
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID DE TLEMCEM
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique.

Filière : Mathématiques

Spécialité : Probabilité Approfondie et Statistiques.

Présenté Par :

Mr. BAGHLI Yassine

**Distribution asymptotique de la fonction log-
vraisemblance pour certains processus stochastiques**

Soutenu le 22 / 06 / 2024 devant le jury composé de :

Mr. Allam Abdelaziz	MCA	Université de Tlemcen	Président
Mme. Benyahia Wahiba	MCB	Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme. Boukhiar Souad	MCB	Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme. Kara Terki Nesrine	MCA	École Supérieure de Management Tlemcen	Encadrante

Année Universitaire 2023-2024

Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer ma gratitude envers Allah, le tout miséricordieux, pour m'avoir accordé la persévérance, la patience et la détermination nécessaires tout au long de mes années d'études.

Je souhaite adresser mes remerciements sincères à toutes les personnes qui m'ont accompagné et soutenu durant la réalisation de ce travail. Leur aide a été inestimable et je tiens à leur exprimer ma profonde reconnaissance.

Un remerciement spécial à mon encadrante, Mme Nesrine KARA TERKI. Ses conseils éclairés et son soutien constant ont été essentiels pour la réussite de ce travail.

Je suis également reconnaissant envers le président et les membres du jury, M. ALLAM Abdelaziz, Mme. BENYAHIA Wahiba et Mme. BOUKHIAR Souad, pour leur disponibilité et leur engagement à évaluer mon mémoire.

Un grand merci à tous les enseignants du département de mathématiques pour leur dévouement et leur contribution à mon éducation tout au long de mon parcours universitaire.

En conclusion, je tiens à remercier du fond du cœur mes parents et l'ensemble de ma famille pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants durant cette aventure académique.

Dédicaces

En tout premier lieu, je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu, le Tout-Puissant, pour m'avoir donné la force et la détermination nécessaires pour réaliser ce travail.

Je dédie ce modeste accomplissement à :

Mes chers parents, dont l'encouragement et le soutien indéfectibles ont été ma source d'inspiration constante. Leurs sacrifices ont été nombreux et je prie Dieu de les récompenser par la santé, le bonheur et la prospérité.

À l'ensemble de ma famille, qui se reconnaîtra dans ces mots, pour leur affection et leur soutien continu tout au long de mon parcours.

À mes amis, ainsi qu'à toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de rencontrer et de côtoyer durant mes années d'études, pour les moments partagés et les souvenirs créés.

BAGHLI Yassine

Abréviations

TCL	<i>Théorème central limite</i>
LGN	<i>Loi des grands nombres</i>
CQFD	<i>Ce qu'il fallait démontrer</i>
c-à-d	<i>C'est-à-dire</i>
v.a	<i>Variable aléatoire</i>
V.A	<i>Vecteur aléatoire</i>
LAN	<i>Normalité Asymptotique Locale</i>

Table des matières

- Introduction Générale** **7**

- 1 Rappels Et Définitions Élémentaires** **9**
 - 1.1 Notations 9
 - 1.2 La Continuité Absolue 9
 - 1.3 La Singularité Mutuelle 10
 - 1.4 Théorème de Radon-Nikodym 10
 - 1.5 Contiguïté 10
 - 1.6 Différentiation en Moyenne Quadratique (MQ) 10
 - 1.7 Normalité asymptotique locale 11
 - 1.7.1 Exemples 11
 - a) Condition LAN pour des v.a i.i.d 11
 - b) Condition LAN pour des va indépendantes non identique-
ment distribuées 12
 - c) Condition LAN pour les processus de Markov 14
 - 1.8 Loi Faible des grands nombres pour des v.a. dépendantes 15
 - 1.9 Théorème central limite pour les martingales (théorème de Brown) [3] . . . 15

- 2 Distribution Asymptotique de la fonction Log-vraisemblance pour les Processus stochastiques** **17**
 - 2.1 Notations et Définitions 17
 - 2.2 Quelques Commentaires sur les Hypothèses 19
 - 2.3 Énoncé des résultats principaux 22
 - 2.4 Quelques résultats auxiliaires 24
 - 2.5 Preuves des résultats Principaux 33

- 3 Exemples d'application** **37**
 - 3.1 Exemple 1 37

3.1.1	Vérification des hypothèses.	37
3.1.2	Simulation numérique.	43
3.2	Exemple 2 :	45
3.2.1	Vérifications des hypothèses.	45
3.2.2	Simulation numérique	47
3.3	Exemple 3 :	49
	Conclusion Générale	55
	Bibliographie	56

Introduction Générale

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la distribution asymptotique de la fonction log-vraisemblance dans un cadre général de processus stochastiques.

Quand cette dernière est gaussienne on obtient la condition LAN (Normalité asymptotique locale) introduite par LE CAM [5], qui joue un rôle fondamental dans la théorie de l'inférence statistique, elle entraîne des bornes optimales pour les risques en statistique paramétrique et elle engendre des conséquences directes sur le comportement asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance et de Bayes, leurs consistance et leurs normalité asymptotique en particulier.

De même, ces problèmes ont été résolus pour des variables aléatoires supposées indépendantes mais pas nécessairement identiquement distribuées, comme mentionné dans les travaux de Philippou et Roussas (1973)[6].

Pour le cas particulier où ces variables aléatoires proviennent d'un processus Markovien stationnaire satisfaisant certaines conditions de régularité, les problèmes en question ont été abordés dans la monographie de Roussas (1972)[7].

Dans ces deux cas, le concept de contiguïté joue un rôle clé dans les discussions.

Dans ce travail, nous développons les résultats de l'article de Roussas (1979)[8] qui sont des extensions naturelles des résultats prouvés dans les cas particuliers mentionnés ci-dessus.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres

-Le premier chapitre est consacré aux notations et à quelques définitions notamment celle de la contiguïté ainsi qu'à certains théorèmes qui seront utilisés dans les chapitres qui suivent particulièrement le théorème central limite de Brown pour les martingales.

-Dans le deuxième chapitre, considérons, pour un entier $n \geq 0$, les variables aléatoires X_0, X_1, \dots, X_n représentant les $n + 1$ premières observations d'un processus stochastique défini sur l'espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$. La loi de probabilité conjointe de ces variables aléatoires est supposée avoir une forme fonctionnelle connue, dépendante d'un

paramètre θ de dimension k . L'ensemble des valeurs possibles de θ , ou espace des paramètres Θ , est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^k , avec $k \geq 1$. Sous ces conditions et quelques régularités supplémentaires appropriées, Roussas (1979)[8] a pu écrire la fonction de vraisemblance des variables aléatoires considérées et a déterminé la distribution asymptotique de la fonction log-vraisemblance, ainsi que d'autres variables aléatoires associées à la fonction de vraisemblance.

- Dans le troisième chapitre, nous illustrons les résultats théoriques du deuxième chapitre par des exemples et des simulations numériques.

Chapitre 1

Rappels Et Définitions Élémentaires

1.1 Notations

Tout au long de ce travail nous adoptons les notations suivantes :

Pour $n \geq 0$, X_0, X_1, \dots, X_n est une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$ avec \mathbb{P}_θ une mesure de probabilité qui dépend d'un paramètre $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$.

Nous considérons la famille des mesures de probabilité $(\mathbb{P}_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ comme la loi de probabilité de (X_1, \dots, X_n) : $\mathbb{P}_{n,\theta} = \mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}$. Nous notons par $d\mathbb{P}_{n,\theta^*}/d\mathbb{P}_{n,\theta}$ la dérivée de la partie absolument continue de \mathbb{P}_{n,θ^*} par rapport à $\mathbb{P}_{n,\theta}$, d'où l'intérêt de rappeler le théorème de Radon-Nikodym.

1.2 La Continuité Absolue

Soient ν et μ deux mesures positives σ -finies définies sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Définition 1.2.1. μ est dite absolument continue par rapport à ν et on note $\mu \ll \nu$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

On a l'équivalence suivante :

$\mu \ll \nu$ si et seulement s'il existe une fonction h mesurable positive telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \int_A h d\nu = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_A h d\nu.$$

Cette fonction h est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ν .

1.3 La Singularité Mutuelle

Soient ν et μ deux mesures positives σ -finies définies sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Définition 1.3.1. μ et ν sont mutuellement singulières, notées $\mu \perp \nu$, si et seulement si il existe un ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(A) = 0 \quad \text{et} \quad \nu(A^c) = 0.$$

1.4 Théorème de Radon-Nikodym

Soient ν et μ deux mesures positives σ -finies définies sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Il existe un couple unique de mesures positives σ -finies (μ_1, μ_2) telles que :

- * $\mu = \mu_1 + \mu_2$,
- * μ_1 est absolument continue par rapport à ν ($\mu_1 \ll \nu$),
- * μ_2 et ν sont mutuellement singulières ($\mu_2 \perp \nu$).

Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Lebesgue de μ .

1.5 Contiguïté

Définition 1.5.1. Soit $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ deux suites de mesures de probabilité définies sur une suite d'espaces mesurables $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$. On dit que la suite $\{Q_n\}$ est *contiguë* à la suite $\{P_n\}$, notée $Q_n \triangleleft P_n$, si pour toute suite d'événements $\{A_n\}$ telle que $P_n(A_n) \rightarrow 0$, on a $Q_n(A_n) \rightarrow 0$. Autrement dit,

$$P_n(A_n) \rightarrow 0 \implies Q_n(A_n) \rightarrow 0.$$

1.6 Différentiation en Moyenne Quadratique (MQ)

Définition 1.6.1 (Différentiation en moyenne quadratique). Soit X une variable aléatoire et $\theta \in \Theta$. La fonction $g(\theta)$ est dite différentiable en moyenne quadratique (MQ) s'il existe

une fonction $\dot{g}(\theta)$ telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\frac{g(\theta + h) - g(\theta)}{h} - \dot{g}(\theta) \right)^2 \right] = 0 \quad (1.1)$$

1.7 Normalité asymptotique locale

On dit qu'une famille de mesures de probabilité paramétriques $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ satisfait la condition LAN (normalité asymptotique locale) au point θ s'il existe une suite de matrices $(n \times n)$ définies positives $(\varphi_n = \varphi_n(\theta))$ telles que $\|\varphi_n(\theta)\| \rightarrow 0$ et une suite de variables aléatoires $(S_n(\theta))$, telles que pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ le log du rapport de vraisemblance $\ln(dP_{n,\theta_n}/dP_{n,\theta})$ satisfait sous $P_{n,\theta}$ la représentation suivante :

$$\ln(Z_{n,\theta}(h)) := \ln(dP_{n,\theta_n}/dP_{n,\theta}) = h^t S_n(\theta) - \frac{1}{2} \|h\|^2 + o_{P_{n,\theta}}(1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

avec

$$S_n(\theta) \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, I)$$

1.7.1 Exemples

Nous citons dans cette partie sans détailler, des théorèmes permettant à des familles de lois de v.a indépendantes non identiquement distribuées ainsi qu'à des processus markoviens stationnaires de satisfaire la condition LAN. Les résultats de cette section sont tirés du livre D' Ibragimov et Hasminski [5] ainsi que des articles de Roussas (1972)[7], A.N Philippou et G.G Roussas (1973)[6].

a) Condition LAN pour des v.a i.i.d

Le Théorème suivant est dû à Le Cam, il donne la condition LAN pour la famille des mesures de probabilité $(\mathbb{P}_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$.

Théorème 1.7.1 (LeCam). [5] *Supposons que les va $X_1 \dots X_n$ sont iid à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \nu)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ de densité $f(x, \theta) = \frac{d\mathbb{P}_{1,\theta}}{d\nu}(x, \theta)$ telle que :*

1. $\forall x \in \mathcal{X}$, $\theta \rightarrow f(x, \theta)$ est continue ν ps.
2. $f^{1/2}(x, \theta)$ est différentiable dans $L^2(\nu)$ et $\frac{df^{1/2}}{d\theta} \in L^2(\nu)$
3. $\frac{df^{1/2}}{d\theta}(x, \theta)$ est continue dans $L^2(\nu)$

Soit $\varphi_n(\theta) = \varphi_n := 1/\sqrt{n}$ Alors, le rapport de vraisemblance devient :

$$Z_{n,\theta}(h) = \prod_{j=1}^n f(X_j, \theta + hn^{-1/2})/f(X_j, \theta).$$

Supposons de plus que pour tout $\theta \in \Theta$, $\det(I(\theta)) \neq 0$, alors :

$$Z_{n,\theta}(h) = \exp(n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial \ln f(X_j, \theta)}{\partial \theta}, h \right\rangle - 1/2 \langle I(\theta)u, u \rangle + \psi_n(h, \theta))$$

avec $\psi_n(h, \theta)$ est telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et $h \in R^k$

$$\mathbb{P}_\theta(|\psi_n(h, \theta)| > \varepsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus sous \mathbb{P}_θ

$$n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial \ln f(X_j, \theta)}{\partial \theta}, h \right\rangle \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, I(\theta)).$$

avec $I(\theta)$ la matrice d'information de Fisher donnée par :

$$I(\theta) = \int_{\{x/f(x,\theta) \neq 0\}} \frac{df}{d\theta}(x, \theta) \left(\frac{df}{d\theta}(x, \theta) \right)^t f^{-1}(x, \theta) \nu(dx)$$

Remarque : Nous pouvons citer un autre résultat dû à Hajek [5], qui affirme qu'on retrouve les résultats du théorème précédent en remplaçant les hypothèses 1 2 et 3 par :

- a/ $\forall x \in \mathcal{X}$, la fonction $f(x, \theta)$ est absolument continue en θ au voisinage du point θ .
- b/ Le dérivé $\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$ existe pour tout θ au voisinage de t , ν -presque partout $\forall x \in \mathcal{X}$
- c/ La fonction $I(\theta)$ est continue et définie positive pour θ .

b) Condition LAN pour des va indépendantes non identiquement distribuées

Soit X_1, \dots, X_n, \dots des observations indépendantes. supposons que les densités f_j (par rapport à la mesure ν_j) des observations X_j dépendent de j .

