REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOQRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DES ETUDES SUPERIEURES ET DES
RECHERCHES SCIENTIFIQUES
UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE ET ELECTRONIQUE

Projet de fin d'études :

En vue de l'obtention du diplôme du Master en Automatique .
Option : automatique et informatique industrielle .

Méthode algèbrique pour l'identification et l'estimation numèrique : application en automatique

---

Présenté par :

ZIREG Faiza Sabah

Soutenu le 25.06.2026 devant le jury composé de :

Présidente :	Mme A.CHOUKCHOU	Professeur
Examinatrice :	Mlle W .HANDOUZI	MCA
Encadrante :	Mme S .BORSALI	MCA

Année universitaire 2025-2026


بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Je remercie avant tout ALLAH le Tout-Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.

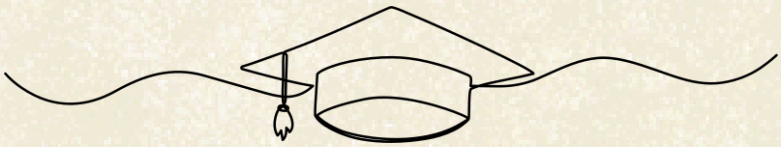
J'exprime ma profonde gratitude à mon encadreuse, Mme S. BORSALI, pour sa confiance, sa disponibilité et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Mme A. CHOUKCHOU, Présidente du jury, ainsi qu'à Mlle W. HANDOUZI, Examinatrice, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Enfin, mes remerciements vont à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation ainsi qu'à toutes les personnes ayant participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

F. S. ZIREG

Dédicase



Je dédie ce mémoire à mes chers parents qui ont été toujours à mes côtés et m'ont toujours soutenu tout au long de ces longues années d'études. En signe de reconnaissance, qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude pour tout ce qu'ils ont consenti d'efforts et de moyens pour me voir réussir dans mes études.

A mes chers grands-parents, pour leurs prières et leur affection.

A mon cher frère
A toute ma famille
Et A toutes mes amies
Et surtout Maria, Hadil, Ikram, Bouchra, Amira.

A tous les gens qui me connaissent et que je connais
en particulier toute la promotion d'Automatique.

Et à tous ceux qui aiment le bon travail et ne reculent
pas devant les obstacles de la vie.

Faiza Sabah

Table des matières

Liste des abréviations **0**

Introduction générale **1**

1 Modélisation et représentation des systèmes dynamiques linéaires **2**

1.1 Introduction . . . 2

1.2 Approche méthodologique pour la modélisation des systèmes dynamiques continus . . . 2

1.2.1 Approche linéaire pour l'étude des systèmes physiques . . . 3

1.2.2 La modélisation des systèmes dynamiques . . . 4

1.2.2.1 Exemple 1 : Circuit RLC (série) . . . 4

1.2.2.2 Exemple 2 : Système masse - amortisseur . . . 5

1.2.2.3 Modèle différentiel général des systèmes linéaires . . . 6

1.2.3 Représentation fréquentielle : Le modèle entrée-sortie par fonction de transfert . . . 6

1.2.3.1 Exemple : Système masse - ressort - amortisseur . . . 7

1.3 Le modèle interne : Représentation d'état . . . 7

1.3.1 Exemple : Système masse - ressort - amortisseur . . . 8

1.4 Conclusion . . . 8

2 Identification des systèmes dynamiques **9**

2.1 Introduction . . . 9

2.2 Les principes de l'identification . . . 9

2.2.1 Acquisition des données . . . 12

2.2.2 Choix de la complexité du modèle . . . 12

2.2.3 Estimation des paramètres . . . 12

2.2.4 Validation du modèle . . . 13

2.3 la méthode des moindres carres . . . 13

2.3.1 Le modèle . . . 13

2.3.2 Le problème d'identification . . . 14

2.3.3 L'algorithme des moindres carrés . . . 14

2.3.4 Effet du bruit $w(t)$ . . . 16

2.3.5 Technique de minimisation du critère . . . 18

2.3.6 Moindres carrés récursifs . . . 18

2.3.7 Choix de la séquence d'entrée pour l'identification . . . 19

2.3.8 Validation du modèle identifié . . . 20

2.4 Méthode d'estimation paramétrique de modèle à temps continu . . . 20

2.4.1 Introduction . . . 20

2.4.2 Formulation du problème d'identification . . . 21

2.4.3 Approche par filtrage linéaire des variables d'état (FVE) . . . 22

2.4.3.1 Filtrage linéaire . . . 23
2.4.3.2 Analyse de l'estimateur des moindres carrés combiné au FVE . . . 24
2.4.3.3 Estimateur de la variable instrumentale / FVE . . . 24
2.4.4 Estimateur optimal de la variable instrumentale (SRIVC) . . . 25
2.4.4.1 Extension aux systèmes multi-entrées mono-sortie (MISO) . . . 29
2.4.5 Stratégie d'optimisation par minimisation de l'erreur de sortie (COE) . . . 30
2.4.6 Conclusion du panorama méthodologique . . . 31
2.5 Perspectives avancées en identification de systèmes . . . 31
2.5.1 Identification directe de modèles d'état . . . 31
2.5.2 Identification des procédés en boucle fermée . . . 31
2.5.3 Identification au sein de structures à erreurs sur les variables . . . 32
2.6 Conclusion . . . 33

3 Méthodologie de l'identification algébrique 34
3.1 Introduction . . . 34
3.2 Pourquoi l'approche algébrique ? . . . 34
3.3 Fondements algébriques de l'identification linéaire . . . 35
3.3.1 Définitions de base en algèbre . . . 35
3.3.2 Concepts fondamentaux d'algèbre différentielle . . . 36
3.3.3 Les opérateurs différentiels linéaires . . . 38
3.4 Une approche fondée sur la théorie des modules pour les systèmes linéaires . . . 38
3.4.1 Quelques résultats de base sur les modules sur les anneaux principaux . . . 38
3.4.2 Transformation de Laplace formelle . . . 39
3.4.3 Définitions fondamentales en théorie des systèmes . . . 40
3.4.4 Matrices de transfert . . . 41
3.5 Identifiabilité . . . 41
3.5.1 Paramètres indéterminés . . . 41
3.5.2 Dérivation algébrique et nouvelle structure de module . . . 42
3.5.3 Algèbre de Weyl . . . 42
3.5.4 Sur-anneau d'opérateurs différentiels . . . 42
3.5.5 Structure modulaire associée . . . 42
3.5.6 Identifiabilité linéaire . . . 42
3.5.7 Exemple élémentaire . . . 43
3.6 Perturbations . . . 43
3.6.1 Perturbations structurées . . . 43
3.6.2 Perturbations non structurées . . . 44
3.6.3 Identificateur linéaire . . . 44
3.6.4 Robustesse . . . 45
3.7 Introduction au régulateur PI généralisé . . . 46
3.8 Conclusion . . . 49

4 la mise en ouevre 50
4.1 Exemple 1 : traîner une masse inconnue en boucle ouverte . . . 50
4.1.1 Technique de débruitage (*Denoising*) par filtrage invariant . . . 54
4.2 Exemple 2 : Contrôle d'une masse inconnue . . . 56

Conclusion générale 62

Table des figures

1.1 Circuit RLC linéaire 4
1.2 Schéma fonctionnel du circuit RLC 5
1.3 Système masse - amortisseur 5
1.4 Schéma fonctionnel du système masse - amortisseur 6
1.5 Système mécanique masse - ressort - amortisseur 7

2.1 organigramme de la procédure de l"identification itérative 11
2.2 dispositif expérimentale d'estimation parametrique d'un système échantillonné 11

3.1 Schéma fonctionnel d'un régulateur PID classique 46

4.1 l'entrée u(t) et la sortie x(t) 52
4.2 le numérateur 52
4.3 dénominateur d(t) 53
4.4 la valeur estimée $1/m_e$ 53
4.5 u(t) et y(t) 55
4.6 le bruit de mesure 55
4.7 Identification du paramètre de la masse inverse en présence de bruits de mesure et de dynamique par filtrage invariant [1]. 56
4.8 La trajectoire arrêt-arrêt du régulateur GPI 57
4.9 dx/dt 58
4.10 la commande u(t) 58
4.11 la trajectoire arrêt-arrêt x*(t),et la sortie y(t) 60
4.12 la perturbation du frottement de Coulomb 60
4.13 la commande u(t) 61

Liste des abréviations

LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
RLC	Résistance – Inductance – Capacité
SISO	Entrée Unique – Sortie Unique (Système monovariable)
CAN	Convertisseur Analogique–Numérique
CNA	Convertisseur Numérique–Analogique
BOZ	Bloqueur d'Ordre Zéro
SBPA	Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire
FVE	Filtre de Variables d'État
MISO	Multi-Entrées Mono-Sortie (*Multiple Input Single Output*)
SRIVC	Variable Instrumentale Raffinée Simplifiée à Temps Continu
SRIV	Variable Instrumentale Raffinée Simplifiée à Temps Discret
GPI	Régulateur Proportionnel–Intégral Généralisé (*Generalized Proportional Integral*)
PI	Proportionnel–Intégral



Introduction



Introduction générale

Le problème de l'identification de systèmes occupe une place centrale dans de nombreuses disciplines scientifiques et d'ingénierie. Il intervient de manière cruciale dans la modélisation des phénomènes naturels, les problèmes de contrôle et de commande des procédés industriels, ou encore dans le domaine des communications numériques pour la récupération d'informations transmises. Face à ces enjeux, la littérature scientifique s'est largement enrichie de méthodes visant à résoudre cette problématique. Dans le cadre de l'automatique et des systèmes physiques — contexte dans lequel s'inscrit ce travail —, les approches conventionnelles se sont principalement développées autour du cadre théorique de l'estimation statistique et stochastique pour évaluer les paramètres du système étudié. Dans ce contexte, l'émergence d'une approche alternative, à la fois algébrique et déterministe, suscite un intérêt grandissant.

Bien que le cadre déterministe ait parfois été déconsidéré en raison de la sensibilité historique de ses méthodes face aux bruits de mesure, une telle approche s'avère particulièrement efficace lorsqu'elle est abordée dans un formalisme théorique approprié. De plus, elle présente l'avantage majeur de s'affranchir des hypothèses classiques de l'évaluation stochastique, telles que la connaissance a priori des propriétés statistiques du bruit ou des signaux traités. Dans ce sens, nous étudions deux problèmes distincts mais intimement liés par un objectif commun : identifier la dynamique d'un système et estimer les paramètres d'un signal.

Pour mener à bien cette étude, le présent manuscrit est structuré en quatre chapitres complémentaires :

Le premier chapitre aborde le problème de la modélisation et de la représentation des systèmes dynamiques linéaires en temps continu, de manière à poser les bases et obtenir une vision globale sur le comportement de ces derniers.

Le deuxième chapitre traite des différentes étapes nécessaires à l'identification paramétrique classique. Après l'étude de la méthode standard des moindres carrés à travers un exemple d'application, un panorama des méthodes d'estimation de modèles à temps continu est dressé, suivi d'une introduction à trois aspects plus avancés de l'identification des systèmes.

Le troisième chapitre expose les fondements théoriques liés à l'identification algébrique. Il détaille les outils mathématiques requis, notamment les bases algébriques (calcul opérationnel, théorie des modules et des anneaux non commutatifs) ainsi que le concept central d'identifiabilité.

Le quatrième chapitre est entièrement consacré à la validation pratique. À travers le développement de deux exemples d'application distincts, la méthode d'identification algébrique est mise en œuvre, testée et évaluée par simulation numérique sous MATLAB.

Chapitre 1:

Modélisation et représentation des systèmes dynamiques linéaires

Chapitre 1

Modélisation et représentation des systèmes dynamiques linéaires

1.1 Introduction

Afin de satisfaire les exigences imposées par le cahier des charges d'un système d'asservissement (stabilité, rapidité, précision, etc.), le choix et le dimensionnement du régulateur ne peuvent être effectués de manière arbitraire. L'obtention de performances optimales nécessite une connaissance approfondie des caractéristiques du système à commander, telles que le gain statique, les constantes de temps, les retards ou encore les paramètres d'inertie.

Ces caractéristiques ne sont généralement pas disponibles directement et doivent être déterminées soit à partir des lois physiques régissant le système, soit à travers des mesures expérimentales. La modélisation basée sur les lois physiques conduit à ce que l'on appelle un modèle de connaissance, dont l'objectif est d'établir les équations décrivant le comportement dynamique du système.

La disponibilité d'un tel modèle permet de réduire le recours aux expérimentations sur le système réel, limitant ainsi les coûts, la durée des essais et les risques potentiels. De plus, l'utilisation d'outils de simulation (MATLAB, Scilab, etc.) facilite l'analyse du comportement dynamique et l'évaluation des performances avant toute mise en œuvre pratique. Dans certains cas, le système réel peut même ne pas encore exister, rendant la modélisation indispensable.

Une autre approche consiste à déterminer un modèle à partir de mesures effectuées sur le système : il s'agit de l'*identification*. Cette méthode permet d'obtenir un modèle capable de représenter fidèlement le comportement du système à partir de données expérimentales. En pratique, la combinaison de la modélisation physique et de l'identification conduit souvent aux résultats les plus pertinents.

Dans ce chapitre, nous présentons les principales méthodes de représentation des systèmes dynamiques linéaires, notamment :

— La représentation par équations différentielles d'ordre n.
— La représentation sous forme de modèle d'état.
— La fonction de transfert.

1.2 Approche méthodologique pour la modélisation des systèmes dynamiques continus

Dans l'étude des systèmes de commande, il est essentiel de pouvoir représenter les systèmes dynamiques par des modèles mathématiques et d'analyser leurs caractéristiques dynamiques. Un modèle

mathématique d'un système dynamique se définit comme un ensemble d'équations représentant de manière précise, ou du moins approximative, le comportement dynamique du système. Il convient de noter qu'un même système peut être décrit par plusieurs modèles mathématiques différents, en fonction du point de vue adopté.

Les dynamiques de nombreux systèmes qu'ils soient mécaniques, électriques, thermiques, économiques ou biologiques peuvent être exprimées à travers des équations différentielles. Ces équations sont généralement obtenues en appliquant les lois physiques propres au système considéré, telles que les lois de Newton pour les systèmes mécaniques ou les lois de Kirchhoff pour les systèmes électriques. Il faut toujours garder à l'esprit que l'élaboration d'un modèle mathématique pertinent constitue l'étape la plus importante de l'analyse des systèmes de commande.

Les modèles mathématiques peuvent revêtir différentes formes selon le système étudié et les objectifs poursuivis. En effet, un modèle peut s'avérer plus adapté qu'un autre selon le contexte. Par exemple, dans le cadre des problèmes de commande optimale, il est souvent préférable d'utiliser une représentation en espace d'état. En revanche, pour l'analyse de la réponse transitoire ou fréquentielle des systèmes linéaires à entrée unique et sortie unique, invariants dans le temps, la représentation par fonction de transfert s'avère généralement plus pratique. Une fois qu'un modèle mathématique est obtenu, divers outils d'analyse et de simulation informatiques peuvent être mobilisés pour étudier le système et concevoir les régulateurs adéquats.

Après avoir obtenu un modèle mathématique général du système, exprimé sous forme d'équations différentielles ou algébriques, il est souvent nécessaire de le transformer en un modèle adapté à l'étude et au contrôle automatique. Cette étape consiste à convertir le modèle initial en une représentation plus pratique, telle que la fonction de transfert ou le modèle d'état. Ces formes dédiées permettent de simplifier l'analyse dynamique du système et facilitent la conception des régulateurs et des stratégies de commande. Ainsi, le passage du modèle physique général au modèle exploitable en automatique est une phase essentielle pour garantir la stabilité, la précision et la rapidité des systèmes de contrôle.

1.2.1 Approche linéaire pour l'étude des systèmes physiques

Les systèmes physiques réels présentent souvent des comportements non linéaires, ce qui complique leur analyse et leur commande. Un système est dit non linéaire lorsque le principe de superposition ne s'apply pas, c'est-à-dire que la réponse à une combinaison d'entrées n'est pas égale à la somme des réponses individuelles. En pratique, de nombreux systèmes peuvent présenter des phénomènes tels que la saturation, les zones mortes ou des relations non proportionnelles entre les variables.

Cependant, en automatique, l'étude des systèmes se fait généralement autour d'un point de fonctionnement correspondant à un point d'équilibre, où les variations des grandeurs physiques restent faibles. Dans ces conditions, il est possible d'approximer le comportement non linéaire du système par un modèle linéaire équivalent, valable dans un voisinage limité de ce point.

Considérons un système décrit par une relation non linéaire entre l'entrée et la sortie, donnée par :

$$y = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

La linéarisation de ce modèle consiste à développer la fonction g en série de Taylor autour du point de fonctionnement $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ et à ne conserver que les termes du premier ordre. On obtient alors l'approximation linéaire suivante :

$$y = g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_{i0}} (x_i - x_{i0}) \tag{1.2}$$

Les termes d'ordre supérieur sont négligés car les variations autour du point d'équilibre sont supposées faibles. Cette approximation linéaire permet de simplifier l'étude des systèmes physiques et de faciliter la conception des lois de commande en utilisant les outils de l'automatique linéaire.

1.2.2 La modélisation des systèmes dynamiques

La modélisation est le processus qui consiste à représenter un système physique réel par un ensemble d'équations mathématiques, obtenues à partir des lois physiques fondamentales qui gouvernent ce système. Cette représentation permet d'analyser, de comprendre et de prévoir le comportement dynamique du système, ainsi que de concevoir des stratégies de contrôle adaptées.

1.2.2.1 Exemple 1 : Circuit RLC (série)

Afin d'illustrer la modélisation mathématique des systèmes dynamiques, on considère un circuit électrique de type RLC. Ce système est modélisé en utilisant les lois fondamentales de l'électricité, en particulier la loi des mailles de Kirchhoff.

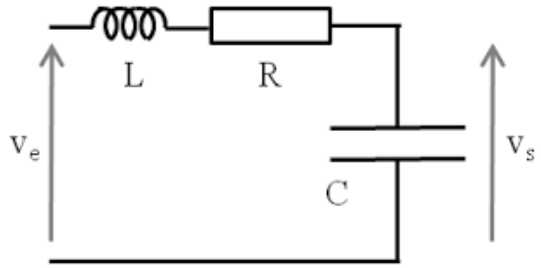


FIGURE 1.1 – Circuit RLC linéaire

Le circuit étudié est composé d'une inductance L, d'une résistance R et d'un condensateur C. La tension d'entrée du système est notée $v_e(t)$, et la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur $v_s(t)$. Les relations constitutives des composants sont :

$$\begin{cases} u_R(t) = R \cdot i(t) \\ u_L(t) = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} \\ u_C(t) = v_s(t) = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int i(t)\, dt \end{cases} \tag{1.3}$$

En appliquant la loi des mailles de Kirchhoff au circuit, on obtient l'équation suivante :

$$v_e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt \tag{1.4}$$

Sachant que la relation entre le courant et la tension de sortie est définie par :

$$i(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt} \tag{1.5}$$

Les relations obtenues à partir des lois de Kirchhoff peuvent être transformées de manière à exprimer le comportement dynamique du circuit sous une forme différentielle standard. L'ordre d'un système dynamique étant défini par le plus haut ordre de dérivation apparaissant dans son équation différentielle, le circuit RLC étudié est un système du deuxième ordre décrit par :

$$\frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_s(t) = \frac{1}{LC}v_e(t) \tag{1.6}$$

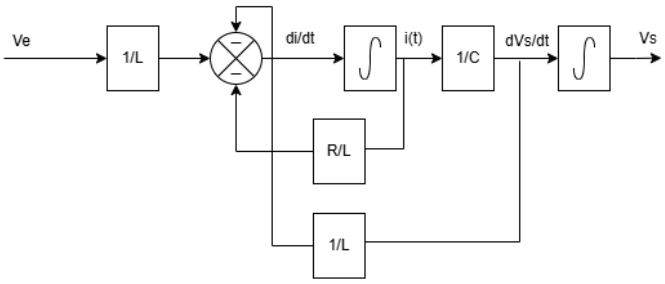


FIGURE 1.2 – Schéma fonctionnel du circuit RLC

Le schéma bloc (Figure 1.2) constitue une représentation graphique du modèle externe entrée-sortie du système. Il met en évidence l'enchaînement des différentes opérations dynamiques issues de l'équation différentielle, notamment les gains constants, les sommations et les intégrateurs. Chaque bloc correspond à un terme physique du système (inductance, résistance, capacité), tandis que les sommateurs traduisent la combinaison algébrique des différentes contributions. Cette représentation permet de visualiser la structure interne du système, de faciliter son analyse et constitue une base essentielle pour la simulation et l'étude de la stabilité.

