

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Biomathématique et modélisation

présenté par

GUEZZEN Cherifa

Soutenue le : 12 / 07 / 2021

**Taux de reproduction de base pour des modèles de
réaction-diffusion épidémiologiques**

Devant le jury composé de :

M. MIRI. S. E-H	Professeur , Université de Tlemcen	Président
M. ABDELLAOUI.B	Professeur , Université de Tlemcen	Examineur
M. GOUDON.T	Professeur , Université de Nice	Co-encadrant
M. TOUAOULA.M.T	Professeur, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2020-2021

Table des matières

1	Préliminaires	1
1.1	Quelques notions sur les Matrices	1
1.2	Les opérateurs linéaires fermés	2
1.3	Quelques notions sur la théorie des semi-groupes	3
1.4	Quelques notions de la théorie spectrale	4
1.5	Le théorème de Krein Rutman	6
1.6	Théorie de Fredholm	7
1.7	Le principe de comparaison parabolique	8
1.8	Le principe de maximum fort	9
1.9	Quelques notions sur la stabilité	9
2	Le taux de reproduction de base pour un système d'EDOs	11
2.1	Introduction	11
2.2	Calcul du taux de reproduction de base	11
2.3	Quelques exemples calculatoires	14
2.3.1	Le modèle SIR	14
2.3.2	Le modèle SEIS	15
2.3.3	Le modèle SEIR	15
3	taux de reproduction de base	17
3.1	Introduction	17
3.2	Valeur propre principale	17
3.3	Le taux de reproduction de base	22
3.3.1	Caractérisation du taux de reproduction de base	27
4	Applications	31
4.1	Introduction	31
4.2	Le modèle SIR avec diffusion	31
4.2.1	Le taux de reproduction de base	31
4.3	Le modèle de la rage	33

4.4	Modèles cellulaires	36
4.4.1	La diffusion des cellules avec des transmissions virus-cellule et cellule-cellule .	36
4.4.2	La diffusion de virus avec des transmissions de virus-cellule et de cellule-cellule	39
4.4.3	La diffusion des cellules et virus avec une transmission virus-cellule	41
5	L'étude d'un modèle de réaction diffusion	45
5.1	Introduction	45
5.2	La convergence	45
5.3	La stabilité de l'état stationnaire sans maladie :	48
5.3.1	La stabilité locale	48
5.3.2	La stabilité globale	48
	Bibliographie	51

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :
Ma plus chère tante Zahra.
Mes très chers parents.
Mes chères soeurs Asma, Sara et Siham.
Mon frère.
Mes neveux Louey, Fahd et Iyad.
Mes nièces Fatiha, Wafia et Zoubida.
Ma cousine Dalila.
Mes meilleures amies Samira et Imen.

*" La vie n'est bonne qu'à étudier
et à enseigner les
mathématiques."
Blaise Pascal*

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je remercie notre grand Dieu tout puissant qui m'a prodigué aide, inspiration, patience et courage durant toutes ces années d'études .

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Monsieur Tarik Touaoula qui est un encadrant formidable. Je le remercie pour sa patience, son aide, sa gentillesse et surtout ses judicieux conseils. Je lui suis également profondément reconnaissante pour sa disponibilité et ses encouragements.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements et toute ma gratitude à Monsieur Thierry Goudon pour sa gentillesse et son aide, ainsi que pour les remarques qu'il m'a adressées pour améliorer mon travail.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes sincères remerciements à Messieurs : S.Miri et B.Abdellaoui d'avoir accepté de faire partie du jury qui examinera ce modeste travail.

Merci à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et à mon apprentissage tout au long de mes cinq années d'études.

Enfin, un grand merci à mes parents et à ma sœur aînée pour leur soutien

inconditionnel et aussi pour tout ce qu'ils ont fait.

Introduction

Le taux de reproduction de base R_0 est une quantité seuil très importante pour étudier la dynamique d'une maladie. Il est connu qu'une maladie disparaît si $R_0 < 1$ et que la maladie s'installe dans la population si $R_0 > 1$. De nombreux travaux ont été réalisés sur ce sujet, Diekmann, Heesterbeek et Metz [6] ont présenté une approche générale du R_0 pour les modèles épidémiques autonomes par l'utilisation de la notion de l'opérateur de la prochaine génération, Van den Driessche et Watmough [25] ont donné une formule de calcul de R_0 pour les modèles compartimentaux (EDO), le R_0 a également été étudié en [2],[4],[14],[26] pour les modèles épidémiques avec des populations se déplaçant entre plusieurs sites. Récemment, Thieme [24] a développé une théorie générale de la limite spectrale et du nombre de reproduction pour la structure de population de dimension infinie et l'hétérogénéité temporelle. D'autres études dans ce sens sont données dans [15] pour un modèle de paludisme à réaction-diffusion non locale, dans [11] pour un modèle de maladie infectieuse avec une période de latence fixe et des infections non locales, dans [10] pour un modèle de population d'advection-diffusion-réaction, et dans [18] pour un modèle épidémique de réaction-diffusion périodique de type susceptibles-infectieux-susceptibles (SIS).

Les systèmes de réaction-diffusion sont fréquemment utilisés pour inclure les mouvements de populations et les structures spatiales dans la transmission épidémique. Wang et Zhao ont établi la théorie de R_0 pour les modèles épidémiques compartimentaux des équations de réaction-diffusion et en particulier

ils ont caractérisé R_0 en terme de la valeur propre principale d'un problème elliptique [28].

Dans ce mémoire, nous tenterons de détailler la théorie développée par Wang et Zhao et de l'appliquer à quelques modèles épidémiologiques.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, on rappelle quelques notions de base qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

1.1 Quelques notions sur les Matrices

Définition 1.1. (*Matrice coopérative*)[28] Une matrice carrée est dite coopérative si ses éléments hors diagonale sont positifs.

Définition 1.2. (*Matrice irréductible*)[21]

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (l'espace des Matrices carrées d'ordre n dont les éléments appartiennent à $\mathbb{K}$) est dite réductible s'il existe une matrice de passage P_σ telle que :

$$P_\sigma^{-1}AP_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $1 \leq p \leq n - 1$.

Une matrice non réductible est dite irréductible.

Proposition 1.1. Si une matrice carrée est strictement positive alors elle irréductible.

Théorème 1.1. (*Perron-Frobenius*)[21]

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Le rayon spectral (voir la définition 1.9) d'une matrice positive $A \geq 0$ est une valeur propre à laquelle correspond un vecteur propre de l'orthant positif.

Si $A \geq 0$ est en plus irréductible alors le vecteur propre correspondant est dans l'intérieur de l'orthant positif.

Théorème 1.2. [24] Soient C une matrice positive et B une matrice inversible telle que $-B^{-1}$ soit positive. $A = B + C$ est inversible et $-A^{-1}$ est positive si seulement si $r(-CB^{-1}) < 1$.

voir la définition 1.9 de $r(A)$.

Théorème 1.3. [24] Si C et B sont deux matrices telles que A est positive et B est coopérative avec $s(B) < 0$ alors $s(B + C)$ a le même signe que $r(-CB^{-1}) - 1$,

voir la définition 1.9 de $s(A)$ et $r(A)$

Définition 1.3. [19] On dit que A est une matrice stable si ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.

Proposition 1.2. [21] $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice coopérative stable si et seulement si A est inversible et $-A$ à inverse positive.

1.2 Les opérateurs linéaires fermés

Définition 1.4. (Opérateur fermé)[1]

Soient X et Y deux espaces de Banach, on dit qu'un opérateur A de X dans Y est fermé si son graphe $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$.

Théorème 1.4. (Théorème du graphe fermé)[1]

Soient X et Y deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire de X dans Y . Si le graphe de A noté $G(A) = \{(x, Ax) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$, alors A est continu.

1.3 Quelques notions sur la théorie des semi-groupes

Définition 1.5. [29]

Soit X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ représente l'espace des opérateurs linéaires continues dans X , un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur X est une application

$$S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$$(i) \ S(0) = I.$$

$$(ii) \text{ Pour tous } t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2).$$

$$(iii) \text{ Pour tout } u \in X, \lim_{t \rightarrow 0} S(t)u = u.$$

Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 semi-groupe.

Définition 1.6. (Générateur infinitésimal d'un semi-groupe)[29]

Soit S un semi-groupe fortement continu, le générateur infinitésimal de S est l'opérateur non borné défini de la manière suivante :

$$D(A) = \{u \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \text{ existe}\}.$$

$$\text{On pose alors, } Au = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h}.$$

Théorème 1.5. [24] Soit A le générateur d'un C_0 -semi-groupe sur un espace de Banach ordonné X avec un cône X_+ normal (voir 1.10) et "generating" (i.e. $X = X_+ - X_+$). Alors A est à résolvante positive (voir 1.8) si seulement si S est un semi-groupe positif i.e. $S(t)X_+ \subseteq X_+$ pour tout $t \geq 0$. De plus

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad \lambda > s(A), \quad x \in X, \quad (1.1)$$

voir la définition 1.9 de $s(A)$.

Définition 1.7. (Opérateur compact)[3]

Un opérateur A linéaire borné de E dans F est dit compact si et seulement

si l'une de ces deux propositions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. L'image par A de $B_E(0, 1)$ (la boule unité) est d'adhérence compacte.
2. De toute suite $(u_n)_n$ bornée dans E , on peut extraire une sous-suite $(u'_n)_n$ telle que la suite (Au'_n) converge fortement dans F .

1.4 Quelques notions de la théorie spectrale

Définition 1.8. (*Spectre et ensemble résolvant*)[1]

Soit X un espace de Banach et soit l'opérateur linéaire fermé $A : D(A) \subset X \rightarrow X$

on appelle :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ est bijective}\}$$

l'ensemble résolvant de A et son complémentaire $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ le spectre de A .

pour $\lambda \in \rho(A)$ l'inverse

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

est un opérateur borné dans X selon le théorème du graphe fermé et on l'appelle la résolvante (de A au point λ).

Théorème 1.6. [5] Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ dans l'espace de Banach X . Alors,

- i) L'ensemble $\rho(A)$ est un ensemble ouvert dans le plan complexe $\mathbb{C}$.
- ii) La fonction $\lambda \rightarrow R(\lambda, A)$ est une fonction holomorphe de λ dans chaque composante connexe de $\rho(A)$.

Définition 1.9. [29]

- À tout opérateur linéaire A , on fait correspondre sa borne spectrale définie comme

$$s(A) = \sup\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$$

- Pour tout opérateur linéaire borné A défini sur l'espace de Banach X dont le spectre $\sigma(A)$ est compact et non vide, on définit son rayon spectral comme suit :

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

ce rayon spectral vérifie : $r(A) \leq \|A\|$.

- Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu T défini sur l'espace de Banach X , on définit la borne de croissance exponentielle de T par :

$$\omega(T) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1 : \|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0\}$$

- La borne de croissance essentielle de T est définie par :

$$\omega_{ess}(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha(T(t))}{t}$$

avec α est la mesure de la non-compacité, c'est-à-dire pour tout opérateur linéaire borné A dans X , $\alpha(A) := \inf_{K \in \mathcal{K}} \|A - K\|$

où $\mathcal{K}$ est l'ensemble de tous les opérateurs linéaires compacts sur X .

Proposition 1.3. Soit $s(A)$ la borne spectrale d'un générateur A et soit $\omega(T)$ la borne de croissance du semi-groupe associé T , on a

$$s(A) \leq \omega(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|.$$

Plus précisément,

Proposition 1.4. Soit $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ un semi groupe fortement continu généré par A dans l'espace de Banach X . Alors

$$\omega(T) = \max\{s(A), \omega_{ess}(T)\}.$$

Proposition 1.5. Si le semi-groupe fortement continu est compact alors on a,

1)

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}, t \geq 0.$$

2) La borne spectrale égale à la borne de croissance, i.e. $s(A) = \omega(T)$.

Théorème 1.7. [24] Soient B un opérateur linéaire à résolvante positive dans X avec $s(B) < 0$ et $A = B + C$ une perturbation positive de B . Si A est à résolvante positive alors $s(A)$ a le même signe que $r(-CB^{-1}) - 1$.

Théorème 1.8. [24] Soient A un opérateur linéaire à résolvante positive dans X . Alors $s(A) < \infty$ et $s(A) \in \sigma(A)$ quand $s(A) > -\infty$. De plus $(s(A), \infty) \cap \rho(A)$. Finalement, si $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$, alors $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur positif si et seulement si $\lambda > s(A)$.

1.5 Le théorème de Krein Rutman

Le théorème de Krein-Rutman est une généralisation du théorème de Perron-Frobenius aux espaces de Banach de dimension infinie.

Définition 1.10. (Un cône)[5]

Soit X un espace de Banach. On appelle cône de X un ensemble fermé K dans X possédant les propriétés suivantes :

i) $0 \in K$ ii) $u, v \in K \implies \alpha u + \beta v \in K, \forall \alpha, \beta \geq 0$ iii) $v \in K$ et $-v \in K \implies v = 0$.

