

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté de Sciences  
Département de Mathématiques

## MÉMOIRE DE MASTER

Option : ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS  
présenté par

Belmokhtar khedidja

---

# Existence de solution pour des équations d'évolution semi linéaires soumises à des impulsions

---

Soutenu le 04/ 07/ 2022 devant le jury composé de :

M. M. YEBDRI	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M.S.M.BOUGUIMA	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
M.B.MESSIRDI	M C A	Université de Tlemcen	Examineur
MME N.DAOUDI-MERZAGUI	Professeur	Université de Tlemcen	Encadrante

Année Universitaire :2021-2022

# Dédicaces

---

Je dédie ce modeste travail :

À

Mes très chers parents,

À

Mon frère Habibe,

À

Mes soeurs Meriem et Hafssa,

À

tous mes amis.

# Remerciements

---

Tout d'abord, je remercie **DIEU** le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadrante, le Professeur ” **Merzagui Naima**” pour son soutien et son encouragement constant, son grande professionnalisme, sa confiance en moi, la gentillesse et la patience qu'elle a manifestées à mon égard durant ce travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à ce mémoire en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs discussions et propositions. Je vous exprime toute ma reconnaissance de l'honneur que vous me faites en acceptant de lire et d'évaluer ce travail.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères au corps professoral et administratif du département de mathématiques de la faculté des Sciences l'université de Tlemcen pour la qualité de leur enseignement.

J'adresse aussi mon remerciements les plus vifs aux personnes qui m'aient apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

# \_\_\_\_\_Abréviations & Notations\_\_\_\_\_

$A$  : Opérateur linéaire continue

$L^p[a, b]$  : l'espace des fonctions mesurables de puissance  $p \in [1, +\infty)$  intégrables sur  $[a, b]$ .

$L^\infty[a, b]$  : l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur  $[a, b]$

$\mathcal{L}(X)$  : l'espace des application continues de  $X$  dans  $X$ .

$\rho(A)$  : l'ensemble resolvante de  $A$  .

$\text{conv}(A)$  : l'enveloppe convexe de  $A$

$2^{[a,b]}$  : l'ensemble des parties de l'intervalle  $[a, b]$

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Un aperçu sur les équations différentielles impulsives</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation des équations différentielles impulsives . . . . .	7
1.2 Classes des équations différentielles impulsives . . . . .	7
1.3 les équations impulsives non instantanées . . . . .	8
1.4 Espace Fonctionnel . . . . .	8
1.5 Exemples et modèles . . . . .	10
1.5.1 Exemples de la physique . . . . .	10
1.5.2 Exemples de la dynamique de population (biologie) . . . . .	13
1.6 Les spécificités liées à l'étude des Equations Differentielles impulsives et difficultés découlant de leur étude : . . . . .	15
1.7 Problèmes étudiés . . . . .	15
<b>2 Préliminaires</b>	<b>17</b>
2.1 Notions et propriétés élémentaires sur les opérateurs compacts . . . . .	17
2.1.1 Equicontinuité . . . . .	17
2.1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli . . . . .	17
2.2 Quelques notions de la théorie des semi-groupes . . . . .	18
2.2.1 Semi groupe fortement continu . . . . .	18
2.2.2 Générateur infinitésimal . . . . .	19
2.2.3 Semi-groupes analytiques . . . . .	20
2.3 Solutions classiques et intégrales . . . . .	21
2.4 Théorèmes de point fixe . . . . .	22
2.4.1 Principe de contraction de Banach . . . . .	22
2.4.2 Théorème du point fixe de Schauder . . . . .	23
2.5 Mesures de non compacité et opérateurs condensants . . . . .	23
2.5.1 Mesure de non-compacité . . . . .	23
2.5.2 Contractions strictes d'ensembles et applications condensantes . . . . .	25
2.5.3 Quelques propriétés des opérateurs condensants . . . . .	27
2.6 Equation de chaleur . . . . .	28
2.6.1 Le semi-groupe de la chaleur . . . . .	29
2.6.2 Modèle mathématique de la bio-chaleur Équation de Pennes ID . . . . .	30
<b>3 Résultats d'existence</b>	<b>32</b>
3.1 Cas d'impulsions instantanées . . . . .	32
3.1.1 Problème étudié . . . . .	32
3.1.2 Concepts de solutions considérées . . . . .	32
3.1.3 Hypothèses considérées . . . . .	33

3.1.4	Résultats principaux . . . . .	35
3.2	Cas d'impulsions non instantanées . . . . .	36
3.2.1	Cas où $A$ engendre un semi groupe $T(t)$ compact. . . . .	36
3.2.2	Cas où le semi groupe $T(t)$ généré par $A$ est non compact . . . . .	46
<b>Conclusion</b>		<b>53</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>54</b>

# Introduction

La dynamique des processus d'évolution dans le monde réel est souvent soumise à des changements brusques tels que les chocs, les récoltes et les catastrophes naturelles. En général, ces perturbations de courte durée par rapport à la durée du processus, apparaissant généralement sous la forme d'impulsions. Ainsi, les équations différentielles impulsives apparaissent comme une description naturelle des phénomènes évolutifs physiques qui changent brutalement d'états comme par exemple les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques tels que les battements cardiaques, les flux sanguins, la dynamique des populations ([7, 44]), les procédés biotechnologiques, la chimie [9], l'ingénierie [24], la théorie du contrôle [37, 32], la médecine [26, 16].

L'existence et l'unicité de solution sont les propriétés qualitatives fondamentales des équations impulsives le plus étudiées. Plusieurs travaux (voir [51, 7, 9, 5, 29, 49, 19, 20, 21, 23]) ont considéré des équations différentielles ordinaires impulsives du premier et du second ordre.

La théorie de base sur les équations d'évolution impulsives dans les espaces de Banach a été introduite par Lakshmikanthan, D. D. Bainov [39], D. D. Bainov, P.S. Simeonov [7], A.M. Samoilenko, Benchohra et al. [12]. Les équations d'évolution impulsives non linéaires sur les espaces de Banach ont été étudiées en utilisant la théorie des semi-groupes dans les articles de E. Hernandez, NU. Ahmed [3] et Bainov et al. [9, 5].

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence de solution pour des problèmes d'évolution soumis à des impulsions. Nous portons un intérêt spécial aux impulsions non instantanées c'est-à-dire que les impulsions démarrent brusquement et leur l'action continue sur un laps de temps. Notre étude est basée sur les travaux de E.Hernandez et D.O'Regan [36] qui ont introduit cette nouvelle classe d'équations différentielles abstraites impulsives en considérant le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N \\ u(t) = g_i(t, u(t)), & t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, \dots, N \\ u(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est le générateur infinitesimal d'un  $C_0$  semi-group d'opérateurs linéaires bornés  $(T(t))_{t \geq 0}$  défini sur un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $x_0 \in X$ ,  $0 = t_0 = s_0 < t_1 \leq s_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq s_N \leq t_{N+1} = \alpha$  sont des nombres prédéfinis,  $g_i \in C((t_i, s_i] \times X; X)$ , pour tous  $i = 1, \dots, N$  et  $f : [0, \alpha] \times X \rightarrow X$

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier est consacré à un aperçu sur les équations différentielles impulsives en soulignant leur importance dans la modélisation. Dans le second chapitre, nous introduisons les outils mathématiques nécessaires au

développement de ce travail . Dans le troisième chapitre nous utilisons la théorie de semi groupe pour établir des résultat d'existence de solution pour des équation d'évolution soumises à des impulsions .

Nous traiterons d'abord le cas d'impulsions instantanées et nous exposerons par la suite des résultats d'existence dans le cas d'effet d'impulsions non instantanées. Des exemples sont présentés dans chaque cas. Nous achevons ce mémoire par une conclusion et des perspectives.

# Un aperçu sur les équations différentielles impulsives

La théorie des équations différentielles impulsives est une branche nouvelle et importante des équations différentielles. Le premier article de cette théorie est lié à A. D. Mishkis et V. D. Milíman en 1960 et 1963 . Les dernières décennies ont vu des développements majeurs dans cette théorie.

Les équations différentielles impulsives décrivent des processus qui subissent de brusques changements d'état à certains moments. Les processus avec un tel caractère surviennent naturellement et souvent, en particulier dans les phénomènes étudiés en physique, chimie, biologie, dynamique des populations, ingénierie et économie, voir les monographies de Benchohra et al [12], Lakshmikantham et al [39] et les articles de Guo [[34]], Li et Liu [40] pour plus de commentaires et de citations.

La théorie des équations d'évolution impulsives dans les espaces de Banach sont devenues un domaine d'investigation important au cours des dernières décennies. L'intérêt grandissant porté à cette théorie est dû à sa large applicabilité dans le contrôle, la mécanique, le génie électrique, et certains domaines biologique et médical. Pour plus de détails sur cette théorie et ses applications, nous renvoyons aux références [2, 13, 14, 28], où de nombreuses propriétés de leurs solutions sont étudiées et des bibliographies détaillées sont données.

La caractéristique la plus importante des équations différentielles (ordinaires et aux dérivées partielles) soumises à des impulsions instantanées est liée à leur utilité dans la simulation de processus et de phénomènes soumis à des perturbations de courte durée au cours de leur évolution, et les perturbations sont effectuées de manière discrète et leur durée est négligeable par rapport à la durée totale des processus et des phénomènes lors de la construction de modèles mathématiques. Bref, ces équations différentielles (ordinaires et aux dérivées partielles) à impulsions instantanées considèrent essentiellement des problèmes pour lesquels les impulsions sont brusques et instantanées.

Cependant, on peut voir que les modèles avec des impulsions instantanées ne peuvent pas expliquer une certaine dynamique de processus d'évolution en pharmacothérapie par exemple comme l'ont souligné Hernandez et O'Regan dans [36], lorsque l'on considère la situation simplifiée concernant l'équilibre hémodynamique d'une personne, l'introduction des médicaments dans la circulation sanguine et l'absorption qui en résulte pour le corps sont un processus graduel et continu. Donc, on peut interpréter cette situation comme

une action impulsionnelle qui démarre brusquement et reste active sur un intervalle de temps fini. Nous appelons de tels phénomènes des impulsions non instantanées lors de la construction de modèles mathématiques. Au vu de cette interprétation de nombreux modèles issus de modèles réalistes peuvent être décrits comme des équations aux dérivées partielles avec impulsions non instantanées.

L'analyse des systèmes différentiels impulsifs est cruciale pour développer des modèles mathématiques plus réalistes pour les maladies infectieuses. c'est le thème développé par R.Miron dans sa thèse [43] où elle a présenté trois applications biologiques montrant l'utilisation des équations différentielles impulsives dans les problèmes du monde réel. Elle a examinés également les effets de la stabilité sur un système VIH impulsif bidimensionnel. La première application est un système décrivant la thérapie d'induction-maintenance du VIH, qui montre comment la solution à un système impulsif est utilisé pour trouver des résultats biologiques (adhérence, etc.). Une deuxième application est un système VIH décrivant l'interaction entre les lymphocytes T, le virus et les médicaments. La stabilité du système est déterminée pour un niveau de médicament fixé dans trois régions spécifiques : niveaux de médicament faible, intermédiaire et élevé.. Des simulations numériques montrent les effets de niveaux de médicament sur la stabilité d'un système en incluant une impulsion. Elle montre analytiquement l'existence et l'unicité des solutions T-périodiques, et elle montre comment la stabilité change en variant le taux de réponse immunitaire, les impulsions et un certain terme d'infection non linéaire. La troisième application démontre comment les changements saisonniers peuvent être incorporés dans un système différentiel impulsif de la fièvre de la vallée du Rift et examine comment la stabilité peut différer lorsque les impulsions sont incluses.

Au cours de ces dernières années, des équations différentielles non linéaires avec des impulsions non instantanées ont été étudiées par plusieurs auteurs et des résultats intéressants ont été obtenus, voir ([17, 31, 36, 47, 53]).

En 2013, Hernandez et O'Regan [36] initié l'étudié le problème à valeur initiale pour une classe d'équations d'évolution sous l'effet d'impulsions non instantanées dans les espaces de Banach. La même année, Pierrri et al [47] ont obtenu l'existence de solutions douces (mild solution) pour une classe d'équations différentielles abstraites semi-linéaires avec des impulsions non instantanées en utilisant la théorie du semi-groupe analytique. L'existence de solutions aux problèmes aux limites périodiques pour les équations d'évolution non linéaires avec des impulsions non instantanées sur les espaces de Banach a été étudiée dans [53] en utilisant la théorie des semi-groupes et les méthodes du point fixe.

Les auteurs, des articles ([17, 31, 53]) ont utilisé divers théorèmes du point fixe pour étudier des équations d'évolution abstraites avec impulsions non instantanées lorsque le semi-groupe correspondant  $T(t)_{(t \geq 0)}$  est compact, ceci est très pratique pour les équations à résolvante compacte.

Et pour le cas où le semi-groupe correspondant  $T(t)_{(t \geq 0)}$  est non compact, P.Chen et al [15] ont étudié l'existence d'une solution mild pour (1.1) en utilisant les propriétés de la mesure de non-compacité de Kuratowski, les opérateurs de condensation et le théorème du point fixe .

## 1.1 Présentation des équations différentielles impulsives

Une équation différentielle impulsive est décrite par trois composantes : une équation différentielle à temps continu, qui régit l'état du système entre les impulsions ; une équation d'impulsion, qui modélise un saut impulsif défini par une fonction de saut à l'instant sur l'intervalle de temps où l'impulsion se produit ; et un critère de saut, qui définit un ensemble d'événements de saut dans lesquels l'équation d'impulsion est active (voir [39])

Dans ce qui suit, nous donnons quelques précisions concernant les équations différentielles ordinaires impulsives (et systèmes) d'ordre 1 qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), & t \in J, \quad t \neq \tau_k \\ \Delta x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k)), & k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $J$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}$  avec  $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction donnée,  $I_k : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  le saut de l'état à chaque  $\tau_k$  tel que  $\tau_k$  sont appelés instants (moments d'impulsions).  $\Delta x(\tau_k)$  représente le saut de la fonction inconnue  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , à l'instant  $\tau_k$  donné par :

$$\Delta x(\tau_k) = x(\tau_k^+) - x(\tau_k^-), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

où

$x(\tau_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^-} x(\tau_k + h)$  et  $x(\tau_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(\tau_k - h)$  représentent respectivement la limite droite et gauche de l'état à  $t = \tau_k$

## 1.2 Classes des équations différentielles impulsives

On peut identifier trois classes d'équations différentielles impulsives :

**CLASSE I : équations avec des moments fixes de l'effet d'impulsion**

l'équation de cette classe s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k \end{cases} \quad (1.2)$$

les moments de l'effet sont fixés au préalable en définissant la séquence  $\tau_k : \tau_k < \tau_{k+1}, k \in \mathbb{K}$  pour  $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$  la solution  $x(t)$  de 1.1 satisfait l'équation  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  et pour  $t = \tau_k$ ,  $x(t)$  satisfait la relation  $x(\tau_k^+) = \varphi_k(x(\tau_k)) = x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k))$

**CLASSE II : Équation avec moments non fixés de l'effet d'impulsion**  
ces équations prennent la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\tau_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$  ( $k \in K \subset \mathbb{Z}$ ,  $x \in \Omega$ ).

les moments de l'effet d'impulsion pour ces équations se produisent lorsque  $(t, x)$  vérifie

$t = \tau_k(x)$  pour certains  $k \in K$ .

### CLASSE III : Équations impulsives autonomes

Les équations impulsives autonomes ont la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & x \notin \sigma \\ \Delta x = I_k(x), & x \in \sigma \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\sigma$  est une variété de dimension  $(n - 1)$  contenue dans l'espace de phases  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

le moment de l'effet d'impulsion pour l'équation (1.4) se produit lorsque le point  $x(t)$  de l'espace de phase rencontre  $\sigma$ .

Si  $\sigma$  est donné par l'équation  $\phi(x) = 0$  alors (1.4) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & \phi(x) \neq 0 \\ \Delta x = I_k(x), & \phi(x) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

## 1.3 les équations impulsives non instantanées

Certains processus et phénomènes soumis à des impulsions qui commencent brusquement à certains points et leur action se poursuivent sur des intervalles finis donnés. La dynamique de tels processus pourraient être modélisés par des équations différentielles avec impulsions non instantanées. Ce type d'équation est formalisé comme suit :

Soit deux suites croissantes de points  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$  tel que  $0 < s_0 < t_i < s_i < t_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \infty$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$

soit  $t_0 \in [0, s_0) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} [t_k, s_k))$  un point arbitraire donné. Sans perte de généralité, nous allons supposer que  $0 < t_0 < s_0$ .

Un problème à valeur initiale pour le système d'équations différentielles impulsives non instantanées s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{pour } t \in (t_k, s_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) = \Phi(t, x(t), x(s_k - 0)), & \text{pour } t \in (s_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où  $x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \bigcup_{k=0}^{\infty} [t_k, s_k] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\Phi_k : (s_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ( $k = 1, 2, \dots$ )

**Remarque 1.3.1.** Les intervalles  $(s_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  sont appelés intervalles d'impulsions non instantanées et les fonctions  $\Phi_k(t, x, y)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  sont appelés les fonctions d'impulsions non instantanées.

## 1.4 Espace Fonctionnel

Les solutions d'une équation différentielle impulsive sont en général des fonctions continues par morceaux. Alors l'espace fonctionnel approprié pour les solutions de telles équations est l'espace des fonctions continues par morceaux.

