

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد – تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –
Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par: BAKHTI Mohammed bahae eddine / Abderrahman Abou bakr

Sujet

Méthode SUPG pour la résolution par éléments finis de l'équation de transport à convection dominante.

Année universitaire : 2022 / 2023

Soutenu publiquement, le	/	/, devant le jury composé de :	
M/Mme nom et prénoms	Grade	Université de Tlemcen	Président
M/Mme nom et prénoms	Grade	Université de Tlemcen	Examineur
M/Mme nom et prénoms	Grade	Université de Tlemcen	Encadreur
M/Mme nom et prénoms	Grade	Université de Tlemcen	Co-Encadreur

Remerciements

Avant tout, Nous devons tout d'abord remercions le bon Dieu, pour nous' avoir donné la santé, la force et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre encadrant **M. MEFTAH Khouane** pour leur soutien et collaboration à travers ses précieux conseils.

Nous tenons à remercier, les membres de jury qui ont bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Nous tenons à remercier chaleureusement tous les enseignants et le staff administratif du département de Génie Mécanique et tous qui ont participé de près ou de loin pour accomplir ce travail.

Dédicaces

- **B.bahae eddine**

Je tiens à dédier ce mémoire à :

A mes parents qui sont crédités de tout.

A mes frères et ma sœur, et mes neveu ghaith et moncef

A mon oncle, ma tante et mes cousins

- **ABDERRAHMANE ABOUBAKR**

Je dédie ce travail à ma mère, celle qui a insufflé en moi le goût de la vie et le sens des responsabilités. Merci pour ton amour inconditionnel et ton soutien constant. Je dédie également ce travail à mon père, celui qui a toujours été une source d'inspiration et de courage. Merci pour tes encouragements et ta confiance en moi. Enfin, je dédie ce travail à mes frères et ma sœur, pour leur soutien et leur présence tout au long de ce parcours. Votre soutien indéfectible a été précieux et j'apprécie énormément votre amour et votre encouragement.

Résumé

Les lois de conservation, telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, sont formulées sous la forme d'équations de convection-diffusion. Par conséquent, la résolution de ce type d'équation revêt une grande importance. Cependant, les solutions numériques obtenues par la méthode des éléments finis de type Galerkin sont souvent perturbées par des oscillations non physiques, surtout dans les cas de convection dominante. Afin de remédier à ces instabilités numériques, notre travail consiste à développer et à mettre en œuvre une méthode décentrée de type éléments finis, en introduisant une viscosité artificielle supplémentaire. Les résultats des tests effectués sur le modèle développé ont démontré sa stabilité et sa précision.

Mots clés : méthode SUPG, élément finis, langage Matlab.

ملخص

تمت صياغة قوانين الحفظ (الكتلة والزخم والطاقة) في شكل معادلة الحمل الحراري. ومن هنا يأتي أهمية حل هذا النوع من المعادلات. ومع ذلك، تواجه الحلول العددية التقريبية بطريقة العناصر المحدودة من نوع Galerkin مشكلة في وجودذبذبات غير مادية في حالة الحمل الحراري السائد. لمعالجة هذا العدم الاستقرار العددي، قمنا بتطوير وتنفيذ طريقة خارج المركز لنوع العنصر المحدود عن طريق إضافة لزوجة اصطناعية. تم اختبار النموذج المطور وتبين أنه مستقر ودقيق.

الكلمات الرئيسية: طريقة SUPG, العناصر المحدودة, لغة matlab

Abstract

The laws of conservation (mass, momentum, and energy) are expressed as convection-diffusion equations, highlighting the significance of solving such equations. However, when employing the Galerkin-type finite element method, the numerical approximations become contaminated with non-physical oscillations, particularly in scenarios dominated by convection. To address these numerical instabilities, our approach involves the development and implementation of an off-centre finite element method that incorporates an artificial viscosity. Through extensive testing, the developed model has demonstrated stability and accuracy.

Key word : méthode SUPG, élément finis, langage Matlab.

Table des matières

I.1. Introduction.....	2
I.2. Notation.....	2
I.3 Théorème de transport.....	3
I.4 Lois de conservation	5
I.4.1 Conservation de la masse	5
I.4.2. Conservation de la quantité de mouvement :	6
I.4.3. Conservation de l'énergie :	8
I.5 Equation de convection-diffusion	10
II.1. Introduction.....	9
II.2. Principe de la méthode.....	9
II.3. Maillage	10
II.4. Notation indicielle - cas 1 D:	11
II.4.1 Schémas numériques pour les dérivées premières.....	12
II.4.1.1. Schéma décentré amont	12
II.4.1.2. Schéma décentré aval.....	13
II.4.2. Schémas numériques pour les dérivées secondes	14
II.4.2.1 Schéma décentré amont	14
II.4.2.2 Schéma décentré aval.....	15
II.4.2.3 Schéma centré :	15
III.1. Introduction :	17
III.2. Forme intégrale.....	19
III.3. Maillage.....	19
III.4. Résolution :	31
III.5. Cas de convection dominante	33
III.5.1. Méthode de la diffusion artificielle ajoutée (DAA) :	37

III.5.2. Méthode de Petrov-Galerkine :.....	38
III.5.2.1 Méthode GLS (Galerkine Least-Squares méthode) :.....	38
III.5.2.2. Méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkine method):	38
IV.1 Algorithmes, Exemples et Programmes en langage Matlab.....	38
IV.1.1. Cas linéaire.....	38
IV.2. Exemple 1.....	39
IV.2.1. Maillage à 2 éléments.....	39
VI.2.1.1. Méthode de Galerkin	41
VI.2.1.2. Méthode DAA	44
VI.2.1.3. Méthode SUPG	44
VI.2.2. Maillage à 4 éléments.....	45
VI.2.2.1 Méthode de Galerkin	47
VI.2.2.2 Méthode DAA	52
VI.2.2.3 Méthode SUPG	53
IV.3. Programme numérique en langage matlab	55
IV.3.1 Méthode de Galerkin :	58
IV.3.2. Méthode DDA	58
IV.3.3. Méthode SUPG :	58
IV.4. Exemple 2.....	61
IV.4.1. Méthode de Galerkin	61
IV.4.2. Méthode DAA	63
IV.4.3. Méthode SUPG	63

Listes des figures

Figure II. 1 : maillage différences finies	10
Figure II. 2 : Segment appartient à la courbe $f(x)$ limité par les points $i-1$ et i	12
Figure II. 3 : Segment appartient à la courbe $f(x)$ limité par les points i et $i+1$	13
Figure II. 4: Segment appartient à la courbe $f(x)$ limité par les points $i-1$ et $i+1$	13
Figure II. 5 : Le maillage 1D de DF	17
Figure III. 1: Maillage ou discrétisation du domaine spatial.....	20
Figure III. 2 : Élément linéaire à deux nœuds (L2).....	20
Figure III. 3 : Influence du nombre de Peclet sur la solution numérique.....	36
Figure III. 4 : Tracé de la fonction ζ_{Pe} et de ses approximations.....	43
Figure IV. 1 : Discrétisation du domaine en deux éléments L2	40
Figure IV. 2 : Maillage du domaine en quatre éléments L2.....	Error! Bookmark not defined.
Figure IV. 3 : Solutions numériques obtenues par les trois méthodes	55

Nomenclature

Symboles grecs

Symbole	Signification
$\int$	Intégrale
$\square$	Matrice
$\square^T$	Matrice transposée
$\langle \rangle$	Vecteur ligne
$\{\}^T$	Transposé d'un vecteur
Σ	Somme
Π	Produit
∂	Dérivée partielle

Majuscules romaines

Symbole	Signification
F	Vecteur de sollicitations
N	Nombre des nœuds
S	Surface
L^e	Éléments finis
$\phi(x)$	Fonction test
$N(x)$	Polynômes d'interpolation de Lagrange
Ke	Matrice de rigidité élémentaire
Kg	Matrice de rigidité globale
Fe	Vecteur élémentaire des sollicitations
Pe	Nombre de Peclet

Minuscules romaines :

Symbole	Signification
---------	---------------

h_e	Taille de l'élément
$\tilde{k}$	Viscosité artificielle ajoutée
f	Fonction
c_i	Variables nodales
x_i	Coordonnées nodales

INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE :

Introduction générale

L'utilisation de la simulation numérique, qui est étroitement liée à la physique, aux mathématiques et à l'informatique, est désormais courante dans la recherche. Grâce aux avancées et à l'amélioration des capacités de calcul, elle s'est répandue largement dans l'industrie. En conséquence, la simulation numérique s'est établie comme un outil de conception essentiel et efficace, offrant la possibilité de :

- De simuler des phénomènes physiques complexes,
- D'étudier les interactions de plusieurs disciplines,
- D'améliorer les modèles théoriques en passant des fluides parfaits aux fluides réels,
- De raccourcir la durée de mise au point du prototype final,
- De réduire le coût de conception.

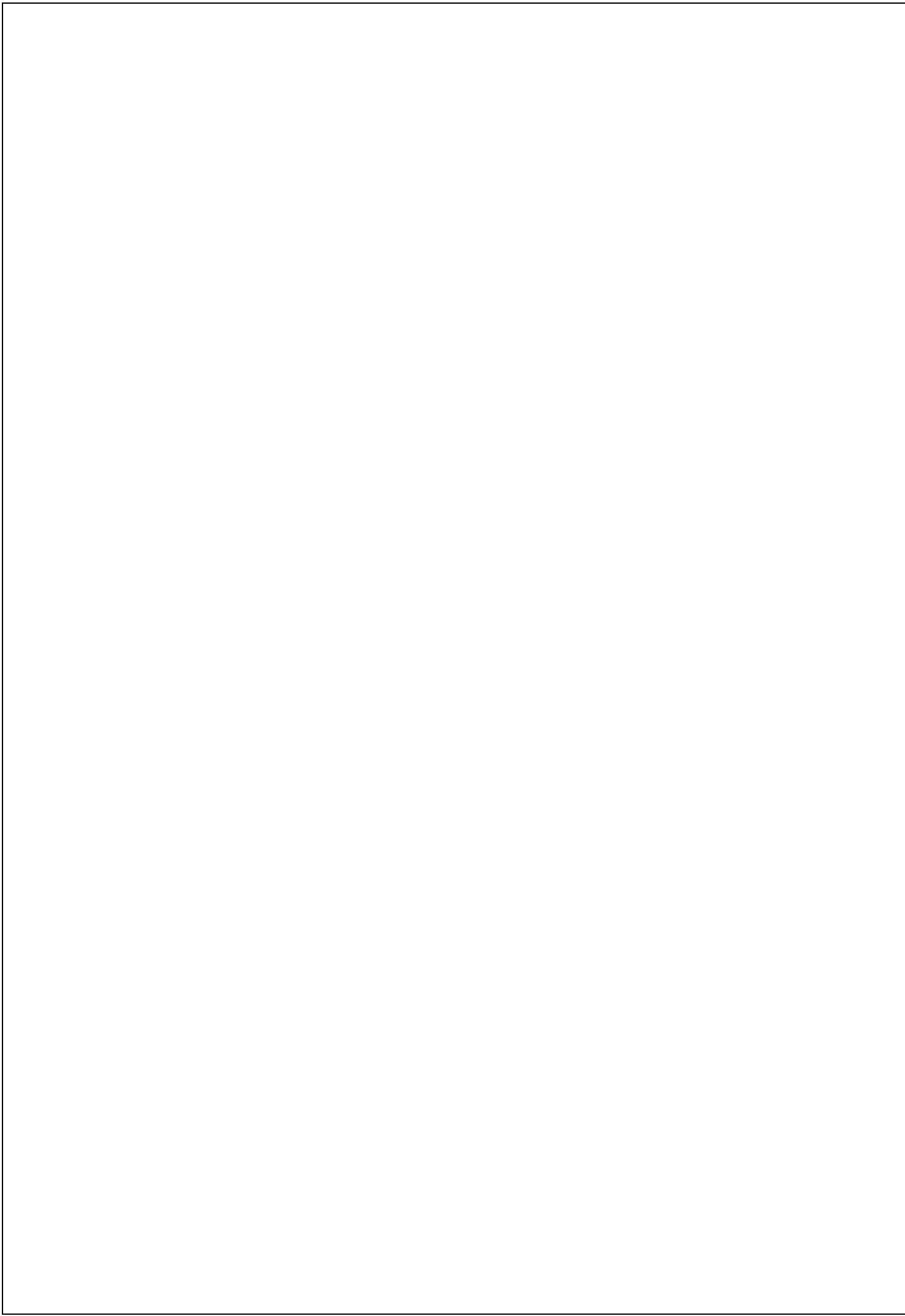
Il existe plusieurs méthodes numériques utilisées dans le domaine de la modélisation des fluides, telles que la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis. Chacune de ces méthodes présente ses avantages et ses limitations.

Apparue dans les années quarante, la méthode des éléments finis est maintenant largement reconnue comme l'une des méthodes les plus puissantes développées à ce jour. Parmi les caractéristiques fondamentales qui ont contribué à son succès, on peut mentionner :

- La possibilité de choisir une variété de formulations vibrationnelles associées au problème mathématique,
- La possibilité de travailler sur des maillages non structurés, ce qui facilite la modélisation des géométries complexes,
- Une bonne précision à coût raisonnable,
- Le traitement naturel des conditions aux limites de type différentiel,

Dans les années soixante-dix, la méthode des éléments finis de type Galerkin a connu un succès évident. Cependant, les chercheurs ont exprimé des préoccupations quant à son utilisation dans la simulation numérique des problèmes de mécanique des fluides. En effet, on pensait à tort que le succès de cette méthode pourrait être directement appliqué à la modélisation de ce type de problèmes. En réalité, cette vision s'est révélée trop optimiste, en particulier en ce qui concerne la modélisation des phénomènes de transport à convection dominante.

La présence des termes de convection dans les équations de Navier-Stokes pose une difficulté majeure. En pratique, les solutions numériques approximatives obtenues par la méthode des éléments finis de type Galerkin sont souvent affectées par des oscillations non physiques. Cela a conduit au développement de nouvelles méthodes d'éléments finis telles que la méthode SUPG, GLS, DAA, etc. Ces méthodes ont été conçues pour atténuer les oscillations indésirables et améliorer la précision des résultats dans la modélisation des problèmes de convection.



Chapitre I

Lois de conservation

I.1. Introduction

Les lois de conservation sont des principes fondamentaux en physique qui décrivent la façon dont certaines quantités importantes sont conservées lors de divers processus physiques. Ces lois sont basées sur l'idée que certaines quantités, comme la masse, l'énergie, la quantité de mouvement et la charge électrique, sont des quantités fondamentales qui ne peuvent être créées ou détruites, mais qui peuvent être transformées d'une forme à une autre.

Ces lois peuvent être établies de différentes manières parmi-elles la notion du volume de contrôle. Un volume de contrôle est défini comme un espace théorique qui est délimité par une surface fermée appelée "surface de contrôle". Ce volume peut être soit statique, soit mobile et peut suivre le mouvement du fluide à l'intérieur, ou être soumis à un mouvement arbitraire.

Le terme volume de contrôle matériel, fait référence à un volume de contrôle qui se déplace avec le fluide et dont la vitesse en un point de la surface est égale à la vitesse locale du fluide. Ce volume est identifié par $V_m(t)$ tandis que la surface de contrôle est désignée par $A_m(t)$.

I.2. Notation

- Dans cette étude, un vecteur ou une matrice est désigné en gras.
- Pour toute fonction scalaire φ , on désigne par :

$$\nabla \varphi = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right\} \text{ et } \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

- Pour tout vecteur $\mathbf{v}$ de composantes v_1 , v_2 et v_3 on désigne par :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \text{ et } \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Pour tout tenseur $\boldsymbol{\tau}$, on désigne par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \text{ et } \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Pour tout tenseur $\boldsymbol{\tau}$, on désigne par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans cette étude, on désigne par $\mathbf{x}(x)$ le vecteur des coordonnées et par $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ le vecteur vitesse du fluide.

I.3 Théorème de transport

Soit un volume de contrôle $V_a(t)$ limité par une surface de contrôle $A_a(t)$ (figure 1) :

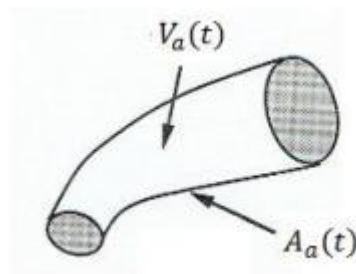


Figure I. 1 : Volume de contrôle

Chapitre I : LOIS DE CONSERVATION

Et soit $\Phi(\mathbf{x}, t)$ une fonction définie dans le volume de contrôle $V_a(t)$. Le théorème de transport est l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \Phi dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} \Phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{I. 1})$$

o

Où $\mathbf{w}$ désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et $\mathbf{n}$ est la normale extérieure.