Le rapport de vraisemblance dans ce cas devient :

$$\frac{d\mathbb{P}_{n,\theta_2}}{d\mathbb{P}_{n,\theta_1}} = \prod_{j=1}^n \frac{f_j(X_j, \theta_2)}{f_j(X_j, \theta_1)} = \prod_{j=1}^n \phi_j^2(\theta_1, \theta_2)$$

désignons par $I_j(\theta)$, la matrice de l'information de Fisher associée a la j ème expérience, supposons que

$$\Psi^2(n, \theta) := \sum_{j=1}^n I_j(\theta)$$

est définie positive alors il existe une matrice symétrique définie positive,

$$\Psi^{-1}(n, \theta) := \left(\sum_{j=1}^n I_j(\theta) \right)^{-1/2}$$

Théorème 1.7.2. *Supposons que chaque f_j vérifie les conditions 1,2 et 3 du théorème de LeCam [5]. Si $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, la matrice $\Psi^2(n; \theta)$ est définie positive et les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) Pour tout $k > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|u| < k} \sum_{j=1}^n \int \left(\frac{\partial f_j^{1/2}(x, t + \Psi^{-1}(n, t)u)}{\partial t} - \frac{\partial f_j^{1/2}(x, t)}{\partial t}, \Psi^{-1}(n, t)u \right)^2 v_j(dx) = 0;$$

(2) Condition de Lindeberg : pour tout $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathbb{R}^k$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n E_\theta \left\{ \left(\Psi^{-1}(n, t)u, \frac{\partial \ln f_j(X_j, t)}{\partial t} \right)^2 \chi \left(\left| \left(\Psi^{-1}(n, t)u, \frac{\partial \ln f_j(X_j, t)}{\partial t} \right) \right| > \varepsilon \right) \right\} = 0,$$

alors la famille de mesures

$$\mathbb{P}_{n, \theta}(A) = \int_A \dots \int \prod_{j=1}^n f_j(x_j, \theta) v_j(dx_j)$$

satisfait la condition LAN avec

$$\varphi(n) = \left(\sum_{j=1}^n I_j(\theta) \right)^{-1/2} = \Psi^{-1}(n, \theta),$$

$$S_n(\theta) = \varphi(n) \sum_{j=1}^n \frac{f'_j(X_j, \theta)}{f_j(X_j, \theta)}.$$

Remarque :

Un autre théorème dû a Roussas(1973)[6] stipule qu'on retrouve les résultats du théorème précédent sous les hypothèses suivantes :

Hypothèses.

(H1) L'ensemble $\{x \in R; f_j(x; \theta) > 0\}$ ne dépendant pas de $\theta \in \Theta$

(H2)(i) Pour tout $\theta \in \Theta$, les fonctions aléatoires $\phi_j(\theta, \theta^*), j \geq 1$, sont différentiables en moyenne quadratique par rapport à θ^* au point (θ, θ) , sous \mathbb{P}_θ .

(ii) $\dot{\phi}_j(\theta)$ est $X_j^{-1}(\mathcal{B}_j) \times \mathcal{C}$ mesurable, où \mathcal{C} est la tribu de Borel des sous-ensembles de Θ .

(H3) Pour tout $\theta \in \Theta$ et pour chaque $h \in R^k$,

$$\mathbb{E} | h^t \dot{\phi}_j(\theta) |^3 \leq M (= M(h, \theta) < \infty), \quad j \geq 1$$

(H4) Soient $\Gamma_j(\theta), j = 1, \dots, n$ la matrice de covariance tel que $\Gamma_j(\theta) = 4\mathbb{E}_\theta[\dot{\phi}_j(\theta)\dot{\phi}_j^t(\theta)]$ et $\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(\theta)$ Alors pour chaque $\theta \in \Theta, \bar{\Gamma}_n(\theta) \rightarrow \bar{\Gamma}(\theta)$.

c) Condition LAN pour les processus de Markov

Pour un processus de Markov X , strictement stationnaire et métriquement transitive(ergodique), Roussas (1972) a montré la validité de la condition LAN sous les conditions suivantes :

(A1) Pour chaque $\theta \in \Theta$, le processus de Markov $\{X_n\}, n \geq 0$, est (strictement) stationnaire et transitivement métrique (ergodique).

(A2) Les mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_{n,\theta}; \theta \in \Theta\}$ sont mutuellement absolument continues pour tous $n \geq 0$.

(A3) i) Pour chaque $\theta \in \Theta$, la fonction aléatoire $\phi_1(\theta, \theta^*)$ est différentiable en (M.Q). par rapport à θ^* au point (θ, θ) sous \mathbb{P}_θ et $\dot{\phi}_1(\theta)$ la dérivée en (M.Q). de $\phi_1(\theta, \theta^*)$ par rapport à θ^* au point (θ, θ) . Alors

ii) $\dot{\phi}_j(\theta)$ est $\mathcal{A}_j \times \mathcal{C}$ -mesurable, où \mathcal{C} est la tribu des sous-ensembles de Θ .

iii) Soit $\Gamma(\theta)$ la fonction de covariance définie par

$$\Gamma(\theta) = 4\mathbb{E}_\theta[\dot{\phi}_1(\theta)\dot{\phi}_1^t(\theta)].$$

Alors $\Gamma(\theta)$ est définie positive pour tout $\theta \in \Theta$.

(A4) i) Pour chaque $\theta \in \Theta, q(X_0, X_1; \theta, \theta^*) \rightarrow 1$ en probabilité $\mathbb{P}_{1,\theta}$ lorsque $\theta^* \rightarrow \theta$.

ii) Pour chaque θ fixé, $q(X_0; \theta, \theta^*)$ est $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{C}$ -mesurable et $q(X_0, X_1; \theta, \theta^*)$ est $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{C}$ -mesurable.

avec ϕ désigne la transition.

1.8 Loi Faible des grands nombres pour des v.a. dépendantes

La Loi Faible des Grands Nombres (LGN) faible peut s'appliquer aux variables aléatoires non indépendantes sous certaines conditions. La stationnarité ainsi que l'ergodicité des suites garantit la convergence de la moyenne empirique vers l'espérance.

Stationnarité et Ergodicité

1. **Stationnarité stricte** : Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit strictement stationnaire si, pour toute suite d'instants (t_1, \dots, t_n) et pour tout h , la distribution conjointe de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est identique à celle de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$.

2. **Stationnarité faible** :

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit faiblement stationnaire s'il vérifie les propriétés suivantes :

i) $\forall t \in \mathbb{Z} : E(X_t^2) < \infty$.

ii) $\forall t \in \mathbb{Z} : E(X_t) = \mu$. indépendant de t .

iii) $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2 : \text{cov}(X_{t+h}, X_t) = E[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)] = \gamma(h)$.

Les deux premières propriétés signifient que la moyenne et la variance du processus sont indépendantes de l'instant auxquelles elles mesurées, la troisième propriété signifie que la covariance ne dépend que du seul retard h .

3. **Ergodicité**(voir théorème de Birkhoff (p34)[9]) : Une suite de variables aléatoires stationnaires $\{X_n\}$ est ergodique si les moyennes temporelles convergent vers les moyennes d'ensemble, c'est-à-dire si pour toute fonction mesurable f telle que $E[|f(X_1)|] < \infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} E[f(X_1)]$$

1.9 Théorème central limite pour les martingales (théorème de Brown) [3]

Soit $\{S_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ une martingale sur l'espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $S_0 = 0$, et

$X_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 1$. \mathcal{F}_0 n'a pas besoin d'être le trivial σ -algèbre $\{\emptyset, \Omega\}$. Soit

$$\varphi_j(t) = \mathbb{E}(e^{itX_j} \mid \mathcal{F}_{j-1}) = \mathbb{E}_{j-1}(e^{itX_j}), \quad j = 1, \dots, n$$

où \mathbb{E}_{j-1} désigne $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{F}_{j-1})$, et soit

$$\sigma_j^2 = \mathbb{E}_{n-1}(X_j^2),$$

$$V_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2,$$

$$s_n^2 = \mathbb{E}V_n^2 = \mathbb{E}S_n^2,$$

$$f_n(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(t/s_n)$$

et

$$b_n = s_n^{-2} \max_{j \leq n} \sigma_j^2$$

Tout au long, nous considérons des martingales pour lesquelles

$$V_n^2 s_n^{-2} \rightarrow_p 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Pour cette classe de martingales, la condition de Lindeberg est dite satisfaite si

$$s_n^{-2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{j-1} X_j^2 I(|X_j| \geq \varepsilon s_n) \rightarrow_p 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $I(A)$ dénote la fonction indicatrice de l'ensemble A .

Théorème 1. Supposons que (1) est vérifiée. Alors

$$f_n(t) \rightarrow e^{-t^2/2} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \quad \text{pour tout } t, \quad (3)$$

$$b_n \rightarrow_p 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (4)$$

et si seulement si la condition de Lindeberg (2) est vérifiée.

Théorème 2. Si (1) et la condition de Lindeberg sont vérifiées, alors en plus de (3) et (4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{s_n} \leq x \right) = \Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

pour tout x .

Chapitre 2

Distribution Asymptotique de la fonction Log-vraisemblance pour les Processus stochastiques

Nous développons dans ce chapitre l'article de Roussas (1979) [8]. Ce chapitre est structuré en quatre sections. Les notations nécessaires et les hypothèses utilisées sont introduites dans la section 2.1. Les commentaires sur les hypothèses ainsi que des résultats auxiliaires sont donnés dans la section 2.2. Les principaux résultats du document, résumés dans les Théorèmes 2.3.1 à 2.3.6, sont présentés dans la section 2.3. On verra aussi dans cette même section une série de lemmes nécessaires aux preuves des résultats principaux. Enfin, dans la section 2.5, on aura les preuves des six Théorèmes cités précédemment.

2.1 Notations et Définitions

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$, une suite de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$, avec $\theta \in \Theta$, où Θ est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^k , $k \geq 1$. Soit $\mathcal{A}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, la tribu engendrée par les variables X_0, X_1, \dots, X_n , et notons par $\mathbb{P}_{n,\theta}$ la restriction de \mathbb{P}_θ à \mathcal{A}_n . Supposons que pour chaque $n \geq 0$, les mesures de probabilité de la famille $\{\mathbb{P}_{n,\theta}; \theta \in \Theta\}$ sont mutuellement absolument continues. Ensuite, pour $\theta, \theta^* \in \Theta$, la fonction

$$q_n(\theta; \theta^*) = q_n(\mathbf{X}_n; \theta, \theta^*) = \frac{d\mathbb{P}_{n,\theta^*}}{d\mathbb{P}_{n,\theta}}, \quad n \geq 0 \quad (2.1)$$

représente la dérivée de Radon-Nikodym de $d\mathbb{P}_{n,\theta^*}$ par rapport à $d\mathbb{P}_{n,\theta}$, où $\mathbf{X}_n = (X_0, X_1, \dots, X_n)$. Posons

$$\begin{aligned}\varphi_n^2(\theta; \theta^*) &= \varphi_n^2(\mathbf{X}_n; \theta, \theta^*) = \frac{q_n(\theta; \theta^*)}{q_{n-1}(\theta; \theta^*)} \\ &:= q_n(X_n | \mathbf{X}_{n-1}; \theta, \theta^*), \quad n \geq 1\end{aligned}\tag{2.2}$$

La fonction de vraisemblance, basée sur \mathbf{X}_n , est donnée par

$$\begin{aligned}L_n(\theta; \theta^*) &= L_n(\mathbf{X}_n; \theta, \theta^*) = q_n(\theta; \theta^*) \\ &= q_0(\theta; \theta^*) \prod_{j=1}^n \varphi_j^2(\theta; \theta^*)\end{aligned}\tag{2.3}$$

de telle sorte que

$$\Lambda_n(\theta; \theta^*) = \log L_n(\theta; \theta^*) = \log q_0(\theta; \theta^*) + 2 \sum_{j=1}^n \log \varphi_j(\theta; \theta^*).\tag{2.4}$$

On supposera dans la suite que, pour chaque $\theta \in \Theta$, les fonctions aléatoires $\varphi_j(\theta; \cdot)$, $j \geq 1$, sont différentiables en moyenne quadratique (M.Q.) sous \mathbb{P}_θ . Notons par $\dot{\varphi}_j(\theta)$, $j \geq 1$, les dérivées en (M.Q.) de $\varphi_j(\theta; \cdot)$, $j \geq 1$ au point θ . Ensuite, posons

$$\Gamma_j(\theta) = 4\mathbb{E}_\theta [\dot{\varphi}_j(\theta)\dot{\varphi}_j^t(\theta)], \quad j \geq 1, \quad \bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(\theta)\tag{2.5}$$

$$\Delta_n(\theta) = 2n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j(\theta), \quad n \geq 1\tag{2.6}$$

Hypothèses

(A1) Pour chaque $n \geq 0$, les mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_{n,\theta}; \theta \in \Theta\}$ sont mutuellement absolument continues.

(A2) (i) Pour chaque $\theta \in \Theta$ et $j \geq 1$, les fonctions aléatoires $\varphi_j(\theta; \cdot)$ sont différentiables en (M.Q) sous $[\mathbb{P}_\theta]$ et uniformément en h borné de \mathbb{R}^k .

Autrement dit, il existe des vecteurs aléatoires de dimension k notés $\dot{\varphi}_j(\theta)$ qui représentent les dérivées en (M.Q) de $\varphi_j(\theta; \theta^*)$ par rapport à θ^* en θ , tels que

$$\frac{1}{\lambda} |[\varphi_j(\theta; \theta + \lambda h) - 1] - \lambda h^t \dot{\varphi}_j(\theta)| \rightarrow 0\tag{2.7}$$

en (M.Q) sous \mathbb{P}_θ , lorsque $\lambda \rightarrow 0$, uniformément en h borné de \mathbb{R}^k .

(ii) Pour $j \geq 1$, $\dot{\varphi}_j(\theta)$ est $\mathcal{A}_j \times \mathcal{C}$ -mesurable, où \mathcal{C} est la tribu borélienne de Θ .

