0, \forall k \geq l+1, \forall s \in \overline{I}_l : \left| \widetilde{f}_k(s) \right| \leq K.$$

Ainsi, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\left(\varphi_p(u^{*''}) \right)'(x) = \left(\varphi_p(u^{*''}) \right)'(0) + \int_0^x f(s, u^*(s), u^{*''}(s)) ds.$$

Ainsi, on obtient

$$(\varphi_p(u^{*''}))''(x) = f(x, u^*(x), u^{*''}(x)), \forall x \in I.$$

Nous avons aussi

$$\begin{cases} u^*(0) - au^{*'}(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}u^*(\xi_{i1}), \\ \varphi_p(u^{*''})(0) - b\varphi_p(u^{*''})'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2}u^{*''}(\xi_{i2}). \end{cases}$$

Par conséquent u^* est une solution du problème (1.11) et comme A est un domaine borné arbitraire, il s'ensuit que u^* est une solution du problème (1.1).

Maintenant, on va prouver que u^* est une solution maximale. C'est-à-dire, si v est une autre solution de (1.1) telle que $\beta \leq v \leq \alpha$ dans $\bar{I}_l$, alors $v \leq u^*$.

Soit v une solution de (1.1), alors on a

$$\begin{cases} (\varphi_p(v''))'' = f(x, v, v'') \leq f(x, v, v''), 0 < x < +\infty, \\ v(0) - av'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}v(\xi_{i1}) \leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}v(\xi_{i1}), \\ \varphi_p(v'')(0) - b(\varphi_p(v''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2}v''(\xi_{i2}) \geq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2}v''(\xi_{i2}). \end{cases}$$

Ce qui montre que v est une sous solution de (1.1) et d'après l'étape 2, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v \leq \bar{U}_n \text{ et } v'' \geq \bar{U}_n''.$$

Si $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$v \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}_n = u^*.$$

Ce qui signifie que u^* est une solution maximale de (1.1).

De la même manière, on peut prouver que la suite $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale u_* du problème (1.1).

La preuve de notre résultat est complète. ■

Remarque 1.1 *Le théorème 1.1 reste valable si on considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} (\Phi(u''))'' = f(x, u, u''), x \in I, \\ u(0) - au'(0) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i1}u(\xi_{i1}), \\ \Phi(u'')(0) - b(\Phi(u''))'(0) = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i2}u''(\xi_{i2}), \end{cases}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme impair croissant.

Remarque 1.2 Le théorème 1.1 reste également valable si on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (\Phi(u''))'' = f(x, u, u''), & x \in I, \\ u(0) - au'(0) = L_1(u), \\ \Phi(u'')(0) - b(\Phi(u''))'(0) = L_2(u''), \end{cases}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme impair croissant, $L_1 : C^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et croissante et $L_2 : C(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et décroissante.

1.4 Applications

Dans cette section, nous donnons quelques exemples illustrant l'application de notre résultat.

Exemple 1.1 On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''))''(x) = (p-1)^2 [e^{(1-p)x}u(x) + 3\varphi_p(u'')(x)], & x \in I, \\ u(0) = 1, \\ \varphi_p(u'')(0) - \frac{1}{4(p-1)}(\varphi_p(u''))'(0) = \frac{1}{2}u''(2) + \frac{1}{4}u''(3), \end{cases} \quad (1.26)$$

où $p > 1$ et $I =]0, +\infty[$.

On pose par définition

$$\alpha(x) = 2 - e^{-x} \text{ et } \beta(x) = 0, \text{ pour tout } x \in I.$$

Il est facile de vérifier que β est une sous solution du problème (1.26).

D'un autre côté, α est une sur solution du problème (1.26) si on a

$$\begin{cases} (\varphi_p(\alpha''))''(x) \geq (p-1)^2 [e^{(1-p)x}\alpha(x) + 3\varphi_p(\alpha'')(x)], & x \in I, \\ \alpha(0) \geq 1, \\ \varphi_p(\alpha'')(0) - \frac{1}{4(p-1)}(\varphi_p(\alpha''))'(0) \leq \frac{1}{2}\alpha''(2) + \frac{1}{4}\alpha''(3). \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -(p-1)^2 e^{(1-p)x} \geq (p-1)^2 [e^{(1-p)x}(2 - e^{-x}) - 3e^{(1-p)x}], & x \in I, \\ 1 \geq 1, \\ -1 - \frac{p-1}{4(p-1)} \leq -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-3}}{4}. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} -(p-1)^2 e^{(1-p)x} \geq -(p-1)^2 e^{(1-p)x} - (p-1)^2 e^{-px}, & x \in I, \\ 0 \geq 0, \\ -1.25 \leq -8.0114 \times 10^{-2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit alors que α est une sur solution du problème (1.26).

D'autre part, il n'est pas difficile de prouver que la fonction f définie par

$$f(x, u, u'') = (p-1)^2 [e^{(1-p)x} u(x) + 3\varphi_p(u'')(x)], \quad x \in \bar{I},$$

satisfait les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$ du théorème 1.1 et par conséquent, il s'ensuit que le problème (1.26) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telle que

$$0 = \beta(x) \leq u_*(x) \leq u^*(x) \leq \alpha(x) = 2 - e^{-x}, \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

et

$$-e^{-x} = \alpha''(x) \leq u''_*(x) \leq u''_*(x) \leq \beta''(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

Exemple 1.2 On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''))'' = \frac{4p}{(x+2)^{2p} \ln(x+2)} u + \frac{4p^2}{(x+2)^2} \varphi_p(u''), & x \in I, \\ u(0) - u'(0) = \frac{1}{12} u(1) + \frac{1}{20} u(2) + e^{-4}, \\ \varphi_p(u'')(0) - (\varphi_p(u''))'(0) = \frac{1}{2} u''(1) + \frac{1}{4} u''(2), \end{cases} \quad (1.27)$$

où $1 < p \leq 2$ et $I =]0, +\infty[$.

On pose par définition

$$\alpha(x) = \ln(x+2) \text{ et } \beta(x) = 0, \quad x \in I.$$

D'abord, il est facile de vérifier que β est une sous solution du problème (1.27).

D'autre part α est une sur solution pour le problème (1.27) si on a

$$\begin{cases} (\varphi_p(\alpha''))'' \geq \frac{4p}{(x+2)^{2p} \ln(x+2)} \alpha + \frac{4p^2}{(x+2)^2} \varphi_p(\alpha''), & x \in I, \\ \alpha(0) - \alpha'(0) \geq \frac{1}{12} \alpha(1) + \frac{1}{20} \alpha(2) + e^{-4}, \\ \varphi_p(\alpha'')(0) - (\varphi_p(\alpha''))'(0) \leq \frac{1}{2} \alpha''(1) + \frac{1}{4} \alpha''(2). \end{cases}$$

Ça veut dire que

$$\begin{cases} \frac{2(p-1)(1-2p)}{(x+2)^{2p}} \geq \frac{4p}{(x+2)^{2p}} - \frac{4p^2}{(x+2)^{2p}}, & x \in I, \\ \ln 2 - \frac{1}{2} \geq \frac{\ln 3}{12} + \frac{\ln 4}{20} + e^{-4}, \\ -\frac{1}{2^{2p-1}} - \frac{2p-1}{2^{2p-1}} \leq -\frac{1}{18} - \frac{1}{64}. \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \frac{-2(p-1)(2p-1)}{(x+2)^{2p}} \geq \frac{-4p(p-1)}{(x+2)^{2p}}, & x \in I, \\ 0.19315 \geq 0.17918, \\ -\frac{p}{2^{2p-2}} \leq -\frac{41}{576}. \end{cases}$$

Comme il n'est pas difficile de vérifier que $-\frac{p}{2^{2p-2}} \leq -\frac{41}{576}$ si $1 < p \leq 2$, alors il s'ensuit que α est une sur solution pour le problème (1.27).

D'autre part, il n'est pas difficile de prouver que la fonction f définie par

$$f(x, u, u'') = \frac{4p}{(x+2)^{2p} \ln(x+2)} u + \frac{4p^2}{(x+2)} \varphi_p(u''), \quad x \in \bar{I},$$

satisfait les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème 1.1 et par conséquent, il s'ensuit que le problème (1.27) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telle que

$$0 = \beta(x) \leq u_*(x) \leq u^*(x) \leq \alpha(x) = \ln(x+2), \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

et

$$-\frac{1}{(x+2)^2} = \alpha''(x) \leq u^{*''}(x) \leq u_*''(x) \leq \beta''(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

Chapitre 2

Existence de solutions extrémales pour une équation différentielle quasi-linéaire du quatrième ordre avec des conditions initiales non locales sur la demi-droite

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence de solutions minimales et maximales pour le problème suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'''))' = f(x, u, u'', u'''), & x \in I, \\ u(0) - au'(0) = g_1(u), \\ u''(0) - bu'''(0) = g_2(u''), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $I =]0, +\infty[$, $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait les conditions de croissance de type WINTNER-NAGUMO, $g_1 : C^3(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue croissante, $g_2 : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue décroissante et a et b sont des réels positifs.

Comme dans le premier chapitre, notre but est de montrer que cette méthode peut être appliquée avec succès aux problèmes de type (2.1).

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, nous donnons quelques définitions. Le résultat principal est présenté et démontré dans la section 3, suivi d'un exemple dans la section 4 illustrant l'application de notre résultat.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [21].

2.2 Définitions

Dans cette section, nous donnons quelques définitions.

Notation : Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous désignons par $C_{loc}^k(A)$ l'espace des fonctions qui sont $C^k(K)$ pour chaque compact K dans A .

Définition 2.1 On dit que u est une solution du problème (2.1) si

$$(i) \quad u \in C_{Loc}^3(\bar{I}) \text{ et } \varphi_p(u''') \in C_{Loc}^1(\bar{I}).$$

$$(ii) \quad \begin{cases} (\varphi_p(u'''))' = f(x, u, u'', u'''), x \in I, \\ u(0) - au'(0) = g_1(u), \\ u''(0) - bu'''(0) = g_2(u''). \end{cases}$$

Définition 2.2 On dit que α est une sur solution du problème (2.1) si

$$(i) \quad \alpha \in C_{loc}^3(\bar{I}) \text{ et } \varphi_p(\alpha''') \in C_{loc}^1(\bar{I}).$$

$$(ii) \quad \begin{cases} (\varphi_p(\alpha'''))' \geq f(x, \alpha, \alpha'', \alpha'''), x \in I, \\ \alpha(0) - a\alpha'(0) \geq g_1(\alpha), \\ \alpha''(0) - b\alpha'''(0) \leq g_2(\alpha''). \end{cases}$$

Définition 2.3 On dit que β est une sous solution du problème (2.1) si

$$(i) \quad \beta \in C_{loc}^3(\bar{I}) \text{ et } \varphi_p(\beta''') \in C_{loc}^1(\bar{I}).$$

$$(ii) \quad \begin{cases} (\varphi_p(\beta'''))' \leq f(x, \beta, \beta'', \beta'''), x \in I, \\ \beta(0) - a\beta'(0) \leq g_1(\beta), \\ \beta''(0) - b\beta'''(0) \geq g_2(\beta''). \end{cases}$$

Définition 2.4 CONDITIONS DE TYPE DE NAGUMO-WINTNER

On dit que la fonction $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions de type de Nagumo-Wintner par rapport au couple de fonctions α et β , s'il existe des fonctions $Q \in L^1(\bar{I})$, $C \in L^p(\bar{I})$ et $\Psi : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty)$ continue telles que

$$|f(x, u, v, w)| \leq \Psi(|w|) \left(Q(x) + C(x) |w|^{\frac{p-1}{p}} \right), \quad (2.2)$$

pour tout $(x, u, v, w) \in D$, où

$$D = \{(x, u, v, w) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^3 : \beta(x) \leq u(x) \leq \alpha(x) \text{ et } \alpha''(x) \leq u''(x) \leq \beta''(x)\},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\Psi\left(|s|^{\frac{1}{p-1}}\right)} = +\infty. \quad (2.3)$$

2.3 Résultat principal

Dans cette section, on énonce et on démontre notre résultat principal.