Corollaires

- Si le volume de contrôle est fixe alors $\mathbf{w} = 0$ et par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \Phi dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV \quad \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \Phi dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV \quad (\text{I. 2})$$

- Dans le cas d'un volume de contrôle matériel (figure 2), la vitesse de la surface de contrôle $\mathbf{w}$ est égale à la surface de fluide $\mathbf{u}$. On a alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \Phi dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \Phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{I. 3})$$

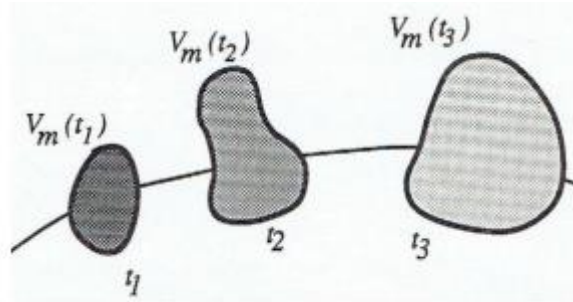


Figure I. 2 : Volume de contrôle matériel

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m(t)} \Phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{u}) dV \quad (\text{I. 4})$$

Et le théorème de transport devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \Phi dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi \mathbf{u} \right) dV \quad (\text{I. 5})$$

En prenant $\Phi = \rho \varphi$, où ρ est la masse volumique du fluide, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \varphi dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \varphi \mathbf{u} \right) dV$$

Ou après développement :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \varphi dV = \int_{V_m(t)} \left\{ \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) + \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \right) \right\} dV$$

Le premier terme à droite est nul (voir équation (I.8)), d'où l'égalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \varphi dV = \int_{V_m(t)} \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \right) dV \quad (\text{I. 6})$$

I.4 Lois de conservation

I.4.1 Conservation de la masse

Cette loi stipule que la masse totale d'un système isolé reste constante, ce qui signifie que la masse ne peut ni n'être créée ni détruite, mais seulement transformée d'une forme à une autre.

Considérons un volume de contrôle $V_m(t)$. La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{V_m} \rho dV \quad (\text{I. 7})$$

où ρ est la densité locale. Si le volume de contrôle ne contient ni source, ni puit, la masse contenue dans $V_m(t)$ est constante et par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = 0$$

En appliquant le théorème de transport (équation (I.5)) :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) dV = 0$$

Comme V_m est arbitraire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (\text{I. 8a})$$

L'équation (I.8) est appelée loi de conservation de la masse ou équation de continuité.

Chapitre I : LOIS DE CONSERVATION

L'équation précédente peut être aussi mise sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \rho - \mathbf{f} = 0 \quad (\text{I. 8b})$$

Avec :

$$\mathbf{f} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, ρ est constante et l'équation (I.8a) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{I.9})$$

I.4.2. Conservation de la quantité de mouvement :

Cette loi stipule que la quantité de mouvement totale d'un système isolé reste constante, ce qui signifie que la quantité de mouvement ne peut ni n'être créée ni détruite, mais seulement transférée d'un corps à un autre.

Considérons un volume de contrôle $V_m(t)$. La quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV$$

Le principe fondamental de la dynamique stipule que la variation de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (\text{I. 10})$$

Les forces extérieures sont de deux types :

- Les forces de volumes qui sont principalement des forces de gravité, que l'on peut exprimer par :

$$\int_{V_m} \rho \mathbf{g} dV$$

- Les forces de surfaces qui sont principalement des forces de gravité, que l'on peut exprimer par

$$\int_{A_m} \mathbf{t} dA$$

où $\mathbf{t}$ représente le vecteur contrainte, égal à :

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$$

où p est la pression du fluide, $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des forces visqueuses et $\mathbf{n}$ la normale extérieure à la surface $A_m(t)$, l'équation (I.10) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} dV + \int_{A_m} (-p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) dA \quad (\text{I. 11})$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m} (-p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) dA = \int_{V_m} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV \quad (\text{I. 12})$$

D'après l'équation (I.6) :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m(t)} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) dV \quad (\text{I. 13})$$

En substituant les équations (I.12) et (I.13) dans l'équation (I.11), on obtient :

$$\int_{V_{J_m}(t)} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g} \right) dV = 0$$

Ou

$$\int_{V_{J_m}(t)} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g} \right) dV = 0$$

Comme V_m est arbitraire, l'équation précédente est équivalente à :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{g} = 0 \quad (\text{I. 14})$$

En projetant l'équation (I.14) sur les axes d'un repère cartésien et sachant que :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.15})$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, l'équation (I.14) devient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_i - \nu \nabla^2 u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i = 0 \quad (\text{I. 16a})$$

qui peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_i - \nu \nabla^2 u_i - f = 0 \quad (\text{I. 16b})$$

avec

$$f = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide.

I.4.3. Conservation de l'énergie :

Cette loi stipule que l'énergie totale d'un système isolé reste constante, ce qui signifie que l'énergie ne peut ni n'être créée ni détruite, mais seulement transformée d'une forme à une autre.

Considérons un volume de contrôle $V_m(t)$, l'énergie contenue dans ce volume est la somme des énergies interne et cinétique :

$$\int_{V_m} \rho \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV = \dot{W} + \dot{Q} \quad (\text{I. 17})$$

$\dot{W}$ représente la puissance développée par les forces extérieures (les forces de volume et les forces de surface) :

$$\dot{W} = \int_{V_m} \rho \mathbf{u} g dV + \int_{A_m} (-p \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) n dA$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m} (-p \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) n dA = \int_{V_m} \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) dV$$

D'où :

$$\dot{W} = \int_{V_m} (\rho \mathbf{u} \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \tau)) dV \quad (\text{I. 18})$$

En désignant par $\mathbf{q}$ le flux local de chaleur par conduction à travers la surface de contrôle A_m , la quantité totale de chaleur passant par la surface A_m est :

$$\dot{Q} = \int_{A_m} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\dot{Q} = - \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad (\text{I.19})$$

D'après l'équation (I.6), on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV = \int_{V_m(t)} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) dV \quad (\text{I.20})$$

En substituant les équations (I.20), (I.19) et (I.18) dans l'équation (I.17), on obtient :

$$\int_{V_m(t)} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) dV = \int_{V_m} (\rho \mathbf{u} \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \tau) - \nabla \cdot \mathbf{q}) dV$$

Puisque le volume de contrôle $V_m(t)$ est arbitraire, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \mathbf{u} \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \tau) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (\text{I. 21a})$$

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique et sachant que :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T ; e = cvT$$

où T est la température, λ la conductivité et cv la chaleur spécifique à volume constant,

l'équation (I.21a) devient (Candel, 1990) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T - k \nabla^2 T - f = 0 \quad (\text{I. 21b})$$

avec

$$f = \frac{1}{\rho cv} \left(\tau : \nabla \mathbf{u} - T \frac{\partial p}{\partial T} \nabla \cdot \mathbf{u} \right), k = \frac{\lambda}{\rho cv}$$

Chapitre I : LOIS DE CONSERVATION

I.5 Equation de convection-diffusion

En examinant les trois lois de conservation (équations (I.8b), (I.16b) et (I.21b)), on constate qu'elles s'écrivent toutes sous la forme :

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}_{\text{me temporel}} + \underbrace{\mathbf{u} \nabla c}_{\text{termes de convection}} - \underbrace{k \nabla^2 c}_{\text{termes de diffusion}} - \underbrace{f}_{\text{terme source}} = 0 \quad (\text{I. 22})$$

où $c(t, \mathbf{x})$ est une variable scalaire représentant soit une masse volumique, soit une vitesse, soit une température ou autre. $\mathbf{u}$, k et f sont des fonctions quelconques qui dépendent de l'espace $\mathbf{x}$ et de la fonction inconnue c . L'équation (I.22) est appelée équation de convection-diffusion. Sa résolution fera l'objet de ce travail car maîtriser sa résolution permet de résoudre toutes les lois de conservation.

Chapitre II

Méthode des différences finies

Chapitre II : méthode des différences finie

II.1. Introduction

Dans cette partie, nous présentons les idées de base de la méthode. Des différences finies, qui est sans doute la méthode la plus intuitive simple et est le plus couramment utilisé pour résoudre des équations numériquement dérivées partielles (EDP). En réalité, Résoudre numériquement une EDP revient à calculer de bonnes approximations de la solution (il faut encore que le problème ait une solution unique) sur un nombre (généralement important) de points bien répartis dans l'ensemble où défini.

Nous ne considérerons presque exclusivement que des équations en dimension 1 d'espace, une variable temporelle pouvant éventuellement s'y rajouter. Nous nous intéresserons à la résolution des trois types classiques d'EDP : elliptique, parabolique et hyperbolique. Chacune de ces classes d'équations possèdent des propriétés particulières que nous rappellerons brièvement.

II.2. Principe de la méthode

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation des dérivées des équations physiques à l'aide des développements de Taylor, et elle découle directement de la définition de la dérivée. Cette méthode est le fruit des travaux de plusieurs mathématiciens du 18e siècle tels qu'Euler, Taylor, Leibniz, et d'autres.

Soit u une fonction suffisamment régulière

Des développements de Taylor au voisinage de x donnent :

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \dots + (-1)^n \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + O(\Delta x^{n+1})$$
$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \dots + (-1)^n \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + O(\Delta x^{n+1})$$

Des développements de Taylor au voisinage de t donnent :

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t) + \dots + (-1)^n \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) + O(\Delta t^{n+1})$$
$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t) + \dots + (-1)^n \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) + O(\Delta t^{n+1})$$

Chapitre II : méthode des différences finie

Avec $O(\Delta x^{n+1})$ et $O(\Delta t^{n+1})$: appelés reste ou erreur de troncature. La puissance de Δx ou Δt avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode

II.3. Maillage

Le terme "maillage" désigne un groupe de points situés dans le domaine de définition sur lequel on va appliquer D.F. Lorsqu'il s'agit d'une application définie sur un segment de $\mathbb{R}$, on inclut généralement les deux extrémités du segment. En ce qui concerne un maillage en dimension supérieure, il peut être nécessaire de choisir des points du contour du domaine de définition. Le pas du maillage représente la distance entre deux points adjacents du maillage.

Le domaine de calcul est divisé en intervalles, chacun de longueur. Pour calculer la solution sur un temps, on découpe l'intervalle avec un pas. On calcul alors la solution approchée sur un maillage où chaque point d'indice est repéré sur l'axe par sa position et sur l'axe par comme le montre la figure .

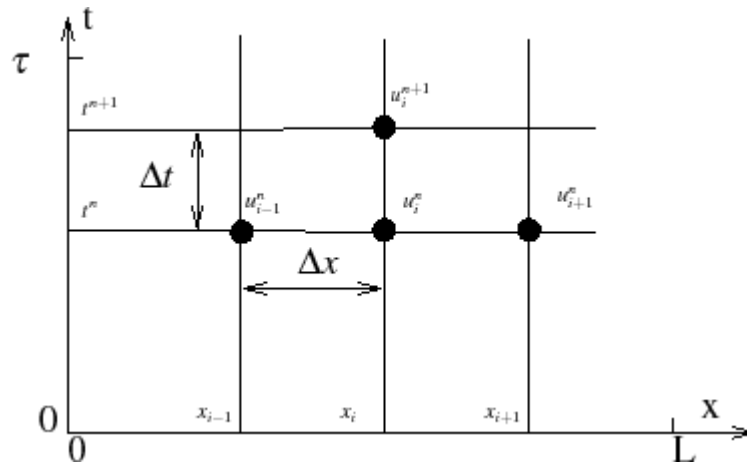


Figure II. 1 : maillage différences finies

La solution approchée aux nœuds du maillage sera notée :

$$\begin{aligned}u^h(x_i, t_n) &= u^h(i\Delta x, n\Delta t) = u_i^n \\u^h(x_i, t_{n+1}) &= u^h(i\Delta x, (n+1)\Delta t) = u_i^{n+1} \\u^h(x_{i+1}, t_n) &= u^h((i+1)\Delta x, n\Delta t) = u_{i+1}^n \\u^h(x_{i-1}, t_n) &= u^h((i-1)\Delta x, n\Delta t) = u_{i-1}^n\end{aligned}$$

Chapitre II : méthode des différences finie

II.4. Notation indicielle - cas 1 D:

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les nœuds du maillage

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage

• Notation :

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud x_i , on note :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i \quad (\text{II. 1})$$

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présente au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{II. 2})$$

Ce schéma est dit « avant » ou « décentré avant » ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé « arrière »:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{II. 3})$$

Chapitre II : méthode des différences finie

II.4.1 Schémas numériques pour les dérivées premières

En ce basant sur le développement limité de Taylor pour transformer l'écriture différentielle des dérivées premières en écriture algébrique. Dans le tableau (II.1) nous donnons là l'écriture indicielle équivalente des différents opérateurs et fonctions utilisées dans cette partie.

Représentation ordinaire	Représentation indicielle
$f(x_i)$	f_i
$f(x_i, y_j, z_k)$	$f_{i,j,k}$
x, y, et z aux nœuds i, j, et k respectivement	x_i, y_j, z_k

Tableau II. 1: Représentation indicielle des fonctions utilisées dans les développements limités de Taylor

II.4.1.1. Schéma décentré amont

Soit le développement limité de la fonction f au voisinage du point i (voir figure II.3)



Figure II. 2 : Segment appartenant à la courbe $f(x)$ limité par les points $i-1$ et i

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II. 4})$$

avec : $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$

De cette dernière équation on constate :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II. 5})$$

Chapitre II : méthode des différences finie

avec toujours : $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$

L'éq. (II.5) représente un schéma décentré amont, ce dernier utilisé pour exprimer la dérivée première de la fonction f au voisinage du point i x .

II.4.1.2. Schéma décentré aval

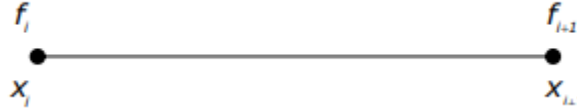


Figure II. 3 : Segment appartenant à la courbe $f(x)$ limité par les points i x et $i+1$

On a le développement limité de Taylor suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II. 6})$$

avec : $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$

De l'éq. (II.6), on peut mettre :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II. 7})$$

On dit qu'on a approché la dérivée première de la fonction f par un schéma décentré aval, il est d'ordre 1.

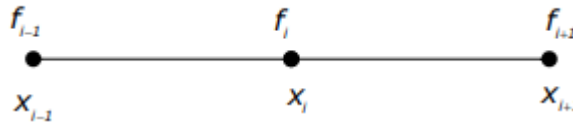


Figure II. 4: Segment appartenant à la courbe $f(x)$ limité par les points $i-1$ x et $i+1$

L'utilisant des développements limités de Taylor suivants :

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II. 8})$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II. 9})$$

Chapitre II : méthode des différences finie

Nous permettons, en soustrayant l'éq. (II.8) de l'éq. (II.9), de calculer le schéma centré des différences finis. On écrit donc :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{2\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right)$$

donc :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II. 10})$$

L'éq. (II.10) représente un schéma centré aux différences finis, il est d'ordre 2.

On peut avoir des schémas d'ordre supérieur, associés aux dérivées premières, en augmentant le nombre de points de discrétisation. Autrement dit, on utilise plus de termes dans le développement limité de Taylor.

II.4.2. Schémas numériques pour les dérivées secondes

De la même manière que pour les dérivées première de la fonction f , on peut utiliser un schéma décentré amont, décentré aval ou centré pour évaluer la dérivée deuxième de la fonction f au voisinage de l'abscisse x_i . Il en est de même pour la précision, on peut aller à n'importe quel ordre

II.4.2.1 Schéma décentré amont

Pour évaluer le schéma décentré amont, associé à la dérivée deuxième de la fonction f au voisinage de x_i , on utilise les développements limités de Taylor des fonctions f_{i-1} et f_{i-2} . On écrit donc :

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II. 11})$$

$$f_{i-2} = f_i - (2\Delta x) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-2} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II. 12})$$

En multipliant l'éq. (II.11) par 2, on obtient :

$$2f_{i-1} = 2f_i - 2\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{2\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{2\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II. 13})$$

Chapitre II : méthode des différences finie

En soustrayant l'éq. (II.13) de l'éq. (II.12), on trouve :

$$f_{i-2} - 2f_{i-1} = -f_i + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right)$$

Finalement

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} + \Delta x \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), x_{i-2} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.14})$$

II.4.2.2 Schéma décentré aval

Soit les deux développements suivants : (II.15)

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \\ f_{i+2} &= f_i + (2\Delta x) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), x_i \leq \xi \leq x_{i+2} \\ &\quad - 2x \left(\text{II.14} \right) \Rightarrow f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} - \Delta x \left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \right), x_i \leq \xi \leq x_{i+2} \quad (\text{II.16})$$

L'éq. (II.16) représente un schéma décentré aval, qui peut être utilisé pour évaluer la dérivée 2ème de la fonction f au voisinage de xi. La précision de ce schéma est d'ordre 1

II.4.2.3 Schéma centré :

L'évaluation du schéma centré nécessite l'utilisation des deux développements suivants tronqués au quatrième ordre.