Un cône ordonné i.e. ($x \geq y \Leftrightarrow x - y \in K$ et $x > y \Leftrightarrow x - y \in \text{Int}(K)$), où $\text{Int}(K)$ est l'intérieur de K) est dit normal si

$$u, v \in K, u \leq v \implies \|u\|_X \leq \|v\|_X.$$

Définition 1.11. [5] Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, A est dit fortement positif sur K si $\forall v \in K, v \neq 0, Av \in \text{Int}(K)$ où $\text{Int}(K)$ est l'intérieur de K .

Théorème 1.9. (Krein-Rutman)[5]

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, A un opérateur linéaire continu et com-

part de E vers E . On suppose que A est fortement positif sur un cône positif, i.e.,

$$x \in K \setminus \{0\} \implies A(x) > 0$$

Le rayon spectral de A , $r(A)$ (voir la définition 1.9) est une valeur propre simple strictement positive de A associée à un vecteur propre strictement positif, i.e. $x^0 \in \text{Int}(K)$ et c'est le seul vecteur propre positif.

1.6 Théorie de Fredholm

Définition 1.12. [28]

Soit (E, E_+) un espace de Banach ordonné (E_+ est un cône muni d'une relation d'ordre $\leq$ voir aussi [12]) et $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire.

1. L'opérateur fermé A est dit de Fredholm si $\mathcal{R}(A)$ est fermé, $\dim \mathcal{N}(A)$ et $\text{codim } \mathcal{R}(A)$ sont finies.
2. Un opérateur fermé A est dit semi-Fredholm si $\mathcal{R}(A)$ est fermé, et au moins un parmi $\dim \mathcal{N}(A)$ et $\text{codim } \mathcal{R}(A)$ est fini.
3. Si A est de Fredholm ou semi-Fredholm, alors l'indice de Fredholm de A est défini par

$$\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) - \text{codim } \mathcal{R}(A),$$

où $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ désignent respectivement l'espace nul et le rang de A .

Lemme 1.1. Soit E_+ un cône positif normal et "generating" de l'espace de Banach E et soit $A : D(A) \rightarrow E$ un opérateur fermé à résolvante positive. S'il existe un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda I - A$ est semi-Fredholm pour tous les nombres réels $\lambda > \omega$, alors les deux énoncés suivants sont valides :

- i) $\lambda I - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro pour tout nombre réel $\lambda > \omega$.
- ii) Si $\lambda \in \sigma(A) \cap (\omega, \infty)$ alors λ est une valeur propre de A avec une multiplicité géométrique finie (i.e. la dimension du sous espace propre

associé est de dimension finie.)

1.7 Le principe de comparaison parabolique

Les principes de comparaison sont parmi les résultats les plus utiles pour l'analyse des équations de réaction-diffusion ; ce principe permet notamment de comparer des solutions des problèmes paraboliques avec condition de Dirichlet ou de Neumann.

Théorème 1.10. *(Le principe de comparaison parabolique)[30]*

Soit $T > 0$ (T peut éventuellement être infini). Considérons une fonction $f = f(t, x, u)$ telle que $f, \frac{\partial f}{\partial u} \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$. Soient $\bar{u}$ et $\underline{u}$ dans $C_1^2([0, T] \times \Omega) \cap C([0, T] \times \Omega)$ (C_1^2 i.e, f est de classe C^2 par rapport à x et f de classe C^1 par rapport à t), vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq D\Delta \bar{u} + f(t, x, \bar{u}), t \in]0, T], x \in \Omega, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \leq D\Delta \underline{u} + f(t, x, \underline{u}), t \in]0, T], x \in \Omega, \\ \underline{u}(0, x) \leq \bar{u}(0, x), x \in \Omega, \end{cases}$$

on suppose également que soit :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}, x \in \partial\Omega,$$

ou :

$$\underline{u}(t, x) \leq 0 \leq \bar{u}(t, x), t \in]0, T], x \in \partial\Omega.$$

Alors $\underline{u} \leq \bar{u}$ dans $t \in]0, T] \times \Omega$. De plus, soit il existe $(t_0, x_0) \in]0, T] \times \Omega$ tel que $\bar{u}(t_0, x_0) = \underline{u}(t_0, x_0)$, et dans ce cas $\bar{u} \equiv \underline{u}$ dans $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$, soit $\bar{u} > \underline{u}$ dans $]0, T] \times \Omega$.

1.8 Le principe de maximum fort

Théorème 1.11. (*Parabolique*) [30] Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$, si

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq 0, (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) \geq 0, (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ u(x, t) \geq 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (1.2)$$

Alors $u \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times (0, T)$ et si $u \neq 0$ alors $u > 0$ dans $\Omega \times (0, T)$.

1.9 Quelques notions sur la stabilité

Considérons le système non autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction localement lipschitzienne sur Ω . Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à chercher les points d'équilibre.

Définition 1.13. (*Point d'équilibre*)

Un point d'équilibre x^* pour l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t))$ est une solution constante par rapport au temps c'est à dire $\frac{dx^*}{dt} = 0$, donc $f(x^*(t)) = f(x^*) = 0$.

Définition 1.14. (*Attractivité*)

1. on dit que x^* est un point d'équilibre attractif s'il existe un voisinage $U(x^*)$ tel que :

$$\forall x_0 \in U(x^*), \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

on dit que x^* est un point d'équilibre globalement attractif si,

$$\forall x_0 \in \Omega, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

Définition 1.15. (*Stabilité d'un point d'équilibre*)

- x^* est stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_0 - x^*| < \delta$ alors $|x(t) - x^*| < \epsilon, \forall t \geq 0$.
- x^* est dit localement asymptotiquement stable, s'il est stable et attractive.
- x^* est dit globalement asymptotiquement stable s'il est localement asymptotiquement stable et globalement attractif.

Chapitre 2

Le taux de reproduction de base pour un système d'EDO

2.1 Introduction

Nous présentons la méthode développée par Van den Driessche et Watmough pour les systèmes en dimension finie. Dans cette technique de calcul, le R_0 est défini comme le rayon spectral de «l'opérateur de la prochaine génération».

2.2 Calcul du taux de reproduction de base

On considère une population dans laquelle il n'y a pas d'immigration d'individus infectés et que cette population est divisée en n compartiments. Le nombre d'individus dans le compartiment i est donné par x_i .

On suppose que l'on note les compartiments de telle façon que les p premiers soient constitués d'individus «non infectés», le reste des compartiments est constitué d'individus «infectés». On note :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

l'état du système.

Maintenant, on décrit la dynamique de cette maladie infectieuse. Autrement

dit on écrit l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$.

On fait le bilan de ce qui rentre et de ce qui sort

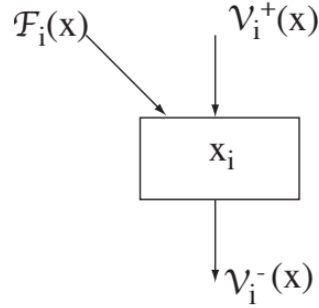


Figure 2.1 – le bilan

1. On note $\mathcal{F}_i(x)$ la vitesse d'apparition de nouveaux cas infectés, dans le compartiment i . Ce sont de nouveaux infectés, obtenus par transmission de toute sorte. Verticale, i.e. de la mère à l'enfant ou horizontale d'individu à individu.
2. On note $\mathcal{V}_i^+(x)$ ce qui entre des autres compartiments par toute autre cause (guérison, déplacement, etc. . .)
3. On note $\mathcal{V}_i^-(x)$ ce qui sort du compartiment i . Par exemple par mortalité, par mouvement, etc.

On a finalement

$$\dot{x}_i = \mathcal{F}_i(x) + \mathcal{V}_i^+ - \mathcal{V}_i^-$$

On note X_s les états sans maladie : $X_s = \{x | x_{p+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$.

On a les propriétés suivantes pour les fonctions introduites :

1. $x \geq 0$ et $\mathcal{F}_i \geq 0$, $\mathcal{V}_i^+ \geq 0$, $\mathcal{V}_i^- \geq 0$
2. Si $x_i = 0$ alors $\mathcal{V}_i^-(x) = 0$,
3. Si $i \leq p$ alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$,
4. Si $x \in X_s$ alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$, pour $i \geq p$ on a $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$.

Considérons un point d'équilibre sans maladie pour le système différentiel. Par exemple, dans le cas où on a une dynamique démographique, cela veut dire que la population ne bouge pas. En fait, chaque x_i^* est fixe et est nul pour $i > p$. Autrement dit soit un équilibre «sans maladie», $x^* \in X_s$ est tel que $f(x^*) = 0$.

Un tel équilibre s'appelle un équilibre sans maladie : DFE (disease free equilibrium).

On note $\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_p)^T$ les «non infectés» et $\mathbf{x}_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)^T$ les «infectés».

le système $\dot{x} = f(x)$ peut être réécrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{cases}$$

par définition $x^* = (\mathbf{x}_1^*, 0)$ d'où

$$f_1(\mathbf{x}_1^*, 0) = 0$$

et pour tout x_1 on a

$$f_2(x_1, 0) = 0,$$

car $(x_1, 0)$ est un point sans maladie, il ne peut y avoir d'apparition de nouveaux infectés.

Si l'on suppose que f est C^1 alors il existe des matrices $A_{11}(x)$, $A_{12}(x)$, et $A_{22}(x)$ telles que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}(x).(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*) + A_{12}(x).\mathbf{x}_2, \\ \dot{x}_2 = A_{22}(x).\mathbf{x}_2, \end{cases}$$

la Jacobienne au point d'équilibre $(\mathbf{x}_1^*, 0)$ s'écrit

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} A_{11}(x^*) & A_{12}(x^*) \\ 0 & A_{22}(x^*) \end{bmatrix}.$$

On a $J(x^*) = \mathcal{DF}(x^*) + \mathcal{DV}^+(x^*) - \mathcal{DV}^-(x^*)$. De plus comme les composantes

$\mathcal{F}_i$ de la fonction $\mathcal{F}$ sont identiquement nulles pour $i \geq p$ on a

$$\mathcal{DF}(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix},$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-)(x^*) = \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

Définition 2.1. *Si la matrice de transmission V est stable et F est positive on définit R_0 par,*

$$R_0 = \rho(-FV^{-1}).$$

2.3 Quelques exemples calculatoires

En général calculer analytiquement le rayon spectral d'une matrice positive en grande dimension est impossible ; cependant, en petite dimension, où dans des cas de structures particulières on peut donner des formules explicites.

2.3.1 Le modèle SIR

Soit le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I. \end{cases}$$

Dans ce modèle S , I et R représentent le nombre des individus Sains, Infectés, réfractaires respectivement. β est le taux de transmissions de la maladie et γ est le taux de guérison. Notons que la population totale est constante disant égale à N , car $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$.

L'équilibre DFE est $(N, 0, 0)^T$, alors on a en ce point :

$$F = \beta N, \quad V = -\gamma, \quad K = -FV^{-1} = \frac{\beta N}{\gamma} = R_0$$

2.3.2 Le modèle SEIS

On considère un modèle d'une maladie sans immunité,

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S + \gamma I, \\ \dot{E} = \beta S \frac{I}{N} - (\mu + \alpha) E, \\ \dot{I} = \alpha E - (\mu + \gamma) I. \end{cases}$$

Le DFE est $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)^T$. Au DFE tous les individus de la population sont sains, on a,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E, I) &= \begin{bmatrix} \beta \frac{SI}{N} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}(E, I) = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha) E \\ \alpha E - (\mu + \gamma) I \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha) & 0 \\ \alpha & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} \\ -FV^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha\beta}{(\mu+\alpha)(\mu+\gamma)} & \frac{\beta}{\mu+\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$R_0 = \frac{\alpha\beta}{(\mu+\alpha)(\mu+\gamma)}.$$

2.3.3 Le modèle SEIR

On considère un modèle avec une classe de latents E et une transmission verticale (de la mère à l'enfant).

Le modèle s'écrit comme,

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N - \beta SI - \mu S - p\mu I, \\ \dot{E} = \beta SI - (\mu + \gamma_2) E + p\mu I, \\ \dot{I} = \gamma_2 E - (\mu + \gamma_3) I, \\ \dot{R} = \gamma_3 I - \mu R, \end{cases}$$

où :

- S, E, I, R représentent les individus susceptibles, latents, infectés, réfractaires respectivement.
- μ est le taux de naissance qui est égal au taux de mortalité.
- p représente le pourcentage des nouveaux-nés infectés.
- γ_2 représente le taux du passage du compartiment E vers I
- γ_3 représente le taux de guérison.
- β est le taux de transmission de la maladie.