Théorème 2.1 *Supposons que le problème (2.1) admet une sur solution α et une sous solution β satisfaisant*

$$\beta(x) \leq \alpha(x) \text{ et } \beta''(x) \geq \alpha''(x), \text{ pour tout } x \in \bar{I}.$$

Si $f : \bar{I} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H₁) *$f(x, u_2, v, w) - f(x, u_1, v, w) \geq 0$ pour $\beta(x) \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \alpha(x)$ et $\alpha''(x) \leq v(x) \leq \beta''(x)$ pour tout $x \in \bar{I}$ et $w \in \mathbb{R}$.*

(H₂) *Il existe un nombre réel positif M tel que $f(x, u, v_2, w) - Mv_2(x) \leq f(x, u, v_1, w) - Mv_1(x)$ pour $\beta(x) \leq u(x) \leq \alpha(x)$, $\alpha''(x) \leq v_1(x) \leq v_2(x) \leq \beta''(x)$, pour tout $x \in \bar{I}$ et $w \in \mathbb{R}$.*

(H₃) *Les conditions de type WINTNER-NAGUMO (2.2) et (2.3) par rapport au couple de fonctions α et β sont vérifiées.*

(H₄) *La fonction g_1 est continue et croissante sur $[\beta, \alpha]$.*

(H₅) *La fonction g_2 est continue et décroissante sur $[\alpha'', \beta'']$.*

Alors le problème (2.1) admet une solution maximale u^ et une solution minimale u_* telles que pour toute solution u du problème (2.1) avec*

$$\beta(x) \leq u(x) \leq \alpha(x) \text{ et } \alpha''(x) \leq u''(x) \leq \beta''(x) \text{ dans } \bar{I},$$

on a

$$\beta(x) \leq u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \leq \alpha(x),$$

et

$$\alpha''(x) \leq u_*''(x) \leq u''(x) \leq u_*''(x) \leq \beta''(x) \text{ dans } \bar{I}.$$

Preuve: La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Considérons le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(u_n'''))' = f(x, u_n, u_n'', u_n'''), \quad x \in I_n =]0, n[, \\ u_n(0) - au_n'(0) = g_1(u_n), \\ u_n''(0) - bu_n'''(0) = g_2(u_n''), \\ u_n(n) = \alpha(n), \\ u_n''(n) = \alpha''(n), \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant une preuve similaire à celle du théorème 4 dans [29], on peut montrer que le problème (2.4) admet une solution maximale $\bar{u}_n$ et une solution minimale $\underline{u}_n$ telle que

$$\beta(x) \leq \underline{u}_n(x) \leq \bar{u}_n(x) \leq \alpha(x),$$

et

$$\alpha''(x) \leq \bar{u}_n''(x) \leq \underline{u}_n''(x) \leq \beta''(x) \text{ pour tout } x \in \bar{I}_n.$$

On définit les suites de fonctions $(\bar{U}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\bar{U}_n(x) = \begin{cases} \bar{u}_n(x) & \text{si } x \in \bar{I}_n, \\ \alpha(x) & \text{si } x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_n, \end{cases}$$

et

$$\underline{U}_n(x) = \begin{cases} \underline{u}_n(x) & \text{si } x \in \bar{I}_n, \\ \beta(x) & \text{si } x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_n. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k = 0, 1$ et $x \in \bar{I}$, on a

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \underline{U}_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x). \quad (2.5)$$

Étape 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I},$$

et

$$(-1)^k \underline{U}_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \underline{U}_{n+1}^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}.$$

Nous démontrons seulement

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}.$$

On distingue trois cas :

(i) Si $x \in \bar{I} \setminus \bar{I}_{n+1}$, on a

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) = (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \alpha^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1.$$

(ii) Si $x \in \bar{I}_{n+1} \setminus \bar{I}_n$, et $k = 0, 1$, on a

$$\begin{aligned} (-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) &= (-1)^k \bar{u}_{n+1}^{(2k)}(x) \\ &\leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \\ &= (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(-1)^k \bar{U}_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \bar{U}_n^{(2k)}(x), \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } x \in \bar{I}_{n+1} \setminus \bar{I}_n.$$

(iii) Si $x \in \bar{I}_n$, on a

$$\bar{U}_{n+1} = \bar{u}_{n+1} \text{ et } \bar{U}_n = \bar{u}_n.$$

Puisque la fonction $\bar{u}_{n+1}$ satisfait la première équation de (2.4) et $\bar{I}_n \subset \bar{I}_{n+1}$, on obtient

$$(\varphi_p(\bar{u}_{n+1}'''))' = f(x, \bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}'', \bar{u}_{n+1}''') \leq f(x, \bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+1}'', \bar{u}_{n+1}'''), \quad x \in I_n.$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \bar{u}_{n+1}(0) - a\bar{u}_{n+1}'(0) = g_1(\bar{u}_{n+1}) \leq g_1(\bar{u}_{n+1}), \\ \bar{u}_{n+1}''(0) - b\bar{u}_{n+1}'''(0) = g_2(\bar{u}_{n+1}'') \geq g_2(\bar{u}_{n+1}''), \\ \bar{u}_{n+1}(n) \leq \alpha(n), \\ \bar{u}_{n+1}''(n) \geq \alpha''(n). \end{cases}$$

Ce qui signifie que $\bar{u}_{n+1}$ est une sous solution du problème (2.4).

Et par conséquent, on a

$$\bar{u}_{n+1}(x) \leq \bar{u}_n(x) \text{ et } \bar{u}_n''(x) \leq \bar{u}_{n+1}''(x) \text{ sur } \bar{I}_n.$$

Ainsi, on obtient

$$\bar{U}_{n+1}(x) \leq \bar{U}_n(x) \text{ et } \bar{U}_n''(x) \leq \bar{U}_{n+1}''(x) \text{ sur } \bar{I}_n.$$

De même, on montre que

$$\underline{U}_n(x) \leq \underline{U}_{n+1}(x) \text{ et } \underline{U}_{n+1}''(x) \leq \underline{U}_n''(x) \text{ sur } \bar{I}_n.$$

La preuve de l'étape 1 est terminée.

Maintenant soit $A = [0, R]$ avec $R > 0$, alors il existe un entier $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset \bar{I}_l = [0, l]$.

Pour chaque $k \geq l + 1$, la restriction de la suite $(\bar{U}_k)_{k \geq l+1}$ à $\bar{I}_l$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\varphi_p \left(\bar{U}_k''' \right) \right)' = f \left(x, \bar{U}_k, \bar{U}_k'', \bar{U}_k''' \right), \quad x \in I_l, \\ \bar{U}_k(0) - a \bar{U}_k'(0) = g_1 \left(\bar{U}_k \right), \\ \bar{U}_k''(0) - b \bar{U}_k'''(0) = g_2 \left(\bar{U}_k'' \right), \\ \bar{U}_k(l) \leq \bar{U}_l(l) = \alpha(l), \\ \bar{U}_k''(l) \geq \bar{U}_l''(l) = \alpha''(l). \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Étape 2 : Il existe une constante K_l telle que

$$\left\| \bar{U}_k''' \right\|_0 := \max_{x \in \bar{I}_l} \left| \bar{U}_k'''(x) \right| \leq K_l, \text{ pour tout } k \geq l + 1.$$

Posons par définition

$$\delta = 2 \max \left\{ \left\| \alpha'' \right\|_0, \left\| \beta'' \right\|_0 \right\},$$

et

$$\eta_l = \frac{\max \left\{ \left| \beta''(l) - \alpha''(0) \right|, \left| \alpha''(l) - \beta''(0) \right| \right\}}{l}.$$

Prenons $K_l > \max \left\{ \left\| \alpha'' \right\|_0, \left\| \beta'' \right\|_0, \eta_l \right\}$ tel que

$$\int_{\varphi_p(\eta_l)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{1}{\Psi(|x|^{\frac{1}{p-1}})} dx > \|Q\|_{L^1} + \delta^{\frac{p-1}{p}} \|C\|_{L^p}. \quad (2.7)$$

Puisque $\alpha''(x) \leq \bar{U}_k''(x) \leq \beta''(x)$, pour tout x dans $\bar{I}_l$, alors on a

$$\alpha''(l) - \beta''(0) \leq \bar{U}_k''(l) - \bar{U}_k''(0) \leq \beta''(l) - \alpha''(0).$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{x}_1 \in]0, l[$ tel que

$$\overline{U}_k''(l) - \overline{U}_k''(0) = l\overline{U}_k'''(\tilde{x}_1).$$

Alors

$$\left| \overline{U}_k'''(\tilde{x}_1) \right| \leq \eta_l.$$

On pose par définition

$$L = \left| \overline{U}_k'''(\tilde{x}_1) \right|.$$

Supposons au contraire qu'il existe $\tilde{x}_2 \in \overline{I}_l$ tel que $\left| \overline{U}_k'''(\tilde{x}_2) \right| > K_l$, alors par la continuité de $\overline{U}_k'''$, ils existent $x_1, x_2 \in \overline{I}_l$, vérifiant l'une des situations suivantes :

- (i) $\overline{U}_k'''(x_1) = L, \overline{U}_k'''(x_2) = K_l$ et $L \leq \overline{U}_k'''(x) \leq K_l$, pour tout $x \in]x_1, x_2[$.
- (ii) $\overline{U}_k'''(x_1) = L, \overline{U}_k'''(x_2) = K_l$ et $L \leq \overline{U}_k'''(x) \leq K_l$, pour tout $x \in]x_2, x_1[$.
- (iii) $\overline{U}_k'''(x_1) = -L, \overline{U}_k'''(x_2) = -K_l$ et $-K_l \leq \overline{U}_k'''(x) \leq -L$, pour tout $x \in]x_1, x_2[$.
- (iv) $\overline{U}_k'''(x_1) = -L, \overline{U}_k'''(x_2) = -K_l$ et $-K_l \leq \overline{U}_k'''(x) \leq -L$, pour tout $x \in]x_2, x_1[$.

Supposons que le cas (i) soit vérifié. Les autres cas peuvent être traités de la même manière.