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right), x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (\text{II.17})$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right), x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.18})$$

En sommant l'éq. (II.17) et l'éq. (II.18) on trouve :

$$f_{i-1} + f_{i+1} = 2f_i + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^4}{12} \left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4} \right)$$

Chapitre II : méthode des différences finie

ou bien :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4}\right), x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (\text{II.19})$$

L'éq. (II.19) représente un schéma aux différences finis centré d'ordre deux. Ce schéma est utilisé généralement pour évaluer les termes de diffusion dans les équations de conservation. Il peut être utilisé, dans le cas des écoulements à vitesse modérée, pour évaluer les termes d'advection (schéma plus précis que les schémas décentrés).

Il existe d'autres méthodes qui garantissent, pour les équations aux dérivées partielles, le passage de l'écriture différentielle à l'écriture algébrique (méthodes d'approximations polynomiales, nodales, ...etc.). Pour cette dernière on peut citer comme un exemple la formule de Lagrange. Elle est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i f_i$$

Où :

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Pour $n = 3$ (approximation quadratique de la fonction f), l'éq. (II.20) s'écrit comme suit :

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \quad (\text{II.20})$$

De l'éq. (II.22) on peut calculer facilement la dérivée première et deuxième de la fonction de f . On écrit donc :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{(2x-x_2-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{(2x-x_1-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(2x-x_1-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \quad (\text{II.21})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \quad (\text{II.22})$$

Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet :

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases}$$

Chapitre II : méthode des différences finie

Ou f est une fonction continue. Le maillage est construit en introduisant $N + 1$ nœuds x_i avec $i = 0, 1, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas $\Delta x = h = \frac{1}{N+1}$. La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au nœud x_i .

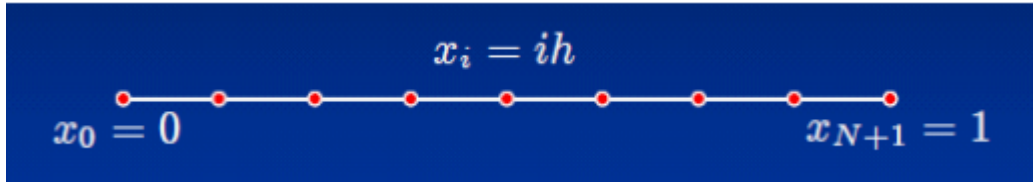


Figure II. 5 : Le maillage 1D de DF

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque nœud x_i

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i$$

Pour i variant de 1 à $N-1$; il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \frac{\beta}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

Chapitre III

La méthode des éléments finis

III.1. Introduction :

La méthode des éléments finis est une technique numérique utilisée pour résoudre des problèmes mathématiques et d'ingénierie complexes. Elle est largement utilisée dans de nombreux domaines, tels que la mécanique des structures, la thermodynamique, la dynamique des fluides, l'électromagnétisme, l'analyse des contraintes, etc.

L'objectif de la méthode des éléments finis est de discrétiser un domaine continu en une multitude d'éléments finis plus petits et plus simples. Chaque élément fini est une subdivision géométrique du domaine qui est décrite par un ensemble d'équations mathématiques. Ensuite, en utilisant des principes mathématiques tels que la méthode des résidus pondérés ou la méthode des moindres carrés, on peut résoudre ces équations pour obtenir une solution approximative du problème.

La méthode des éléments finis repose sur le concept de discrétisation, où le domaine d'étude est divisé en un ensemble fini d'éléments. Chaque élément est caractérisé par un certain nombre de nœuds, qui sont des points dans l'espace où les valeurs inconnues du problème sont définies. Les nœuds sont connectés entre eux pour former un maillage, qui est une représentation discrète du domaine.

L'équation unidimensionnel stationnaire de convection-diffusion :

$$u(c, x) \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k(c, x) \frac{dc}{dx} \right) - f(c, x) = 0 \text{ où } x \in [0, L] \quad (\text{III.1})$$

Où $c(x)$ est une variable scalaire représentant soit une température, soit une concentration, soit une vitesse, etc. $u(c, x)$, $k(c, x)$ et $f(c, x)$ sont des fonctions quelconques qui dépendent de l'espace x et de la fonction inconnue c .

Remarque : Dans certains problèmes, l'équation de convection-diffusion se présente sous la forme :

$$\frac{dg(c, x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k(c, x) \frac{dc}{dx} \right) - f(c, x) = 0 \quad (\text{III. 2})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Alors et sachant que

$$\frac{(dg(c,x))}{dx} = \frac{\partial g}{\partial c} \frac{dc}{dx} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad (\text{III. 3})$$

L'équation (III. 4) s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial c} \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) - \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (\text{III. 5})$$

Qui est de la forme que l'équation (III.6) avec :

$$u(c, x) = \frac{\partial g}{\partial c}; \quad f(c, x) = f - \frac{\partial g}{\partial x} \quad (\text{III. 7})$$

$u(c, x)$ peut être interprétée comme étant la vitesse du fluide et $k(c, x)$, le coefficient de diffusion (toujours positif), appelé aussi viscosité. L'équation (III.8) peut aussi être écrite sous la forme suivante

$$\mathcal{L}(c) - f = 0 \quad (\text{III. 9})$$

Où $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{L} = u \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right) \quad (\text{III. 10})$$

La solution de l'équation (III.11) est unique que si l'on impose des conditions aux limites appropriées. Sur la frontière définie par les points $x = 0$ et $x = L$, on peut imposer soit $c(x)$ (condition aux limites dite de type de Dirichlet), soit $k \, dc/dx$ (condition aux limites dite de type flux ou Neumann). Les conditions aux limites peuvent être mises sous la forme :

$$c = \bar{c} \text{ sur } S1 \quad (\text{III. 7a})$$

$$k \frac{dc}{dx} = q \quad (\text{III. 7b})$$

Où $S1$ et $S2$ sont les points frontières :

$$S1 \cup S2 = \{x = 0, x = L\}$$

Si $S2 = 0$, alors $S1 = \{x = 0, x = L\}$, ce qui revient à imposer des conditions de Dirichlet sur les deux points frontières, de même $S1 = 0$, revient à imposer des conditions de Neumann sur les deux points de la frontière.

Remarque : On ne peut pas imposer au même point et à la fois une condition aux limites de

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Dirichlet et une autre de Neumann.

III.2. Forme intégrale

La méthode des éléments finis ne résout pas l'équation (III.12) mais plutôt sa forme intégrale notée W dite forme vibrationnelle et qui est donnée par l'expression suivante :

$$W = \int_L^0 \phi(x) \left(u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) - f \right) dx \quad (\text{III. 13})$$

où $\phi(x)$ est une fonction de pondération arbitraire, appelée fonction test vérifiant la condition suivante :

$$\phi(x) = 0 \text{ sur } S1 \quad (\text{III. 14})$$

La fonction test $\phi(x)$ est nulle sur les points frontières concernés par une condition aux limites de type Dirichlet.

Une intégration par parties du terme de diffusion conduit à :

$$W = \int \left(\phi u \frac{dc}{dx} + k \frac{d\phi}{dx} \frac{dc}{dx} - \phi f \right) dx + W^c = 0 \quad (\text{III. 15})$$

Avec :

$$W^c = -(\phi k \frac{dc}{dx}) \quad (\text{III. 16})$$

Remarque : L'équation (III.8) est dite forme forte et l'équation (III. 17) est dite forme faible.

L'intégration par parties du terme de diffusion a deux avantages :

- Permet de réduire l'ordre de la dérivée de la fonction $c(x)$ et pouvoir ainsi choisir des fonctions d'interpolation linéaires (équation (III.19))
- Prendre en compte d'une façon exacte les conditions aux limites de type Neumann (équation (III.49)).

III.3. Maillage

Le maillage ou discrétisation spatiale consiste à découper (ou discrétiser) le domaine spatial L en sous-domaines L^e (figure 1.1) :

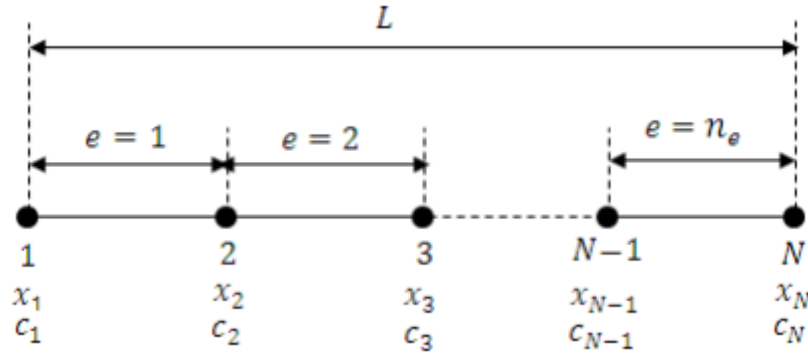


Figure III. 1: Maillage ou discrétisation du domaine spatial

Définitions :

- Les sous domaines L^e sont appelés des éléments finis, ils sont numérotés de 1 à n_e
- Les points du maillage sont appelés les nœuds, ils sont numérotés de 1 à N .
- Les coordonnées x_i sont appelés les coordonnées nodales.
- Les variables c_i sont appelés les variables nodales.

Dans notre cas, le sous-domaine L^e est un segment à 2 nœuds appelé élément L2. On désigne par x_1 et x_2 ses coordonnées nodales, par c_1 et c_2 ses variables nodales, par $nnel$ le nombre de ses nœuds qui est égal à 2 et par h_e sa taille, $h_e = x_2 - x_1$ (figure 1.2) :

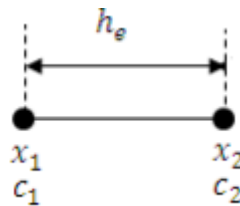


Figure III. 2 : Élément linéaire à deux nœuds (L2).

L'opération du maillage consiste à déterminer le vecteur $\mathbf{x}$ de dimension N contenant les coordonnées de l'ensemble des nœuds et la matrice **connec** de dimension $(n_e, nnel)$ contenant les connectivités de tous les éléments. On entend par connectivités d'un élément e , les numéros des nœuds qui lui y sont attachés, par exemple les connectivités de l'élément n°1 (figure 1.1), sont les nœuds 1 et 2, ainsi d'après la figure 1.1, on a :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{connec} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \dots & \dots \\ N-1 & N \end{bmatrix} \quad (\text{III. 18})$$

On désigne par le mot table, un vecteur ou une matrice. Ainsi le vecteur $\mathbf{x}$ est appelé la table globale des coordonnées nodales et la matrice $\mathbf{connec}$ est appelée la table globale des connectivités.

On désigne par $\mathbf{loce}(e)$ les connectivités de l'élément n° e , ce vecteur $\mathbf{loce}$ est extrait de la table $\mathbf{connec}$, ainsi pour l'élément n°1, $\mathbf{loce}$ ($e = 1$) est tout simplement la première ligne de la table $\mathbf{connec}$, $\mathbf{loce}(1) = \langle 1 \ 2 \rangle$. Pour un élément n° e , $\mathbf{loce}(e)$ est la e ième ligne de la table $\mathbf{connec}$:

$$\mathbf{loce}(e) = \mathbf{connec}(\mathbf{e}, :) = \langle e \ e + 1 \rangle \quad (\text{III. 19})$$

Le maillage peut être régulier (uniforme) ou non. Un maillage régulier signifie que tous les éléments ont la même taille h_e avec $h_e = L/n_e$, donc si le domaine de calcul est l'intervalle $[a, b]$, le vecteur des coordonnées $\mathbf{x}$ s'écrit :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 = a \\ x_2 = a + h_e \\ \dots \\ x_N = a + (N-1)h_e \end{Bmatrix} \quad \text{Soit } x_i = a + (i-1)h_e \quad \text{avec } i = 1, \dots, N \quad (\text{III. 20})$$

Suite à la discrétisation du domaine, il en résulte :

$$L = \sum_{e=1}^{n_e} L_e \quad (\text{III. 21})$$

Et par conséquent l'équation (III. 22) s'écrit :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^c + \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{W}^e \quad (\text{III. 23})$$

où $\mathbf{W}^e$ est la forme intégrale élémentaire, calculée sur le sous-domaine L_e :

$$\mathbf{W}^e = \int \left(\phi \mathbf{u} \frac{dc}{dx} + k \frac{d\phi}{dx} \frac{dc}{dx} - \phi f \right) dx \quad (\text{III. 24})$$

Donc, le calcul de $\mathbf{W}$ passe d'abord par le calcul de $\mathbf{W}^e$, et pour pouvoir calculer $\mathbf{W}^e$, il faut se donner des expressions pour la fonction $c(x)$ et $\phi(x)$.

Choix de la fonction $c(x)$

Règle : Pour la méthode des éléments finis standard, on suppose qu'à l'intérieur d'un élément L_e , la fonction $c(x)$ dépend uniquement des variables nodales de cet élément, soit :

$$c(x) = N_1(x)c_1 + N_2(x)c_2 \quad (\text{III. 25})$$

Les fonctions $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont appelées les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme.

Dans le cas général, ces fonctions peuvent être quelconques, c'est-à-dire polynomiales, trigonométriques ou autre mais le choix d'une forme polynomiale est le plus souvent utilisé, et dans ce cas, les fonctions $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{h_e} \quad (\text{III. 26})$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{h_e}$$

Une autre façon d'obtenir $N_1(x)$ et $N_2(x)$ est de poser :

$$c(x) = ax + b \quad (\text{III. 27})$$

Avec :

$$\begin{cases} c(x_1) = c_1 = ax_1 + b \\ c(x_2) = c_2 = ax_2 + b \end{cases} \quad (\text{III. 28})$$

Ce qui donne :

$$c(x) = \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1} \text{ et } b = c_1 - ax_1 \quad (\text{III. 29})$$

En substituant les valeurs de a et b dans l'équation (III. 30), on obtient :

$$c(x) = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)c_1 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)c_2$$

Donc :

$$N_1(x) = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) \text{ et } N_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \quad (\text{III. 31})$$

Remarque : la fonction $c(x)$ est linéaire par élément, cette approximation est dite de type C^0 .

Propriétés des fonctions d'interpolation

Si $c(x)$ est constante ($c(x) = c$) alors l'équation (III. 32) s'écrit :

$$\bar{c} = N_1(x)\bar{c} + N_2(x)\bar{c} \quad (\text{III. 33})$$

Ce qui donne :

$$N_1(x) + N_2(x) = 1 \quad (\text{III. 34})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Les fonctions d'interpolation vérifient toujours la relation :

$$\sum_{i=1}^{nnel} N_i = 1 \quad (\text{III. 35})$$

Où $nnel$ représente le nombre de nœuds de l'élément.

Sachant que $c(x_i) = c_i$, l'équation (III. 36) écrite aux nœuds de l'élément, donne :

$$\begin{aligned} c(x_1) &= N_1(x_1)c_1 + N_2(x_1)c_2 = c_1 \\ c(x_2) &= N_1(x_2)c_1 + N_2(x_2)c_2 = c_2 \end{aligned} \quad (\text{III. 37})$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= 1 \text{ et } N_2(x_1) = 0 \\ N_1(x_2) &= 0 \text{ et } N_2(x_2) = 1 \end{aligned} \quad (\text{III. 38})$$

Les fonctions d'interpolation vérifient toujours la relation :

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III. 39})$$

Choix de la fonction test $\phi(x)$:

L'un des points forts de la méthode des éléments finis est le fait d'avoir une multitude de choix pour la fonction test $\phi(x)$, chaque choix correspond à un type de formulation (Galerkine, Galerkin-discontinue, Petrov-Galerkine...).

La méthode de Galerkin correspond à la version standard de la méthode des éléments fins, elle consiste à choisir la fonction $\phi(x)$ de la même forme que la fonction $c(x)$, c'est-à-dire :

$$\phi(x) = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \quad (\text{III. 40})$$

Où les fonctions $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont données par l'équation (III. 41), ce sont les mêmes fonctions d'interpolation utilisées pour l'approximation de la fonction $c(x)$ et ϕ_1, ϕ_2 sont les valeurs de $\phi(x)$ aux nœuds de l'élément.