1.2.2.2 Exemple 2 : Système masse - amortisseur

Considérons à présent un système mécanique composé d'une masse et d'un amortisseur.

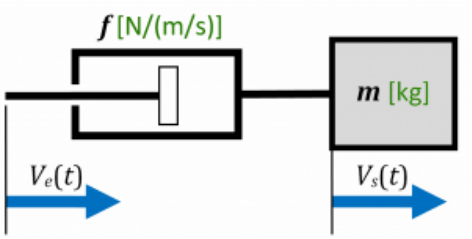


FIGURE 1.3 – Système masse - amortisseur

En appliquant la deuxième loi de Newton, la somme des forces exercées sur la masse est égale au produit de la masse par son accélération :

$$\sum F = m\frac{dv_s(t)}{dt} \tag{1.7}$$

Les forces appliquées sont :

— La force d'entrée $v_e(t)$;

— La force d'amortissement visqueux proportionnelle à la vitesse : $f \cdot v_s(t)$, opposée au mouvement.

On obtient alors l'équation dynamique suivante :

$$m\frac{dv_s(t)}{dt} = v_e(t) - fv_s(t) \tag{1.8}$$

Sous forme fonctionnelle canonique, cela s'écrit :

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{1}{m}v_e(t) - \frac{f}{m}v_s(t) \tag{1.9}$$

En régime permanent (lorsque le système est stabilisé), les dérivées par rapport au temps s'annulent :

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = 0 \tag{1.10}$$

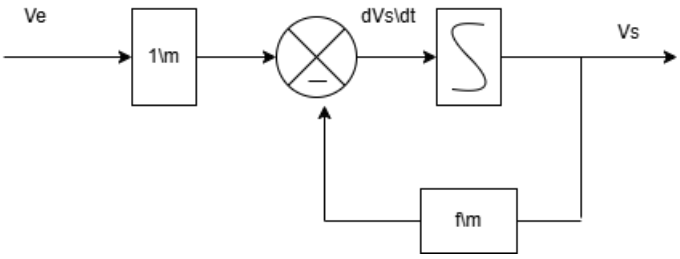


FIGURE 1.4 – Schéma fonctionnel du système masse - amortisseur

Le gain statique K du système se définit par le rapport de la sortie sur l'entrée en régime permanent :

$$K = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{f} \tag{1.11}$$

1.2.2.3 Modèle différentiel général des systèmes linéaires

D'une manière générale, le comportement dynamique d'un système linéaire invariant dans le temps (LTI) peut être décrit par une équation différentielle d'ordre n reliant l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$ sous la forme [2] :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t) \tag{1.12}$$

Avec la condition physique de causalité [2] : $n \geq m$.

1.2.3 Représentation fréquentielle : Le modèle entrée-sortie par fonction de transfert

Un modèle externe (ou modèle entrée–sortie) décrit le comportement d'un système uniquement à partir de la relation entre le signal d'entrée $u(t)$ et le signal de sortie $y(t)$, sans faire intervenir explicitement les variables internes du système. Ce type de modèle est particulièrement adapté à l'analyse des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Pour un système LTI, la réponse du système à une impulsion unitaire $\delta(t)$ est appelée *réponse impulsionnelle* et est notée $g(t)$. Cette fonction caractérise entièrement le comportement dynamique du système. La sortie $y(t)$ correspondant à une entrée quelconque $u(t)$ est donnée par l'opération de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle [3] :

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau)\, d\tau \tag{1.13}$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette relation (en supposant les conditions initiales nulles), on obtient une relation algébrique simple dans le domaine complexe [3] :

$$Y(s) = G(s) U(s) \tag{1.14}$$

où $G(s)$ est la fonction de transfert du système, définie par [3] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1.15}$$

La fonction de transfert constitue ainsi la représentation externe du système dans le domaine de Laplace et permet d'analyser facilement ses performances dynamiques.

1.2.3.1 Exemple : Système masse - ressort - amortisseur

Le système étudié est un système mécanique composé d'une masse m, d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient b. L'entrée du système est la force appliquée $u(t)$ et la sortie est le déplacement de la masse $y(t)$.

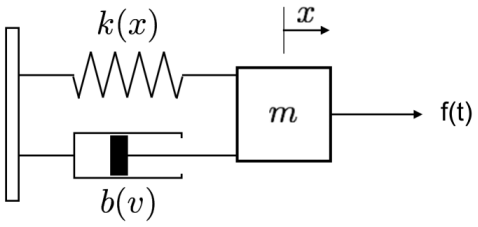


FIGURE 1.5 – Système mécanique masse - ressort - amortisseur

En appliquant la deuxième loi de Newton, le comportement dynamique du système est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \tag{1.16}$$

Afin d'obtenir un modèle entrée–sortie du système, l'équation différentielle précédente est transformée dans le domaine de Laplace en supposant des conditions initiales nulles. On obtient alors la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{1.17}$$

Cette fonction de transfert représente le modèle externe entrée–sortie du système masse–ressort–amortisseur.

1.3 Le modèle interne : Représentation d'état

Contrairement au modèle externe, qui décrit le système uniquement par la relation entrée–sortie, le modèle interne permet de représenter explicitement la dynamique interne du système à travers un ensemble de variables appelées *variables d'état*. Ces variables caractérisent l'évolution temporelle des grandeurs physiques internes et suffisent à décrire complètement le comportement du système.

- Le vecteur d'état $x(t) \in R^n$ regroupe ces variables internes (courants, tensions, positions, vitesses, etc.).
- Le vecteur de commande $u(t) \in R^m$ représente les entrées appliquées au système (sources, forces, tensions, etc.).
- Le vecteur de sortie $y(t) \in R^p$ correspond aux grandeurs mesurées ou observables.

La dynamique du système est décrite par les équations d'état (ou équations dynamiques), tandis que la relation entre l'état et la sortie est donnée par les équations de mesure. Pour un système linéaire invariant dans le temps, la représentation d'état s'écrit sous la forme standard :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{(Équation dynamique)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{(Équation de mesure)} \end{cases} \tag{1.18}$$

où :

- $A \in R^{nn}$ est la matrice dynamique du système,

— $B \in R^{nm}$ est la matrice de commande,
— $C \in R^{pn}$ est la matrice d'observation,
— $D \in R^{pm}$ est la matrice de transmission directe.

Cette représentation permet d'analyser finement les propriétés internes du système, telles que la stabilité, la commandabilité et l'observabilité, et constitue une base essentielle pour la synthèse des lois de commande modernes.

1.3.1 Exemple : Système masse - ressort - amortisseur

Afin d'obtenir un modèle interne du système masse–ressort–amortisseur, l'équation différentielle d'ordre deux est transformée en un système d'équations différentielles du premier ordre. Pour cela, on introduit les variables d'état représentant la position et la vitesse de la masse :

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases} \tag{1.19}$$

Ce choix permet d'aboutir au système d'équations du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{k}{m}x_1(t) - \dfrac{b}{m}x_2(t) + \dfrac{1}{m}u(t) \end{cases} \tag{1.20}$$

Sous forme matricielle compacte, la représentation d'état finale s'écrit sous forme d'un bloc d'équations couplées :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \tag{1.21}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{1.22}$$

Cette représentation d'état permet de décrire parfaitement le comportement interne du système.

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons posé les bases théoriques nécessaires à la modélisation et à la représentation des systèmes dynamiques linéaires. Les différentes formes de représentation étudiées constituent un outil fondamental pour comprendre et analyser le comportement dynamique d'un système.

Ces notions serviront de fondement au chapitre suivant, consacré à l'identification paramétrique, qui permettra de déterminer expérimentalement les paramètres du modèle afin d'obtenir une représentation fidèle du système réel.

Chapitre 2:

Identification des systèmes dynamiques

Chapitre 2

Identification des systèmes dynamiques

2.1 Introduction

L'identification des systèmes dynamiques occupe une place centrale dans le domaine de l'automatique. Elle consiste à déterminer des modèles mathématiques capables de représenter de manière fidèle le comportement réel d'un système à partir de données expérimentales, tout en tenant compte, lorsque cela est possible, des connaissances a priori relatives au procédé étudié. Cette approche permet ainsi de traduire le fonctionnement physique d'un système sous une forme exploitable pour l'analyse et la conception.

La démarche d'identification repose généralement sur l'exploitation des mesures entrée–sortie du système afin d'en extraire les informations nécessaires à la construction du modèle. Elle vise notamment à estimer les paramètres caractéristiques du système et à obtenir une représentation adaptée permettant de reproduire son comportement dans différentes conditions de fonctionnement. Les modèles obtenus jouent alors un rôle essentiel dans plusieurs applications telles que la simulation, la prédiction du comportement et la mise en œuvre des lois de commande.

Par ailleurs, lorsque les modèles sont construits essentiellement à partir des données expérimentales, sans s'appuyer fortement sur une description physique détaillée, ils sont qualifiés de modèles « boîte noire ». Ce type d'approche est particulièrement utilisé lorsque la connaissance du système est limitée ou difficile à exploiter.

Au cours du XXe siècle, le domaine de l'identification a connu un développement considérable, tant sur le plan théorique que pratique. Ce progrès s'est accompagné d'un intérêt croissant pour les modèles linéaires, notamment en temps discret, en raison de leur simplicité de mise en œuvre et de leur compatibilité avec les systèmes numériques. L'évolution des moyens de calcul et des outils informatiques a également contribué à la diffusion et à l'efficacité des méthodes d'identification.

Ainsi, l'identification des systèmes dynamiques constitue aujourd'hui un outil indispensable pour l'analyse, la modélisation et la commande des systèmes complexes.

2.2 Les principes de l'identification

L'identification, c'est l'opération de détermination des caractéristiques dynamiques d'un procédé (système) dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système performant de régulation [4].

L'identification est une méthode expérimentale qui utilise des procédures et des algorithmes pour exploiter les données issues des expériences, dans le but d'ajuster les paramètres du modèle afin que son comportement correspondant à celui du système réel [5].

Pour concevoir et ajuster correctement un régulateur, plusieurs étapes sont nécessaires :

1. Définir les performances attendues de la boucle fermée (stabilité, rapidité, précision et robustesse).
2. Identifier le modèle dynamique du procédé décrivant la relation entre la commande et la sortie.
3. Choisir une méthode adaptée pour le calcul du régulateur selon le type de modèle obtenu.
4. Mettre en œuvre le régulateur.
5. Valider et ajuster le régulateur sur site si nécessaire.
6. Assurer sa maintenance.

L'identification peut être réalisée en boucle ouverte, lorsque le système fonctionne sans régulateur, ou en boucle fermée, en présence d'un régulateur. Cette dernière approche est parfois privilégiée pour simplifier ou améliorer la structure du régulateur.

À l'issue du processus d'identification, les modèles dynamiques obtenus peuvent être classés en deux catégories, selon leur nature et la manière dont ils représentent le système.

Modèles non paramétriques Ces modèles représentent directement la relation entrée–sortie à partir des données expérimentales, sans formuler explicitement une équation mathématique avec paramètres ajustables.

Exemples : Réponse indicielle (réponse à un échelon), réponse fréquentielle.

Ils sont particulièrement utiles pour analyser le comportement du système sans chercher à déterminer une structure mathématique précise.

Modèles paramétriques Ces modèles utilisent une structure mathématique définie comportant un nombre fini de paramètres à estimer.

Exemple : Fonction de transfert.

Qu'il s'agisse d'un modèle paramétrique ou non paramétrique, sa construction ne se fait pas de manière empirique. Elle suit une méthodologie rigoureuse et structurée, communément appelée la démarche d'identification.

Une procédure complète d'identification comprend généralement quatre étapes majeures :

— Acquisition des données expérimentales
— Choix de la structure et de la complexité du modèle
— Estimation des paramètres du modèle
— Validation du modèle identifié

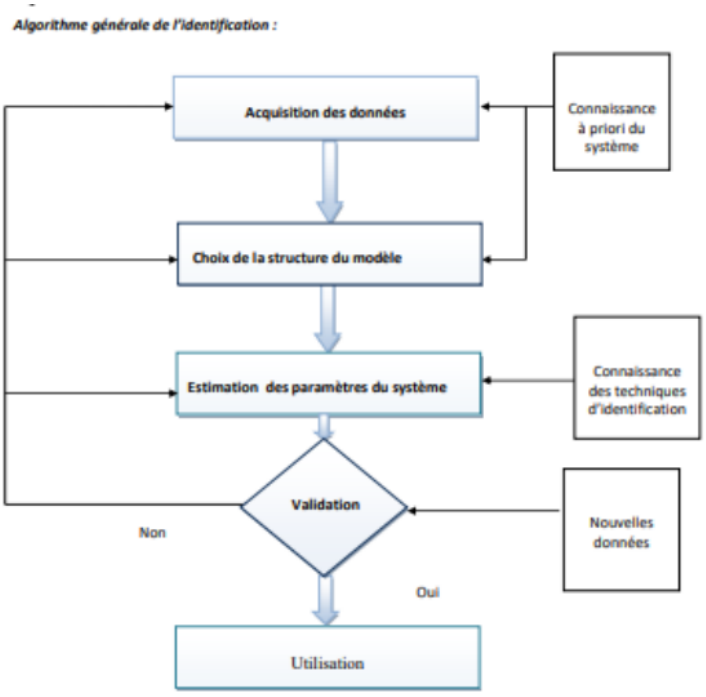


FIGURE 2.1 – organigramme de la procédure de l"identification itérative

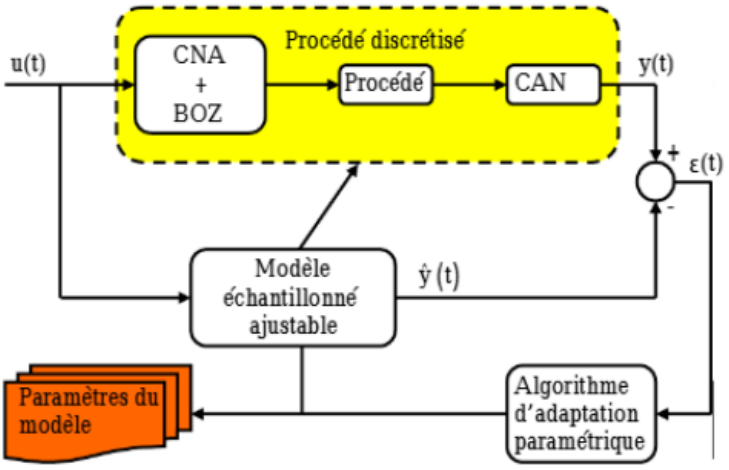


FIGURE 2.2 – dispositif expérimentale d'estimation parametrique d'un système échantillonné

Une démarche complète d'identification repose sur une succession d'étapes essentielles qui permettent de passer des données expérimentales à un modèle représentatif du système étudié. Cette démarche débute par la collecte des données d'entrée et de sortie, suivie par le choix d'une structure de modèle adaptée. Les paramètres de ce modèle sont ensuite estimés à partir des données disponibles. Enfin, une étape de validation est réalisée afin de vérifier la capacité du modèle à reproduire correctement le comportement du système réel.

Il est important de noter que ce processus n'est pas toujours linéaire. En effet, si les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants, il peut être nécessaire de revenir aux étapes précédentes afin d'améliorer le modèle, que ce soit en modifiant sa structure, en choisissant d'autres données ou en adoptant une autre méthode d'estimation. Ainsi, l'identification constitue une procédure itérative visant à obtenir un compromis optimal entre précision et simplicité du modèle.

Dans la pratique, les systèmes étudiés sont généralement de nature continue, tandis que les outils de traitement utilisés sont numériques. Il est donc nécessaire d'assurer une interface entre ces deux domaines afin de permettre l'exploitation des données dans un cadre discret.

Le signal d'entrée, initialement sous forme discrète, est d'abord converti en un signal analogique à l'aide d'un convertisseur numérique-analogique (CNA). Ce signal est ensuite maintenu constant entre deux instants d'échantillonnage grâce à un bloqueur d'ordre zéro (BOZ), ce qui permet d'obtenir un signal en escalier compatible avec le fonctionnement du système réel.

Après son application au système, la sortie obtenue est un signal continu. Afin de pouvoir être exploitée par les algorithmes d'identification, cette sortie est transformée en un signal discret à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (CAN).

Ce dispositif global permet ainsi de relier le monde continu du système physique au monde discret du traitement numérique. Il constitue une étape essentielle dans le processus d'identification, car il garantit la cohérence entre les données mesurées et leur utilisation dans les méthodes d'estimation.

Afin d'avoir une vision globale de cette démarche, les paragraphes suivants synthétisent brièvement les caractéristiques majeures de chaque étape de l'identification.

2.2.1 Acquisition des données

La première étape de l'identification consiste à collecter les données d'entrée et de sortie en suivant un protocole expérimental bien défini. Il s'agit principalement de choisir un signal d'excitation adapté, présentant une répartition fréquentielle couvrant lensemble de la bande passante du système à identifier. Toutefois, en pratique, des contraintes importantes limitent l'amplitude des signaux appliqués.

Parmi les signaux couramment utilisés, on retrouve la séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA), dont les propriétés fréquentielles sont proches de celles d'un bruit blanc. Ce type de signal, constitué d'impulsions rectangulaires d'amplitude constante, permet de maîtriser facilement l'amplitude maximale tout en assurant une excitation efficace du système.

2.2.2 Choix de la complexité du modèle

Pour choisir la structure d'un modèle, on s'appuie sur les connaissances préalables du système ainsi que sur l'intuition scientifique. Le modèle peut prendre plusieurs formes :

— Modèle continu ou discret
— Modèle linéaire ou non linéaire
— Modèle paramétrique ou non paramétrique
— Modèle déterministe ou stochastique

Remarque : La structure du modèle peut être appréhendée selon le niveau de connaissance a priori :

— **Boîte grise :** on utilise les lois physiques qui décrivent le système, mais certains paramètres restent inconnus et doivent être estimés.
— **Boîte noire :** on ne dispose d'aucune connaissance préalable ; le modèle est construit uniquement à partir des données expérimentales (mesures entrée/sortie).