Le DFE est $(N, 0, 0, 0)^T$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E, I) &= \begin{bmatrix} \beta SI + p\mu I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}(E, I) = \begin{bmatrix} -(\mu + \gamma_2)E \\ \gamma_2 E - (\mu + \gamma_3)I \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & \beta N + p\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -(\mu + \gamma_2) & 0 \\ \gamma & -(\mu + \gamma_3) \end{bmatrix} \\ -FV^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma_2}{(\mu + \gamma_2)(\mu + \gamma_3)}(\beta N + p\mu) & \frac{1}{\mu + \gamma_3}(\beta N + p\mu) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$R_0 = \frac{\gamma_2}{(\mu + \gamma_2)(\mu + \gamma_3)}(\beta N + p\mu).$$

Chapitre 3

Le taux de reproduction de base pour un modèle de réaction diffusion

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on veut développer la théorie relative au taux de reproduction de base pour des modèles épidémiques de type parabolique et étudier l'existence de la valeur propre principale pour le problème de valeurs propres elliptique associé. Nous allons voir que cette valeur propre joue un rôle important pour caractériser la valeur de R_0 .

3.2 Valeur propre principale

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^l$ avec un bord $\partial\Omega$ régulier, et soit η le vecteur normal unitaire sur $\partial\Omega$. Pour un entier donné $k > 0$, soit $X = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^k)$ et $X_+ = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^k)$. Posons

$$u_K = (u_1, \dots, u_k)^T, \nabla \cdot (d_K(x) \nabla u_K) = \text{diag}(\nabla \cdot (d_1(x) \nabla u_1), \dots, \nabla \cdot (d_k(x) \nabla u_k)).$$

Soit $M(x)$ une fonction matricielle $k \times k$ continue de $x \in \bar{\Omega}$. On considère le problème elliptique de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (d_K(x) \nabla u_K) + M(x)u_K = \lambda u_K, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k \text{ avec } d_i > 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

On pose $L(\phi)(x) = \nabla \cdot (d_K(x) \nabla \phi(x))$ et on note M l'opérateur de multiplication défini par $M(\phi)(x) = M(x)\phi(x)$. Supposons ce qui suit :

(D₁) Il existe $d_0 > 0$ tel que $d_i(x) \geq d_0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i \leq k$.

Théorème 3.1. *Supposons que l'hypothèse (D₁) soit satisfaite. Si $M(x)$ est coopérative pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et s'il existe un $x_0 \in \Omega$ tel que $M(x_0)$ est irréductible, alors $\lambda^* = s(L + M)$ est une valeur propre algébriquement simple de (3.1) avec un vecteur propre fortement positif et $\text{Re}(\lambda) < \lambda^*$ pour tout $\lambda \in \sigma(L + M) \setminus \{\lambda^*\}$.*

Démonstration : Soit $T(t)$ le semi-groupe dans X associé au système parabolique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_K}{\partial t} = \nabla \cdot (d_K(x) \nabla u_K) + M(x)u_K, & t > 0, x \in \Omega, \\ u_K(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_K}{\partial \eta} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Comme $M(x)$ est coopérative pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et il existe un $x_0 \in \Omega$ tel que $M(x_0)$ est irréductible, il s'ensuit que $T(t)$ est fortement positif et compact pour chaque $t > 0$. Le théorème de Krein-Rutman permet d'obtenir le résultat désiré (voir Théorème 7.6.1 [23]).

Lorsque certains coefficients de diffusion dans (3.1) sont nuls, on ne peut pas avoir l'existence de la valeur propre principale par le théorème de Krein-Rutman en raison du défaut de compacité de $T(t)$. Faisons alors l'hypothèse suivante :

(D₂) Il existe un nombre $d_0 > 0$ et un entier $1 \leq i_1 < k$ tels que $d_i(x) \geq d_0$, $\forall x \in \Omega$, $1 \leq i \leq i_1$, et $d_{i_1+i}(x) = 0$ $\forall x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i \leq i_2 := k - i_1$.

Soit $Y_1 = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{i_1})$ et $Y_2 = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{i_2})$. On divise la matrice coopérative $M(x)$ comme suit :

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_{11}(x) & M_{12}(x) \\ M_{21}(x) & M_{22}(x) \end{pmatrix} \text{ où } M_{11} \text{ est une matrice de taille } i_1 \times i_1 \text{ et } M_{22} \text{ est}$$

une matrice de taille $i_2 \times i_2$. Posons $u_{i_1} = (u_1, \dots, u_{i_1})^T$, $u_{i_2} = (u_{i_1+1}, \dots, u_k)^T$, $\nabla \cdot (d_{i_1}(x) \nabla u_{i_1}) = \text{diag}(\nabla \cdot (d_1(x) \nabla u_1), \dots, \nabla \cdot (d_{i_1}(x) \nabla u_{i_1}))$.

Soit $Q(t)$ le semi-groupe solution dans X associé au système parabolique linéaire,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{i_1}}{\partial t} = \nabla \cdot (d_{i_1}(x) \nabla u_{i_1}) + M_{11}(x)u_{i_1} + M_{12}(x)u_{i_2}, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_{i_2}}{\partial t} = M_{21}u_{i_1} + M_{22}u_{i_2}, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_{i_1}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

$Q(t)$ est un C_0 semi-groupe positif dans X (car $M(x)$ est coopérative). Son générateur B qui est un opérateur fermé à résolvante positive (voir la formule (1.1) dans le chapitre 1) peut s'écrire comme :

$$B = \begin{pmatrix} L_1 + M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

où $L_1(u_{i_1})(x) := \nabla \cdot (d_{i_1}(x) \nabla u_{i_1})$. Soit $T_2(t)\phi_2(x) = e^{M_{22}(x)t}\phi_2(x)$ qui est un C_0 semi-groupe positif dans Y_2 et son générateur M_{22} est à résolvante positive, vérifiant :

$$(\lambda I - M_{22})^{-1}\phi_2 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_2(t)\phi_2 dt \quad \forall \lambda > s(M_{22}), \phi_2 \in Y_2. \quad (3.4)$$

Ainsi, nous pouvons définir une famille à un paramètre d'opérateurs linéaires comme :

$$\mathcal{L}_\lambda = L_1 + M_{11} + M_{12}(\lambda I - M_{22})^{-1}M_{21}, \quad \forall \lambda > s(M_{22}).$$

Énonçons le théorème généralisé de Krein-Rutman :

Théorème 3.2. [28] *Supposons que l'hypothèse (D2) soit satisfaite, également supposons que $M(x)$ est coopérative pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\lambda > s(M_{22})$, il existe un certain $x_\lambda \in \Omega$ tel que $M_{11}(x_\lambda) + M_{12}(\lambda I - M_{22})^{-1}M_{21}(x_\lambda)$ est irréductible. S'il existe $\lambda_0 > s(M_{22})$ et $\phi_0 > 0$ dans Y_1 tel que $\mathcal{L}_{\lambda_0}\phi_0 \geq \lambda_0\phi_0$ alors les énoncés suivants sont valables,*

(i) $s(B)$ est une valeur propre de multiplicité géométrique un avec un vec-

teur propre positif pour (3.1) .

(ii) L'équation $s(\mathcal{L}_\lambda) = \lambda$ admet une seule solution $s(B)$ appartenant à $(s(M_{22}), \infty)$.

(iii) $s(B)$ a le même signe que $s(\mathcal{L}_0)$ à condition que $s(M_{22}) < 0$.

Démonstration

Pour tout $\lambda > s(M_{22})$, soit $T_\lambda(t)$ généré par $\mathcal{L}_\lambda$, on définit $\mu(\lambda) := s(\mathcal{L}_\lambda)$. Puisque $M_{11}(x) + M_{12}(\lambda I - M_{22})^{-1}M_{21}(x)$ est coopérative pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et irréductible pour certains $x_\lambda \in \Omega$ alors $T_\lambda(t)$ est un opérateur compact et fortement positif pour tout $t > 0$. Le théorème de Krein-Rutman implique que $\mu(\lambda)$ est une valeur propre principale de $\mathcal{L}_\lambda$. D'après (3.4) et la continuité d'un système fini de valeurs propres on obtient $\mu(\lambda)$ est une fonction continue et décroissante sur $(s(M_{22}), \infty)$. Puisque $\mathcal{L}_{\lambda_0}\phi_0 \geq \lambda_0\phi_0$, il est facile de vérifier que $e^{\lambda_0 t}\phi_0(x)$ est une sous-solution de $u_t = \mathcal{L}_{\lambda_0}u$. Alors le principe de comparaison implique que $T_{\lambda_0}(t)\phi_0 \geq e^{\lambda_0 t}\phi_0$ pour tout $t \geq 0$. Par une variante du théorème de Krein-Rutman, voir ([10], Theorème 7.3,) il s'ensuit que :

$$e^{\mu(\lambda_0)t} = r(T_{\lambda_0}(t)) \geq e^{\lambda_0 t}, \quad \forall t > 0,$$

et par conséquent, $\mu(\lambda_0) > \lambda_0$. Soit $G(\lambda) =: \mu(\lambda) - \lambda$ qui est une fonction continue et strictement décroissante sur $(s(M_{22}), \infty)$. De plus $G(\lambda_0) \geq 0$ et $G(\lambda) \leq \mu(\lambda_0) - \lambda < 0$ pour tout $\lambda > \mu(\lambda_0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda^* \geq \lambda_0$ tel que $G(\lambda^*) = 0$, puisque $G(\lambda)$ est strictement décroissante alors λ^* est l'unique zéro de $G(\lambda)$ dans $(s(M_{22}), \infty)$. Cela implique que $\mu(\lambda) > \lambda$ pour tout $\lambda \in (s(M_{22}), \lambda^*)$, $\mu(\lambda^*) = \lambda^*$ et $\mu(\lambda) < \lambda$ pour tout $\lambda > \lambda^*$. Donc λ^* est une valeur propre principale de $\mathcal{L}_{\lambda^*}$ et par conséquent il existe un vecteur fortement positif ϕ_1^* dans Y_1 tel que $\mathcal{L}_{\lambda^*}\phi_1^* = \lambda^*\phi_1^*$. Soit $\phi_2^* = (\lambda^*I - M_{22})^{-1}M_{21}\phi_1^*$ et $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*)$. Par suite $B\phi^* = \lambda^*\phi^*$ c'est à dire que λ^* est une valeur propre de B avec un vecteur propre positif d'où $s(B) \geq \lambda^*$. On a $s(B) \in \sigma(B)$ car B est à résolvante positive, voir aussi théorème 1.8.

Pour tout $\lambda \geq \lambda^* > s(M_{22})$, si $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{N}(\lambda I - B)$ on arrive à montrer que,

$$\phi_2 = (\lambda I - M_{22})^{-1} M_{21} \phi_1 \text{ et } \phi_1 \in \mathcal{N}(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda).$$

Puisque $\mathcal{L}_\lambda$ génère un semi-groupe fortement positif et compact dans Y_1 , il en découle que :

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - B) \leq \dim \mathcal{N}(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

En particulier, nous obtenons :

$$1 \leq \dim \mathcal{N}(\lambda I - B) \leq \dim \mathcal{N}(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda) = 1.$$

Ceci implique que λ^* est une valeur propre simple. On prouve que pour tout $\lambda > \lambda^*$, $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ est fermé. Soit $\psi^n \in \mathcal{R}(\lambda I - B)$ une suite avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \psi$. Il existe alors une suite $\phi^n \in X$ tel que $(\lambda I - B)\phi^n = \psi^n$ pour tout $n \geq 1$. Un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned} (\lambda I - \mathcal{L}_\lambda)\phi_1^n &= \psi_1^n + M_{12}(\lambda I - M_{22})^{-1}\psi_2^n \\ \phi_2^n &= (\lambda I - M_{22})^{-1}(M_{21}\phi_1^n + \psi_2^n) \end{aligned}$$

Puisque $\lambda > \lambda^*$, on a $\lambda > \mu(\lambda) = s(\mathcal{L}_\lambda)$ et par conséquent

$$\phi_1^n = (\lambda I - \mathcal{L}_\lambda)^{-1}[\psi_1^n + M_{12}(\lambda I - M_{22})^{-1}\psi_2^n]$$

d'où $\phi^n = (\phi_1^n, \phi_2^n)$ converge vers $\phi \in X$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque $\lambda I - B$ est fermé, on obtient $(\lambda I - B)\phi = \psi$ c'est à dire $\psi \in \mathcal{R}(\lambda I - B)$. Cela prouve la fermeture de $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ par conséquent $\lambda I - B$ est un semi-Fredholm pour tout $\lambda > \lambda^*$.