Calcul de la forme intégrale élémentaire :

On réécrit les équations (III. 42) et (III.30) sous la forme matricielle suivante :

$$\phi(x) = \phi_e N \quad (\text{III. 43a})$$

$$c(x) = N^t c_e \quad (\text{III. 44b})$$

Avec :

$$c_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 32a})$$

$$\phi_e = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \quad (\text{III. 32b})$$

$$N = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}, \quad N^t = \langle N_1, N_2 \rangle \quad (\text{III. 45})$$

c_e est nommé le vecteur élémentaire des variables nodales. ϕ_e est le vecteur élémentaire des variables nodales virtuelles. N est le vecteur de fonctions de forme et N^t le vecteur transposé.

D'après les équations (III. 31) on a :

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi_e \frac{dN}{dx} \quad (\text{III. 46a})$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{dN^t}{dx} c_e \quad (\text{III. 47a})$$

D'après l'équation (III.19), on a :

$$\frac{dN}{dx} = \frac{1}{h_e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III. 35})$$

En substituant les équations (III. 48) et (III. 49) dans l'équation (III.17), on obtient :

$$W^e = \int \left(\phi_e N u \frac{dN^t}{dx} c_e + k \phi_e \frac{dN}{dx} \frac{dN^t}{dx} c_e - \phi_e N f \right) dx \quad (\text{III. 50})$$

Pour éviter de faire recours à l'intégration numérique et faciliter ainsi les calculs, on considère les paramètres physiques u , k et f constants par élément, ainsi l'équation (III. 51) devient :

$$W^e = \phi_e \left[(\overline{u_e} \int N \frac{dN^t}{dx} dx + \overline{k_e} \int \frac{dN}{dx} \frac{dN^t}{dx} dx) c_e - \overline{f} \int N dx \right]$$

Où $\overline{u_e}$, $\overline{k_e}$ et $\overline{f_e}$ sont les valeurs moyennes par élément. En posant :

$$V = \int N dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{h_e} \left\{ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right\} dx = \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 52})$$

$$k_1 = \int N \frac{dN^t}{dx} dx = V \frac{dN^t}{dx} = \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{h_e} \langle -1 \quad 1 \rangle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 53})$$

$$k_2 = \frac{dN}{dx} \frac{dN^t}{dx} dx = \frac{dN}{dx} \frac{dN^t}{dx} h_e = \frac{1}{h_e} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{h_e} \langle -1 \quad 1 \rangle h_e = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 54})$$

L'équation (III. 55) s'écrit :

$$W^e = \phi_e(\overline{u_e}k_1c_e + \overline{k_e}c_e - \overline{f_e}V)$$

Soit :

$$W^e = \phi_e R_e \quad (\text{III. 56})$$

Avec :

$$R_e = K_e c_e - F_e \quad (\text{III. 57})$$

$$K_e = \overline{u_e}K_1 + \overline{k_e}K_2 \quad (\text{III. 58})$$

$$F_e = \overline{f_e}V \quad (\text{III. 59})$$

Re est appelé le vecteur résidu élémentaire, **Ke** est appelée la matrice de rigidité élémentaire et **Fe**, le vecteur élémentaire des sollicitations. Remarque : Selon le profil de la fonction $f(x)$, il est préférable parfois de la considérer linéaire par élément, c'est-à-dire :

$$f = N_1(x)f_1 + N_2(x)f_2 = N^t f_e \text{ avec } f_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 60})$$

où f_1 et f_2 sont les valeurs de f aux nœuds de l'élément et N_1, N_2 , les fonctions de forme données par l'équation (III.19). En substituant l'équation précédente dans l'équation (III. 61), on obtient :

$$F_e = K_3 f_e \quad (\text{III. 62})$$

Avec :

$$K_3 = \int N N^t dx dy = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 63})$$

Prise en compte des conditions aux limites de type Neumann (s'il y en a) Revenons au terme de frontière W^c donné par l'équation (III.11) :

$$W^c = - \left(\phi k \frac{dc}{dx} \right)_0^L \quad (\text{III. 64})$$

$$W^c = \left(\phi k \frac{dc}{dx} \right)_{in=1} - \left(\phi k \frac{dc}{dx} \right)_{in=N} \quad (\text{III. 65})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

On rappelle que si en un nœud frontière in ($in = 1$ et/ou $in = N$), la condition aux limites est de type Dirichlet (c'est-à-dire on impose c) alors la fonction test ϕ est nulle en ce nœud et par conséquent $(\phi \text{ k dc} / \text{dx})_{in} = 0$. Cependant si la condition aux limites est du type Neumann, on a d'après l'équation (III.7b) :

$$W^c = -(\phi q)_0^L$$
$$W^c = \phi_1 q_1 - \phi_N q_2 = \langle \phi_1 \quad \phi_N \rangle R_c \quad (\text{III. 66})$$

Avec :

$$R_c = \begin{Bmatrix} q_1 \\ -q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 67})$$

Et q_1 et q_2 sont respectivement les valeurs de q aux nœuds 1 et N . Dans la majeure des cas, le flux q se présente sous la forme :

$$q(c) = \beta c + \alpha \quad (\text{III. 68})$$

Dans le cas linéaire, les coefficients α et β sont constants.

En substituant l'équation (III.51) dans (III.50), on obtient :

$$R_c = K_c \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_N \end{Bmatrix} - F_c \quad (\text{III. 69})$$

Avec :

$$K_c = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 70})$$

$$F_c = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 71})$$

Assemblage

L'étape d'assemblage est une étape importante de la méthode des éléments finis, elle consiste à calculer la forme intégrale globale W (équation (III.16)) à partir des formes élémentaires W^e (équation III.40)) et du terme de frontière W^c (équation (III.49)) puis en déduire les tables globales (R_g, K_g, F_g) . Revenons à l'équation (III.40) :

$$W^e = \phi_e R_e$$

On rappelle que les connectivités d'un élément n°e ($1 \leq e \leq ne$), c'est-à-dire les nœuds qui lui sont attachés sont données par le vecteur **loce**(e) (équation (III.13)).

On rappelle aussi ϕ_e qu'est le vecteur qui contient les valeurs de ϕ aux nœuds de l'élément, soit :

$$\phi_e = \langle \phi_e \quad \phi_{e+1} \rangle \quad (\text{III. 72})$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (III.40), on obtient :

$$W^e = \langle \phi_e \quad \phi_{e+1} \rangle R_e \quad (\text{III. 73})$$

qui peut être écrite sous une forme étendue :

$$W^e = \langle \phi_1 \quad \dots \quad \phi_e \quad \dots \quad \phi_N \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \phi_g \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 74})$$

Où ϕ_g est le vecteur qui contient les valeurs de ϕ de l'ensemble des nœuds du maillage :

$$\phi_g = \langle \phi_1 \quad \dots \quad \phi_e \quad \dots \quad \phi_N \rangle \quad (\text{III. 75})$$

ϕ_g est nommé vecteur global des variables nodales virtuelles. De même, l'équation (III.49) peut s'écrire :

$$W^c = \phi_g \begin{Bmatrix} R_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_c(2) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 76})$$

En substituant les équations (III.57) et (III.59) dans l'équation (III.16), on obtient :

$$W = \phi_g R_g \quad (\text{III. 77})$$

Avec :

$$R_g = \begin{Bmatrix} R_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_c(2) \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^{n_e} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 78})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

R_g est nommé le vecteur résidu global. D'après les équations (III.52) et (III.41) on a :

$$\begin{Bmatrix} R_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_c(2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_c(1,1) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k_c(2,2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ F_c(2) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 79})$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k_c(2,2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ F_c(2) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 80})$$

En injectant les équations précédentes dans l'équation (III.61), on obtient :

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{K}_g \mathbf{c}_g - \mathbf{F}_g \quad (\text{III. 81})$$

Avec : $\mathbf{c}_g = \langle c_1, c_2, c_3, \dots, c_N \rangle^t$ (III. 82)

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} K_c(1,1) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & K_c(2,2) \end{bmatrix}_{N,N}$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_e} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_e(1,1) & K_e(1,2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_e(2,1) & K_e(2,12) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N,N}$$

(III. 83)

$$\mathbf{F}_g = \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_c(1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_c(2) \end{Bmatrix}}_N + \sum \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_e \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}}_{\text{Table } \mathbf{F}_e \text{ étendue}} \quad (\text{III. 84})$$

$\mathbf{K}_g$ est appelée la matrice de rigidité globale, $\mathbf{F}_g$ est le vecteur global des sollicitations et $\mathbf{c}_g$ le vecteur global des variables nodales. Pour effectuer l'opération d'assemblage, on applique l'algorithme ci-dessous :

Algorithme d'assemblage :

- Initialiser à zéro les tables suivantes :

$$\mathbf{K}_g (1: N, 1: N) = \mathbf{0} ; \mathbf{F}_g (1: N) = \mathbf{0} \quad (\text{III. 85})$$

Boucle sur les éléments

- Extraire les connectivités de l'élément **loce** (équation (III.13)).
- Calculer les tables élémentaires $\mathbf{k}_e, \mathbf{F}_e$ (équations (III.42) et (III.43)).
- Effectuer les opérations suivantes :

$$\mathbf{K}_g(\text{loce}, \text{loce}) = \mathbf{K}_g(\text{loce}, \text{loce}) + \mathbf{K}_e \quad (\text{III. 86})$$

$$\mathbf{F}_g(\text{loce}) = \mathbf{F}_g(\text{loce}) + \mathbf{F}_e \quad (\text{III. 87})$$

Fin de la boucle sur les éléments.

- Ajouter les termes de frontière comme suit :

$$\mathbf{K}_g(1, 1) = \mathbf{K}_g(1, 1) + \mathbf{K}_c(1, 1) \quad (\text{III. 88a})$$

$$\mathbf{F}_g(1) = \mathbf{F}_g(1) + \mathbf{F}_c(1) \quad (\text{III. 89b})$$

$$\mathbf{K}_g(N, N) = \mathbf{K}_g(N, N) + \mathbf{K}_c(2, 2) \quad (\text{III. 90a})$$

$$\mathbf{F}_g(N) = \mathbf{F}_g(N) + \mathbf{F}_c(2) \quad (\text{III. 91b})$$

Fin de l'algorithme d'assemblage

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Dans l'équation (III.60), ϕ_g est non nul car la fonction test ϕ est quelconque et par conséquent c'est le vecteur R_g qui doit être nul, il en résulte d'après l'équation (III.64) que :

$$K_g c_g = F_g \quad (\text{III. 92})$$

La résolution du système (III.73) permet de calculer le vecteur inconnu c_g qui représente les valeurs de la fonction c aux nœuds du maillage, mais la résolution de ce système nécessite d'abord la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet.

Prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet et Résolution :

Pour introduire les conditions aux limites de Dirichlet, on a choisi la méthode du "terme unité sur la diagonale" (Dhatt, 1984) dont le principe consiste à modifier pour chaque nœud in de la frontière $S1$ où on a imposé une valeur c_{in} , le vecteur F_g puis la matrice K_g comme suit :

$$F_g(j) = F_g(j) - K_g(j, in)c_{in} \text{ pour } j = 1 \text{ à } N \text{ et } F_g(in) = c_{in} \quad (\text{III. 93})$$

$$K_g(j, in) = K_g(in, j) = 0 ; \text{ pour } j = 1 \text{ à } N \text{ et } K_g(in, in) = 1 \quad (\text{III. 94})$$

Différentes étapes de la méthode des éléments finis :

On peut résumer la formulation précédente dans les étapes suivantes :

- 1- Maillage : Le maillage consiste à calculer les tables x et **connec** (équation (III.12)).
- 2- Calcul élémentaire : Le calcul élémentaire consiste à calculer pour chaque élément les tables élémentaires K_e et F_e (équations (III.42) et (III.43) ou (III.45)).
- 3- Assemblage L'assemblage permet de calculer les tables globales K_g et F_g (équations (III.67)).
- 4- Prise en compte des conditions aux limites de type Neumann (équations (III.71) et (III.72)).
- 5- Prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet (équations (III.74) et (III.75)).
- 6- Résolution du système (III.73) et détermination de c_g

III.4. Résolution :

Pour résoudre le système (III.73), on distingue deux cas :

1^{er} cas :

K_g et F_g ne dépendent pas de l'inconnu c_g , dans ce cas le problème est dit linéaire et la résolution du système est directe.

2^{ème} cas :

K_g et/ou F_g dépendent de c_g , on parle alors d'un problème non linéaire et la résolution du système nécessite l'utilisation d'une méthode de linéarisation telle que la méthode de Newton-Raphson par exemple.

Remarque : La méthode des éléments finis permet de calculer uniquement les valeurs de la fonction c aux nœuds de l'élément, représentées par le vecteur c_g . Si on souhaite calculer une valeur $c(x)$ pour laquelle x n'est pas une coordonnée nodale, on doit d'abord identifier l'élément e dans lequel se situe la valeur x puis extraire les coordonnées nodales $x_e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ les variables nodales $c_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$ de l'élément e . La valeur $c(x)$ sera ensuite calculée grâce à l'équation (III.18) (voir exemples au paragraphe 1.6).

Nous nous limitons dans notre étude au problème linéaire. Le problème est linéaire si les paramètres u, k sont indépendants de c et si f, q sont des fonctions linéaires de c , soit :

$$u = u(x), k = k(x) \quad (\text{III. 95})$$

$$f = A(x)c + B(x) \quad (\text{III. 96})$$

$$q = \beta c + \alpha \quad (\text{III. 97})$$

Où $A(x)$ et $B(x)$ sont des fonctions quelconques de l'espace x et α, β sont des constantes. En substituant l'équation (III.31b) dans l'équation (III.76b), l'équation (III.36) devient :

$$W^e = \int \left(\phi_e N u \frac{dN^t}{dx} c_e + k \phi_e \frac{dN}{dx} \frac{dN^t}{dx} c_e - \phi_e N (AN^t c_e + B) \right) dx \quad (\text{III. 98})$$

Soit :

$$W_e = \phi_e (K_e c_e - F_e) \quad (\text{III. 99})$$

Avec :

$$K_e = \overline{u_e} K_1 + \overline{k_e} K_2 - \overline{A_e} K_3 \quad (\text{III. 100})$$

$$F_e = \overline{B_e} V \quad (\text{III.80})$$

où $\overline{A_e}$ et $\overline{B_e}$ sont les valeurs moyennes par élément.

Remarque : Pour toute fonction $s(x)$, sa valeur moyenne élémentaire $\overline{s_e}$ est égale à :

$$\overline{s_e} = \frac{1}{h_e} \int s(x) dx \cong s(\overline{x_e}) \text{ avec } \overline{x_e} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\text{III.81})$$

Dans certains cas, la fonction $s(x)$ est connue uniquement aux nœuds de l'élément, dans ce cas la moyenne se calcule comme suit :

$$\overline{s_e} = \frac{1}{2} (s_1 + s_2) \quad (\text{III.82})$$

Dans de nombreux problèmes, les fonctions u , k , A et B proviennent d'un calcul numérique et sont eux-mêmes des valeurs nodales, on utilise dans ce cas l'équation (III.82) pour calculer leurs valeurs moyennes.

Remarque : Selon le profil de la fonction $B(x)$, il est préférable parfois de la considérer linéaire par élément, c'est-à-dire :

$$B = N_1(x) B_1 + N_2(x) B_2 = N^t B_2 \text{ avec } B_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.83})$$

L'équation (III.80) devient :

$$F_e = K_3 B_e \quad (\text{III.84})$$

Le terme frontière a été déjà traité (équations (III.47) -(III.54)).

III.5. Cas de convection dominante

La forme unidimensionnelle stationnaire dans le cas simple de l'équation linéaire de convection-diffusion :

$$u \frac{dc}{dx} - k \frac{d^2c}{dx^2} = 0 \quad x \in [0, L] \quad (\text{III.85})$$

Où u et k sont supposés constants et positifs.

On désigne par le nombre adimensionnel Pe défini comme suit :

$$Pe = \frac{u h_e}{2k} \quad (\text{III.86})$$

Le nombre de Peclet local. Ce nombre permet de mesurer l'influence de la convection par rapport à la diffusion, ainsi :

- si $Pe > 1$, la convection est dominante
- si $Pe < 1$, la diffusion est dominante

Dans l'équation (III.86), h_e désigne la longueur de l'élément.