Soient

$$J_0 = [0, t_1]; \quad J_k = (t_k, t_{k+1}] \quad , k = 1, \dots, N \quad m \in \mathbb{N}^*$$

$$J = [0, T]$$

Soit  $y$  une fonction inconnue  $y : J \rightarrow X$  où  $X$  est un espace de Banach. On note par  $y(t_k^-)$  et  $y(t_k^+)$  les limites à gauche et à droite de  $y$  en  $t = t_k$ . Alors on introduit l'espace

$$\mathcal{PC}(J, X) := \left\{ \begin{array}{ll} y : J \rightarrow X, y \in C(J_k \cap [0, T], X) & k = 1, \dots, m \\ y(t_k^+) \text{ et } y(t_k^-) \text{ existent et } y(t_k^-) = y(t_k) & k = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

**Lemme 1.4.1.**  $\mathcal{PC}(J, X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|y\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t \in J} \|y(t)\|_X$$

**Preuve 1.4.1.** Soit  $(y_q)_q$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{PC}(J, X)$ , alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall q_0, q_1 \geq n_0 \Rightarrow \|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{\mathcal{PC}} \leq \epsilon$$

comme  $y_q \in \mathcal{PC}(J, X)$  alors  $y_q \in C(J_0, X)$ , et on a

$$\|y_q - y_{q_1}\|_{J_0} \leq \|y_q - y_{q_1}\|_{\mathcal{PC}} \leq \epsilon$$

donc  $(y_q)_q$  est une suite de Cauchy dans  $C(J_0, X)$  alors on a  $\exists y_0 \in C(J_0, X)$  tq

$$\|y_q - y_0\|_{J_0} \rightarrow 0 \quad \text{quand } q \rightarrow \infty$$

On a aussi  $y_q \in C(J_1, X)$ , on considère la suite des fonction :

$$\tilde{y}_q(t) = \begin{cases} y_q(t); & t \in ]t_1, t_2] \\ y_q(t^+); & t = t_1 \end{cases}$$

alors  $(\tilde{y}_q)_q$  est une suite de Cauchy dans  $C([t_1, t_2], X)$ , donc  $\exists y_1 \in C([t_1, t_2], X)$  tq  $\lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{y}_q = y_1$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} y_q = y_1; \quad \forall t \in ]t_1, t_2]; \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{y}_q(t_1) = \lim_{q \rightarrow \infty} y_q(t_1^+) = y_1(t_1)$$

Donc  $\|y_q - y_1\|_{J_1} \rightarrow 0$  quand  $q \rightarrow \infty$

Par analogie, on peut continuer la démonstration jusqu'à l'étape "m", d'où

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|y_q - y\|_{\mathcal{PC}} = 0$$

tq :

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t) & ; & t \in J_0 \\ y_1(t) & ; & t \in J_1 \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ y_m(t) & ; & t \in J_m \end{cases}$$

Alors  $\mathcal{PC}(J, X)$  est un espace de Banach.

## 1.5 Exemples et modèles

### 1.5.1 Exemples de la physique

**Exemple 1.5.1.** : On considère l'équation impulsive

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = x^2 \operatorname{sgn} x - x & , t = \tau_k(x) \end{cases}$$

où  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_k(x) = x + 6k$  pour  $|x| < 3$  et  $k = 0, 1, 2, \dots$

le mouvement qui commence à partir d'un point  $(0, x_0)$  avec  $1 < |x_0| < 3$  est soumis à un effet impulsif plusieurs fois. Par exemple, le mouvement qui part du point  $(0, \sqrt[4]{2})$  est soumis à un effet d'impulsion trois fois, et après le moment  $\tau_3 = 2$  la courbe intégrale ne croise plus les hypersurfaces  $\sigma_k$  (voir figure 1).

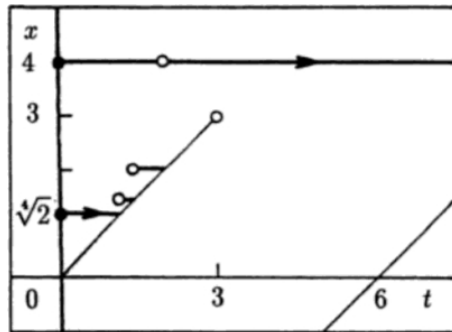


figure 1

Un mouvement partant d'un point  $(0, x_0)$  avec  $0 < x_0 < 1$  est soumis à un effet d'impulsion  $t$  plusieurs fois aux temps  $\tau_k$  pour lesquels nous avons  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$ ,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$  (figure 2).

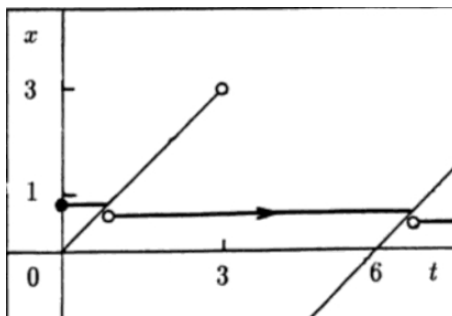


figure 2

Le mouvement qui part d'un point  $(0, x_0)$  avec  $-1 < x_0 < 0$  est également soumis à un effet d'impulsion infiniment de fois mais  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 6$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$  (figure 3). Dans ce cas, ce phénomène est appelé battement.

La courbe intégrale qui part des points  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$  croise aussi les hypersurfaces  $\tau_k$  infiniment de fois, mais à des points fixes de l'opérateur  $A_t x = x^2 \operatorname{sgn} x$  (figure 3).

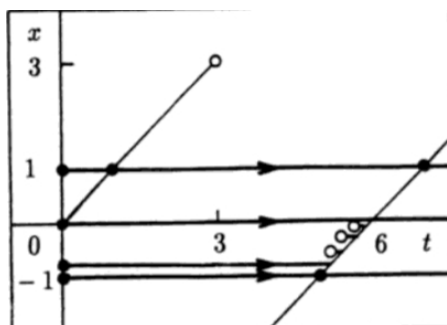
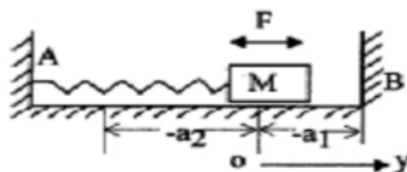


figure 3

Outre le phénomène de battement dans cet exemple, on observe la fusion des solutions à partir d'un moment donné. Ainsi, par exemple, les solutions avec des points initiaux  $(0, \sqrt[4]{2})$  coïncident pour  $t > 2$ .

### Exemple 1.5.2. : Corps attaché par un ressort à un point fixe

Un corps  $M$  attaché par un ressort à un point fixe  $A$  et excité par une force  $F = h \sin(pt + \alpha)$ , vibre le long d'une ligne horizontale et entre en collision avec une paroi rigide  $B$  comme indiqué sur la Fig 4

figure 4 : Un corps  $M$  attaché par un ressort à un point fixe

Le système peut être décrit par les équations différentielles impulsives comme suit :

$$my'' + cy' + ky = h \sin(pt + \alpha) \quad , y \in [-a_2, a_1]$$

$$y'^+ = \begin{cases} -\mu y', & y = a_1, \quad y' \in (0, b_1], \quad \mu \in (0, 1] \\ y', & y = a_1, \quad y' \in [-b_2, 0) \end{cases}$$

où  $y'^+$  est la vitesse du corps après que l'impact est appliqué,  $y' = 0$  pour  $y = -a_2$ , et tous les constantes sont positives.

Un système multi-corps vibrant avec impact est donné par

$$Ny'' + cy' + ky = H \sin(pt + \alpha), \quad g_i(t, y, y') \neq 0$$

$$y'^+ = By', \quad g_i(t, y, y') = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

où  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $N, C, K$  et  $B \in \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n$ ;  $N, K$  sont des matrices définies positives et  $C$  est une matrice définie non négative.

**Exemple 1.5.3.** : (Une balle rebondissante [6] [33] [48])

Dans cet exemple, nous considérons un ballon qui saute sur une surface horizontale plate (voir Figure 1). La perte d'énergie, causée par le frottement à la surface, se caractérise par une constante  $\mu$ .

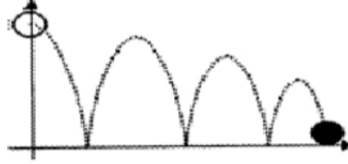


Figure 1 : Une balle qui rebondit

Ce processus est simulé par une équation différentielle de second ordre

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F$$

où  $m$  est la masse de la balle,  $F = -mg$ , est la force ( $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$  est l'accélération de la Gravitation de la terre). Chaque fois que la balle touche le sol, la composante verticale à la surface, du vecteur de vitesse change de signe.

Nous considérons une boule de masse  $m$  soumise à l'action de la gravité. Nous la laissons tomber d'une altitude  $z_0 > 0$  avec une vitesse initiale nulle. L'altitude  $z(t)$  de la balle suit l'équation différentielle émis par la mécanique classique  $mz''(t) = -mg$ ; lorsque  $z(t) = 0$ , la balle touche le sol et rebondit en perdant une fraction de son énergie :

$$z''(t) = -cz(t), \quad \text{avec } c \leq 1$$

Regardons ce qui se passe dans le cas d'un réglage impulsif avec la même balle rebondissante. Au temps  $t_0$  nous laissons la balle tomber d'une altitude  $z_0 > 0$ . La variable du système est  $x = (x_1, x_2)$ , où  $x_1$  est l'altitude de la balle et  $x_2$  sa vitesse. L'état initial du système impulsif est  $(t_0, (z_0, 0))$ . Tant que l'altitude de la balle est positive, on a

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) & \text{et} & & x_2'(t) &= -g \implies \\ x_2(t) &= -g(t - t_0) & \text{et} & & x_1(t) &= \frac{-g}{2}(t - t_0)^2 + z_0 \end{aligned}$$

L'impact de la balle sur le sol ( et donc la transition du système impulsif) se produit à un temps  $t_1$  tel que  $x_1(t_1) = 0$  et donc

$$t_1 = t_0 + \sqrt{\frac{2z_0}{g}}, \quad x_2(t_1^-) = -\sqrt{2gz_0}$$

En ce moment, la balle rebondit :

$$x_2(t_1^+) = c_1 x_2(t_1^-) = c\sqrt{2gz_0}$$

Soit  $t_k$  le moment où se produit le  $k^{\text{th}}$  rebondir. Jusqu'à l'impact suivant de la balle sur le sol, on a

$$x_2(t) = -g(t - t_k) + x_2(t_k^+), \quad \text{et} \quad x_1(t) = \frac{-g}{2}(t - t_k)^2 + x_2(t_k^+)(t - t_k)$$

Au temps  $t_{k+1}$ , le ballon touche le sol

$$x_1(t_{k+1}) = 0 \implies t_{k+1} = t_k + \frac{2}{g}x_2(t_k^+)$$

et

$$x_2(t_{k+1}^+) = -cx_2(t_{k+1}^-) = cx_2(t_k^+) = \dots = c^k x_2(t_1^+) = c^{k+1} \sqrt{2gz_0}$$

Ainsi, le système impulsif admet une impulsion infinie et le temps nécessaire pour atteindre la position de repos est

$$T = \sum_{k=0}^{k=\infty} (t_{k+1} - t_k) = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{g} x_2(t_k^+) = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} + \sum_{k=1}^{k=\infty} c^k 2 \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$$

si  $c < 1$  alors

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (t_{k+1} - t_k) = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \left(1 + \frac{2c}{1-c}\right) = T < \infty$$

### 1.5.2 Exemples de la dynamique de population (biologie)

Les équations différentielles impulsives apparaissent naturellement dans la dynamique des populations comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1.5.4.** L'équation de Verhulst en dynamique de population est un modèle de croissance proposé par Pierre François Verhulst vers 1840. Le modèle de Verhulst considère que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente.

Le même modèle est utilisé pour des réactions autocatalytiques (réaction chimique dont le catalyseur figure parmi les produits de la réaction). Une observation immédiate montre que : la fonction constante  $N = K$  est solution de cette équation ; si  $N < K$  alors la population croît ; si  $N > K$  alors la population décroît. Le paramètre  $K$  est appelé la capacité d'accueil ou capacité de charge qui est définie en écologie comme étant la taille maximale de la population d'un organisme qu'un milieu donné peut supporter.

L'équation de Verhulst s'écrit :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mu N}{k}(k - N)$$

où  $N = N(t)$  désigne la biomasse d'une population donnée au moment  $t > 0$ ,  $k$  est appelée capacité de charge et  $\mu$  est la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité.

Le cas où les perturbations externes agissent sur la population est souvent rencontré. Nous allons considérer les cas où les perturbations externes ont lieu à des moments donnés du temps et sont exprimées en ajoutant ou en prélevant certaines quantités de biomasse. L'analogue impulsif de l'équation de Verhulst dans ce cas a la forme

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\mu N}{k}(K - N), & t \neq t_k, \\ \Delta N(t_k) = N(t_k^+) - N(t_k^-) = -I_k, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

où  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  sont les moments d'ect externe,  $I_k, k = 1, 2, \dots$  sont les quantités de biomasse ajoutées à ( $I_k < 0$ ) ou prélevées ( $I_k > 0$ ) aux moments  $t_1, t_2, t_3, \dots$

**Exemple 1.5.5.** : Prenons le modèle étudié par Panetta [45] décrivant la dynamique des cellules normales et cancéreuses, qui sont en interaction, sous l'effet impulsif de la chimiothérapie.

Le modèles décrivant la croissance des cellules normales et cancéreuses qui sont en interaction est donnée par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1x(1 - \frac{x}{K_1} - \lambda_1y) \\ \frac{dy}{dt} = r_2y(1 - (\frac{y}{K_2} - \lambda_2x)) \end{cases} \quad (1.6)$$

où

$x, y$  représentent les biomasses des cellules normales et cancéreuses, respectivement.  $r_1, r_2$  représentent les taux de croissance des cellules normales et cancéreuses, respectivement.

$K_1, K_2$  représentent les capacités des cellules normales et cancéreuses, respectivement.

$\lambda_1, \lambda_2$  représentent les paramètres d'interaction entre les cellules normales et les cellules cancéreuses.

$\lambda_i, i = 1, 2$  décrivent les différentes interactions entre les cellules normales et cancéreuses, par exemple  $\lambda_1 > 0$  décrit les effets négatifs de la tumeur sur les cellules normales,  $\lambda_2 > 0$  décrit les effets négatifs des cellules normales (système immunitaire) sur la tumeur, enfin dans le cas où  $\lambda_i = 0$ , on suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les deux types de cellules.

A chaque injection du médicament, la chimiothérapie agit sur les deux types de cellules, le système (1.6) est sujet d'une perturbation de la forme :

$$\begin{cases} x(t_n^+) = e^{\alpha_1 D} x(t_n^-) \\ y(t_n^+) = e^{-\alpha_2 D} y(t_n^-) \end{cases} \quad (1.7)$$

où

$\exp^{-\alpha_1 D}, \exp^{-\alpha_2 D}$  sont les fractions des cellules normales et cancéreuses survivantes, respectivement, après l'injection d'une dose  $D$  du médicament, où  $\alpha_i$  sont des constantes positives données.

$x(t_n^+), y(t_n^+)$  représentent les biomasses des cellules normales et cancéreuses juste avant l'injection du médicament.

L'analyse du système (1.6)-(1.7) a montré que si la période  $\tau$  ( $\tau = t_n + 1 - t_n$ ) entre chaque traitement (impulsion) dépasse un certain seuil, et si la dose  $D$  est inférieure au volume

$$\frac{\tau r_2(1 - \lambda_2 K_1)}{\alpha_2 - \frac{\alpha_1 \lambda_2 K_1 r_2}{r_1}}$$

alors les cellules cancéreuses peuvent être reconstituées. Dans le cas où la dose  $D$  dépasse la quantité

$$\frac{-1}{\alpha_1} \ln(\alpha + e^{-r_1 \tau}(1 - \alpha))$$

le traitement pourra détruire les cellules normales et tuer le malade par la suite.

## 1.6 Les spécificités liées à l'étude des Equations Differentielles impulsives et difficultés découlant de leur étude :

- \* **Discontinuité de la solution** : il existe des points de discontinuité de premier type, c'est-à-dire que le saut est limité. Habituellement, on suppose que la solution est continue à gauche aux points d'effet impulsif.
- \* **Existence de l'effet de « battement »** : Dans ce cas, la courbe intégrale ou trajectoire de l'équation se rencontre à plusieurs reprises (éventuellement une infinité de fois) ensemble impulsif. Ensuite, il est possible d'obtenir une situation spécifique, dans laquelle les moments impulsifs ont un point de compression et, par conséquent, la solution n'est pas continue vers la droite à partir de ce point. Cela implique la « mort » de la solution. Il est donc impossible d'étudier les différents aspects de la théorie qualitative de ces équations tels que : dépendance continue, périodicité, stabilité, etc. dans la situation, décrite ci-dessus.
- \* **Perte de la propriété autonome** : Notez que, même dans les cas où les membres droits des équations avec les impulsions ne dépendent pas du temps, les moments impulsifs sont obtenus comme des solutions d'équations, impliquant une solution, qui (bien sûr) est fonction du temps. Par conséquent, ces moments dépendent du temps, y compris l'instant initial. Ainsi, la conclusion est qu'elle n'est pas autonome.
- \* **Changement des moments impulsifs après changement de la condition initiale** : Différentes solutions d'une même équation impulsive (avec des conditions initiales qui ne coïncident pas) ont des moments impulsifs différents, y compris la possibilité qu'une de ces solutions soit sans impulsions. Il est possible d'obtenir des différences dans les tailles et les directions des problèmes de base et perturbés après les perturbations dans l'état initial.
- \* **Changement des moments impulsifs lors des interférences du système impulsif** : changement du côté droit, changement des paramètres de système impulsif, changement des fonctions impulsives, etc. Les solutions du problème de base et correspondant perturbé (avec même condition initiale) ont des moments impulsifs différents avec des effets impulsifs de taille et de direction différentes dans le cas général.
- \* **Accumulation des erreurs** : les perturbations peuvent avoir un caractère insurmontable et conduire à la formation de solutions, qui diffèrent sans limite de la solution "non perturbée" étudiée.

## 1.7 Problèmes étudiés

D'après l'avis de K. Dishlieva dans [25], les études sur la théorie qualitative des équations différentielles avec impulsions peuvent être divisées en plusieurs groupes :

1. Transfert des résultats classiques de la théorie des équations sans effets impulsifs sur les équations avec des impulsions. Ça devrait être noté que la plupart de ces résultats sont obtenus. Nous soulignons explicitement, que la reformulation et la preuve de ce type d'énoncés ne sont pas toujours triviales. Ceci est particulièrement vrai pour les équations soumises à des impulsions non instantanées.