Puisque $\overline{U}_k$ est une solution de (2.6) et d'après les conditions de type WINTNER-NAGUMO (2.2) et (2.3), alors pour chaque $x \in]x_1, x_2[$, on a

$$\begin{aligned} (\varphi_p(\overline{U}_k'''))'(x) &\leq \left| f\left(x, \overline{U}_k, \overline{U}_k'', \overline{U}_k'''\right) \right| \\ &\leq \Psi\left(\left|\overline{U}_k'''(x)\right|\right)(Q(x) + C(x)\left|\overline{U}_k'''(x)\right|^{\frac{p}{p-1}}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Comme $L \leq \eta_l$ et φ_p est croissante, alors on a

$$\int_{\varphi_p(\eta_l)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{dx}{\Psi(|x|^{\frac{1}{p-1}})} \leq \int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{dx}{\Psi(|x|^{\frac{1}{p-1}})}. \quad (2.9)$$

Maintenant si on pose $s = \varphi_p(\overline{U}_k'''(x))$, on obtient

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{(\varphi_p(\overline{U}_k'''))'(x)}{\Psi(|\overline{U}_k'''(x)|)} dx = \int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{1}{\Psi\left(s^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds, \quad (2.10)$$

et d'après (2.8), (2.9) et (2.10), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{ds}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(\varphi_p(\overline{U}_k'''))'(x)}{\Psi(|\overline{U}_k'''(x)|)} dx \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) + C(x) |\overline{U}_k'''(x)|^{\frac{p}{p-1}}) dx. \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{ds}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} \leq \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) + C(x) |\overline{U}_k'''(x)|^{\frac{p}{p-1}}) dx. \quad (2.11)$$

D'après (2.9), (2.11) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(\varphi_p(\overline{U}_k'''))'(x)}{\Psi(|\overline{U}_k'''(x)|)} dx &= \int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{1}{\Psi(s^{\frac{1}{p-1}})} ds \\ &\leq \|Q\|_{L^1} + \left[\int_{x_1}^{x_2} (C(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{x_1}^{x_2} \left((\overline{U}_k'''(x))^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|Q\|_{L^1} + \|C\|_{L^p} \left[\int_{x_1}^{x_2} \overline{U}_k'''(x) dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|Q\|_{L^1} + \|C\|_{L^p} \left[\overline{U}_k''(x_2) - \overline{U}_k''(x_1) \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|Q\|_{L^1} + \delta^{\frac{p-1}{p}} \|C\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec (2.7), et par conséquent, on a

$$\left\| \overline{U}_k''' \right\|_0 \leq K_l \text{ pour tout } k \geq l+1.$$

La preuve de l'étape 2 est terminée.

Étape 3 : La suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ converge vers une solution maximale du problème (2.1).

D'après l'étape 2, on a $\left\| \overline{U}_k''' \right\|_0 \leq K_l$ pour tout $k \geq l+1$, alors la suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ est uniformément bornée dans $C^3(\overline{I}_l)$ et $(\varphi_p(\overline{U}_k'''))_{k \geq l+1}$ est uniformément bornée dans $C^1(\overline{I}_l)$.

Nous allons maintenant montrer que la suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ est équicontinue sur $\overline{I}_l$.

Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ et $s, t \in \overline{I}_l$ tels que $t < s$, alors pour chaque $k \geq l+1$, on a

$$\begin{aligned} \left| (\varphi_p(\overline{U}_k'''))(s) - (\varphi_p(\overline{U}_k'''))(t) \right| &= \left| \int_t^s f(x, \overline{U}_k(x), \overline{U}_k''(x), \overline{U}_k'''(x)) dx \right| \\ &\leq \int_t^s |f(x, \overline{U}_k(x), \overline{U}_k''(x), \overline{U}_k'''(x))| dx \\ &\leq M_f |s - t|, \end{aligned}$$

où

$$M_f = \max \{ |f(x, u, v, w)| ; x \in \overline{I}_l, \beta \leq u \leq \alpha, \alpha'' \leq v \leq \beta'' \text{ et } |w| \leq K_l \}.$$

Si on choisit

$$|s - t| < \frac{\varepsilon}{M_f + 1},$$

on obtient

$$\left| (\varphi_p(\overline{U}_k'''))(s) - (\varphi_p(\overline{U}_k'''))(t) \right| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie que la suite $(\varphi_p(\overline{U}_k'''))_{k \geq l+1}$ est équicontinue sur $\overline{I}_l$.

Maintenant, puisque l'opérateur φ_p^{-1} est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on déduit

$$\left| \overline{U}_k'''(s) - \overline{U}_k'''(t) \right| = \left| \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{U}_k'''))(s) - \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{U}_k'''))(t) \right| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(\overline{U}_k''')_{k \geq l+1}$ est équicontinue sur $\overline{I}_l$.

Par conséquent, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous suite $(\overline{U}_{k_j})_{k_j \in \mathbb{N}}$ de $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ qui converge dans $C^3(\overline{I}_l)$ telle que $(\varphi_p(\overline{U}_{k_j}'''))_{k_j \in \mathbb{N}}$ converge dans $C^1(\overline{I}_l)$.

Soit

$$u^{(m)} = \lim_{k_j \rightarrow +\infty} \overline{U}_{k_j}^{(m)} \text{ pour } m = 0, 1, 2, 3,$$

et

$$\varphi_p(u''') = \lim_{k_j \rightarrow +\infty} \varphi_p(\overline{U}_{k_j}''').$$

Mais d'après (2.5) et l'étape 1, la suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ est décroissante et minorée, alors la limite ponctuelle de cette suite existe et elle est notée par u^* . On a donc $u = u^*$ et de plus, la suite converge dans $C^3(\overline{I}_l)$ vers u^* et $(\varphi_p(\overline{U}_k'''))_{k \geq l+1}$ converge vers $\varphi_p(u''')$.

Soit $x \in \overline{I}_l$, on a

$$\varphi_p(\overline{U}_k''')(x) = \varphi_p(\overline{U}_k''')(0) + \int_0^x f(s, \overline{U}_k(s), \overline{U}_k''(s), \overline{U}_k'''(s)) ds.$$

Maintenant, quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$f(s, \overline{U}_k(s), \overline{U}_k''(s), \overline{U}_k'''(s)) \rightarrow f(s, u^*(s), u^{*''}(s), u^{*'''}(s)).$$

De plus, on a

$$\exists \tilde{K} > 0, \forall k \geq l+1, \forall s \in \overline{I}_l : \left| f(s, \overline{U}_k(s), \overline{U}_k''(s), \overline{U}_k'''(s)) \right| \leq \tilde{K}.$$

Ainsi, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\varphi_p(u''')(x) = \varphi_p(u''')(0) + \int_0^x f(s, u^*(s), u^{*''}(s), u^{*'''}(s)) ds.$$

On obtient alors

$$(\varphi_p(u'''))'(x) = f(x, u^*(x), u^{*''}(x), u^{*'''}(x)), \text{ pour tout } x \in I.$$

Egalement, on a

$$\begin{cases} u^*(0) - au^{*'}(0) = g_1(u^*), \\ u^{*''}(0) - bu^{*'''}(0) = g_2(u^{*''}). \end{cases}$$

Par conséquent u^* est une solution du problème (2.4) et puisque A est un domaine borné arbitraire, alors c'est une solution du problème (2.1).

Maintenant, nous allons montrer que u^* est une solution maximale du problème (2.1); c'est-à-dire, si v est une autre solution du problème (2.1) telle que

$$\beta \leq v \leq \alpha \text{ sur } \overline{I}, \text{ alors } v \leq u^*.$$

On a

$$\begin{cases} (\varphi_p(v'''))' = f(x, v, v'', v''') \leq f(x, v, v'', v'''), & x \in I, \\ v(0) - av'(0) = g_1(v) \leq g_1(v), \\ v''(0) - bv'''(0) = g_2(v'') \geq g_2(v''). \end{cases}$$

Alors v est une sous solution de (2.1) et d'après l'étape 2, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v \leq \overline{U}_n \text{ et } v'' \geq \overline{U}_n''.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$v \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{U}_n = u^* \text{ et } v'' \geq u^{*''}.$$

Ce qui signifie que u^* est une solution maximale du problème (2.1).

La preuve de l'étape 3 est terminée.

De la même manière, on peut montrer que la suite $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale u_* du problème (2.1).

La preuve de notre résultat est complète. ■

2.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple illustrant l'application de notre résultat.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'''))'(x) = f(x, u, u'', u'''), & x \in I, \\ u(0) - \frac{u'(0)}{4} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} u(x) dx, \\ u''(0) - u'''(0) = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} u''(x) dx, \end{cases} \quad (2.12)$$

où $p > 1$, $I =]0, +\infty[$ et

$$f(x, u, u'', u''') = (p-1)[u(x) - u''(x) + 1] e^{-\frac{(p-1)^2}{p}x} |u'''(x)|^{\frac{p-1}{p}}.$$

On pose par définition

$$\alpha(x) = 2 \text{ et } \beta(x) = e^{-x}, \text{ pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Il est facile de vérifier que α est une sur solution du problème (2.12).

Maintenant β est une sous solution du problème (2.12) si on a

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(\beta'''))'(x) \leq (p-1)[\beta(x) - \beta''(x) + 1] e^{-\frac{(p-1)^2}{p}x} |\beta'''(x)|^{\frac{p-1}{p}}, \quad x \in I, \\ \beta(0) - \frac{\beta'(0)}{4} \leq 1 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} \beta(x) dx, \\ \beta''(0) - \beta'''(0) \geq 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} \beta''(x) dx. \end{array} \right.$$

C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (p-1) e^{(1-p)x} \leq (p-1) e^{(1-p)x}, \quad x \in I, \\ \frac{5}{4} \leq 1 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{5}{4}, \\ 2 \geq 1 - \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Il s'ensuit alors que β est une sous solution du problème (2.12).

D'autre part, il n'est pas difficile de montrer que la fonction f satisfait les hypothèses (H₁), (H₂) et (H₃) du théorème 2.1 et par conséquent, il s'ensuit que le problème (2.12) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telle que

$$e^{-x} = \beta(x) \leq u_*(x) \leq u^*(x) \leq \alpha(x) = 2, \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

et

$$0 = \alpha''(x) \leq u_*''(x) \leq u''_*(x) \leq \beta''(x) = e^{-x}, \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

Chapitre 3

Existence de solutions positives d'un problème à valeur finale pour des équations différentielles du quatrième ordre

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence de solutions positives pour un problème à valeur finale concernant une équation différentielle du quatrième ordre. Plus précisément, on considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(4)}(x) = f(x, u(x), u''(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, est continue et $\xi > 0$.

Le but de ce chapitre est d'améliorer et de généraliser les résultats obtenus dans [58]. Notons également que les résultats obtenus dans [58] sont vrais si l'on suppose la condition supplémentaire $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0$ dans (1) car si on

considère par exemple la fonction u définie par $u(x) = \frac{\sin((x+1)^2)}{x+1}$, pour

tout $x \in \mathbb{R}^+$, on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x)$ n'existe pas.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utiles dans la suite de ce travail. Le résultat principal est présenté et prouvé dans la section 3, suivi d'un exemple dans la section 4 illustrant l'application de notre résultat. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [22].

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utiles dans la suite de ce chapitre.

3.2.1 Intégration d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ sur la demi-droite $\mathbb{R}^+$.

Définition 3.1 [69, Chapter 1 page 15] La fonction gamma d'Euler Γ est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ où } x > 0.$$

Remarque 3.1 [69, Chapter 1 page 16] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Définition 3.2 [69, Chapter 1 page 17] La fonction bêta B est définie par

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

où $x > 0$ et $y > 0$.