2.2.3 Estimation des paramètres

Une fois la structure du modèle déterminée, l'étape suivante consiste à estimer ses paramètres. Toutefois, lorsque les signaux d'excitation sont de faible amplitude, les mesures peuvent être fortement affectées par le bruit, ce qui introduit des erreurs d'estimation appelées biais.

Il n'existe pas de méthode universelle garantissant des estimations non biaisées pour tous les types de bruit. Ainsi, il est nécessaire de formuler des hypothèses sur la nature du bruit, de choisir une méthode d'estimation appropriée et de vérifier la validité de ces hypothèses afin d'assurer la fiabilité des résultats obtenus.

2.2.4 Validation du modèle

La validation du modèle est l'étape qui consiste à vérifier si le modèle identifié représente correctement le système réel. Après l'estimation des paramètres, on teste le modèle à l'aide de nouvelles données différentes de celles utilisées pour l'identification. On compare alors les sorties du modèle avec les sorties mesurées du système réel et on analyse l'erreur obtenue.

Un modèle est considéré valide si cette erreur reste faible, aléatoire et si le modèle est capable de reproduire fidèlement le comportement du système pour différentes conditions de fonctionnement. Cette étape permet donc de s'assurer que le modèle est fiable et qu'il peut être utilisé pour la simulation, la prédiction ou la commande du système.

2.3 la méthode des moindres carres

2.3.1 Le modèle

Pour une représentation claire des bases de l'identification, nous nous limiterons à considérer le cas des modèles échantillonnés une entrée une sortie. L'entrée du système sera notée par $u(t)$, la sortie du système par $y(t)$, où t représente le temps discret normalisé tel que $t \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty\}$ avec T_e la période d'échantillonnage [6]. Nous supposons que la sortie du procédé peut être décrite par une série temporelle :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i) + w(t) \quad (2.1) \tag{2.1}$$

où a_i et b_i sont les paramètres du modèle, d est le retard pur en nombre de période d'échantillonnage et $w(t)$ représente l'effet du bruit de mesure (aussi appelé « bruit d'équation ») [6]. En utilisant l'opérateur retard q^{-1} ($y(t-1) = q^{-1}y(t)$), l'équation (2.1) peut s'écrire [6] :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w(t) \quad (2.2) \tag{2.2}$$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{nA} q^{-nA} = 1 + q^{-1}A^*(q^{-1}) \quad (2.3) \tag{2.3}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nB} q^{-nB} = 1 + q^{-1}B^*(q^{-1}) \quad (2.4) Sous une forme plus compacte et adapte aux algorithmes d'est \tag{2.4}$$

Où les structures vectorielles du modèle sont explicitées par [6] :

$$\theta^T = [a_1, \ldots, a_{n_A}, b_1, \ldots, b_{n_B}] \tag{2.5}$$

$$\phi^T(t-1) = [-y(t-1), \ldots, -y(t-n_A), u(t-d-1), \ldots, u(t-d-n_B)] \tag{2.6}$$

Dans cette formulation, θ désigne le vecteur des paramètres inconnus du système, tandis que $\phi(t)$ représente le vecteur des mesures passées, communément appelé le *régresseur*.

Si les paramètres nominaux du modèle étaient parfaitement déterminés, nous pourrions générer une *valeur prédite* (correspondant à la sortie d'un modèle de prédiction pure). Cette grandeur est

calculée sur la base des observations disponibles jusqu'à l'instant $t-1$ [6] :

$$\hat{y}(t|\theta) = \theta^T \phi(t-1) \tag{2.7}$$

2.3.2 Le problème d'identification

Le formalisme mathématique du problème d'identification se structure ainsi : Considérons que nous disposons d'un jeu de données d'entrées/sorties mesurées sur un horizon temporel fini de N échantillons ($1 \leq t \leq N$) [6] :

$$z^N = \{u(1), y(1), \ldots, u(N), y(N)\} = \{Y^T(N), U^T(N)\} \tag{2.8}$$

où l'historique des signaux est vectorisé sous la forme :

$$Y^T(N) = [y(N), y(N-1), \ldots, y(1)]$$

$$U^T(N) = [u(N), u(N-1), \ldots, u(1)]$$

Étant donné que le vecteur réel θ demeure inconnu en pratique, nous introduisons son estimation $\hat{\theta}$. Nous pouvons alors définir pour chaque valeur estimée une sortie prédite via un modèle de prédiction ajustable [6] :

$$\hat{y}(t|\hat{\theta}) = \hat{\theta}^T \phi(t-1) \tag{2.9}$$

Afin d'évaluer l'écart entre le comportement du procédé et notre modèle, nous définissons l'erreur de prédiction [6] :

$$\varepsilon(t|\hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t|\hat{\theta}) \tag{2.10}$$

Pour optimiser l'identification sur l'ensemble de l'horizon de données, nous introduisons un critère d'erreur quadratique moyen à minimiser [6] :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t|\hat{\theta}) \tag{2.11}$$

Ou sous une forme plus générale [6] :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} v^2(t|\hat{\theta}) \tag{2.12}$$

avec [6] :

$$v(t, \hat{\theta}) = L(q^{-1})\varepsilon(t, \hat{\theta}) \tag{2.13}$$

où $L(q^{-1})$ est un filtre linéaire. Alors, la valeur identifiée de θ est celle qui minimise le critère $J_N(\hat{\theta}, z^N)$, soit [6] :

$$\hat{\theta}_N^* = \arg\min_{\hat{\theta}} J_N(\hat{\theta}, z^N) \tag{2.14}$$

2.3.3 L'algorithme des moindres carrés

Considérons le critère défini précédemment. En utilisant les expressions de la sortie prédite et de l'erreur, celui-ci s'écrit [6] :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \left[y(t) - \hat{\theta}^T(N)\phi(t-1) \right]^2 \tag{2.15}$$

Le terme $\hat{\theta}^T(N)\phi(t-1)$ correspond à la prédiction de la sortie à l'instant t, basée sur l'estimation du vecteur des paramètres à l'instant N. La valeur $\hat{\theta}^*_N$ qui minimise ce critère s'obtient en annulant le gradient du critère par rapport au vecteur des paramètres [6] :

$$\frac{\partial J_N(\hat{\theta}, z^N)}{\partial \hat{\theta}} = 2\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y(t) - \hat{\theta}^T(N)\phi(t-1)\right]\phi(t-1) = 0 \tag{2.16}$$

En tenant compte de la propriété de commutativité du produit scalaire [6] :

$$\hat{\theta}^T(N)\phi(t-1)\phi(t-1) = \phi(t-1)\phi^T(t-1)\hat{\theta}(N) \tag{2.17}$$

On obtient l'équation normale suivante [6] :

$$\left[\sum_{t=1}^{N}\phi(t-1)\phi^T(t-1)\right]\hat{\theta}(N) = \sum_{t=1}^{N} y(t)\phi(t-1) \tag{2.18}$$

En multipliant à gauche les deux termes de cette équation par l'inverse de la matrice de corrélation, nous pourrons isoler $\hat{\theta}(N)$.

$$F(N) = \left[\sum_{t=1}^{N}\phi(t-1)\phi^T(t-1)\right]^{-1} \text{ [6]} \tag{2.19}$$

il résulte :

$$\hat{\theta}^*_N = \left[\sum_{t=1}^{N}\phi(t-1)\phi^T(t-1)\right]^{-1}\sum_{t=1}^{N}\phi(t-1)y(t) \text{ [6]} \tag{2.20}$$

$$= F(N)\sum_{t=1}^{N} y(t)\phi(t-1) \text{ [6]} \tag{2.21}$$

Le vecteur $\phi(t-1)$ intervenant dans l'expression de type (2.21) porte en général le nom de vecteur d'observations. [6]

Dans le cas particulier de l'algorithme des moindres carrés, le vecteur des observations correspond au vecteur des mesures. [6]

L'algorithme des moindres carrés peut être obtenu aussi de la façon suivante. Notons : [6]

$$Y(N) = \begin{bmatrix} y(N) \\ \vdots \\ y(1) \end{bmatrix} \text{ [6]} \tag{2.22}$$

$$\Phi(N-1) = \begin{bmatrix} \phi^T(N-1) \\ \vdots \\ \phi^T(0) \end{bmatrix} \text{ [6]} \tag{2.23}$$

($Y(N)$ et $\Phi(N-1)$ représentent l'ensemble des données disponible). [6]

Définissons l'équation d'erreur vectorielle : [6]

$$\varepsilon(N) = \begin{bmatrix} \varepsilon(N) \\ \vdots \\ \varepsilon(1) \end{bmatrix} = Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N) \quad (2.24)$$

Le critère des moindres carrés s'écrit alors :

$$J_N = \frac{1}{N}\varepsilon^T(N)\varepsilon(N) = \frac{1}{N}[Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N)]^T[Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N)] \quad (2.25)$$

En calculant le gradient du critère comme précédemment, on trouve pour la condition d'optimalité :

$$\Phi^T(N-1)[Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N)] = 0 \quad (2.26)$$

d'où :

$$\hat{\theta}^*_N = [\Phi^T(N-1)\Phi(N-1)]^{-1}\Phi^T(N-1)Y(N) \quad (2.27)$$

Observons que :

$$[\Phi^T(N-1)\Phi(N-1)]^{-1}\Phi^T(N-1)\Phi(N-1) = I \quad (2.28)$$

et donc la matrice :

$$[\Phi^T(N-1)\Phi(N-1)]^{-1}\Phi^T(N-1) \quad (2.29)$$

n'est autre chose que la « pseudo-inverse » de la matrice $\Phi(N-1)$. Cette matrice n'est carrée que si le nombre de mesures est supérieur à la dimension du vecteur $\hat{\theta}$, ce qui est en général le cas. On peut donc interpréter l'estimateur des moindres carrés comme la solution d'un système d'équations linéaires avec plus d'équations que d'inconnues [6].

Observons aussi que la condition (2.26) peut être interprétée comme la recherche d'une projection linéaire orthogonale de $Y(N)$ dans l'espace défini par $\Phi(N-1)$, la projection étant $\hat{Y}(n) = \Phi(N-1)\hat{\theta}$ (combinaison linéaire des composantes de $\Phi(N-1)$) et l'erreur de projection $[Y(N) - \Phi(N-1)\hat{\theta}(N)]$ étant orthogonale à $\Phi(N-1)$ [6].

2.3.4 Effet du bruit $w(t)$

Analysons maintenant l'effet du bruit $w(t)$. En remplaçant dans l'expression de la sortie $y(t)$, par (2.5) on obtient :

$$\hat{\theta}(N) = \theta + \left[\sum_{t=1}^{N} \phi(t-1)\phi^T(t-1)\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{N} \phi(t-1)w(t)\right] \quad (2.30)$$

En multipliant et en divisant par N le deuxième terme du membre de droite, on obtient :

$$\hat{\theta}(N) = \theta + \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \phi(t-1)\phi^T(t-1)\right]^{-1} \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \phi(t-1)w(t)\right] \quad (2.31)$$

Observons que si $N \to \infty$ et sous l'hypothèse que $\phi(t-1)$ et $w(t)$ sont ergodiques, $\hat{\theta}$ va être une variable aléatoire stochastique et $\lim_{N\to\infty} \hat{\theta}(N) = E\hat{\theta}$ [6]. En examinant l'équation (2.31), comme $\lim_{N\to\infty} \sum_{t=1}^{N} \phi(t-1)\phi^{\mathsf{T}}(t-1)$ est supposée non singulière, il résulte que la condition pour obtenir une estimation asymptotiquement non biaisée est :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \phi(t-1)w(t) = E\left[\phi(t-1)w(t)\right] = 0 \tag{2.32}$$

Donc, on obtiendra des estimations paramétriques non biaisées uniquement si $\phi(t-1)$ et $w(t)$ sont non corrélés. Malheureusement, ceci n'a lieu que dans le cas où $w(t) = e(t)$, c'est-à-dire un bruit blanc. En effet, dans tous les autres cas, la propriété ci-dessus ne sera pas satisfaite, comme démontré ci-dessous.

En tenant compte des équations (2.1) et (2.7) et en supposant que $u(t)$ est indépendant de $w(t)$, il en résulte que $\phi(t-1)$ dépend de $w(t-1), w(t-2), \ldots, w(t-n_s)$.

$$\phi(t-1) = f(w(t-1), \ldots, w(t-n), \ldots) \tag{2.33}$$

La condition devient alors :

$$E\left[w(t-i)w(t)\right] = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n_s \tag{2.34}$$

et ce n'est qu'un bruit blanc qui possède cette propriété.

Ceci indique clairement que l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés conduit à une estimation non biaisée uniquement dans le cas très peu réaliste où $w(t) = \epsilon(t)$, c'est-à-dire un bruit blanc.

Le fait que l'algorithme des moindres carrés produise en général des estimations paramétriques biaisées constitue une restriction très sérieuse quant à son utilisation en pratique. D'autres algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème. Ces algorithmes peuvent être interprétés comme des modifications de l'algorithme des moindres carrés.

Nous indiquons ci-dessous les idées de base permettant de développer des algorithmes assurant une estimation paramétrique asymptotiquement non biaisée.

Observons tout d'abord que pour $\hat{\theta} = \theta$, l'erreur de prédiction est :

$$\epsilon(t \mid \theta) = y(t) - \hat{y}(t) = w(t) \tag{2.35}$$

Il résulte alors de l'équation (1.36) que pour avoir $\hat{\theta}(N) = \theta$ quand $N \to \infty$, une condition nécessaire doit être satisfaite pour $\hat{\theta} = \theta$:

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \phi(t-1,\theta)\epsilon(t,\theta)\right] = E\left[\phi(t-1,\theta)\epsilon(t,\theta)\right] = 0 \tag{2.36}$$

Pour obtenir une estimation non biaisée, il faut que ces conditions seront vérifiées.

— l'erreur de prédiction $\varepsilon(t,\theta)$ soit un bruit blanc pour $\hat{\theta} = \theta$,

— le vecteur des observations $\phi(t-1,\theta)$ et l'erreur de prédiction $\varepsilon(t,\theta)$ soient non corrélés pour $\hat{\theta} = \theta$.

Ces remarques conduisent aux deux grandes familles de méthodes qui ont été développées pour différents modèles de bruit, à savoir :

— méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction (type I),

— méthodes basées sur la décorrélation entre le vecteur des observations et l'erreur de prédiction (type II).

Toutes ces méthodes conduisent à la modification du prédicteur des moindres carrés, du choix des variables d'observations et du critère à minimiser.

2.3.5 Technique de minimisation du critère

Une fois la structure du prédicteur et le critère d'erreur définis, il s'agit de développer un algorithme qui recherche la valeur de $\hat{\theta}$ minimisant le critère choisi.

On distingue deux classes d'algorithmes :

1. **Algorithmes « hors ligne » ou « par paquets » ou « non récursifs »**. Dans ce cas, on suppose que l'ensemble des mesures entrée/sortie z^N est disponible et que l'on peut l'utiliser globalement ;
2. **Algorithmes « en ligne » ou « récursifs »**. Les paramètres estimés sont optimisés progressivement en utilisant chaque fois une seule paire de données entrées/sorties.

Les algorithmes récursifs présentent un certain nombre d'avantages :

— une estimation en ligne du modèle peut être obtenue au fur et à mesure que le système évolue (alors que dans le cas des algorithmes hors ligne, il faut attendre la collecte de l'ensemble des mesures avant d'obtenir une estimation du modèle). Ils sont donc adaptés à l'identification en temps réel .

— utilisation d'une taille mémoire réduite, car ils traitent une paire de données à la fois .

— le modèle estimé en ligne contient toutes les informations contenues dans les données entrée/sortie passées .

— avec des modifications mineures des algorithmes, il devient possible de suivre les évolutions des systèmes lentement variables dans le temps.

— ils peuvent être utilisés dans des techniques de diagnostic.

L'algorithme d'estimation des moindres carrés donné par l'équation (2.21) est un algorithme non récursif.

2.3.6 Moindres carrés récursifs

Pour l'algorithme des moindres carrés défini par le critère (2.12), la solution est donnée par les équations (2.20) et (2.21). Cet algorithme, comme indiqué précédemment, n'est pas récursif. Il suppose la collecte de l'ensemble des données entrées/sorties sur l'horizon N avant de calculer l'estimation de θ.

Pour obtenir un algorithme récursif, on considère l'estimation $\hat{\theta}(t)$ et $\hat{\theta}(t+1)$ des équations (2.20) et (2.21) on obtient :

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{i=1}^{N} \phi(i-1)\phi^{\mathsf{T}}(i-1)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} y(i)\phi(i-1) = F(t)\sum_{i=1}^{N} y(i)\phi(i-1) \tag{2.37}$$

où :

$$F^{-1}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi(i-1)\phi^{\mathsf{T}}(i-1) \tag{2.38}$$

et :

$$\hat{\theta}(t+1) = F(t+1)\sum_{i=1}^{N} y(i)\phi(i-1) \tag{2.39}$$

$$F^{-1}(t+1) = \sum_{i=1}^{N} \phi(i-1)\phi^{\mathsf{T}}(i-1) = F^{-1}(t) + \phi(t)\phi^{\mathsf{T}}(t) \tag{2.40}$$

D'après les équations (2.37), (2.38), (2.39), (2.40) on a :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\epsilon^0(t+1) \tag{2.41}$$

où :

$$\epsilon^0(t+1) = \epsilon(t+1, \hat{\theta}(t)) = y(t) - \hat{\theta}^{\mathsf{T}}(t)\phi(t) \tag{2.42}$$

est l'erreur de prédiction *a priori*.

L'algorithme d'estimation donné par l'équation (2.40) a une forme récursive. Dans l'équation (2.41), $F(t+1)$ est un gain d'adaptation variable dans le temps. Pour obtenir une formule récursive pour $F(t+1)$ à partir de la formule récursive pour $F^{-1}(t+1)$ donnée dans l'équation (2.40), on utilise le lemme d'inversion matricielle.

2.3.7 Choix de la séquence d'entrée pour l'identification

Le problème

La convergence vers zéro de l'erreur de prédiction $\epsilon(t)$ n'implique pas dans tous les cas la convergence des paramètres estimés du modèle vers les vrais paramètres.

Pour les systèmes de la forme générale :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(t-d-i) \tag{2.43}$$

pour lesquels le nombre total de paramètres à identifier est : nombre de paramètres $= n_a + n_b$.

Dans ce cas, on peut choisir $u(t)$ comme une somme de p sinusoïdes de fréquences distinctes :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{p} \sin({}_iT_e t) \tag{2.44}$$

et la valeur de p permettant d'identifier correctement tous les paramètres est donnée par :

$$\begin{cases} n_a + n_b \text{ pair} & p \geq \frac{n_a+n_b}{2} \\ n_a + n_b \text{ impair} & p \geq \frac{n_a+n_b+1}{2} \end{cases} \tag{2.45}$$

Un signal d'excitation permettant d'identifier n paramètres est appelé un signal d'excitation persistante d'ordre n. Les conditions (2.45) sont des conditions d'excitation persistante.

En d'autres termes, pour bien identifier, il faut appliquer une entrée « riche » en fréquences.