2. *Étudier les différents phénomènes et propriétés spécifiques des équations impulsives. Notamment, nous pointerons les problèmes, liés à :*
  - *L'existence et unicité des solutions et leur régularité.*
  - *Stabilité des solutions après les perturbations sur les instants des impulsions, fonctions impulsionnelles*
  - *Périodicité et propriétés d'oscillation des solutions, qui sont causées par les effets impulsifs.*
  - *Stabiliser et limiter les solutions par les effets impulsifs.*
3. *Modélisation et étude des propriétés des processus dynamiques qui modifient brusquement (par intermittence) leur état.*
4. *Résoudre des problèmes d'optimisation à l'aide de ces équations. Par exemple, les problèmes liés à l'obtention d'un rendement maximal de populations dans un environnement limité, réalisation de réactions chimiques avec un apport impulsif minimal d'un catalyseur, maintenance de concentrations thérapeutiques de médicaments par des changements impulsifs de concentrations, etc...*

# Préliminaires

*Dans ce chapitre on introduit des notations, des définitions, des résultats qui seront nécessaires dans la suite de ce mémoire .*

## 2.1 Notions et propriétés élémentaires sur les opérateurs compacts

*Dans cette section, nous regroupons toutes les définitions de base et les théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans le chapitre suivant. Soit  $T$  un opérateur linéaire d'un espace de Banach  $X$  dans un autre espace de Banach  $Y$  .*

**Définition 2.1.1.**  *$M$  une partie de  $X$  , est dite relativement compacte si et seulement si elle est contenue dans une partie compacte de  $X$ .*

**Propriété 2.1.1.** *Une partie d'un espace topologique séparé est relativement compacte si et seulement si son adhérence est compacte.*

**Définition 2.1.2.** *(Opérateur compact)*

*L'opérateur  $T$  qui transforme tout sous-ensemble borné de  $D(T)$  en un sous-ensemble relativement compact de  $Y$  est un opérateur compact.*

### 2.1.1 Equicontinuité

**Définition 2.1.3.** *Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques .Une famille  $\mathcal{A}$  de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$  est dite équicontinue en  $x \in X$  si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad , \exists \delta > 0 / \forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall x' \in X, \quad d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x) - f(x')) < \epsilon$$

### 2.1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli

**Théorème 2.1.** *Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace Banach, un sous-ensemble  $M \subset C([0, T], X)$  est relativement compact si et seulement si*

1.  *$M$  est équicontinu*
2. *pour chaque  $t \in [0, T], M(t) = \{x(t) : x(\cdot) \in M\}$  est relativement compact dans  $X$ .*

**Corollaire 2.1.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et soit  $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$  . Alors on a :*

- (i)  $\mathcal{F}$  est relativement compact si et seulement s'il est bornée et équicontinu.  
(ii)  $\mathcal{F}$  est compact si et seulement s'il est fermé, borné, et équicontinu.

## 2.2 Quelques notions de la théorie des semi-groupes

On va rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie de semi-groupe, nécessaires pour le développement de notre thème. Pour plus de détails, nous référons aux monographies de Henry [35], Pazy [46], Banasiak et Arlotti [11], Vrabie [52] et le document de Li [41].

Soit  $X$  un espace de Banach muni d'une norme noté  $\|\cdot\|$ .  
 $\mathcal{L}(X)$  est l'espace des opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans lui même dont la norme est

$$\|U\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$$

pour tout  $U \in \mathcal{L}(X)$ .

$\mathcal{L}(X)$  est un espace de Banach.

### 2.2.1 Semi groupe fortement continu

**Définition 2.2.1 (Semi-groupe).** Une famille d'opérateurs  $T(t)_{t \geq 0}$  linéaires bornés définis de  $X$  dans  $X$  est dite semi-groupe sur  $X$  si :

- (i)  $T(0) = I$  ( $I$  est l'opérateur d'identité dans  $\mathcal{L}(X)$ ).  
(ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$  pour tout  $s, t \geq 0$ . (propriété algébrique)

**Définition 2.2.2 ( $C_0$ semi - groupe).** Un semi-groupe  $T(t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires bornés est un semi-groupe fortement continu si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0 \quad \text{pour tout } x \in X \quad (*)$$

Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un  $C_0$ semi - groupe.

**Remarque 2.2.1.** si on remplace (\*) par :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0, \quad t \geq 0$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

**Théorème 2.2.** Pour  $T(t)_{t \geq 0}$  un  $C_0$ semi-groupe sur  $X$ , alors on a les propriétés suivantes :

- (i)  $t \rightarrow \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  est bornée sur tout intervalle compact  $[0, t_1]$  ;  
(ii) Pour tout  $x$  dans  $X$ , la fonction  $t \rightarrow T(t)x$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  ;  
(ii) Il existe des constantes  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $M \geq 1$  telles que :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \in \mathbb{R}^+$$

**Remarque 2.2.2.** Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe sur  $X$

- i- Si  $M = 1$  et  $\omega = 0$  , alors  $(T(t))_{t \geq 0}$  est appelé  $C_0$ -semi-groupe de contraction ( $\|T(t)\| \leq 1$ ).  
ii- Si  $M \geq 1$  et  $\omega = 0$  , alors  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un  $C_0$ -semi-groupe uniformément borné sur  $X$ .

### 2.2.2 Générateur infinitésimal

**Définition 2.2.3.** L'opérateur  $A$  défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} T(t)x|_{t=0}, \quad \text{pour } x \in D(A)$$

est dit *générateur infinitésimal* du semi-groupe  $T(t)$ ,  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .

L'ensemble  $D(A)$  est muni de la norme du graphe  $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$ ,  $x \in D(A)$ .

**Remarque 2.2.3.**  $D(A)$  est non vide ( $0 \in D(A)$ ) et est un sous espace vectoriel de  $X$ .  $A$  est linéaire de  $D(A)$  dans  $X$ .

**Lemme 2.2.1.** Le générateur infinitésimal  $A$  du semi-groupe  $T(t)$  d'opérateurs linéaires bornés est unique.

**Définition 2.2.4.** soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ semi - groupe  $T(t)_{t \geq 0}$  alors pour  $x \in X$ ,  $t \mapsto T(t)x$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^+$  vers  $X$ .

**Preuve :** Soient  $t_0, h \in [0, \infty)$  et  $x \in X$

- si  $t_0 < h$  nous avons :

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \|T(h)x - x\| \leq e^{\omega t_0} \|T(h)x - x\|$$

- si  $t_0 > h$  nous avons :

$$\|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0 - h)\| \|T(h)x - x\| \leq e^{\omega(t_0 - h)} \|T(h)x - x\|$$

La continuité forte en  $t_0$  de l'application considérée dans l'énoncé est évidente.

**Définition 2.2.5.** Un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)_{(t \geq 0)}$  sur  $X$  est dit *compact*, si  $T(t)$  est un opérateur compact sur  $X$  pour chaque  $t > 0$ .

**Définition 2.2.6.** Soient  $E$  un espace de Hilbert, et  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  un opérateur linéaire non-borné. On dit que  $A$  est *accrétif* si

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A),$$

$A$  est *maximal accrétif* si de plus  $R(I + A) = E$  c'est-à-dire

$$\forall f \in E, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

**Théorème 2.3.** Sur un espace de Hilbert, les générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions sont les opérateurs maximaux accrétifs.

### 2.2.3 Semi-groupes analytiques

Dans cette partie, pour  $\phi \in ]0, \pi]$ , on considère le secteur ouvert

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |\arg(z)| < \phi\}$$

**Définition 2.2.7.** Soit  $\phi \in ]0, \pi]$ ,  $(T(z))_{z \in \bar{S}_\phi}$  est un semi-groupe sur  $X$ , analytique dans  $S_\phi$  si et seulement si :

1.  $\forall z \in \bar{S}_\phi, T(z) \in \mathcal{L}(X)$ .
2.  $T(0) = I$ .
3.  $\forall z_1, z_2 \in \bar{S}_\phi, T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ .
4.  $\forall x \in E, \lim_{z \rightarrow 0, z \in \bar{S}_\phi} \|T(z)x - x\|_X = 0$ .
5.  $z \mapsto T(z)$  est analytique dans  $S_\phi$ .

#### Remarques 2.2.1.

- Si de plus  $\sup_{z \in \bar{S}_\phi} \|T(z)\| < +\infty$ , on dit que  $(T(z))_{z \in \bar{S}_\phi}$  est uniformément borné dans  $\bar{S}_\phi$ .
- Un semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$ , est appelé semi-groupe analytique s'il existe  $\phi \in ]0, \pi]$  tel que  $(T(t))_{t \geq 0}$  se prolonge en  $(T(z))_{z \in \bar{S}_\phi}$  semi-groupe sur  $E$ , analytique dans  $S_\phi$ .

Notons que si  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un semi-groupe analytique sur  $X$ , alors, de par la définition, c'est un  $C_0$  semi-groupe, de plus, pour tout  $x$  de  $X$ , la fonction  $t \mapsto T(t)x$  est analytique de  $]0, +\infty[$  dans  $X$  et donc  $(T(t))_{t \geq 0}$  est, a fortiori, un  $C_0$  semi-groupe différentiable.

Il est alors naturel de se demander à quelles conditions un  $C_0$  semi-groupe sur  $X$ , est un semi-groupe analytique. M. G. Crandall, A. Pazy, L. Tartar ont proposé dans [18], la caractérisation suivante :

**Théorème 2.4.** Un  $C_0$  semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $X$  est un semi-groupe analytique si et seulement si son générateur infinitésimal  $A$  vérifie :

$$\exists C, k \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in ]nk, +\infty[, \quad \|A(A - \lambda I)^{-(n+1)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{n\lambda^n}$$

Il est important d'avoir aussi une caractérisation du générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné. Les deux théorèmes suivants répondent à ce problème :

**Théorème 2.5.** Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  uniformément borné sur  $X$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe  $\delta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $C \geq 0$  tels que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\frac{\pi}{2} + \delta}, \\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2} + \delta}, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \end{cases}$$

2.  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un  $C_0$  semi-groupe différentiable et il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $t > 0$ ,

$$T(t) \in \mathcal{L}(X, D(A)) \quad \text{et} \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t}$$

3. Il existe  $\phi \in ]0, \pi]$  tel que  $(T(t))_{t \geq 0}$  soit prolongeable en  $(T(z))_{z \in \bar{S}_\phi}$  semi-groupe sur  $E$ , analytique dans  $S_\phi$ , uniformément borné dans  $\bar{S}_\phi$ .

**Théorème 2.6.** Soit  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est fermé,  $D(A)$  est dense dans  $X$  et il existe  $C \geq 0$  tel que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\} & \text{et} \\ \forall \lambda \in \Pi, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \end{cases}$$

2.  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné  $(T(t))_{t \geq 0}$  qui de plus se prolonge en  $(T(z))_{z \in \bar{S}_\phi}$ , semi-groupe sur  $X$ , analytique dans  $S_\phi$ , uniformément borné dans  $S_\phi$  (avec  $\phi \in ]0, \pi]$ ).

**Théorème 2.7.** ([46])

Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $X$ .

Si  $0 \in \rho(A)$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $A + \delta I$  soit encore générateur d'un semi-groupe analytique borné et de plus pour tout  $t > 0$  et  $\alpha \geq 0$  on a :

1.  $T(t) : X \rightarrow D(A^\alpha)$

2. Pour tout  $y \in D(A^\alpha)$ , on a  $T(t)A^\alpha y = A^\alpha T(t)y$ .

3. Pour tout  $t > 0$  l'opérateur  $A^\alpha T(t)$  est borné et il existe  $M_\alpha > 0$ , tel que

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$$

4. Si de plus  $0 < \alpha \leq 1$  et alors, il existe  $C_\alpha > 0$  tel que pour tout  $y \in D(A^\alpha)$

$$\|T(t)y - y\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha y\|$$

## 2.3 Solutions classiques et intégrales

Supposons maintenant que  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach,  $(A, D(A))$  est un opérateur linéaire de domaine dense dans  $X$  et  $x_0 \in X$  est fixé.

On considère l'équation différentielle abstraite suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

avec  $f : X \rightarrow X$  une fonction localement continue sur  $X$ . Supposons dans la suite que  $(A, D(A))$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu  $(T(t))_{t \geq 0}$ . Notre objectif est d'exprimer les solutions de problème (P) à l'aide du semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ . Pour se faire, on doit d'abord définir ce qu'on veut dire par une solution de (P). On commence par la notion des solutions classiques.

**Définition 2.3.1.** Une fonction  $x : [0, T] \rightarrow X$  est une solution classique de (P) définie sur  $[0, T]$  avec  $0 < T < \infty$  si  $x$  est continue sur  $[0, T]$ ;  $x(t) \in D(A)$  pour tout  $t \in [0, T]$ ; continument différentiable sur  $[0, T]$  et satisfait (P).

$x(t)$  est une solution classique sur  $[0, +\infty[$ , si elle est classique sur  $[0, T]$  pour tout  $T \geq 0$ .

**Lemme 2.3.1.** Supposons que  $f \in C([0, T], X)$  et que  $x(\cdot)$  est une solution classique de (P) définie sur  $[0, T]$ . Alors  $Ax(\cdot)$  est un élément de  $C([0, T], X)$  et la solution classique  $x(\cdot)$  vérifie l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

Il est naturel de penser qu'une fonction qui vérifie (2.1) est toujours une solution classique. Cependant, ceci n'est pas toujours vrai.

**Théorème 2.8.** ([30])

Supposons que  $f \in C^1([0, T]; X)$  et que  $x_0 \in D(A)$ , alors une fonction  $x(\cdot)$  qui vérifie (2.1) est continument différentiable sur  $[0, T]$  et elle est la solution classique unique de (P).

Les conditions du Théorème 2.8 sont très fortes en applications. En général, on ne peut pas toujours supposer que  $f \in C^1([0, T]; X)$  ou que  $x_0 \in D(A)$ . C'est pour ça, on introduit une autre notion de solutions qui est moins forte que la notion des solutions classiques. On parle des solutions intégrales.

**Définition 2.3.2.** Supposons que  $f \in L^p([0, T]; X)$ ,  $p \geq 1$ , et que  $x_0 \in X$ , alors une fonction  $x(\cdot)$  qui vérifie (2.1) est dite une solution intégrale de l'équation (P).

Notons qu'une fonction qui vérifie (2.1) n'est pas nécessairement de classe  $C^1$ . Elle est cependant continue.

**Lemme 2.3.2.** Supposons que  $f \in L^p([0, T]; X)$ ,  $p \geq 1$ , et que  $x_0 \in X$ , alors la solution intégrale  $x(\cdot)$  définie par (2.1) est continue sur  $[0, T]$ .

**Théorème 2.9.** soit  $0 < \alpha < 1$ ,  $f \in C^\alpha([0, T], X)$ ,  $x_0 \in X$  et soit  $x$  une solution intégrale de (P). Alors,  $x$  appartient à  $C^\alpha([\epsilon, T]; D(A)) \cap C^{1+\alpha}([\epsilon, T]; X)$  pour chaque  $\epsilon \in ]0, T[$ , et si  $x_0 \in D(A)$ , alors  $x$  est une solution classique de (P).

## 2.4 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles un opérateur construit à partir du problème différentiel considéré admet un point fixe, de telle sorte que ce point fixe constitue une solution du problème différentiel de départ.

**Définition 2.4.1.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une application  $f : E \rightarrow E$  est dite Lipschitzienne de constante  $L > 0$ ,  $0$  si elle vérifie

$$\forall u, v \in E, \quad d(f(u), f(v)) \leq Ld(u, v)$$

**Définition 2.4.2.** L'application Lipschitzienne  $f$  est dite une contraction si  $L \leq 1$ , Dans le cas où  $L \in (0, 1)$ ,  $f$  est dite une contraction stricte.

**Définition 2.4.3 (Point fixe).** soit  $f$  une application d'un ensemble  $X$  dans lui même. On appelle point fixe de  $f$  tout point  $x \in X$  tel que

$$f(x) = x$$

### 2.4.1 Principe de contraction de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en

1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. A noter que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville (en 1837) et développée par la suite par Picard (en 1890). Ce principe est le plus simple des théorèmes de point fixe et certainement le plus utilisé dans la théorie des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces. Pour plus de détails voir [1].

**Théorème 2.10.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $f : X \rightarrow X$  une contraction. Alors  $f$  admet un unique point fixe.

### 2.4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder, établi en 1930, est plus topologique et admet que qu'une application continue sur un convexe, compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir que la fonction est lipschitzienne, mais simplement continue. Ceci qui donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach. Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent, à savoir l'unicité et l'approximation du point fixe.

**Théorème 2.11.** Soit  $C$  un sous ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach  $X$  et  $f : C \rightarrow C$  une application continue telle que  $f(C)$  est relativement compact. Alors  $f$  possède un point fixe.

Plus généralement, si  $C$  est un compact convexe alors toute fonction continue de  $C$  sur  $C$  possède un point fixe.

## 2.5 Mesures de non compacité et opérateurs condensants

En 1955, Darbo [22] prouva un théorème de point fixe qui combine le théorème de point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach en considérant le concept de mesure de non compacité, introduit par Kuratowski [38]. Plus tard, Sadovskii [50] prouva un théorème plus général de point fixe en considérant le concept d'application condensante.

### 2.5.1 Mesure de non-compacité

Rappelons qu'un sous-ensemble d'un espace de Banach  $X$  est relativement compact, si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre fini de boules de rayon  $\epsilon$  tels que leurs union recouvre  $\Omega$ . Si  $\Omega$  est seulement borné, il y a une limite inférieure positive de tel réel  $\epsilon$ .

**Définition 2.5.1.** Soit  $X$  un espace de Banach et  $\mathcal{A}$  la famille de tous les sous-ensembles bornés de  $X$ . Une fonction  $\phi$  définie de  $\mathcal{A}$  dans  $[0, +\infty[$  est appelée **mesure de non-compacité** (M.N.C) sur  $X$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\phi(A) = 0 \iff A$  est relativement compacte
- $\phi(A) = \phi(\bar{A})$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ .
- $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$ ,  $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ .

**Exemple :**

1. La fonction  $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$  définie par :

$$\gamma(A) = \inf\{\epsilon > 0 : A \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \epsilon\}$$

est appelée *M.N.C de Hausdorff*.

2. La fonction  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$  telle que :

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ est relativement compact} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure de non-compactité. En effet,

- $\phi(A) = 0 \iff A$  est relativement compacte (évidente)
  - $\phi(A) = \phi(\bar{A})$ , car  $A$  est relativement compact  $\iff \bar{A}$  est compact.
  - $(A_1 \cup A_2)$  relativement compact  $\iff \begin{cases} A_1 \text{ est relativement compact} \\ \text{et} \\ A_2 \text{ est relativement compact} \end{cases}$
- Alors, dans tous les cas on trouve  $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$

### 2.5.1.1 Mesure de non-compactité de Kuratowski

**Définition 2.5.2 (la mesure de non-compactité de Kuratowski).** Soient  $X$  un espace de Banach,  $\mathcal{A}$  la famille de tous les sous-ensembles bornés de  $X$ . **La mesure de non-compactité au sens de Kuratowski** est l'application  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \begin{array}{l} d > 0 \text{ tel que } \mathcal{A} \text{ admet un recouvrement fini d'ensembles} \\ \text{de diamètre inférieure ou égale à } d \end{array} \right\}$$

c'est à dire

$$\alpha(A) = \inf \left\{ d > 0 \text{ tel que } \exists A_1, A_2, \dots, A_n \subset X; A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i, \text{diam}(A_i) \leq d; \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

où  $\text{diam}(A_i) = \sup\{\|x - y\|, \forall x, y \in A_i\}$  et  $\text{diam}(\emptyset) = 0$ .

**Remarques 2.5.1.** 1. La définition de la mesure de non-compactité de Kuratowski est significative non seulement pour les espaces de Banach mais également pour les espaces métriques arbitraires.