Remarque 3.2 [69, Chapter 1 page 17] La fonction B est connectée à la fonction gamma Γ par la relation

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$.

Définition 3.3 [69, Chapter 2 page 99] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. L'intégrale d'ordre n sur la demi-droite $\mathbb{R}^+$ de g est définie par

$$(I_-^n g)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{n-1} g(t) dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

On énonce maintenant le théorème de Fubini.

Théorème 3.1 [69, Theorem 1.1] Soit $P_1 = [r_1, r_2]$, $P_2 = [r_3, r_4]$, $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $-\infty \leq r_3 < r_4 \leq +\infty$, et soit $h(x, y)$ une fonction mesurable définie sur $P_1 \times P_2$. Si au moins une des intégrales

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{r_3}^{r_4} h(x, y) dy \right) dx, \int_{r_3}^{r_4} \left(\int_{r_1}^{r_2} h(x, y) dx \right) dy, \int_{P_1 \times P_2} h(x, y) dx dy,$$

est absolument convergente alors elles coïncident.

Lemme 3.1 Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_x^{+\infty} (t-x)^{m+n-1} g(t) dt$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$I_-^m(I_-^n g)(x) = (I_-^{m+n} g)(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Preuve: En utilisant la définition des intégrales d'ordre n et m sur la demi-droite $\mathbb{R}^+$ et d'après le théorème 3.1, on a

$$\begin{aligned} I_-^m(I_-^n g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{m-1} (I_-^n g)(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m) \Gamma(n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{m-1} \int_t^{+\infty} (\tau-t)^{n-1} g(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m) \Gamma(n)} \int_x^{+\infty} g(\tau) \int_x^\tau (t-x)^{m-1} (\tau-t)^{n-1} dt d\tau. \end{aligned}$$

Maintenant, si on pose le changement de variables $t = x + y(\tau - x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_-^m(I_-^n g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_x^{+\infty} (\tau - x)^{m+n-1} g(\tau) \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy d\tau \\
&= \frac{B(m, n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_x^{+\infty} (\tau - x)^{m+n-1} g(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_x^{+\infty} (\tau - x)^{m+n-1} g(\tau) d\tau \\
&= (I_-^{m+n} g)(x).
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, alors on a

$$\frac{d^n}{dx^n} (I_-^n g)(x) = (-1)^n g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Preuve: Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (I_-^1 g)(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} g(t) dt \\
&= -g(x).
\end{aligned}$$

On suppose pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$\frac{d^n}{dx^n} (I_-^n g)(x) = (-1)^n g(x),$$

et on prouve que

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (I_-^{n+1} g)(x) = (-1)^{n+1} g(x).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et le Lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (I_-^{n+1} g)(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n}{dx^n} I_-^n (I_-^1 g) \right) (x) \\ &= \frac{d}{dx} ((-1)^n I_-^1 g)(x) \\ &= (-1)^{n+1} g(x).\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d^n}{dx^n} (I_-^n g)(x) = (-1)^n g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

■

Lemme 3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- (i) $g \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $I_-^n g^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$,
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{(i)}(x) = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$.
- alors on a

$$(I_-^n g^{(n)})(x) = (-1)^{n+1} [\mu - g(x)].$$

Preuve: Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}(I_-^1 g')(x) &= \int_x^{+\infty} g'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(x) \\ &= \mu - g(x).\end{aligned}$$

On suppose pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$(I_-^n g^{(n)})(x) = (-1)^{n+1} [\mu - g(x)],$$

et on prouve que

$$(I_-^{n+1} g^{(n+1)})(x) = (-1)^n [\mu - g(x)].$$

En utilisant le Lemme 3.1 et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
(I_-^{n+1} g^{(n+1)})(x) &= (I_-^1 I_-^n g^{(n+1)})(x) \\
&= I_-^1 (-1)^{n+1} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) - g'(x) \right] \\
&= I_-^1 (-1)^{n+2} g'(x) \\
&= (-1)^{n+2} I_-^1 g'(x) \\
&= (-1)^{n+2} [\mu - g(x)].
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (I_-^n g^{(n)})(x) = (-1)^{n+1} [\mu - g(x)].$$

■

3.2.2 Critère de compacité dans un intervalle non borné

Soit

$$C_l = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \text{ est finie} \right\}.$$

Notons que $(C_l, \|\cdot\|_0)$ est un espace de Banach, où

$$\|u\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u(x)|.$$

Définition 3.1 [6]) *Un ensemble $\tilde{A} \subset C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est dit équi-convergent en $+\infty$ si toute fonction u de $\tilde{A}$ a une limite finie en $+\infty$ et de plus,*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute fonction u de $\tilde{A}, \forall x > \delta(\varepsilon)$, on a

$$\left| u(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \right| < \varepsilon.$$

Définition 3.2 *Un ensemble $\tilde{A} \subset C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est dit équi-continu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}$ si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute fonction u de $\tilde{A}$ et tous x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^+$, la condition $|x_2 - x_1| < \delta_1(\varepsilon)$ implique $|u(x_2) - u(x_1)| < \varepsilon$.*

La proposition suivante donne le critère de compacité de Corduneanu.

Proposition 3.1 ([6, Lemma 1 page 149] ou [18, Page 62]) *Un ensemble $\tilde{A}$ de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si*

- (i) $\tilde{A}$ est uniformément borné dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$;
- (ii) $\tilde{A}$ est équicontinu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$;
- (iii) $\tilde{A}$ est équi-convergent en $+\infty$.

Maintenant, posons par définition

$$C_l^2 = \left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \text{ est finie et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u''(x) = 0 \right\}$$

Notons que $(C_l^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach, où

$$\|u\|_2 = \max(\|u\|_0, \|u'\|_0, \|u''\|_0).$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3.2 *Un ensemble $\tilde{B}$ de $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si*

- (i) $\tilde{B}$ est uniformément borné dans $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$;
- (ii) Les ensembles suivants : $\left\{ v : v(x) = u(x), u \in \tilde{B} \right\}$, $\left\{ w : w(x) = u'(x), u \in \tilde{B} \right\}$ et $\left\{ \theta : \theta(x) = u''(x), u \in \tilde{B} \right\}$ sont équi-continus sur chaque intervalle compact de $\bar{I}$;
- (iii) Les ensembles suivants : $\left\{ v : v(x) = u(x), u \in \tilde{B} \right\}$, $\left\{ w : w(x) = u'(x), u \in \tilde{B} \right\}$ et $\left\{ \theta : \theta(x) = u''(x), u \in \tilde{B} \right\}$ sont équi-convergents en $+\infty$.

Preuve: La preuve est similaire à celle du théorème 2.3 dans [78]. ■

Définition 3.4 [39] *Soit E un espace de Banach réel. Un convexe non vide $K \subset E$ est appelé cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

- (i) $u \in K, \lambda \geq 0$ implique $\lambda u \in K$;
- (ii) $u \in K, -u \in K$ implique $u = 0$.

Théorème 3.2 ([39, THEOREM 2.3.4]) *Soit K un cône dans un espace de Banach réel E . Soit Ω_1, Ω_2 deux sous-ensembles ouverts et bornés de E tels que*

$$0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2.$$

On suppose que

$$T : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \longrightarrow K$$

est un opérateur complètement continu et satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

- (i) $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_2$.
 - (ii) $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_2$.
- Alors T admet au moins un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

On suppose d'abord que la nonlinéarité f satisfait à l'hypothèse suivante :

(H) $|f(x, u, v)| \leq a(x) L_1(u) + b(x) L_2(v) + c(x)$, où L_1, L_2, a, b et $c : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions continues avec L_1 et L_2 sont croissantes telles que

$$A = (I_-^4 a)(0) = \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} t^3 a(t) dt < +\infty,$$

$$B = (I_-^4 b)(0) = \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} t^3 b(t) dt < +\infty,$$

et

$$C = (I_-^4 c)(0) = \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} t^3 c(t) dt < +\infty.$$

Remarque 3.1 Dans la suite de ce chapitre, on utilise les notations

$$A_i = (I_-^{4-i} a)(0) \text{ pour } i = 1, 2$$

$$B_i = (I_-^{4-i} b)(0) \text{ pour } i = 1, 2,$$

et

$$C_i = (I_-^{4-i} c)(0) \text{ pour } i = 1, 2.$$

3.3 Résultat principal

Tout d'abord, on définit les ensembles suivants

$$E = \{u \in C_l^2, u \text{ bornée}\},$$

$$K = \{u \in E, u(x) \geq 0\},$$

et

$$K_m = \{u \in K, \|u\|_2 < m\},$$

où $m > 0$.

Remarque 3.2 *Il n'est pas difficile de vérifier que $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach et que K est un cône dans E .*

On définit l'opérateur T par

$$\begin{aligned} T : K_m &\longrightarrow C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto (Tu)(x) = \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt. \end{aligned}$$

Lemme 3.4 *L'opérateur T est bien défini.*

Preuve: Soit $u \in K_m$, alors d'après l'hypothèse **(H)**, on a

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &\leq \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 |f(t, u(t), u''(t))| dt \\ &\leq \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 [a(t) L_1(u(t)) + b(t) L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\ &\leq \xi + (I_-^4 a)(x) L_1(m) + (I_-^4 b)(x) L_2(m) + (I_-^4 c)(x) \\ &\leq \xi + (I_-^4 a)(0) L_1(m) + (I_-^4 b)(0) L_2(m) + (I_-^4 c)(0) \\ &\leq \xi + AL_1(m) + BL_2(m) + C < +\infty. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (Tu)''(x) &= \int_x^{+\infty} (t-x) f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &\leq A_2 L_1(m) + B_2 L_2(m) + C_2 \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

et il n'est pas difficile de prouver que $(Tu)''$ est continu sur $\bar{I}$. ■

Définition 3.3 On dit que u est une solution du problème (3.1) si

- (i) $u \in C^4(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$,
- (ii) u satisfait (3.1).

Lemme 3.5 On suppose que l'hypothèse **(H)** est satisfaite, alors une fonction $u \in \bar{K}_m$ est une solution du problème (3.1) si et seulement si elle est un point fixe de l'opérateur T .