(A3) (i) Pour chaque $\theta \in \Theta$ et chaque $h \in \mathbb{R}^k$, $[h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2, j \geq 1$, sont uniformément intégrables par rapport à \mathbb{P}_θ . Autrement dit, uniformément en $j \geq 1$,

$$\int_{\{[h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a\}} [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 d\mathbb{P}_\theta \rightarrow 0, \text{ lorsque } a \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

(ii) Pour chaque $\theta \in \Theta$ on a quand $n \rightarrow +\infty$

$$\bar{\Gamma}_n(\theta) \rightarrow \bar{\Gamma}(\theta)$$

(pour n'importe quelle norme standard de \mathbb{R}^k), où $\bar{\Gamma}_n(\theta)$ sont des matrices de covariance de taille $(k \times k)$ définies par (2.5) et $\bar{\Gamma}(\theta)$ est définie positive.

(iii) Pour tout $\theta \in \Theta$ et $h \in \mathbb{R}^k$, la suite

$$\left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2, \quad j \geq 1 \right\}$$

vérifie loi faible des grands nombres sous \mathbb{P}_θ .

(iv) Pour tout $\theta \in \Theta, h \in \mathbb{R}^k$ et quand $n \rightarrow +\infty$ on a ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\mathbb{E}_\theta \left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} - [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \right] \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0 \quad (2.9)$$

(A4) Pour chaque $\theta \in \Theta$, supposons que la fonction $q_0(\theta; \cdot)$ définie par (2.1) est $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{C}$ mesurable et continue en \mathbb{P}_θ probabilité .

2.2 Quelques Commentaires sur les Hypothèses

Tout d'abord, l'hypothèse (A3)(iii) signifie que, pour chaque $\theta \in \Theta$, chaque $h \in \mathbb{R}^k$ et sous \mathbb{P}_θ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 - \mathbb{E}_\theta [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \right\} \rightarrow 0$$

en probabilité . Ensuite, sur la base de l'hypothèse (A3)(ii) et de la relation (2.5), la relation (2.2) peut être reformulée de manière équivalente comme suit :

(A3) (iii') Pour chaque $\theta \in \Theta$, chaque $h \in \mathbb{R}^k$ et sous \mathbb{P}_θ

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \rightarrow \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité .} \quad (2.10)$$

Ensuite, sur la base des relations (2.9) et (2.2), l'hypothèse (A3) (iv) peut être reformulée de manière équivalente comme suit :

(A3) (iv') Pour chaque $\theta \in \Theta$ et chaque $h \in \mathbb{R}^k$, les variables aléatoires

$$\left\{ \mathbb{E}_\theta \left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} \right\}, \quad j \geq 1$$

satisfont la LGN (faible) lorsque la mesure de probabilité \mathbb{P}_θ est utilisée.

De plus, à partir des relations (2.9) et (2.10), une autre reformulation équivalente de l'hypothèse (A3)(iv) est la suivante :

(A3) (iv'') Pour chaque $\theta \in \Theta$ et chaque $h \in \mathbb{R}^k$,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} \rightarrow \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité .} \quad (2.11)$$

Dans la prochaine section, un résultat concernant la normalité asymptotique de la variable aléatoire $\Delta_n(\theta)$, définie par la relation (2.6), sera formulé. À cette fin, un certain TCL de martingale (Théorème 2 dans Brown (1971)[3]) sera approprié (voir aussi Scott (1973)). Ce théorème s'applique sans l'hypothèse que la suite de martingales sous-jacente est stationnaire et ergodique.

L'applicabilité du TCL de martingale donné par Brown est basée sur deux conditions (exprimées par les relations (1) et (2) dans Brown (1971)[3]), la deuxième étant une condition de type Lindeberg familière. Il sera montré que ces conditions sont vérifiées ici en raison des hypothèses (A1)-(A4).

Pour chaque $\theta \in \Theta$ et chaque $h \in \mathbb{R}^k$ (choisis arbitrairement et maintenus fixes par la suite), définissons

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &= \mathbb{E}_\theta \left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\}, \quad j \geq 1 \\ V_n^2 &= \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad s_n^2 = \mathbb{E}_\theta (V_n^2), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Alors les résultats suivants sont vrais.

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et sous \mathbb{P}_θ ,*

$$V_n^2 s_n^{-2} \rightarrow 1 \quad \text{en probabilité ,} \quad (2.13)$$

où V_n^2 et s_n^2 sont définis par (2.12).

Preuve. À partir des relations (2.12), (2.5) et de l'hypothèse A3(ii),

$$s_n^2 = \frac{n}{4} h^t \bar{\Gamma}_n(\theta) h \quad \text{et} \quad h^t \bar{\Gamma}_n(\theta) h \rightarrow h^t \bar{\Gamma}(\theta) h$$

Ce résultat, ainsi que la relation (2.9), fournissent la convergence souhaitée du Lemme (2.2.1). On peut aussi remplacer (2.11) par :

$$\frac{V_n^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h$$

Par suite on aura :

$$V_n^2 s_n^{-2} = \frac{V_n^2}{n \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}_n(\theta) h} \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \frac{\frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h}{\frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h} = 1$$

Le lemme ci-dessous fournit la condition de Lindeberg requise pour le TCL des martingales. Pour sa formulation, il sera pratique de définir

$$Z_j = h^t \dot{\varphi}_j(\theta), \quad j \geq 1. \tag{2.14}$$

Lemme 2.2.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$s_n^{-2} \sum_{j=1}^n \int_{\{|Z_j| \geq \varepsilon s_n\}} Z_j^2 d\mathbb{P}_\theta \rightarrow 0, \tag{2.15}$$

où s_n^2 et Z_j sont définis par (2.12) et (2.14), respectivement.

Preuve. Comme cela a été vu dans la preuve du Lemme (2.2.1), $\frac{4s_n^2}{n} \rightarrow h^t \bar{\Gamma}(\theta) h$, d'où $s_n \rightarrow \infty$.

Maintenant, pour $\varepsilon > 0$, soit $a = a(\varepsilon) (> 0)$ suffisamment grand tel que

$$\int_{(Z_j^2 > a)} Z_j^2 d\mathbb{P}_\theta < \varepsilon, \quad j \geq 1$$

Ceci est possible par l'hypothèse A3(i)(2.8). Ensuite, il existe $N(\varepsilon)$ tel que $n \geq N(\varepsilon)$ implique $\varepsilon^2 s_n^2 > a$ et donc

$$\begin{aligned} & \int_{(|Z_j| \geq \varepsilon s_n)} Z_j^2 d\mathbb{P}_\theta \\ &= \int_{(Z_j^2 \geq \varepsilon^2 s_n^2)} Z_j^2 d\mathbb{P}_\theta \leq \int_{(Z_j^2 > a)} Z_j^2 d\mathbb{P}_\theta < \varepsilon, \quad j \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, avec $4\tau_n = h^t \bar{\Gamma}_n(\theta) h$ et $4\tau = h^t \bar{\Gamma}(\theta) h$ ($h \neq 0$), il s'ensuit que, pour tout n suffisamment grand,

$$s_n^{-2} \sum_{j=1}^n \int_{(|Z_j| \geq \varepsilon s_n)} Z_j^2 d\mathbb{P}_\theta < \frac{4}{n\tau_n} n\varepsilon < \frac{8}{\tau} \varepsilon.$$

La preuve de la convergence en (2.15) est terminée.

2.3 Énoncé des résultats principaux

Dans cette section, les principaux résultats de l'article sont énoncés. Leurs démonstrations sont reportées à une section ultérieure (Section 2.5) après l'établissement de quelques lemmes auxiliaires. Ces résultats fournissent un développement asymptotique (au sens de la probabilité) de la fonction de log-vraisemblance appropriée, ainsi que sa normalité asymptotique. De plus, ils donnent la normalité asymptotique des variables aléatoires $\Delta_n(\theta)$, $n \geq 1$, telles que définies par (2.6).

Il convient de noter que ces résultats généralisent les Théorèmes 4.1-4.6, pp. 53-54 dans Roussas (1972) [7] qui sont vrais pour certains processus markoviens. De même, ils généralisent les Théorèmes 3.1-3.6, pp. 457-458 dans Philippou et Roussas (1973) [6] qui sont vrais pour le cas indépendants non identiquement distribuées. Comme cela a été le cas pour l'établissement des preuves des théorèmes précités, les concepts et résultats de continuité joueront également un rôle crucial ici.

Avec $\theta \in \Theta$, soit

$$\theta_n = \theta + h_n n^{-\frac{1}{2}}, \quad h_n \rightarrow h \in \mathbb{R}^k \tag{2.16}$$

et soit $\Lambda_n(\theta)$ défini par

$$\Lambda_n(\theta) = \Lambda_n(\theta; \theta_n) \tag{2.17}$$

où $\Lambda_n(\theta; \theta_n)$ est donné par (2.4). Alors la fonction de log-vraisemblance $\Lambda_n(\theta)$ admet sous \mathbb{P}_θ le développement en probabilité suivant :

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A4), pour chaque $\theta \in \Theta$ et sous \mathbb{P}_θ ,*

$$\Lambda_n(\theta) - h^t \Delta_n(\theta) \rightarrow -\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \quad \text{en probabilité.}$$

La distribution asymptotique des variables aléatoires $\Lambda_n(\theta), n \geq 1$, est fournie par le théorème suivant

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour chaque $\theta \in \Theta$,*

$$\mathcal{L} [\Delta_n(\theta) | \mathbb{P}_\theta] \Rightarrow N(0, \bar{\Gamma}(\theta)).$$

La distribution asymptotique du log-vraisemblance $\Lambda_n(\theta)$ est également d'intérêt. Elle découle des deux théorèmes précédemment formulés. Plus précisément,

Théorème 2.3.3. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour chaque $\theta \in \Theta$,*

$$\mathcal{L} [\Lambda_n(\theta) | \mathbb{P}_\theta] \Rightarrow N \left(-\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h, h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \right).$$

Les trois résultats suivants sont des versions des trois théorèmes précédents lorsque la mesure de probabilité \mathbb{P}_θ est remplacée par la mesure de probabilité \mathbb{P}_{θ_n} . Leurs preuves reposent largement sur des résultats de contiguïté.

Théorème 2.3.4. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour chaque $\theta \in \Theta$, on a sous \mathbb{P}_{θ_n} ,*

$$\Lambda_n(\theta) - h^t \Delta_n(\theta) \rightarrow -\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \quad \text{en probabilité.}$$

Ensuite, la version appropriée du Théorème 2.3.3 est la suivante.

Théorème 2.3.5. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour chaque $\theta \in \Theta$,*

$$\mathcal{L} [\Lambda_n(\theta) | \mathbb{P}_{\theta_n}] \Rightarrow N \left(\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h, h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \right).$$

Enfin, sous \mathbb{P}_{θ_n} , la distribution asymptotique de $\Lambda_n(\theta)$ est donnée par

Théorème 2.3.6. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour chaque $\theta \in \Theta$,*

$$\mathcal{L} [\Delta_n(\theta) \mid \mathbb{P}_{\theta_n}] \Rightarrow N(\bar{\Gamma}(\theta)h, \bar{\Gamma}(\theta)).$$

2.4 Quelques résultats auxiliaires

Dans cette section, les lemmes nécessaires pour les preuves des principaux résultats, Théorèmes 2.3.1-2.3.6, sont regroupés. La plupart de ces lemmes sont les versions appropriées des Lemmes 5.1-5.5 dans Roussas (1972)[7] et/ou des Lemmes 4.1-4.6 dans Philippou et Roussas (1973)[6].

Pour ce faire, il serait conseillé d'introduire la notation simplificatrice suivante. Considérons la quantité $\varphi_n^2(\theta; \theta^*) = \varphi_n^2(\mathbf{X}_n; \theta, \theta^*)$ et remplaçons \mathbf{X}_n par \mathbf{X}_j et θ^* par θ_n défini par (2.16). Ainsi, $\varphi_j^2(\theta; \theta_n) = \varphi_j^2(\mathbf{X}_j; \theta, \theta_n)$ est noté $\varphi_{nj}^2(\theta)$ ou simplement φ_{nj}^2 pour simplifier. C'est-à-dire,

$$\varphi_{nj} = \varphi_{nj}(\theta) = \varphi_j(\mathbf{X}_j; \theta, \theta_n) \quad (2.18)$$

Ensuite, les quantités $\dot{\varphi}_j(\theta)$, $\Lambda_n(\theta)$ et $\bar{\Gamma}(\theta)$ sont définies dans l'hypothèse (A2)(i), par la relation (2.17) et l'hypothèse (A3)(ii), respectivement. Encore une fois, pour des raisons de commodité, on pose

$$\dot{\varphi}_j = \dot{\varphi}_j(\theta), \quad \Lambda_n = \Lambda_n(\theta), \quad \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(\theta), \quad 1 \leq j \leq n, n \geq 1 \quad (2.19)$$

La proposition simple suivante est formulée et prouvée ci-dessous pour référence facile.

Proposition 2.4.1. *Pour $1 \leq j \leq n$, considérons les variables aléatoires Z_j et Z_{nj} définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et supposons que*

$$\max (\mathbb{E} [|Z_{nj} - Z_j|^2]; 1 \leq j \leq n) \rightarrow 0, \quad \mathbb{E}[Z_j^2] \leq M (< \infty), j \geq 1 \quad (2.20)$$

Alors

$$\max (\mathbb{E} [|Z_{nj}^2 - Z_j^2|]; 1 \leq j \leq n) \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'hypothèse de bornitude et des

inégalités de Hölder et Minkowski. En effet,

$$\begin{aligned} \max(\mathbb{E}[|Z_{n_j}^2 - Z_j^2|]) &= \max(\mathbb{E}[|(Z_{n_j} - Z_j)(Z_{n_j} + Z_j)|]) \\ &\leq \max(\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}[|Z_{n_j} - Z_j|^2]) \max(\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}[|Z_{n_j} + Z_j|^2]) \\ &\leq 2M \max(\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}[|Z_{n_j} - Z_j|^2]) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pour plus de commodité, l'expression $\max_j \alpha_{nj}$ sera utilisée plutôt que $\max(\alpha_{nj}; 1 \leq j \leq n)$ pour plusieurs quantités désignées ici par α_{nj} .