2.  $0 \leq \alpha(A) \leq \text{diam}(A) < \infty, \forall A \in \mathcal{A}$ .

3.  $A$  est fini  $\implies \alpha(A) = 0$ .

Voici quelques propriétés élémentaires de la mesure de non-compactité de Kuratowski

**Proposition 2.5.1.** Soient  $X$  un espace de Banach et  $\mathbf{A}$  la famille des ensembles bornés de  $X$ . Alors, la mesure de non-compactité de Kuratowski  $\alpha$  a les propriétés suivantes :

1. **Régularité** :  $\alpha(A) = 0 \iff \bar{A}$  est compact.

2. **Monotonie** :  $A \subset B \implies \alpha(A) < \alpha(B)$  i.e  $\alpha$  est croissante.

3. *Invariance par passage à la fermeture* :  $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$ .
4. *Semi-additivité* :  $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}$ .
5.  $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}$ .
6. *Semi-homogénéité* :  $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\alpha(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{A}$ .
7. *Semi-additivité algébrique* :  $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B), \forall A, B \in \mathcal{A}$ .
8. *Invariance par translation* :  $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in X$ .
9. *Invariance par passage à l'enveloppe convexe* :  $\alpha(\text{conv} A) = \alpha(A), \forall A \in \mathcal{A}$ .
10.  $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq \alpha(B(0, 1))H_d(A, B)$

où

$$H_d(A, B) = \max(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A))$$

est la distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$ .

**Remarque 2.5.1.** *a-* Les propriétés de semi-homogénéité et semi-additivité algébrique nous donnent que la MNC de Kuratowski est une semi-norme sur  $X$ .

*b-* Ce n'est pas facile de déterminer la valeur explicite de  $\alpha(A)$  pour un ensemble borné  $A$  d'un espace de Banach.

## 2.5.2 Contractions strictes d'ensembles et applications condensantes

**Définition 2.5.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue et bornée (c'est-à-dire  $f$  transforme les bornés de  $X$  en des bornés de  $Y$ ).

*a.* On dit que  $f$  est une  $k$ -contraction d'ensembles s'il existe  $k \geq 0$ , tel que

$$\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A), \forall A \text{ borné de } X.$$

*b.* L'application  $f$  est appelée  $k$ -contraction stricte d'ensembles (ou contraction stricte d'ensembles) si  $0 \leq k < 1$ .

*c.* L'application  $f$  est dite condensante si

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A), A \text{ borné non relativement compact } (\alpha(A) > 0).$$

**Remarques 2.5.2.** Il est évident que toute application  $f$  complètement continue, est une  $k$ -contraction stricte d'ensembles et toute  $k$ -contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus on a :

1.  $f$  est  $k$ -lipshitzienne  $\implies f$  est une  $k$ -contraction d'ensembles.

2.  $f$  est condensante  $\implies f$  est une 1-contraction d'ensembles.
3.  $f$  est complètement continue  $\iff f$  est une 0-contraction d'ensembles.
4.  $f$  est  $k$ -contraction et  $g$  est compacte  $\implies (f+g)$  est une  $k$ -contraction d'ensembles.

**Preuve**

a.  $f$  est  $k$ -lipshitzienne  $\implies f$  est une  $k$ -contraction d'ensembles

Soit  $\alpha_0 = \alpha(A)$  (M.N.C de Kuratowski de  $A$ ). Par définition de  $\alpha_0$ , on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists d_0 > 0, \exists \{A_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset A : A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{et} \quad \text{diam}(A_i) \leq d_0 < \alpha_0 + \epsilon$$

Donc  $\forall i \in [1, n], \text{diam}(A_i) \leq \alpha_0 + \epsilon$  et  $f(A) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i)$ . Comme  $f$  est  $k$ -lipshitzienne, on a :

$$\forall i \in [0, n], \text{diam}(f(A_i)) \leq k \text{diam}(A_i). \quad (2.2)$$

En effet ,

$$\forall x_1, x_2 \in A_i, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \leq k \text{diam}(A_i)$$

d'où l'inégalité (2.2) par passage au sup.

On en déduit que

$$\forall i \in [0, n], \text{diam}(f(A_i)) \leq k(\alpha_0 + \epsilon) \quad \text{avec} \quad \{f(A_i)\}_{1 \leq i \leq n} \text{ recouvrement de } f(A)$$

D'après la définition de  $\alpha(f(A))$  , on en déduit que

$$\alpha(f(A)) \leq k(\alpha_0 + \epsilon), \forall \epsilon > 0$$

et donc

$$(\alpha(f(A)) \leq k(\alpha_0) = k\alpha(A).$$

**Lemme 2.5.1.** Soient  $X$  un espace de Banach, et  $D \subset X$  borné , alors il existe un ensemble dénombrable  $D_0 \subset D$ , tel que

$$\alpha(D) \leq 2\alpha(D_0).$$

**Preuve :**

On suppose que  $\alpha(D) > 0$  , soit  $r_n = (1 - \frac{1}{2^n} \alpha(D))$  ainsi  $0 < r_n < \alpha(D)$ .

On choisit  $x_1^{(n)} \in D$ , alors  $D \setminus B(x_1^{(n)}, \frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$ , par ailleurs, si  $D \subset B(x_1^{(n)}, \frac{1}{2^n})$ , par la définition de la mesure de non-compacité on trouve que  $\alpha(D) \leq r_n$  et ceci est une contradiction , c'est à dire  $D \setminus B(x_1^{(n)}, \frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$ .

ensuite , on choisit  $x_2^{(n)} \in D \setminus B(x_1^{(n)}, \frac{r_n}{2})$  , de même on trouve  $D \setminus B(x_1^{(n)}, \frac{r_n}{2}) \cup B(x_2^{(n)}, \frac{r_n}{2}) \neq \emptyset$ .

On peut facilement continuer cette procédure jusqu'à on obtient une suite  $\{x_k^{(n)} | k = 1, 2, \dots\}$  tel que  $x_{k+1}^{(n)} \in D \setminus \bigcup_{i=1}^k B(x_i^{(n)}, \frac{r_n}{2}), k = 1, 2, \dots$

Ainsi, on pose

$$D_n = \{x_k^{(n)} | k = 1, 2, \dots\}$$

en combinant cela avec la définition de la mesure de non-compacité, on sait que  $\alpha(D_n) \geq \frac{r^n}{2}$ . soit  $D_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ , alors  $D_0$  est ensemble dénombrable, puisque  $\alpha(D_0) \geq \alpha(D_n) \geq \frac{r^n}{2} \rightarrow \frac{\alpha(D)}{2} (n \rightarrow \infty)$ , par conséquent,  $\alpha(D) \leq 2\alpha(D_0)$ .

**Lemme 2.5.2.** Soit  $X$  un espace de Banach, et soit  $D = \{u_n\} \subset \mathcal{PC}([b_1, b_2], X)$  un ensemble borné et dénombrable alors

$$\alpha(\{\int_{b_1}^{b_2} u_n(t)dt : n \in \mathbb{N}\}) \leq 2 \int_{b_1}^{b_2} \alpha(D(t))dt.$$

**Lemme 2.5.3.** Soit  $X$  un espace de Banach, et soit  $D \subset C([b_1, b_2], X)$  borné et équicontinue, alors  $\alpha(D(t))$  est continue sur  $[b_1, b_2]$ , et

$$\alpha_C(D) = \max_{t \in [b_1, b_2]} \alpha(D(t)).$$

### 2.5.3 Quelques propriétés des opérateurs condensants

Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux opérateurs définies sur un espace métrique  $X$  dans lui même, alors

1. Si  $F_1$  et  $F_2$  deux opérateurs condensantes alors  $F_2 \circ F_1$  est un application condensante.
2. Si  $F_1$  un opérateur condensant et  $F_2$  un opérateur compact alors  $F_1 + F_2$  est condensant.

En effet, si  $A$  un ensemble non vide borné de  $X$  tel que  $\alpha(A) > 0$  :

$$\begin{aligned} \alpha(F_1 + F_2)(A) &\leq \alpha[F_1(A)] + \alpha[F_2(A)] \\ &\leq \alpha(A) \end{aligned}$$

3. L'ensemble de tous les opérateurs condensants est un ensemble convexe. En effet, Soit  $A$  un ensemble non vide de  $X$  tel que  $\alpha(A) > 0$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , considérons l'opérateur  $F_\lambda = \lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2$  et supposons que

$$\alpha(F_\lambda(A)) \geq \alpha(A) \tag{2.3}$$

On a  $F_\lambda(A) \subset \text{conv}(F_1(A) \cup F_2(A))$ . Et par les propriétés de  $\alpha$ ,

$$\alpha(F_\lambda(A)) \leq \max\{\alpha(F_1(A), \alpha(F_2(A)))\}$$

Ce qui entraîne en utilisant (2.3) que pour  $k = 1$

$$\alpha(F_k(A)) \geq \alpha(A)$$

ce qui contredit  $F_k$  condensant.

Conclusion :

$$\alpha(F_\lambda(A)) \geq \alpha(A).$$

#### **Théorème 2.12 (Sadovskii).** ([4])

Soit  $C$  un sous ensemble fermé convexe borné d'un espace de Banach  $X$  et  $F : C \rightarrow C$  est une application condensante. Alors  $F$  admet un point fixe.

**Preuve :** Etant donné un  $x_0 \in C$  on définit l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{D \subseteq C, D \text{ est convexe fermé}, x_0 \in D \text{ et } F : D \rightarrow D\}$$

On pose  $A := \bigcap_{D \in \mathcal{M}} D$  et  $K := \overline{\text{conv}(F(A) \cup \{x_0\})}$ . Comme  $x_0 \in A$ ,  $F : A \rightarrow A$ , il s'en suit que  $K \subseteq A$ , ce qui implique que

$$F(K) \subseteq A \subseteq K$$

En outre, comme  $x_0 \in K$  ce qui entraîne que  $K \in \mathcal{M}$ . Par conséquent  $K = A$ , et par les propriétés de la mesure de non compacité  $\alpha$ , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(K) &= \alpha(\overline{\text{conv}(F(A) \cup \{x_0\})}) \\ &= \alpha(F(A)) = \alpha(F(K)) < \alpha(K) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que  $\alpha(K) = 0$ .

Donc  $K$  est relativement compact, puisque  $F : A \rightarrow A$  est continue et  $A$  est compact, alors le théorème de schauder s'applique et permet d'assurer l'existence d'un point fixe pour  $F$ .

## 2.6 Equation de chaleur

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique, introduite originellement en 1811 par Fourier. Elle est également connue sous le nom d'équation de diffusion, décrit dans des applications typiques l'évolution dans le temps de la densité  $u$  d'une quantité par exemple la chaleur, la concentration chimique, etc

**Définition 2.6.1.** Considérons le problème suivant :  
trouver une fonction  $u(x, t) : \Omega \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times ]0, \infty[ \quad (2.4)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, \infty[ \quad (2.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (2.6)$$

où  $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace,  $t$  est la variable de temps et  $u_0(x)$  est une fonction donnée.

L'équation (2.4) est appelée équation de la chaleur car elle modélise la distribution de la température  $u$  dans le domaine  $\Omega$  à l'instant  $t$ .

L'équation (2.5) est la condition aux limites de Dirichlet, elle peut être remplacée par la condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, \infty[.$$

L'équation (2.6) est la condition initiale ou donnée de Cauchy.

**Définition 2.6.2.** *La fonction*

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

*est appelé la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.*

**Lemme 2.6.1.** *pour chaque  $t > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$$

**Remarque 2.6.1.** *On note que  $\Phi$  est singulier au point  $(0, 0)$ . Nous écrirons parfois  $\Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)$  pour souligner que la solution fondamentale est radiale en la variable  $x$ .*

**Théorème 2.13.** *Pour toute  $f \in H^{-1}(\Omega)$  (dual de  $H_0^1(\Omega)$ ), pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que*

$$-\Delta u + \lambda u = f \quad \text{dans } D'(\Omega) \text{ (L'ensemble des distributions)}.$$

*De plus, si  $\Omega$  est borné, ce resultat est encore vrai pour  $\lambda = 0$ .*

### 2.6.1 Le semi-groupe de la chaleur

*Dans cette section, on montre que l'équation de la chaleur (2.4) sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet sur le bord de  $\Omega$ , définit un semi-groupe de contractions sur  $L^2(\Omega)$*

**Théorème 2.14.** *Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^d$ , l'opérateur  $A = -\Delta$ , défini par*

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

*avec*

$$Au = -\Delta u, \quad \text{pour tout } u \in D(A)$$

*est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $T(t)_{t \geq 0}$  de contraction sur  $L^2(\Omega)$ .*

**Preuve :** *D'après le théorème 2.3 il s'agit de montrer que l'opérateur  $A$  est maximal accréatif sur  $L^2(\Omega)$ . Tout d'abord, pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$(Au|u) = \int_{\Omega} -\Delta u \bar{u} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0$$

*L'opérateur  $A$  est donc accréatif. La maximalité de  $A$  provient alors du théorème 2.13, dans le cas particulier  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\lambda > 0$ .*

*Interprétons maintenant l'évolution ainsi définie sur  $L^2(\Omega)$  et  $T_D(t)u_0 = u(t)$ , alors*

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad u_\phi := \int_0^\infty \phi(t)u(t)dt \in H_0^1(\Omega) \quad (2.7)$$

*et*

$$-\Delta u_\phi = u'_\phi.$$

En testant contre  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  cette dernière identité, on obtient l'identité équivalente

$$\langle -\Delta u, \phi(t)\psi(x) \rangle = \langle -\frac{\partial u}{\partial t}, \phi(t)\psi(x) \rangle.$$

Les sommes finies de fonctions du type  $f(t)\psi(x)$  étant denses dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \Omega)$ , on en déduit que  $u$  est caractérisée par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

dans  $D'(\mathbb{R}_+^* \times \Omega)$ , la condition initiale  $u(0) = u_0$ , et la condition (2.7), qui assure, en un sens faible, la condition de Dirichlet.

Les exemples d'application considérées dans ce mémoire utilise souvent l'équation de la chaleur qui entre dans la modélisation de plusieurs processus biologiques.

Dans ce qui suit, nous exposons un modèle mathématique de processus biologique faisant intervenir l'équation de la chaleur.

## 2.6.2 Modèle mathématique de la bio-chaleur Équation de Pennes ID

Le contrôle précis de la température est nécessaire pendant les interventions médicales ainsi que durant l'hyperthermie lors du traitement de cancer, la chirurgie au laser, cryochirurgie, confort thermique, cryoconservation et plusieurs autres applications de thermorégulation sur les tissus biologiques vivants. En fait, le processus de transfert de la chaleur dans les tissus biologiques vivants dépend du transfert thermique de la chaleur, la convection, perfusion de sang, production de chaleur métabolique.

Le modèle mathématique de la bio-chaleur de Pennes publié en (1948) est le plus utilisé. Il modélise la diffusion dans les tissus biologiques par l'équation suivante :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T - c_b \omega [T - T_b] \quad (2.8)$$

Où  $T$  est la température des tissus,  $T_b$  est la température du sang,  $\rho$  est la densité du tissu,  $c$  et  $c_b$  sont les chaleurs spécifiques des tissus et du sang,  $K$  est la conductivité thermique de tissu,  $\omega$  est le débit-masse de sang par volume unitaire de tissu.

L'équation (2.8) décrit le transfert de chaleur entre le tissu et le sang. Le modèle est construit sous l'hypothèse que tout transfert de chaleur entre le tissu et le sang se produit au niveau des capillaires. Pennes, a considéré que le sang pénètre dans les capillaires, à la température du sang artériel,  $T_b$ , où l'échange de la chaleur se produit pour amener la température à celle du tissu environnant,  $T$ . Il est supposé être sans transfert d'énergie car l'échange d'énergie entre les vaisseaux sanguins et le tissu environnant se produit principalement à travers la paroi des capillaires (vaisseaux sanguins avec 0,005 à 0,015 mm de diamètre), où la vitesse du sang est très faible. Il postule que l'échange d'énergie totale de la circulation du sang peut être modélisé avec l'équation (2.8).

Dans son modèle, Pennes regroupe toutes les informations de perfusion dans le terme  $C_b \omega (T - T_b)$ . Il a vérifié la validité de ce modèle en comparant les températures calculées par son équation avec les températures mesurées expérimentalement à l'avant-bras humain. Dans son approche, le terme  $\omega$  a été ajustée jusqu'à ce que les températures calculées soient en accord avec les températures mesurées.

*Les equations aux dérivées partielles sous effets d'impulsions entrent dans la modélisation de la diffusion thermique dans des tissus cancéreux du cerveau incluant la source de chaleur pulsée induite par laser. Ces doses sont administrées durant le traitement par hyperthermie thérapeutique. L'hyperthermie thérapeutique est une technique des traitements thermiques médicaux la plus utilisée durant la dernière décennie qui consiste en l'élévation de la température dans une région précise ou la totalité du corps au-dessus de la normale. C'est une technique médicale destinée à traiter le cancer, certaines maladies virales comme le VIH et des infections bactériennes. Elle permet d'augmenter le métabolisme et donc le taux de désintoxication. L'exemple connu de tous est celui de la fièvre qui est l'un des mécanismes le plus efficace pour combattre une infection . Depuis 4000 ans et jusqu'à présent, l'homme utilise et continue de développer différentes formes et sources de traitement thermique. L'emploi de l'hyperthermie dans le domaine médicale a commencé par l'échauffement d'une tige comme mentionné dans le papyrus médicale d'Edwin Smith [E.S] en évoluant à travers le temps jusqu'aux techniques par laser utilisées à l'heure actuelle.*

## Résultats d'existence

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions pour une classe d'équation d'évolution impulsives pour lesquelles nous commençons en premier lieu par le cas où les impulsions sont instantanées. En second lieu nous considérons le cas d'impulsions non instantanées où le semi groupe de générateur infinitésimale  $A$  est compact ou non compact.