Théorème : $u(t)$ est un signal d'excitation persistante d'ordre n si :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^{n} L(q^{-1})u(t) \right]^2 > 0 \tag{2.46}$$

pour tout polynôme non identiquement nul $L(q^{-1})$ d'ordre $n-1$.

Donc une somme de $n/2$ sinusoïdes est un signal d'excitation persistante d'ordre n.

En utilisant le théorème de Parseval, l'équation (2.46) devient :

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{h} \left[L(q^{-1})u(t_i) \right]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| L(e^j) \right|^2 \phi_u() \, d > 0 \tag{2.47}$$

où $\phi_u(w)$ est la densité spectrale du signal d'excitation.

Un signal qui a un spectre non nul dans tout l'intervalle $0 \leq f \leq 0.5f_c$ est un signal d'excitation persistante quel que soit le nombre de paramètres à estimer.

Pour avoir toujours un signal d'excitation persistante quel que soit le nombre de paramètres à estimer, on peut considérer l'utilisation d'un bruit blanc discret ayant une densité spectrale uniforme comprise entre 0 et $0.5f_c$. Malheureusement, une séquence de bruit blanc discret peut avoir certains échantillons d'amplitude très grande qui ne sont pas compatibles avec le protocole d'acquisition. Pour cette raison, on utilise en règle générale des séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA). Les SBPA sont des successions d'impulsions rectangulaires d'amplitude constante mais de durée variable aléatoirement et constituent une très bonne approximation du bruit blanc discret. On peut aussi utiliser des successions d'impulsions rectangulaires avec une fréquence variable continuellement (entre une fréquence basse et une fréquence haute).

2.3.8 Validation du modèle identifié

Pour illustrer ce concept, nous considérons l'identification d'un modèle avec l'algorithme des moindres carrés.

Si l'ordre du modèle estimé correspond à la complexité du modèle représentatif du système à identifier et si le bruit $w(t)$ dans l'équation (2.1) de la mesure est un bruit blanc ($w(t) = e(t)$), alors on sait que l'estimation des paramètres est correcte et l'erreur de prédiction nominale (pour $\hat{\theta} = \theta$) est un bruit blanc.

La validation du modèle va consister à vérifier que l'erreur de prédiction résiduelle est effectivement un bruit blanc.

Une fois qu'un vecteur de paramètres a été estimé par l'algorithme des moindres carrés, on construit un prédicteur fixe des moindres carrés :

$$\hat{y}(t \mid \hat{\theta}_n^*) = \hat{\theta}_n^* \, \phi(t-1) \tag{2.48}$$

On engendre une séquence de sortie pour un jeu de signaux d'entrée et on calcule la séquence d'erreurs résiduelles correspondantes.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t|\hat{\theta}_N) = y(t) - \hat{y}(t|\hat{\theta}_N), \quad 1 \leq t \leq N \tag{2.49}$$

Si l'ordre du modèle a été choisi correctement et si le bruit était blanc, alors les paramètres ont été estimés correctement et l'erreur de prédiction résiduelle sera un bruit blanc.

Par contre, si l'erreur de prédiction résiduelle n'est pas un bruit blanc, on peut conclure que l'hypothèse faite sur le bruit n'est pas la bonne. En pratique, c'est ce deuxième aspect qui est le plus important.

Il convient donc, pour la validation d'un modèle identifié par les moindres carrés, de faire un test de blancheur sur l'erreur résiduelle [6].

2.4 Méthode d'estimation paramétrique de modèle à temps continu

2.4.1 Introduction

La modélisation mathématique des systèmes dynamiques à partir de mesures expérimentales et de connaissances préalables constitue un pilier fondamental de l'automatique. Ces représentations, souvent qualifiées de modèles « boîte noire » lorsqu'elles ne s'appuient pas sur des lois physiques

explicites, ont pour but de reproduire fidèlement le comportement de processus réels afin de faciliter leur simulation, leur surveillance ou la synthèse d'algorithmes de commande.

Historiquement, l'essor de l'informatique industrielle durant les dernières décennies du XXe siècle a largement favorisé le développement et l'usage des approches à temps discret. La prédominance de ces méthodes s'expliquait principalement par la nature échantillonnée des données collectées et la simplicité d'implantation des algorithmes de calcul sur des calculateurs numériques. L'identification directe de structures à temps continu est ainsi restée temporairement au second plan, souvent perçue à tort comme une approche obsolète ou purement théorique.

Pourtant, la majorité des systèmes physiques réels (mécaniques, thermiques ou électriques) évoluent de manière intrinsèquement continue et sont naturellement régis par des équations différentielles. Pour identifier de tels systèmes, deux stratégies principales coexistent dans le domaine temporel :

— **L'approche indirecte :** Elle consiste à estimer dans un premier temps un modèle à temps discret à l'aide de techniques conventionnelles, avant de le convertir en un modèle à temps continu. Bien que ses propriétés statistiques soient bien documentées, cette méthode requiert fréquemment des procédures d'optimisation itératives lourdes et très sensibles à l'initialisation, sans garantie d'atteindre l'optimum global.

— **L'approche directe :** Elle vise à estimer directement les paramètres des équations différentielles à partir des signaux d'entrée et de sortie échantillonnés. Cette approche se distingue par sa robustesse numérique, sa parcimonie paramétrique et sa capacité à s'adapter naturellement aux cadences d'échantillonnage rapides ou irrégulières [7]

Aujourd'hui parvenue à maturité, l'identification directe à temps continu s'impose comme une alternative performante et complémentaire aux outils discrets traditionnels. L'objectif de ce travail est de mettre en œuvre ces méthodes d'estimation paramétrique, en analysant notamment la méthode des **Filtres de Variables d'État (FVE)** pour le pré-filtrage des données et la reconstruction des dérivées, ainsi que ses avantages pratiques à travers différents contextes d'application [**?**].

2.4.2 Formulation du problème d'identification

Considérons un système mono-entrée mono-sortie (SISO), linéaire, à temps continu, causal et invariant dans le temps [7]. En supposant des conditions initiales quelconques, ce système peut être modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme [7] :

$$a_0^o \hat{y}(t) + a_1^o \hat{y}^{(1)}(t) + \cdots + \hat{y}^{(n_a)}(t) = b_0^o u(t) + b_1^o u^{(1)}(t) + \cdots + b_{n_b}^o u^{(n_b)}(t) \tag{2.50}$$

où $u(t)$ représente le signal d'entrée, $\hat{y}(t)$ désigne la réponse non bruitée du système, et $x^{(i)}(t)$ exprime la dérivée d'ordre i par rapport au temps du signal continu $x(t)$ [7].

Cette relation temporelle fondamentale peut également s'écrire sous une forme compacte en utilisant le formalisme des fonctions de transfert [7] :

$$\hat{y}(t) = G_o(p)u(t) = \frac{B_o(p)}{A_o(p)}u(t) \tag{2.51}$$

Ici, p représente l'opérateur différentiel défini par $px(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ [7]. Les polynômes caractéristiques du système vrai, $A_o(p)$ et $B_o(p)$, sont définis de la manière suivante [7] :

$$A_o(p) = a_0^o + a_1^o p + \cdots + p^{n_a} \tag{2.52}$$

$$B_o(p) = b_0^o + b_1^o p + \cdots + b_{n_b}^o p^{n_b} \tag{2.53}$$

où les ordres polynomiaux respectent la condition de causalité $n_a \geq n_b$ [7]. Les polynômes $A_o(p)$ et $B_o(p)$ sont supposés premiers entre eux, et le système étudié est considéré comme asymptotiquement stable [7].

Dans un contexte expérimental réel, les mesures sont inévitablement corrompues par des perturbations extérieures. En admettant que ces dernières agissent de façon additive sur la sortie non bruitée du procédé, le système physique réel $\mathcal{S}$ est alors décrit par la relation [7] :

$$\mathcal{S} : y(t) = G_o(p)u(t) + H_o(p)e_o(t) \tag{2.54}$$

où $y(t)$ est la sortie bruitée mesurée, $e_o(t)$ est un bruit blanc à temps continu à moyenne nulle, et $H_o(p)$ représente une fonction rationnelle décrivant le modèle de bruit sur la sortie [7]. On suppose que ce terme de perturbation est totalement décorrélé du signal d'entrée $u(t)$ et que le système évolue en boucle ouverte [7].

Bien que le comportement physique intrinsèque du système soit continu, les outils d'acquisition modernes fournissent des signaux échantillonnés à des instants discrets t_k [7]. L'objectif de l'identification consiste donc à exploiter un ensemble fini de N observations d'entrée/sortie $Z_N = \{u(t_k); y(t_k)\}_{k=1}^{N}$ afin d'estimer le vecteur des paramètres inconnus du modèle, noté θ [7] :

$$\theta = [a_{n_a-1}, \ldots, a_0, b_{n_b}, \ldots, b_0]^T \tag{2.55}$$

Le modèle mathématique recherché $\mathcal{M}$ prend finalement la forme discrétisée suivante [7] :

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \hat{y}(t_k) = G(p,\theta)u(t_k) \\ y(t_k) = \hat{y}(t_k) + v(t_k) \end{cases} \tag{2.56}$$

où $\hat{y}(t_k)$ est la sortie estimée par le modèle, $v(t_k)$ représente le bruit de mesure modélisé à temps discret, et $G(p,\theta)$ correspond à la fonction de transfert à estimer [7] :

$$G(p,\theta) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_{n_b} p^{n_b}}{a_0 + a_1 p + \cdots + p^{n_a}} \tag{2.57}$$

Une fois ce cadre théorique posé, le problème majeur de l'identification directe réside dans l'impossibilité de dériver directement les signaux numériques bruités, rendant indispensable l'introduction de méthodes d'estimation paramétrique dédiées.

L'intérêt essentiel des approches fondées sur l'erreur d'équation réside dans la formulation d'une solution explicite qui conduit à un optimum unique . Toutefois, ces techniques exigent la connaissance des dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie . Comme il est numériquement impossible de dériver directement des signaux de mesure échantillonnés et bruités, la méthode des filtres de variables d'état (FVE) constitue l'approche historique et conventionnelle pour contourner ce problème inverse [7].

2.4.3 Approche par filtrage linéaire des variables d'état (FVE)

La méthode des filtres de variables d'état repose sur la minimisation de l'énergie de l'erreur d'équation . Son principe fondamental se décompose en deux étapes successives :

1. L'application d'un filtrage linéaire aux données échantillonnées afin de reconstruire les dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie .
2. L'estimation paramétrique proprement dite à l'aide de techniques de régression linéaire de type moindres carrés [7].

2.4.3.1 Filtrage linéaire

Considérons l'équation différentielle du modèle recherché dans un contexte idéal non bruité (2.7). L'application de la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, conduit à l'expression suivante [7] :

$$s^{n_a}\hat{Y}(s) + \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i s^i \hat{Y}(s) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i s^i U(s) \tag{2.58}$$

où s représente la variable de Laplace, tandis que $\hat{Y}(s)$ et $U(s)$ désignent respectivement les transformées de Laplace de $\hat{y}(t)$ et $u(t)$. Pour éviter la dérivation directe, un filtre linéaire de fonction de transfert $F(s) = \frac{1}{E(s)}$ est appliqué aux deux membres de la relation (51)[7] :

$$\frac{s^{n_a}}{E(s)}\hat{Y}(s) + \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i \frac{s^i}{E(s)}\hat{Y}(s) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i \frac{s^i}{E(s)} U(s) \tag{2.59}$$

Le filtre des variables d'état d'ordre minimal ($n = n_a$) prend classiquement la forme d'un filtre de Butterworth ou d'un filtre passe-bas standard :

$$F(s) = \frac{1}{E(s)} = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{n_a} \tag{2.60}$$

où λ représente la pulsation de coupure du filtre, qui constitue l'hyper-paramètre ajustable de la méthode . En définissant un ensemble de filtres $L_j(s)$ pour $j = 0, 1, \ldots, n_a$ sous la forme :

$$L_j(s) = \frac{s^j}{E(s)} = \frac{\lambda^{n_a} s^j}{(s+\lambda)^{n_a}} \tag{2.61}$$

on peut transposer cette relation dans le domaine temporel par le biais de l'opérateur de convolution $*$: Dans le domaine temporel, cette équation devient :

$$[L_{n_a}\hat{y}](t) + a_{n_a-1}[L_{n_a-1}\hat{y}](t) + \cdots + a_0[L_0\hat{y}](t) = b_{n_b}[L_{n_b}u](t) + \cdots + b_0[L_0u](t) \tag{2.62}$$

où :

$$\begin{cases} [L_j\hat{y}](t) = [l_j * \hat{y}](t) \\ [L_ju](t) = [l_j * u](t) \end{cases} \tag{2.63}$$

et $*$ représente l'opérateur de convolution. Les sorties des filtres $[L_j\hat{y}](t)$ et $[L_ju](t)$ fournissent ainsi une estimation des dérivées des signaux d'entrée/sortie dans la bande fréquentielle d'intérêt (plage de fréquence dans laquelle on recherche l'adéquation entre le système et le modèle). Ces estimées peuvent ensuite être utilisées au sein de techniques de régression linéaire [7].

A l'instant $t = t_k$, en considérant la présence du bruit additif sur la sortie, l'équation (13)devient [7] :

$$[L_{n_a}y](t_k)+a_{n_a-1}[L_{n_a-1}y](t_k)+\cdots+a_0[L_0y](t_k) = b_{n_b}[L_{n_b}u](t_k)+\cdots+b_0[L_0u](t_k)+\epsilon_{EE}(t_k,\theta) \tag{2.64}$$

où $\epsilon_{EE}(t_k, \theta)$ représente l'erreur d'équation. L'équation peut également se réécrire sous une forme standard de régression linéaire [7] :

$$[L_{n_a}y](t_k) = \varphi^T(t_k)\theta + \epsilon_{EE}(t_k,\theta) \tag{2.65}$$

où $\varphi(t_k)$ le vecteur de régression prend la forme [7] :

$$\varphi^T(t_k) = \begin{bmatrix} -[L_{n_a-1}y](t_k) & \dots & -[L_0 y](t_k) & [L_{n_b}u](t_k) & \dots & [L_0 u](t_k) \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

et θ est le vecteur de paramètres.

2.4.3.2 Analyse de l'estimateur des moindres carrés combiné au FVE

L'estimée $\hat{\theta}$ du vecteur des paramètres est le vecteur minimisant [7] :

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} V_N(\theta, Z_N) \tag{2.67}$$

où V_N la fonction de coût, dépend de l'ensemble des vecteurs de paramètres admissibles et de l'ensemble Z_N des données [7] :

$$V_N(\theta, Z_N) = \sum_{k=1}^{N} \epsilon_{EE}^2(t_k, \theta) \tag{2.68}$$

A partir de N échantillons des signaux d'entrée/sortie, l'estimateur des moindres carrés (mc)/FVE est alors donné par [7] :

$$\hat{\theta}_{mc} = \left[\sum_{k=1}^{N} \varphi(t_k)\varphi^T(t_k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \varphi(t_k)[L_{n_a} y](t_k) \tag{2.69}$$

2.4.3.3 Estimateur de la variable instrumentale / FVE

L'approche s'appuyant sur la variable instrumentale constitue une extension classique de la méthode des moindres carrés [7]. Elle présente l'avantage majeur de conserver une formulation mathématique propre aux techniques de régression linéaire.

Le principe fondamental de cette méthode réside dans l'introduction d'un vecteur d'instruments, noté $\zeta(t_k)$. Les composantes de ce vecteur, appelées variables instrumentales, doivent être choisies de façon à présenter une forte corrélation avec les éléments du vecteur de régression $\varphi(t_k)$, tout en restant totalement indépendantes (décorrélées) du bruit additif de sortie $v(t_k)$. Les conditions stochastiques impératives auxquelles doit satisfaire ce vecteur de variables instrumentales sont ainsi résumées par :

$$\begin{cases} E\left[\zeta(t_k)\varphi^T(t_k)\right] & \text{est non singulière,} \\ E\left[\zeta(t_k)v(t_k)\right] = 0. \end{cases} \tag{2.70}$$

Plusieurs solutions ont été proposées. Parmi celles-ci, l'estimateur de la variable instrumentale à modèle auxiliaire est particulièrement simple à mettre en œuvre. Dans ce cas précis, le vecteur de variables instrumentales est construit de la manière suivante :

$$\zeta^T(t_k) = F(p) \begin{bmatrix} -\dot{y}^{(n_a-1)}(t_k, \hat{\theta}_{mc}) & \dots & -\dot{y}^{(0)}(t_k, \hat{\theta}_{mc}) & u^{(n_b)}(t_k) & \dots & u^{(0)}(t_k) \end{bmatrix}, \tag{2.71}$$

où $F(p)$ correspond au filtre des variables d'état défini par l'équation (11) et $\dot{y}(t_k, \hat{\theta}_{mc})$ désigne la sortie d'un modèle auxiliaire obtenu à partir de l'estimation par moindres carrés / FVE :

$$\hat{y}(t_k, \hat{\theta}_{mc}) = G(p, \hat{\theta}_{mc})u(t_k). \tag{2.72}$$

En prenant en compte le formalisme de filtrage $F(p)$, ce vecteur d'instruments (60) admet la

formulation alternative directe suivante [7] :

$$\zeta^T(t_k) = \begin{bmatrix} -[L_{n_a-1}\hat{y}](t_k, \hat{\theta}_{mc}) & \dots & -[L_0\hat{y}](t_k, \hat{\theta}_{mc}) & [L_{n_b}u](t_k) & \dots & [L_0u](t_k) \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

Par conséquent, la solution analytique finale de l'estimateur de la variable instrumentale couplé au filtre de variables d'état est explicitée par la relation suivante [7] :

$$\hat{\theta}_{vi} = \left[\sum_{k=1}^{N} \zeta(t_k)\varphi^T(t_k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \zeta(t_k)[L_{n_a}y](t_k) \tag{2.74}$$

Sur le plan stochastique, cet estimateur s'avère asymptotiquement sans biais et convergent. Néanmoins, son utilité pratique reste prépondérante en identification car il offre une solution initiale fiable pour initialiser les structures algorithmiques itératives non linéaires sous-jacentes [7].

***Remarques méthodologiques sur l'approche FVE** L'analyse de cette technique d'identification met en évidence plusieurs propriétés théoriques et contraintes d'implantation importantes [7] :

- **Prise en compte des conditions initiales :** L'établissement des relations précédentes repose sur l'hypothèse d'un procédé initialement au repos. Lorsque le système est soumis à des régimes transitoires non nuls à l'origine, des biais d'estimation peuvent se manifester. Une solution classique consiste à étendre la dimension du vecteur de paramètres θ afin d'estimer simultanément les états initiaux à temps continu du système [7].
- **Caractère impératif du traitement parallèle :** Contrairement à l'identification de modèles à temps discret, l'application d'un pré-filtrage simultané sur les signaux d'entrée et de sortie constitue une phase structurelle obligatoire en temps continu. Ce processus remplit un double rôle algorithmique : il permet la reconstruction stable des dérivées temporelles dans la plage de fréquences utiles, tout en réduisant la variance de l'estimateur par atténuation des bruits haute fréquence [7].
- **Sélection et impact de l'hyper-paramètre λ :** La pulsation de coupure du filtre constitue la variable de réglage fondamentale du protocole FVE. De manière intuitive, ce filtre passe-bas doit être calibré de façon à couvrir la dynamique fréquentielle globale du procédé à identifier. Des approches d'optimisation basées sur des boucles itératives permettent d'automatiser le choix de cette constante [7].
- **Contraintes d'intégration numérique :** L'implantation pratique des filtres requiert l'usage de solveurs d'équations différentielles ou d'algorithmes de discrétisation par espace d'état. Ce processus introduit des approximations numériques qui peuvent générer des erreurs de simulation. Ces perturbations sont minimisées en sélectionnant une période d'échantillonnage T_s suffisamment faible, ou en exploitant des solveurs spécifiques adaptés aux pas variables [7].
- **Nature non récursive et interprétations :** Les algorithmes développés ici présentent une structure non récursive (traitement par lots), bien que des versions récursives temps réel soient documentées. Enfin, d'un point de vue mathématique, la technique FVE s'interprète rigoureusement comme une méthode de régularisation ou une transformation linéaire des données expérimentales [7].