Preuve: Soit $u \in \bar{K}_m$ un point fixe de T , c'est-à-dire

$$u(x) = (Tu)(x) = \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

On a

$$u(x) = (Tu)(x) = \xi + (I_-^4 \tilde{g})(x),$$

où

$$\tilde{g}(x) = f(x, u(x), u''(x)).$$

D'après le Lemme 3.2, on obtient

$$u^{(4)}(x) = f(x, u(x), u''(x)).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &= \xi + \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} \chi_{[x, +\infty[}(t) (t-x)^3 \tilde{g}(t) dt, \end{aligned}$$

où $\chi_{[x, +\infty[}$ est la fonction caractéristique définie pour tout $x \in \bar{I}$ par

$$\chi_{[x, +\infty[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [x, +\infty[, \\ 0 & \text{si } t \notin [x, +\infty[. \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$|u(x) - \xi| \leq \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} \chi_{[x, +\infty[}(t) t^3 |f(t, u(t), u''(t))| dt,$$

et en utilisant l'hypothèse **(H)** et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |u(x) - \xi| = 0.$$

Ce qui signifie que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi.$$

De la même manière, on peut prouver que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (Tu)'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (t-x)^2 f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} u''(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (Tu)''(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} (t-x) f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que u soit une solution du problème (3.1) dans $\overline{K}_m$, alors en appliquant l'opérateur I_-^4 aux deux membres de l'équation dans (3.1), on a

$$(I_-^4 u^{(4)})(x) = (I_-^4 \tilde{g})(x).$$

D'après le Lemme 3.2, on a

$$u(x) - \xi = \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt.$$

C'est-à-dire

$$u(x) = (Tu)(x).$$

Ce qui signifie que u est un point fixe de T dans $\overline{K}_m$. ■

Lemme 3.6 *Supposons que l'hypothèse **(H)** est satisfaite, et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$AL_1(M) + BL_2(M) + C \leq \xi,$$

alors

$$T(\overline{K}_M) \subset K.$$

Preuve: Soit $u \in \overline{K}_M$ et $x \in \overline{I}$, alors en utilisant l'hypothèse **(H)**, on a

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &\geq \xi - \frac{1}{6} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 [a(t)L_1(u(t)) + b(t)L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\ &\geq \xi - L_1(M)(I_-^4 a)(x) - L_2(M)(I_-^4 b)(x) - (I_-^4 c)(x) \\ &\geq \xi - L_1(M)(I_-^4 a)(0) - L_2(M)(I_-^4 b)(0) - (I_-^4 c)(0) \\ &\geq \xi - [AL_1(M) + BL_2(M) + C] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.3 *Supposons que la condition **(H)** est satisfaite, et qu'il existe $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ telle que*

- (H1)** $M_1 < \xi < M_2$,
- (H2)** $AL_1(M_1) + BL_2(M_1) + C \leq \xi - M_1$,
- (H3)** $AL_1(M_2) + BL_2(M_2) + C \leq \min(\xi, M_2 - \xi)$,
- (H4)** $A_1L_1(M_2) + B_1L_2(M_2) + C_1 \leq 2M_2$,
- (H5)** $A_2L_1(M_2) + B_2L_2(M_2) + C_2 \leq M_2$.

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution positive u telle que

$$M_1 \leq \|u\|_2 \leq M_2.$$

Preuve: Puisque $AL_1(M_2) + BL_2(M_2) + C \leq \xi$, et d'après le Lemme 3.6, on a

$$T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}) \subset K.$$

Maintenant, on va prouver que l'opérateur T est complètement continu.

La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : L'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est uniformément borné.

Soit $u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)| &= \left| \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt \right| \\ &\leq |\xi| + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 |f(t, u(t), u''(t))| dt \\ &\leq \xi + L_1(M_2) (I_-^4 a)(x) + L_2(M_2) (I_-^4 b)(x) + (I_-^4 c)(x) \\ &\leq \xi + L_1(M_2) (I_-^4 a)(0) + L_2(M_2) (I_-^4 b)(0) + (I_-^4 c)(0) \\ &= \xi + AL_1(M_2) + BL_2(M_2) + C. \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} |(Tu)'(x)| &= \left| \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (t-x)^2 f(t, u(t), u''(t)) dt \right| \\ &\leq A_1 L_1(M_2) + B_1 L_2(M_2) + C_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(Tu)''(x)| &= \left| \int_x^{+\infty} (t-x) f(t, u(t), u''(t)) dt \right| \\ &\leq A_2 L_1(M_2) + B_2 L_2(M_2) + C_2. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que l'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est uniformément borné.

Étape 2 : L'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est équi-convergent à $+\infty$.

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir la preuve du Lemme 3.5), on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (Tu)(x) = \xi.$$

Ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0, \forall u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}, \forall x > \delta_2(\varepsilon), |(Tu)(x) - \xi| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

De la même manière, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\delta}(\varepsilon) > 0, \forall u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}, \forall x > \tilde{\delta}(\varepsilon), |(Tu)'(x)| < \varepsilon, \quad (3.3)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\delta}(\varepsilon) > 0, \forall u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}, \forall x > \hat{\delta}(\varepsilon), |(Tu)''(x)| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Alors d'après (3.2), (3.3) et (3.4), il s'ensuit que l'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est équi-convergent en $+\infty$.

Étape 3 : L'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est équi-continu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$.

Soit $u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}$ et $0 \leq x_1 \leq x_2$, alors on a

$$\begin{aligned} |(Tu)(x_2) - (Tu)(x_1)| &= \frac{1}{3!} \left| \int_{x_2}^{+\infty} (t - x_2)^3 \tilde{g}(t) dt - \int_{x_1}^{+\infty} (t - x_1)^3 \tilde{g}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{3!} \int_{x_2}^{+\infty} ((t - x_2)^3 - (t - x_1)^3) |\tilde{g}(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{3!} \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1)^3 |\tilde{g}(t)| dt. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$|(Tu)(x_2) - (Tu)(x_1)| \leq F_1(x_1, x_2) + F_2(x_1, x_2), \quad (3.5)$$

où

$$F_1(x_1, x_2) = \frac{1}{3!} \int_{x_2}^{+\infty} [(t - x_2)^3 - (t - x_1)^3] |\tilde{g}(t)| dt,$$

et

$$F_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3!} \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1)^3 |\tilde{g}(t)| dt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2) &\leq \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} ((t - x_2)^3 - (t - x_1)^3) (a(t) L_1(u(t)) + b(t) L_2(u''(t)) + c(t)) dt \\
&\leq \frac{L_1(M_2)}{3!} \int_0^{+\infty} ((t - x_2)^3 - (t - x_1)^3) a(t) dt \\
&\quad + \frac{L_2(M_2)}{3!} \int_0^{+\infty} ((t - x_2)^3 - (t - x_1)^3) b(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} ((t - x_2)^3 - (t - x_1)^3) c(t) dt.
\end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} (t - x_1)^3 a(t) dt \leq \int_0^{+\infty} t^3 a(t) dt < +\infty,$$

et

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} (t - x_1)^3 a(t) = (t - x_2)^3 a(t),$$

alors en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il s'ensuit que

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \int_0^{+\infty} (t - x_1)^3 a(t) dt = \int_0^{+\infty} (t - x_2)^3 a(t) dt.$$

De la même manière, on a

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \int_0^{+\infty} (t - x_1)^3 b(t) dt = \int_0^{+\infty} (t - x_2)^3 b(t) dt,$$

et

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \int_0^{+\infty} (t - x_1)^3 c(t) dt = \int_0^{+\infty} (t - x_2)^3 c(t) dt.$$

Alors si on pose par définition

$$\delta_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}(L_1(M_2) + L_2(M_2) + 1),$$

on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3(\varepsilon) > 0, (|x_1 - x_2| < \delta_3(\varepsilon) \Rightarrow F_1(x_1, x_2)) < \varepsilon). \quad (3.6)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1)^3 |\tilde{g}(t)| dt &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\tilde{g}(t)| \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1)^3 dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\tilde{g}(t)| (x_2 - x_1)^4. \end{aligned}$$

Alors si on pose par définition $\delta_4(\varepsilon) = 6 \left(\frac{\varepsilon}{\sup_{t \in \bar{I}} |\tilde{g}(t)| + 1} \right)^{\frac{1}{4}}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_4(\varepsilon) > 0, (|x_1 - x_2| < \delta_4(\varepsilon) \Rightarrow F_2(x_1, x_2)) < \varepsilon). \quad (3.7)$$

Alors d'après (3.5), (3.6) et (3.7) et si on pose $\delta_5(\varepsilon) = \min(\delta_3(\varepsilon), \delta_4(\varepsilon))$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_5(\varepsilon) > 0, \forall u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}, (|x_1 - x_2| < \delta_5(\varepsilon) \Rightarrow |(Tu)(x_2) - (Tu)(x_1)|) < \varepsilon).$$

De la même manière, on peut prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_6(\varepsilon) > 0, \forall u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}, (|x_1 - x_2| < \delta_6(\varepsilon) \Rightarrow |(Tu)'(x_2) - (Tu)'(x_1)|) < \varepsilon),$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_7(\varepsilon) > 0, \forall u \in \overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1}, (|x_1 - x_2| < \delta_7(\varepsilon) \Rightarrow |(Tu)''(x_2) - (Tu)''(x_1)|) < \varepsilon).$$

Il s'ensuit alors que l'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est équicontinu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$.

D'après les étapes 1, 2 et 3 et en utilisant la proposition 3.2 on en déduit que l'ensemble $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est relativement compact.

Maintenant, on va prouver que l'opérateur T est continu.

En effet, soit $u \in T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arbitraire dans $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$, alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = u(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n''(x) = u''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ et en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u_n(t), u_n''(t)) dt = \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt,$$

et alors pour tout $x \in \overline{I}$, on a la convergence ponctuelle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Tu_n)(x) = (Tu)(x).$$

Maintenant, on va prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n = Tu.$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite de la suite $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $T(\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ est relativement compact, alors il existe une sous-suite $(v_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction $y \in E$ telles que $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} v_{n_k} = y$. Par l'unicité de la limite on a $y = Tu$, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n = Tu$.

Maintenant, soit $u \in K$ avec $\|u\|_2 = M_1$, alors $0 \leq u^{(i)}(x) \leq M_1$, pour $i = 0, 1, 2$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Puisque par les hypothèses **(H2)** et **(H)** on a

$$AL_1(M_1) + BL_2(M_1) + C \leq \xi - M_1,$$

et

$$f(x, u(x), u''(x)) \geq -[a(x)L_1(u(x)) + b(x)L_2(u''(x)) + c(x)],$$

on obtient

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &\geq \xi - \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 [a(t)L_1(u(t)) + b(t)L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\ &\geq \xi - \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} (t-x)^3 [a(t)L_1(u(t)) + b(t)L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\ &\geq \xi - [AL_1(M_1) + BL_2(M_1) + C] \\ &\geq M_1 = \|u\|_2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|Tu\|_2 \geq \|u\|_2.$$

De la même manière soit, $u \in K \cap (\overline{K}_{M_2} \setminus K_{M_1})$ avec $\|u\|_2 = M_2$, alors $0 \leq u^{(i)}(x) \leq M_2$, pour $i = 0, 1, 2$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Puisque par les hypothèses **(H3)** et **(H)**, on a

$$AL_1(M_2) + BL_2(M_2) + C \leq \min(\xi, M_2 - \xi),$$

et

$$f(x, u(x), u''(x)) \leq a(x)L_1(u(x)) + b(x)L_2(u''(x)) + c(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 f(t, u(t), u''(t)) dt \\ &\leq \xi + \frac{1}{3!} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 [a(t)L_1(u(t)) + b(t)L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\ &\leq \xi + \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} (t-x)^3 [a(t)L_1(u(t)) + b(t)L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\ &\leq \xi + [AL_1(M_2) + BL_2(M_2) + C] \\ &\leq \xi + \min(\xi, M_2 - \xi) \\ &\leq M_2 = \|u\|_2. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(Tu)(x) \leq M_2 = \|u\|_2, \text{ pour tout } x \in \bar{I}. \quad (3.8)$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}
(Tu)'(x) &= \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (t-x)^2 f(t, u(t), u''(t)) dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (t-x)^3 [a(t) L_1(u(t)) + b(t) L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (t-x)^2 [a(t) L_1(u(t)) + b(t) L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\
&\leq \frac{A_1 L_1(M_2) + B_1 L_2(M_2) + C_1}{2} \\
&\leq \frac{2M_2}{2} \\
&= M_2 = \|u\|_2.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(Tu)'(x) \leq M_2 = \|u\|_2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad (3.9)$$

et

$$\begin{aligned}
(Tu)''(x) &= \int_x^{+\infty} (t-x) f(t, u(t), u''(t)) dt \\
&\leq \int_x^{+\infty} (t-x) [a(t) L_1(u(t)) + b(t) L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} (t-x)^2 [a(t) L_1(u(t)) + b(t) L_2(u''(t)) + c(t)] dt \\
&\leq A_2 L_1(M_2) + B_2 L_2(M_2) + C_2 \\
&\leq M_2 = \|u\|_2.
\end{aligned}$$