Solution par Méthode de Galerkin Pour un maillage uniforme de longueur d'élément h , la matrice de rigidité élémentaire K_e donnée par l'équation (III.42) peut se mettre sous la forme :

$$K_e = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 - Pe & Pe - 1 \\ -1 - Pe & Pe + 1 \end{bmatrix}$$

On obtient après assemblage :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & -(1 + Pe) & 2 & Pe - 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -(1 + Pe) & 2 & Pe - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -(1 + Pe) & 2 & Pe - 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_G \\ c_P \\ c_D \\ \vdots \\ c_1 \end{Bmatrix} = 0$$

où G , P et D sont trois points consécutifs du maillage. Pour tout nœud intérieur P , on a selon l'équation précédente :

$$-(1 + Pe)c_G + 2c_P + (Pe - 1)c_D = 0 \quad (\text{III.87})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Solution par la méthode des différences finies centrées La discrétisation de l'équation (III.85) par la méthode des différences finies centrées s'écrit :

$$u \frac{c_D - c_G}{2h} - k \frac{c_D - 2c_P + c_G}{h^2} = 0$$

Où :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{k}{h^2} + \frac{u}{2h}\right)c_G + 2\frac{k}{h^2}c_P + \left(\frac{k}{h^2} + \frac{u}{2h}\right)c_D &= 0 \\ -\frac{k}{h^2}\left\{\left(1 + \frac{u}{2h}\right)c_G - 2c_P + \left(1 - \frac{u}{2h}\right)c_D\right\} &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$(1 + P_e)c_G - 2c_P + (1 - P_e)c_D = 0$$

qui est identique à l'équation (III.87). Donc, la solution obtenue par la méthode de Galerkin est équivalente à celle obtenue par la méthode des différences finies centrées.

En cherchant une solution à l'équation (III.87) sous la forme $c(x) = e^{ax}$, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + P_e)e^{a(x_p-h)} - 2e^{ax_p} + (1 - P_e)e^{a(x_p+h)} &= 0 \\ e^{ax_p}\{(1 + P_e)e^{-ah} - 2 + (1 - P_e)e^{ah}\} &= 0 \end{aligned}$$

En posant $\lambda = e^{ah}$ et en multipliant l'équation précédente par λ , on obtient :

$$(1 - P_e)\lambda^2 - 2\lambda + (1 + P_e) = 0$$

et dont les solutions sont égales à :

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \frac{(1 + P_e)}{(1 - P_e)}$$

Sachant que : $e^{ax} = e^{\frac{ahx}{h}} = \lambda^{\frac{x}{h}}$

la solution au point P d'abscisse x_P est :

$$c_P = A\lambda_1^{\frac{x_P}{h}} + B\lambda_2^{\frac{x_P}{h}} = A + B\left(\frac{(1 + P_e)}{(1 - P_e)}\right)^{\frac{x_P}{h}}$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Pour un domaine $[0, L]$ et un maillage uniforme, on a $x_P = (P - 1)h$, d'où :

$$c_P = A + B \left(\frac{(1 + P_e)}{(1 - P_e)} \right)^{P-1}$$

Les constantes A et B sont calculées grâce aux conditions aux limites.

Par définition, λ doit être positif, or λ^2 ne l'est que si :

$$P_e \in [-1, 1] \quad (\text{III.88})$$

Conclusion : La méthode de Galerkin est stable si $|P_e| \leq 1$.

Exemple La solution exacte du problème régi par l'équation (III.85) et les conditions aux limites de type Dirichlet est égale à :

$$c(x) = (c_L - c_0) \left(\frac{\frac{ux}{e^{\frac{x}{k}} - 1}}{\frac{uL}{e^{\frac{L}{k}} - 1}} \right) + c_0 \quad (\text{III.89})$$

où c_0 et c_L représentent respectivement les valeurs de c en $x = 0$ et $x = L$.

La solution exacte a été comparée avec la solution numérique obtenue par la méthode de Galerkin pour différentes valeurs du nombre de Peclet et avec les données suivantes : $c_0 = 1$, $c_L = 0$, $u = 1$ et $L = 1$. La longueur L a été discrétisée en 10 éléments, soit $he = 0.1$. Quatre valeurs du coefficient de diffusion k ont été considérées : $k = 0.1$, $k = 0.05$, $k = 0.04$ et $k = 0.01$, ce qui correspond à quatre valeurs du nombre de Peclet : $P_e = 0.5$, $P_e = 1$, $P_e = 1.25$ et $P_e = 5$. La figure 2.4 montre que la solution numérique obtenue par la méthode de Galerkin présente des instabilités numériques dès que le nombre de Peclet devient supérieur à 1. Ces oscillations non-physiques s'amplifient au fur et à mesure que le nombre de Peclet augmente et tendent vers l'infini dans le cas d'une convection pure ($Pe = \infty$).

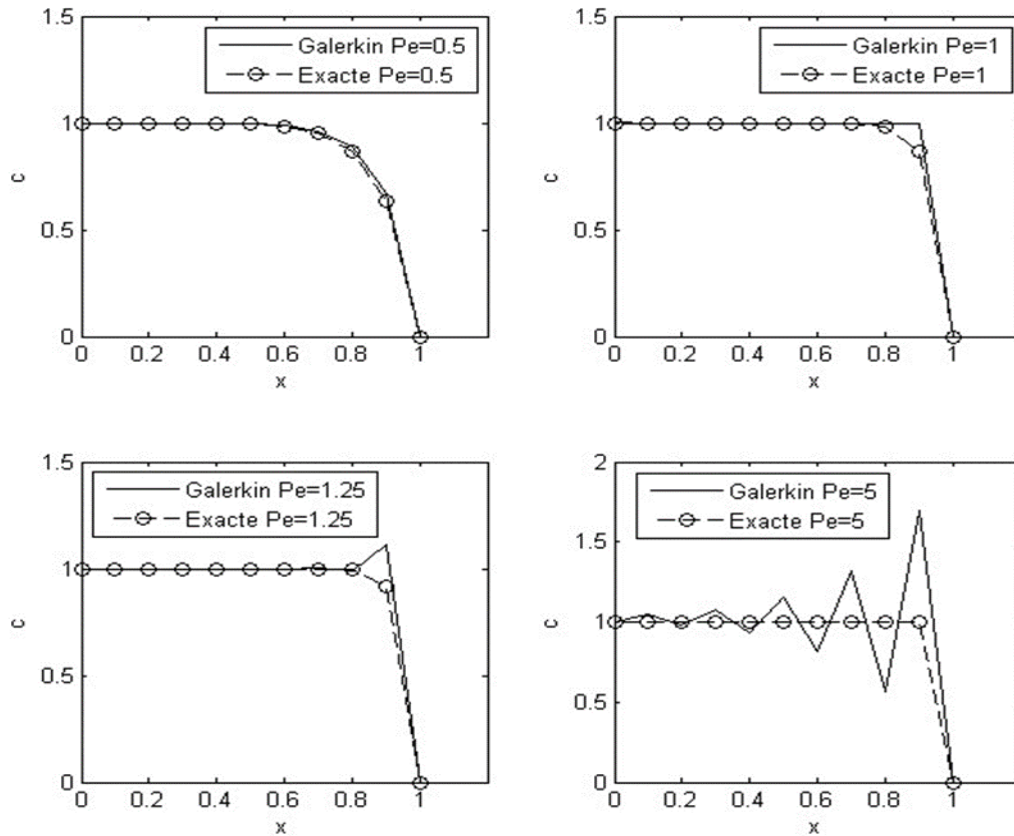


Figure III. 3 : Influence du nombre de Peclet sur la solution numérique

Conclusion :

En conclusion, la méthode des éléments finis de type Galerkin peut présenter des limitations lorsqu'elle est utilisée pour résoudre des problèmes à convection dominante, où le nombre de Péclet (Pe) ≥ 1 . Cela est dû à la représentation insuffisante des phénomènes de convection par les fonctions de forme locales utilisées dans la méthode. Dans de tels cas, il est recommandé d'utiliser des méthodes numériques alternatives plus adaptées, telles que la méthode des volumes finis, la méthode des caractéristiques ou des schémas numériques spécialement conçus pour traiter les problèmes à convection dominante. Ces méthodes prennent explicitement en compte le flux convectif et permettent une meilleure résolution des phénomènes rapides associés à la convection

III.5.1. Méthode de la diffusion artificielle ajoutée (DAA) :

La méthode de la diffusion artificielle ajoutée (DAA) est une technique numérique utilisée pour améliorer la stabilité et la précision des schémas numériques dans la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), en particulier dans les problèmes à convection dominante. Elle vise à atténuer les oscillations et les instabilités numériques qui peuvent se produire lorsque les termes de convection prédominent.

La DAA consiste à introduire un terme de diffusion artificielle supplémentaire dans les équations d'EDP. Ce terme de diffusion artificielle est conçu de manière à agir différemment selon les caractéristiques locales de la solution. L'idée est d'ajouter une quantité de diffusion supplémentaire là où la solution présente des gradients élevés ou des régions où des oscillations se produisent, tout en minimisant son impact dans les régions où la solution est lisse.

Le terme de diffusion artificielle peut être calculé de différentes manières, en fonction du schéma numérique utilisé. Par exemple, il peut être basé sur la solution numérique précédente, sur une moyenne locale des gradients de la solution, ou sur d'autres techniques adaptatives.

L'objectif de la DAA est d'améliorer la stabilité numérique en contrôlant les effets indésirables de la convection dominante, tels que les oscillations non physiques ou la divergence de la solution. En ajoutant une diffusion artificielle, la méthode permet de mieux capturer les phénomènes physiques et d'obtenir des résultats plus précis.

La DAA peut être appliquée à différentes méthodes numériques, y compris les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Elle est souvent utilisée dans des domaines tels que la mécanique des fluides, la modélisation des transports, l'analyse thermique et d'autres domaines où la convection joue un rôle important.

Il est important de noter que la DAA introduit une diffusion artificielle dans la solution, ce qui peut affecter la précision des résultats, en particulier dans les régions présentant des gradients

Chapitre III : La méthode des éléments finis

réels importants. Le choix des paramètres de diffusion artificielle doit être fait avec soin pour trouver un compromis entre stabilité et précision approprié au problème étudié.

III.5.2. Méthode de Petrov-Galerkine :

Afin de résoudre les problèmes d'oscillations engendrés par la méthode de Galerkin, Hughes et ses collaborateurs (Réf.) ont proposé une solution en modifiant la fonction test utilisée. Ils ont adopté une fonction test ϕ^* de la forme :

$$\phi^* = \phi(x) + \tau \mathcal{L}_{stab}(\phi) \quad (III.90)$$

Dans cette équation ϕ^* , représente la fonction test de Galerkin (équation III.30), $\mathcal{L}_{stab}$ tandis qu'est un opérateur différentiel de stabilisation qui varie en fonction des méthodes suivantes :

III.5.2.1 Méthode GLS (Galerkin Least-Squares méthode) :

Pour la méthode GLS, on prend $\mathcal{L}_{stab} = \mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_{stab} = u \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right) \quad (III.91)$$

Et la fonction test s'écrit :

$$\phi^* = \phi + \tau \left(u \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right) \right) \quad (III.92)$$

Le terme τ présent dans l'équation (III.90) est un paramètre de stabilisation, il dépend des paramètres physiques du problème (u et k) et du paramètre du maillage he . Comme les fonctions d'interpolation sont linéaires, les méthodes DAA et GLS sont identiques dans notre cas.

III.5.2.2. Méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin method):

La méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) est une technique de stabilisation utilisée dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) en mécanique des fluides. Elle est couramment utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes.

Chapitre III : La méthode des éléments finis

La méthode SUPG vise à améliorer la stabilité numérique et la précision des solutions en utilisant une approche de stabilisation basée sur les caractéristiques du flux. Elle tire son nom des concepts clés qu'elle intègre :

1. Streamline (trajectoire de particules) : La méthode SUPG prend en compte les trajectoires des particules de fluide pour déterminer une direction préférentielle d'advection. Cela permet de capturer les structures de flux plus efficacement.
2. Upwind (amont) : La méthode SUPG utilise une discrétisation amont pour le terme convectif des équations de conservation. Cette discrétisation prend en compte la direction de l'écoulement pour garantir la stabilité numérique.
3. Petrov-Galerkin : La méthode SUPG utilise une formulation de type Petrov-Galerkin, où deux espaces de fonctions sont utilisés pour les tests et les essais. Cela permet d'introduire des fonctions de pondération supplémentaires pour la stabilisation.

La stabilisation dans la méthode SUPG est réalisée en ajoutant un terme de stabilisation à l'équation de transport convectif. Ce terme dépend des gradients de solution dans la direction d'advection et utilise des fonctions de pondération basées sur les caractéristiques du flux. Ce terme supplémentaire contribue à supprimer les oscillations numériques indésirables et à améliorer la précision des résultats.

En résumé, la méthode SUPG est une technique de stabilisation utilisée dans la résolution numérique des EDP en mécanique des fluides. Elle utilise les concepts de trajectoires de particules, de discrétisation amont et de formulation Petrov-Galerkin pour améliorer la stabilité et la précision des solutions.

Pour la méthode SUPG, $\mathcal{L}_{stab}$ correspond à la partie adjointe de l'opérateur $\mathcal{L}$ donnée par l'équation:

$$\mathcal{L}_{stab} = \mathbf{u} \frac{d}{dx}$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Ainsi la fonction test s'écrit :

$$\Phi^* = \Phi + \tau u \frac{d}{dx} \quad (\text{III.93})$$

. La forme intégrale associée à l'équation (III.1) s'écrit :

$$W = \int \left(\Phi + \tau u \frac{d\Phi}{dx} \right) \left(u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) - f \right) dx \quad (\text{III.94})$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$W = W_{\text{galerkine}} + W_s \quad (\text{III.95})$$

où $W_{\text{galerkine}}$ est la forme intégrale de Galerkin, donné par l'équation (III.96) et :

$$W_s = \int \tau u \frac{d\Phi}{dx} \left(u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) - f \right) dx \quad (\text{III.96})$$

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les fonctions $\phi(x)$ et $c(x)$ sont souvent des fonctions polynomiales par morceaux, elles sont continuées sur tout le domaine et C^∞ à l'intérieur d'un élément

Cependant, les dérivées premières peuvent être discontinues entraînant des sauts sur la frontière des éléments et les dérivées secondes sont des fonctions de Dirac sur ces mêmes frontières. Il n'est donc pas possible d'intégrer sur le domaine, le produit de deux fonctions, où l'une serait discontinue et l'autre une fonction de Dirac par exemple (cela arrive dans des termes tels que $\left(u \frac{d\Phi}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) \right) dx$. Pour contourner ce problème le terme de stabilisation n'est définie qu'à l'intérieure de l'élément où les fonctions sont C^∞ , ainsi on remplace l'équation (III.96) par :

$$\sum_{e=1}^{n_e} W_s^e \quad (\text{III.97})$$

Avec :

$$W_s^e = \int \tau_e u \frac{d\Phi}{dx} \left(u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) - f \right) dx \quad (\text{III.98})$$

Où τ_e est la valeur local du paramètre de stabilisation. L'équation (III.98) peut se mettre sous la forme

$$W_s^e = \int \tau_e u \frac{d\Phi}{dx} \left(u \frac{dc}{dx} - f \right) dx - \int \tau_e u \frac{d\Phi}{dx} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) dx \quad (\text{III.99})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

Le coefficient k est supposé constant par élément, d'où :

$$\int \frac{d\Phi}{dx} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dc}{dx} \right) dx \approx \int \frac{d\Phi}{dx} \overline{k_e} \frac{d^2c}{dx^2} dx = 0 \quad (\text{III.100})$$

En effet, comme la fonction $c(x)$ est linéaire par élément (équation (III.18)), sa dérivée seconde est nulle, et par conséquent l'équation (III.99) devient :

$$W_s^e = \int \tau_e u \frac{d\Phi}{dx} \left(u \frac{dc}{dx} - f \right) dx \quad (\text{III.101})$$

En remplaçant $W_{galerkine}$ par l'équation (1.1) et W_s par l'équation (III.97), l'équation (III.96) devient :

$$W = W^c + \sum W^e \quad (\text{III.102})$$

Avec :

$$W^e = W_{galerkine}^e + W_s^e \quad (\text{III.103})$$

En substituant les équations (III.17) et (III.101) dans l'équation précédent, on obtient :

$$W^e = \int \Phi u \frac{dc}{dx} + \varepsilon \frac{d\Phi}{dx} \frac{dc}{dx} - \left(\Phi + w \frac{d\Phi}{dx} \right) f dx \quad (\text{III.104})$$

Avec :

$$w = \tau_e u \quad (\text{III.105})$$

$$\varepsilon = k + w u \quad (\text{III.106})$$

Suite aux équations (III.92) et (III.96), l'équation (III.104) devient :

$$W^e = \phi_e \int \left(N u \frac{dN^t}{dx} c_e + \varepsilon \frac{dN}{dx} \frac{dN^t}{dx} c_e - \left(N + w \frac{dN}{dx} \right) f \right) dx \quad (\text{III.107})$$

Soit :

$$W^e = \phi_e R_e \quad (\text{III.108})$$

Avec :

$$R_e = K_e c_e - F_e \quad (\text{III.109})$$

$$K_e = \overline{u_e} K_1 + \overline{\varepsilon_e} K_2 \quad (\text{III.110})$$

$$\mathbf{F}_e = \overline{f}_e (\mathbf{V} + \overline{\mathbf{w}}_e \mathbf{U}) \quad (\text{III.111})$$

Avec :

$$\mathbf{U} = \int \frac{dN}{dx} d\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.112})$$

En considérant le terme f linéaire par élément (équation (III.106)), l'équation (III.111) est remplacée par :

$$\mathbf{F}_e = (\mathbf{K}_{3+} \overline{\mathbf{w}}_e \mathbf{K}_1^t) \mathbf{f}_e \quad (\text{III.113})$$

où $\mathbf{V}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ sont donnés par les équations (III.37), (III.38), (III.39), (III.46) et $\mathbf{K}_1^t$ est la transposée de $\mathbf{K}_1$.