2.4.4 Estimateur optimal de la variable instrumentale (SRIVC)

Pour s'affranchir des limitations liées au choix empirique de la pulsation de coupure du filtre et tendre vers des performances théoriques optimales, la méthode de la variable instrumentale raffinée simplifiée (connu sous l'acronyme anglo-saxon *srivc*) est introduite. Cet estimateur possède la propriété

remarquable d'être asymptotiquement convergent, sans biais et à variance minimale [7].

Les conditions optimales de mise en œuvre de cette approche requièrent la validation des configurations structurelles suivantes [7] :

$$\begin{cases} F^{opt}(p) = \dfrac{1}{H_o(p)A_o(p)} \\ \zeta^{opt}(t_k) = F^{opt}(p)\left[-\hat{y}^{(n_a-1)}(t_k) \quad \dots \quad -\hat{y}^{(0)}(t_k) \quad u^{(n_b)}(t_k) \quad \dots \quad u^{(0)}(t_k)\right] \end{cases} \tag{2.75}$$

Dans ce formalisme, le terme $H_o(p)$ modélise la dynamique du bruit du système, tandis que $A_o(p)$ représente le polynôme caractéristique du dénominateur de la fonction de transfert vraie du procédé. La variable $\hat{y}(t_k)$ désigne quant à elle la réponse théorique non bruitée du système évaluée à l'instant d'échantillonnage t_k [7].

L'évaluation de cet estimateur idéal nécessite théoriquement la connaissance a priori de plusieurs fonctions caractéristiques du procédé à identifier. En pratique, ces entités étant inconnues, l'optimalité ne peut être atteinte de manière directe. Des solutions d'approximation exploitant des algorithmes itératifs à plusieurs étapes sont alors indispensables pour converger vers la solution [7].

D'un point de vue stochastique, en adoptant l'hypothèse d'un bruit additif de type blanc gaussien (ce qui implique un modèle de bruit $H_o(p) = 1$ et une perturbation e_o gaussienne), cette approche définit un pré-filtre adaptatif qui converge vers la solution optimale. Cette méthode s'inscrit comme une extension logique et rigoureuse de l'estimateur classique de la variable instrumentale appliqué au FVE. Initialement formalisé pour le domaine de l'identification des modèles paramétriques à temps discret, ce concept a été transposé avec succès pour estimer de façon automatique et optimale les paramètres du filtre $F(p)$ en temps continu [7].

Le raisonnement mathématique sous-jacent repose sur l'analyse de l'erreur de sortie, notée $\varepsilon(t)$, définie par la relation temporelle suivante [7] :

$$\varepsilon(t) = y(t) - \frac{B(p)}{A(p)}u(t) \tag{2.76}$$

La minimisation d'un critère quadratique basé directement sur cette erreur de sortie $\varepsilon(t)$ mène classiquement à l'usage de techniques d'optimisation non linéaires complexes. Néanmoins, en factorisant ce terme par l'opérateur $1/A(p)$, il devient possible de transformer cette erreur de sortie en une erreur d'équation filtrée, ouvrant la voie à une résolution itérative par moindres carrés linéaires [7].

Puisque les opérateurs mathématiques commutent dans cette configuration linéaire par rapport aux entrées, l'expression de l'erreur de sortie peut être remaniée sous la forme suivante [7] :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{A(p)}\left(A(p)y(t) - B(p)u(t)\right), \tag{2.77}$$

$$= A(p)\left(\frac{1}{A(p)}y(t)\right) - B(p)\left(\frac{1}{A(p)}u(t)\right). \tag{2.78}$$

En transposant cette relation dans le domaine temporel, l'équation prend la configuration suivante [7] :

$$\varepsilon(t) = [L_{n_a}y](t) + a_{n_a-1}[L_{n_a-1}y](t) + \cdots + a_0[L_0y](t) - b_{n_b}[L_{n_b}u](t) - \cdots - b_0[L_0u](t), \tag{2.79}$$

où les composantes filtrées résultent des produits de convolution ci-dessous [7] :

$$\begin{cases} [L_jy](t) = [l_j * y](t), \\ [L_ju](t) = [l_j * u](t), \end{cases} \tag{2.80}$$

tandis que la famille de filtres associés se définit dorénavant par l'opérateur [7] :

$$L_j(p) = \frac{p^j}{A(p)}. \tag{2.81}$$

À l'instant discret $t = t_k$, cette relation (77) se formalise sous l'aspect d'une structure de régression linéaire standard [7] :

$$[L_{n_a} y](t_k) = \varphi^T(t_k)\theta + \varepsilon(t_k), \tag{2.82}$$

au sein de laquelle l'organisation du vecteur de régression est explicitée par [7] :

$$\varphi^T(t_k) = \begin{bmatrix} -[L_{n_a-1} y](t_k) & \dots & -[L_0 y](t_k) \\ [L_{n_b} u](t_k) & \dots & [L_0 u](t_k) \end{bmatrix}, \tag{2.83}$$

et où le vecteur des paramètres inconnus θ correspond aux définitions posées par l'équation (55).

L'opération consistant à transformer cette erreur de sortie en une formulation d'erreur d'équation requiert la connaissance du polynôme $A(p)$, entité qui demeure a priori indéterminée. Par conséquent, un protocole algorithmique de nature itérative est mis en œuvre afin d'ajuster de manière séquentielle le vecteur d'estimation de la variable instrumentale $\hat{\theta}^i$, en prenant pour point de départ une configuration initiale $A(p, \hat{\theta}^0)$ jusqu'à convergence complète du processus.

La séquence de calcul de cet estimateur de la variable instrumentale optimale *srivc* se déroule selon les étapes suivantes [7] :

1. **Initialisation :** Déterminer un vecteur initial de paramètres, noté $\hat{\theta}^0$ [7].
2. **Boucle itérative :** Pour chaque indice $i = 0, \dots, N_{Iter} - 1$ [7] :

   (1) Exploiter le vecteur courant $\hat{\theta}^i$ pour évaluer la réponse du modèle parallèle de type auxiliaire [7] :

   $$\hat{y}(t_k, \hat{\theta}^i) = G(p, \hat{\theta}^i) u(t_k). \tag{2.84}$$

   Établir les trajectoires filtrées associées aux signaux d'entrée/sortie du système ainsi qu'à la réponse de ce modèle auxiliaire [7] :

   $$\begin{cases} [L_j y](t_k, \hat{\theta}^i) = [L_j(\hat{\theta}^i) * y](t_k) \\ [L_j u](t_k, \hat{\theta}^i) = [L_j(\hat{\theta}^i) * u](t_k) \\ [L_j \hat{y}](t_k, \hat{\theta}^i) = [L_j(\hat{\theta}^i) * \hat{y}(\hat{\theta}^i)](t_k) \end{cases} \tag{2.85}$$

   en s'appuyant sur l'opérateur de filtrage réactualisé [7] :

   $$L_j(p, \hat{\theta}^i) = \frac{p^j}{A(p, \hat{\theta}^i)}. \tag{2.86}$$

   (2) Évaluer le nouveau vecteur de paramètres estimé $\hat{\theta}^{i+1}$ au moyen du formalisme de la variable instrumentale à modèle auxiliaire [7] :

   $$\hat{\theta}^{i+1} = \left[\sum_{k=1}^{N} \zeta(t_k, \hat{\theta}^i) \varphi^T(t_k, \hat{\theta}^i) \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \zeta(t_k, \hat{\theta}^i) [L_{n_a} y](t_k, \hat{\theta}^i), \tag{2.87}$$

avec les structures de vecteurs actualisées suivantes [7] :

$$\zeta^T(t_k,\hat{\theta}^i) = \begin{bmatrix} -[L_{n_a-1}\hat{y}](t_k,\hat{\theta}^i) & \dots & -[L_0\hat{y}](t_k,\hat{\theta}^i) \\ [L_{n_b}u](t_k,\hat{\theta}^i) & \dots & [L_0u](t_k,\hat{\theta}^i) \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

$$\varphi^T(t_k,\hat{\theta}^i) = \begin{bmatrix} -[L_{n_a-1}y](t_k,\hat{\theta}^i) & \dots & -[L_0y](t_k,\hat{\theta}^i) \\ [L_{n_b}u](t_k,\hat{\theta}^i) & \dots & [L_0u](t_k,\hat{\theta}^i) \end{bmatrix}. \tag{2.89}$$

Recommencer les phases (2a) et (2b) jusqu'à ce que la fluctuation relative mesurée sur l'espace des paramètres devienne inférieure à un seuil prédéfini [7] :

$$\sum_{j=1}^{n_p} \left| \frac{\hat{\theta}_j^{i+1} - \hat{\theta}_j^i}{\hat{\theta}_j^i} \right| < \gamma, \tag{2.90}$$

où le terme $\hat{\theta}_j^i$ caractérise la *j-ième* composante du vecteur de paramètres évaluée lors de la *i-ième* itération, la variable $n_p = n_a + n_b + 1$ fixe la dimension totale des paramètres à identifier, le scalaire γ représente la tolérance d'arrêt et N_{Iter} comptabilise le nombre global de cycles de calcul.

3. **Convergence :** La valeur d'estimation optimale est finalement définie par $\hat{\theta}_{srivc} = \hat{\theta}^{N_{Iter}}$ [7].

Cet estimateur raffiné possède la propriété théorique d'être asymptotiquement sans biais, quelle que soit la structure de la perturbation additive présente (sous réserve d'une moyenne nulle), et assure l'obtention d'une variance minimale en contexte de bruit blanc.

Remarques d'application :

- La démarche algorithmique *srivc* s'appuie sur des outils de régression linéaire et converge généralement de manière beaucoup plus rapide (avec un horizon classique de 4 à 5 itérations) comparativement aux stratégies basées sur la minimisation directe d'un critère d'erreur de sortie [7].
- Le comportement de convergence du processus montre une faible sensibilité vis-à-vis de la sélection du vecteur initial $\hat{\theta}^0$ [7]. Ce dernier peut être déterminé de façon préliminaire en exploitant, par exemple, la solution fournie par l'estimateur de la variable instrumentale couplé à la méthode FVE [7].
- Une quantification fine du niveau d'incertitude associé aux coefficients identifiés est accessible par le biais de la matrice de covariance estimée, ouvrant la voie à une évaluation rigoureuse de la qualité du modèle obtenu [7] :

$$\hat{P} = \sigma_{\hat{\varepsilon}}^2 \left[\sum_{k=1}^{N} \zeta(t_k,\hat{\theta}_{srivc}) \zeta^T(t_k,\hat{\theta}_{srivc}) \right]^{-1}, \tag{2.91}$$

où le terme $\sigma_{\hat{\varepsilon}}^2$ matérialise la variance empirique issue de l'erreur de simulation calculée par $\hat{\varepsilon}(t_k) = y(t_k) - \hat{y}(t_k,\hat{\theta}_{srivc})$ [7].
- Cette structure d'identification se prête également à des déclinaisons sous forme récursive [7].
- De plus, cette formulation permet de traiter de manière directe les bases de données acquises à pas d'échantillonnage non constant [7]. Les phases de filtrage des signaux sont alors menées à bien en intégrant un solveur d'équations différentielles, reposant par exemple sur un schéma de type Runge-Kutta [7].
- Enfin, dans la configuration où le bruit de mesure s'avère coloré, l'estimateur *srivc* perd ses

propriétés théoriques d'optimalité statistique. Néanmoins, de nombreuses validations montrent la persistance de performances pratiques très robustes [7].

Les applications numériques de cet algorithme ont mis en évidence sa robustesse vis-à-vis de l'hypothèse de blancheur du bruit, tout en garantissant des estimations paramétriques dotées d'une variance relativement faible [7]. En présence d'une perturbation colorée, une alternative consiste à employer une structure hybride de type Box-Jenkins, au sein de laquelle la composante stochastique est représentée par un modèle discret [7].

2.4.4.1 Extension aux systèmes multi-entrées mono-sortie (MISO)

Le protocole algorithmique *srivc* a également été étendu pour traiter les systèmes de type multi-entrées mono-sortie (MISO), décrits par le formalisme structurel suivant [7] :

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_u} \frac{B_i(p)}{A_i(p)} u_i(t) \tag{2.92}$$

$$y(t_k) = \hat{y}(t_k) + v(t_k) \tag{2.93}$$

avec les définitions polynomiales associées :

$$B_i(p) = b_{i,0} + b_{i,1}p + \cdots + b_{i,m_i}p^{m_i},$$
$$A_i(p) = a_{i,0} + a_{i,1}p + \cdots + p^{n_i},$$

où les contraintes de causalité imposent $n_i \geq m_i$ pour chaque indice d'entrée $i = 1 \ldots n_u$ [7].

Cette configuration offre l'avantage majeur d'attribuer un dénominateur propre à chaque canal d'entrée, ce qui s'avère plus représentatif des réalités physiques industrielles [7]. Néanmoins, le système perd son caractère linéaire par rapport à l'ensemble de ses paramètres [7]. L'adaptation MISO de la méthode *srivc* s'appuie alors sur un principe de régression multilinéaire [7].

Pour ce faire, le vecteur global des paramètres θ est découpé en sous-classes distinctes $\theta_1, \ldots, \theta_{n_u}$, de sorte que l'expression de l'erreur devienne affine vis-à-vis d'un groupe de paramètres lorsque les autres blocs restent figés [7]. Il devient alors possible de déterminer le vecteur estimé $\hat{\theta}$ en appliquant successivement la version mono-entrée mono-sortie (SISO) de l'algorithme *srivc* de manière cyclique sur chaque classe de paramètres [7]. Au cours de cette procédure itérative, la valeur de la fonction de coût décroît continuellement jusqu'à l'atteinte d'un critère de convergence [7].

Bien que la convergence vers un optimum global (ou même local) ne soit pas mathématiquement garantie d'un point de vue théorique en raison du gel alterné des paramètres, les validations numériques menées en simulation ainsi que sur des bases de données de procédés industriels réels confirment la pertinence et l'efficacité pratique de cette déclinaison MISO [7].

(a)- Distinctions et parentés méthodologiques

— **Différenciation avec les structures discrètes :** La déclinaison de l'estimateur *srivc* dédiée à l'identification de modèles à temps discret (notée *sriv*) ne doit pas être confondue avec l'approche par variable instrumentale optimale classique, abrégée *iv4*, disponible au sein de la boîte à outils *« System Identification »* du logiciel Matlab [7]. Contrairement à la méthode *sriv*, l'algorithme *iv4* n'est pas itératif et s'exécute en seulement quatre étapes de calcul, bien qu'il fournisse généralement des résultats d'estimation d'une précision nettement inférieure [7].

— **Lien avec l'approche de Steiglitz-McBride :** L'estimateur *srivc* présente de fortes similitudes structurelles avec la technique de Steiglitz-McBride revisitée au début des années 1980 [7]. La divergence fondamentale réside dans le fait que la méthode *srivc* prend appui sur le formalisme de la variable instrumentale, tandis que l'algorithme de Steiglitz-McBride repose

sur une formulation d'optimisation par moindres carrés simples [7].

Enfin, il convient de souligner qu'une version MISO de l'estimateur optimal de la variable instrumentale *srivc* est directement accessible et intégrée au sein de la boîte à outils logicielle open-source CONTSID [7].

2.4.5 Stratégie d'optimisation par minimisation de l'erreur de sortie (COE)

Cette approche d'identification est historiquement désignée en France sous l'appellation de méthode du modèle [7]. Son principe directeur repose sur la minimisation de l'énergie associée à l'erreur de sortie. Contrairement aux critères basés sur l'erreur d'équation, ce formalisme se distingue par une signification physique plus prononcée, bien qu'il manifeste une sensibilité nettement accrue face aux erreurs de structure de modèles ainsi qu'aux fluctuations des paramètres à estimer [7].

La mise en œuvre pratique de cette technique s'avère plus complexe en raison de la nature non linéaire de l'erreur de sortie par rapport aux paramètres du système [7]. D'un point de vue algorithmique, la démarche consiste à exploiter les propriétés locales du critère d'évaluation autour d'un point courant $\hat{\theta}^i$ au sein de l'espace paramétrique, afin de déterminer un point suivant $\hat{\theta}^{i+1}$ optimisé au sens de la fonction de coût à minimiser [7]. Différentes techniques d'optimisation numérique permettent de garantir une convergence vers l'optimum local du critère dans le bassin d'attraction où se situait le vecteur initial $\hat{\theta}^0$ [7].

Parmi les méthodes les plus couramment employées dans la littérature, on recense les algorithmes de Gauss-Newton, sa variante régularisée de Levenberg-Marquardt, les approches de quasi-Newton ainsi que les techniques de gradients conjugués [7]. Ces procédures requièrent la connaissance de la valeur du critère ainsi que de son gradient au point courant, ce dernier étant évalué au moyen des fonctions de sensibilité de la sortie du modèle par rapport aux différents paramètres [7]. Ces fonctions de sensibilité sont généralement obtenues par le biais de simulations d'équations différentielles déduites de la structure du modèle [7]. Au cours du processus d'optimisation, le calcul itératif du critère et de son gradient s'avère nécessaire à de nombreuses reprises, ce qui engendre un volume conséquent de simulations numériques [7]. Cette approche, abrégée sous son acronyme anglo-saxon *coe* (*continuous-time output error method*), constitue une technique classique dans le domaine de l'identification et n'est pas détaillée de manière exhaustive dans le présent document [7].

Remarques d'application sur la méthode COE :

- **Évaluation de l'incertitude paramétrique :** La méthode *coe* permet d'obtenir une estimation de l'incertitude affectant les paramètres identifiés [7]. Une approche classique consiste à exploiter les propriétés asymptotiques de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance, en assimilant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation à l'inverse de la matrice d'information de Fisher [7]. Cette dernière se calcule aisément à partir des caractéristiques du bruit utilisé pour bâtir l'estimateur [7]. Bien que cette technique soit largement répandue, le caractère approximatif des résultats obtenus impose une certaine vigilance lorsque le volume de données expérimentales est réduit [7].
- **Extension aux structures MISO :** Ce formalisme autorise de manière directe l'identification des systèmes multi-entrées mono-sortie (MISO) décrits par la configuration structurelle générale introduite précédemment à l'équation (92) [7].
- **Sensibilité aux minima locaux :** La principale limitation des approches basées sur l'erreur de sortie réside dans la présence potentielle de multiples minima locaux vers lesquels l'algorithme d'optimisation peut converger [7]. Par conséquent, la phase d'initialisation des algorithmes joue un rôle déterminant sur la qualité de la convergence globale, et il est souvent indispensable de recourir à des procédures spécifiques afin de contourner les optima locaux

parasites [7].