### 3.1 Cas d'impulsions instantanées

#### 3.1.1 Problème étudié

Nous considérons dans cette section les équations différentielles impulsives à impulsions fixes :

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + f(t, y), & t \in (0, T) \setminus \{t_i\} \\ y(0) &= y_0 \\ y(t_i^+) - y(t_i^-) &= \Delta y(t_i) = \gamma_i y(t_i), & i \in \sigma_1^m \end{cases} \quad (P_1)$$

où  $y_0$  est une condition initiale dans un espace Banach  $X$ ,  $y : [0, T] \rightarrow X$  est une fonction vectorielle,  $\{t_i\}_{i \in \sigma_1^m}$  est une suite croissante dans l'intervalle ouvert  $(0, T)$ ,

$A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est le générateur infinitesimal d'un  $C_0$  semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés  $(T(t))_{t \geq 0}$  défini sur l'espace de Banach  $X$ ,  $\gamma_i : X \rightarrow X$  sont des opérateurs bornés ou non bornés. La fonction  $f : [0, T] \times X \rightarrow X$  est continue sur chaque intervalle fermé  $[t_i; t_{i+1}]$ , et elle est non linéaire en général et  $\sigma_p^q$  est un sous ensemble de  $\mathbb{N}$  défini par

$$\sigma_p^q = \{p, p + 1, \dots, q\}, \quad p < q, p, q \in \mathbb{N}$$

#### 3.1.2 Concepts de solutions considérées

Nous commençons par rappeler la notion de solution pour le problème  $(P_1)$

**Définition 3.1.1.** Une fonction  $y(\cdot) \in \mathcal{PC}([0, T]; X) \cap C^1((0, T) \setminus \{t_i\}_{\sigma_1^m}, X)$  est une solution mild pour le problème  $(P_1)$  s'il satisfait la condition impulsive et

$$y(t) = T(t)y^0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, y(s))ds + \sum_{t_0 < t_i < t} T(t-t_i)\gamma_i y(t_i), \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.1)$$

où  $T(t)$  est un  $C_0$  semi-groupe générée par  $A$ .

**Définition 3.1.2.** Une solution classique de l'équation impulsive  $(P_1)$  est une fonction  $y \in \mathcal{PC}([0, T]; X) \cap C^1((0, T) \setminus \{t_i\}_{i \in \sigma_1^m}; X)$ ,  $y(t) \in D(A)$  pour  $t \in (0, T) \setminus \{t_i\}_1^m$  tq  $y$  satisfait  $(P_1)$  sur  $[0, T]$ .

### 3.1.3 Hypothèses considérées

Nous présentons ici, les hypothèses sous lesquelles on peut établir le resultat d'existence et d'unicité des solutions pour le problème  $(P_1)$  :

**(H1)**  $f : [0, T] \times X \rightarrow X$  et  $\gamma_i : X \rightarrow X$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont continues et vérifient une condition de Lipschitz i.e il existe des constantes  $L(f) > 0$ ,  $L(\gamma_i) > 0$ ,  $i \in \sigma_1^m$ , tq

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L(f)\|x - x'\|, \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \quad x, x' \in X$$

$$\|\gamma_i(x) - \gamma_i(x')\| \leq L(\gamma_i)\|x - x'\|, \quad \text{pour tous } x, x' \in X$$

**(H2)** soit  $T(\cdot)$  le semi-groupe fortement continu engendré par l'opérateur non borné  $A$ , on suppose que

$$M \left[ L(f)T + \sum_{k=1}^m L(\gamma_i) \right] < 1,$$

où

$$M = \sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

Avant d'établir le résultat principal de cette section on montrera des résultats auxiliaires énoncés sous forme de lemmes.

**Lemme 3.1.1.** Si les hypothèses **(H1)**-**(H2)** sont satisfaites, et supposons que  $y_0 \in D(A)$  et  $f \in C^1((0, T) \times X; X)$ . Alors pour l'unique solution  $y(\cdot, y_0)$  sur  $[0, t_1)$  du système

$$\begin{cases} y_1'(t) = Ay_1(t) + f(t, y_1(t)), & 0 < t < t_1 \\ y_1(0) = y_0 \end{cases}$$

on peut définir  $y(t_1)$  de telle sorte que  $y$  est continu à gauche en  $t_1$  et  $y(t_1) \in D(A)$ .

**Preuve :** On considère le problème d'évolution sans impulsions suivant sur  $(0, T)$

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), & 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

par application du Théorème [2.8], il existe une solution classique donnée par

$$w(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds, \quad t \in [0, t_1)$$

avec  $y_1(t) \in D(A)$ , pour  $t \in [0, T)$ . Ensuite en appliquant le Théorème 2.8 on a, pour  $t \in [0, t_1) \subset [0, T)$

$$y(t) = T(t)y^0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds, \quad t \in [0, t_1)$$

Ainsi, on définit

$$y(t_1) = T(t_1)y_0 + \int_0^{t_1} T(t_1-s)f(s, y(s))ds.$$

donc  $y(\cdot)$  est continue à gauche en  $t_1$ . Alors appliquant le Théorème 2.8 en  $[0, t_1]$  pour obtenir

$$y(t) = y_1(t), \quad [0, t_1]$$

Ainsi, nous avons,  $y(t_1) = y_1(t_1) \in D(A)$  ce qui complète la preuve.

**Lemme 3.1.2.** Suppose que  $y^0 \in D(A)$ ,  $q_i \in D(A)$ ,  $i \in \sigma_1^m$  et  $f \in C^1((0, T) \times X; X)$  alors, le système impulsif

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + f(t, y(t)), \\ y(0) &= y_0 \\ \Delta y(t_i) &= q_i, \quad i \in \sigma_1^m \end{cases} \quad (3.2)$$

a admet une unique solution classique  $y$  qui, pour  $t \in [0, T)$ , vérifie

$$(3.3) \quad y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds + \sum_{0 < t_i < t} T(t-t_i)q_i$$

**Preuve :** Considérons d'abord l'intervalle  $J_1 = [0, t_1]$  par application du lemme précédent et le lemme 2.8

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad 0 < t < t_1, \quad y(0) = y_0$$

On obtient une unique solution classique  $y_1$  satisfaisant

$$y_1(t_1) = T(t_1)y_0 + \int_0^{t_1} T(t_1-s)f(s, y_1(s))ds, \quad t \in [0, t_1]$$

Ensuite, définissons

$$y_1(t_1) = T(t_1)y_0 + \int_0^{t_1} T(t_1-t)f(s, y_1(s))ds$$

En appliquant le Théorème 2.8, on voit que  $y_1(\cdot)$  est continue à gauche en  $t_1$ , et  $y_1(t_1) \in D(A)$ . D'autre part sur  $J_2 = [t_1, t_2)$ , on considère l'équation

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad t_1 < t < t_2, \quad y(t_1) = y_1(t_1) + q_1$$

Puisque  $y(t_1) = y_1(t_1) + q_1 \in D(A)$ , nous pouvons à nouveau utiliser le Théorème 2.8 pour obtenir un solution classique unique  $y_2$  satisfaisante

$$y_2(t) = T(t-t_1)[y_1(t_1) + q_1] + \int_{t_1}^t T(t-s)f(s, y_2(s))ds, \quad t \in [t_1, t_2)$$

Alors

$$y_2(t_2) = T(t_2-t_1)[y_1(t_1) + q_1] + \int_{t_1}^{t_2} T(t-s)f(s, y_2(s))ds$$

Par conséquent,  $y_2(\cdot)$  est continu à gauche à  $t_2$  et  $y_2(t_2) \in D(A)$ . On voit facilement que cette procédure peut être répétée dans  $J_i = [t_{i-1}, t_i)$ ,  $i \in \sigma_3^{m+1}$  pour obtenir une solution classique

$$y_i(t) = T(t-t_{i-1})[y_{i-1}(t_{i-1}) + q_{i-1}] + \int_{t_{i-1}}^t T(t-s)f(s, y_i(s))ds, \quad t \in [t_{i-1}, t_i)$$

Maintenant , on définit

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & 0 < t < t_1 \\ y_i(t) & t_{i-1} < t < t_i, i \in \sigma_2^m \\ y_{m+1}(t), & t_m < t < T \end{cases}$$

Il est clair que  $y(\cdot)$  est l'unique solution classique impulsive de (3.2).

Ensuite, nous montrons par induction que (3.1.2) est satisfaite dans  $[0, T)$ . En fait, (3.1.2) est satisfaite en  $[0, t_1]$ . Si (3.1.2) est satisfaite dans  $(t_{i-1}, t_i]$ , alors pour  $t \in [t_{i-1}, t_i)$ ,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{i+1}(t) = T(t - t_i)[y_i(t_i) + q_i] + \int_{t_i}^t T(t - s)f(s, y(s))ds \\ &= T(t - t_i)[T(t_i)y_0 + \int_{t_i}^t T(t_i - s)f(s, y(s))ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t_i} T(t_i - t_k)q_k + q_i] + \int_{t_i}^t T(t - s)f(s, y_{i+1}(s))ds \\ &= T(t - t_i)T(t_i)y_0 + \int_0^{t_i} T(t - s)f(s, y(s))ds + \sum_{0 < t_k < t_i} T(t - t_k)q_k \\ &\quad + T(t - t_i)q_i + \int_{t_i}^t T(t - s)f(s, y(s))ds \\ &= T(t)y_0 + \int_0^t T(t - s)f(s, y(s))ds + \sum_{0 < t_k < t} T(t - t_k)q_k \end{aligned}$$

Ainsi (3.1.2) est aussi vrai sur  $(t_i, t_{i+1}]$ . Donc (3.1.2) est vrai sur  $[0; T)$ .

### 3.1.4 Résultats principaux

**Théorème 3.1.** Si les hypothèses **(H1)**-**(H2)** sont satisfaites. Alors pour tout  $y_0 \in D(A)$ , le problème  $(P_1)$  admet une unique solution douce (mild solution).

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t - s)f(s, y(s))ds + \sum_{0 < t_i < t} T(t - t_i)\gamma_i y(t_i) \quad (3.4)$$

**Preuve :** Soit  $y_0 \in X$ , on définit l'opérateur  $F$  sur  $\mathcal{PC}([0, T]; X)$  par

$$(Fx)(t) = T(t)y^0 + \int_0^t T(t - s)f(s, x(s))ds + \sum_{0 < t_i < t} T(t - t_i)\gamma_i x_i(t_i)$$

On a  $F : \mathcal{PC}([0, T]; X) \rightarrow \mathcal{PC}([0, T]; X)$ .

D'autre part, nous avons de l'hypothèse **(H1)**,

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t) - (Fz)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(s, x(s)) - f(s, z(s))\| ds \\
&+ \sum_{0 < t_i < t} \|T(t-t_i)\|_{\mathcal{L}(X)} \|\gamma_i x(t_i) - \gamma_i z(t_i)\| \\
&\leq MLT \|x - z\|_{\mathcal{PC}} + \sum_{0 < t_i < t} M h_i \|x(t_i) - z(t_i)\| \\
&\leq MLT \|x - z\|_{\mathcal{PC}} + M \|x - z\|_{\mathcal{PC}} \sum_{0 < t_i < t} h_i \\
&\leq M[LT + \sum_{i=1}^m h_i] \|x - z\|_{\mathcal{PC}}, \quad x, z \in \mathcal{PC}([0, T]; X)
\end{aligned}$$

A partir de l'hypothèse **(H2)**, on voit que  $F$  est un opérateur de contraction sur  $\mathcal{PC}([0, T]; X)$ . On conclut par le théorème du point fixe qu'il existe une unique solution intégrale  $y \in \mathcal{PC}([0, T]; X)$  telle que

$$y = Fy$$

**Théorème 3.2.** Si les hypothèses **(H1)**-**(H2)** sont satisfaites, et soit  $y(\cdot) = y(\cdot, y_0)$  l'unique solution douce (mild) de l'équation  $(P_1)$  garantie par le théorème 3.1, et supposons également que  $y_0 \in D(A)$ ,  $\gamma_i(y(t_i)) \in D(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , et que  $f \in C^1((0, T) \times X, X)$ . Alors  $y(\cdot)$  donne lieu à une solution classique unique de l'équation  $(P_1)$ .

**Preuve :** Soit  $y(\cdot)$  la solution mild. On peut maintenant définir  $q_i = \gamma_i(y(t_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , alors d'après le lemme 3.2, l'équation  $(P_1)$  a une unique solution classique  $w(\cdot)$  qui satisfait pour  $t \in [0, T]$

$$w(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, w(s))ds + \sum_{0 < t_i < t} T(t-t_i)\gamma_i(y(t_i))$$

Maintenant,  $u(\cdot)$  est la solution mild de l'équation  $(P_1)$ , de sorte qu'en utilisant (3.4) nous obtenons pour  $t \in [0, T]$ ,

$$w(t) - y(t) = \int_0^t T(t-s)[f(s, w(s)) - f(s, y(s))]ds$$

Alors la preuve du théorème 3.1 peut être appliquée pour montrer que  $y(\cdot) = w(\cdot)$ . Ceci implique que  $y(\cdot)$  est aussi une solution classique.

## 3.2 Cas d'impulsions non instantanées

### 3.2.1 Cas où $A$ engendre un semi groupe $T(t)$ compact.

#### 3.2.1.1 Problème étudié

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N \\ u(t) = h_i(t, u|_{I_i(t)}), & t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, \dots, N \\ u(0) = x_0 \end{cases} \quad (P_2)$$

Où  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est le générateur infinitesimal d'un  $C_0$  semi-group d'opérateurs linéaires bornés  $(T(t))_{t \geq 0}$  défini sur l'espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $x_0 \in X$ ,  $0 = t_0 = s_0 < t_1 \leq s_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq s_N \leq t_{N+1} = \alpha$  sont des nombres prédéfinis,  $I_i$  fonction à valeur des ensembles tel que  $I_i(t) \in 2^{[0,t]}$  pour tout  $t$ , chaque fonction  $h_i(t, \cdot)$  est une fonction continue de l'espace de Banach  $\mathcal{C}_i(t)$  à valeur dans  $X$  où l'espace  $\mathcal{C}_i(t)$

$$\mathcal{C}_i(t) = \{u : I_i(t) \rightarrow X\}$$

et dénote par  $u|_I$  la restriction de  $u(\cdot)$  à un intervalle  $I \subset [0, \alpha]$  et  $f : [0, \alpha] \times X \rightarrow X$ .

Dans cette section, nous discutons de l'existence de solutions integrales (mild) et classiques pour le système impulsif  $(P_2)$ . Pour cela, nous devons préciser les concepts de solution considérées :

### 3.2.1.2 concepts de solutions considérées

**Définition 3.2.1.** une fonction  $u \in \mathcal{PC}(X)$  est une solution mild de  $(P_2)$  si  $u(0) = x_0$ ,  $u(t) = h_i(s_i, u|_{I_i(t)})$  pour tous  $t \in (t_i, s_i]$  et pour chacun  $i = 1, \dots, N$  et

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad \text{pour tous } t \in [0, t_1]$$

$$u(t) = T(t-s_i)h_i(s_i, u|_{I_i(t)}) + \int_{s_i}^t T(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad \text{pour tous } t \in [s_i, t_{i+1}], i = 1, \dots, N$$

**Définition 3.2.2.** une fonction  $u \in \mathcal{PC}(X)$  est une solution classique de  $(P_2)$  si  $u(0) = x_0$ ,  $u(t) = h_i(s_i, u|_{I_i(t)})$  pour tous  $t \in (t_i, s_i]$  et  $i = 1, \dots, N$ , la fonction  $u|_{(s_i, t_{i+1}]}$  appartient à  $C^1((s_i, t_{i+1}]; D)$  pour tous  $i = 1, \dots, N$  et  $u(\cdot)$  satisfait à l'équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N$$

**Remarque 3.2.1.** on introduit la fonction  $\tilde{u}_i \in C([t_i, t_i + 1], X)$  défini par

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} u(t) & t \in (t_i, t_{i+1}] \\ u(t_i^+) & t = t_i \end{cases} \quad (3.5)$$

**Notation :** Pour  $B \subseteq \mathcal{PC}(X)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  on utilise la notation  $\tilde{B}_i$  pour l'ensemble  $\tilde{B}_i = \{\tilde{u}_i : u \in B\}$

**Lemme 3.2.1.** Un ensemble  $B \subseteq \mathcal{PC}(X)$  est relativement compact si et seulement si chaque ensemble  $\tilde{B}_i$  est relativement compact dans  $C([t_i, t_i + 1], X)$ .

**Notation :** on notera  $(\mathcal{C}_i(t), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_i(t)})$  avec  $t \in (t_i, s_i]$  et  $i \in 1, \dots, N$  l'espace de Banach formé par des fonctions définies de  $I_i(t) \subset [0, s_i]$ , à valeurs dans  $X$ .

L'existence de solution intégrale pour le problème  $(P_2)$  est établie en considérant les hypothèses sur les fonctions  $f$  :

### 3.2.1.3 Hypothèses considérées

**(H1)** La fonction  $h_i(t, \cdot)$  appartient à  $C(\mathcal{C}_i(t); X)$  et soit une fonction borné  $L_i \in C((t_i, s_i]; \mathbb{R}^+)$  pour tous  $i = 1, \dots, N$  et  $t \in (t_i, s_i]$  tel que :

$$\|h_i(t, u) - h_i(t, v)\| \leq L_i(t)\|u - v\|_{\mathcal{C}_i(t)}$$

**(H2)** la fonction  $f \in C([0, \alpha] \times X; X)$  tel que il existe une fonction non décroissante  $W_f \in C([0, \infty); \mathbb{R}^+)$  et la fonction  $m_f \in L^p([0, \alpha]; \mathbb{R}^+)$ , avec  $p \geq 1$ , alors

$$\|f(t, x)\| \leq m_f(t)W_f(\|x\|) \quad \text{pour tous } (t, x) \in [0, \alpha] \times X$$

**(H3)** La fonction  $f(\cdot) \in C([0, a] \times X; X)$  et il existe une fonction  $L_f \in L^p([0, \alpha]; \mathbb{R}^+)$ , avec  $p \geq 1$ , tel que  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f(t)\|x - y\|$  pour tous  $x, y \in X$  et  $t \in [0, \alpha]$ .

**(H4)** Pour tout  $i \in 1, \dots, N$ ,  $u \in \mathcal{PC}(X)$ , la fonction  $t \mapsto h_i(t, u|_{I_i(t)})$  appartient à  $C(\mathcal{C}_i(t); X)$  et  $\lim_{t \rightarrow t_i} h_i(t, u|_{I_i(t)})$  existe.

**(H5)** pour tout  $t \in (t_i, s_i]$ ,  $i \in 1, \dots, N$ , l'ensemble

$$\psi_i(t) : \mathcal{PC}(x)|_{I_i(t)} = \{u|_{I_i(t)} : u \in \mathcal{PC}(X) \rightarrow \mathcal{C}_i(t)\} \rightarrow \mathcal{C}_i(t)$$

donné par  $\Psi_i(t)u = u|_{I_i(t)}$  est un opérateur linéaire borné et on suppose toujours que l'ensemble des opérateurs  $\psi_i(t) : t \in (t_i, s_i], i = 1, \dots, N$  est borné .