Si le terme source est nul, la méthode SUPG devient identique à la méthode DAA et par conséquent on peut utiliser les résultats de cette méthode pour déterminer la valeur de τ_e , ainsi en identifiant les équations et (III.106), on obtient :

$$\tau_e = \frac{h_e}{2 \overline{u}_e} \zeta(\mathbf{P}_e) \quad (\text{III.114})$$

des expressions simples de La fonction $\zeta(\mathbf{P}_e)$ par exemple :

$$\zeta(\mathbf{P}_e) = \max (0, 1 - 1/(\mathbf{P}_e)) \quad (\text{III.115a})$$

$$\zeta(\mathbf{P}_e) = \min (1, (\mathbf{P}_e)/3) \quad (\text{III.115b})$$

$$\zeta(\mathbf{P}_e) = \mathbf{P}_e / (1 + \mathbf{P}_e) \quad (\text{III.115c})$$

Une courbe comparative pour ces fonctions est donnée par la figure

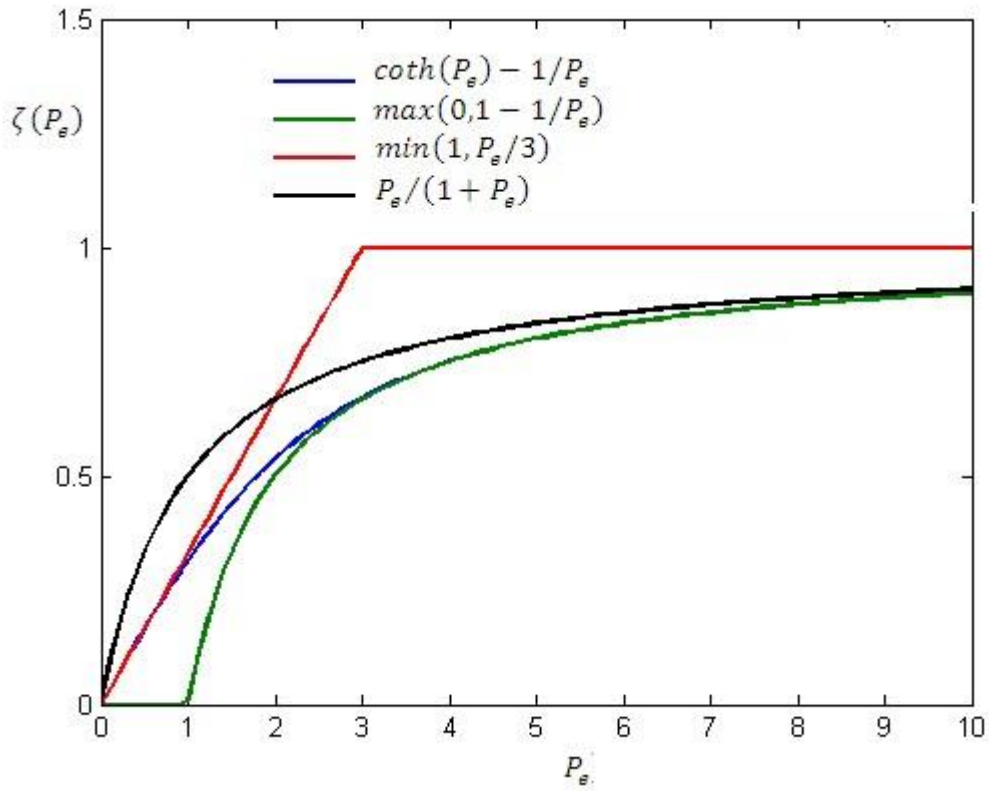


Figure III. 4 : Tracé de la fonction $\zeta(P_e)$ et de ses approximations

En substituant l'équation (III.114) dans les équations (III.105) et (III.106), on a :

$$\overline{w_e} = \frac{h_e}{2} \zeta(P_e) \quad (\text{III.116})$$

$$\overline{\varepsilon_e} = \overline{k_e} + \frac{h_e}{2} \overline{u_e} \zeta(P_e) \quad (\text{III.117})$$

Le calcul du terme de frontière W^c reste le même. Le reste de la procédure est identique à celui de la méthode de Galerkin.

1. B Problème linéaire :

Pour un problème linéaire, les paramètres physiques sont donnés par les équations (III.17) ainsi l'équation (III.104) s'écrit :

$$W^e = \int \left(\phi u \frac{dc}{dx} + \varepsilon \frac{d\phi}{dx} \frac{dc}{dx} - \left(\phi + w \frac{d\phi}{dx} \right) (Ac + B) \right) dx \quad (\text{III.118})$$

Chapitre III : La méthode des éléments finis

En substituant l'équation (III.31) et (III.34) dans l'équation (III.118), on obtient:

$$\mathbf{W}^e = \boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{K}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{F}_e) \quad (\text{III.119})$$

Avec :

$$\mathbf{K}_e = \overline{\mathbf{u}}_e \mathbf{K}_1 + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \mathbf{K}_2 - \overline{\mathbf{A}}_e (\mathbf{K}_3 + \overline{\mathbf{w}}_e \mathbf{K}_1^t) \quad (\text{III.120})$$

$$\mathbf{F}_e = \overline{\mathbf{B}}_e (\mathbf{V} + \overline{\mathbf{w}}_e \mathbf{U}) \quad (\text{III.121})$$

En supposant la fonction $\mathbf{B}$ par élément (équation (III.83)), l'équation (III.121) est remplacée

par :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{B}_e (\mathbf{K}_3 + \overline{\mathbf{w}}_e \mathbf{K}_1^t) \quad (\text{III.122})$$

Chapitre IV

Exemples de validation

IV.1 Algorithmes, Exemples et Programmes en langage Matlab

IV.1.1. Cas linéaire

Algorithme

❖ Maillage

- Lecture des données (Longueur L , Conditions aux limites,)
- Choix du nombre d'éléments n_e
- Calcul de la table des coordonnées x (équation (III.14))
- Calcul de la table des connectivités $connec$ (équation

❖ Solveur

- Initialisation à zéro de u et ϕ (équation (III.68))
- Boucle sur les éléments
 - Extraire la table de localisation (équation (1.13))
 - Extraire les coordonnées élémentaires (peut servir éventuellement au calcul des paramètres physiques $\overline{u_e}, \overline{k_e}, \overline{A_e}, \overline{B_e}$ ou $\mathbf{B_e}$.

$$x_e = x(loce)$$

- Introduire les paramètres élémentaires $\overline{u_e}, \overline{k_e}, \overline{A_e}, \overline{B_e}$ ou $\mathbf{B_e}$.
- Calculer $\mathbf{K_e}$ et $\mathbf{F_e}$
 - Méthode de Galerkin (équations (III.79) et (III.80) ou (III.84))
 - Méthode DAA (équations (III.125) et (III.80) ou (1 III.84))
 - Méthode SUPG (équations (III.158) et (III.159) ou (III.160))
- Assemblage (équations (III.69) et (III.70))
- **Fin de la boucle sur les éléments**
- Prise en compte des conditions aux limites de Neumann (équations (III.71) et (III.72))

- Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet (équations (III.74) et (III.75))

- Résolution du système (III.73)

❖ Post-traitement

- Tracer les courbes, comparer...

IV.2. Exemple 1

Résoudre le problème ci-dessous avec les trois méthodes citées précédemment dans les deux cas suivants :

a- Un maillage à 2 éléments

b- Un maillage à 4 éléments. En déduire $c(x = 2.75)$.

$$\begin{cases} \cosh(x) \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(e^{-x} \frac{dc}{dx} \right) - (\cos x)c - \sin x = 0 & x \in [0,4] \\ c(x=0) = 1 \text{ et } c(x=4) = 0 \end{cases}$$

Faire un programme matlab et tracer les solutions numériques en utilisant un maillage à 10 éléments.

IV.2.1. Maillage à 2 éléments

La figure IV. 1 résume toutes les informations liées au maillage, numéros des nœuds, coordonnées nodales, numéros des éléments et leurs connectivités. Le nombre total des nœuds est $N = 3$, le nombre total des éléments est $ne = 2$, la taille de l'élément est $he = 2$.

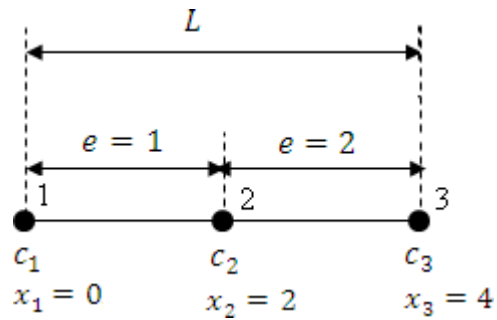


Figure IV. 2 : Discrétisation du domaine en deux éléments L2

Les tables des coordonnées et connectivités globales sont données par les deux tableaux suivants :

N° nœud	Coordonnée x
1	0.
2	2.
3	4.

N° élément	connectivités
1	1 2
2	2 3

D'après la figure IV. 3, on a :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2. \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ connec} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

L'inconnu du problème est le vecteur global des variables nodales $\mathbf{c}_g = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

VI.2.1.1. Méthode de Galerkin

Calcul élémentaire

Le calcul élémentaire consiste à calculer K_e et F_e pour chaque élément du maillage.

Elément 1 ($e = 1$) :

- Table élémentaire des connectivités : **loce** (1) = **connec** (1, :) = (1 2)
- Table élémentaire des variables nodales : $c_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles : $\phi_e = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées : $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\begin{aligned}\bar{x}_e &= \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ \bar{u}_e &= \cosh(\bar{x}_e) = 1.5431 \\ \bar{k}_e &= e^{-\bar{x}_e} = 0.3679 \\ \bar{A}_e &= \cos \bar{x}_e = 0.5403 \\ \bar{B}_e &= \sin \bar{x}_e = 0.8415\end{aligned}$$

- Tables élémentaires K_e et F_e : équations (III.79) et (III.80)

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{e=1} &= \begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 \\ -1.1356 & 0.5953 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{e=1} &= \begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Forme intégrale élémentaire : équation (III.40)

$$W^{e=1} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \left(\begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 \\ -1.1356 & 0.5953 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 \end{Bmatrix} \right)$$

- Extension de la forme intégrale élémentaire

$$W^{e=1} = \underbrace{\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle}_{\phi_g} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 & 0 \\ -1.1356 & 0.5953 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{K}_{e=1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{F}_{e=1}} \right)$$

Elément 2 ($e = 2$) :

- Table élémentaire des connectivités : $\text{loce}(2) = \mathbf{connec}(2, :) = (2 \quad 3)$

- Table élémentaire des variables nodales : $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$

- Table élémentaire des variables nodales virtuelles : $\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_2, \phi_3 \rangle$

- Table élémentaire des coordonnées : $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$

- Valeurs moyennes

$$\begin{aligned}\bar{x}_e &= \frac{x_2 + x_3}{2} = 3 \\ \bar{u}_e &= \cosh(\bar{x}_e) = 10.0677 \\ \bar{k}_e &= e^{-\bar{x}_e} = 0.0498 \\ \bar{A}_e &= \cos \bar{x}_e = -0.99 \\ \bar{B}_e &= \sin \bar{x}_e = 0.1411\end{aligned}$$

- Tables élémentaires $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{F}_e$: équations (III.79) et (III.80)

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{e=2} &= \begin{bmatrix} -4.3489 & 5.3389 \\ -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{e=2} &= \begin{Bmatrix} 0.1411 \\ 0.1411 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Forme intégrale élémentaire : équation (III.40)

$$\mathbf{W}^{e=2} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \left(\begin{bmatrix} -4.3489 & 5.3389 \\ -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.1411 \\ 0.1411 \end{Bmatrix} \right)$$

- Extension de la forme intégrale élémentaire

$$\mathbf{W}^{e=2} = \underbrace{\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle}_{\phi_g} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -4.3489 & 5.3389 & 0 \\ -4.7287 & 5.7187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{K}_{e=1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{c}_g} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.1411 \\ 0.1411 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{F}_{e=1}} \right)$$

Assemblage

L'assemblage consiste à additionner les formes intégrales élémentaires et en déduire $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_g$.

En additionnant les deux formes élémentaires ($W^{e=1}$) et ($W^{e=2}$), on obtient :

$$W = \underbrace{\phi_g \begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 & 0 \\ -1.1356 & 0.5953 - 4.3489 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix} \mathbf{c}_g}_{\mathbf{K}_g} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 + 0.1411 \\ 0.1411 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_g}$$

D'où

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 & 0 \\ -1.1356 & -3.7537 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.9826 \\ 0.1411 \end{pmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

Des conditions de Dirichlet sont appliquées aux deux nœuds frontières, $in = 1$ avec $c_1 = 1$,
 $in = 3$ avec $c_3 = 0$.

En appliquant les équations (III.74) et (III.75) avec $in = 1$ et $c_1 = 1$, on obtient :

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.9826 \\ 0.1411 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.9478 \\ -1.1356 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 \text{ et } \mathbf{F}_g(1) = c_1 \text{ soit } \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0.1411 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7537 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix}$$

En appliquant les équations (III.74) et (III.75) avec $in = 3$ et $c_3 = 0$, on obtient :

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0.1411 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5.3389 \\ 5.7187 \end{pmatrix} c_3 \text{ et } \mathbf{F}_g(3) = c_0 \text{ soit } \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7537 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Résolution (équation (III.81))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7537 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution du système précédent donne :

$$\mathbf{Cg} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5643 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

VI.2.1.2. Méthode DAA

Ce que diffère par rapport à la méthode de Galerkin, est uniquement le calcul de la table K_e .

D'après les équations (III.126), (III.125) :

Elément 1 :

$$P_e = \frac{uh_e}{2k} = 4.1945, \quad \bar{\varepsilon}_e = 1.5438$$
$$K_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.3599 & -0.1805 \\ -1.7235 & 1.1832 \end{bmatrix}$$

Elément 2 :

$$P_e = 202.2144, \quad \bar{\varepsilon}_e = 10.0667$$
$$K_{e=2} = \begin{bmatrix} 0.6600 & 0.3300 \\ -9.7377 & 10.7277 \end{bmatrix}$$

Après assemblage et prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8432 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.7061 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soit après résolution :

$$\mathbf{Cg} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.4681 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

VI.2.1.3. Méthode SUPG

Ce que diffère par rapport à la méthode de Galerkin, est uniquement le calcul des tables élémentaires K_e et F_e , D'après les équations (III.148) et (III.149) :

Elément 1 :

$$P_e = 4.1945, \bar{w}_e = 0.7620, \bar{\varepsilon}_e = 1.5438$$

$$\mathbf{K}_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.1540 & 0.0254 \\ -1.9294 & 0.9774 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.2002 \\ 1.4827 \end{Bmatrix}$$

Elément 2 :

$$P_e = 202.2144, \bar{w}_e = 0.9951, \bar{\varepsilon}_e = 10.0677$$

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} 0.1674 & -0.1626 \\ -9.24514 & 11.2202 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=4} = \begin{Bmatrix} 0.0007 \\ 0.2815 \end{Bmatrix}$$

Après assemblage et prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1448 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.4128 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soit après résolution :

$$\mathbf{Cg} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.9811 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

VI.2.2. Maillage à 4 éléments

La figure IV. 4 résume toutes les informations liées au maillage. Le nombre total des nœuds est $N = 5$, le nombre total des éléments est $n_e = 4$, la taille de l'élément est h_e

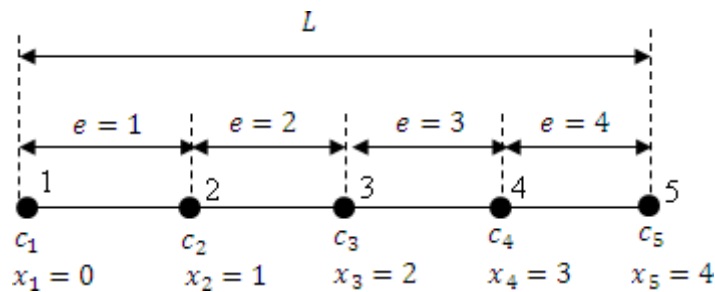


Figure IV. 5 : Maillage du domaine en quatre éléments L2

Chapitre IV : EXEMPLE

Les tables des coordonnées et connectivités globales sont données par les deux tableaux suivants :

N° nœud	Coordonnée x
1	0.
2	1.
3	2.
4	3.
5	4.