Maintenant on prouve que $s(B) = \lambda^*$. Supposons par l'absurde que $s(B) > \lambda^*$. Étant donné que $s(B) \in \sigma(B)$, le Lemme 1.1 (ii) donne $s(B)$ une valeur propre de B avec une multiplicité géométrique finie. Soit $\bar{\phi} = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2)$ un vecteur propre associé à $s(B)$. Ce qui implique $\mathcal{L}_{s(B)}\bar{\phi}_1 = s(B)\bar{\phi}_1$ et

$$\bar{\phi}_2 = (s(B)I - M_{22})^{-1}M_{12}\bar{\phi}_1.$$

Cela implique que $\bar{\phi}_1 \neq 0$ et $s(B)$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_{s(B)}$. Notons que $\mu(s(B))$ est une valeur propre principale de $\mathcal{L}_{s(B)}$. Alors nous devons avoir $s(B) \leq \mu(s(B))$. Puisque $s(B) > \lambda^*$, on a :

$$\mathcal{L}_{s(B)}\phi_1^* \leq \mathcal{L}_{\lambda^*}\phi_1^* = \lambda^*\phi_1^*$$

et par conséquent $\mu(s(B)) \leq \lambda^*$. Ainsi, on obtient $s(B) \leq \mu(s(B)) \leq \lambda^*$, ce qui est une contradiction. Grâce à $s(B) = \lambda^*$, on voit que les énoncés (i) et (ii) sont valides. Notons que $\mu(\lambda)$ est continue et strictement décroissante sur $(s(M_{22}), \infty)$ et $s(B)$ est l'unique solution de $\mu(\lambda) = \lambda$ dans $(s(M_{22}), \infty)$. Dans le cas où $s(M_{22}) < 0$ on obtient que $s(B)$ a le même signe que $\mu(0) = s(\mathcal{L}_0)$. Cela prouve (iii).

3.3 Le taux de reproduction de base

Considérons le modèle épidémique de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla \cdot (d_i(x) \nabla u_i) + f_i(x, u), & 1 \leq i \leq n, t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, & \forall 1 \leq i \leq n \text{ avec } d_i > 0, t > 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec :

- u_i est la densité d'une population dans le compartiment i .
- $d_i(x)$ est le coefficient de diffusion de la population u_i .
- f_i est le terme de réaction dans le compartiment i sous l'influence du processus démographique et des interactions épidémiques.

On suppose que certains coefficients de diffusion peuvent être nuls et on veut décrire la dynamique de cette maladie infectieuse. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ avec $u_i \geq 0$ représente l'état des individus dans tous les compartiments et supposons qu'il est divisé en deux parties :

- * Compartiments des infectés où $i=1, \dots, m$.
- * Compartiments des non-infectés où $i=m+1, \dots, n$.

On note U_s les états sans maladie, i.e

$$U_s := \{u \geq 0 : u_i = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$$

On fait le bilan de ce qui rentre et de ce qui sort de chaque compartiment,

1. On note $\mathcal{F}_i(x, u)$ la vitesse d'apparition de nouveaux infectés, dans le compartiment i .
2. On note $\mathcal{V}_i^+(x, u)$ ce qui provient des autres compartiment par toute autre cause (déplacement, guérison etc ...)
3. On note $\mathcal{V}_i^-(x, u)$ la vitesse de ce qui quitte le compartiment i .

Finalement le modèle (3.5) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla \cdot (d_i(x) \nabla u_i) + \mathcal{F}_i(x, u) - \mathcal{V}_i(x, u), & 1 \leq i \leq n, \quad t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \text{ avec } d_i > 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$.

Pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :

(A1) Pour chaque $1 \leq i \leq n$, les fonctions $\mathcal{F}_i(x, u)$, $\mathcal{V}_i^+(x, u)$, $\mathcal{V}_i^-(x, u)$ et d_i sont strictement positives et continues dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^n$ et continument différentiables en u .

(A2) Si $u_i=0$ alors $\mathcal{V}_i^- = 0$

S'il n'y a rien dans un compartiment, rien ne peut en sortir,

(A3) $\mathcal{F}_i = 0$ pour $i > m$

indique qu'il n'y a pas d'infection pour les compartiments non infectés.

(A4) Si $u \in U_s$ alors $\mathcal{F}_i = \mathcal{V}_i^+$ pour $i = 1, \dots, m$.

S'il n'y a pas de porteurs de germes, dans la population, il ne peut apparaître de nouveaux infectés.

Nous supposons que le système (3.6) admet un état stationnaire sans maladie

$$u^0 = (0, \dots, 0, u_{m+1}^0(x), \dots, u_n^0(x))^T,$$

où $u_i^0(x) > 0$, $m+1 \leq i \leq n$, $\forall x \in \Omega$. Posons

$$u_I = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad d_I(x) = (d_1(x), \dots, d_m(x))^T,$$

$$\begin{aligned}
u_S &= (u_{m+1}, \dots, u_n)^T, & d_S(x) &= (d_{m+1}(x), \dots, d_n(x))^T, \\
&\text{et} \\
\nabla \cdot (d_I(x) \nabla u_I) &= (\nabla \cdot (d_1(x) \nabla u_1), \dots, \nabla \cdot (d_m(x) \nabla u_m))^T, \\
\nabla \cdot (d_S(x) \nabla u_S) &= (\nabla \cdot (d_{m+1}(x) \nabla u_{m+1}), \dots, \nabla \cdot (d_n(x) \nabla u_n))^T, \\
f_I(x, u) &= (f_1(x, u), \dots, f_m(x, u))^T \\
f_S(x, u) &= (f_{m+1}(x, u), \dots, f_n(x, u))^T \\
\text{soit } M^0(x) &= \left(\frac{\partial f_i(x, u^0(x))}{\partial u_j} \right)_{m+1 \leq i, j \leq n}.
\end{aligned}$$

Pour le système de réaction-diffusion linéaire,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_S}{\partial t} = \nabla \cdot (d_S(x) \nabla u_S) + M^0(x) u_S, & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, \quad \forall m+1 \leq i \leq n, \text{ avec } d_i > 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

nous faisons l'hypothèse suivante pour assurer que u^0 soit linéairement stable dans l'espace sans maladie :

(A5) $M^0(x)$ est coopérative $\forall x \in \bar{\Omega}$ et $\lambda^0(M^0) := s(\nabla \cdot (d_S \nabla) + M^0) < 0$.

d'après les hypothèses (A1)-(A5) on pose :

$$\mathcal{D}_u \mathcal{F}(x, u^0(x)) = \begin{pmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_u \mathcal{V}(x, u^0(x)) = \begin{pmatrix} V(x) & 0 \\ J(x) & -M^0(x) \end{pmatrix}$$

où $F(x)$ et $V(x)$ sont deux matrices de taille $m \times m$ définies par,

$F(x) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(x, u^0(x))}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$, $V(x) = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i(x, u^0(x))}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ et $J(x)$ est une matrice de taille $(n - m) \times n$. Notons que (A1) et (A4) impliquent que $F(x)$ est positive.

Posons $X_1 = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ et $X_1^+ := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^m)$. Soit $T(t)$ le semi-groupe dans X_1 associé au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_I}{\partial t} = \nabla \cdot (d_I(x) \nabla u_I) - V(x) u_I, & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \text{ avec } d_i > 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

Notons que l'évolution interne des individus dans les compartiments infectieux due aux décès et aux mouvements entre les compartiments est dissipative et décroît d'une façon exponentielle dans nombreux cas, en raison de

la perte de membres infectieux due à la mortalité naturelle et à la mortalité causée par la maladie. Donc on suppose que :

(A6) $-V$ est coopérative $\forall x \in \bar{\Omega}$ et $\lambda^0(-V) := s(\nabla \cdot (d_I \nabla) - V) < 0$.

Pour définir le nombre de reproduction de base pour le modèle (3.6), nous supposons que les variables d'état sont proches de l'état stationnaire sans maladie u^0 . Ensuite, nous introduisons la distribution de l'infection initiale décrite par $\phi(x)$. Sous les influences synthétiques de la mobilité, de la mortalité et du transfert d'individus dans les compartiments infectés, la distribution de ces membres infectieux au cours de l'évolution du temps devient $T(t)\phi(x)$. Ainsi, la distribution de la nouvelle infection au temps t est $F(x)T(t)\phi(x)$. Par conséquent, la distribution totale des nouvelles infections est :

$$\int_0^\infty F(x)T(t)\phi(x)dt,$$

on définit :

$$L(\phi)(x) := \int_0^\infty F(x)T(t)\phi dt = F(x) \int_0^\infty T(t)\phi dt$$

où L est un opérateur positif et continu. On définit le taux de reproduction de base par le rayon spectral de L , $R_0 := r(L)$ pour le modèle (3.5).

Théorème 3.3. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A6) soient satisfaites. Alors, les énoncés suivants sont valides :*

(i) $R_0 - 1$ a le même signe que $\lambda^* := s(B + F)$.

(ii) Si $R_0 < 1$ alors u^0 est asymptotiquement stable pour le système (3.6).

Démonstration

— Soit B le générateur du semi-groupe $T(t)$ dans X_1 . Notons que $T(t)$ est un semi-groupe positif dans le sens où $T(t)X_1^+ \subset X_1^+$ pour tout $t \geq 0$. D'où B est à résolvante positive et vérifie :

$$(\lambda I - B)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\phi dt, \quad \forall \lambda > s(B), \quad \phi \in X_1. \quad (3.9)$$

D'après l'hypothèse (A6), on a $s(B) < 0$. Prenons $\lambda = 0$ dans (3.9)

$$-B^{-1}\phi = \int_0^\infty T(t)\phi dt \quad \forall \phi \in X_1.$$

Par conséquent $L = -FB^{-1}$. Définissons l'opérateur linéaire

$A := F + B$. Puisque A est le générateur d'un C_0 semi-groupe positif alors A est à résolvante positive. Ainsi $s(A)$ a le même signe que

$$r(-FB^{-1}) - 1 = R_0 - 1$$

.

Pour prouver l'énoncé (ii), on linéarise le système (3.6) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_I}{\partial t} = \nabla \cdot (d_I(x) \nabla u_I) + (F(x) - V(x))u_I, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_S}{\partial t} = \nabla \cdot (d_S(x) \nabla u_S) - J(x)u_I + M^0(x)u_S, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \text{ avec } d_i > 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.10)$$

Soit $Q(t)$ le semi-groupe associé à l'équation de u_I de (3.10) avec condition aux limites de Neumann généré par $B + F$ et soit $\omega(Q)$ la borne de croissance exponentielle de $Q(t)$. Puisque le semi-groupe est compact on obtient $\omega(Q) = s(B + F)$. Soit $\Phi(t)$ le semi groupe associé à (3.10) et $\omega(\Phi)$ sa borne de croissance exponentielle. Définissons le problème des valeurs propres associé à (3.10) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (d_I \nabla \phi_1) + (F(x) - V(x))\phi_1 = \lambda \phi_1, \\ \nabla \cdot (d_S \nabla \phi_2) - J(x)\phi_1 + M^0(x)\phi_2 = \lambda \phi_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour que λ soit une valeur propre il faut que $\phi = (\phi_1, \phi_2) \neq (0, 0)$. Dans le cas où $R_0 < 1$, si l'on suppose que $\phi_2 = 0$ et $\phi_1 \neq 0$ alors la première équation de (3.11) et l'énoncé (i) nous donne que $\omega(Q) = s(B + F) < 0$ et si $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 \neq 0$ alors d'après la deuxième équation de (3.11) et l'hypothèse (A5) on obtient $\omega(\Phi) = s(\nabla \cdot (d_S \nabla) + M^0) < 0$. Finalement on a la stabilité asymptotique locale de u^0 pour le système non linéaire

(3.6).

3.3.1 Caractérisation du taux de reproduction de base

On caractérise le taux de reproduction de base en termes de la valeur propre principale du problème elliptique de valeurs propres.

Théorème 3.4. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A6) soient satisfaites et qu'il existe $d_0 > 0$ tel que $d_i(x) \geq d_0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Si le problème elliptique*

$$\begin{cases} -\nabla(d_I(x)\nabla\phi) + V(x)\phi = \mu F(x)\phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.12)$$

admet une unique valeur propre positive μ_0 , alors

$$R_0 = r(-FB^{-1}) = r(-B^{-1}F) = \frac{1}{\mu_0}.$$

Démonstration

Posons $F_\epsilon(x) = F(x) + \epsilon E, V_\epsilon = V(x) - \epsilon E$,

où $\epsilon > 0$ et E la matrice de taille $m \times m$ dont tous les éléments sont 1.