Une déclinaison MISO de l'estimateur s'appuyant sur l'algorithme de Gauss-Newton ou sur sa variante de Levenberg-Marquardt, via la simulation numérique des fonctions de sensibilité de la sortie par rapport aux paramètres, est directement disponible au sein de la boîte à outils logicielle CONTSID [7].

2.4.6 Conclusion du panorama méthodologique

L'analyse comparative de ce panorama de techniques met en évidence une préférence marquée pour l'estimateur optimal de la variable instrumentale [7]. Cette approche a démontré à de nombreuses reprises son potentiel et son efficacité dans des contextes applicatifs variés, ce qui conduit à la recommander en premier lieu pour l'identification de modèles à temps continu [7].

Toutefois, la synthèse présentée ici ne saurait prétendre à l'exhaustivité [7]. D'autres concepts d'identification coexistent dans la littérature, à l'instar des approches fondées sur des formulations purement algébriques ou encore des stratégies récursives temps réel [7].

2.5 Perspectives avancées en identification de systèmes

Cette section introduit les fondements théoriques de trois configurations d'identification plus complexes et adaptées aux exigences industrielles spécifiques [7] :

— La modélisation des structures multivariables par le biais de représentations d'état [7].
— L'identification opérant en contexte de boucle fermée lorsqu'un correcteur rétroagit sur le procédé [7].
— L'estimation sous l'hypothèse d'« erreurs sur les variables », configuration où l'incertitude et le bruit impactent simultanément les mesures d'entrée et de sortie [7].

2.5.1 Identification directe de modèles d'état

L'estimation directe des représentations d'état multivariables (multi-entrées multi-sorties, ou MIMO) opérant en temps continu est un domaine resté longtemps restreint sur le plan théorique [7]. Une stratégie robuste consiste à s'appuyer sur les techniques algorithmiques de décomposition en sous-espaces [7]. Cette méthodologie offre l'avantage majeur de synthétiser des modèles d'état directement à partir des séquences de données mesurées en entrée/sortie, s'affranchissant ainsi de la connaissance préalable des indices de structure du système [7].

Bien que la littérature scientifique propose une grande diversité d'algorithmes dédiés aux représentations à temps discret, les contributions centrées sur le formalisme à temps continu demeurent plus rares [7]. Les travaux pionniers ont introduit des opérateurs spécifiques de transformation discret/continu afin de transposer algébriquement la dynamique temporelle [7]. Plus récemment, de nouvelles approches associent un pré-filtrage par moments de Poisson avec les méthodes par sous-espaces pour traiter efficacement le cas des perturbations colorées [7]. Ces routines de calcul sont pleinement intégrées et accessibles dans la boîte à outils CONTSID [7].

2.5.2 Identification des procédés en boucle fermée

L'exécution d'essais expérimentaux en boucle ouverte sur des installations industrielles en exploitation s'avère fréquemment irréalisable, que ce soit pour des impératifs de sécurité, des contraintes de productivité ou en raison de l'instabilité naturelle du procédé [7]. Dans ces conditions, l'acquisition

des données doit impérativement s'effectuer en boucle fermée [7]. La contrainte majeure de cette configuration réside dans la corrélation statistique croisée induite par la loi de commande entre les bruits de mesure et le signal d'excitation [7]. De surcroît, les signaux recueillis s'avèrent souvent moins riches en contenu fréquentiel qu'en boucle ouverte [7]. L'enjeu fondamental consiste alors à concevoir un estimateur capable de minimiser l'influence de la contre-réaction afin d'obtenir un modèle non biaisé [7].

Pour contourner ces limitations, diverses approches ont été développées afin de découpler le signal de commande des perturbations [7]. L'application directe d'un estimateur minimisant l'erreur de prédiction fournit des résultats convergents, à la condition stricte que le vrai procédé appartienne à la classe de modèles sélectionnée [7]. Toutefois, cette contrainte étant rarement vérifiée en pratique, des alternatives robustes pour le temps continu ont été proposées [7]. Les premières contributions rigoureuses reposent sur la combinaison d'une méthode de variable instrumentale à modèle auxiliaire avec un schéma de filtrage des variables d'état (FVE) [7].

Récemment, des techniques avancées ont permis d'intégrer la dynamique du bruit dans le traitement du signal afin de formuler des estimateurs convergents de forte précision [7]. Une première démarche applique une régression par moindres carrés pour estimer puis soustraire le biais statistique du modèle final [7]. Les approches par variable instrumentale sont également adaptées : la première s'appuie sur le signal de consigne comme instrument (garantissant le respect des conditions de décorrélation), tandis que la seconde emploie des variables instrumentales optimales pour minimiser la variance des paramètres [7]. La borne inférieure de la matrice de covariance est alors atteignable en sélectionnant le vecteur optimal suivant [7] :

$$\begin{cases} F^{opt}(p) = \dfrac{1}{A_0(p)H_0(p)} \\ \zeta^{opt}(t_k) = \left[F^{opt}(p)\hat{\varphi}^T(t_k)\right]^T \end{cases} \tag{2.94}$$

où $\mathring{\varphi}(t_k)$ caractérise le vecteur de régression déterministe, reconstruit à partir des signaux d'entrée/sortie exempts de bruit et de leurs dérivées respectives [7]. À l'instar du contexte en boucle ouverte, l'évaluation de ce filtre idéal requiert des procédures itératives de type « *bootstrap* » pour converger vers la solution optimale [7].

2.5.3 Identification au sein de structures à erreurs sur les variables

À l'exception des configurations spécifiques en boucle fermée, la majorité des techniques d'identification conventionnelles reposent sur l'hypothèse d'un bruit additif affectant uniquement la sortie, considérant l'entrée du système comme parfaitement connue et exempte de défaut [7]. Or, dans de nombreuses applications réelles, les capteurs placés sur l'entrée introduisent des incertitudes et des bruits de mesure non négligeables [7]. Ignorer ces perturbations conduit inévitablement à des estimations paramétriques sévèrement biaisées [7]. L'identification d'un système où l'entrée et la sortie sont simultanément entachées de bruits indépendants (non liés par une boucle de régulation) s'inscrit dans le cadre des modèles dits à « *erreurs sur les variables* » [7]. Ce formalisme s'avère indispensable lorsque l'objectif final est la compréhension fine des lois physiques internes du procédé, au-delà de la simple prédiction de son comportement asymptotique [7].

Cette problématique d'estimation a fait l'objet de contributions récentes majeures pour les structures à temps discret [7]. Ces travaux se séparent en deux grandes familles : ceux exploitant les propriétés statistiques au second ordre des signaux d'entrée/sortie, et ceux mettant en œuvre des statistiques d'ordre supérieur à deux [7]. En revanche, ce problème est resté plus confidentiel dans le cadre du temps continu [7]. On peut néanmoins distinguer deux approches performantes : la première

tire parti des statistiques d'ordre supérieur, tandis que la seconde couple ces outils statistiques à une formulation de type Steiglitz-McBride pour maximiser la robustesse de l'identification [7].

2.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de poser les fondements méthodologiques indispensables à l'identification paramétrique des systèmes dynamiques. Nous y avons détaillé les quatre étapes fondamentales qui régissent cette procédure : l'acquisition des signaux d'entrée/sortie sous un protocole d'expérimentation adapté, le choix structurel et l'estimation de la complexité du modèle, l'estimation proprement dite de ses paramètres, et enfin, l'étape cruciale de validation de la structure identifiée.

Plus particulièrement, ce chapitre a dressé un panorama des méthodes d'identification directe de modèles linéaires de type boîte noire à temps continu à partir de données échantillonnées. Longtemps restées en retrait face aux approches traditionnelles en temps discret, ces techniques directes à temps continu présentent pourtant des avantages déterminants pour l'ingénieur. D'une part, elles fournissent des modèles dont les paramètres restent physiquement interprétables. D'autre part, elles simplifient grandement la mise en œuvre de la procédure globale grâce à l'intégration d'un pré-filtrage implicite des signaux. Enfin, ces méthodes s'avèrent parfaitement adaptées aux exigences modernes d'acquisition, qu'il s'agisse de contextes à échantillonnage rapide ou du traitement de données échantillonnées à pas variable.

Bien que ces approches directes à temps continu offrent des outils robustes pour la modélisation à partir de fenêtres d'observations temporelles, elles nécessitent souvent des itérations ou des approximations face à certaines dynamiques complexes ou bruits de mesure. C'est ce qui justifie l'exploration, dans le chapitre suivant, d'une alternative non asymptotique, instantanée et purement algébrique.

Chapitre 3:

Méthodologie de l'identification algébrique

Chapitre 3

Méthodologie de l'identification algébrique

3.1 Introduction

L'identifiabilité constitue une propriété fondamentale dans l'étude des systèmes dynamiques, puisqu'elle permet de déterminer si les paramètres d'un modèle peuvent être estimés de manière unique à partir des signaux observés. Son analyse joue un rôle essentiel dans les problèmes d'identification et de commande, en particulier lorsque le système est soumis à des incertitudes ou à des perturbations.

L'étude de l'identifiabilité des systèmes linéaires s'appuie sur différents outils théoriques permettant de caractériser les paramètres du modèle et d'évaluer leur influence sur le comportement du système. Les notions de paramètres indéterminés, de dérivation algébrique et d'identifiabilité sont ainsi introduites afin d'établir un cadre d'analyse adapté.

Par ailleurs, la présence de perturbations peut affecter significativement les performances des systèmes dynamiques. Leur prise en compte nécessite le développement de méthodes d'estimation et de commande capables d'améliorer la robustesse du système tout en préservant sa précision. Dans cette perspective, le régulateur proportionnel–intégral généralisé (GPI) constitue une solution particulièrement intéressante grâce à ses propriétés de rejet des perturbations et d'amélioration des performances en boucle fermée.

3.2 Pourquoi l'approche algébrique ?

L'identification des systèmes dynamiques constitue une étape essentielle dans l'analyse et la commande des procédés physiques. Les méthodes classiques d'identification reposent généralement sur des approches statistiques ou asymptotiques, telles que les moindres carrés, les techniques récursives ou les filtres de Kalman. Bien que ces méthodes aient démontré leur efficacité dans plusieurs applications industrielles, elles présentent certaines limites lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes fortement perturbés, incertains ou soumis à des mesures bruitées.

En particulier, les méthodes classiques nécessitent souvent :

— un modèle mathématique relativement précis du système

— une quantité importante de données expérimentales

— des procédures d'optimisation parfois coûteuses en temps de calcul

— des hypothèses probabilistes concernant les propriétés du bruit et des perturbations.

De plus, l'estimation des dérivées des signaux mesurés représente une difficulté importante en

pratique. En effet, les opérations de dérivation numérique amplifient fortement le bruit de mesure, ce qui peut dégrader la précision des paramètres estimés ainsi que les performances des lois de commande associées.

Afin de surmonter ces limitations, une nouvelle approche dite algébrique a été développée par **M. Fliess, H. Sira-Ramírez** et leurs collaborateurs. Cette méthode repose sur des outils issus de l'algèbre différentielle, du calcul opérationnel et de la théorie des modules. Son objectif principal est de transformer les problèmes d'identification et d'estimation en relations algébriques explicites faisant intervenir les signaux d'entrée et de sortie du système.

L'idée fondamentale de cette approche consiste à éviter les dérivées numériques directes en utilisant des opérations d'intégration. Contrairement à la dérivation, l'intégration possède un effet de filtrage naturel qui permet d'atténuer les perturbations non structurées et les composantes haute fréquence du bruit. Les paramètres inconnus du système peuvent alors être estimés à partir d'équations intégrales calculables en temps réel.

L'approche algébrique présente plusieurs avantages importants :

— une estimation rapide et non asymptotique des paramètres ;
— une bonne robustesse vis-à-vis du bruit de mesure ;
— une faible complexité numérique ;
— une mise en œuvre adaptée au temps réel ;
— l'absence d'hypothèses probabilistes sur les perturbations.

Ces propriétés rendent cette méthode particulièrement intéressante dans les domaines de la commande robuste, de l'estimation en ligne, du diagnostic des systèmes et du rejet des perturbations. Elle constitue également la base de plusieurs stratégies modernes de commande, notamment les correcteurs intelligents et les régulateurs PI généralisés (GPI).

Dans ce chapitre, les principales notions liées à l'approche algébrique sont introduites afin de présenter les outils théoriques nécessaires à l'identification des systèmes linéaires et à la conception de lois de commande robustes.

3.3 Fondements algébriques de l'identification linéaire

La méthode considérée dans ce travail repose sur une approche d'estimation innovante fondée sur les corps différentiels, la théorie des anneaux ainsi que sur le calcul opérationnel de Mikusiński, qui seront présentés et développés dans la suite de ce chapitre.

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations mathématiques usuelles : N désigne l'ensemble des nombres naturels, Z l'ensemble des entiers, R l'ensemble des nombres réels et C l'ensemble des nombres complexes.[8]

3.3.1 Définitions de base en algèbre

Un anneau A est un ensemble muni de deux opérations internes : l'addition et la multiplication. Ces opérations vérifient les propriétés suivantes :

L'ensemble A possède un élément neutre pour l'addition, appelé élément nul et noté 0. Tout élément de A admet également un opposé appartenant à A :

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in A \tag{3.1}$$

$$x + (-x) = 0 \tag{3.2}$$

La multiplication dans A est associative et distributive par rapport à l'addition :

$$(xy)z = x(yz) \tag{3.3}$$

$$x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx \tag{3.4}$$

À titre d'exemple, l'ensemble des entiers relatifs Z constitue un anneau. Dans la suite, nous considérons des anneaux commutatifs, c'est-à-dire des anneaux pour lesquels la multiplication est commutative :

$$xy = yx, \quad \forall x, y \in A \tag{3.5}$$

On suppose également l'existence d'un élément identité pour la multiplication, noté 1_A, vérifiant :

$$1_A x = x 1_A = x, \quad \forall x \in A \tag{3.6}$$

Cet élément identité est unique. Lorsque le contexte ne prête pas à confusion, l'indice A sera omis.

Un morphisme d'anneaux de A vers B est une application $f : A \to B$ qui vérifie, pour tous $x, y \in A$, les propriétés suivantes :

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$
3. $f(1_A) = 1_B$

Enfin, un élément $x \in A$ est dit inversible s'il existe un élément $y \in A$ tel que :

$$xy = yx = 1_A \tag{3.7}$$

Dans ce cas, y est appelé l'inverse de x.[8]

Définition[8] :

Deux éléments a et b d'un anneau commutatif A sont dits diviseurs de zéro dans A si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et :$ab = 0$

Un anneau intègre est un anneau commutatif non trivial sans diviseurs de zéro.

Un sous-ensemble V d'un anneau A est appelé idéal à gauche (resp. à droite) de A s'il vérifie :

— V est un sous-groupe additif de A.

— Pour tout $(a, v) \in AV$, on a $av \in V$ (resp. $va \in V$).

Un idéal bilatère de A, ou simplement un idéal de A, est un sous-ensemble de A qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite (par exemple $nZ, n \in N$).

On appelle corps un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible. Par exemple, l'ensemble des entiers Z n'est pas un corps mais il est contenu dans le corps des nombres rationnels Q. Les réels R et les complexes C forment aussi des corps.

Définition [8] :

On définit la caractéristique d'un corps C comme l'ordre (additif) de son unité 1. Un corps C a une caractéristique finie n si n est le plus petit entier positif tel que : $n \cdot 1 = 0$. Si $n \cdot 1 \neq 0$ pour tout $n > 0$, alors C a une caractéristique 0.

3.3.2 Concepts fondamentaux d'algèbre différentielle

Un anneau différentiel R est un anneau commutatif muni d'une dérivation par rapport à la variable s, c'est-à-dire une application $R \to R$ notée $\frac{d}{ds}$ vérifiant, pour tous $x, y \in R$, les propriétés suivantes :

$$\frac{d}{ds}(x+y) = \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{ds}(xy) = \frac{dx}{ds}y + x\frac{dy}{ds} \tag{3.9}$$

Un corps différentiel est un anneau différentiel qui possède en plus une structure de corps. Dans la suite, on suppose que les corps considérés sont de caractéristique nulle, car aucune équation différentielle de caractéristique non nulle n'est utilisée en physique [8].

Un élément $c \in R$ est appelé constante si $\frac{dc}{ds} \neq 0$. L'ensemble de ces éléments forme l'anneau (or le corps) des constantes. Un anneau différentiel est dit anneau de constantes lorsqu'il ne contient que des constantes[8].

Soit k un corps différentiel de constantes. Le corps des fonctions rationnelles en la variable s, à coefficients dans k, noté $k(s)$, possède naturellement une structure de corps différentiel pour la dérivation $\frac{d}{ds}$. L'ensemble des constantes de ce corps est alors précisément k[8].

Un morphisme différentiel $\phi : R_1 \to R_2$ entre deux anneaux différentiels est un morphisme d'anneaux qui commute avec la dérivation, c'est-à-dire :

$$\phi\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\phi(x)) \tag{3.10}$$

Une spécialisation différentielle est un morphisme différentiel $R \to K$ où R est un anneau différentiel et K un corps différentiel.

Une extension de corps différentiels L/K est définie par deux corps différentiels K et L tels que :

— $K \subseteq L$

— la dérivation de K coïncide avec la restriction de la dérivation définie sur L.

Un élément $x \in L$ est dit différentiellement algébrique sur K s'il satisfait une équation différentielle algébrique à coefficients dans K. Autrement dit, il existe un polynôme P tel que [8] :

$$P\left(x, \frac{dx}{ds}, \ldots, \frac{d^n x}{ds^n}\right) = 0 \tag{3.11}$$

où P possède des coefficients dans K.

L'extension L/K est dite différentiellement algébrique lorsque tous les éléments de L sont différentiellement algébriques sur K. À l'inverse, un élément de L qui ne vérifie aucune équation différentielle algébrique à coefficients dans K est dit différentiellement transcendant. Une extension contenant de tels éléments est appelée extension différentiellement transcendante [8].

Considérons une famille $\{\varpi_i\}_{i\in I}$ d'éléments appartenant à L, où I désigne un ensemble d'indices. Cette famille est dite différentiellement K-algébriquement dépendante si l'ensemble formé par toutes les dérivées successives de ces éléments, $\{\varpi_i^{(j)} \ ; \ i \in I, \ j \in N\}$, est algébriquement dépendant sur le corps K [8].

À l'inverse, lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la famille est qualifiée de différentiellement K-algébriquement indépendante. Cela signifie qu'aucun des éléments ϖ_i ne vérifie d'équation différentielle algébrique dont les coefficients appartiennent à K.

Lorsqu'une telle famille est maximale pour la relation d'inclusion, elle est appelée base de transcendance différentielle de l'extension L/K. Toutes les bases de transcendance différentielle possèdent la même cardinalité, appelée degré de transcendance différentielle de l'extension L/K. En particulier, l'extension L/K est dite différentiellement algébrique si, et seulement si, ce degré de transcendance différentielle est nul [8].

Notation[8] : Soit S un sous-ensemble de L. Le sur-corps différentiel (resp. sur-anneau différentiel) de K engendré par S est noté : $K\langle S\rangle$ (resp. $K\{S\}$) .