N° élément	connectivités
1	1 2
2	2 3
3	3 4
4	4 5

Les tables globales des coordonnées et connectivités sont égales à :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \text{ connec} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

L'inconnu du problème du problème est le vecteur $\mathbf{c}_g = \langle \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4 \quad \mathbf{c}_5 \rangle^t$

VI.2.2.1 Méthode de Galerkinge

Pour éviter de faire l'extension de chaque matrice élémentaire et gagner ainsi en espace de stockage, on applique l'algorithme d'assemblage pour le traitement du 2^{ème} cas.

- Initialiser à zéro $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_g$:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Boucle sur les éléments

Elément 1 ($e = 1$) :

- Table élémentaire des connectivités : $\mathbf{loce}(1) = \mathbf{connec}(1, :) = (1 \quad 2)$
- Table élémentaire des variables nodales : $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles : $\boldsymbol{\phi}_e = (\phi_1, \phi_2)$
- Table élémentaire des coordonnées : $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.5 \\ \bar{u}_e &= \cosh(\bar{x}_e) = 1.1276 \\ \bar{k}_e &= e^{-\bar{x}_e} = 0.6065 \\ \bar{A}_e &= \cos \bar{x}_e = 0.8776 \\ \bar{B}_e &= \sin \bar{x}_e = 0.4794 \end{aligned}$$

- Tables élémentaires $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{F}_e$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{e=1} &= \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 \\ -1.3166 & 0.8778 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{e=1} &= \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Chapitre IV : EXEMPLE

- Assembler $\mathbf{K}_e$ dans $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_e$ dans $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations (III.69) et (III.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 2 ($e = 2$) :

- Table élémentaire des connectivités : $\mathbf{loce}(2) = \mathbf{connec}(2, :) = \langle 2 \ 3 \rangle$
- Table élémentaire des variables : $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles : $\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_2, \phi_3 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées : $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= \frac{x_2 + x_3}{2} = 1.5 \\ \bar{u}_e &= \cosh(\bar{x}_e) = 2.3524 \\ \bar{k}_e &= e^{-\bar{x}_e} = 0.2231 \\ \bar{A}_e &= \cos \bar{x}_e = 0.0707 \\ \bar{B}_e &= \sin \bar{x}_e = 0.9975 \end{aligned}$$

- Tables élémentaires $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{F}_e$:

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} -0.9767 & 0.9413 \\ -1.4111 & 1.3758 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.4987 \\ 0.4987 \end{Bmatrix}$$

- Assembler $\mathbf{K}_e$ dans $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_e$ dans $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations (III.69) et (III.70), on obtient :

Chapitre IV : EXEMPLE

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 - 0.9767 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & 1.3758 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 + 0.4987 \\ 0.4987 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 3 ($e = 3$) :

- Table élémentaire des connectivités : **loce**(3) = **connec**(3, :) = {3 4}
- Table élémentaire des variables : $c_e = \begin{Bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles : $\phi_e = \langle \phi_3, \phi_4 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées : $x_e = x(\text{loce}) = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= \frac{x_2 + x_3}{2} = 2.5 \\ \bar{u}_e &= \cosh(\bar{x}_e) = 6.1323 \\ \bar{k}_e &= e^{-\bar{x}_e} = 0.0821 \\ \bar{A}_e &= \cos \bar{x}_e = -0.8011 \\ \bar{B}_e &= \sin \bar{x}_e = 0.5985 \end{aligned}$$

- Tables élémentaires $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{F}_e$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{e=3} &= \begin{bmatrix} -2.7170 & 3.1176 \\ -3.0147 & 3.4153 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{e=3} &= \begin{Bmatrix} 0.4987 \\ 0.4987 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Assembler $\mathbf{K}_e$ dans $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_e$ dans $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations ((III.69) et ((III.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 - 0.9767 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & 1.3758 - 2.7170 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & 3.4153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 + 0.4987 \\ 0.4987 + 0.2992 \\ 0.2992 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 4 ($e = 4$) :

- Table élémentaire des connectivités : **loce**(4) = **connec**(4, :) = $\langle 4 \ 5 \rangle$
- Table élémentaire des variables : $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles : $\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_4, \phi_5 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées : $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= \frac{x_2 + x_3}{2} = 3.5 \\ \bar{u}_e &= \cosh(\bar{x}_e) = 16.5728 \\ \bar{k}_e &= e^{-\bar{x}_e} = 0.0302 \\ \bar{A}_e &= \cos \bar{x}_e = -0.9365 \\ \bar{B}_e &= \sin \bar{x}_e = -0.3508 \end{aligned}$$

- Tables élémentaires $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{F}_e$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{e=4} &= \begin{bmatrix} -7.9441 & 8.4123 \\ -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{e=4} &= \begin{Bmatrix} -0.1754 \\ -0.1754 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Assembler $\mathbf{K}_e$ dans $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_e$ dans $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations ((III.69) et ((III.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 - 0.9767 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & 1.3758 - 2.7170 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & 3.4153 - 7.9441 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 + 0.4987 \\ 0.4987 + 0.2992 \\ 0.2992 - 0.1754 \\ -0.1754 \end{pmatrix}$$

Fin de la boucle sur les éléments

On réécrit $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_g$:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{pmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

En appliquant les équations ((III.74) et ((III.75) avec, $in = 1$ et $c_1 = 1$, puis avec, $in = 5$

et $c_5 = 0$, on obtient

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution (équation (III.73))

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$C_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -4.7136 \\ 1.6883 \\ -1.1512 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

VI.2.2.2 Méthode DAA

Ce qui diffère par rapport à la méthode de Galerkin, est uniquement le calcul de la table K_e .

D'après l'équation ((III.125)) :

Elément 1 :

$$P_e = 0.9296, \quad \bar{\epsilon}_e = 0.7719$$

$$K_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.0844 & -0.3544 \\ -1.4820 & 1.0432 \end{bmatrix}$$

Elément 2

$$P_e = 5.2714, \quad \bar{\epsilon}_e = 1.1763$$

$$K_{e=2} = \begin{bmatrix} -0.0235 & -0.0119 \\ -2.3643 & 2.3289 \end{bmatrix}$$

Elément 3 :

$$P_e = 37.3533, \quad \bar{\epsilon}_e = 3.0661$$

$$K_{e=3} = \begin{bmatrix} 0.2670 & 0.1335 \\ -5.9988 & 6.3993 \end{bmatrix}$$

Elément 4 :

$$P_e = 274.4083, \quad \bar{\epsilon}_e = 8.2864$$

$$K_{e=4} = \begin{bmatrix} 0.3122 & 0.1561 \\ -16.4167 & 16.8850 \end{bmatrix}$$

Après assemblage, on obtient les tables globales :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.0844 & -0.3544 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4820 & 1.0197 & -0.0119 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3643 & 2.5959 & 0.1335 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9988 & 6.7115 & 0.1561 \\ 0 & 0 & 0 & -16.4167 & 16.8850 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

Après la prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient le système :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0197 & -0.0119 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3643 & 2.5959 & 0.1335 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9988 & 6.7115 & 0.1561 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16.8850 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.2205 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après résolution :

$$\mathbf{C}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.2033 \\ 2.2114 \\ 1.9950 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

VI.2.2.3 Méthode SUPG

Ce qui diffère par rapport à la méthode de Galerkin, est uniquement le calcul des tables élémentaires $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{F}_e$, D'après les équations ((III.158) et ((III.159) :

Elément 1 :

$$Pe = 0.9296, \quad \overline{w}_e = 0.1467, \quad \overline{\varepsilon}_e = 0.7719$$

$$\mathbf{K}_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.0200 & -0.2900 \\ -1.5464 & 0.9789 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.1694 \\ 0.3100 \end{Bmatrix}$$

Elément 2 :

$$Pe = 5.2714, \quad \overline{w}_e = 0.4052, \quad \overline{\varepsilon}_e = 1.1763$$

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} -0.0092 & 0.0025 \\ -2.3786 & 2.3146 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.0946 \\ 0.9029 \end{Bmatrix}$$

Elément 3 :

$$Pe = 37.3533, \quad \overline{w}_e = 0.4866, \quad \overline{\varepsilon}_e = 3.0661$$

$$\mathbf{K}_{e=3} = \begin{bmatrix} 0.0721 & -0.0614 \\ -5.8038 & 6.5943 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.0080 \\ 0.5905 \end{Bmatrix}$$

Elément 4 :

$$Pe = 274.4083, \quad \overline{w}_e = 0.4982, \quad \overline{\varepsilon}_e = 8.2864$$

$$\mathbf{K}_{e=4} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0789} & -\mathbf{0.0772} \\ -\mathbf{16.1835} & \mathbf{17.1182} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{e=4} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{0.0006} \\ -\mathbf{0.3501} \end{Bmatrix}$$

Après assemblage, on obtient les tables globales :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 0.0200 & -0.2900 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5464 & 0.9697 & -0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3786 & 2.3867 & -0.0614 & 0 \\ 0 & 0 & -5.8038 & 6.6732 & -0.0772 \\ 0 & 0 & 0 & -16.1835 & 17.1182 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.1694 \\ 0.4046 \\ 0.9109 \\ 0.5898 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après la prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient le système :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9697 & -0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3786 & 2.3867 & -0.0614 & 0 \\ 0 & 0 & -5.8038 & 6.6732 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.9510 \\ 0.9109 \\ 0.5898 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après résolution :

$$\mathbf{C}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1.0000} \\ \mathbf{2.0058} \\ \mathbf{2.4375} \\ \mathbf{2.2083} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Discussion : La figure 1.9 trace les solutions des trois méthodes pour un maillage à 10 éléments ($n_e = 10$), la solution de Galerkin est erronée, ce résultat était attendu car on est dans un cas de convection dominante, cependant, les méthodes DDA et SUPG donnent des résultats très proches, les deux solutions deviennent identiques en raffinant d'avantage le maillage.

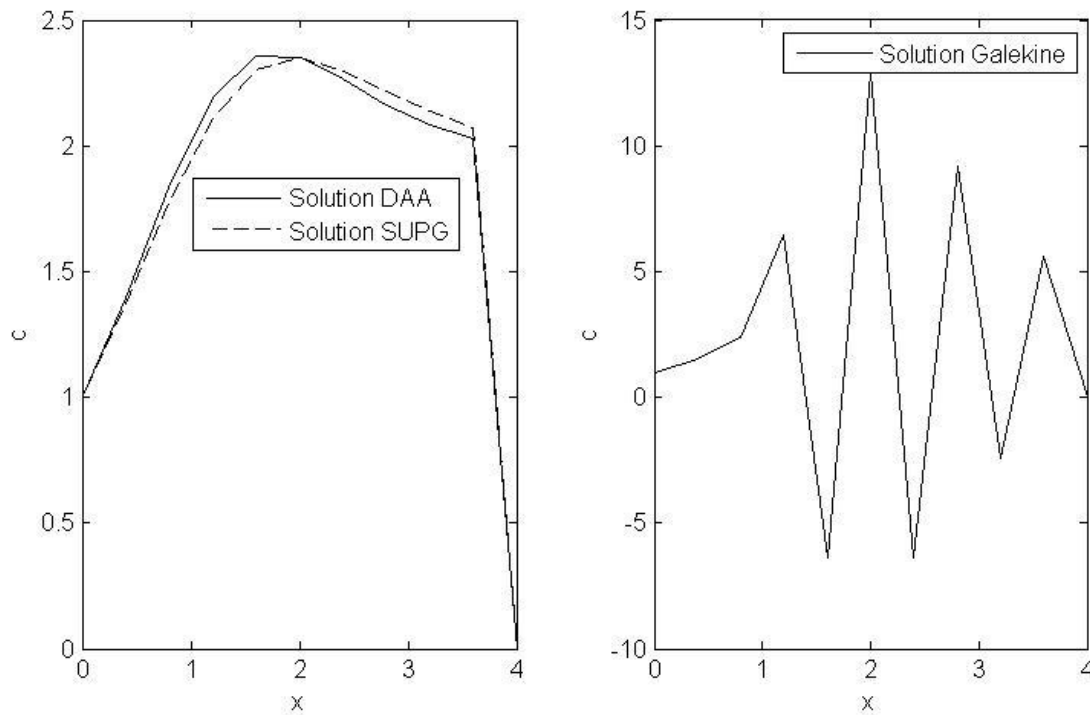


Figure IV. 6 : Solutions numériques obtenues par les trois méthodes

IV.3. Programme numérique en langage Matlab

La résolution d'un problème mathématique par la méthode des éléments finis passe nécessairement par l'établissement d'un programme numérique en choisissant un langage de programmation (Fortran, C, C++,... ou Matlab). Pour des raisons de simplicité, on a choisi le langage Matlab. On donne ci-dessous un programme Matlab incluant les trois méthodes et permettant de résoudre l'exemple en question. On a essayé de donner un programme le plus simple possible, devant chaque ligne du programme, on a donné l'équation qui lui correspond dans la formulation mathématique

Chapitre IV : EXEMPLE

```
%=====
%
%
%      Problème linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet
%      Méthode Galerkin
%      Méthode DAA
%      Méthode SUPG
%
%=====
%
%clear all
% Choix de la méthode: imeth = 1(Galerkin), 2(DA), 3(SUPG)
imeth=3;
%
L=4;      % L = longueur totale du domaine
ne=10;    % ne = nombre des éléments
he=L/ne;  % he = taille de l'élément N=ne+1;
          % N = nombre total des nœuds
% Introduire les valeurs limites c0=1;
cl=0;
% Calculer les coordonnées des nœuds Eq.( III.14)for
in=1:N
    x(in)=he*(in-1);
end
% Calculer les connectivités des éléments Eq.( III.12)for
ie=1:ne
    connec(ie,1)=ie;
    connec(ie,2)=ie+1;
end
% Initialiser à zéro Kg et Fg
Kg=zeros(N,N); Fg=zeros(N,1);
% Boucle sur les élémentsfor
e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément Eq.( III.13)
    loce=connec(e,:);
    % Extraire les coordonnées nodales de l'élément xe=x(loce);
    % Calculer la valeur moyenne de xe
    xm=mean(xe);
    % Calculer les paramètres physiques élémentaires moyennes
    uem=cosh(xm); kem=exp(-xm); Aem=cos(xm); Bem=sin(xm);
    % Calculer les matrices K1, K2, K3 K1=0.5*[-
    1 1;-1 1]; % Eq. (III.38)
    K2=[1 -1;-1 1]/he; % Eq. (III.39)
    K3=[2 1;1 2]*he/6; % Eq. (III.46)
```