**Notation :**  $\tilde{\psi}(s) = \|\psi_i(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{PC}(X)|_{I_i(s)}, \mathcal{C}_i(s))}$

### 3.2.1.4 Résultats d'existence

**Théorème 3.3.** Si les hypothèses **(H1)**, **(H3)**-**(H5)** et si la condition suivante sont satisfaites :

$$\hat{s}_i = \sup_{t \in (t_i, s_i]} \bigcup_{t \in (t_i, s_i]} I_i(t) < t_i \quad \text{pour tous } i \in 1, \dots, N \quad (\bullet)$$

Alors il existe une unique solution intégrale pour le problème (P<sub>2</sub>)

**Preuve :**

Soit  $\beta \geq \gamma$  et  $\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)$  l'ensemble de  $\mathcal{PC}(X)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)}$  définie par  $\|u\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} = \sup_{[0, \alpha]} e^{-\beta t} \|u(t)\|$

Transformons le problème (P<sub>2</sub>) en un problème de point fixe, pour cela ,nous considérons l'opérateur  $\Gamma : \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)$  défini par :

$$\Gamma u(0) = x_0$$

$$\Gamma u(t) = \begin{cases} T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds & t \in [0, t_1] \\ h_i(t, u|_{I_i(s_i)}) & t \in (t_i, s_i] \\ T(t-s_i)h_i(s_i, u|_{I_i(s_i)}) + \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds & t \in [s_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

Soit  $u, v \in \mathcal{PC}(X)$  pour chaque  $i = 1, \dots, N$

- Si  $t \in [0, t_1]$

$$\sup_{t \in [0, t_1]} e^{-\beta t} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq C_0 \sup_{t \in [0, t_1]} \int_0^t e^{(\gamma-\beta)(t-s)} L_f(s) ds \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \quad (3.2.1)$$

- Si  $t \in (t_i, s_i]$

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \|h_i(t, u|_{I_i(t)}) - h_i(t, v|_{I_i(t)})\| \\ &\leq L_{h_i} \|\psi_i(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}\mathcal{C}(X)|_{\mathbb{I}_i(t)}, \mathcal{C}_i(t))} \sup_{s \in I_i(t)} e^{\beta s} e^{-\beta s} \|u(s) - v(s)\| \\ &\leq L_{h_i}(t) \sup_{s \in (t_i, s_i]} \tilde{\psi}(s) e^{\beta s} \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [t_i, s_i]} e^{-\beta t} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \|L_{h_i}\|_{\mathcal{C}((t_i, s_i]; \mathbb{R})} \sup_{t \in (t_i, s_i]} e^{-\beta(t-\hat{s}_i)} \sup_{s \in (t_i, s_i]} \tilde{\psi}(s) \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

- Si  $t \in [s_i, t_{i+1}]$

En utilisant les hypothèses nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \|T(t - s_i)h_i(s_i, u|_{I_i(s_i)}) - T(t - s_i)h_i(s_i, v|_{I_i(s_i)})\| \\ &\quad + C_0 \int_{s_i}^t e^{\gamma(t-s)} e^{\beta s} L_f(s) e^{-\beta s} \|u(s) - v(s)\| ds \\ &\leq C_0 e^{\gamma(t-s_i)} L_{h_i}(s_i) \|u|_{I_i(s_i)} - v|_{I_i(s_i)}\|_{\mathcal{C}_i(s_i)} \\ &\quad + C_0 e^{\beta t} \int_{s_i}^t e^{(\gamma-\beta)(t-s)} L_f(s) ds \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \\ &\leq C_0 e^{\gamma(t-s_i)} L_{h_i}(s_i) \|\psi_i(s_i)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}\mathcal{C}(X)|_{I_i(s_i)}, \mathcal{C}_i(s_i))} \sup_{s \in I_i(s_i)} e^{\beta s} e^{-\beta s} \|u(s) - v(s)\| \\ &\quad + C_0 e^{\beta s} \int_{s_i}^t e^{(\gamma-\beta)(t-s)} L_f(s) ds \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} e^{-\beta s} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq C_0 e^{\gamma(t-s_i)} e^{\beta(\hat{s}_i-t)} L_{h_i}(s_i) \tilde{\psi}_i(s_i) \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \\ &\quad + C_0 \int_{s_i}^t e^{(\gamma-\beta)(t-s)} L_f(s) ds \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} e^{-\beta t} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq C_0 \sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} e^{(\gamma-\beta)(t-s_i)} e^{\beta(\hat{s}_i-s_i)} L_{h_i}(s_i) \tilde{\psi}(s_i) \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \\ &\quad + C_0 \sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} \int_{s_i}^t e^{(\gamma-\beta)(t-s)} L_f(s) ds \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Donc de (3.2.3),(3.2.1) et (3.2.2), nous arrivons à :

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \leq \max_{i=1, \dots, N} (\Lambda_i(\beta) + \Xi_i(\beta), \Theta_i(\beta), \Xi_i(\beta)) \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \quad (3.2.4)$$

Où

$$\begin{aligned} \Lambda_i(\beta) &= C_0 e^{\beta(\hat{s}_i - s_i)} L_{h_i} \tilde{\psi}_i(s_i) \\ \Theta_i(\beta) &= e^{-\beta(t_i - \hat{s}_i)} \|L_{h_i}\|_{C((t_i, s_i]; \mathbb{R})} \sup_{s \in (t_i, s_i]} \tilde{\psi}_i(s) \\ \Xi_i(\beta) &= C_0 \sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} \int_{s_i}^t e^{(\gamma - \beta)(t-s)} L_f(s) ds \end{aligned}$$

Ensuite , nous considérons dans laquelle la conditions (a) est satisfaite : pour  $\beta > \gamma$  on a :

$$\Xi_j(\beta) \leq C_0 (p'(\beta - \gamma))^{\frac{-1}{p'}} \|L_f\|_{L^p([s_j, t_{j+1}]; \mathbb{R})}, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  , ce qui implique  $\Lambda_i(\beta) + \Theta_i(\beta) + \Xi_i(\beta) + \Xi_0(\beta) \rightarrow 0$  quand  $\beta \rightarrow 0$  pour tout  $i \in 1, \dots, N$  depuis  $\max \beta(\hat{s}_i - s_i), \beta(t_i - \hat{s}_i) < 0$  .

Donc, pour  $\beta > \gamma$  assez grand , l'application  $\Gamma(\cdot)$  est une contraction sur  $\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)$  qui assure l'existence d'un unique solution mild de problème (P<sub>2</sub>)

**Théorème 3.4.** *Supposons que les conditions (H1), (H2), (H4) et (H5) soient satisfaites , le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est compact et*

$$\theta = C_0 \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} r^{-1} W_f(r) \int_{s_i}^t e^{\gamma(t-\tau)} m_f(\tau) d\tau < 1, \quad i = 1, \dots, N$$

et si la condition suivante est vérifiée :

$$\hat{s}_i = \sup_{t \in (t_i, s_i]} I_i(t) < t_i, \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (*)$$

alors il existe une solution mild du problème (P<sub>2</sub>).

**Preuve :** on prouve qu'il existe  $\beta \geq \gamma$  et  $r > 0$  telle que l'application introduite dans la preuve du théorème est une application condensante de  $B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  dans  $B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$ . Pour cela , On introduit la décomposition  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  où

$$\Gamma_i^1 u(t) = \begin{cases} T(t)x_0 & t \in [0, t_1], i = 0 \\ h_i(t, u|_{I_i(t)}), & t \in (t_i, s_i], i \geq 1 \\ T(t - s_i)h_i(s_i, u|_{I_i(s_i)}) & t \in [s_i, t_{i+1}], i \geq 1 \\ 0 & t \in (t_i, t_{i+1}], i \geq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_i^2 u(t) = \begin{cases} \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds, & t \in (s_i, t_{i+1}], i \geq 0 \\ 0 & \check{t} \in (s_i, t_{i+1}], i \geq 0 \end{cases}$$

à partir des hypothèses, on sélectionne  $r_0 > 0$  et  $\Theta \in (0, 1)$  tel que :

$$C_0 \frac{W_f(e^{\beta s_i} s)}{e^{\beta s_i} s} \sup_{s \in [s_i, t_{i+1}]} e^{\gamma(s-\tau)} m_f(\tau) d\tau < \Theta \quad (3.6)$$

la preuve est présentée selon 5 étapes :

**Étape 1** : nous montrons que  $\Gamma^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)) \subset B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  pour tous  $r > r_0$ .  
soit  $r > r_0$ ,

$$\begin{aligned} \|\Gamma^2 u(t)\| &\leq C_0 \int_{s_i}^t e^{\gamma(t-s)} W_f(\|u(s)\|) m_f(s) ds \\ e^{-\beta t} \|\Gamma^2 u(t)\| &\leq C_0 \int_{s_i}^t e^{(-\beta t)} e^{\gamma(t-s)} W_f(e^{\beta s} e^{-\beta s} \|u(s)\|) m_f(s) ds \\ &\leq C_0 r \int_{s_i}^t e^{\gamma(t-s)} \frac{W_f(e^{\beta s} r)}{e^{\beta s} r} m_f(s) ds \\ &\leq r C_0 \frac{W_f(e^{\beta s_i} r)}{e^{\beta s_i} r} \sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} \int_{s_i}^t e^{\gamma(t-s)} m_f(s) ds \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{t \in [s_i, t_{i+1}]} e^{-\beta t} \|\Gamma^2 u(t)\| \leq r \theta, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

Ce qui montre que  $\Gamma^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)) \subset B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$

**Étape 2** : Pour  $i = 1, \dots, N$  et  $s_i < t < t_{i+1}$ , l'ensemble  $\bigcup_{\tau \in [s, t]} \Gamma^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  est relativement compact.

soit  $s_i < \mu < s$ , pour  $\epsilon > 0$  on choisit  $0 < \delta < \frac{s-\mu}{2}$  tel que

$$C_0 \|m_f\|_{L^p(I)} W(r) \leq \epsilon$$

pour tous les intervalles  $I \subset [0, \alpha]$  avec  $\text{diam}(I) \leq \delta$ , alors pour  $\tau \in [s, t]$  et  $u \in B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{s_i}^{\tau-\delta} T(\tau-\theta-\delta) f(\theta, u(\theta)) d\theta \right\| &\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([s_i, \tau-\delta])} W(\|u\|) \\ &\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([0, \alpha])} W(r) =: r_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-\theta) f(\theta, u(\theta)) d\theta \right\| &\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([\tau-\delta, \tau])} W(\|u\|) \\ &\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([\tau-\delta, \tau])} W(r) =: r_{1, \epsilon} \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\left( \int_{s_i}^{\tau-\delta} T(\tau-\theta-\delta) f(\theta, u(\theta)) d\theta \right) \in B_{r_1}(0, X)$$

et

$$\int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-\theta) f(\theta, u(\theta)) d\theta \in B_{r_{1, \epsilon}}(0, X)$$

Par suite  $\Gamma_i^2 u(\tau) \in T(\delta) B_{r_1}(0, X) + B_{r_{1, \epsilon}}(0, X)$  vue que

$$\Gamma_i^2 u(\tau) = T(\delta) \int_{s_i}^{\tau-\delta} T(\tau-\theta-\delta) f(\theta, u(\theta)) d\theta + \int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-\theta) f(\theta, u(\theta)) d\theta$$

En se basant sur le lemme 3.2.1 , on conclut la compacité relative.

**Etape 3** :l'ensemble des fonctions  $[\Gamma_i^2 B_r(\widetilde{0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)})]$  ,  $i = 1, \dots, N$  est un sous-ensemble équicontinu de  $C([t_i, t_{i+1}])$ .

- Il est évident que  $[\Gamma_i^2 B_r(\widetilde{0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)})]$  est equicontinu à droite et à gauche sur  $(t_i, s_i]$  .
- Pour  $t \in (s_i, t_{i+1}]$  l'ensemble est relativement compact dans  $X$  et  $T(t)_{t \geq 0}$  est un  $C_0$ semi-groupe, alors pour  $\epsilon > 0$  il existe  $0 < \delta < t_{i+1} - t$  tell que pour  $u \in B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  et  $0 < h < \delta$  on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\Gamma}_i^2 u(t+h) - \widetilde{\Gamma}_i^2 u(t)\| &= \|\Gamma_i^2 u(t+h) - \Gamma_i^2 u(t)\| \\
&= \|\int_{s_i}^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds - \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds\| \\
&= \|\int_{s_i}^t T(t+h-s)f(s, u(s))ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \\
&\quad - \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds\| \\
&\leq \|\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds\| \\
&\quad + \|(T(h) - I) \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds\| \\
&\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([t, t+h])} W(r) + \sup\{\|T(h) - I\|x\| : x \in \Gamma_i^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))(t)\}
\end{aligned}$$

On a  $\|T(h) - I\|x\| \leq \epsilon$  pour tous  $0 < s < \delta$  et pour chaque  $x \in \Gamma_i^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  ca veut dire que :

$$\|\widetilde{\Gamma}_i^2 u(t+h) - \widetilde{\Gamma}_i^2 u(t)\| \leq C_0 \|m_f\|_{L^p([t, t+h])} W(r) + \epsilon$$

ce qui prouve que  $[\Gamma_i^2 B_r(\widetilde{0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)})]_i$  est equicontinu à droite en  $t$ .

- En procédant comme ci-dessus, pour  $t = s_i$  et  $h > 0$  avec  $s_i + h < t_{i+1}$  on a

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\Gamma}_i^2 u(s_i+h) - \widetilde{\Gamma}_i^2 u(s_i)\| &\leq \|\int_{s_i}^{s_i+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds\| \\
&\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([s_i, t+s_i])} W(r)
\end{aligned}$$

ce qui implique que  $[\Gamma_i^2 B_r(\widetilde{0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)})]_i$  est equicontinu à droite en  $s_i$ .

- Supposons maintenant que  $t \in (s_i, t_{i+1})$  et  $\mu \in (s_i, t]$ .

On a que  $\cup_{s \in [\mu, t]} B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))(s)$  est relativement compact sur  $X$ . pour  $\epsilon > 0$  on choisit  $0 < \delta < \frac{t-\mu}{2}$  tell que  $\|(I - T(h))x\| \leq \epsilon$  pour tous  $0 < h \leq \delta$  et chaque  $x \in \cup_{s \in [\mu-t]} \Gamma_i^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  .

Pour  $0 < h \leq \delta$  et  $u \in B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  en estimant la difference on arrive à

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\Gamma}_i^2 u(t-h) - \widetilde{\Gamma}_i^2 u(t)\| &= \|\Gamma_i^2 u(t-h) - \Gamma_i^2 u(t)\| \\
&= \left\| \int_{s_i}^{t-h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds - \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{s_i}^{t-h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds - \int_{s_i}^{t-h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t-h}^{s_i} T(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t-h}^t T(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\
&\quad + \left\| I - (T(h)) \int_{s_i}^{t-h} T(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\
&\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([t-h, t])} W(r) + \sup\{\|I - T(h)x\| : x \in \Gamma_i^2 B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))(t)\} \\
&\leq C_0 \|m_f\|_{L^p([t-h, t])} W(r) + \epsilon
\end{aligned}$$

Ce qui implique que  $[\Gamma_i^2 B_r(\widetilde{0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)})]_i$  est equicontinu à gauche en  $t \in (s_i, t_{i+1}]$

**Etape 4 :** Pour  $i \neq j$ , l'ensemble  $[\Gamma_i^2 B_r(\widetilde{0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)})]_j$  est un sous-ensemble équicontinu de  $C([t_j, t_{j+1}]; X)$ .

**Etape 5 :** Si  $r \geq r_0$  et la condition (\*) est vraie, alors il existe  $\beta \geq \gamma$  assez grand tell que le problème a une solution mild  $u \in B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$

Pour  $r \geq r_0$ ,  $u \in B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$  et  $i \geq 1$  en procédant comme preuve de théorème (3.3)

- Si  $t \in [s_i, t_{i+1}]$

$$\begin{aligned}
\sup_{[s_i, t_{i+1}]} e^{-\beta t} \|\Gamma^1 u(t)\| &\leq C_0 \sup_{[s_i, t_{i+1}]} e^{(\gamma-\beta)(t-s_i)} e^{\beta(\hat{s}_i-s_i)} L_{h_i}(s_i) \widetilde{\psi}_i(s_i) \|u\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \\
&\quad + C_0 \sup_{[s_i, t_{i+1}]} e^{\gamma(t-s_i)-\beta t} \|h_i(s_i, 0)\|
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{[s_i, t_{i+1}]} e^{-\beta t} \|\Gamma^1 u(t)\| &\leq C_0 \sup_{[s_i, t_{i+1}]} e^{(\gamma-\beta)(t-s_i)} e^{\beta(\hat{s}_i-s_i)} L_{h_i}(s_i) \widetilde{\psi}_i(s_i) r \\
&\quad + C_0 \sup_{[s_i, t_{i+1}]} e^{\gamma(t-s_i)-\beta t} \|h_i(s_i, 0)\|
\end{aligned} \tag{3.8}$$

- Si  $t \in [t_i, s_i]$  :

$$\begin{aligned}
\sup_{[t_i, s_i]} e^{-\beta t} \|\Gamma^1 u(t)\| &\leq \|L_{h_i}\|_{C((t_i, s_i]; \mathbb{R})} \sup_{[t_i, s_i]} e^{-\beta(t-\hat{s}_i)} \sup_{s \in (t_i, s_i]} \widetilde{\psi}_i(s) r \\
&\quad + e^{-\beta t_i} \|h_i(\cdot, 0)\|_{C((t_i, s_i]; X)}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

à partir des estimations, nous obtenons que

$$\|\Gamma u\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \leq \max_{i=1, \dots, N} \{\Lambda_i(\beta)r + \Lambda_i(\tilde{\beta})r + r\Theta, \Theta_i(\beta)r + \Theta_i(\tilde{\beta})r, r\Theta\} \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}\Lambda_i(\beta) &= C_0 e^{\beta(\hat{s}_i - s_i)} L_{h_i} \tilde{\psi}_i(s_i) \\ \Theta_i(\beta) &= e^{-\beta(t_i - \hat{s}_i)} \|L_{h_i}\|_{C((t_i, s_i]; \mathbb{R})} \sup_{s \in (t_i, s_i]} \tilde{\psi}_i(s) \\ \widetilde{\Lambda_i(\beta)} &= C_0 e^{\gamma(t_{i+1} - s_i) - \beta s_i} \|h_i(s_i, 0)\| \\ \widetilde{\Theta_i(\beta)} &= e^{-\beta t_i} \|h_i(\cdot, 0)\|_{C((t_i, s_i]; X)}\end{aligned}$$

a partir de la condition (\*) et la définition des nombres  $\Lambda_i(\beta)$ ,  $\tilde{\Lambda}_i$ ,  $\Theta_i(\beta)$ ,  $\widetilde{\Theta_i(\beta)}$ , il est facile de voir que  $\max_{i=1, \dots, N} \{\Lambda_i(\beta) + \tilde{\Lambda}_i + \Theta_i(\beta) + \widetilde{\Theta_i(\beta)}\} \rightarrow 0$  quand  $\beta \rightarrow \infty$ .