Considérons :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_I}{\partial t} = \nabla \cdot (d_I(x)\nabla u_I) - V_\epsilon(x)u_I, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

Soit $T_\epsilon(t)\phi$ la solution de (3.13) qui satisfait $T_\epsilon(0)\phi = \phi$. On définit L_ϵ comme :

$$L_\epsilon(\phi)(x) := F_\epsilon(x) \int_0^\infty T_\epsilon(t)\phi(x)dt.$$

où L_ϵ un opérateur compact fortement positif. D'après le théorème de Krein-Rutman le rayon spectral de L_ϵ noté par $R_0(\epsilon)$ est une valeur propre principale avec un vecteur propre strictement positif ϕ_ϵ . Donc on a :

$$F_\epsilon(x) \int_0^\infty T_\epsilon(t)\phi_\epsilon dt = R_0(\epsilon)\phi_\epsilon.$$

Soit B_ϵ le générateur du $T_\epsilon(t)$ qui est un semi-groupe continu.

$$B_\epsilon \phi = \nabla \cdot [d_I(x) \nabla(\phi)] - V_\epsilon(x) \phi.$$

Comme $T_\epsilon(t)$ est semi-groupe strictement positif on obtient que B_ϵ est à la résolvante positive et vérifie :

$$(\lambda I - B_\epsilon)^{-1} \phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\epsilon(t) \phi dt, \quad \forall \lambda > s(B_\epsilon), \quad \phi \in X_1. \quad (3.14)$$

D'après l'hypothèse (A6) et la continuité de la borne spectrale sur les paramètres que l'on peut supposer suffisamment petits pour que $s(B_\epsilon) < 0$.

Remplaçons λ par 0 dans (3.14), on obtient

$$-B_\epsilon^{-1} \phi = \int_0^\infty T_\epsilon(t) \phi dt, \quad \forall \phi \in X_1,$$

d'où

$$-F_\epsilon(x) B_\epsilon^{-1} \phi_\epsilon = R_0(\epsilon) \phi_\epsilon. \quad (3.15)$$

Posons $\psi_\epsilon := -B_\epsilon^{-1} \phi_\epsilon$, on remarque que ψ_ϵ est strictement positif et (3.15) implique que :

$$F_\epsilon(x) \psi_\epsilon = -R_0(\epsilon) B_\epsilon \psi_\epsilon$$

par conséquent, on a :

$$\begin{cases} -\nabla(d_I(x) \nabla \psi_\epsilon) + V_\epsilon(x) \psi_\epsilon = \frac{1}{R_0(\epsilon)} F_\epsilon(x) \psi_\epsilon, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

D'après [9] il s'ensuit que le problème des valeurs propres :

$$\begin{cases} -\nabla(d_I(x) \nabla \phi) + V_\epsilon(x) \phi = \mu F_\epsilon(x) \phi, & x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.17)$$

a une valeur propre positive unique μ_ϵ avec un vecteur propre strictement positif. De plus ψ_ϵ est strictement positif, par suite $\mu_\epsilon = 1/R_0(\epsilon)$ et par conséquent $R_0 = 1/\mu_\epsilon$. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et par l'utilisation de la théorie de perturbation d'un opérateur linéaire [11] on obtient $R_0 = \frac{1}{\mu_0}$.

Dans le cas où certains d_i sont identiquement nuls, on peut réduire le calcul de R_0 à celui de la valeur propre principale d'un problème de valeurs propres elliptiques de dimension inférieure sous des conditions supplémentaires. Nous supposons que $d_I(x) = (d_1(x), \dots, d_m(x))$ satisfait (D2) avec $k = m$, et utilisons les notation u_{i_1} , u_{i_2} et $\nabla \cdot (d_{i_1}(x) \nabla u_{i_1})$. On divise les deux matrices $F(x)$ et $V(x)$ comme suit :

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix}, V(x) = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x) \\ V_{21}(x) & V_{22}(x) \end{pmatrix}$$

où F_{11} , V_{11} sont $i_1 \times i_1$ et F_{22} , V_{22} sont de taille $i_2 \times i_2$ et $i_1 + i_2 = m$.

Alors nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Soient (A1)-(A6) satisfaites. Supposons que $s(-V_{22}) < 0$.*

Soit $B_1 := \nabla(d_{i_1} \nabla) - V_1$, où $V_1 := V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}$

(i) *Si $F_{12} = 0$ et $F_{22} = 0$, alors $R_0 = r(-B^{-1}F) = r(-B_1^{-1}F_1)$, où*

$$F_1 = F_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}F_{21}.$$

(ii) *Si $F_{21} = 0$ et $F_{22} = 0$, alors $R_0 = r(-B^{-1}F) = r(-B_1^{-1}F_2)$, où*

$$F_2 = F_{11} - F_{12}V_{22}^{-1}V_{21}.$$

Démonstration

Puisque $-V_{22}$ est coopérative et $s(-V_{22}) < 0$ alors V_{22}^{-1} existe et $V_{22}^{-1} = \int_0^\infty e^{-V_{22}(x)t} dt$ est une matrice positive pour tout $x \in \bar{\Omega}$. Soit $\hat{L} := -B^{-1}F$, clairement on a $R_0 = r(\hat{L})$. Pour tout $\phi \in X_1$, soit $\psi = \hat{L}\phi$. Puisque $-B\psi = F\phi$ on a

$$\begin{cases} -\nabla(d_{i_1}(x) \nabla \psi_1) + V_{11}\psi_1 + V_{12}\psi_2 = F_{11}\phi_1 + F_{12}\phi_2 \\ V_{21}\psi_1 + V_{22}\psi_2 = F_{21}\phi_1 + F_{22}\phi_2. \end{cases}$$

Un calcul simple montre que :

$$\begin{cases} -(B_1)\psi_1 = (F_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}F_{21})\phi_1 + (F_{12} - V_{12}V_{22}^{-1}F_{22})\phi_2 \\ \psi_2 = V_{22}^{-1}(F_{21}\phi_1 + F_{22}\phi_2) - V_{22}^{-1}V_{21}\psi_1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Dans le cas où $F_{12} = 0$ et $F_{22} = 0$, il résulte de (3.18) que

$$\begin{cases} \psi_1 = -B_1^{-1}F_1\phi_1 := A\phi_1, \\ \psi_2 = (V_{22}^{-1}F_{21} + V_{22}^{-1}V_{21}B_1^{-1}F_1)\phi_1 = B\phi_1. \end{cases}$$

Par conséquent $\hat{L}\phi = (A\phi_1, B\phi_2)$ pour tout $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in X_1$. De plus on a :

$$\hat{L}^n(\phi_1, \phi_2) = (A^n\phi_1, BA^{n-1}\phi_1) \quad \forall n \geq 2, \phi = (\phi_1, \phi_2) \in X_1.$$

Notons que $A : Y_1 \rightarrow Y_1$ et $B : Y_1 \rightarrow Y_2$ sont des opérateurs linéaires ; d'où

$$\|A^n\| \leq \|\hat{L}^n\| \leq (\|A^n\|^2 + \|B\|^2\|A^{n-1}\|^2)^{1/2}, \quad \forall n \geq 2$$

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|\hat{L}^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^{n-1}\|^{\frac{1}{n}}(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2n}}$$

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|\hat{L}^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|A^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2n}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on obtient $r(A) = r(\hat{L}) = r(-B_1^{-1}F_2)$.

Dans le cas où $F_{21} = 0$ et $F_{22} = 0$, on a $\psi_2 = -V_{22}^{-1}V_{21}\psi_1$. Posons,

$$Z := \{\phi = (\phi_1, \phi_2) \in X_1 : \phi_2 = -V_{22}^{-1}V_{21}\phi_1\}.$$

Ainsi Z est un sous-espace de l'espace de Banach X_1 et $\hat{L}(X_1) \subset Z$. Soit $\hat{L}_Z$ la restriction de $\hat{L}$ à Z . Alors $\hat{L}_Z$ est un opérateur linéaire sur Z . La relation (3.18) implique que

$$\hat{L}_Z(\phi) = (-B_1^{-1}F_2\phi_1, -V_{22}^{-1}V_{21}(-B_1^{-1}F_2\phi_1)) \quad \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in Z$$

Par le même argument que dans la preuve de $r(\hat{L}) = r(A)$ dans le dernier paragraphe, on a $r(\hat{L}_Z) = r(-B_1^{-1}F_2)$. De plus, il est facile de vérifier :

$$\|\hat{L}_Z^n\| \leq \|\hat{L}^n\| \leq \|\hat{L}_Z^{n-1}\| \cdot \|\hat{L}\|, \quad \forall n \geq 2.$$

D'après la formule du rayon spectral on obtient : $r(\hat{L}) = r(\hat{L}_Z) = r(-B_1^{-1}F_2)$.

Chapitre 4

Applications

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons appliquer la théorie présentée dans le troisième chapitre à différents modèles de réaction-diffusion.

4.2 Le modèle SIR avec diffusion

Soit Ω un domaine avec un bord $\partial\Omega$ régulier.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d_1 \Delta S - \beta(x)SI - \mu(x)S + A(x), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_2 \Delta I + \beta(x)SI - \gamma(x)I - \mu(x)I, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = d_3 \Delta R + \gamma(x)I - \mu(x)R, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

4.2.1 Le taux de reproduction de base

Soit $(S^*(x), 0, 0)^T$ l'état d'équilibre sans maladie du système (4.1). La linéarisation du système autour de ce point pour la deuxième équation donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = d_2 \Delta I + \beta(x)S^*I - \gamma(x)I - \mu(x)I, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

L'espace fonctionnel approprié pour le système ci-dessus est $Y = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. L'opérateur linéaire associé au système (4.2) est $A = F + B$, où $F = \beta(\cdot)S^*(\cdot)$ et $B = d_2\Delta - (\gamma(\cdot) + \mu(\cdot))$.

Soit $T(t)$ le semi-groupe dans Y associé au générateur B . Puisque le principe du maximum implique que $T(t)$ est un semi groupe positif alors son générateur est à résolvante positive, vérifiant :

$$(\lambda I - B)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\phi dt \quad \forall \lambda > s(B) .$$

Il est facile de voir que $s(B)$ est strictement négative. Alors on a

$$-B^{-1}\phi = \int_0^\infty T(t)\phi dt.$$

Multiplions par F on obtient :

$$-F(x)B^{-1}(x) = F(x) \int_0^\infty T(t)\phi(x)dt.$$

Maintenant on peut définir le taux de reproduction de base comme :

$$R_0 = r(-FB^{-1}).$$

Définissons le problème de valeurs propres :

$$-F(x)B^{-1}(x)\phi(x) = R_0\phi(x).$$

Donc $-d_2\Delta\phi + (\gamma + \mu)\phi = \tilde{\lambda}\beta S^*\phi$ avec $\tilde{\lambda} = \frac{1}{R_0}$.

D'après le théorème Krein-Rutman

$$\tilde{\lambda} = \inf_{\phi \neq 0, \phi \in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega d_2 |\nabla \phi|^2 + (\gamma + \mu)\phi^2 dx}{\int_\Omega \beta S^* \phi^2 dx}$$

et par conséquent $R_0 = \sup_{\phi \neq 0, \phi \in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \beta S^* \phi^2 dx}{\int_\Omega d_2 |\nabla \phi|^2 + (\gamma + \mu)\phi^2 dx}.$

4.3 Le modèle de la rage

La rage est une maladie zoonotique qui est fortement influencée par l'hétérogénéité spatiale. Le modèle décrivant l'évolution de cette maladie est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = \beta IS - \sigma E - [b + (a - b)N/K]K, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D \frac{\partial I}{\partial x} + \sigma E - \alpha I - [b + (a - b)\frac{N}{K}]I), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = (a - b)S(1 - \frac{N}{K}) - \beta IS, & t > 0, x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

où

- S est la densité des renards sensibles.
- E est la densité des renards infectés mais non infectieux,
- I est la densité des renards enrégés.
- $N = S + E + I$ est la population totale des renards,
- D est le coefficient de diffusion et a est le taux de naissance
- b est le taux de la mortalité et K est la capacité limite,
- β est le coefficient de transmission de la maladie,
- σ est le taux par habitant de renards infectés devenant contagieux,
- α est le taux de mortalité causée par la maladie chez le renard enrégé, et x est la variable spatial unidimensionnelle,
- $(a - b)N/K$ représente le taux de mortalité dû à l'épuisement de l'approvisionnement alimentaire par tous les renards.