3.3.3 Les opérateurs différentiels linéaires

Soit K un corps différentiel. On considère l'ensemble $K[\frac{d}{ds}]$, constitué des opérateurs différentiels linéaires de la forme :

$$\sum_{\text{finie}} a_\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}, \quad a_\alpha \in K \tag{3.12}$$

Cet ensemble forme un anneau commutatif si et seulement si le corps K est un corps de constantes. Par ailleurs, pour tout élément $a \in K$, on a la relation suivante [8] :

$$\frac{d}{ds}(a) = \frac{da}{ds} + a\frac{d}{ds} \tag{3.13}$$

3.4 Une approche fondée sur la théorie des modules pour les systèmes linéaires

3.4.1 Quelques résultats de base sur les modules sur les anneaux principaux

Soit k un corps donné. On note $k[s]$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée s, dont les éléments s'écrivent sous la forme d'une somme finie :

$$\sum_{\text{finie}} a_\nu s^\nu, \quad a_\nu \in k \tag{3.14}$$

Il est bien connu que $k[s]$ constitue un anneau principal, c'est-à-dire que tout idéal de $k[s]$ peut être engendré par un seul élément.

Un module M sur l'anneau $k[s]$ est dit de type fini (ou finiment engendré) si, et seulement si, il existe un ensemble fini S tel que :

$$M = \text{span}_{k[s]}(S) \tag{3.15}$$

Soit S un ensemble fini. Un module M est qualifié de libre si, et seulement si, il existe un ensemble S dont les éléments sont linéairement indépendants sur $k[s]$. Dans ce cas, l'ensemble S constitue une base du module considéré. Par ailleurs, toutes les bases d'un même module possèdent le même cardinal.

Tout sous-module d'un module $k[s]$-engendré de type fini (respectivement libre) demeure lui-même de type fini (respectivement libre). De manière analogue, tout module quotient issu d'un module $k[s]$-engendré de type fini conserve également cette propriété de génération finie.

Un élément $x \in M$ est dit de torsion lorsqu'il existe un polynôme non nul $\varpi \in k[s], \varpi \neq 0$ tel que le produit $\varpi x = 0$. L'ensemble des éléments de torsion de M forme un sous-module, noté M_{tor}, appelé sous-module de torsion, et vérifiant : $\{0\} \subseteq M_{\text{tor}} \subseteq M$.

Lorsque $M_{\text{tor}} = M$, le module M est dit de torsion. En revanche, si $M_{\text{tor}} = \{0\}$, le module est qualifié de sans torsion. Tout module libre est naturellement sans torsion. Réciproquement, cette propriété reste valable pour tout module $k[s]$-engendré de type fini et sans torsion.

Une propriété fondamentale des modules $k[s]$-engendrés de type fini réside dans leur décomposition directe sous la forme :

$$M = M_{\text{tor}} \oplus F \tag{3.16}$$

où le module libre F, défini à isomorphisme près, est donné par : $F = M/M_{\text{tor}}$.

Considérons maintenant un module engendré par un unique élément g. Ce module est de dimension finie lorsqu'il est considéré comme espace vectoriel sur k si, et seulement si, l'élément g est de torsion. Cette propriété s'étend naturellement aux modules de type fini. Ainsi, un module M est de torsion si,

et seulement si, sa dimension en tant qu'espace vectoriel sur k est finie, c'est-à-dire [1] :

$$\dim_k(M) < \infty \tag{3.17}$$

Exemple 1. Considérons l'ensemble des équations linéaires sur $k[s]$:

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\iota\kappa}\xi_\kappa = 0, \quad a_{\iota\kappa} \in k[s], \quad \iota = 1, \ldots, \nu \tag{3.18}$$

en les inconnues $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$.

Soit F le $k[s]$-module libre ayant pour base $(f_1, \ldots, f_\mu)$. Soit E le sous-module engendré par :

$$e_\iota = \sum_{\kappa=1}^{\mu} a_{\iota\kappa} f_\kappa, \quad \iota = 1, \ldots, \nu \tag{3.19}$$

Alors, le module associé à l'équation précédente est donné par : $M = F/E$. l'équation peut également être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$P_M \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\mu \end{pmatrix} = 0 \tag{3.20}$$

Où $P_M \in k[s]^{\nu\mu}$ est une matrice de présentation du module Λ[1].

3.4.2 Transformation de Laplace formelle

Soit $k(s)$ le corps des fractions de l'anneau $k[s]$, c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles à coefficients dans k et de variable indéterminée s. Considérons M un $k[s]$-module engendré de type fini. Les éléments du produit tensoriel :

$$\hat{M} = k(s) \oplus_{k[s]} M \tag{3.21}$$

s'écrivent comme des sommes finies de termes de la forme :

$$q^{-1}x, \quad x \in M, \quad q \in k[s], \quad q \neq 0 \tag{3.22}$$

L'espace $\hat{M}$ possède naturellement une structure d'espace vectoriel sur $k(s)$ et est appelé espace des vecteurs de transfert associé à M.

L'application $k[s]$-linéaire :

$$M \to \hat{M}, \quad m \mapsto \hat{m} = 1 \otimes m \tag{3.23}$$

est appelée transformation de Laplace formelle.

Le noyau de cette application coïncide avec le sous-module de torsion M_{tor}. Par conséquent, la transformation de Laplace formelle est injective si, et seulement si, le module M is libre.

Par définition, le rang du module M, noté $\text{rk}(M)$, est défini par :

$$\text{rk}(M) = \dim_{k(s)}(\hat{M}) \tag{3.24}$$

Il en résulte que le rang de M est nul exactement lorsque M est un module de torsion, c'est-à-dire

lorsque $\mathrm{rk}(M) = 0$.

Considérons maintenant deux modules M_1 et M_2 vérifiant : $M_1 \subseteq M_2$. On obtient alors la relation :

$$rk(\frac{M_2}{M_1}) = \mathrm{rk}(M_2) - \mathrm{rk}(M_1) \tag{3.25}$$

Ainsi, $\mathrm{rk}(M_1) = \mathrm{rk}(M_2)$ si, et seulement si, le quotient M_2/M_1 est un module de torsion. Enfin, pour tout ensemble $x = (x_1, \ldots, x_\alpha) \subset M$, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathrm{rk}(\mathrm{span}_{k[s]}(x)) = \dim(\mathrm{span}_{k(s)}(\hat{x})) \tag{3.26}$$

La propriété suivante fournit une caractérisation matricielle utile des modules de torsion [1].

Proposition 1 : Le module associé au système d'équation (3.20) est un module de torsion si, et seulement si, $\mathrm{rk}(P_M) = \mu$. Dans le cas où le système est carré, c'est-à-dire lorsque $\mu = \nu$, cette condition devient équivalente à $\det(P_M) \neq 0$ [1].

Preuve : La transformation de Laplace formelle conduit à la relation :

$$P_M \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\xi}_\mu \end{pmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

Le module est de torsion si et seulement si $\hat{\xi}_1 = \cdots = \hat{\xi}_\mu = 0$, cette dernière condition équivaut à $\mathrm{rk}(P_M) = \mu$ [1].

Exemple 2 . Soit T un $k[s]$-module de torsion engendré de type fini. On a alors $\dim_k(T) = n < \infty$. Considérons une base $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de T, lorsque celui-ci est vu comme un espace vectoriel sur k. À l'application k-linéaire :

$$s : T \to T, \quad \tau \mapsto s\tau \tag{3.28}$$

correspond une matrice $A \in k^{nn}$ relativement à la base b. Cela revient à dire que le module T est défini par l'équation matricielle suivante :

$$s \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Il est alors immédiat que $\det(s - A) \neq 0$ [1].

3.4.3 Définitions fondamentales en théorie des systèmes

Un système k-linéaire est défini comme un $k[s]$-module libre, engendré de type fini, noté Λ, dans lequel on distingue un ensemble fini de variables de perturbation également appelées variables de disturbance donné par : $\underline{\pi} = (\underline{\pi_1}, \ldots, \underline{\pi_r})$.

Remarque 1 : Considérons le cas particulier où $k = C$, et l'équation opérationnelle :

$$a\chi = 0, \quad a \in C[s], \quad a \neq 0 \tag{3.30}$$

dans l'inconnue χ. Cette équation admet pour unique solution $\chi = 0$, ce qui implique que tout élément de torsion est nécessairement trivial. Par ailleurs, l'équation différentielle linéaire $\dot{x} = 0$, qui

correspond à un $C[\frac{d}{dt}]$-module de torsion, conduit à l'équation opérationnelle $sx - x(0) = 0$. Cette dernière correspond à un $C[s]$-module libre ayant pour base $\{x\}$.

Le système nominal, ou non perturbé, noté Λ^{nom} est défini par le module quotient :

$$\Lambda^{\text{nom}} = \Lambda / \text{span}_{k[s]}(\underline{\pi}) \tag{3.31}$$

L'image canonique de tout élément $\lambda \in \Lambda$ dans le quotient précédent est notée $\lambda^{\text{nom}} \in \Lambda^{\text{nom}}$. Dans certains cas, le module Λ est également appelé système perturbé. Il convient de noter que le module nominal Λ^{nom} n'est pas nécessairement libre[1].

Exemple 3 . Considérons le module associé à l'équation $sx = \underline{\pi}$, avec $\underline{\pi} \in \text{span}_{k[s]}(\underline{\pi}), \underline{\pi} \neq 0$. Ce module est libre. En revanche, le module associé au système nominal $sx^{\text{nom}} = 0$ est un module de torsion.

Une dynamique k-linéaire est un système k-linéaire Λ muni d'un ensemble fini de variables de commande $u = (u_1, \ldots, u_m)$, tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

- les variables de commande n'interagissent pas avec les variables de perturbation : $\text{span}_{k[s]}(u) \cap \text{span}_{k[s]}(\underline{\pi}) = \{0\}$
- le module quotient $\Lambda^{\text{nom}}/\text{span}_{k[s]}(u^{\text{nom}})$ est un module de torsion. Dans le cas où $u = \emptyset$, la condition précédente implique directement que Λ^{nom} est un module de torsion.
- Les variables de commande sont dites indépendantes si, et seulement si, $u_1, \ldots, u_m$ sont linéairement indépendantes sur $k[s]$.

L'ensemble des variables de sortie est défini par un sous-ensemble fini $y = (y_1, \ldots, y_p) \subset \Lambda$. Une dynamique munie de variables de sortie est appelée système k-linéaire entrée–sortie. Le système est dit monovariable lorsque $m = p = 1$. Dans le cas contraire, il est qualifié de multivariable [1].

3.4.4 Matrices de transfert

Considérons la dynamique nominale Λ^{nom} munie des variables de commande $u^{\text{nom}} = (u_1^{\text{nom}}, \ldots, u_m^{\text{nom}})$.

L'espace des vecteurs de transfert sur $k(s)$, introduit dans la section précédente, associé à $\hat{\Lambda}^{\text{nom}}$ est engendré par les variables de commande $\hat{u}^{\text{nom}}$, qui sont supposées indépendantes. Il en résulte l'existence de variables de sortie $y^{\text{nom}} = (y_1^{\text{nom}}, \ldots, y_p^{\text{nom}})$ vérifiant la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{y_1}^{\text{nom}} \\ \vdots \\ \hat{y_p}^{\text{nom}} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \hat{u_1}^{\text{nom}} \\ \vdots \\ \hat{u_m}^{\text{nom}} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Où $T \in k(s)^{pm}$ désigne la matrice de transfert nominale.

Cette matrice est définie de manière unique si, et seulement si, les variables de commande sont indépendantes. Dans le cas particulier où $m = p = 1$, l'élément T est appelé fonction de transfert nominale.

La matrice T est dite propre (respectivement strictement propre) lorsque chacun de ses éléments est une fonction rationnelle propre (respectivement strictement propre) [1].

3.5 Identifiabilité

3.5.1 Paramètres indéterminés

Soit k un corps constituant une extension algébrique finie de $k_0(\Theta)$, où :

— k_0 désigne un corps de base donné .
— $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_\tau)$ représente un ensemble fini de paramètres incertains (ou inconnus).

3.5.2 Dérivation algébrique et nouvelle structure de module

On introduit la dérivation par rapport à la variable s, notée $\frac{d}{ds}$, que l'on appelle dérivation algébrique. On considère également un nouveau corps commutatif K constitué d'éléments constants, c'est-à-dire vérifiant : $\forall \xi \in K, \frac{d\xi}{ds} = 0$.

3.5.3 Algèbre de Weyl

L'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux, noté $K[s, \frac{d}{ds}]$, est constitué des expressions :

$$\sum_{\text{finie}} a_\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu}, \quad a_\nu \in K[s] \tag{3.33}$$

Cet anneau est appelé algèbre de Weyl et possède une structure non commutative. Cette non-commutativité apparaît à travers le commutateur [1] :

$$\left[\frac{d}{ds}, s\right] = \frac{d}{ds}s - s\frac{d}{ds} = 1 \tag{3.34}$$

3.5.4 Sur-anneau d'opérateurs différentiels

On introduit ensuite le sur-anneau $K(s)[\frac{d}{ds}]$ des opérateurs différentiels linéaires à coefficients rationnels :

$$\sum_{\text{finie}} b_\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu}, \quad b_\nu \in K(s) \tag{3.35}$$

Cet anneau est non commutatif et constitue un anneau principal à gauche et à droite : tout idéal à gauche (resp. à droite) y est engendré par un seul élément [1].

3.5.5 Structure modulaire associée

Considérons de nouveau le système Λ, supposé être un $k[s]$-module libre de type fini. Les éléments du produit tensoriel :

$$\Lambda_{k(s)[\frac{d}{ds}]} = k_0(s)\left[\frac{d}{ds}\right] \otimes_{k[s]} \Lambda \tag{3.36}$$

s'écrivent comme des sommes finies de produits $r\lambda$, où $r \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ et $\lambda \in \Lambda$. Ainsi, $\Lambda_{k(s)[\frac{d}{ds}]}$ peut être muni d'une structure de module à gauche sur l'anneau $k(s)[\frac{d}{ds}]$ [1].

3.5.6 Identifiabilité linéaire

Les paramètres inconnus $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_\tau)$ sont dits linéairement identifiables si, et seulement si, il existe une relation de la forme :

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_\tau \end{pmatrix} = Q + R \tag{3.37}$$

où :

— les éléments des matrices P et Q, de dimensions respectives $\tau\tau$ et $\tau 1$, appartiennent à $\text{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(u, y)$;
— le déterminant de la matrice P est non nul : $\det(P) \neq 0$;

— la matrice R, de dimension $\tau 1$, possède des coefficients appartenant à $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(\underline{\pi})$.

Les paramètres Θ sont dits projectivement linéairement identifiables lorsqu'il existe un indice ι, avec $1 \leq \iota \leq \tau$, tel que $\theta_\iota \neq 0$ et que les quantités suivantes soient linéairement identifiables :

$$\left\{ \frac{\theta_1}{\theta_\iota}, \ldots, \frac{\theta_{\iota-1}}{\theta_\iota}, \frac{\theta_{\iota+1}}{\theta_\iota}, \ldots, \frac{\theta_\tau}{\theta_\iota} \right\} \tag{3.38}$$

Les paramètres inconnus Θ sont dits faiblement linéairement identifiables s'il existe un ensemble $\Theta' = \{\theta'_1, \ldots, \theta'_\tau\}$ constitué de paramètres linéairement identifiables, tel que les éléments de Θ soient algébriques sur $k_0(\Theta')$.

3.5.7 Exemple élémentaire

Considérons : $k_0 = Q$ et $\Theta = \{a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m\}$. On étudie alors un système SISO décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n \right) y(t) = \left(b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \cdots + b_m \right) u(t) \tag{3.39}$$

En notation opérationnelle, cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Y = (b_0 s^m + \cdots + b_m) U + \mathcal{I}(s) \tag{3.40}$$

où $\mathcal{I}(s)$ désigne un polynôme en s, à coefficients dans k, de degré $\max(m, n) - 1$. Les coefficients de ce polynôme dépendent des conditions initiales du système. Afin d'éliminer l'influence de ces conditions initiales, on applique l'opérateur $\frac{d^{\max(m,n)}}{ds^{\max(m,n)}}$ aux deux membres de l'équation précédente. L'identifiabilité linéaire découle alors directement des relations suivantes :

$$\frac{d^\alpha}{ds^\alpha}(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Y = \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}(b_0 s^m + \cdots + b_m) U \tag{3.41}$$

avec : $\max(m, n) \leq \alpha \leq \max(m, n) + m + n$ [1].

Remarque 3 . L'équation (3.39) peut être réécrite sous la forme suivante en introduisant le coefficient a_0 :

$$\left(a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n \right) y(t) = \left(b_0 \frac{d^m}{dt^m} + \cdots + b_m \right) u(t) \tag{3.42}$$

Dans cette représentation, le coefficient a_0 est ajouté au modèle dynamique. En supposant, par exemple, que $a_0 \neq 0$, l'ensemble des paramètres $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m\}$ n'est pas linéairement identifiable. En revanche, cet ensemble demeure projectivement linéairement identifiable [1].

3.6 Perturbations

3.6.1 Perturbations structurées

Afin de prendre en compte certaines perturbations spécifiques, on introduit le module à gauche : $L = \Lambda_{k(s)[\frac{d}{ds}]}/M$, où M désigne un sous-module de $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(\underline{\pi})$.

Les variables de perturbation, ou de disturbance, sont notées : $\underline{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_q) \subset L$. Une perturbation $S \subseteq \pi$ est dite structurée si, et seulement si, le module $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(S)$ est de torsion. Autrement dit, pour toute perturbation σ, il existe un opérateur différentiel non nul $\varpi \in K(s)[\frac{d}{ds}], \varpi \neq 0$, tel

que : $\varpi\sigma = 0$. L'opérateur différentiel ϖ est alors appelé annihilateur de la perturbation structurée σ [1].

Exemple 4 . Considérons : $k = C$. La perturbation $\frac{\kappa e^{-Ls}}{s^n}, L \geq 0, \kappa \in C, n \geq 0$, est annihilée par l'opérateur :

$$\left(\frac{d}{ds} + L\right) s^n = s^n \left(\frac{d}{ds} + L\right) + ns^{n-1} \tag{3.43}$$

Cette perturbation est donc structurée. On remarque que l'opérateur annihilant dépend du paramètre L, mais pas de κ [1].

Exemple 5 . La perturbation $\frac{a}{b}, a, b \in k[s], b \neq 0$ est structurée puisqu'elle est annihilée, pour v suffisamment grand, par $\frac{d^v}{ds^v} b$. De manière analogue, le terme $\frac{s+\beta}{s^2+^2}$, avec $\alpha, \beta, \in k$, est annihilé par :

$$\frac{d^2}{ds^2}(s^2+^2) = 2 + 2s\frac{d}{ds} + (s^2+^2)\frac{d^2}{ds^2} \tag{3.44}$$

Cet opérateur contient la fréquence , mais ne dépend ni de α ni de β.

L'ensemble des annihilateurs associés à une perturbation $\sigma \in \text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(S)$ forme un idéal à gauche de $k(s)[\frac{d}{ds}]$. Tout générateur ϖ_0 de cet idéal principal est appelé annihilateur minimal. Si ϖ_0 et ϖ_1 sont deux annihilateurs minimaux, alors il existe $\delta \in k(s), \delta \neq 0$, tel que $\varpi_1 = \delta\varpi_0$ [1].