Lemme 2.4.1.

$$\max \left[\mathbb{E}_\theta \left| n(\varphi_{nj} - 1)^2 - (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right|; 1 \leq j \leq n \right] \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Preuve. Par la Proposition 2.4.1, il suffit de montrer que

$$\max_j \mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1) - (h^t \dot{\varphi}_j) \right|^2 \rightarrow 0, \quad \mathbb{E}_\theta (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \leq M (< \infty), \quad j \geq 1 \quad (2.23)$$

La deuxième partie de (2.23) découle immédiatement de l'hypothèse (A3)(i). C'est-à-dire,

$$\mathbb{E}_\theta (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \leq M, \quad j \geq 1 \quad (2.24)$$

De cette inégalité, il découle que

$$\mathbb{E}_\theta \|\dot{\varphi}_j\|^2 \leq M, \quad j \geq 1 \quad (2.25)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme usuelle dans \mathbb{R}^k et M est une constante générique. Ensuite, en raison de l'inégalité précédente,

$$\mathbb{E}_\theta |(h_n - h)^t \dot{\varphi}_j|^2 \leq \|h_n - h\|^2 M \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1) - (h^t \dot{\varphi}_j) \right|^2 &\leq \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1) - (h_n^t \dot{\varphi}_j) \right|^2 \\ &\quad + \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} |(h_n - h)^t \dot{\varphi}_j|^2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Chapitre 2. Distribution Asymptotique de la fonction Log-vraisemblance pour les Processus stochastiques

Pour $\lambda = n^{-\frac{1}{2}}$ et $h_n \rightarrow h \in \mathbb{R}^k$ dans l'équation 2.7, ceci établi la première relation dans (2.23)

Corollaire 2.4.1.

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0 \quad (2.28)$$

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_\theta \left[\left| \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| > \varepsilon \right] \leq \frac{1}{n\varepsilon} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left| n (\varphi_{nj} - 1)^2 - (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| \quad (2.29)$$

Suite au Lemme 2.4.1, il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que $n \geq N$ implique

$$\max_j \mathbb{E}_\theta \left| n (\varphi_{nj} - 1)^2 - (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| < \varepsilon^2 \quad (2.30)$$

Alors, le membre de droite de (2.29) est borné par $\frac{1}{n\varepsilon} n\varepsilon^2 = \varepsilon$ ce qui établit le corollaire.

Corollaire 2.4.2.

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h \quad (2.31)$$

Preuve. D'après l'hypothèse (A3)(iii'), on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \rightarrow \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité}$$

et on conclut en appliquant le corollaire 2.4.1.

Lemme 2.4.2.

$$\max (|\varphi_{nj} - 1|; 1 \leq j \leq n) \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{ probabilité} \quad (2.32)$$

Preuve. Posons $R_{nj} = n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - (h^t \dot{\varphi}_j)$ et soit $\varepsilon > 0$. Ensuite, en s'inspirant de la démonstration du Lemme 4.3 dans Philippou et Roussas (1973)[6], on a

$$\mathbb{P}_\theta \left(\max_j |\varphi_{nj} - 1| > \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}_\theta \left(\max_j |R_{nj}| > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right) + \mathbb{P}_\theta \left(\max_j |h^t \dot{\varphi}_j| > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right) \quad (2.33)$$

Or

$$\mathbb{P}_\theta \left(\max_j |R_{nj}| > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta |R_{nj}|^2 \quad (2.34)$$

Donc d'après (2.7), appliqué pour $\lambda = n^{-\frac{1}{2}}$ et $h = h_n$,

$$\mathbb{E}_\theta |R_{nj}|^2 \leq \frac{\varepsilon^3}{8} \quad \text{pour } n \geq \text{some } N = N(\varepsilon) \text{ et } 1 \leq j \leq n \quad (2.35)$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_\theta \left(\max_j |R_{nj}| \geq \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N \quad (2.36)$$

Ensuite, en travaillant comme dans la preuve de la dernière partie du Lemme 4.3 dans Philippou et Roussas (1973)[6], on définit d'abord F_j la f.d.r sous \mathbb{P}_θ des v.a $|h^t \dot{\varphi}_j|$ et donc sous l'hypothèse (A3)(i), on a pour tout n suffisamment grand :

$$\int_{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} x^2 dF_j = \int_{(|h^t \dot{\varphi}_j| > \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2})} |h^t \dot{\varphi}_j|^2 d\mathbb{P}_\theta \leq \frac{\varepsilon^3}{8}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left(\max_j |h^t \dot{\varphi}_j| > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right) &= \mathbb{P}_\theta \left(\bigcup_j \left\{ |h^t \dot{\varphi}_j| > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}_\theta \left(|h^t \dot{\varphi}_j| > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right) = \sum_{j=1}^n \int_{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} dF_j \\ &= \frac{4}{n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \int_{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 dF_j \\ &\leq \frac{4}{n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \int_{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} x^2 dF_j \\ &\leq \frac{4}{n\varepsilon^2} \cdot \frac{n\varepsilon^3}{8} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ensuite, les relations (2.36)-(2.37) établissent le lemme.

Remarque 2.4.1. À ce stade, rappelons que si Y_n et $Z_n, n \geq 1$, sont des v.a. définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que

$$Y_n - Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ et } \{Y_n\} \text{ est bornée en probabilité,}$$

alors $\{Z_n\}$ est également bornée en probabilité, en effet :

$$\mathbb{P}(|Z_n| > 2M) = \mathbb{P}(|Z_n + Y_n - Y_n| > 2M) \leq \mathbb{P}(|Y_n - Z_n| > M) + \mathbb{P}(|Y_n| > M)$$

Lemme 2.4.3.

$$\Lambda_n - 2 \left[\sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 \right] \rightarrow 0 \text{ en } \mathbb{P}_\theta\text{-probabilité} \quad (2.38)$$

Preuve. De (2.24)

$$\mathbb{E}_\theta (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \leq M, \quad j \geq 1$$

Il s'ensuit que $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right\}$ est bornée en \mathbb{P}_θ -probabilité. D'après la Remarque 2.4.1 et le Corollaire 2.4.1 $\left\{ \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 \right\}$ est également bornée en \mathbb{P}_θ probabilité.

Par conséquent, on a le Lemme 2.4.2 donne :

$$\left(\max_j |\varphi_{nj} - 1| \right) \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta\text{-probabilité.} \quad (2.39)$$

Ensuite, suivant la preuve du Lemme 4.4 dans Philippou et Roussas (1973)[6], on obtient également, au moyen de (2.39),

$$\sum_{j=1}^n \log \varphi_{nj}^2 - 2 \left[\sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta\text{-probabilité.} \quad (2.40)$$

Maintenant, en raison de (2.4), (2.18) et (2.19),

$$\Lambda_n = \log q_0(\theta; \theta_n) + \sum_{j=1}^n \log \varphi_{nj}^2$$

et $\log q_0(\theta; \theta_n) \rightarrow 0$ en \mathbb{P}_θ probabilité, par l'hypothèse (A4) et la relation (2.16). Ainsi,

$$\Lambda_n - \sum_{j=1}^n \log \varphi_{nj}^2 \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta\text{-probabilité} \quad (2.41)$$

Les relations (2.40) et (2.41) donnent alors le résultat désiré.

En utilisant des arguments standard, on peut également montrer le résultat suivant.

Lemme 2.4.4.

$$\text{Pour } 1 \leq j \leq n, \quad \mathbb{E}(\varphi_n^2) = 1$$

Preuve. On rappelle la notation $\mathbf{X}_n = (X_0, \dots, X_n)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta (\varphi_n^2) &= \int \frac{dP_{n,\theta^*}}{dP_{n,\theta}} \frac{dP_{n-1,\theta}}{dP_{n-1,\theta^*}} dP_{n,\theta} \\ \text{Or : } \frac{dP_{n,\theta^*}}{dP_{n,\theta}} \frac{dP_{n-1,\theta}}{dP_{n-1,\theta^*}} dP_{n,\theta} &= \frac{dP_{n-1,\theta}}{dP_{n-1,\theta^*}} dP_{n,\theta^*} \\ &= \frac{dP_{n-1,\theta}}{dP_{n-1,\theta^*}} dP_{n-1,\theta^*} dP_{X_n,\theta^*}^{\mathbf{X}_{n-1}}(x_n) \\ &= dP_{n-1,\theta}(\mathbf{x}_{n-1}) dP_{X_n,\theta^*}^{\mathbf{X}_{n-1}}(x_n) \\ \text{D'où } \mathbb{E}_\theta (\varphi_n^2) &= \int dP_{n-1,\theta} dP_{X_n,\theta^*}^{\mathbf{X}_{n-1}} = 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Lemme 2.4.5.

$$\max_j \mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj}^2 - 1) - 2h^t \dot{\varphi}_j \right| \rightarrow 0 \quad (2.43)$$

Preuve. Considérons l'identité

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj}^2 - 1) - 2h^t \dot{\varphi}_j &= \varphi_{nj} \left[n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j \right] + h^t \dot{\varphi}_j (\varphi_{nj} - 1) + \left[n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j \right] \end{aligned}$$

et travaillons comme dans la preuve du Lemme (5.4) dans Roussas (1972)[7], avec $\mathbb{E}_\theta[\varphi_{nj}^2] = 1$ et en utilisant l'inégalité de Hölder. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj}^2 - 1) - 2h^t \dot{\varphi}_j \right| &\leq 2 \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j \right|^2 \\ &+ \left[\max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right] \left[\max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} |\varphi_{nj} - 1|^2 \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'après le Lemme 2.4.1,

$$\max_j \mathbb{E}_\theta \left| (\varphi_{nj} - 1)^2 - \frac{1}{n} (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| \rightarrow 0 \quad (2.45)$$

de sorte que

$$\max_j \mathbb{E}_\theta |\varphi_{nj} - 1|^2 \leq \max_j \mathbb{E}_\theta \left| (\varphi_{nj} - 1)^2 - \frac{1}{n} (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| + \frac{1}{n} \max_j \mathbb{E}_\theta (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \rightarrow 0$$

en raison de (2.45) et de la deuxième relation dans (2.23) $\mathbb{E}_\theta (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \leq M (< \infty)$.

Avec (2.27) :

$$\begin{aligned} \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - (h^t \dot{\varphi}_j) \right|^2 &\leq \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - (h_n^t \dot{\varphi}_j) \right|^2 \\ &+ \max_j \mathbb{E}_\theta^{\frac{1}{2}} \left| (h_n - h)^t \dot{\varphi}_j \right|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ainsi que ce résultat et (2.44) établit le lemme.

Maintenant, en interprétant l'espérance (conditionnelle ou non) d'un vecteur aléatoire dans le sens usuel coordonnée par coordonnée, on peut formuler et prouver le résultat suivant.

Lemme 2.4.6. *Pour $j \geq 1$,*

$\mathbb{E}_\theta (\dot{\varphi}_j \mid \mathcal{A}_{j-1}) = 0$ p.s. $[\mathbb{P}_\theta]$ (de sorte que $\mathbb{E}_\theta (h^t \dot{\varphi}_j) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$).

Preuve. En utilisant des arguments standard (presque comme dans le Lemme 2.4.4), on peut montrer que

$$\mathbb{E}_\theta (\varphi_{nj}^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}) = 1 \quad \text{p.s. } [\mathbb{P}_\theta], \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.46)$$

Sur la base de ce résultat et du Lemme 2.4.5, le résultat désiré est établi comme dans la preuve du Lemme 5.5(i) dans Roussas (1972)[7], c-à-d :

On a d'après le Lemme précédent :

$$\max_j \mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj}^2 - 1) - 2h^t \dot{\varphi}_j \right| \rightarrow 0$$

et donc ce résultat reste vrai en conditionnant des deux côté d'après l'hypothèse (A2)(ii)2.7 :

$$\mathbb{E}_\theta \left(n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj}^2 - 1) \mid \mathcal{A}_{j-1} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} \mathbb{E}_\theta (2h^t \dot{\varphi}_j \mid \mathcal{A}_{j-1})$$

et grâce à (2.46), on peut déduire que

$$\mathbb{E}_\theta (2h^t \dot{\varphi}_j \mid \mathcal{A}_{j-1}) = 0 \quad \text{p.s. } [\mathbb{P}_\theta], \quad 1 \leq j \leq n$$

Ceci est vrai pour tout $h \in \mathbb{R}^k$, ainsi on conclue que :

$$\mathbb{E}_\theta (\dot{\varphi}_j \mid \mathcal{A}_{j-1}) = 0 \quad \text{p.s. } [\mathbb{P}_\theta]$$

■

Pour $j = 1, \dots, n$, définissons les variables aléatoires ψ_{nj} comme suit

$$\psi_{nj} = \psi_{nj}(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\varphi_{nj} \mid \mathcal{A}_{j-1}) \quad (2.47)$$

De plus, posons

$$Y_j = Y_{nj} = (\varphi_{nj} - 1) - n^{-\frac{1}{2}} h^t \dot{\varphi}_j - (\psi_{nj} - 1), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

Alors on a le lemme suivant.

Lemme 2.4.7.

$$\sum_{j=1}^n Y_j \rightarrow 0 \quad \text{en probabilité } \mathbb{P}_\theta. \quad (2.49)$$

Preuve. Remarquons d'abord que $\mathbb{E}_\theta[Y_j] = 0$ pour tout $j \geq 1$.