Pour simplifier, nous nous limitons à l'habitat unidimensionnel $\Omega = (0, 1)$ et imposons les conditions aux limites de Neumann pour le modèle (4.3),

$$\frac{\partial I}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial I}{\partial x}|_{x=1} = 0$$

On suppose que a , b , σ et K sont des constantes positives. On suppose que $D(x) \geq D_0$ pour tout $x \in [0, 1]$, pour une certaine constante $D_0 > 0$, et $\beta(x)$, $\alpha(x)$ sont des fonctions continues positives sur $[0, 1]$ avec $\beta(x)$ non

identiquement nulle. D'après les hypothèses ci-dessus, le système (4.1) admet un état stationnaire sans maladie $(0, 0, K)$. Ainsi, les matrices F et V définies dans le chapitre 3 deviennent :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & \beta(x)K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} \sigma + a & 0 \\ -\sigma & \alpha(x) + a \end{pmatrix}$$

Considérons le problème de valeurs propres suivant associé au système parabolique linéaire :

$$\begin{cases} -(\sigma + a)E + \beta(x)KI = \lambda E, & x \in (0, 1), \\ \frac{d}{dx}(D(x)\frac{dI}{dx}) + \sigma E - (\alpha(x) + a)I = \lambda I, & x \in (0, 1), \\ \frac{dI}{dx}|_{x=0} = \frac{dI}{dx}|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Lemme 4.1. *Le problème (4.4) admet une valeur propre principale simple λ^* avec un vecteur propre positif.*

Démonstration :

D'après le Théorème 3.2 nous écrivons le problème des valeurs propres comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(D(x)\frac{d\phi_1}{dx}) - (\alpha(x) + a)\phi_1 + \sigma\phi_2 = \lambda\phi_1, & x \in (0, 1), \\ \beta(x)K\phi_1 - (\sigma + a)\phi_2 = \lambda\phi_2, & x \in (0, 1), \\ \frac{d\phi_1}{dx}|_{x=0} = \frac{d\phi_1}{dx}|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Ainsi, les opérateurs linéaires $\mathcal{L}_\lambda$ définis dans le chapitre 3 deviennent :

$$\mathcal{L}_\lambda\phi = \frac{d}{dx}(D(x)\frac{d\phi}{dx}) - (\alpha(x) + a)\phi + \frac{\sigma\beta(x)K}{\lambda + (\sigma + a)}\phi, \quad \forall \lambda > -(\sigma + a).$$

Puisque $\beta(x) \geq 0$ et $\beta(x) \equiv 0$, il existe un intervalle $[c, d] \subset (0, 1)$ tel que $\beta(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Soit $A := \sigma \cdot \min_{x \in [c, d]} \beta(x) \cdot K$ et soit λ_1 la valeur propre principale du problème des valeurs propres elliptiques,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(D(x)\frac{d\phi}{dx}) - (\alpha(x) + a)\phi &= \lambda\phi, & x \in (c, d) \\ \phi(c) &= \phi(d) = 0 \end{aligned}$$

avec une fonction propre positive $\phi^*(x)$. Posons

$$\lambda_0 := \frac{\lambda_1 - (\sigma + a) + \sqrt{(\lambda_1 + \sigma + a)^2 + 4A}}{2}.$$

Puisque $A > 0$, on a $\lambda_0 > -(\sigma + a)$. Ceci implique que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\lambda_0} \phi^*(x) \geq \frac{d}{dx}(D(x) \frac{d\phi^*}{dx}) - (\alpha(x) + a) \phi^*(x) + \frac{A}{\lambda_0 + (\sigma + a)} \phi^*(x), \\ \quad = (\lambda_1 + \frac{A}{\lambda_0 + (\sigma + a)}) \phi^*(x), \\ \quad = \lambda_0 \phi^*(x) \quad \forall x \in (c, d). \end{cases} \quad (4.6)$$

Maintenant, nous définissons une fonction continue $\phi_0(x)$ dans $[0, 1]$ par

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \phi^*(x) & \text{si } x \in [c, d], \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1] \setminus [c, d], \end{cases}$$

puisque l'on a $\mathcal{L}_{\lambda_0} \phi_0(x) \geq \lambda_0 \phi_0(x)$ pour tout $x \in (0, 1) \setminus \{c, d\}$, par conséquent $e^{\lambda_0 t} \phi_0(x)$ est une sous-solution de la forme intégrale du système linéaire $u_t = \mathcal{L}_{\lambda_0} u$. D'après le Théorème 3.2, le problème (4.5) a une valeur propre de multiplicité géométrique un et une fonction propre strictement positive.

Lemme 4.2. *Soit μ_1 l'unique valeur propre positive du problème de valeurs propres*

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(D(x) \frac{d\phi}{dx}) + (\alpha + a)\phi = \mu \frac{\sigma K \beta(x)}{\sigma + a} \phi, & x \in (0, 1), \\ \frac{d\phi}{dx}|_{x=0} = \frac{d\phi}{dx}|_{x=1} = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec une fonction propre positive, alors $R_0 = \frac{1}{\mu_1}$.

Démonstration

Pour pouvoir utiliser le Théorème 3.5, nous définissons :

$$\hat{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta(x)K & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}(x) = \begin{pmatrix} \alpha + a & -\sigma \\ 0 & \sigma(x) + a \end{pmatrix}$$

et $\hat{B} = \text{diag}(\frac{d}{dx}(D(x) \frac{d}{dx}), 0) - \hat{V}$. Par suite $R_0 = r(-B^{-1}F) = r(-\hat{B}^{-1}\hat{F})$. Puisque $\hat{F}_{12} = 0 = \hat{F}_{22}$ le Théorème 3.5 implique que $R_0 = r(-\hat{B}_1^{-1}\hat{F}_1) = \frac{1}{\mu_1}$, avec $\hat{F}_1 \phi_1 = \frac{\sigma K \beta(x)}{\sigma + a} \phi_1$, $\hat{B}_1^{-1} \phi_1 = \frac{d}{dx}(D(x) \frac{d\phi_1}{dx}) - (\alpha + a) \phi_1$ et μ_1 est l'unique valeur propre positive de $-\hat{B}_1 \phi_1 = \mu \hat{F}_1 \phi_1$.

4.4 Modèles cellulaires

Dans cette section nous étudions trois modèles d'infection virale. Supposons que les cellules et les particules virales vivent dans un environnement spatialement hétérogène continu.

Soit Ω un domaine avec un bord $\partial\Omega$ régulier.

4.4.1 La diffusion des cellules avec des transmissions virus-cellule et cellule-cellule

Désignons par $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ et $u_3(x, t)$ les populations de cellules sensibles, de cellules infectées et de particules virales à l'emplacement x et au temps t , respectivement.

nous considérons le modèle général d'infection virale suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (d_1(x) \nabla u_1) + a(x) - f(u_1, u_2) - g(u_1, u_3) - \mu_1(x)u_1, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (d_2(x) \nabla u_2) + f(u_1, u_2) + g(u_1, u_3) - \mu_2(x)u_2, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = k(x)u_2 - \mu_3(x)u_3, & t > 0, x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec des conditions initiales positives et les conditions aux limites homogène de Neumann $\frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0$, $i = 1, 2$, $x \in \partial\Omega$, $t > 0$,

avec

- $d_1(x)$, $d_2(x) > 0$ sont les coefficients de diffusion des cellules sensibles et des cellules infectées à l'emplacement x , respectivement.
- $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ et $\mu_3(x)$ sont des fonctions positives continues dans $\bar{\Omega}$. À l'emplacement x représentent les taux de mortalité des cellules sensibles, des cellules infectées et des particules virales, respectivement.
- $k(x)$ à l'emplacement x représente le taux de production de virus dû à la lyse des cellules infectées.
- $f(u_1, u_2)$ est la fonction de transmission cellule-cellule.
- $g(u_1, u_3)$ est la fonction de transmission virus-cellule.

Taux de reproduction de base

Soit $(w^*(x), 0, 0)^T$ l'état d'équilibre sans maladie du système (4.8). La linéarisation du système autour de ce point pour les deux dernières équations donne le système coopératif suivant pour les cellules infectées et le virus :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla(d_2(x)\nabla u_2) + \beta_d(x)u_2 + \beta_i(x)u_3 - \mu_2(x)u_2, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = k(x)u_2 - \mu_3(x)u_3, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.9)$$

avec $\beta_d(x) = \frac{\partial f(w^*, 0)}{\partial u_2}$ et $\beta_i(x) = \frac{\partial g(w^*, 0)}{\partial u_3}$.

L'espace fonctionnel approprié pour le système ci-dessus est $Y = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$.

L'opérateur linéaire associé au système (4.9) est $A = F + B$, où

$$F = \begin{pmatrix} \beta_d(\cdot) & \beta_i(\cdot) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (d_2 \nabla) - \mu_2(\cdot) & 0 \\ k(\cdot) & -\mu_3(\cdot) \end{pmatrix}$$

Soit $T(t)$ le semi-groupe dans Y associé au système de réaction-diffusion linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (d_2(x)\nabla u_2) - \mu_2(x)u_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = k(x)u_2 - \mu_3(x)u_3, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

D'après le principe du maximum fort on obtient que la solution u_2 est positive puis on déduit que la solution u_3 est aussi positive. D'où $T(x)$ est un semi groupe positif et vérifie :

$$(\lambda I - B)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\phi dt \quad \forall \lambda > s(B).$$

Définissons le problème de valeurs propres associé à (4.10) $B\phi = \lambda\phi$ où $\phi = (\phi_2, \phi_3)$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (d_2(x)\nabla \phi_2) - \mu_2(x)\phi_2 &= \lambda\phi_2, & x \in \Omega, \\ k(x)\phi_2 - \mu_3(x)\phi_3 &= \lambda\phi_3, & x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplions la première équation de (4.11) par ϕ_2 puis intégrons,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} d_2 |\nabla \phi_2|^2 dx - \int_{\Omega} \mu_2 |\phi_2|^2 &= \lambda \int_{\Omega} |\phi_2|^2 dx \\ - \int_{\Omega} d_2 |\nabla \phi_2|^2 dx &= \int_{\Omega} (\lambda + \mu_2) |\phi_2|^2 dx \\ &\geq (\lambda + \min_{x \in \Omega} \mu_2(x)) \int_{\Omega} |\phi_2(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

ce qui donne $\lambda \leq -\min_{x \in \Omega} \mu_2(x)$.

La deuxième équation de (4.11) donne $\lambda \leq -\max_{x \in \Omega} \mu_3$. D'où $s(B) < 0$.

Finalement on a $-B^{-1}\phi = \int_0^\infty T(t)\phi dt$. Multiplions par F on obtient

$$-F(x)B^{-1}(x) = F(x) \int_0^\infty T(t)\phi(x)dt.$$

A présent on peut définir le taux de reproduction de base comme

$$R_0 = r(-FB^{-1}).$$

Notons que B est triangulaire inférieure et $s(B) < 0$. Cela implique que $\mu_2(\cdot) - \nabla(d_2\nabla)$ et μ_3 sont inversibles. Soit $L := -B^{-1}F$. Pour tout $\phi \in Y$, soit $\psi = L\phi$. Puisque $-B\psi = F\phi$, on a

$$\begin{cases} -\nabla.(d_2(x)\nabla\psi_2) + \mu_2(x)\psi_2 = \beta_d(x)\phi_2 + \beta_i(x)\phi_3, & x \in \Omega, \\ k(x)\psi_2 + \mu_3(x)\psi_3 = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \psi_2 = (\mu_2 - \nabla.(d_2\nabla))^{-1}(\beta_d\phi_2 + \beta_i\phi_3), \\ \psi_3 = k\mu_3^{-1}(\mu_2 - \nabla.(d_2\nabla))^{-1}(\beta_d\phi_2 + \beta_i\phi_3), \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} (\mu_2 - \nabla.(d_2\nabla))^{-1}(\beta_d\phi_2 + \beta_i\phi_3) = R_0\phi_2, \\ k\mu_3^{-1}(\mu_2 - \nabla.(d_2\nabla))^{-1}(\beta_d\phi_2 + \beta_i\phi_3) = R_0\phi_3, \end{cases}$$

par suite on obtient :

$$\begin{cases} (\mu_2 - \nabla.(d_2\nabla))\phi_2 = \lambda(\beta_d\phi_2 + \beta_i\phi_3), \\ (\mu_2 - \nabla.(d_2\nabla))\phi_3 = \lambda k\mu_3^{-1}(\beta_d\phi_2 + \beta_i\phi_3), \\ \text{avec, } \lambda = \frac{1}{R_0}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Si seule la transmission virus-cellule est prise en compte c'est à dire dans le cas où $\beta_i = 0$ on a : $\int_{\Omega} \mu_2 |\phi|^2 dx + \int_{\Omega} d_2 |\nabla \phi|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} k \mu_3^{-1} \beta_i |\phi|^2 dx$
D'après le théorème de krein-Rutman (voir 3.8 [20]) :

$$\lambda = \inf_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (\mu_2 \phi^2 + d_2 |\nabla \phi|^2) dx}{\int_{\Omega} k \mu_3^{-1} \beta_i \phi^2 dx}.$$

D'où le taux de reproduction de base pour la transmission virus-cellule est :

$$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} k \mu_3^{-1} \phi^2 dx}{\int_{\Omega} (\mu_2 \phi^2 + d_2 |\nabla \phi|^2) dx}.$$

D'autre part, en l'absence de transmission virus-cellule c'est à dire $\beta_d = 0$, le taux de reproduction de base pour la transmission cellule-cellule est donné par :

$$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \beta_d \phi^2 dx}{\int_{\Omega} (\mu_2 |\phi|^2 + d_2 |\nabla \phi|^2) dx}.$$

Dans le cas où β_i et β_d sont pris en considération le taux de reproduction de base est donné par (ii) du Théorème 3.5 du chapitre 3 :

$$R_0 = r((\mu_2 - \nabla \cdot (d_2 \nabla))^{-1} (\beta_d + k \mu_3^{-1} \beta_i)) = r(A_d + A_i),$$

avec $A_d = (\mu_2 - \nabla \cdot (d_2 \nabla))^{-1} \beta_d$ et $A_i = (\mu_2 - \nabla \cdot (d_2 \nabla))^{-1} k \mu_3^{-1} \beta_i$.