Ça veut dire que

$$(Tu)''(x) \leq M_2 = \|u\|_2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.10)$$

Alors d'après (3.8), (3.9) et (3.10), il s'ensuit que

$$\|Tu\|_2 \leq \|u\|_2,$$

et par conséquent d'après le théorème 3.2, on obtient que le problème (3.1) admet au moins une solution positive u telle que

$$M_1 \leq \|u\|_2 \leq M_2.$$

■

3.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple illustrant l'application de notre résultat.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \left(e^{-x} - e^{-u(x)} - \frac{e^{(u''(x))^2}}{1 + (u''(x))^2} \right), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \sqrt{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.11)$$

Si on pose par définition

$$f(x, u, v) = \frac{1}{2} \left(e^{-x} - e^{-u} - \frac{e^{v^2}}{1 + v^2} \right).$$

On a

$$|f(x, u, v)| \leq a(x) L_1(u) + b(x) L_2(v) + c(x),$$

où

$$L_1(u) = 1 - e^{-u}, \quad L_2(v) = 1 - \frac{1}{1 + v^2},$$

et

$$a(x) = b(x) = c(x) = \frac{e^{-x}}{6}.$$

Ainsi, on a

$$A = B = C = \frac{1}{3!} \int_0^{+\infty} \frac{1}{6} t^3 e^{-t} dt = \frac{1}{6},$$

$$A_1 = B_1 = C_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{6} t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{6},$$

et

$$A_2 = B_2 = C_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{6} t e^{-t} dt = \frac{1}{6}.$$

On va prouver que le problème à valeur finale (3.11) admet au moins une solution positive u telle que

$$M_1 = 1 \leq \|u\|_2 \leq 2 = M_2.$$

Tout d'abord, il est facile de voir que les fonctions L_1 et L_2 sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

D'autre part, on a

$$AL_1(M_1) + BL_2(M_1) + C = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} = 0.38313,$$

et

$$\xi - M_1 = \sqrt{2} - 1 = 0.41421.$$

Ce qui signifie que

$$AL_1(M_1) + BL_2(M_1) + C \leq \xi - M_1.$$

De la même manière, on a

$$AL_1(M_2) + BL_2(M_2) + C = 0.45893 \leq \min(\xi, M_2 - \xi) = 0.58579,$$

$$A_1 L_1(M_2) + B_1 L_2(M_2) + C_1 = 0.45893 \leq 4,$$

et

$$A_2 L_1(M_2) + B_2 L_2(M_2) + C_2 = 0.45893 \leq 2.$$

Alors d'après le théorème 3.3, il s'ensuit que le problème (3.11) admet au moins une solution positive u telle que $1 \leq \|u\|_2 \leq 2$.

Chapitre 4

Existence et unicité de solutions d'un problème à valeur finale pour des équations différentielles quasi-linéaires du quatrième ordre avec déviation d'argument

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence de solutions d'un problème à valeur finale concernant une équation différentielle quasi-linéaire du quatrième ordre avec déviation d'argument. Plus précisément, on considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(u''))''(x) = f(x, u(\sigma(x))), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_p(u''))'(x) = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est continue, $\xi \in \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty$.

L'objectif de ce chapitre est de prouver l'existence de solutions pour le problème (4.1), en utilisant le théorème du point fixe de Schauder ainsi que d'examiner l'unicité de solutions pour le cas $p = 2$.

Le plan de ce chapitre est comme suit : dans la section 2, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utilisés dans la suite de ce chapitre. Le résultat principal est présenté et prouvé dans la section 3, suivi d'un exemple dans la section 4 illustrant l'application de notre résultat. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [23].

4.2 Préliminaires

Dans cette section, on donne quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utiles dans la suite de ce chapitre. Considérons l'ensemble suivant

$$C_l = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notons que $(C_l, \|\cdot\|_0)$ est un espace de Banach, où

$$\|u\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u(x)|.$$

Définition 4.1 [6]) *Un ensemble $\tilde{A} \subset C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est dit équi-convergent en $+\infty$ si toute fonction u de $\tilde{A}$ a une limite finie en $+\infty$ et de plus,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que, pour toute fonction } u \text{ de } \tilde{A}, \forall x > \delta(\varepsilon), \text{ on a } \left| u(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \right| < \varepsilon.$$

Définition 4.2 *Un ensemble $\tilde{A} \subset C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est dit équi-continu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}$ si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute fonction u de $\tilde{A}$ et tous x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^+$, la condition $|x_2 - x_1| < \delta_1(\varepsilon)$ implique $|u(x_2) - u(x_1)| < \varepsilon$.*

La proposition suivante donne le critère de compacité de Corduneanu.

Proposition 4.1 ([6, Lemma 1 page 149] ou [18, Page 62]) *Un ensemble $\tilde{A}$ de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si*

(i) *$\tilde{A}$ est uniformément borné dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$,*

- (ii) $\tilde{A}$ est équicontinu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$,
- (iii) $\tilde{A}$ est équiconvergent en $+\infty$.

Les résultats que nous présentons ici sont obtenus en utilisant le théorème du point fixe bien connu de Schauder.

Théorème 4.1 (*Théorème de Schauder [3]*) Soit E un espace de Banach et X un sous-ensemble non vide convexe et fermé de E . Si S est une application continue de X dans lui-même et SX est relativement compact, alors l'application S a au moins un point fixe.

Définition 4.3 On dit que u est une solution du problème (4.1) si

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\varphi_p(u'') \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
- (ii) u satisfait (4.1).

Maintenant pour $r > 0$, on pose par définition

$$a_r(x) = \max_{\|v\|_0 \leq r} |f(x, v)|, \text{ pour tout } x \geq 0,$$

et on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites

- (H1) $\int_0^{+\infty} a_r(x) dx < +\infty$,
- (H2) $\int_0^{+\infty} t \varphi_p^{-1} \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right) dt \leq r$,
- (H3) $\int_0^{+\infty} \varphi_p^{-1} \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right) dt < +\infty$.

4.3 Résultat principal

Dans cette section, on énonce et on démontre notre résultat principal.
Posons

$$X = \{u \in C_l, \ \|u - \xi\|_0 \leq r\},$$

où $r > 0$.

Il n'est pas difficile de voir que X est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de C_l .

On définit l'opérateur T par

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow C_l \\ u &\longmapsto (Tu)(x) = \xi + \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt, \end{aligned}$$

où

$$G_p(t) = \varphi_p^{-1} \left(\int_t^{+\infty} (s-t) f(s, u(\sigma(s))) ds \right).$$

Lemme 4.1 *Supposons que les hypothèses **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** soient satisfaites, alors une fonction $u \in X$ est une solution du problème (4.1) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur T .*

Preuve: Soit $u \in X$ un point fixe de T c'est-à-dire

$$u(x) = \xi + \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Alors on a

$$u''(x) = G_p(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u'')(x) = \int_x^{+\infty} (t-x) f(t, u(\sigma(t))) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

et par conséquent, il s'ensuit que

$$(\varphi_p(u''))''(x) = f(x, u(\sigma(x))), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (4.2)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u(x) - \xi &= \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \chi_{[x, +\infty[}(t) (t-x) G_p(t) dt, \end{aligned}$$

où $\chi_{[x, +\infty[}$ est la fonction caractéristique définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par

$$\chi_{[x, +\infty[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [x, +\infty[, \\ 0 & \text{si } t \notin [x, +\infty[. \end{cases}$$

Ce qui entraîne que

$$|u(x) - \xi| \leq \left| \int_0^{+\infty} \chi_{[x, +\infty[}(t) t G_p(t) dt \right|,$$

et en utilisant l'hypothèse **(H2)** et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |u(x) - \xi| = 0.$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \xi. \quad (4.3)$$

De la même manière, on peut prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \quad (4.4)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_p(u''))'(x) = 0, \quad (4.5)$$

et par conséquent d'après (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5), il s'ensuit que u est une solution du problème (4.1).

Inversement, supposons maintenant que u est une solution du problème (4.1) dans X , alors on a

$$(\varphi_p(u''))'(x) = \int_x^{+\infty} f(t, u(\sigma(t))) dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi_p(u'')(x) &= \int_x^{+\infty} \int_t^{+\infty} f(s, u(\sigma(s))) ds dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+ \\ &= \int_x^{+\infty} (t - x) f(t, u(\sigma(t))) dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$u''(x) = G_p(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Alors, on a

$$u(x) = \xi + \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Ce qui signifie que u est un point fixe de T dans X . ■

Maintenant on énonce et on prouve notre résultat principal.

Théorème 4.2 *Supposons que les hypothèses **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** sont satisfaites alors le problème (4.1) admet au moins une solution.*

Preuve: La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 : $TX \subseteq X$.

Soit $u \in X$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - \xi| &= \left| \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^{+\infty} (t-x) |G_p(t)| dt \\ &= \int_x^{+\infty} (t-x) \left| \left(\int_t^{+\infty} (s-t) f(s, u(\sigma(s))) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} \right| dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} t \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} t \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt. \end{aligned}$$

Alors en utilisant l'hypothèse **(H2)**, on obtient

$$|(Tu)(x) - \xi| \leq r,$$

et par conséquent, il s'ensuit que $\|Tu - \xi\|_0 \leq r$.

Étape 2 : L'ensemble TX est un sous-ensemble uniformément borné de l'espace C_l . Soit $u \in X$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)| &= \left| \xi + \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt \right| \\ &\leq |\xi| + \left| \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt \right| \\ &\leq |\xi| + r. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\|Tu\|_0 \leq |\xi| + r.$$

Ce qui signifie que l'ensemble TX est un sous-ensemble uniformément borné de l'espace C_l .

Étape 3 : L'ensemble TX est équi-convergent en $+\infty$.

Soit $u \in X$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} (Tu)(x) - \xi &= \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \chi_{[x,+\infty[}(t) (t-x) G_p(t) dt. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$|(Tu)(x) - \xi| \leq \left| \int_0^{+\infty} \chi_{[x,+\infty[}(t) t G_p(t) dt \right|,$$

et en utilisant l'hypothèse **(H2)** et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |(Tu)(x) - \xi| = 0.$$

Alors on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (Tu)(x) = \xi.$$

Ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0, \forall u \in X, \forall x > \delta_2(\varepsilon), |(Tu)(x) - \xi| < \varepsilon,$$

et par conséquent, il s'ensuit que l'ensemble TX est équi-convergent en $+\infty$.

Étape 4 : L'ensemble TX est équi-continu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$.