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[Y_j] &= \mathbb{E}_\theta \left[(\varphi_{nj} - 1) - n^{-\frac{1}{2}} h^t \dot{\varphi}_j - \mathbb{E}_\theta(\varphi_{nj} \mid \mathcal{A}_{j-1}) \right] \\ &= \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1)] - n^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\theta [h^t \dot{\varphi}_j] - \mathbb{E}_\theta [\mathbb{E}_\theta(\varphi_{nj} \mid \mathcal{A}_{j-1})] \\ &= -n^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\theta [h^t \dot{\varphi}_j] \\ &= 0 \quad \text{D'après le Lemme 2.4.6} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Tchébychév et le fait que $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left(\left| \sum_{j=1}^n Y_j \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \sigma_\theta^2(Y_j) \\ &\leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j - n^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1) \mid \mathcal{A}_{j-1}] \right|^2 \\ &\leq \frac{2}{n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \left[\mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}} (\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j \right|^2 + \mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1) \mid \mathcal{A}_{j-1}] \right|^2 \right] \end{aligned}$$

À ce stade, rappelons que, si X est une v.a. définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et pour laquelle $\mathbb{E}[X]$ existe, et si \mathcal{F} est une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} , alors :

$$|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})|^r \leq \mathbb{E}(|X|^r \mid \mathcal{F}) \quad \text{p.s., } r \geq 1$$

On peut aussi ajouter et retrancher " $h^t \dot{\varphi}_j$ " car d'après le Lemme 2.4.6 $\mathbb{E}_\theta(\dot{\varphi}_j \mid \mathcal{A}_{j-1}) = 0$

p.s. $[\mathbb{P}_\theta]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left| n^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}_\theta [\varphi_{nj} - 1 \mid \mathcal{A}_{j-1}]) \right|^2 &\leq \mathbb{E}_\theta \left(\mathbb{E}_\theta \left[|n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1)|^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right] \right) \\ &= \mathbb{E}_\theta \left[|n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j|^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{D'après le Lemme 2.4.1} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathbb{E}_\theta \left[|n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j|^2 \right] \leq \frac{\varepsilon^3}{4} \quad \text{Pour un certain } n \geq \eta_\varepsilon$$

Et donc :

$$\mathbb{P}_\theta \left(\left| \sum_{j=1}^n Y_j \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left[|n^{\frac{1}{2}}(\varphi_{nj} - 1) - h^t \dot{\varphi}_j|^2 \right] \leq \frac{4}{n\varepsilon^2} \cdot \frac{n\varepsilon^3}{4} = \varepsilon$$

D'où la convergence en probabilité.

Lemme 2.4.8.

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h$$

Preuve. On peut voir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(h^t \dot{\varphi}_j)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] \right| > \varepsilon \right\} \\ \leq \frac{1}{n\varepsilon} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left| n(\varphi_{nj} - 1)^2 - (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| \end{aligned} \quad (2.51)$$

D'après le Lemme 2.4.1,

$$\mathbb{E}_\theta \left| n(\varphi_{nj} - 1)^2 - (h^t \dot{\varphi}_j)^2 \right| < \varepsilon^2, \quad n \geq \text{some } N = N(\varepsilon), 1 \leq j \leq n \quad (2.52)$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(h^t \dot{\varphi}_j)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité.}$$

Ce résultat, avec la relation (2.11), appliquée avec $t = h$ donne alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ [h^t \dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} \rightarrow \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité.} \quad (2.53)$$

Ainsi :

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] \rightarrow \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité.}$$

Lemme 2.4.9. *Pour $j = 1, \dots, n$, soient les v.a. ψ_{nj} définies par (2.47). Alors*

$$2 \sum_{j=1}^n (\psi_{nj} - 1) \rightarrow -\frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité.} \quad (2.54)$$

Preuve. Sur la base du Lemme 2.4.6 et du Lemme 2.4.8, (2.54) est équivalente à :

$$\lim_n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [2(\varphi_{nj} - 1) + (\varphi_{nj} - 1)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1}] = \lim_n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(\varphi_{nj} - 1 + 1)^2 - 1 \mid \mathcal{A}_{j-1}] = 0$$

Lemme 2.4.10.

$$\Delta_n(\theta) = 2n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j(\theta), \quad n \geq 1$$

Alors :

$$2 \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1) - h^t \Delta_n \rightarrow -\frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité.}$$

Preuve.

En prenant en compte la définition des v.a. $Y_j, j = 1, \dots, n$ par (2.48), le Lemme 2.4.7 stipule que

$$2 \sum_{j=1}^n Y_j = 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1) - h^t \Delta_n - 2 \sum_{j=1}^n (\psi_{nj} - 1) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0$$

Ce fait, en conjonction avec le Lemme 2.4.9, fournit le résultat désiré.

2.5 Preuves des résultats Principaux

Les résultats principaux formulés dans la Section 4 peuvent maintenant être prouvés.

Preuve du Théorème 2.3.1 D'après le Lemme 2.4.3, le Corollaire 2.4.2 et le Lemme 2.4.10, on a respectivement les convergences suivantes en probabilité \mathbb{P}_θ :

$$\begin{aligned}\Lambda_n - 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1) &\rightarrow 0 \\ \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1)^2 &\rightarrow \frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h\end{aligned}$$

et

$$2 \sum_{j=1}^n (\varphi_{nj} - 1) - h^t \Delta_n \rightarrow -\frac{1}{4} h^t \bar{\Gamma} h$$

À partir de ces expressions, on obtient que

$$\Lambda_n - h^t \Delta_n \rightarrow -\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma} h \quad \text{en } \mathbb{P}_\theta \text{-probabilité.}$$

■

Preuve du Théorème 2.3.2 Posons $S_n = \sum_{j=1}^n t^t \dot{\varphi}_j$, $n \geq 1$. Ensuite, par le Lemme 2.4.6,

$$\mathbb{E}_\theta (S_n \mid S_1, \dots, S_{n-1}) = S_{n-1} + \mathbb{E}_\theta (t^t \dot{\varphi}_n \mid S_1, \dots, S_{n-1}) = S_{n-1} \quad \mathbb{P}_\theta \text{-p.s.}$$

Ainsi, pour chaque $\theta \in \Theta$, $\{S_n, \mathcal{A}_n\}$, $n \geq 1$, est une martingale sur l'espace probabilisé $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$ avec $S_0 = 0$. Considérons les quantités définies en (2.12). Ensuite, par (2.13) et (2.14) dans les Lemme 2.2.1 et 2.2.2, les Conditions (1) et (2) de Brown (1971)[3] sont satisfaites. Par conséquent, le Théorème 2 de la référence citée est valable.

$$\mathcal{L} \left[t^t \Delta_n (t^t \bar{\Gamma}_n t)^{-\frac{1}{2}} \mid \mathbb{P}_\theta \right] \Rightarrow N(0, 1)$$

Cette convergence et le fait que $t^t \bar{\Gamma}_n t \rightarrow t^t \bar{\Gamma} t$ donnent ensuite,

$$\mathcal{L} (t^t \Delta_n \mid \mathbb{P}_\theta) \Rightarrow N(0, t^t \bar{\Gamma} t)$$

Puisque cette dernière convergence est vraie pour chaque $t \in \mathbb{R}^k$, on conclut que

$$\mathcal{L} (\Delta_n \mid \mathbb{P}_\theta) \Rightarrow N(0, \bar{\Gamma})$$

■.

Preuve du Théorème 2.3.3 Immédiat à partir des Théorèmes 2.3.1, 2.3.2 et des

théorèmes de Slutsky standard.

$$\mathcal{L} [\Lambda_n(\theta) \mid \mathbb{P}_\theta] \Rightarrow N \left(-\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h, h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \right)$$

■

Les preuves des Théorèmes 2.3.4-2.3.6 découlent de celles des théorèmes précédents et de la proposition ci-dessous concernant la contiguïté des suites de mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_\theta\}$ ($= \{\mathbb{P}_{n,\theta}\}$) et $\{\mathbb{P}_{\theta_n}\}$ ($= \{\mathbb{P}_{n,\theta_n}\}$).

Proposition 2.5.1. *Si $\{h_n^*\}$ est une suite bornée dans \mathbb{R}^k et si $\theta_n^* = \theta + n^{-\frac{1}{2}} h_n^*$, alors les suites de mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_{n,\theta}\}$ et $\{\mathbb{P}_{n,\theta_n^*}\}$ sont contiguës.*

Preuve. En raison de la bornitude de la suite $\{h_n^*\}$, On a : $\theta_n \rightarrow \theta$

Maintenant si pour toute suite d'événements $\{A_n\}$ telle que $\mathbb{P}_{n,\theta}(A_n) \rightarrow 0$, on aura $\mathbb{P}_{n,\theta_n}(A_n) \rightarrow 0$ et d'où la contiguïté.

Nous pouvons maintenant compléter les preuves des théorèmes restants.

Preuve du Théorème 2.3.4 Par la proposition précédente, les suites $\{\mathbb{P}_\theta\}$ et $\{\mathbb{P}_{\theta_n}\}$ sont contiguës. Ce fait, ainsi que le Théorème 2.3.1 et la définition de contiguïté, fournit la preuve requise.

$$\Lambda_n(\theta) - h^t \Delta_n(\theta) \rightarrow -\frac{1}{2} h^t \Gamma(\theta) h \quad \text{en } \mathbb{P}_{\theta_n} \text{-probabilité.}$$

Preuve du Théorème 2.3.5 Comme dans la preuve du Théorème (4.5) dans Roussas (1972)[7], c'est une conséquence du Théorème 2.3.3, de la contiguïté des suites $\{\mathbb{P}_\theta\}$ et $\{\mathbb{P}_{\theta_n}\}$ et du Corollaire 7.2, p. 35, dans Roussas (1972)[7].

$$\mathcal{L} [\Lambda_n(\theta) \mid \mathbb{P}_{\theta_n}] \Rightarrow N \left(\frac{1}{2} h^t \bar{\Gamma}(\theta) h, h^t \bar{\Gamma}(\theta) h \right)$$

Preuve du Théorème 2.3.6 Encore une fois, on se réfère à la preuve du théorème correspondant dans Roussas (1972)[7]. En effet, les hypothèses du Lemme 7.1, p. 36, dans la référence citée sont remplies avec $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}'_n = \mathbb{P}_{\theta_n}, T_n = \Lambda_n$ et $\Gamma = \bar{\Gamma}$. Cela est dû aux Théorèmes 2.3.2 et 2.3.1 ci-dessus. Ensuite, le Théorème 7.2 dans Roussas (1972)[7],

p. 38, donne le résultat souhaité.

$$\mathcal{L} [\Delta_n(\theta) \mid \mathbb{P}_{\theta_n}] \Rightarrow N(\bar{\Gamma}(\theta)h, \bar{\Gamma}(\theta))$$

Chapitre 3

Exemples d'application

Nous présentons dans ce chapitre quelques exemples de processus stochastiques qui satisfont les conditions **A1...A4** citées dans le chapitre précédent. Ces exemples sont tirés de l'article de Roussas[8]

Pour tout ce qui va suivre, on notera $\mathbf{X}_n = (X_0, \dots, X_n)$.

3.1 Exemple 1

Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ des v.a constituant un processus Gaussien tels que :

$$\mathbb{E}_\theta [X_n] = \theta, \quad \sigma_\theta^2 [X_n] = 1, \quad \text{Cov}_\theta [X_m, X_n] = \rho^{|m-n|}, \quad |\rho| < 1$$

3.1.1 Vérification des hypothèses.

A1) Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\frac{d\mathbb{P}^{(n,\theta)}}{d\lambda}(x_0, \dots, x_n) = f_{[\mathbf{X}_n, \theta]}(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Gamma)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^t \Gamma^{-1}(x-\theta)}$$

Où : $\Gamma = (\rho^{|i-j|}, 0 \leq i, j \leq n)$ est la matrice de covariance de \mathbf{X}_n .

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } q_n(\theta, \theta^*) &= \frac{f_{[\mathbf{X}_n, \theta^*]}(x_0, \dots, x_n)}{f_{[\mathbf{X}_n, \theta]}(x_0, \dots, x_n)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(x-\theta^*)^t \Gamma^{-1}(x-\theta^*)} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-\theta)^t \Gamma^{-1}(x-\theta)} = e^{-\frac{1}{2} \cdot G_n(\theta, \theta^*)} \end{aligned}$$

Avec :

$$\Gamma^{-1} = (a_{ij}, 0 \leq i, j \leq n) \tag{3.1}$$

A2)

i) On a :

$$\varphi_n^2(\theta, \theta^*) = \frac{q_n(\theta, \theta^*)}{q_{n-1}(\theta, \theta^*)} = e^{-\frac{1}{2}(G_n(\theta, \theta^*) - G_{n-1}(\theta, \theta^*))}$$

Avec

$$\begin{aligned} G_n(\theta, \theta^*) - G_{n-1}(\theta, \theta^*) &= (\theta^{*2} - \theta^2) \cdot \left(2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} + a_{nn} \right) \\ &\quad - 2(\theta^* - \theta) \left(\sum_{i=0}^n (a_{in} \cdot x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot a_{in}) \right) \end{aligned}$$

Notons dans cet exemple : $S_n = 2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} + a_{nn}$

On aura :

$$\begin{aligned} \varphi_n(\theta, \theta^*) &= \exp\left(-\frac{1}{4}(\theta^{*2} - \theta^2) \cdot S_n + \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) \left(\sum_{i=0}^n (a_{in} \cdot X_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (X_i \cdot a_{in}) \right)\right) \\ &:= \exp(\phi_n(\theta, \theta^*)) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n(\theta) &= -\frac{1}{2}\theta \cdot S_n + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n (a_{in} \cdot X_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (X_i \cdot a_{in}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n (X_n - \theta) \cdot a_{in} + \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - \theta) \cdot a_{in} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Montrons que :

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} |\varphi_j(\theta, \theta + \lambda h) - 1 - \lambda h \dot{\varphi}_j(\theta)| \right]^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \text{Pour tout } j \geq 0 \quad (3.3)$$

Ceci revient à montrer que :

$$\frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[\exp(\phi_n(\theta, \theta + \lambda h)) - 1 - \frac{\lambda h}{2} \left(\sum_{i=0}^n (a_{in} X_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{in} X_i) - \theta S_n \right) \right]^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

Avec :

$$\exp(\phi_n(\theta, \theta + \lambda h)) = -\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{1}{2}(\lambda h) \left(\sum_{i=0}^n (a_{in}(X_n - \theta)) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{in}(X_i - \theta)) \right)$$