Chapitre IV : EXEMPLE

```

V=0.5*he*[1;1]; % Eq. (III.37)
U=[-1;1]; % Eq. (III.150)
% Calculer Ke et Feif
imeth==1
    Ke=uem*K1+kem*K2-Aem*K3; % Eq.
    (1.79)Fe=Bem*V; % Eq. (III.80)
elseif imeth==2
    Pe=0.5*uem*he/kem; % Eq. (III.117)
    zeta=coth(Pe)-1/Pe; % Eq. (III.124)
    epe=kem+0.5*uem*he*zeta; % Eq. (III.126)

Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*K3; % Eq. (III.125)
Fe=Bem*V; % Eq. (1.80)
elseif imeth==3
    Pe=0.5*uem*he/kem; % Eq. (III.117)
    zeta=coth(Pe)-1/Pe; % Eq. (III.124)
    we=0.5*he*zeta; % Eq. (III.154)
    epe=kem+we*uem; % Eq. (III.155)
    Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*(K3+we*K1'); % Eq.
    (1.158)Fe=Bem*(V+we*U); % Eq. (III.159)
end
% Assemblage Kg(loce,loce)=Kg(loce,loce)+Ke;
% Eq.(1.69)Fg(loce)=Fg(loce)+Fe; % Eq.(III.70)

end
% Fin de la boucle sur les éléments

% Introduire les conditions aux limites de DirichletFg=Fg-
Kg(:,1)*c0; Fg(1)=c0; % Eq.( III.74)
Kg(:,1)=0; Kg(1,:)=0; Kg(1,1)=1; % Eq.( III.75)
Fg=Fg-Kg(:,N)*cl; Fg(N)=cl; % Eq.( III.74)
Kg(:,N)=0; Kg(N,:)=0; Kg(N,N)=1; % Eq.( III.75)

% Résolution du système (III.73)
cg=Kg\Fg
% Tracé du graphe
plot(x,cg,'-k')
xlabel('x')
ylabel('c')
legend('SolutionGalekine')

%----- Fin du programme -----

```

Chapitre IV : EXEMPLE

Dans notre étude, on a présenté deux formules pour calculer F_e . Dans cet exemple, on a utilisées équations (III.80) et (III.151) pour calculer F_e , on donne ci-dessous les solutions numériques du 2^{ème} cas en utilisant les équations (1.84) et (III.160) :

IV.3.1 Méthode de Galerkin : équation (III.84)

$$F_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.1402 \\ 0.2805 \end{Bmatrix}, F_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.4320 \\ 0.4433 \end{Bmatrix}, F_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.3266 \\ 0.1986 \end{Bmatrix}, F_{e=4} = \begin{Bmatrix} -0.0791 \\ -0.2287 \end{Bmatrix}$$

La solution obtenue est :

$$C_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -4.6429 \\ 1.6682 \\ -1.1369 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IV.3.2. Méthode DDA : identique à celle de Galerkin

$$F_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.1402 \\ 0.2805 \end{Bmatrix}, F_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.4320 \\ 0.4433 \end{Bmatrix}, F_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.3266 \\ 0.1986 \end{Bmatrix}, F_{e=4} = \begin{Bmatrix} -0.0791 \\ -0.2287 \end{Bmatrix}$$

La solution obtenue est :

$$C_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -4.6429 \\ 1.6682 \\ -1.1369 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IV.3.3. Méthode SUPG : équation (III.160)

$$F_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.0785 \\ 0.3422 \end{Bmatrix}, F_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.0774 \\ 0.7980 \end{Bmatrix}, F_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.0710 \\ 0.4542 \end{Bmatrix}, F_{e=4} = \begin{Bmatrix} 0.0743 \\ -0.3821 \end{Bmatrix}$$

La solution obtenue est :

$$C_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.0212 \\ 2.4350 \\ 2.1970 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Chapitre IV : EXEMPLE

On donne ci-après le programme matlab utilisant la 2^{ème} formule pour calculer F_e

```
%=====
%
%
%      Problème linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet
%      Méthode Galerchine
%      Méthode DAA
%      Méthode SUPG
%
%=====
%
%clear all
% Choix de la méthode: imeth = 1(Galerchine), 2(DA), 3(SUPG)
imeth=3;
%
L=4;      % L = longueur totale du domaine
ne=10;    % ne = nombre des éléments
he=L/ne;  % he = taille de l'élément N=ne+1;
          % N = nombre total des nœuds
% Introduire les valeurs limites c0=1;
cl=0;
% Calculer les coordonnées des nœuds Eq.( III.14)for
in=1:N
    x(in)=he*(in-1);
end
% Calculer les connectivités des éléments Eq.( III.12)for
ie=1:ne
    connec(ie,1)=ie;
    connec(ie,2)=ie+1;
end
% Initialiser à zéro Kg et Fg
Kg=zeros(N,N); Fg=zeros(N,1);
% Boucle sur les élémentsfor
e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément Eq.( III.13)
    loce=connec(e,:);
    % Extraire les coordonnées nodales de l'élément xe=x(loce);
    % Calculer la valeur moyenne de xe
    xm=mean(xe);
    % Calculer les paramètres physiques élémentaires moyennes
    uem=cosh(xm); kem=exp(-xm); Aem=cos(xm);
```

Chapitre IV : EXEMPLE

```

% Calculer les valeurs nodales de B(x)
Be=sin(xe');
% Calculer les matrices K1, K2, K3
K1=0.5*[-1 1;-1 1];           % Eq. (III.38)
K2=[ -1;-1 1]/he;             % Eq. (III.39)
1

K3=[2 1;1 2]*he/6;            % Eq. (III.46)
% Calculer Ke et Fe

if imeth==1
    Ke=uem*K1+kem*K2-          % Eq. (III.79)
    Aem*K3; Fe=K3*Be;;         % Eq. (III.84)

elseif imeth==2
    Pe=0.5*uem*he/kem;         % (III.117)
                                Eq.

    zeta=coth(Pe)-1/Pe;         % Eq. (III.124)
    epe=kem+0.5*uem*he*zeta;    % (III.126)
                                Eq.

    Ke=uem*K1+epe*K2-          % Eq. (III.125)
    Aem*K3; Fe=K3*Be;          % Eq. (III.84)

elseif imeth==3
    Pe=0.5*uem*he/kem;         % Eq. (III.117)
    zeta=coth(Pe)-1/Pe;         % Eq. (III.124)
    we=0.5*he*zeta;            % Eq. (III.154)

    epe=kem+we*ue              % Eq. (III.155)
    m;

    Ke=uem*K1+epe*K2-          % (III.158)
    Aem*(K3+we*K1');           Eq. (III.160)
end Fe=(K3+we*K1')*Be;        %
                                Eq.

% Assemblage
Kg(loce,loce)=Kg(loce,loce)+Ke; % Eq.(1.69)
Fg(loce)=Fg(loce)+Fe;          % Eq.(1.70)
end
d

```

% Fin de la boucle sur les éléments

% Introduire les conditions aux limites de Dirichlet

Fg=Fg-Kg(:,1)*c0; Fg(1)=c0; % Eq.(III.74)

Kg(:,1)=0; Kg(1,:)=0; Kg(1,1)=1; % Eq.(III.75)

Fg=Fg-Kg(:,N)*cl; Fg(N)=cl; % Eq.(III.74)

Kg(:,N)=0; Kg(N,:)=0; Kg(N,N)=1; % Eq.(III.75)

% Résolution du système (III.73)

cg=Kg\Fg

% Tracé du graphe

plot(x,cg,'-k')

xlabel('x')

**ylabel('c') legend('Solution
Galekine')**

IV.4. Exemple 2

$$\begin{cases} \cosh(x) \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left(e^{-x} \frac{dc}{dx} \right) - (\cos x)c - \sin x = 0 & x \in [0,4] \\ c(x=0) = 1 \text{ et } c(x=4) = 0 \end{cases}$$

Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les trois méthodes avec un maillage à 4 éléments.

Faire un programme Matlab et tracer la solution

IV.4.1. Méthode de Galerkin

On reprend les tables $\mathbf{K}_g$ et $\mathbf{F}_g$ déjà calculées :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.1423 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Neumann :

En identifiant le flux imposé $(kdc/dx)_{x=4} = 2c - 35$ avec l'équation (III.51), on a $\beta = 2$ et

Chapitre IV : EXEMPLE

$\alpha = -35$. Cependant, ce flux est imposé uniquement au nœud $in = N$ et par conséquent les tables $\mathbf{K}_c$ et $\mathbf{F}_c$ définies par les équations (III.53) et (1.54) sont égales à :

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ -35 \end{Bmatrix}$$

En appliquant les équations (III.72), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.1423 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 6.6288 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -35.1754 \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

En appliquant les équations (III.74) et (III.75) avec $in = 1$ et $c_1 = 1$, on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.1423 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 6.6288 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -35.1754 \end{Bmatrix}$$

Résolution

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.1423 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 6.6288 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -35.1754 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\mathbf{C}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.0212 \\ 2.4350 \\ 2.1970 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remarque : La prise en compte des conditions aux limites de Neumann est la même pour toutes les méthodes.

IV.4.2. Méthode DAA

On refait la même procédure mais avec les tables K_g et F_g calculées par méthode DAA :

$$K_g = \begin{bmatrix} -0.0844 & -0.3544 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4820 & 1.0197 & -0.0119 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3643 & 2.5959 & 0.1335 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9988 & 6.7115 & 0.1561 \\ 0 & 0 & 0 & -16.4167 & 16.8850 \end{bmatrix}; F_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

On obtient après la résolution :

$$C_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.2033 \\ 2.2112 \\ 1.9986 \\ -0.1589 \end{Bmatrix}$$

IV.4.3. Méthode SUPG

$$K_g = \begin{bmatrix} 0.0200 & -0.2900 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5464 & 0.9697 & -0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3786 & 2.3867 & -0.0614 & 0 \\ 0 & 0 & -5.8038 & 6.6732 & -0.0772 \\ 0 & 0 & 0 & -16.1835 & 17.1182 \end{bmatrix}; F_g = \begin{Bmatrix} 0.1694 \\ 0.4046 \\ 0.9109 \\ 0.5898 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient après la résolution :

$$C_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.0058 \\ 2.4375 \\ 2.2086 \\ 0.0260 \end{Bmatrix}$$

On donne ci-dessous le programme matlab

```
%=====
%
%
%      Problème linéaire avec des conditions aux limites mixtes
%      Méthode Galerkin
%      Méthode DAA
%      Méthode SUPG
%
```

Chapitre IV : EXEMPLE

```
%=====
=====
%clear all
% Choix de la méthode: imeth = 1(Galerkine), 2(DA), 3(SUPG)
imeth=3;
%
L=4;      % L = longueur totale du domaine
ne=10;    % ne = nombre des éléments
he=L/ne;  % he = taille de l'élément N=ne+1;
          % N = nombre total des nœuds
% Introduire les valeurs limites c0=1;
cl=0;
% Calculer les coordonnées des nœuds Eq.( III.14)
for in=1:N
    x(in)=he*(in-1);
end
% Calculer les connectivités des éléments Eq.(v12)
for ie=1:ne
    connec(ie,1)=ie;
    connec(ie,2)=ie+1;
end
% Initialiser à zéro Kg et Fg
Kg=zeros(N,N); Fg=zeros(N,1);
% Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément Eq.( III.13)
    loce=connec(e,:);
    % Extraire les coordonnées nodales de l'élément xe=x(loce);
    % Calculer la valeur moyenne de xe
    xm=mean(xe);
    % Calculer les paramètres physiques élémentaires moyennes
    uem=cosh(xm); kem=exp(-xm); Aem=cos(xm); Bem=sin(xm);
    % Calculer les matrices K1, K2, K3 K1=0.5*[-
    1 1;-1 1]; % Eq. (III.38)
    K2=[1 -1;-1 1]/he; % Eq. (III.39)
    K3=[2 1;1 2]*he/6; % Eq. (III.46)
    V=0.5*he*[1;1]; % Eq. (III.37)
    U=[-1;1]; % Eq. (III.150)
    % Calculer Ke et Fe
    if imeth==1
        Ke=uem*K1+kem*K2-Aem*K3; % Eq.
        (1.79) Fe=Bem*V; % Eq. (III.80)
    elseif imeth==2
        Pe=0.5*uem*he/kem; % Eq. (III.117)
```

Chapitre IV : EXEMPLE

```
zeta=coth(Pe)-1/Pe;    % Eq. (III.124)
epe=kem+0.5*uem*he*zeta; % Eq. (III.126)
Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*K3;%Eq. (III.125)
Fe=Bem*V;              % Eq. (III.80)
elseif imeth==3
    Pe=0.5*uem*he/kem;  % Eq. (III.117)
    zeta=coth(Pe)-1/Pe; % Eq. (III.124)
    we=0.5*he*zeta;     % Eq. (III.154)
    epe=kem+we*uem;     % Eq. (III.155)
    Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*(K3+we*K1'); % Eq.
    (III.158)Fe=Bem*(V+we*U); % Eq. (III.159)
end
% Assemblage Kg(loce,loce)=Kg(loce,loce)+Ke;
% Eq.(1.69)Fg(loce)=Fg(loce)+Fe;% Eq.( III.70)

end

% Fin de la boucle sur les éléments

% Introduire la condition aux limites de Neumann au nœud in=NKc=[0
0;0 -2]; Fc=[0;-35]; % Eqs.( III.53) et (III.54)
Kg(N,N)=Kg(N,N)+Kc(2,2); % Eq. (III.72a)
Fg(N)=Fg(N)+Fc(2) % Eq. (III.72b)
% Introduire la condition aux limites de Dirichlet au nœud in=1Fg=Fg-
Kg(:,1)*c0; Fg(1)=c0; % Eq.( III.74)
Kg(:,1)=0; Kg(1,:)=0; Kg(1,1)=1; % Eq.( III.75)
% Résolution du système (III.73)
cg=Kg\Fg
% Tracé du graphe
plot(x,cg,'-k')
xlabel('x')
ylabel('c')
legend('SolutionGalekine')
%-----Fin du programme-----
```

Conclusion Générale

En conclusion, le travail réalisé sur la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) a démontré son importance et son efficacité dans la résolution numérique des équations de convection-diffusion, en particulier dans le domaine de la mécanique des fluides.

La méthode SUPG a été développée pour surmonter les limitations des méthodes traditionnelles d'éléments finis dans les cas de convection dominante. En ajoutant un terme de stabilisation basé sur les caractéristiques du flux, la méthode SUPG permet de réduire les oscillations numériques non physiques, améliorant ainsi la précision et la stabilité des solutions.

Les avantages de la méthode SUPG résident dans sa capacité à capturer de manière plus précise les structures de flux, à traiter les conditions aux limites de type différentiel et à travailler sur des maillages non structurés. Ces caractéristiques font de la méthode SUPG un outil puissant pour simuler des phénomènes physiques complexes et pour améliorer les modèles théoriques en prenant en compte les effets réels des fluides.

Le travail de développement et d'implémentation de la méthode SUPG a été couronné de succès, démontrant sa stabilité et sa précision dans diverses applications. Son utilisation permet de raccourcir la durée de mise au point des prototypes finaux et de réduire les coûts de conception, ce qui en fait un outil précieux pour l'industrie et la recherche en mécanique des fluides.

En somme, la méthode SUPG représente une avancée significative dans la résolution numérique des équations de convection-diffusion, offrant des solutions plus précises et stables pour modéliser et étudier les phénomènes de transport dans les fluides. Son utilisation continue de se développer et de contribuer aux progrès de la science et de l'ingénierie dans divers domaines liés à la mécanique des fluides.

Référence :

- *S. Candel, Mécanique des fluides, Bordas, Paris, 1990
- **Marc BUFFAT, cours méthode des différences finie* ,univ lyon , 2008
- *Alexandre Ern. "Aide-mémoire ...éléments finis". Paris, 2005.

- * L. Babuska, Error bound for finite element method, Num meth vol 16 1971
- * M. Boulercha, Ecoulement eulériens par éléments finis avec raffinement du maillage, PhD thesis, Université Laval, Québec, 1993.
- * A. N. Brooks et T. J. Hughes, Streamline upwind Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows, Proc. Third Internat. Conf. on Finite Element Methods in Fluid Flow, Banff, Canad, 1980.
- * S. Candel, Mécanique des fluides, Bordas, Paris, 1990
- *G. Dhatt et G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S. A. Editeur, 1984.
- * T. J. Hughes, G. Scovazzi, T. Tezduyar, Stabilized methods for compressible flows, March 24, 2008. *P.D. Lax et B. Wendroff, Systems of conservations laws, Communication on pure and applied Mathematics, Vol.13, pp. 217-237, 1960.
- * K. Meftah et G. Dhatt, Schémas centrés et décentrés en convection-diffusion, Congrès Magrébin Gardaiia, Mars 1996
- * K. Meftah, Modélisation tridimensionnelle de l'hydrodynamique et du transport par suspension, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, France 1998.
- * K. Meftah, A finite element model based on triangular mesh for convection-dominated stationary flows, European Journal of Computational Mechanics 2015.
- *E. Onate et M. Manzan, Stabilization techniques for finite element analysis of convection-diffusion problems, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain
- *R. M. Smith et A. G. Hutton, The numerical treatment of advection: a performance comparison of current methods, Numer. Heat Transfer, 5, 439-461, 1982
- * A. Soulaïmani, N. Elkadrie et A. Rebaine, Une méthode d'éléments finis pour la dynamique des gaz. 3ème école d'été de Porquerolles, France 1996.