4.4.2 La diffusion de virus avec des transmissions de virus-cellule et de cellule-cellule

Nous considérons le modèle général d'infection virale suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = n(x, u_1) - f(u_1, u_3) - g(u_1, u_2), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = f(u_1, u_3) + g(u_1, u_2) - b(x)u_2, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d\Delta u_3 + k(x)u_2 - m(x)u_3, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial \eta} = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.13)$$

où,

- $d > 0$ est le coefficients de diffusion de virus ,
- $b(x)$ et $m(x)$ à l'emplacement x représentent les taux de mortalité,
- $n(x, u_1)$ est la fonction générale de la reproduction cellulaire

Maintenant, nous identifions le nombre de reproduction de base R_0 pour le modèle en utilisant la procédure standard de l'opérateur de nouvelle génération.

Le taux de reproduction de base

Soit $(\bar{u}_1(x), 0, 0)$ l'état d'équilibre sans maladie du système (4.13). Le système linéarisé de (4.13) pour (u_2, u_3) est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \beta_d u_2 + \beta_i(x) u_3 - b(x) u_2, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d \Delta u_3 + k(x) u_2 - m(x) u_3, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.14)$$

pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$, avec $\beta_i(x) = \frac{\partial f(\bar{u}_1, 0)}{\partial u_3}$ et $\beta_d(x) = \frac{\partial g(\bar{u}_1, 0)}{\partial u_2}$.

L'espace fonctionnel approprié pour le système différentiel linéaire homogène ci-dessus est $Y := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Soit $A = F + B$ l'opérateur linéaire associé à (4.14) tel que :

$$F = \begin{pmatrix} \beta_d & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -b(.) & 0 \\ k(.) & d(.)\Delta - m(.) \end{pmatrix}$$

Le taux de reproduction de base R_0 est défini comme le rayon spectral de $-FB^{-1}$. On suit les mêmes étapes du premier modèle on trouve

$$R_0 = r(\beta_i(m - d\Delta)^{-1} \frac{k}{b} + \frac{\beta_d}{b}).$$

Remarque 4.1. 1- En l'absence de transmission indirecte, le taux de reproduction de base pour la transmission directe est donné comme suit,

$$R_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{\beta_d(x)}{b(x)}.$$

2- Si seule la transmission indirecte est prise en compte, le taux de reproduction de base est donné comme suit,

$$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \beta_i(x) k(x) \phi^2(x) / b(x) dx}{\int_{\Omega} (d |\nabla \phi(x)|^2 + m(x) \phi^2(x)) dx}$$

4.4.3 La diffusion des cellules et virus avec une transmission virus-cellule

Considérons le modèle d'infection virale suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (d_1(x) \nabla u_1) + a(x) - g(u_1, u_3) - \mu_1(x) u_1, & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (d_2(x) \nabla u_2) + g(u_1, u_3) - \mu_2(x) u_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = \nabla \cdot (d_3(x) \nabla u_3) + k(x) u_2 - \mu_3(x) u_3, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0 & \text{pour } i = 1, 2, 3, x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.15)$$

Le taux de reproduction de base

Soit $(u_1^*(x), 0, 0)^T$ l'état d'équilibre sans maladie du système (4.12). Le système linéarisé de (4.15) pour (u_2, u_3) est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (d_2(x) \nabla u_2) + \beta_i(x) u_3 - \mu_2(x) u_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = \nabla \cdot (d_3(x) \nabla u_3) + k(x) u_2 - \mu_3(x) u_3, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0 & \text{avec } i = 2, 3, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.16)$$

où $\beta_i(x) = \frac{\partial g(u_1^*, 0)}{\partial u_3}$. L'espace fonctionnel approprié pour le système (4.16) ci-dessus est $Y = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. L'opérateur linéaire associé au système (4.9) est $A = F + B$, où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i(.) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (d_2(.) \nabla) - \mu_2(.) & 0 \\ k(.) & \nabla \cdot (d_3(.) \nabla) - \mu_3(.) \end{pmatrix}.$$

D'après la théorie de Zhao et al. développée dans le chapitre 3, R_0 est défini comme le rayon spectral de l'opérateur de la prochaine génération c'est à dire $R_0 = r(-FB^{-1})$.

Par un simple calcul on trouve

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} (\nabla \cdot (d_2 \nabla) - \mu_2)^{-1} & 0 \\ -(\nabla \cdot (d_3 \nabla) - \mu_3)^{-1} k (\nabla \cdot (d_2 \nabla) - \mu_2)^{-1} & (\nabla \cdot (d_3 \nabla) - \mu_3)^{-1} \end{pmatrix},$$

donc

$$-F(x)B^{-1}(x) = - \begin{pmatrix} -\beta_i(x)B_{21}(x) & \beta_i(x)(\nabla(d_3(x)\nabla) - \mu_3(x))^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $B_{21} = (\nabla \cdot (d_3 \nabla) - \mu_3)^{-1} k (\nabla \cdot (d_2 \nabla) - \mu_2)$.

Finalement on obtient $R_0 = r(\beta_i(x)B_{21}(x))$ et ceci implique que R_0 est une valeur propre principale du problème aux valeurs propres suivant,

$$\begin{cases} \beta_i(x)B_{21}(x)\phi = \lambda\phi, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Par conséquent, il existe une fonction propre strictement positive ϕ_* satisfaisant $\int_{\Omega} \phi_*^2 dx = 1$ telle que

$$R_0 = - \frac{\int_{\Omega} \beta_i(x)(\nabla(d_3(x)\nabla) - \mu_3(x))^{-1} k(x) \phi_*^2 dx}{\int_{\Omega} (d_2(x)|\nabla \phi_*|^2 + \mu_2(x)\phi_*^2) dx}.$$

Considérons le problème aux valeurs propres suivant,

$$\begin{cases} -\beta_i(x)(\nabla \cdot (d_3(x)\nabla) - \mu_3(x))^{-1} k(x) \phi_* = \lambda^* \phi_*, & x \in \Omega, \\ \frac{\phi_*}{\eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.18)$$

Puisque $\int_{\Omega} \phi_*^2 dx = 1$ alors $\lambda^* = - \int_{\Omega} \beta_i(x)(\nabla(d_3(x)\nabla) - \mu_3(x))^{-1} k(x) \phi_*^2 dx$.

D'après (4.18) on obtient $\lambda^* = \frac{\int_{\Omega} \beta_i(x)k(x)\phi_*^2 dx}{\int_{\Omega} (d_3(x)|\nabla \phi_*|^2 + \mu_3(x)\phi_*^2) dx}$.

Finalement,

$$R_0 = \frac{\int_{\Omega} \beta_i(x)k(x)\phi_*^2 dx}{\int_{\Omega} (d_3(x)|\nabla \phi_*|^2 + \mu_3(x)\phi_*^2) dx \int_{\Omega} (d_2(x)|\nabla \phi_*|^2 + \mu_2(x)\phi_*^2) dx}.$$

Cela montre que,

$$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \beta_i(x) k(x) \phi_*^2 dx}{\left(\int_{\Omega} d_3(x) |\nabla \phi_*|^2 + \mu_3(x) \phi_*^2 dx \int_{\Omega} (d_2(x) |\nabla \phi_*|^2 + \mu_2(x) \phi_*^2) dx \right)}.$$

Chapitre 5

L'étude d'un modèle de réaction diffusion

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent on a calculé le R_0 pour plusieurs modèles dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude du modèle particulier suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (d_1(x) \nabla u_1) + a(x) - f(u_1, u_2) - g(u_1, u_3) - \mu_1(x)u_1, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (d_2(x) \nabla u_2) + f(u_1, u_3) + g(u_1, u_3) - \mu_2(x)u_2, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = k(x)u_2 - \mu_3(x)u_3, & t > 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2 La convergence

Théorème 5.1. (i) R_0 est une valeur propre principale de $A_d + A_i$ associée à une fonction propre positive.

(ii) On suppose que d_2 est une constante sur $\bar{\Omega}$, alors R_0 est une fonction monotone décroissante de d_2 , De plus, nous avons :

$$R_0 \rightarrow \bar{R}_0 := \max_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \frac{\beta_d(x)}{\mu_2(x)} + \frac{\beta_i(x)k(x)}{\mu_2(x)\mu_3(x)} \right\} \text{ quand } d_2 \rightarrow 0$$
$$R_0 \rightarrow \underline{R}_0 := \frac{\int_{\Omega} (\beta_d(x) + \beta_i(x)\mu_3^{-1}(x)k(x))}{\int_{\Omega} \mu_2(x)dx} \text{ quand } d_2 \rightarrow \infty$$

Démonstration :

(i) Puisque A_i et A_d sont strictement positifs et compacts, le théorème de Krein-Rutman implique que R_0 est une valeur propre positive de $A_i + A_d$ avec un vecteur propre strictement positif noté par $\phi^*(x)$ on a,

$$\begin{cases} \beta_d(\mu_2 - \nabla \cdot (d_2 \nabla))^{-1} \phi^* = R_0 \phi^*, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

Prenons $\psi^* = \phi^*/(\beta_d + \beta_i \mu_3^{-1} k)$, donc le problème aux valeurs propres ci-dessus peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \nabla(d_2(x) \nabla \psi(x)) - \mu_2(x) \psi(x) + \frac{\beta_d(x) + \beta_i(x) \mu_3^{-1}(x) k(x)}{R_0} \psi(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

(ii) Supposons que d_2 est une constante dans $\bar{\Omega}$. On voit facilement que R_0 est une fonction décroissante de d_2 , et le problème des valeurs propres (5.3) peut être réduit comme :

$$\begin{cases} d_2 \Delta \psi^* - \mu_2 \psi^* + \frac{\beta_d + \beta_i \mu_3^{-1} k}{R_0} \psi^* = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

Prouvons que $R_0 \leq \bar{R}_0$, sinon on a $-\mu_2 + (\beta_d + \beta_i \mu_3^{-1} k)/R_0 < 0$ et que la valeur propre principale est strictement négative, ce qui contredit (5.4). Donc $\lim_{d_2 \rightarrow 0} R_0$ existe. Ensuite, nous prouvons que $\lim_{d_2 \rightarrow 0} R_0 = \bar{R}_0$. Supposons le contraire, alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $R_0 < \bar{R}_0 - \epsilon$ pour tout $d_2 > 0$. D'après la continuité des fonctions il existe un $x_0 \in \Omega$ et un $\delta > 0$ tels que :

$$\frac{\beta_d(x)}{\mu_2(x)} + \frac{\beta_i(x) k(x)}{\mu_2(x) \mu_3(x)} > \bar{R}_0 - \frac{\epsilon_0}{2} > R_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \text{ pour tout } x \in B_\delta(x_0).$$

Ce qui implique la positivité de $\beta_d(x)/\mu_2(x) + \beta_i(x)k(x)/[\mu_2(x)\mu_3(x)]$ dans $B_\delta(x_0)$. Par la compacité des fonctions continues dans un domaine borné, il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$-\mu_2(x) + \frac{\beta_d(x) + \beta_i(x) \mu_3^{-1}(x) k(x)}{R_0} > \epsilon \text{ pour tout } B_\delta(x_0).$$

L'inégalité ci-dessus avec (5.4) donne $-\Delta\psi^* > \epsilon\psi^*/d_2$. Notons $\psi_+(x) = \psi^*(x)/\min_{x \in B_\delta(x_0)} \psi^*(x)$. Donc on a $-\Delta\psi_+(x) > \epsilon\psi_+(x)/d_2$ et $\psi_+(x) \geq 1$ dans $B_\delta(x_0)$. Soit $\eta > 0$ une valeur propre principale de $-\Delta$ dans $B_\delta(x_0)$ associée à la fonction propre $\psi_-(x)$, on peut normaliser $\psi_-(x)$ tel que $\psi_-(x) \leq 1$ dans $B_\delta(x_0)$. Donc on a $-\Delta\psi_-(x) = \eta\psi_-(x) < \epsilon\psi_-(x)/d_2$. Ainsi, $\psi_+(x)$ et $\psi_-(x)$ sont la sur et sous solution de $-\Delta\phi = \frac{\epsilon\phi}{d_2}$ avec condition aux limites de Neumann, ce qui contredit les faits $\frac{\epsilon}{d_2} > \eta$ et η est la valeur propre principale de $-\Delta$. Ainsi, ϵ/d_2 est une valeur propre de $-\Delta$ dans $B_\delta(x_0)$. Par conséquent, $R_0 \rightarrow \bar{R}_0$ quand $d_2 \rightarrow 0$. D'après la formule de R_0 du système (5.1) on a $R_0 \geq \underline{R}_0$ pour tout $d_2 > 0$ et $\lim_{d_2 \rightarrow 0} R_0$ existe. Divisons les deux membres de la première équation de (5.4) par d_2 pour obtenir :

$$\Delta\psi^* + \frac{\beta_d + \beta_i\mu_3^{-1}k - R_0\mu_2}{R_0d_2}\psi^* = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5.5)$$

Il résulte alors de la régularité elliptique [7] qu'il existe une constante positive $\bar{\psi}$ telle que $\psi^* \rightarrow \bar{\psi}$ dans $C(\Omega)$ quand $d_2 \rightarrow \infty$. L'intégration par parties de (5.4) sur Ω donne :

$$\int_{\Omega} \mu_2 \psi^* dx = \int_{\Omega} \frac{\beta_d + \beta_i\mu_3^{-1}k}{R_0} \psi^*,$$

faisons tendre d_2 vers ∞ on obtient $R_0 \rightarrow \underline{R}_0$, ce qui achève la preuve.