Puisque $Y_n = X_n - \theta$ sont des gaussiennes centrées réduites pour tout $n \geq 0$, alors toutes combinaisons linéaire sera une gaussienne centrée. Avec

$$\text{Cov}(Y_n, Y_m) = \text{Cov}(X_n - \theta, X_m - \theta) = \mathbb{E}[X_n X_m] - \theta^2 = \rho^{|n-m|} - \theta^2$$

Notons :

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{i=0}^n (a_{in} \cdot Y_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{in} \cdot Y_i) \quad (3.4)$$

$$\text{Et : } \sigma^2 = \sigma^2(\mathbf{Y}_n)$$

On aura ainsi : $\mathbf{Y}_n \sim N(0, \sigma^2)$

En remplaçant par \mathbf{Y}_n dans l'équation (3.3) on aura à montrer que :

$$\frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{1}{2} (\lambda h) \mathbf{Y}_n} - 1 - \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_n \right]^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \text{Pour tout } n \geq 0$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} - 1 - \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j \right]^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[\left(e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} - 1 \right)^2 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} \mathbf{Y}_j^2 - \lambda h \mathbf{Y}_j e^{-\frac{1}{4} (\lambda h)^2 S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(\lambda h)^2}{2} S_n + \lambda h \mathbf{Y}_j} + 1 - 2e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} + \frac{\lambda^2 h^2}{4} \mathbf{Y}_j^2 - \lambda h \mathbf{Y}_j e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} \right] \quad (*) \end{aligned}$$

De (*), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\lambda h \mathbf{Y}_j e^{-\frac{1}{4} (\lambda h)^2 S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} \right] &= \mathbb{E} \left[\lambda h (\sigma Z_j) e^{-\frac{1}{4} (\lambda h)^2 S_n + \frac{\lambda h}{2} (\sigma Z_j)} \right] \quad (\text{avec } \sigma \text{ défini dans (3.4) et } Z_j := \frac{1}{\sigma} \mathbf{Y}_j \sim N(0, 1)) \\ &= \lambda h \sigma e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int z e^{\frac{(\lambda h \sigma)}{2} z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \\ &= \lambda h \sigma e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8}} \int z e^{[z - \frac{\lambda h \sigma}{2}]^2} dz \right) \\ &= \lambda h \sigma e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \left(\frac{\lambda h \sigma}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8}} \right) = \frac{\lambda^2 h^2 \sigma^2}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} [\varphi_j(\theta, \theta + \lambda h) - 1] - h\dot{\varphi}_j(\theta) \right]^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \left[e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{2} - \frac{(\lambda h)^2}{2} S_n} + 1 - 2e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} + \frac{\lambda^2 h^2 \sigma^2}{4} - \frac{\lambda^2 h^2 \sigma^2}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \right] \\ &= \left(\frac{e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{2} - \frac{(\lambda h)^2}{2} S_n} - 1}{\lambda^2} \right) - 2 \left(\frac{e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} - 1}{\lambda^2} \right) + \frac{h^2 \sigma^2}{4} - \frac{h^2 \sigma^2}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{h^2 \sigma^2 - h^2 S_n}{2} - 2 \left(\frac{h^2 \sigma^2 - 2h^2 S_n}{8} \right) + \frac{h^2 \sigma^2}{4} - \frac{h^2 \sigma^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

ii) $\dot{\varphi}_j(\theta)$ calculé dans (3.11) est $\mathcal{A}_j \times \mathcal{C}$ - mesurable car c'est une combinaison linéaire d'un processus $\mathcal{A}_j \times \mathcal{C}$ - mesurable

A3) i) Pour chaque $\theta \in \Theta$ et chaque $t \in \mathbb{R}$, $[t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2$, $j \geq 1$, sont uniformément intégrables par rapport à \mathbb{P}_θ . Autrement dit, uniformément en $j \geq 1$, et d'après (3.2) on déduit que :

$$\dot{\varphi}_j(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{Y}_j$$

Rappelons aussi que $\mathbf{Y}_j \sim N(0, \sigma^2)$,

On aura :

$$\begin{aligned} \int_{\{[t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a\}} [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 d\mathbb{P}_\theta &= \mathbb{E}_\theta \left[(t\dot{\varphi}_j(\theta))^2 \mathbf{1}_{(t\dot{\varphi}_j(\theta))^2 > a} \right] \\ &\leq \mathbb{E}_\theta^{1/2} \left[(t\dot{\varphi}_j(\theta))^4 \right] \sqrt{\mathbb{P}([t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a)} \\ &\leq \frac{t^4}{16} \cdot \mathbb{E}_\theta^{1/2} [\mathbf{Y}_j^4] \sqrt{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_j^2 > \frac{4a}{t^2})} \\ &\leq K \cdot \sqrt{1 - \mathbb{P}\left(\frac{4a}{t^2 \sigma^2} \leq Z_j \leq \frac{4a}{t^2 \sigma^2}\right)} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta (\mathbf{Y}_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$$

La matrice $\Gamma = (\rho^{|i-j|})_{0 \leq i, j \leq n}$ est une matrice de Toeplitz symétrique avec des éléments qui dépendent uniquement de la différence $|i - j|$. Pour des $|\rho| < 1$, cette matrice a une structure particulière qui permet de calculer son inverse de manière plus efficace.

Une propriété clé des matrices de Toeplitz de ce type est qu'elles peuvent être liées aux chaînes de Markov et aux processus AR(1) (auto-régressifs d'ordre 1). L'inverse d'une telle matrice de Toeplitz, lorsque $|\rho| < 1$, peut être obtenue par des méthodes analytiques spécifiques et est également une matrice de Toeplitz. Une formule explicite pour l'inverse de cette matrice est connue sous le nom de **matrice de Toeplitz inversible pour processus AR(1)**.

Pour $\Gamma = (\rho^{|i-j|})$, où $|\rho| < 1$, l'inverse Γ^{-1} est donnée par :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de cette matrice a déjà été détaillé dans un autre mémoire de master[2].

Dans notre contexte, la suite de variables aléatoires \mathbf{Y}_n est définie par :

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{i=0}^n a_{in}(X_n - \theta) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{in}(X_i - \theta) = \frac{1}{1-\rho^2} \left((1-\rho) \cdot (X_n - \theta) - \rho \cdot (X_{n-1} - \theta) \right) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}_\theta [\mathbf{Y}_j^2] &= \mathbb{E}_\theta \left[\frac{1}{(1-\rho^2)^2} \left((1-\rho)^2 \cdot (X_n - \theta)^2 + \rho^2 \cdot (X_{n-1} - \theta)^2 - 2\rho(1-\rho) \cdot (X_n - \theta) \cdot (X_{n-1} - \theta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \left(2\rho^3 - 2\rho + 1 + 2\rho\theta^2 - 2\rho^2\theta^2 \right) = \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi,

$$\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta (\mathbf{Y}_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma^2 = \sigma^2 = \bar{\Gamma}(\theta)$$

iii) Nous avons déjà établi que chaque \mathbf{Y}_n suit une distribution normale centrée $N(0, \sigma^2)$ avec une certaine covariance entre \mathbf{Y}_i et \mathbf{Y}_j .

Pour appliquer la LGN faible à la suite $\{\mathbf{Y}_n^2\}$, nous vérifions les hypothèses suivantes :

— Les \mathbf{Y}_n sont faiblement stationnaires. En effet,

- $\mathbb{E}_\theta [\mathbf{Y}_j^2] = \sigma^2 < \infty$
- $\forall t \in \mathbb{Z} : E(\mathbf{Y}_t) = 0$. indépendant de t .
- $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2 : \text{Cov}(\mathbf{Y}_{t+h}, \mathbf{Y}_t) = E[(\mathbf{Y}_{t+h})(\mathbf{Y}_t)] = \gamma(h)$. (Remarquons que \mathbf{Y}_t est une combinaison linéaire des X_t et que $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \rho^{|h|}$)

— Les \mathbf{Y}_n sont ergodiques puisque $\mathbb{E}_\theta [\mathbf{Y}_j^2] = \sigma^2 < \infty$. Alors

Conclusion pour la LGN faible

Sous ces hypothèses, la LGN faible pour des variables stationnaires et ergodiques nous donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{Y}_j^2] = \sigma^2 = \bar{\Gamma}(\theta)$$

où σ^2 est donné par (3.6) :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 = \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{t^2}{4} \cdot \bar{\Gamma}(\theta)$$

iv)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\mathbb{E}_\theta \left\{ [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} - [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \right] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ [t\mathbf{Y}_j]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} - [t\mathbf{Y}_j]^2 \\ &= \frac{t^2}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ [\mathbf{Y}_j]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} - [\mathbf{Y}_j]^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0 \end{aligned}$$

En effet, d'après (3.5) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ [\mathbf{Y}_j]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \left((1-\rho) \cdot (X_j - \theta) - \rho \cdot (X_{j-1} - \theta) \right)^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \left((1-\rho)^2 \cdot (X_j - \theta)^2 + \rho^2 \cdot (X_{j-1} - \theta)^2 - 2\rho(1-\rho) \cdot (X_j - \theta) \cdot (X_{j-1} - \theta) \right) \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+\rho)^2} \mathbb{E}_\theta \left\{ [X_j - \theta]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} + \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \cdot (X_{j-1} - \theta)^2 - \frac{2\rho(1-\rho)}{(1-\rho^2)^2} \cdot (X_{j-1} - \theta) \cdot \mathbb{E}_\theta \left\{ [X_j - \theta] \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par hypothèse, on sait que $(X_n)_{n \geq 0}$ est un processus de Markov et gaussien. De (3.7) on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left\{ X_j^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} &= \mathbb{E}_\theta \left\{ X_j^2 \mid X_{j-1} \right\} = \int x^2 \cdot f_{X_j}^{X_{j-1}=y}(x) dx \\ &= \int x^2 \cdot \frac{f_{(X_j, X_{j-1})}(x, y)}{f_{X_{j-1}}(y)} dx \\ &= 1 - \rho^2 + \theta^2 + 2\theta\rho(X_{j-1} - \theta) + \rho^2(X_{j-1} - \theta)^2 \\ \mathbb{E}_\theta \left\{ X_j \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} &= \mathbb{E}_\theta \left\{ X_j \mid X_{j-1} \right\} = \int x \cdot f_{X_j}^{X_{j-1}=y}(x) dx \\ &= \int x \cdot \frac{f_{(X_j, X_{j-1})}(x, y)}{f_{X_{j-1}}(y)} dx \\ &= \theta + \rho(X_{j-1} - \theta) \end{aligned}$$

Par suite, (3.7) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\theta} \{ [\mathbf{Y}_j]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1 - \rho^2 + \theta^2 + 2\theta\rho(X_{j-1} - \theta) + \rho^2(X_{j-1} - \theta)^2}{(1 + \rho)^2} \\ &+ \frac{\rho^2}{(1 - \rho^2)^2} \cdot (X_{j-1} - \theta)^2 - \frac{2\rho(1 - \rho)}{(1 - \rho^2)^2} \cdot (X_{j-1} - \theta) \cdot (\theta + \rho(X_{j-1} - \theta)) \end{aligned}$$

A4) est vérifiée étant donné que $X_0 \sim N(\theta, 1)$

3.1.2 Simulation numérique.

Dans notre exemple, des équations (2.6) et (3.2) on a :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j(\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j (X_j - \theta) \cdot a_{ij} + \sum_{i=0}^{j-1} (X_i - \theta) \cdot a_{ij} \right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Avec a_{ij} définis par (3.1)

La figure (1) désigne les résultats test de normalité QQ-plot, l'histogramme et l'estimateur à noyau de la densité de la variable $\frac{1}{\sigma} \Delta_n$ calculé à partir d'un échantillon de 500 observations avec 1000 répliques.

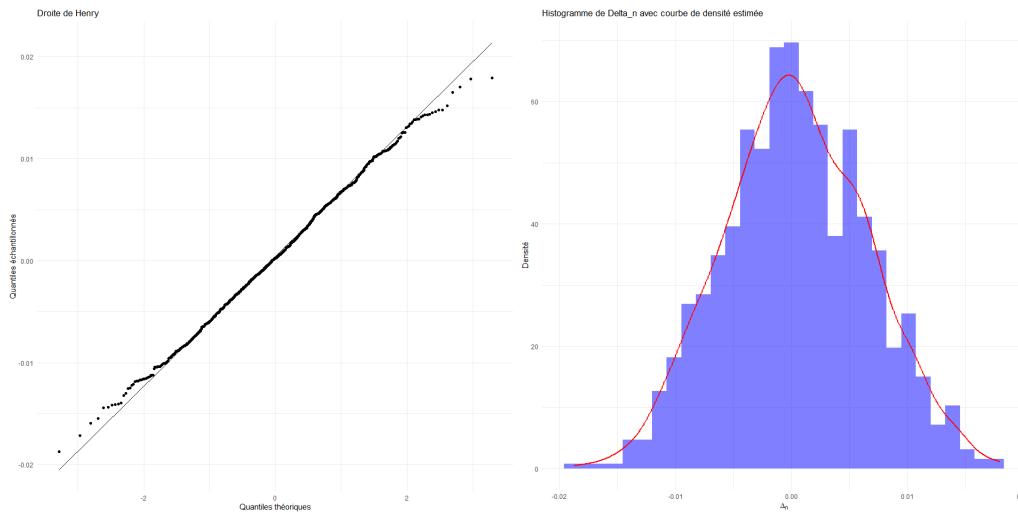


Figure (1)