Soit $u \in TX$, $\varepsilon > 0$ et $0 \leq x_1 \leq x_2 < +\infty$, alors on a

$$|T(u)(x_2) - T(u)(x_1)| = \left| \int_{x_2}^{+\infty} (t - x_2) G_p(t) dt - \int_{x_1}^{+\infty} (t - x_1) G_p(t) dt \right|.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} |T(u)(x_2) - T(u)(x_1)| &= \left| \int_{x_2}^{+\infty} ((t - x_2) - (t - x_1)) G_p(t) dt - \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1) G_p(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_2}^{+\infty} (x_2 - x_1) G_p(t) dt \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1) G_p(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que

$$|T(u)(x_2) - T(u)(x_1)| \leq F_1(x_1, x_2) + F_2(x_1, x_2), \quad (4.6)$$

où

$$F_1(x_1, x_2) = \left| \int_{x_2}^{+\infty} (x_2 - x_1) G_p(t) dt \right|,$$

et

$$F_2(x_1, x_2) = \left| \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1) G_p(t) dt \right|.$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &\leq (x_2 - x_1) \int_{x_2}^{+\infty} |G_p(t)| dt \\ &\leq (x_2 - x_1) \int_{x_2}^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} (s - t) a_r(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &\leq (x_2 - x_1) \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} (s - t) a_r(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt. \end{aligned}$$

Alors, d'après l'hypothèse **(H3)** et si on pose par définition $\delta_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}(L_1+1)$, où

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt,$$

on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3(\varepsilon) > 0, \left(|x_2 - x_1| < \delta_3(\varepsilon) \Rightarrow F_1(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (4.7)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2) &= \left| \int_{x_1}^{x_2} (t - x_1) G_p(t) dt \right| \\ &\leq (x_2 - x_1) \int_{t_1}^{t_2} |G_p(t)| dt \\ &\leq (x_2 - x_1) \int_0^{+\infty} |G_p(t)| dt \\ &= L_1(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Et par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3(\varepsilon) > 0, \left(|x_2 - x_1| < \delta_3(\varepsilon) \Rightarrow F_2(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (4.8)$$

Alors d'après (4.6), (4.7) et (4.8), on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3(\varepsilon) > 0, \forall u \in X, \left(|x_2 - x_1| < \delta_3(\varepsilon) \Rightarrow |(Tu)(x_2) - (Tu)(x_1)| < \varepsilon \right),$$

et par conséquent, il s'ensuit que l'ensemble TX est équicontinu sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$.

Étape 5 :

L'opérateur T est continu.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X , avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ dans X , alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\sigma(x)) = u(\sigma(x)) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Maintenant d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(u_n(\sigma(t))) dt = \int_x^{+\infty} (t-x) G_p(u(\sigma(t))) dt,$$

et par conséquent, on a la convergence ponctuelle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Tu_n)(x) = (Tu)(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Maintenant, on va prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n = Tu.$$

Soit $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de la suite $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque TX est relativement compact, alors il existe une sous-suite $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et une fonction $u \in E$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} w_k = u$. Par unicité de la limite on a $u = Tu$. ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n = Tu$ et par conséquent, il s'ensuit que l'opérateur T est continu.

En conclusion, on a prouvé que l'opérateur T satisfait aux hypothèses du théorème de Schauder et par conséquent, le problème à valeur finale (4.1) admet au moins une solution.

La preuve du théorème 4.2 est terminée. ■

Remarque 4.1 *L'unicité de la solution du problème à valeur finale (4.1) est établie pour $p = 2$ sous les conditions suivantes :*

(H4) *Il existe une fonction $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $|f(x, u) - f(x, v)| \leq L(x)|u - v|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$.*

$$\textbf{(H5)} \quad \int_x^{+\infty} (t - x) \left(\int_t^{+\infty} (s - t) L(s) ds \right) dt < 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Théorème 4.3 *Supposons que les hypothèses **(Hi)** pour $i=1, \dots, 5$ sont satisfaites, alors pour $p = 2$ le problème (4.1) admet une unique solution.*

Preuve: Supposons que le problème à valeur finale (4.1) admet deux solutions u_1 et u_2 , alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} u_1^{(4)}(x) - u_2^{(4)}(x) &= f(x, u_1(\sigma(x))) - f(x, u_2(\sigma(x))) \\ &\leq L(x) |u_1(\sigma(x)) - u_2(\sigma(x))|^{p-1} \\ &\leq L(x) \|u_1 - u_2\|_0. \end{aligned}$$

D'où

$$u_1(x) - u_2(x) \leq \|u_1 - u_2\|_0 \int_x^{+\infty} (t - x) \left(\int_t^{+\infty} (s - t) L(s) ds \right) dt.$$

Ce qui implique que

$$\|u_1 - u_2\|_0 \leq \|u_1 - u_2\|_0 \int_x^{+\infty} (t - x) \left(\int_t^{+\infty} (s - t) L(s) ds \right) dt,$$

et par conséquent, en utilisant l'hypothèse **(H5)**, il s'ensuit que

$$\|u_1 - u_2\|_0 = 0.$$

Ce qui signifie que $u_1(x) = u_2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. ■

4.4 Applications

Dans cette section, on donne quelques exemples illustrant l'application de notre résultat.

Exemple 4.1 *On considère le problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_p(u''))''(x) = \frac{(p-2)^{2p}}{(p-1)^{2(p-1)}} e^{(2-p)x} u^{p-1}\left(\frac{x}{p-1}\right), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_p(u''))'(x) = 0, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

où $p > 2$.

Dans cet exemple, on a

$$a_r(x) = \frac{(p-2)^{2p}}{(p-1)^{2(p-1)}} r^{p-1} e^{(2-p)x}, \text{ avec } r > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^+.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} a_r(x) dx &= \frac{(p-2)^{2p-1}}{(p-1)^{2(p-1)}} r^{p-1}, \\ \int_0^{+\infty} t \varphi_p^{-1} \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right) dt &= \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^2 r \int_0^{+\infty} t e^{\left(\frac{2-p}{p-1}\right)t} dt \\ &= r, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi_p^{-1} \left(\int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds \right) dt &= \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^2 r \int_0^{+\infty} e^{\left(\frac{2-p}{p-1}\right)t} dt \\ &= \left(\frac{p-2}{p-1} \right) r. \end{aligned}$$

Alors d'après le théorème 4.2, il s'ensuit que le problème (4.9) admet au moins une solution.

Exemple 4.2 Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = e^{-5x}u(4x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans cet exemple, on a

$$a_r(x) = re^{-5x}, \text{ avec } r > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^+,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} a_r(x) dx &= \int_0^{+\infty} re^{-5x} dx = \frac{r}{5}, \\ \int_0^{+\infty} t \int_t^{+\infty} (s-t) a_r(s) ds dt &= \int_0^{+\infty} t \int_t^{+\infty} (s-t) re^{-5s} ds dt \\ &= \frac{1}{625} r \leq r, \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} (s-t) re^{-5s} ds dt = \frac{1}{125} r.$$

Alors d'après le théorème 4.2, il s'ensuit que le problème (4.10) admet au moins une solution.

Maintenant, puisque

$$\int_x^{+\infty} (t-x) \int_t^{+\infty} (s-t) e^{-5s} ds dt = \frac{e^{-x}}{125} < 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+,$$

alors d'après le théorème 4.3, il s'ensuit que le problème (4.10) admet une unique solution.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a étudié quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions pour certaines classes d'équations différentielles quasi-linéaires du quatrième ordre faisant intervenir l'opérateur p -laplacien avec des conditions initiales non locales dans des domaines non bornés ou à valeurs finals. Ces résultats sont obtenus en utilisant un argument de points fixes de Krasnoselskii et de Schauder et de la théorie des sous et sur-solutions couplée avec la technique itérative.

Les travaux réalisés dans cette thèse offrent des perspectives très intéressantes.

Pour nos futures recherches, nous avons pour objectif d'étudier les problèmes suivants :

1) Etude de l'existence des solutions extrémales pour des systèmes d'équations différentielles quasi-linéaires d'ordre quatre dans un domaine non borné.

2) Etude de l'existence des solutions positives pour certaines classes d'équations différentielles quasi-linéaires d'ordre quatre, en utilisant des méthodes topologiques.

3) Etude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles quasi-linéaires d'ordre quatre faisant intervenir l'opérateur bi- p laplacien en utilisant des méthodes variationnelles.

4) Etude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles quasi-linéaires d'ordre quatre avec argument avancé

Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal and S. Heikkilä, Extremality results for discontinuous Sturm-Liouville boundary value problems, *Math. Nachr.* 236 (2002), 5–30.
- [2] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2001.
- [3] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] V. A. Ambartsumyan, Fluctuations of the brightness of the Milky Way, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 44 (1944), 223–226.
- [5] P. Amster and A. Deboli, A Neumann boundary value problem on an unbounded interval, *Electron. J. Differential Equations* 90 (2008), 1-5.
- [6] C. Avramescu, Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires, *Ann. Mat. Pura Appl.* 81(1969), 147–168.
- [7] D. D. Bainov, Some remarks concerning a differential equation of arbitrary order (in Russian), *Differ. Uravn.*, 3 (1967), 2003–2006.
- [8] M. Bartušek, M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini : Fourth-order differential equation with deviating argument, *Abstr. Appl. Anal.* 2012 (2012), Article ID 185242, 17 pages.
- [9] J. V. Baxley, Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on infinite intervals, *J. Math. Anal. Appl.* 147 (1990), 122-133.

- [10] J. V. Baxley and C. G. Enloe, Nonlinear initial-value problems with positive global solutions, *Electron. J. Differ. Equ. Conf.* 10 (2003), 71–78.
- [11] S. Biagi, A. Calamai and F. Papalini, Heteroclinic solutions for a class of boundary value problems associated with singular equations, *Nonlinear Anal.* 184 (2019), 44–68.
- [12] M. Bocher, Boundary Problems and Green’s Functions for Linear Differential and Difference Equations, *Ann. of Math.* (2) 13 (1911 - 1912), 71-88.
- [13] H. Brezis, Semilinear equations in R^N without condition at infinity, *Appl. Math. Optim.* 12 (1984), 271-282.
- [14] M. Briki, T. Moussaoui and D. O’Regan, Existence of solutions for a fourth-order boundary value problem on the half-line via critical point theory, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2016 (2016), 1–11.
- [15] E. Çetin and R. P. Agarwal, Existence of solutions for fourth order three-point boundary value problems on a half-line, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2015 (2015), 1–23.
- [16] J. Chu, On an infinite-interval boundary-value problem in geophysics, *Monatsh. Math.* 188 (2019), 621-628.
- [17] A. Constantin, On an infinite interval boundary value problem, *Ann. Mat. Pura Appl.* 176 (1999), 379-394.
- [18] C. Corduneanu, Integral equations and stability of feedback systems, Academic Press, New York, 1973.
- [19] M. Countryman and F. L Kannan, Nonlinear boundary value problems on semi-infinite intervals, *Computers Math. Applic.* 28 (1994), 59–75.
- [20] M. Dahmane and M. Derhab, Existence of extremal solutions for a fourth-order quasilinear differential equation with multipoint initial conditions and without conditions at infinity, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* 28 (2021), 77–98.
- [21] M. Dahmane and M. Derhab, Existence of extremal solutions for a fourth-order quasilinear differential equation with nonlocal initial conditions on the half-line, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* 29 (2022), 13–39.
- [22] M. Dahmane and M. Derhab, Existence of Positive Solutions of a Terminal Value Problem for Fourth-Order Differential Equations, Submitted .