Maintenant si on suppose que $f(u_1, u_2) = 0$, $g(u_1, u_3) = \beta(x)u_1u_3$ et d_2, d_3 sont des constantes alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1\Delta u_1 + a(x) - \beta(x)u_1u_3 - \mu_1(x)u_1, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2\Delta u_2 + \beta(x)u_1u_3 - \mu_2(x)u_2, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = k(x)u_2 - \mu_3(x)u_3, & t > 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

Le taux de reproduction de base pour le modèle (5.6) est :

$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int (\beta w^* k \mu_3^{-1}) \phi^2 dx}{\int (\mu_2 |\phi|^2 + d_2 |\nabla \phi|^2) dx}$. L'opérateur linéaire associé au système linéarisé de (5.6) est $A = F + B$, où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta w^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} d_2 \Delta - \mu_2(.) & 0 \\ k(.) & -\mu_3(.) \end{pmatrix}$$

D'après le Théorème 5.1 on a :

$$R_0 \rightarrow \bar{R}_0 := \max_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \frac{\beta w^* k}{\mu_2 \mu_3} \right\} \text{ quand } d_2 \rightarrow 0$$

$$R_0 \rightarrow \underline{R}_0 := \frac{\int_{\Omega} (\beta w^* \mu_3^{-1} k)}{\int_{\Omega} \mu_2(x) dx} \text{ quand } d_2 \rightarrow \infty.$$

Dans la section suivante on va étudier la stabilité du modèle (5.6).

5.3 La stabilité de l'état stationnaire sans maladie :

5.3.1 La stabilité locale

Lorsque $R_0 < 1$ le Théorème 3.3 implique la stabilité locale de l'équilibre $(w^*(x), 0, 0)^T$.

5.3.2 La stabilité globale

Pour prouver la stabilité globale de l'état stationnaire on va d'abord citer quelques lemmes qu'on va les utiliser dans la preuve.

Lemme 5.1. *Soit $\mu_{3_m} = \min\{\mu_3(x), x \in \bar{\Omega}\}$. Alors $\omega_{ess}(T) \leq -\mu_{3_m}$*

Démonstration

Pour tout $(u_{20}, u_{30}) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, soit $(u_2(., t), u_3(., t)) := T(t)(u_{20}, u_{30})$ avec $T(t) = \hat{T}_2(t) + \hat{T}_3(t)$, où :

$$\hat{T}_2(t)(u_{20}, u_{30}) = (u_2(., t), \int_0^t e^{-\mu_3(t-s)} k u_2(., s) ds)$$

$$\text{et } \hat{T}_3(t)(u_{20}, u_{30}) = (0, e^{-\mu_3 t} u_{30})$$

Comme $\hat{T}_2(t)$ est compact alors on obtient :

$$\alpha(T(t)) = \alpha(\hat{T}_3(t)) \leq \|\hat{T}_3(t)\| \leq e^{-\mu_{3_m} t}.$$

Par conséquent $\omega_{ess}(T) \leq -\mu_{3_m}$

Lemme 5.2. *Soit u_1 la sous-solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} = d_1 \Delta \hat{u}_1 + a(x) - \mu_1(x) \hat{u}_1 & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \hat{u}_1(x, 0) = u_{10}, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

où ce problème admet un état stable positif unique, noté $w^*(x)$, qui est globalement attractif. Ceci avec le théorème de comparaison implique que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u_1(x, t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}_1(x, t) = w^*(x) \text{ uniformément pour } x \in \bar{\Omega}$$

Lemme 5.3. $R_0 - 1$ et $s(A)$ ont le même signe que λ_0 .

Où λ_0 est la valeur propre principale du problème des valeurs propres suivant,

$$\begin{cases} d_2 \Delta \phi - \mu_2 \phi + \frac{k\beta w^*}{\mu_3} \phi = \lambda \phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.8)$$

Théorème 5.2. *Si $R_0 < 1$ alors $(w^*(x), 0, 0)^T$ est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration : Puisque l'équilibre sans maladie est localement stable il suffit de prouver l'attractivité globale de l'équilibre. Fixons $\epsilon_0 > 0$. D'après le Lemme 5.2 il existe $t_1 > 0$ tel que $0 \leq u_1(., t) \leq w^* + \epsilon$ pour tout $t > t_1$. D'après le principe de comparaison pour les systèmes coopératifs on obtient $(u_2(x, t), u_3(x, t)) \leq (\hat{u}_2(x, t), \hat{u}_3(x, t))$ dans $\bar{\Omega} \times [t_1, \infty)$. Où $(\hat{u}_2(x, t), \hat{u}_3(x, t))$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial t} = d_2 \Delta \hat{u}_2 + \beta(w^* + \epsilon_0) \hat{u}_3 - \mu_2 \hat{u}_2, & x \in \Omega, t > t_1, \\ \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t} = k \hat{u}_2 - \mu_3 \hat{u}_3, & x \in \Omega, t > t_1, \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, t > t_1 \\ \hat{u}_2(x, t_1) = u_2(x, t_1) \text{ et } \hat{u}_3(x, t_1) = u_3(x, t_1) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

Soit $T_{\epsilon_0}(t)$ le semi-groupe associé au problème (5.9) généré par A_{ϵ} . On peut choisir ϵ_0 petit tel que $\omega_{\epsilon_0} := \omega(T_{\epsilon_0}) < 0$. D'après le Lemme 5.1 on peut avoir $\omega_{ess}(T_{\epsilon_0}) \leq -\mu_{3_m}$. Par conséquent ω_{ϵ_0} a le même signe de $s(A_{\epsilon_0})$. On a déjà

vu dans le Lemme 5.3 que $s(A_{\epsilon_0})$ a le même signe que (λ_{ϵ_0}) , où (λ_{ϵ_0}) est la valeur propre principale du problème des valeurs propres

$$\begin{cases} d_2 \Delta \phi - \mu_2 \phi + \frac{k\beta(w^* + \epsilon_0)}{\mu_3} \phi = \lambda \phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.10)$$

L'hypothèse $R_0 < 1$ implique $\lambda_0 < 0$. Puisque λ_{ϵ_0} dépend continûment de ϵ_0 , on peut choisir $\epsilon_0 > 0$ tel que $\lambda_{\epsilon_0} < 0$. Et donc nous avons $\omega_{\epsilon_0} < 0$. Puisque $\|T_{\epsilon_0}(t)\| \leq M e^{\omega_{\epsilon_0} t}$ pour certains $M > 0$, alors $(\hat{u}_2(x, t), \hat{u}_3(x, t)) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \rightarrow \infty$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$. Par conséquent, on a $(u_2(x, t), u_3(x, t)) \rightarrow (0, 0)$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$. De plus, d'après la première équation de (5.4) et la stabilité globale de U comme état stationnaire positif de (5.7), nous concluons que $u_1(x, t) \rightarrow w^*(x)$ quand $t \rightarrow \infty$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$. Cela prouve l'attractivité globale de $(w^*, 0, 0)^T$.

Bibliographie

- [1] Y. Abdelbadie, La théorie de semi-groupes et les équations aux dérivées partielles, mémoire de master, Univ Tlemcen 2019, <http://dspace.univ-tlemcen.dz/bitstream/112/14478/1/La-theorie-de-semi-groupes-et-les-equations.pdf>.
- [2] J. Arino, A. Ducrot, and P. Zongo, A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts, *J. Math. Biol.*, 64 (2012), pp. 423–448.
- [3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [4] C. Cosner, J. C. Beier, R. S. Cantrell, D. Impoinvil, L. Kapitanski, M. D. Potts, A. Troyo, and S. Ruan, The effects of human movement on the persistence of vector borne diseases, *J. Theoret. Biol.*, 258 (2009), pp. 550–560.
- [5] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 3 Spectral Theory and Applications*, 1999.
- [6] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and J. A. J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in the models for infectious disease in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.*, 28 (1990), pp. 365–382.
- [7] I. D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1983.

- [8] Z. Guo, F. Wang, and X. Zou, Threshold dynamics of an infective disease model with a fixed latent period and non-local infections, *J. Math. Biol.*, 65, (6-7) 1387-1410, 2012.
- [9] P. Hess, On the eigenvalue problem for weakly coupled elliptic systems, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 81 (1983), pp. 151-159
- [10] P. Hess, Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity, Pitman Res. Notes in Math. 247, Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, 1991.
- [11] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976.
- [12] S. Koshi, S. Dimiev and R. Lazov, Partially ordered normed linear spaces with weak Fatou property, *TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS* Vol. 1, No. 1, pp. 1-9, March 1997.
- [13] D.Lassoued, Fonctions presque-périodiques et équations différentielles model via environmental driven infection in heterogenous space, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00942969/document>.
- [14] J.Li and X. Zou, Dynamics of an epidemic model with non-local infections for diseases with latency over a patchy environment, *J. Math. Biol.*, 60 (2010), pp. 645-686.
- [15] Y. Lou and X.Q. Zhao, A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population, *J. Math. Biol.*, 62 (2011), pp. 543-56.
- [16] Z.Ma and H.Shu, Viral infection dynamics in a spatial heterogeneous environment with cell-free and cell-to-cell transmissions, *MBE*, 17(3) : 2569–2591, DOI :10.3934/mbe.2020141, Published : 02 March, 2020, <http://http://www.aimspress.com/journal/MBE>.
- [17] H. W. McKenzie, Y. Jin, J. Jacobsen, and M. A. Lewis, R_0 analysis of a spatiotemporal model for a stream population, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11 (2012), pp. 567-596.

- [18] R. Peng and X.Q. Zhao, A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment, *Nonlinearity*, 25 (2012), pp. 1451-1471.
- [19] H.ouedrago Modélisation mathématique de la dengue :stratégies de contrôle, [http ://www.beep.ird.fr/collect/upb/index/assoc/UFRST-2017-OUE-MOD/UFRST-2017-OUE-MOD.pdf](http://www.beep.ird.fr/collect/upb/index/assoc/UFRST-2017-OUE-MOD/UFRST-2017-OUE-MOD.pdf).
- [20] L.Roques, Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale, Editions Quæ RD 1078026 Versailles Cedex.
- [21] G. Sallet, cours, INRIA, IRD EPICASA09, avril 2010.
- [22] H.Shu Z.Ma, X.Wang, L.Wang, Viral diffusion and cell-to-cell transmission : Mathematical analysis and simulation study, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Volume 137, May 2020, Pages 290-313.
- [23] H. L. Smith, Monotone Dynamical Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems, *Math. Surveys Monogr.* 41, AMS, Providence, RI, 1995.
- [24] H. R. Thieme, Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity, *SIAM J. Appl. Math.*, 70 (2009), pp. 188–211.
- [25] P. van den Driessche and J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Math. Biosci.*, 180 (2002), pp. 29–48.
- [26] W. Wang and G. Mulone, Threshold of disease transmission on a patch environment, *J. Math. Anal. Appl.*, 285 (2003), pp. 321-335.
- [27] N.Wang, L.Zhang and Z.Teng Dynamics in a reaction-diffusion epidemic model via environmental driven infection in heterogenous space, *Journal of Biological Dynamics*, DOI : 10.1080/17513758.2021.1900428
- [28] W. Wang, X-Q. Zhao, Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11 (2012), 1652–1673.

- [29] Y.Wu, X.Zou, Dynamics and profiles of a diffusive host–pathogen system with distinct dispersal rates, *J. Differential Equations* 264 (2018) 4989–5024.
- [30] H. Zirar, Etude d’un modèle avec diffusion structuré en âge de la transmission de l’héroïne. Mémoire de Master, Univ Tlemcen 2020.