Ainsi, il existe  $\beta \geq \gamma$  assez grand tel que

$$\max_{i=1, \dots, N} \{\Lambda_i(\beta) + \tilde{\Lambda}_i + \Theta_i(\beta) + \widetilde{\Theta_i(\beta)}\} \leq (1 - \theta)r \quad (3.11)$$

à partir des inégalités (3.10)-(3.11) nous avons que

$$\Gamma B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)) \subset B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$$

de plus, à partir de la preuve du théorème (3.3), il est facile de remarquer que

$$\|\Gamma^1 u - \Gamma^1 v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)} \leq \max_{i=1, \dots, N} \{\Lambda_i(\beta), \Theta_i(\beta)\} \|u - v\|_{\mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X)}$$

tel que

$$\max_{i=1, \dots, N} \{\Lambda_i(\beta), \Theta_i(\beta)\} < 1$$

Ce qui implique que  $\Gamma^1$  est une contraction sur  $B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$ .

De ce qui précède, il s'ensuit que  $\Gamma$  est une application condensante sur  $B_r(0, \mathcal{P}_\beta \mathcal{C}(X))$ , ce qui montre qu'il existe une solution mild de problème (P<sub>2</sub>).

Dans ce qui suit, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions classique, pour cela nous présentons quelques propositions.

**Proposition 3.2.1.** *Si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(a) *La fonction  $f(\cdot, u(\cdot))$  appartient à  $C^\alpha([0, \alpha]; X)$ ,  $x_0 \in D(A)$ ,  $A_{x_0} + f(0, x_0) \in X_\alpha$ ,  $h_i(s_i, u|_{I_i(s_i)}) \in D(A)$  et  $Ah_i(s_i, u|_{I_i(s_i)}) + f(s_i, u(s_i)) \in X_\alpha$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .*

(b) *La fonction  $f(\cdot, u(\cdot))$  appartient à  $C^1([0, \alpha]; X)$ ,  $x_0 \in D(A)$ ,  $h_i(s_i, u|_{I_i(s_i)}) \in D(A)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .*

*Alors  $u(\cdot)$  est une solution classique de problème (P<sub>2</sub>)*

**Proposition 3.2.2.** *Supposons que  $f \in C^1([0, \alpha]X; X)$ ,  $x_0 \in D(A)$  et la les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a)  *$h_i(s_i, \omega) \in D(A)$  si  $\omega \in \mathcal{C}_\gamma(s_i)$  est une Fonction continue à valeur  $D(A)$  sur  $I_i(s_i)$ .*

(b)  *$I_i(s_i) \subset \bigcup_{j < i-1} (s_j, t_{j+1}]$  pour tous  $i \in \{1, \dots, N\}$ .*

*Alors  $u(\cdot)$  est une solution classique de problème (P<sub>2</sub>).*

**Preuve :** puisque  $x_0 \in D(A)$ ,  $f \in C^1([0, t_1] \times X; X)$  et  $u|_{[0, t_1]}$  est une solution integrale (mild) de problème

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad t \in [0, t_1], \quad v(0) = x_0 \quad (3.8)$$

sur  $[0, t_1]$ , alors du théorème 2.9 on voit que  $u|_{[0, t_1]}$  est une solution classique de et  $u \in C^1([0, t_1]; X) \cap C([0, t_1]; D)$

De la même façon, nous prouvons que  $u|_{[s_1, t_2]}$  est une solution classique sur  $[s_1, t_2]$  de problème

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad t \in [s_1, t_2], \quad v(s_1) = h_1(s_1, u|_{I_1(s_1)}) \quad (3.9)$$

Comme  $I_1(s_1) \subset [0, t_1]$  et  $u \in C([0, t_1]; D)$  et de condition (a) nous avons que  $h_1(s_1, u|_{I_1(s_1)}) \in D(A)$ . En notant que  $f \in C^1([s_1, t_2] \times X; X)$  et  $u|_{[s_1, t_2]}$  est une solution mild de problème (3.9), alors par le théorème 2.9 nous obtenons que  $u|_{[s_1, t_2]}$  est une solution classique de problème (3.9) et  $u \in C^1([s_1, t_2]; X) \cap C([s_1, t_2]; D)$ .

En répétant ce processus, nous prouvons que  $u|_{[s_i, t_{i+1}]} \in C^1([s_i, t_{i+1}]; X) \cap C([s_i, t_{i+1}]; D)$  pour tous  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $u|_{[s_i, t_{i+1}]}$  est une solution classique sur  $[s_i, t_{i+1}]$  de problème

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad t \in [s_i, t_{i+1}], \quad v(s_i) = h_1(s_i, u|_{I_i(s_i)}) \quad (3.10)$$

**Application 1.** Comme application de nos résultats, nous considérons un problème aux limites associé à une équation de la chaleur (3.11a) avec la variable spatiale de dim 1 :  $x$  est dans  $[0, \pi]$ , on considère des conditions de Dirichlet en  $x$  (3.11b) et une donnée initiale en  $t$  (3.11c) soumis à des impulsions (3.11d).

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + F(t, \omega(t, \xi)), \quad (t, \xi) \in \bigcup_{i=1}^N [s_i, t_{i+1}] \times [0, \pi] \quad (3.11a)$$

$$\omega(t, 0) = \omega(t, \pi) = 0, \quad t \in [0, \alpha] \quad (3.11b)$$

$$\omega(0, \xi) = z(\xi), \quad \xi \in [0, \pi] \quad (3.11c)$$

$$\omega(t, \xi) = G_i(t, \int_{t_i}^t \zeta_i(s) \omega(s, \xi) ds), \quad \xi \in [0, \pi], t \in (t_i, s_i] \quad (3.11d)$$

où :  $0 = t_0 = s_0 < t_1 \leq s_1 < \dots < t_N \leq s_N < t_{N+1} = \alpha$ ,  $z \in X$ ,  $F \in C([0, \alpha] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  et  $G_i \in C((t_i, s_i] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $\zeta \in C((t_i, s_i], \mathbb{R})$  pour tous  $i = 1, \dots, N$

Soit  $X = L^2([0, \pi])$ , et définir  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  par  $Ax = -\frac{\partial}{\partial \xi^2} x$  pour  $u \in D(A)$  avec

$$D(A) := \left\{ x \in X, \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \in X, x(0) = x(\pi) = 0 \right\}$$

Alors,  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $T(t)_{t \geq 0}$  compact de contraction sur  $L^2([0, \pi])$ .

On considère l'application  $f : [0, \alpha] \times X \rightarrow X$  défini par :

$$f(t, x)(\xi) = F(t, x(\xi))$$

et  $h_i(t, \cdot) : \mathcal{C}_i(t) \rightarrow X$  donné par

$$h_i(t, x)(\xi) = G_i(t, \int_{t_i}^t \zeta_i(s) \omega(s, \xi) ds)$$

avec  $I_i : (t_i, s_i] \rightarrow 2^{(t_i, s_i]}$  Ainsi, on peut écrire le problème sous la forme abstraite de sur  $L^2([0, \pi])$  :

$$\begin{cases} x' &= Ax + f(t, x(\xi)), & t \in \cup_{i=1}^N [s_i, t_{i+1}] \\ x(0) &= x(\pi) = 0, & t \in [0, \alpha] \\ x(t) &= h_i(t, x(\xi)), & t \in (t_i, s_i] \end{cases} \quad (3.12)$$

On suppose que les fonctions  $F, G_1, \dots, G_N$  sont globalement lipschitziennes avec constantes de Lipschitz  $L_F, L_{G_1}, \dots, L_{G_N}$  respectivement, alors les hypothèses **[H1]**, **[H3]**-**[H5]** du théorème (3.3) sont remplies tel que :

$$L_{h_i} = L_G \|\zeta_i\|_{L^2((t_i, s_i])} \delta_i^{\frac{1}{2}} \text{ et } L_f = L_F$$

Nous notons également que  $\hat{s}_i = \hat{t}_i$  pour tous  $i = 1, \dots, N$ .

D'autre part on a la condition **(•)** du théorème 3.3 est satisfaite.

Ainsi, on déduit que toutes les hypothèses du Théorème sont vérifiées ce qui nous permet de conclure que le problème (3.11a)-(3.11d) admet une solution mild.

## 3.2.2 Cas où le semi groupe $T(t)$ généré par $A$ est non compact

### 3.2.2.1 Problème considéré

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), & t \in \bigcup_{i=0}^m (s_i, t_{i+1}] \\ u(t) &= g_i(t, u(t)), & t \in \bigcup_{i=1}^m (t_i, s_i] \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \quad (P_3)$$

où  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est un opérateur linéaire fermé,  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu ( $C_0$ -semi groupe)  $T(t)_{(t \geq 0)}$  dans  $X$ .

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} := \alpha$ ,  $\alpha > 0$  est un constant,  $s_0 := 0$  et  $s_i \in (t_i, t_{i+1})$  pour chaque  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $f : [0, \alpha] \times X \rightarrow X$  est une fonction non linéaire donnée satisfaisant certaines hypothèses,  $g_i : (t_i, s_i] \times X \rightarrow X$  est une fonction impulsive non instantanées pour tous  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $u_0 \in X$ .

### 3.2.2.2 Concepts de solutions considérées

**Définition 3.2.3.** Une fonction  $u \in \mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  est appelée solution douce de  $(P_3)$  si  $u$  satisfait

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \in [0, t_1]$$

$$u(t) = g_i(t, u(t)), \quad t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots, m$$

$$u(t) = T(t-s_i)g_i(s_i, u(s_i)) + \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 1, 2, \dots, m$$

**Notation :** on note par  $\alpha(\cdot)$ ,  $\alpha_C(\cdot)$  et  $\alpha_{\mathcal{PC}}(\cdot)$  la mesure de Kuratowski de non-compacité sur l'ensemble borné de  $X$ ,  $C([0, \alpha], X)$  et  $\mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  respectivement.

## 3.2.2.3 Hypothèses considérées

Pour obtenir l'existence d'une solution mild pour  $(P_3)$ , nous introduisons les hypothèses suivantes :

**(H1)** La fonction non linéaire  $f : [0, \alpha] \times X \rightarrow X$  est continue, pour un certain  $r > 0$ , il existe une constante  $\rho > 0$ , fonction intégrable de Lebesgue  $\phi : [0, \alpha] \rightarrow [0, +\infty)$  et une fonction continue non décroissante  $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tel que pour  $t \in [0, \alpha]$  et  $u \in X$  satisfaisant  $\|u\| \leq r$ ,

$$f(t, u) \leq \phi(t)\psi(\|u\|) \quad \text{et} \quad \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r)}{r} = \rho < +\infty$$

**(H2)** La fonction implusive  $g_i : [t_i, s_i] \times X \rightarrow X$  est continue et il existe une constante  $K_{g_i} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  tel que pour tous  $u, v \in X$

$$\|g_i(t, u) - g_i(t, v)\| \leq K_{g_i}\|u - v\|, \quad \forall t \in (t_i, s_i]$$

**(H3)** Il existe une constante positive  $L_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) tel que pour tout ensemble dénombrable  $D \subset X$ ,

$$\alpha(f(t, D)) \leq L_i\alpha(D), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \dots, m$$

## 3.2.2.4 Résultat principal

**Théorème 3.5.** *Supposons que le semi-groupe  $T(t)_{(t \geq 0)}$  généré par  $A$  est équicontinu, la fonction  $g_i(\cdot, \theta)$  est borné pour  $k = 1, 2, \dots, m$ . Si les hypothèses **(H1)**-**(H3)** sont satisfaites, alors  $(P_3)$  a au moins une solution intégrale  $u \in \mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  à condition que*

$$M \max\{\rho\Lambda + K, K + 4L\} < 1 \tag{3.13}$$

tel que

$$\begin{aligned} K &:= \max_{i=1,2,\dots,m} K_{g_i} \\ \Lambda &:= \max_{i=0,1,\dots,m} \|\phi\|_{L[s_i, t_{i+1}]} \\ L &:= \max_{k=0,1,\dots,m} L_i(t_{i+1}, s_i) \end{aligned}$$

**Preuve :** Définissons l'opérateur  $\Gamma$  sur  $\mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  par :

$$(\Gamma u)(t) = (\Gamma_1 u)(t) + (\Gamma_2 u)(t) \tag{3.14}$$

où

$$(\Gamma_1 u)(t) = \begin{cases} T(t)u_0 & t \in [0, t_1] \\ g_i(t, u(t)), & t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots, m \\ T(t - s_i)g_i(s_i, u(s_i)), & t \in (s_i, t_{i+1}], i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{3.15}$$

$$(\Gamma_2 u)(t) = \begin{cases} \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u(s))ds, & t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.16}$$

Par des calculs directs, il est facile de voir que l'opérateur  $\Gamma$  est bien défini sur  $\mathcal{PC}([0, \alpha], X)$ . A partir de la Définition 3.2.3, on peut facilement voir que la solution mild de  $(P_3)$  équivaut au point fixe de l'opérateur  $\Gamma$  défini par (3.14).

**Étape 1** : nous montrons que  $\Gamma u \in \mathcal{PC}([0, \alpha], X)$ ,  $\forall u \in \mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  pour  $0 \leq \tau < t \leq t_1$ ,

Comme  $M = \sup_{t \in [0, \alpha]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  et par (3.14) on trouve :

$$\begin{aligned} \|(\Gamma u)(t) - (\Gamma u)(\tau)\| &\leq \|T(t)u_0 - T(\tau)u_0\| + \left\| \int_{\tau}^t T(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{\tau} [T(t-s) - T(\tau-s)]f(s, u(s))ds \right\| \\ &\leq M\|T(t-\tau)u_0 - u_0\| + M \int_{\tau}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^{\tau} \|T(t-\tau)T(\tau-s)f(s, u(s)) - T(\tau-s)f(s, u(s))\| ds \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \tau$

De (3.14) et la continuité de la fonction implusives non instantanées  $g_i(t, u(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , il est facile de voir que  $\Gamma u \in C((t_k, s_k], X)$  pour chaque  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Tout à fait similaire avec la preuve de la continuité de  $(\Gamma u)(t)$  avec  $t$  sur  $[0, t_1]$ , on peut prouver que  $\Gamma u \in C((s_i, t_{i+1}], X)$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ . Par conséquent, nous avons prouvé que  $\Gamma u \in \mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  pour  $u \in \mathcal{PC}([0, \alpha], X)$ , à savoir que  $\Gamma$  est une applications de  $\mathcal{PC}([0, \alpha], X)$  à  $\mathcal{PC}([0, \alpha], X)$ .

**Étape 2** : nous prouvons qu'il existe une constante  $R > 0$ , telle que  $\Gamma(\Omega_R) \subset \Omega_R$ . Par absurde, on suppose qu'il existe  $u_r \in \Omega_r$  et  $t_r \in [0, \alpha]$  tel que  $\|(\Gamma u_r)(t_r)\| > r$  pour  $r > 0$ .

- Si  $t_r \in [0, t_1]$ , en utilisant (1.5.1), (3.14) et **H1** nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|(\Gamma u_r)(t_r)\| &\leq M\|u_0\| + M \int_0^{t_r} \|f(s, u_r(s))\| ds \\ &\leq M\|u_0\| + M \int_0^{t_r} \psi(\|u_r\|)\phi(s) ds \\ &\leq M\|u_0\| + M\psi(r)\|\phi\|_{L([0, t_1])} \end{aligned} \tag{3.17}$$

- Si  $t_r \in (t_i, s_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  alors d'après **(H2)**, on trouve

$$\|(\Gamma u_r)(t_r)\| = \|g_i(t_r, u_r(t_r))\| \leq K_{g_i}\|u_r(t_r)\| + \|g_i(t_r, \theta)\| \leq K_{g_i}r + N \tag{3.18}$$

où

$$N = \max_{i=1,2,\dots,m} \sup_{t \in [0, \alpha]} \|g_i(t, \theta)\|$$

- Si  $t_r \in (s_i, t_{i+1}]$ , les hypothèses **(H1)**-**(H2)** donnent

$$\begin{aligned} \|(\Gamma u_r)(t_r)\| &\leq M\|g_i(s_i, u_r(s_i))\| + M \int_{s_i}^{t_r} \|f(s, u_r(s))\| ds \\ &\leq M(K_{g_i}\|u_r(s_i)\| + \|g_i(s_i, \theta)\|) + M\psi(r) \int_{s_i}^{t_r} \phi(s) ds \\ &\leq M(K_{g_i}r + N) + M\psi(r)\|\phi\|_{L[s_i, t_{i+1}]} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$r < \|(\Gamma u_r)(t_r)\| \leq M(\|u_0\| + \psi(r)\Lambda + Kr + N) \tag{3.20}$$

ensuite , on devise les deux cotés par  $r$  et quand  $r \rightarrow \infty$  on a

$$1 \leq (M(\rho\Lambda + K))$$

on arrive à une contradiction avec (3.14)

**Etape 3** : l'opérateur  $\Gamma_1 : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$  est lipschitz continu Soit  $u, v \in \Omega_R$

- Si  $t \in (t_i, s_i]$

$$\|(\Gamma_1 u)(t) - (\Gamma_2 v)(t)\| \leq K_{g_i} \|u(t) - v(t)\| \|u - v\|_{\mathcal{PC}} \quad (3.21)$$

- Si  $t \in (s_i, t_{i+1}]$

$$\|(\Gamma_1 u)(t) - (\Gamma_2 v)(t)\| \leq MK_{g_i} \|u(s_i) - v(s_i)\| \leq MK_{g_i} \|u - v\|_{\mathcal{PC}} \quad (3.22)$$

De (3.21) et (3.22) on obtient

$$\|\Gamma_1 u - \Gamma_2 v\|_{\mathcal{PC}} \leq MK \|u - v\|_{\mathcal{PC}} \quad (3.23)$$

**Etape 4** :  $\Gamma_2$  est continu sur  $\Omega_R$

Soit  $u_n \in \Omega_R$  une suite tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  dans  $\Omega_R$  Par la continuité de non linéaire terme  $f$  par rapport à la deuxième variable, pour chaque  $s \in [0, \alpha]$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(s, u_n(s)) = f(s, u(s)) \quad (3.24)$$

ainsi par **(H1)** on obtien pour chaque  $s \in [0, \alpha]$

$$\|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| \leq 2\phi(s)\psi(R) \quad (3.25)$$