- [23] M. Dahmane and M. Derhab, Existence of Solutions for a Class of Fourth-order Quasilinear Diff. Eq. with Advanced Argument and with Terminal Value, *PanAmerican Mathematical J.* 32(2022), N° 2, 89 - 102.
- [24] J. M. Davis and J. Henderson, Monotone methods applied to some higher order boundary value problems, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 2 (2001), 1-9.
- [25] G. A. Derfel' and S. A. Molchanov, Spectral methods in the theory of differential-functional equations, *Math. Notes* 47 (1990), 254–260.
- [26] M. Derhab and H. Mekni, Existence of extremal solutions for a quasilinear differential equation with nonlocal boundary condition on the half line and without condition at infinity, *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 19 (2016), 523-536.
- [27] M. Derhab and H. Mekni, Existence of minimal and maximal solutions for a quasilinear differential equation with nonlocal boundary condition on the half-line, *Communications in Applied Analysis* 20 (2016), 209–221.
- [28] M. Derhab and B. Messirdi, Existence of minimal and maximal solutions for a fourth-order differential equation with multipoint boundary conditions, *Communications in Applied Analysis.* 16 (2009), 65-81.
- [29] M. Derhab and B. Messirdi, Existence of minimal and maximal solutions for a fourth-order differential equation with nonlocal boundary conditions, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* 18 (2011), 1–19.
- [30] J. I. Díaz, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. Vol.I. Elliptic equations.* Research Notes in Mathematics n° 106, Pitman, Londres, 1985.
- [31] S. Djebali, O. Kavian, T. Moussaoui, Qualitative properties and existence of solutions for a generalized fisher-like equation, *Iran. J. Math. Sci. Inform.* 4 (2009), 65–81.
- [32] S. Djebali and O. Saifi, Third order BVPs with ϕ -Laplacian operators on $[0, +\infty)$, *Afr. Diaspora J. Math.* 16 (2013), 1–17.
- [33] S. Djebali and O. Saifi, Singular ϕ -Laplacian third-order BVPs with derivative dependence, *Arch. Math. (Brno)* 52 (2016), 35–48.
- [34] Z. Došlá, M. Marini and S. Matucci : Positive solutions of nonlocal continuous second order BVP's, *Dyn. Syst. Appl.* 23 (2014), 431–446.

- [35] N. P. Evlampiev, A. M. Sidorov, and I. E. Filippov, On a Functional Differential Equation, *Lobachevskii J. Math.* 38 (2017), 588–593.
- [36] A. Frioui, A. Guzane-Lakoud and R. Khaldi, Higher order boundary value problems at resonance on an unbounded interval, *Electron. J. Differential Equations* 2016 (2016), 1-10.
- [37] A. Granas, R.B. Guenther, J.W. Lee and D. O’regan, Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devices, *J. Math. Anal. Appl.* 116 (1986), 335-348.
- [38] O. A. Gross, The boundary value problem on an infinite interval, *J. Math. Anal. Appl.*, 7 (1963), 100–109.
- [39] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [40] P. Hartman, A. Wintner, On the nonincreasing solutions of $y'' = f(x, y, y')$, *Amer. J. Math.* 73 (1951), 390–404.
- [41] I. H. Herron, The Orr-Sommerfeld equation on infinite intervals, *SIAM Rev.* 29 (1987), 597-620.
- [42] E. Hille, Non-oscillation theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948), 234–252.
- [43] O. F. Imaga and S. A. Iyase, Existence of solution for a resonant p -Laplacian second-order m -point boundary value problem on the half-line with two dimensional kernel, *Bound. Value Probl.* 114 (2020), 11 pages.
- [44] S. A Iyase and S. A Bishop, On a third-order p -Laplacian boundary value problem at resonance on the half-line, *Appl. Math. Inf. Sci.* 15 (2021), 343-351.
- [45] L. K. Jackson, Subfunctions and second order ordinary differential inequalities, *Advances in Math.* 2 (1968), 307–363.
- [46] M. Jiaqui, The nonlocal boundary value problems of nonlinear elliptic systems in unbounded domains, *Appl. Math. Comput.* 86 (1997), 115-121.
- [47] M. Jiaqui and O. Cheng, A class of nonlocal boundary value problems for nonlinear elliptic systems in unbounded domains, *Acta Math. Sic.* 21 (2001), 93-97.
- [48] A. G. Kartsatos, The Leray-Schauder theorem and the existence of solutions to boundary value problems on infinite intervals, *Indiana Univ. Math. J.* 23 (1974), 1021–1029.

- [49] A. G. Kartsatos, A boundary value problem on an infinite interval, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 19 (1975), 245–252.
- [50] T. Kato and J. B. McLeod, The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, *Bull. Am. Math. Soc.* 77 (1971), 891–937.
- [51] R. E. Kidder, Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium, *J. Appl. Mech.* 24 (1957), 329–332.
- [52] T. K. Kravchenko, A. I. Yablonskii, Solution of an infinite boundary value problem for a certain equation of the third order (in Russian), *Differ. Uravn.* 1 (1965), 327–329.
- [53] V. Lakshmikantham and S. Köksal, *Monotone Flows and Rapid Convergence for Nonlinear Partial Differential Equations*, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2003.
- [54] A. Lepin, L. Lepin and N. Vasilyev, On boundary value problems for φ -Laplacian on the semi-infinite interval, *Math. Model. Anal.* 22 (2017), 52–59.
- [55] S. Liang, J. Zhang and Z. Wang, The existence of multiple positive solutions for multi-point boundary value problems on the half-line, *J. Comput. Appl. Math.* 228 (2009), 10–19.
- [56] P. Lindqvist, *Notes on the Stationary p -Laplace Equation*, Springer-Briefs in Mathematics, 2019.
- [57] Y. Liu and P. J. Y. Wong, Unbounded solutions of BVP for second order ODE with p -Laplacian on the half line, *Appl. Math.* 58 (2013), 179–204.
- [58] K. G. Mavridis, P. Ch. Tsamatos, Existence of positive solutions of terminal value problem for second order differential equations, *Communications in Applied Analysis* 15 (2011), 539–546.
- [59] F. Minhós and H. Carrasco, *High Order Boundary Value Problems on Unbounded Domains : Types of Solutions, Functional Problems and Applications ; Trends in Abstract and Applied Analysis ; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. : Hackensack, NJ, USA, 2018.*
- [60] T. Moussaoui, R. Precup, Existence of solutions for second-order differential equations and systems on infinite intervals, *Electron. J. Differential Equations* 94 (2009), 1–13.
- [61] T. Y. Na, *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1979.

- [62] Z. Nehari, On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics, Proc. Roy. Irish. Acad. 62 (1961-1963), 117-135.
- [63] J. Niu, Y. Z. Lin and C. P. Zhang, Approximate solution of nonlinear multi-point boundary value problem on the half-line, Math. Model. Anal. 17 (2012), 190–202.
- [64] C. V. Pao, Nonlinear elliptic boundary value problems in unbounded domains, Nonlinear Anal. 18 (1992), 759-774.
- [65] C. V. Pao, Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum Press, New York, 1992.
- [66] M.C. Pelissier, Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie, Thèse, Publications Mathématiques d’Orsay N° 110, 1975.
- [67] W. Robert Mann and F. Wolf, Heat transfer between solids and gasses under nonlinear boundary conditions, Quart. Appl. Math. 9 (1951), 163-184.
- [68] S. K. Sachdev, Positive solutions of a nonlinear initial-value problem on half-line, J. Optim. Theory Appl. 39 (1983), 19-34.
- [69] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional integrals and derivatives. theory and applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [70] W. E. Shreve, Boundary value problems for $y'' = f(x, y, y')$ on $[a, +\infty)$, SIAM J. Appl. Math. 17 (1969), 84–97.
- [71] W. E. Shreve, Terminal value problems for second order nonlinear differential equations, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 783–791.
- [72] V. Spiridonov, Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials, Phys. Rev. A 52 (1995), 1909–1935.
- [73] V. A. Staikos and P. Ch. Tsamatos, On the terminal value problem for differential equations with deviating arguments, Arch. Math. 21 (1985), 43–49.
- [74] B. Van Brunt and G. C. Wake, A Mellin transform solution to a second-order pantograph equation with linear dispersion arising in a cell growth model, European J. Appl. Math. 22 (2011), 151–168.
- [75] A. Varma and N. R. Amundson, Maximal and minimal solutions, effectiveness factors for chemical reaction in porous catalysts. Chem. Eng. Sci. 28 (1973), 91-104.

- [76] P. K. Wong, Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second order nonlinear differential equations, *Pacific J. Math.* 13 (1963), 737–760..
- [77] F. Wu, Existence of eventually positive solutions of fourth order quasilinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 389 (2012), 632-646.
- [78] B. Yan, D. O'Regan, R.P. Agarwal, Unbounded solutions for singular boundary value problems on the semi-infinite interval : Upper and lower solutions and multiplicity, *J. Comput. Appl. Math* 197 (2006) 365–386.
- [79] Ş. Yardımcı and E. Uğurlu, Nonlinear fourth order boundary value problem, *Bound. Value Probl.* 189 (2014), 10 pages.

Abstract

The object of this thesis is the study of the existence of solutions for certain classes of fourth order quasi-linear differential equations involving the p -Laplacian operator with nonlocal initial or terminal value conditions in unbounded domains using the upper and lower solutions method coupled with the monotone iterative technique, the fixed point theorems of Krasnoselskii and Schauder.

Key words

Half-line, bi- p -Laplacian, multipoint and nonlocal conditions, upper and lower solutions, monotone iterative technique, Fourth order differential equation, Guo-Krasnoselskii theorem, Schauder fixed point theorem.

AMS Subject Classification: 34B10, 34B15 - 47N20, 34B40, 34B18, 47H10

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de l'existence de solutions pour certaines classes d'équations différentielles quasi-linéaires du quatrième ordre faisant intervenir l'opérateur p -Laplacien avec des conditions initiales non locales ou finales dans des domaines non bornés en utilisant la méthode des sous et sur solutions couplée avec la technique itérative, les théorèmes du point fixe de Krasnoselskii et Schauder.

Mots clés

Demi-droite, conditions initiales non locales, sur et sous solutions, bi- p -Laplacien, technique itérative monotone, équations différentielles du quatrième ordre, théorème de Guo-Krasnoselskii, théorème du point fixe de Schauder.

AMS Subject Classification: 34B10, 34B15 - 47N20, 34B40, 34B18, 47H10

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود الحلول لبعض الاصناف من المعادلات التفاضلية شبه الخطية من الدرجة الرابعة التي تحوي مؤثري-لابلاسيان على مجالات غير محدودة مع شروط ابتدائية غير محلية او شروط نهائية باستعمال طريقة الحلول الفوقية والتحتية مرتبطة بتقنية التراجع ونظريات النقاط الثابتة لكراسنوسلسكي و شاوردر.

الكلمات المفتاحية

نصف المسقيم ، شروط أولية غير محلية، حلول فوقية وتحتية، بي-لابلاسيان، تقنية التراجع، معادلات تفاضلية من الدرجة الرابعة، نظرية كراسنوسالسكي، نظرية النقطة الثابتة لشاوردر.

AMS Subject Classification: 34B10, 34B15 - 47N20, 34B40, 34B18, 47H10