Voici le code associé à cette figure :

```

# Étape 1 : Définir les paramètres et calculer sigma^2
rho <- 0.5
theta <- 5
n <- 500
num_simulations <- 1000

sigma_sq <- (1 / (1 - rho^2)^2) * (2 * rho^3 - 2 * rho + 1 + 2 * rho * theta^2 - 2 * rho^2 * theta^2)
sigma <- sqrt(sigma_sq)

# Étape 2 : Définir les fonctions de génération et de calcul
generate_X <- function(n, theta, rho) {
  mean_vector <- rep(theta, n)
  cov_matrix <- matrix(0, n, n)
  for (i in 1:n) {
    for (j in 1:n) {
      cov_matrix[i, j] <- rho^abs(i - j)
    }
  }
  mvrnorm(1, mu = mean_vector, Sigma = cov_matrix)
}

compute_Delta_n <- function(X, n, theta, rho, sigma) {
  sum_term <- (1 / (1 - rho^2)) * ((1 - rho) * (X - theta) - rho * c(0, head(X, -1) - theta))
  Delta_n <- (1 / (sigma * sqrt(n))) * sum(sum_term)
  return(Delta_n)
}

# Étape 3 : Générer les valeurs de Delta_n
Delta_n_values <- numeric(num_simulations)
set.seed(123) # Pour la reproductibilité

for (i in 1:num_simulations) {
  X <- generate_X(n, theta, rho)
  Delta_n_values[i] <- compute_Delta_n(X, n, theta, rho, sigma)
}

# Étape 4 : Créer le graphique de la droite de Henry (QQ plot)
qq_plot <- ggplot(data.frame(sample = Delta_n_values), aes(sample = sample)) +
  stat_qq() +
  stat_qq_line() +
  ggtitle("Droite de Henry") +
  xlab("Quantiles théoriques") +
  ylab("Quantiles échantillonnés") +
  theme_minimal()
print(qq_plot) # Affichez le QQ plot pour vérifier

y <- Delta_n_values
# Étape 5 : Créer l'histogramme avec une courbe de densité estimée
histogram_plot <- ggplot(data.frame(y), aes(x = y)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 30, fill = "blue", alpha = 0.5) +
  geom_density(color = "red", size = 1) +
  ggtitle("Histogramme de Delta_n avec courbe de densité estimée") +
  xlab(expression(Delta[n])) +
  ylab("Densité") +
  theme_minimal()
print(histogram_plot) # Affichez l'histogramme pour vérifier

# Étape 6 : Afficher les deux graphiques côte à côte
grid.arrange(qq_plot, histogram_plot, ncol = 2)

```

Code (1)

3.2 Exemple 2 :

Soient X_n des v.a, telles que pour tout $n \geq 0$.

$$\begin{cases} X_n = \alpha X_{n-1} + u_n \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

où $|\alpha| < 1$, $u_n \Rightarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$ et $X_0 = 0$

3.2.1 Vérifications des hypothèses.

A1)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{d\mathbb{P}_{(n,\theta)}}{d\lambda}(x_0, \dots, x_n) &= f_{[\mathbf{X}_n, \theta]}(x_0, \dots, x_n) \\ &= f_{[X_n, \theta]}^{(X_0, \dots, X_n = x_0, \dots, x_n)}(x_n) f_{[\mathbf{X}_{n-1}, \theta]}(x_0, \dots, x_{n-1}) \\ &= f_{[u_n, \theta]}^{(X_0, \dots, X_n = x_0, \dots, x_n)}(x_n - \alpha x_{n-1}) f_{[\mathbf{X}_{n-1}, \theta]}(x_0, \dots, x_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{[u_i, \theta]}(x_i - \alpha x_{i-1}) \cdot f_{X_0}(x_0) \end{aligned}$$

Par suite :

$$q_n(\theta, \theta^*) = \frac{d\mathbb{P}_{(n,\theta^*)}}{d\mathbb{P}_{(n,\theta)}} = \frac{\prod_{i=1}^n f_{[u_i, \theta^*]}(x_i - \alpha x_{i-1}) \cdot f_{X_0}(x_0)}{\prod_{i=1}^n f_{[u_i, \theta]}(x_i - \alpha x_{i-1}) \cdot f_{X_0}(x_0)}$$

d'où l'absolue continuité mutuelle entre les $\{\mathbb{P}_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$.

A2) on a :

$$\varphi_n^2 = \frac{q_n(\theta, \theta^*)}{q_{n-1}(\theta, \theta^*)} \Rightarrow \varphi_n(\theta, \theta^*) = e^{-\frac{1}{4}(\theta^{*2} - \theta^2)} \cdot e^{\frac{1}{2}(\theta^* - \theta)(x_n - \alpha x_{n-1})}$$

d'où : $\dot{\varphi}_n(\theta) = \frac{1}{2}(x_n - \alpha x_{n-1} - \theta)$

Montrons que :

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} |\varphi_j(\theta, \theta + \lambda h) - 1 - \lambda h \dot{\varphi}_j(\theta)| \right]^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad (3.9)$$

uniformément sur des suites bornées $h \in \mathbb{R}$ et uniformément en $j \geq 1$

L'équation (3.9) sera équivalente à :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{1}{4}\lambda h(\lambda h + 2\theta) + \frac{1}{2}\lambda h u_j} - 1 - \frac{\lambda h}{2}(u_j - \theta) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[\left(e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 + \frac{1}{2}\lambda h(u_j - \theta)} - 1 \right)^2 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} (u_j - \theta)^2 - \lambda h(u_j - \theta) e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 + \frac{1}{2}\lambda h(u_j - \theta)} \right] \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \lambda h(u_j - \theta)} + 1 - 2e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 + \frac{1}{2}\lambda h(u_j - \theta)} + \frac{\lambda^2 h^2}{4} (u_j - \theta)^2 - \lambda h(u_j - \theta) e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 + \frac{1}{2}\lambda h(u_j - \theta)} \right]
 \end{aligned} \tag{*}$$

De (*) on remarque que $(u_j - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, ainsi on aura :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\lambda h(u_j - \theta) e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 + \frac{1}{2}\lambda h(u_j - \theta)} \right] &= \lambda h e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x e^{\frac{(\lambda h)x}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\
 &= \lambda h e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\lambda h)^2}{8}} \int x e^{[x - \frac{\lambda h}{2}]^2} dx \right) \\
 &= \lambda h e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2} \left(\frac{\lambda h}{2} e^{\frac{(\lambda h)^2}{8}} \right) = \frac{\lambda^2 h^2}{2} e^{-\frac{(\lambda h)^2}{8}}
 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} [\varphi_j(\theta, \theta + \lambda h) - 1] - h\dot{\varphi}_j(\theta) \right]^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \left[2 - 2e^{-\frac{(\lambda h)^2}{8}} + \frac{\lambda^2 h^2}{4} - \frac{\lambda^2 h^2}{2} e^{-\frac{(\lambda h)^2}{8}} \right] \\
 &= -2 \left(\frac{e^{-\frac{(\lambda h)^2}{8}} - 1}{\lambda^2} \right) + \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2} e^{-\frac{(\lambda h)^2}{8}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\left(\frac{h^2}{8}\right) + \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2} = 0
 \end{aligned}$$

ii) $\dot{\varphi}_j(\theta) = \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1} - \theta)$ est \mathcal{A}_j -mesurable pour tout $j \geq 1$.

A3 i)

$$\int [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mathbf{1}_{\{[t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a\}} d\mathbb{P}_\theta \leq \mathbb{E}^{1/2} [(t\dot{\varphi}_j(\theta))^4] \sqrt{\mathbb{P}([t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a)}$$

On a :

$$\mathbb{P} \left((U_j - \theta)^2 > \frac{4a}{t^2} \right) = 1 - \mathbb{P} \left(-\sqrt{\frac{4a}{t^2}} \leq u_j - \theta \leq \sqrt{\frac{4a}{t^2}} \right) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$$

ii)

$$\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [(u_j - \theta)^2] = 1 = \bar{\Gamma}(\theta)$$

iii) Par indépendance des u_j , on aura :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 = \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (u_j - \theta)^2 \rightarrow \frac{1}{4} t^2 \bar{\Gamma}(\theta) \quad (\text{LGN Faible}).$$

iv)

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\mathbb{E}_\theta \left\{ [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} - [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta \left\{ [u_j - \theta]^2 \mid \mathcal{A}_{j-1} \right\} - [u_j - \theta]^2$$

$$(\text{Par indépendance des } u_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta [u_j - \theta]^2 - [u_j - \theta]^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0$$

A4) est vérifiée étant donné que $X_0 = 0$

3.2.2 Simulation numérique

La figure (2) désigne les résultats test de normalité QQ-plot, l'histogramme et l'estimateur à noyau de la densité de la variable Δ_n calculé à partir d'un échantillon de 500 observations avec 1000 répliques.

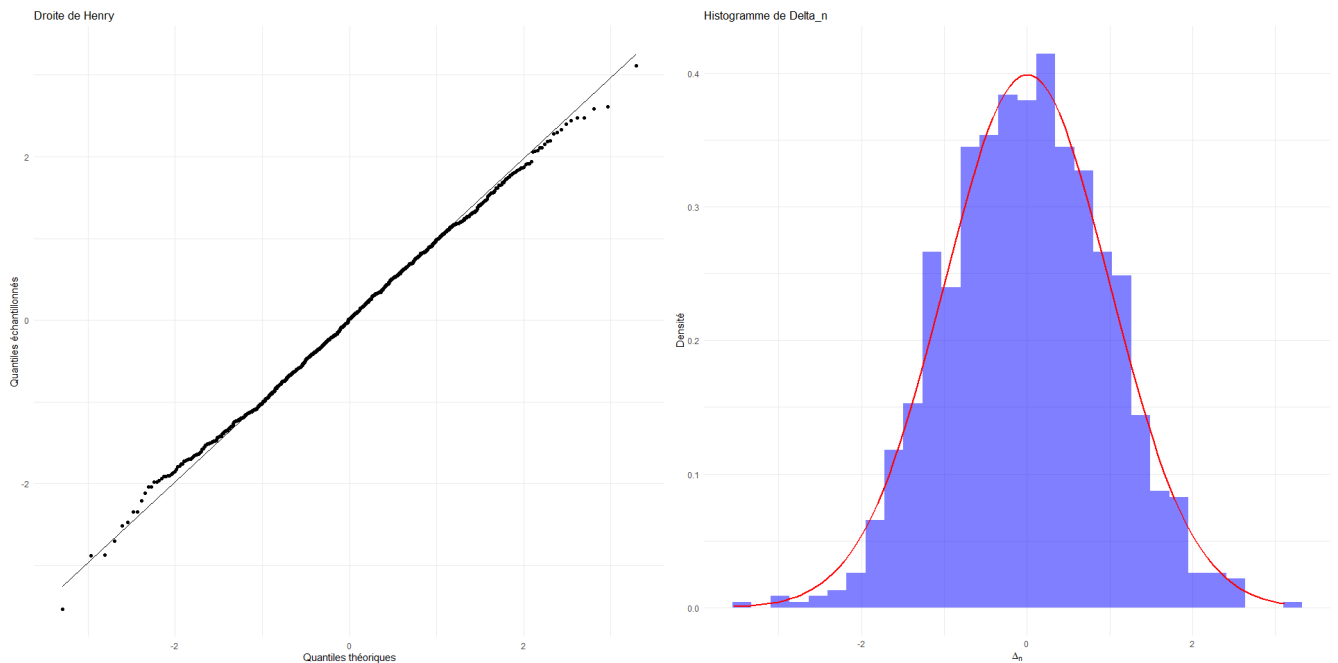


Figure (2)

Voici le code associé à cette figure :

```
n <- 500
num_simulations <- 1000

# Fonction pour calculer Delta_n
compute_Delta_n <- fonction(n) {
  u <- rnorm(n, mean = 0, sd = 1) # Générer n variables aléatoires suivant N(0, 1)
  Delta_n <- (1 / sqrt(n)) * sum(u)
  return(Delta_n)
}

# Générer les valeurs de Delta_n
Delta_n_values <- numeric(num_simulations)
set.seed(123) # Pour la reproductibilité

for (i in 1:num_simulations) {
  Delta_n_values[i] <- compute_Delta_n(n)
}

# Créer le graphique de la droite de Henry (QQ plot)
qq_plot <- ggplot(data.frame(sample = Delta_n_values), aes(sample = sample)) +
  stat_qq() +
  stat_qq_line() +
  ggtitle("Droite de Henry") +
  xlab("Quantiles théoriques") +
  ylab("Quantiles échantillonnés") +
  theme_minimal()

# Créer l'histogramme
histogram_plot <- ggplot(data.frame(Delta_n_values), aes(x = Delta_n_values)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), bins = 30, fill = "blue", alpha = 0.5) +
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = 0, sd = 1), color = "red", size = 1) +
  ggtitle("Histogramme de Delta_n") +
  xlab(expression(Delta[n])) +
  ylab("Densité") +
  theme_minimal()

# Afficher les deux graphiques côte à côte
grid.arrange(qq_plot, histogram_plot, ncol = 2)
```

Code (2)

3.3 Exemple 3 :

Soient $X_n, n \geq 0$ des v.a constituant un processus Gaussien tels que :

- $\mathbb{E}_\theta [X_n] = \theta$ ou 2θ suivant la parité de n (Impaire ou paire respectivement)
- $\sigma_\theta^2 [X_n] = 2c$, (c connue) pour tout $n \geq 0$
- $\text{Cov}_\theta [X_m, X_n] = c$, pour tout n et m ($n \neq m$)

vérifions les hypothèses.