Le fait que la fonction  $\rightarrow 2\phi(s)\psi(R)$  est lebesgue integrable pour  $s \in [s_i, t]$  et  $t \in (s_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

$$\|(\Gamma_2 u_n)(t) - (\Gamma_2 u)(t)\| \leq M \int_{s_i}^t \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds \quad (3.26)$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\|\Gamma_2 u_n - \Gamma_2 u\|_{\mathcal{PC}} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty \quad (3.27)$$

**Etape 5** : L'operateur  $\Gamma_2 : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$  est equicontinu pour tous  $u \in \Omega_R$  et  $s_i < t' < t'' \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  on a

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_2 u)(t'') - (\Gamma_2 u)(t')\| &\leq \left\| \int_{s_i}^{t''} T(t'' - s) f(s, u(s)) ds \right\| \\ &+ \left\| \int_{s_i}^{t'} [T(t'' - s) - T(t' - s)] f(s, u(s)) ds \right\| := I_1 + I_2 \end{aligned}$$

où

$$I_1 = \left\| \int_{s_i}^{t''} T(t'' - s) f(s, u(s)) ds \right\|$$

$$I_2 = \left\| \int_{s_i}^{t'} [T(t'' - s) - T(t' - s)] f(s, u(s)) ds \right\|$$

En utilisant **(H1)** , il est facile de voir que

$$I_1 \leq M\psi(R) \int_{s_i}^{t''} \phi(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t'' - t' \rightarrow 0$$

Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, d'après l'hypothèse **(H1)**, équicontinuité des  $C_0$  semi-groupe  $T(t)_{t \geq 0}$  et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left\| \int_{s_i}^{t'-\epsilon} [T(t''-s) - T(t'-s)]f(s, u(s))ds \right\| \\
&+ \left\| \int_{t'-\epsilon}^t [T(t''-s) - T(t'-s)]f(s, u(s))ds \right\| \\
&\leq \psi(R) \int_{\epsilon}^{t'-s_i} \|T(t''-t'+s) - T(s)\| \phi(t'-s)ds + 2M\psi(R) \int_{t'-\epsilon}^t \phi(s)ds \\
&\rightarrow 0 \quad \text{quand } t'' - t' \rightarrow 0 \quad \text{et } \epsilon \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Par conséquent  $\|(\Gamma_2 u)(t'') - (\Gamma_2 u)(t')\|$  tend vers 0 indépendamment de  $u \in \Omega_R$  lorsque  $t'' - t' \rightarrow 0$  ça veut dire que  $\Gamma_2 : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$  est équicontinu

**Etape 6** : En utilisant lemme (2.5.2), on sait qu'il existe pour tout borné  $D \subset \Omega_R$ , un ensemble dénombrable  $D_0 = \{u_n\} \subset D$ , tel que

$$\alpha(\Gamma_2(D))_{\mathcal{PC}} \leq 2\alpha(\Gamma_2(D_0))_{\mathbb{PC}} \quad (3.28)$$

Puisque  $\Gamma_2(D_0) \subset \Gamma_2(\Omega_R)$  est borné et équicontinu, de lemme (1.5.1) on a :

$$\alpha(\Gamma_2(D_0))_{\mathcal{PC}} = \max_{t \in [s_i, t_{i+1}]} \alpha(\Gamma_2(D_0)(t)) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, m \quad (3.29)$$

Pour  $t \in [s_i, t_{i+1}]$ , par lemme (2.5.3) et l'hypothèse **(H3)** nous obtenons

$$\begin{aligned}
\alpha(\Gamma_2(D_0)(t)) &= \alpha(\{ \int_{s_i}^t T(t-s)f(s, u_n(s))ds \}) \\
&\leq 2M \int_{s_i}^t \alpha(\{f(s, u_n(s))\}) \\
&\leq 2M \int_{s_i}^t L_i \alpha(D_0(s))ds \\
&\leq 2ML_i(t_{i+1} - s_i)\alpha(D)_{\mathcal{PC}}
\end{aligned} \quad (3.30)$$

Donc, de (3.28),(3.29) et (3.30) on arrive à :

$$\alpha(\Gamma_2(D))_{\mathcal{PC}} \leq 4Mk\alpha(D)_{\mathcal{PC}} \quad (3.31)$$

D'après (3.23), on sait que pour tout borné  $D \subset \Omega_R$

$$\alpha(\Gamma_1(D))_{\mathcal{PC}} \leq MK\alpha(D)_{\mathcal{PC}} \quad (3.32)$$

Alors, de (3.31),(3.32) nous avons

$$\alpha(\Gamma(D))_{\mathcal{PC}} \leq \alpha(\Gamma_1(D))_{\mathcal{PC}} + \alpha(\Gamma_2(D))_{\mathcal{PC}} \leq M(K + 4L)\alpha(D)_{\mathcal{PC}} \quad (3.33)$$

ce qui implique que l'opérateur  $\Gamma : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$  est condensant, par conséquent  $\Gamma$  a au moins un point fixe  $u \in \Omega_R$  par le théorème de Sadowskii qui est juste une solution mild de  $(P_3)$ . Ceci complète la preuve.

**Remarque 3.2.2.** *Le semi-groupe analytique et le semi-groupe différentiable sont des semi-groupes équicontinus. Dans l'application des équations aux dérivées partielles, telles que les équations paraboliques et équations d'onde fortement amorties, la solution correspondante semi-groupe sont des semi-groupes analytiques. Par conséquent, le théorème 3.5 a une large applicabilité.*

**Remarque 3.2.3.** Le théorème 3.5 complète les résultats de [36] et [47], tel que ce théorème peut s'appliquer à une classe d'équations aux dérivées partielles de type évolution pour lesquelles les semi-groupes de solution correspondants ne sont pas compacts.

**Application 2.** On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique avec impulsions non instantanées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \mathcal{A}u(x, t) &= \frac{e^{-t}}{2+|u(x, t)|}, & x \in \Omega, t \in [0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1] \\
\mathcal{B}u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, 1] \\
u(x, t) &= \frac{e^{-(t-\frac{1}{3})} |u(x, t)|}{4 + |u(x, t)|}, & x \in \Omega, t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\
u(x, 0) &= \phi(x), & x \in \Omega
\end{aligned} \tag{3.34}$$

où  $[0, \alpha] = [0, 1]$ ,  $N \geq 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine borné, dont la frontière  $\partial\Omega$   $\mathcal{A}u$  est un opérateur différentiel uniformément elliptique sur  $\bar{\Omega}$  définit par

$$\mathcal{A}u := - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0(x)u$$

avec les coefficients  $a_{ij} \in C^{1+\mu}(\bar{\Omega})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) et  $a_0 \in C^\mu(\bar{\Omega})$  pour  $\mu \in (0, 1)$  sur  $\bar{\Omega}$ .  $[a_{ij}(x)]_{N \times N}$  est une matrice symétrique définie positive pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  i.e il existe une constante  $\mu_0 > 0$  telle que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \geq \mu_0 |\eta|^2, \quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N, x \in \bar{\Omega}$$

$\mathcal{B}u$  est un opérateur frontière sur  $\partial\Omega$  définit par :

$$\mathcal{B}u := \delta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \cos(\nu, x_i) \frac{\partial u}{\partial x_j} + (1 - \delta)u$$

avec  $\nu$  est un .....sur  $\partial\Omega$ ,  $\delta = 0$  ou 1.

$\phi \in L^p(\Omega)$  avec  $p \geq 2$

On considère l'espace  $X = L^p(\Omega)$  avec  $p \geq 2$ , alors  $X$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_p$ . On définit l'opérateur  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  avec

$$\mathcal{A}u = Au$$

dans le domaine

$$D(A) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \mathcal{B}u = 0\}$$

On sait que  $A$  est un générateur de semi-groupe analytique  $T(t)_{t \geq 0}$  dans  $X$ , et

$$\|T(t)\| \leq 1 \quad \text{pour chaque } t \geq 0$$

cela veut dire que  $\|T(t)\|_{t \geq 0}$  est un  $C_0$  semi-groupe de contraction sur  $X$ .

On peut écrire l'équation différentielle partielle parabolique (3.34) sous la forme abstraite de (3.2) sur  $L^p(\Omega)$  pour  $m = 1$  avec :

$$\alpha = t_2 = 1, t_0 = s_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_1 = \frac{2}{3}$$

$$u(t) = u(., t)$$

$$f(t, u(t)) = \frac{e^{-t}}{2+|u(.,t)|}$$

$$g_1(t, u(t)) = \frac{e^{-(t-\frac{1}{3})} |u(x,t)|}{4(1+|u(x,t)|)}$$

$$u_0 = \phi(.)$$

Alors on a

$$\|f(t, u)\|_{L^p} = \left\| \frac{e^{-t}}{2+|u(.,t)|} \right\|_{L^p} \leq \frac{|\Omega|}{2} e^{-t} \quad (3.35)$$

Donc  $f(t, u)$  satisfait **(H1)** avec

$$\phi(t) = \frac{|\Omega|}{2} e^{-t}$$

D'autre part,

$$\|g_1(t, u) - g_1(t, v)\|_{L^p} \leq \frac{1}{4} \left\| \frac{|u(x,t)|}{1+|u(x,t)|} - \frac{|v(x,t)|}{1+|v(x,t)|} \right\|_{L^p} \leq \frac{1}{4} \|u - v\|_{L^p} \quad (3.36)$$

et donc **(H2)** est satisfaite avec

$$k = k_{g_1} = \frac{1}{4}$$

et l'hypothèse **(H3)** est satisfaite avec

$$L = \frac{1}{12}$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème (3.5) sont satisfaites, par conséquent l'équation différentielle partielle parabolique (3.34) possède une solution intégrale.

# Conclusion

*Au terme de ce mémoire, nous avons essayé de souligner l'importance des équations différentielles et aux dérivées partielles impulsives dans la modélisation des phénomènes et processus du monde qui nous entoure.*

*Les équations aux dérivées partielles considérées sont paraboliques intervenant dans la modélisation de processus de diffusion sous l'effet d'impulsions.*

*Nous avons étudié en particulier l'existence de solutions intégrale et classique par l'application de la théorie de semi groupe et la théorie de point fixe dans les espace de Banach, pour les deux types d'équations à impulsions : instantanées et non instantanées. Par ailleurs, nous nous sommes intéressées dans le cas d'impulsion non instantanées à la théorie de mesure de non compacité pour présenter le théorème de point fixe de Sadovskii.*

*L'étude de l'existence de solution faible d'équations aux dérivées partielles paraboliques soumises à des impulsions non instantanées est à envisager par formulation du problème sous forme d'une équation d'évolution impulsive.*

*Enfin, vu sa nouveauté ce domaine est très riche en questions ouvertes, par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail.*

*En effet, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement une classe d'équations impulsives tel que nous prévoyons l'étude de la stabilité des solutions d'une telle classe d'équations.*

# Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, New York, (2001).
- [2] N. U. Ahmed; *Measure solutions for impulsive evolution equations with measurable vector fields*, *J. Math. Anal. Appl.* 319 (2006) 74-93.
- [3] N.U. Ahmed, K.L. Teo and S.H. Hou, *Nonlinear impulsive systems on infinite dimensional spaces*, *Nonlinear Anal.* 54 (2003), 907925.
- [4] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, Basel, (1992).
- [5] M.U. Akhmet, *On the general problem of stability for impulsive differential equations*, *J. Math. Anal. Appl.*, 288, (2003), 182-196.
- [6] A. S. Al-Qahtani, *Two-point boundary value problems for first order impulsive differential equations*, King Fahd University of Petroleum Minerals, Dhahran, Saudi Arabia, *Master of Science in Mathematics*, 2004.
- [7] D.D. Bainov and A. Dishliev, *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Comp. Rend. Bulg. Sci.*, 42, (1989), 29-32.
- [8] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Impulsive differential equations : periodic solutions and applications*, Longman Scientific and Technical, Essex, England, (1993).
- [9] D.D. Bainov and P.S. Simenov, *Systems with Impulse Effect Stability Theory and Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester, (1989).
- [10] J. Banas and K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, (1980).
- [11] J. Banasiak and L. Arlotti, *Perturbations of Positive Semigroups with Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2006.
- [12] M. Benchohra, J. Henderson and S. Ntouyas, *Impulsive differential equations and inclusions*, *Contemporary Mathematics and Its Applications*, vol. 2, Hindawi, New York, USA, 2006.
- [13] P. Chen, Y. Li; *Mixed monotone iterative technique for a class of semilinear impulsive evolution equations in Banach spaces*, *Nonlinear Anal.* 74 (2011) 35783588.
- [14] P. Chen, Y. Li, H. Yang; *Perturbation method for nonlocal impulsive evolution equations*, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 8 (2013) 2230.
- [15] P. Chen, Zhang, X., Li, Y. (2016). *Existence of mild solutions to partial differential equations with non-instantaneous impulses*. *Electron. J. Differ. Equ.*, 241(2016), 1-11.

- [16] M. Choisy, J.F. Guegan and P. Rohani, *Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination : teasing apart the embedded resonance effects*, *Phys. D.*, 223, (2006), 26-35.
- [17] V. Colao, L. Mugliam, H. Xu ; *Existence of solutions for a second- order differential equation with non-instantaneous impulses and delay*, *Annali di Matematica*, 195 (2016) 697-716.
- [18] M. G. Crandall, A. Pazy and L. Tartar. *Remarks on generators of analytic semi-groups*. *Israel J. Math.* 32 (1979), 363-374.
- [19] N.Daoudi-Merzagui, A.Boucherif, *Variational Approach to Impulsive Differential Equations with Singular Nonlinearities*. *J. Appl. Math.* (2013)
- [20] N.Daoudi-Merzagui, A.Boucherif, *Nonconstant periodic solutions created by impulses for singular differential equations*, *Boundary Value Problems* (2015) doi 10.1186/s13661-015-0458-6
- [21] N. Daoudi-Merzagui, F.Dib, *Positive periodic solutions to impulsive delay differential equations*, *Turk J Math* (2017) 41 : 969 982 doi :10.3906/mat- 1601-64.
- [22] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, *Rend. Sem. Mat. Uni. Padova* 24 (1955), 84-92.
- [23] F. Dib and N. Daoudi-Merzagui, *Multiple periodic solutions for second order impulsive delay differential equations*, *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations Vol. 9, No. 3,(2019) 298-312.*
- [24] A. Dishliev and D.D. Bainov, *Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure*, *International Journal of Theoretical Physics*, 29, (1990), 655-676.
- [25] K.Dishlieva, *Impulsive Differential Equations and Applications*, *J Applied Computat Mathemat* 2012, 1 :6 DOI : 10.4172/2168-9679.1000e117.
- [26] A. D'onofrio, *On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission*, *Appl. Math. Lett.*, 18,(2005), 729-732.
- [27] Erbe, L. H., Liu and Xinzhi, *Existence results for boundary value problems of second order impulsive differential equations*, *J. Math. Anal. Appl.*, 149, (1990), 56-69.
- [28] Z. Fan, G. Li ; *Existence results for semilinear differential equations with nonlocal and impulsive conditions*, *J. Funct. Anal.* 258 (2010) 1709-1727.
- [29] M. Frigon and D. O'Regan, *Impulsive differential equations with variable times*, *Nonl. Anal. Tma.*, 26, (1996), 1913-1922.
- [30] X. Fu, K. Mei, *Approximate controllability of Semilinear partial functional differential systems*, *J. Dyn. Control Syst.*, 15(2009), 425-443.
- [31] G. R. Gautam, J. Dabas ; *Mild solutions for a class of neutral fractional functional differential equations with not instantaneous impulses*, *Appl. Math. Comput.* 259 (2015) 480-489.
- [32] R.K. George, A.K. Nandakumaran and A. Arapostathis, *A note on controllability of impulsive systems*, *J. Math. Anal. Appl.*, 241, (2000) , 276- 283.
- [33] A. Girard, *Analyse algorithmique des syst'emes hybrides*, Phd. Institut National Polytechnique de Grenoble. 2004.

- [34] D. Guo ; *Existence of positive solutions for  $n$  th-order nonlinear impulsive singular integro-differential equations in Banach spaces*, *Nonlinear Anal.* 68 (2008) 2727-2740.
- [35] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, *Lecture Notes in Mathematics 840*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [36] E. Hernandez, D. O'Regan ; *On a new class of abstract impulsive differential equations*, *Proc.Amer. Math. Soc.* 141 (2013) 1641-1649.
- [37] G. Jiang, Q. Lu, *Impulsive state feedback control of a predator-prey model*, *J. Comput. Appl. Math.*, 200, (2007), 193-207.
- [38] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, *Fund. Math.* 15 (1930), 209-301.
- [39] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov ; *Theory of Impulsive Differential Equations*, *World Scientific*, Singapore, 1989.
- [40] Y. Li, Z. Liu ; *Monotone iterative technique for addressing impulsive integro-differential equations in Banach spaces*, *Nonlinear Anal.* 66 (2007) 83-92.
- [41] Y. Li, *Positive solutions of abstract semilinear evolution equations and their applications*, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)* 39 (1996), no. 5, 666-672.
- [42] V.D. Mil'man and A.D. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses*, *Sib. Math. J.*, 1, (1960), 233-237.
- [43] R. Miron, *Impulsive differential equations with applications to infectious diseases Thesis submitted to the Faculty of Graduate and Postdoctoral Studies in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics 1 Department of Mathematics and Statistics Faculty of Science University of Ottawa.*
- [44] S. Nenov, *Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics*, *Nonl. Anal.*, 36, (1999), 881- 890.
- [45] J. C. Panetta, *A mathematical model of periodically pulsed chemotherapy : tumor recurrence and metastasis in a competition environment*, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol.58, n 3 (1996) 425-447.
- [46] A. Pazy ; *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-verlag, Berlin, 1983.
- [47] M. Pierri, D. O'Regan, V. Rolnik ; *Existence of solutions for semi-linear abstract differential equations with not instantaneous impulses*, *Appl. Math. Comput.* 219 (2013) 6743-6749.
- [48] B. M. Randelovic, L. V. Stefanovic, and B. M. Dankovic, *Numerical solution of impulsive differential equations*, *Ser. Math. Inform.* 15, (2000), 101-111.
- [49] Y.V. Rogovchenko, *Impulsive evolution systems : main results and new trends*, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, 1, (1997), 57-88.
- [50] B. N Sadovskii, *On a Öxed point principle*, *Functional Analysis and its Applications* l(2) 151-l 53 (1967).
- [51] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, vol.14 of *World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A : Monographs and Treatises*, World Scientific, Singapore, (1995).
- [E.S] E. Smith ,Breasted J.H.*Le papyrus chirurgical*. Chicago : Univer- sité de Chicago. (1930).

- 
- [52] I. I. Vrabie, *C0-semigroups and Applications*, North-Holland Mathematics Studies 191, North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [53] X. Yu, J. Wang; *Periodic boundary value problems for nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces*, *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 22 (2015) 980-989.