[(A1)-(A4)] : Tout d'abord, considérons $\mu_n = \theta$ ou 2θ suivant la parité de n (Impaire ou paire respectivement)

A1) On a :

$$\frac{d\mathbb{P}_{(n,\mu_n)}}{d\lambda}(x_0, \dots, x_n) = f_{[\mathbf{X}_n, \mu_n]}(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Gamma)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Gamma^{-1}(x-\mu)}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } q_n(\mu_n, \mu_n^*) &= \frac{f_{[\mathbf{X}_n, \mu_n^*]}(x_0, \dots, x_n)}{f_{[\mathbf{X}_n, \mu_n]}(x_0, \dots, x_n)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(x-\mu^*)^t \Gamma^{-1}(x-\mu^*)} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Gamma^{-1}(x-\mu)} = e^{-\frac{1}{2} \cdot G_n(\mu_n, \mu_n^*)} \end{aligned}$$

A2)

i) On a :

$$\varphi_n^2(\theta, \theta^*) = \frac{q_n(\theta, \theta^*)}{q_{n-1}(\theta, \theta^*)} = e^{-\frac{1}{2}(G_n(\mu_n, \mu_n^*) - G_{n-1}(\mu_n, \mu_n^*))}$$

Avec

$$\begin{aligned} G_n(\mu_n, \mu_n^*) - G_{n-1}(\mu_n, \mu_n^*) &= \left(2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} (\mu_i^{*2} - \mu_i^2) + a_{nn} \cdot (\mu_n^{*2} - \mu_n^2) \right) \\ &\quad - 2 \left(\sum_{i=0}^n (a_{in} \cdot x_n) \cdot (\mu_i^* - \mu_i) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot a_{in}) \cdot (\mu_i^* - \mu_i) \right) \end{aligned}$$

Notons dans cet exemple :

$$S_n = \left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}=1}^{n-1} a_{in} + \sum_{i_{\text{impaire}}=1}^n a_{in} \right] + 2 \left[\sum_{i_{\text{paire}}=0}^{n-1} a_{in} + \sum_{i_{\text{paire}}=0}^n a_{in} \right] \right)$$

On aura :

$$\begin{aligned} \varphi_n^2(\theta, \theta^*) &= e^{-\frac{1}{2}(\theta^{*2}-\theta^2)S_n+(\theta^*-\theta)\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}}^n (a_{in}\cdot x_n)+\sum_{i_{\text{impaire}}}^{n-1} (x_i\cdot a_{in})\right]+2\left[\sum_{i_{\text{paire}}}^n (a_{in}\cdot x_n)+\sum_{i_{\text{paire}}}^{n-1} (x_i\cdot a_{in})\right]\right)} \\ \Rightarrow \varphi_n(\theta, \theta^*) &= e^{-\frac{1}{4}(\theta^{*2}-\theta^2)S_n+\frac{1}{2}(\theta^*-\theta)\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}}^{n-1} a_{in}\cdot x_i+\sum_{i_{\text{impaire}}}^n a_{in}\cdot x_n\right]+2\left[\sum_{i_{\text{paire}}}^{n-1} a_{in}\cdot x_i+\sum_{i_{\text{paire}}}^n a_{in}\cdot x_n\right]\right)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n(\theta) &= -\frac{1}{2}\theta S_n + \frac{1}{2}\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}}^{n-1} a_{in}\cdot X_i + \sum_{i_{\text{impaire}}}^n a_{in}\cdot X_n\right] + 2\left[\sum_{i_{\text{paire}}}^{n-1} a_{in}\cdot X_i + \sum_{i_{\text{paire}}}^n a_{in}\cdot X_n\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i_{\text{impaire}}}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta) + \sum_{i_{\text{impaire}}}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right] + \left[\sum_{i_{\text{paire}}}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta) + \sum_{i_{\text{paire}}}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Montrons que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda}|\varphi_j(\theta, \theta + \lambda h) - 1 - \lambda h \dot{\varphi}_j(\theta)|\right]^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \text{Pour tout } j \geq 0 \quad (3.12)$$

Ceci revient à montrer que :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{4}\lambda h(\lambda h+2\theta)S_n+\frac{1}{2}(\lambda h)\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}=1}^{n-1} a_{in}\cdot X_i+\sum_{i_{\text{impaire}}=1}^n a_{in}\cdot X_n\right]+2\left[\sum_{i_{\text{paire}}=0}^{n-1} a_{in}\cdot X_i+\sum_{i_{\text{paire}}=0}^n a_{in}\cdot X_n\right]\right)} - 1\right. \\ &\quad \left.- \frac{\lambda h}{2}\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}=1}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta) + \sum_{i_{\text{impaire}}=1}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right] + 2\left[\sum_{i_{\text{paire}}=0}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta) + \sum_{i_{\text{paire}}=0}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right]\right)\right]^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 S_n+\frac{1}{2}(\lambda h)\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta)+\sum_{i_{\text{impaire}}}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right]+2\left[\sum_{i_{\text{paire}}=0}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta)+\sum_{i_{\text{paire}}}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right]\right)} - 1\right. \\ &\quad \left.- \frac{\lambda h}{2}\left(\left[\sum_{i_{\text{impaire}}}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta) + \sum_{i_{\text{impaire}}}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right] + 2\left[\sum_{i_{\text{paire}}}^{n-1} a_{in}\cdot (X_i - \theta) + \sum_{i_{\text{paire}}}^n a_{in}\cdot (X_n - \theta)\right]\right)\right]^2 \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Puisque $Y_n = X_n - \theta$ sont des gaussiennes centrées réduites pour tout $n \geq 0$, alors toutes

combinaisons linéaire sera une gaussienne centrée. Avec

$$\text{Cov}(Y_n, Y_m) = \text{Cov}(X_n - \theta, X_m - \theta) = \mathbb{E}[X_n X_m] - \theta^2 = c - \theta^2$$

La suite du calcul de cette limite se poursuivra comme dans l'exemple 1, cette fois on notera :

$$\mathbf{Y}_n = \left(\left[\sum_{i \text{ impaire}}^{n-1} a_{in} \cdot Y_i + \sum_{i \text{ impaire}}^n a_{in} \cdot Y_n \right] + 2 \left[\sum_{i \text{ paire}}^{n-1} a_{in} \cdot Y_i + \sum_{i \text{ paire}}^n a_{in} \cdot Y_n \right] \right)$$

Et $\sigma^2 = \sigma^2(\mathbf{Y}_n)$

On aura ainsi :

$$\mathbf{Y}_n \sim N(0, \sigma^2)$$

En remplaçant par \mathbf{Y}_n dans l'équation (3.13) on aura à montrer que :

$$\frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{1}{2}(\lambda h) \mathbf{Y}_n} - 1 - \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_n \right]^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \text{Pour tout } n \geq 0$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} - 1 - \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j \right]^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[\left(e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} - 1 \right)^2 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} \mathbf{Y}_j^2 - \lambda h \mathbf{Y}_j e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(\lambda h)^2}{2} S_n + \lambda h \mathbf{Y}_j} + 1 - 2e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} + \frac{\lambda^2 h^2}{4} \mathbf{Y}_j^2 - \lambda h \mathbf{Y}_j e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} \right] \quad (*) \end{aligned}$$

De (*), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\lambda h \mathbf{Y}_j e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 S_n + \frac{\lambda h}{2} \mathbf{Y}_j} \right] &= \mathbb{E} \left[\lambda h (\sigma Z_j) e^{-\frac{1}{4}(\lambda h)^2 S_n + \frac{\lambda h}{2} (\sigma Z_j)} \right] \quad (\text{avec } \sigma \text{ défini dans (3.4) et } Z_j := \frac{1}{\sigma} \mathbf{Y}_j \sim N(0, 1)) \\ &= \lambda h \sigma e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int z e^{\frac{(\lambda h \sigma)}{2} z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \\ &= \lambda h \sigma e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8}} \int z e^{[z - \frac{\lambda h \sigma}{2}]^2} dz \right) \\ &= \lambda h \sigma e^{-\frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \left(\frac{\lambda h \sigma}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8}} \right) = \frac{\lambda^2 h^2 \sigma^2}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} [\varphi_j(\theta, \theta + \lambda h) - 1] - h\dot{\varphi}_j(\theta) \right]^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \left[e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{2} - \frac{(\lambda h)^2}{2} S_n} + 1 - 2e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} + \frac{\lambda^2 h^2 \sigma^2}{4} - \frac{\lambda^2 h^2 \sigma^2}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \right] \\ &= \left(\frac{e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{2} - \frac{(\lambda h)^2}{2} S_n} - 1}{\lambda^2} \right) - 2 \left(\frac{e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} - 1}{\lambda^2} \right) + \frac{h^2 \sigma^2}{4} - \frac{h^2 \sigma^2}{2} e^{\frac{(\lambda h \sigma)^2}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{4} S_n} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{h^2 \sigma^2 - h^2 S_n}{2} - 2 \left(\frac{h^2 \sigma^2 - 2h^2 S_n}{8} \right) + \frac{h^2 \sigma^2}{4} - \frac{h^2 \sigma^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

ii) $\dot{\varphi}_j(\theta)$ calculé dans (3.11) est $\mathcal{A}_j \times \mathcal{C}$ - mesurable car c'est une combinaison linéaire d'un processus $\mathcal{A}_j \times \mathcal{C}$ - mesurable.

A3) i) Pour chaque $\theta \in \Theta$ et chaque $t \in \mathbb{R}$, $[t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2, j \geq 1$, sont uniformément intégrables par rapport à \mathbb{P}_θ . Autrement dit, uniformément en $j \geq 1$, et d'après (3.11) on déduit que : $\dot{\varphi}_j(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{Y}_j$

Rappelons aussi que $\mathbf{Y}_j \sim N(0, \sigma^2)$,

On aura :

$$\begin{aligned} \int_{\{[t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a\}} [t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 d\mathbb{P}_\theta &= \mathbb{E}_\theta \left[(t\dot{\varphi}_j(\theta))^2 \mathbf{1}_{(t\dot{\varphi}_j(\theta))^2 > a} \right] \\ &\leq \mathbb{E}_\theta^{1/2} [(t\dot{\varphi}_j(\theta))^4] \sqrt{\mathbb{P}_\theta ([t\dot{\varphi}_j(\theta)]^2 > a)} \\ &\leq \frac{t^4}{16} \cdot \mathbb{E}_\theta^{1/2} [\mathbf{Y}_j^4] \sqrt{\mathbb{P}_\theta (\mathbf{Y}_j^2 > \frac{4a}{t^2})} \\ &\leq K \cdot \sqrt{1 - \mathbb{P}_\theta \left(\frac{4a}{t^2 \sigma^2} \leq Z_j \leq \frac{4a}{t^2 \sigma^2} \right)} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ii) On a :

$$\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta (\mathbf{Y}_j)^2$$

De ce qui précède, nous avons poursuivi les calculs des deux premières hypothèses ainsi que

"**A3)** i)" avec une approche théorique sur la matrice de covariance $\Gamma^{-1} = (a_{ij}, 0 \leq i, j \leq n)_{(n+1, n+1)}$ définie comme dans l'exemple 1 (3.1).

Remarquons que puisque :

$$\Gamma = c \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer Γ^{-1} , nous devons comprendre comment cette structure particulière

influence les éléments de l'inverse. Une méthode efficace pour ce type de matrice est d'utiliser la méthode de Schur complémentaire (cité dans le livre de R.Bellman (1997) [1]) ou d'autres techniques analytiques.

Pour une matrice Γ de cette forme, son inverse Γ^{-1} a une structure spécifique. En effet, il peut être montré que :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{c(n+2)} \begin{pmatrix} n+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n+1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n+1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier cela, on peut calculer le produit $\Gamma\Gamma^{-1}$ et s'assurer qu'il donne la matrice identité :

$$\Gamma\Gamma^{-1} = \frac{1}{c(n+2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n+1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n+1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

Effectuons le calcul pour quelques éléments pour vérifier :

Pour le premier élément de la première ligne :

$$\sum_{k=0}^n \Gamma_{0k}(\Gamma^{-1})_{k0} = \frac{1}{c(n+2)} \left(2c \cdot (n+1) + \sum_{k=1}^n (-c) \right) = \frac{2cn + c2 - cn}{c(n+2)} = 1$$

Pour les autres éléments de la première ligne (i.e., $\Gamma\Gamma^{-1}_{0j}$, $j \neq 0$) :

$$\sum_{k=0}^n \Gamma_{0k}(\Gamma^{-1})_{kj} = \frac{1}{c(n+2)} \left(2c \cdot (-1) + \sum_{k=1}^{n-1} (-c) + c(n+1) \right) = \frac{-2c - c(n-1) + c(n+1)}{c(n+2)} = 0$$

En effectuant de manière similaire les calculs pour toutes les lignes et colonnes, nous confirmons que $\Gamma\Gamma^{-1} = I$.

Ainsi, l'inverse de la matrice Γ est donnée par :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{c(n+2)} \begin{pmatrix} n+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n+1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n+1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'équation (3.11) sera :

$$\dot{\varphi}_n(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{Y}_n = \frac{1}{2c(n+2)} \left((n+1)(X_n - \theta) \cdot \mathbf{1}_{n=2k+1} + 2(n+1)(X_n - \theta) \cdot \mathbf{1}_{n=2k} - \sum_{i=0}^n (X_i - \theta) - \sum_{i \text{ paire}}^n (X_i - \theta) \right)$$

A4) est vérifiée étant donné que $X_0 \sim N(2\theta, 2c)$

Conclusion Générale

Nous avons considéré, dans ce mémoire un processus stochastique non nécessairement Markovien ni stationnaire et avons montré que sa fonction de vraisemblance admet une décomposition bien particulière et est asymptotiquement gaussienne. Ces résultats proviennent de l'article de Roussas (1979)[8]

Nous avons détaillé les résultats très techniques de l'article en question et développé les exemples qu'il a juste cités. Nous avons également fait des simulations numériques montrant le caractère gaussien de la fonction de vraisemblance ainsi que des variables issues de la décomposition de cette dernière et ceci pour quelques exemples.

Bibliographie

- [1] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis : Second Edition*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1997.
- [2] B. Boutaleb and N. Boughalem. Memoire sur le traitement du signal. <http://dspace.univ-jijel.dz:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/1544/M.Mat.PS.%2004-18.pdf?sequence=1>, 2018.
- [3] B. M. Brown. Martingale central limit theorems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(1) :59–66, 1971.
- [4] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [5] I.A. Ibragimov and KhasminskiïR.Z. *Statistical Estimation : Asymptotic Theory*. Applications of mathematics. Springer New York, 1981.
- [6] A.N Philippou and G.G. Roussas. Asymptotic distribution of the likelihood function in the independent not identically distributed case. *The Annals of Statistics*, pages 454–471, 1973.
- [7] G.G. Roussas. Contiguity of probability measures. 1972.
- [8] G.G. Roussas. Asymptotic distribution of the log-likelihood function for stochastic processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 47(1) :31–46, 1979.
- [9] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2000.