3.6.2 Perturbations non structurées

Les perturbations qui ne satisfont pas les propriétés précédentes sont qualifiées de non structurées. Ces perturbations correspondent généralement à des signaux fortement oscillatoires ou à des fluctuations rapides. L'atténuation de ces perturbations peut être réalisée à l'aide de filtres passe-bas, tels que les intégrales itérées.

Remarque 4 . L'approche adoptée repose sur les principes de l'analyse non standard. Dans ce cadre, une fonction fortement oscillatoire et de moyenne nulle est considérée comme infinitésimale lorsque son intégrale, calculée sur un intervalle de temps fini, reste très faible.

De nombreuses simulations numériques ainsi que plusieurs validations expérimentales ont montré l'efficacité de cette méthode. Par ailleurs, cette approche ne nécessite aucune hypothèse probabiliste relative aux propriétés statistiques du bruit [1].

3.6.3 Identificateur linéaire

L'équation (3.37) peut être réécrite sous la forme :

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_\tau \end{pmatrix} = Q + R^{\text{struc}} + R^{\text{unstruc}} \tag{3.45}$$

où les composantes de R^{struc} et R^{unstruc} désignent respectivement les perturbations structurées et non structurées.

L'ensemble des opérateurs clichés annihilant R^{struc} constitue un idéal à gauche. Si Δ_1 et Δ_2 sont deux générateurs de cet idéal, alors il existe $\rho \in k(s), \rho \neq 0$, tel que $\Delta_2 = \rho\Delta_1$. En choisissant un

générateur Δ, on obtient :

$$\Delta P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_\tau \end{pmatrix} = \Delta Q + \Delta R^{\text{unstruc}} \tag{3.46}$$

Si $\det(\Delta P) \neq 0$, alors l'équation (3.46), dans laquelle les perturbations structurées sont éliminées, est appelée identificateur linéaire des paramètres inconnus [1].

3.6.4 Robustesse

En multipliant les deux membres de l'équation (3.46) par une fonction de transfert strictement propre appartenant à $k(s)$, il est possible d'obtenir des termes de la forme :

$$r\frac{d^\alpha}{ds^\alpha}(a) \tag{3.47}$$

où :

— $r \in k(s)$ est strictement propre

— $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

— a représente soit une commande, soit une sortie, soit une perturbation non structurée.

L'atténuation des perturbations non structurées est alors assurée par l'utilisation de filtres passe-bas appropriés, notamment les intégrales itérées. Cette procédure conduit à ce que l'on appelle un filtrage invariant [1].

Plusieurs limitations inhérentes au régulateur PID classique motivent le recours à des stratégies de commande plus robustes. En effet, la mise en œuvre d'un PID conventionnel nécessite souvent :

— **Un modèle mathématique relativement précis**

— **Des dérivées mesurées ou calculées**

— **Un réglage délicat**

— **Une sensibilité aux perturbations**

Ces limitations ont conduit au développement de nouvelles approches fondées sur l'estimation algébrique, offrant une meilleure robustesse vis-à-vis du bruit et des incertitudes du modèle.

L'approche algébrique présentée dans les sections précédentes ne se limite pas uniquement à l'identification des paramètres des systèmes dynamiques. Elle permet également l'estimation robuste des dérivées et la reconstruction de certaines variables d'état à partir des signaux mesurés. Cette propriété constitue un avantage important dans les systèmes réels où les mesures sont souvent affectées par le bruit et les perturbations externes.

Dans les méthodes classiques de commande, notamment les régulateurs PID conventionnels, l'utilisation directe des dérivées peut entraîner une forte sensibilité au bruit de mesure. En effet, l'opération de dérivation amplifie généralement la composante haute fréquence du signal, ce qui peut dégrader considérablement les performances du système en boucle fermée. À l'inverse, l'approche algébrique repose principalement sur des opérations d'intégration, naturellement plus robustes vis-à-vis des perturbations non structurées et des fluctuations rapides.

Grâce à cette propriété, il devient possible d'estimer certaines dérivées du système sans effectuer de dérivation numérique directe. Les dérivées reconstruites algébriquement peuvent alors être exploitées dans la synthèse de lois de commande robustes et plus performantes.

Dans ce contexte, les travaux de **Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramírez** ont conduit au développement du régulateur PI généralisé (GPI). Cette stratégie de commande repose sur l'introduction d'intégrateurs supplémentaires ainsi que sur l'utilisation d'estimateurs algébriques permettant d'amé-

liorer le suivi de trajectoire, le rejet des perturbations et la robustesse du système face aux incertitudes du modèle.

Contrairement au PID classique, le régulateur GPI exploite une reconstruction intégrale des états et des dérivées du système. L'ajout d'intégrateurs supplémentaires augmente le gain du correcteur aux basses fréquences, ce qui améliore la compensation des perturbations lentes et réduit l'erreur statique. Cette approche est particulièrement adaptée aux systèmes dynamiques perturbés ou partiellement incertains. Dans la suite de ce chapitre, le principe du régulateur PI généralisé est présenté à travers l'étude d'un système dynamique simple, afin de mettre en évidence son intérêt dans l'amélioration des performances et de la robustesse des systèmes de commande.

3.7 Introduction au régulateur PI généralisé

Le régulateur PID classique est l'un des correcteurs les plus utilisés dans les systèmes de commande grâce à sa simplicité et à ses bonnes performances dans plusieurs applications industrielles.

Dans ce type de correcteur, le terme intégral $\frac{1}{s}$ joue un rôle important dans l'amélioration de la robustesse du système et dans la réduction de l'erreur statique. Cependant, dans certains systèmes dynamiques perturbés ou incertains, les performances du PID classique peuvent devenir insuffisantes, notamment au niveau du suivi de trajectoire et du rejet des perturbations.

Afin d'améliorer les performances du système, le régulateur PI généralisé (GPI) a été développé. Cette approche repose sur l'utilisation d'intégrateurs supplémentaires permettant d'obtenir une meilleure précision et une meilleure robustesse.

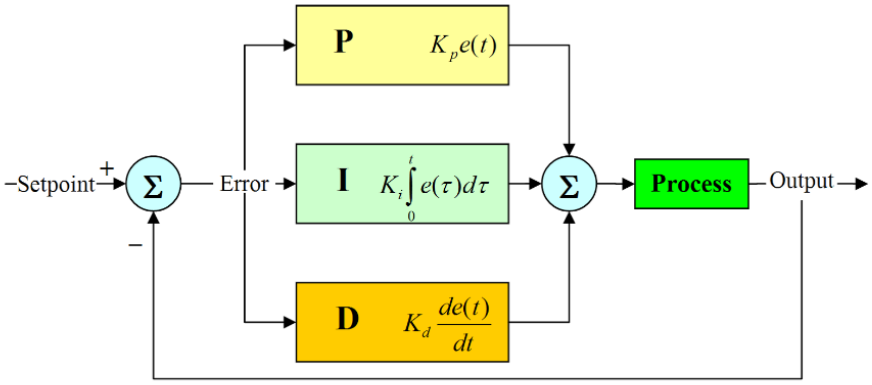


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel d'un régulateur PID classique

Considérons le système linéaire suivant :

$$sx = Ax + Bu \tag{3.48}$$

Par intégration, on obtient :

$$x = \frac{Ax}{s} + \frac{Bu}{s} \tag{3.49}$$

Après itération, l'expression précédente devient :

$$x = A^N s^{-N} x + \sum_{i=1}^{N} A^{i-1} B s^{-i} u \tag{3.50}$$

L'observabilité du système peut alors être exprimée par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P(s^{-1}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} + Q(s^{-1}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

où $P(s^{-1})$ et $Q(s^{-1})$ représentent des matrices polynomiales dépendant de l'opérateur s^{-1}.

Le reconstructeur intégral ainsi que le retour d'état statique sont utilisés afin d'améliorer les performances du système. La loi de commande s'écrit alors [6] :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

Le régulateur PI généralisé permet d'augmenter la robustesse du système grâce à l'ajout d'intégrateurs supplémentaires, comme dans les correcteurs PID classiques. Cette approche améliore également le suivi de la consigne ainsi que le rejet des perturbations[6].

Dans le cas d'un double intégrateur simple, la fonction de transfert peut être représentée par :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2} \tag{3.53}$$

Cette représentation constitue une base importante dans l'étude et la conception des régulateurs PI généralisés.

Dans le cadre de cette étude, nous considérons un système dynamique soumis à des perturbations externes. L'objectif principal est d'assurer un bon suivi de la consigne tout en garantissant la stabilité ainsi que la robustesse du système[6].

Le système étudié est représenté par l'équation suivante :

$$s^2 y = u + \varpi \tag{3.54}$$

Le système d'erreur associé peut alors s'écrire sous la forme :

$$s^2 e = u_e + \varpi \tag{3.55}$$

tel que : $e = y - y^\star$ et $u = s^2 y^\star + u_e$.

Considérons maintenant un correcteur PID classique donné par :

$$u_e = -k_p e - k_i \frac{1}{s} e - k_d s e \tag{3.56}$$

Dans la boucle fermée, on obtient :

$$s^2 e = -k_p e - k_i \frac{1}{s} e - k_d s e + \varpi \tag{3.57}$$

ce qui conduit à :

$$s^3 e + k_d s^2 e + k_p s e + k_i e = s\varpi \tag{3.58}$$

Selon le critère de Routh-Hurwitz, les conditions de stabilité sont données par [6] :

$$k_d > 0, \quad k_i > 0, \quad k_p k_d - k_i > 0 \tag{3.59}$$

Considérons ensuite le système d'erreur sans perturbation :

$$s^2 e = u_e \tag{3.60}$$

Une estimation du terme (se) peut être obtenue après une intégration :

$$\hat{se} = \frac{1}{s} u_e \tag{3.61}$$

On peut alors écrire :

$$se = \hat{se} + se(0) + \frac{1}{s}\varpi \tag{3.62}$$

D'où :

$$\frac{de}{dt} = \hat{se} + \frac{de}{dt}(0) + \int \varpi(\tau) d\tau \tag{3.63}$$

Considérons maintenant la loi de commande suivante :

$$u_e = -k_p e - k_i \frac{1}{s} e - k_d \hat{se} \tag{3.64}$$

Dans la boucle fermée, l'équation devient :

$$s^2 e = -k_p e - k_i \frac{1}{s} e - k_d (se - se(0) - \frac{1}{s}\varpi) + \varpi \tag{3.65}$$

Par conséquent :

$$s^3 e + k_d s^2 e + k_p se + k_i e = s(\varpi - se(0)) - \varpi \tag{3.66}$$

Afin d'améliorer davantage les performances du système et de renforcer sa robustesse vis-à-vis des perturbations, un intégrateur supplémentaire est introduit. Le nouveau régulateur PI généralisé est alors défini par :

$$u_e = -k_p e - k_d \hat{se} - k_i \frac{1}{s} e - k_{ii} \frac{1}{s^2} e \tag{3.67}$$

On obtient ainsi :

$$s^4 e + k_d s^3 e + k_p s^2 e + k_i se + k_{ii} e = s^2(\varpi - se(0)) - s\varpi \tag{3.68}$$

le régulateur PI généralisé :

Le régulateur GPI peut également être défini à partir du premier contrôleur PI suivant :

$$u_e = -k_p e - k_d \frac{1}{s} u_e - k_i \frac{1}{s} e \tag{3.69}$$

où le terme (se) est remplacé par son estimation. La fonction de transfert correspondante est donnée par[6] :

$$\frac{u_e(s)}{e(s)} = \frac{-k_p s + k_i}{s + k_d} = -k_p \frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{s + k_d} \tag{3.70}$$

Le critère de Routh-Hurwitz impose alors la condition suivante :

$$-k_d < -\frac{k_i}{k_p} \tag{3.71}$$

Le compensateur PI généralisé peut ensuite s'écrire sous la forme [6] :

$$u_e = -k_p e - k_d \frac{1}{s} u_e - k_i \frac{1}{s} e - k_{ii} \frac{1}{s^2} e \tag{3.72}$$

La fonction de transfert devient alors :

$$\frac{u_e(s)}{e(s)} = \frac{-k_p s^2 + k_i s - k_{ii}}{s(s + k_d)} \tag{3.73}$$

Les régulateurs PID généralisés peuvent être obtenus à partir d'une estimation des dérivées du système. L'ajout d'intégrateurs supplémentaires permet d'améliorer la robustesse du système ainsi que le rejet des perturbations. Cette approche offre également de meilleures performances dynamiques et améliore la précision du suivi de trajectoire dans les systèmes de commande[6].

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche algébrique dédiée à l'identification des systèmes linéaires a été présentée. Les principales notions liées à l'identifiabilité des paramètres ont été étudiées à travers l'introduction des structures modulaires, des opérateurs différentiels ainsi que de l'algèbre de Weyl. Les différentes formes d'identifiabilité ont permis de caractériser les paramètres pouvant être estimés à partir des signaux d'entrée et de sortie du système.

L'étude des perturbations structurées et non structurées a également montré l'importance des opérateurs annulateurs et des techniques de filtrage dans l'amélioration de la robustesse des systèmes dynamiques. Les identificateurs linéaires introduits dans ce chapitre constituent une base importante pour l'estimation des paramètres en présence de perturbations.

Enfin, l'introduction du régulateur PI généralisé a permis de mettre en évidence l'intérêt des approches de commande avancées pour renforcer les performances dynamiques, améliorer le suivi de trajectoire et assurer un meilleur rejet des perturbations. Les résultats présentés dans ce chapitre constituent ainsi une base théorique essentielle pour les études et simulations développées dans la suite de ce mémoire.

Chapitre 4:

la mise en oeuvre

Chapitre 4

la mise en ouevre

4.1 Exemple 1 : traîner une masse inconnue en boucle ouverte

Pour évaluer les performances et la robustesse de l'approche d'identification algébrique développée par Fliess et Sira-Ramírez [1], nous avons mis en œuvre une campagne de simulation numérique sous MATLAB. L'étude est configurée autour du modèle mécanique fondamental à masse inconnue décrit par la dynamique linéaire suivante [1] :

$$m\ddot{x}(t) = u(t) \tag{4.1}$$

Où $x(t)$ représente le déplacement de la masse et $u(t)$ désigne la force appliquée [1]. En supposant que la masse est initialement placée à une distance x_0 avec une vitesse inconnue $\dot{x}_0$, l'application du calcul opérationnel permet d'écrire [1] :

$$m\left[s^2X - sx_0 - \dot{x}_0\right] = U \tag{4.2}$$

Afin de s'affranchir de la dépendance vis-à-vis de ces conditions initiales non mesurables, les deux membres de l'égalité sont dérivés deux fois par rapport à la variable complexe s [1] :

$$m\left[2X + 4s\frac{dX}{ds} + s^2\frac{d^2X}{ds^2}\right] = \frac{d^2U}{ds^2} \tag{4.3}$$

L'élimination des dérivées temporelles successives, qui s'avèrent hautement sensibles aux bruits de mesure, est ensuite réalisée en multipliant les deux expressions par s^{-2} [1] :

$$m\left[2s^{-2}X + 4s^{-1}\frac{dX}{ds} + \frac{d^2X}{ds^2}\right] = s^{-2}\frac{d^2U}{ds^2} \tag{4.4}$$

Le retour dans le domaine temporel conduit ainsi à l'égalité intégrale suivante [1] :

$$m\left[2\int_0^t\int_0^{\sigma_1} x(\sigma_2)d\sigma_2 d\sigma_1 - 4\int_0^t \sigma_1 x(\sigma_1)d\sigma_1 + t^2x(t)\right] = \int_0^t\int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2)d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{4.5}$$

Cette formulation présente l'avantage majeur d'être totalement indépendante des conditions initiales du système. De plus, elle requiert uniquement la mesure de la force d'entrée $u(t)$ et du déplacement de sortie $x(t)$ afin de calculer la masse m. Posons la relation de l'estimateur inverse sous la forme $1/m = \frac{n(t)}{d(t)}$, où le numérateur $n(t)$ et le dénominateur $d(t)$ sont explicitement définis par les expressions intégrales suivantes :

$$n(t) = t^2 x(t) - 4\int_0^t \sigma_1 x(\sigma_1) d\sigma_1 + 2\int_0^t \int_0^{\sigma_1} x(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{4.6}$$

$$d(t) = \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \sigma_2^2 u(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{4.7}$$

À l'instant initial $t = 0$, le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément ($n(0) = 0$ et $d(0) = 0$), rendant le quotient indéterminé. Par conséquent, l'évaluation numérique de cette formule ne doit pas débuter à $t = 0$, mais à un instant ultérieur légèrement différé, noté $\epsilon > 0$, où ϵ est un paramètre strictement positif et arbitrairement petit. L'estimation de l'inverse de la masse, notée $1/m_e$, est alors formalisée de la manière suivante :

$$\frac{1}{m_e} = \begin{cases} \text{arbitraire} & \text{pour } t \in [0, \epsilon) \\ \frac{n(t)}{d(t)} & \text{pour } t \geq \epsilon \end{cases} \tag{4.8}$$

Il est évident que l'évaluation de ce quotient reste parfaitement valide tant que le dénominateur ne traverse pas de valeur nulle.

Afin de faciliter l'implémentation numérique de ces calculs sur calculateur digital, et sachant que des intégrations temporelles successives sont indispensables pour synthétiser le numérateur et le dénominateur, il est judicieux de structurer ces deux grandeurs sous la forme de sorties de systèmes dynamiques linéaires décrits par des équations différentielles. À cet effet, nous proposons l'introduction de « filtres » linéaires à coefficients variables dans le temps structurés comme suit [1] :

$$\begin{cases} n(t) = t^2 x(t) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -4tx(t) + z_2 \\ \dot{z}_2 = 2x(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d(t) = \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = t^2 u(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

avec les conditions initiales fixées à zéro : $z_1(0) = z_2(0) = 0$ et $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$.

Les Figures (1),(2),(3),et (4) illustrent l'évolution des différents signaux mis en jeu, à savoir le numérateur $n(t)$, le dénominateur $d(t)$, le signal d'entrée $u(t)$ (qui est ici modélisé par une force constante), la sortie du système $y(t) = x(t)$, ainsi que la trajectoire de l'estimation $1/m_e$. Durant l'intervalle initial $[0, \epsilon)$, la valeur arbitraire choisie par défaut pour l'estimateur a été fixée à $1/m_e = 0,5$. Pour cette simulation, le paramètre de retard a été configuré à $\epsilon = 0,1$ s, bien qu'une valeur réelle encore plus faible puisse être parfaitement envisagée. De plus, le signal d'excitation est défini par $u(t) = 1$ pour tout t, et la valeur nominale réelle de la masse à identifier a été fixée à $m = 1$ Kg.

Plusieurs caractéristiques fondamentales et distinctives ressortent des résultats de simulation de cet exemple élémentaire [1] :

1. L'estimation du paramètre de la masse est obtenue de façon extrêmement rapide et robuste. Le temps de convergence dépend de manière critique de la précision arithmétique du processeur utilisé, indispensable pour effectuer correctement le quotient de deux grandeurs devenant extrêmement petites au voisinage de l'origine.
2. Le signal de test $u(t)$ appliqué au système ne requiert pas nécessairement la condition classique de « persistance d'excitation » propre aux méthodes d'identification traditionnelles.
3. L'estimateur du paramètre inverse de la masse est structurellement composé de signaux intrinsèquement instables, tant au niveau du numérateur que du dénominateur.

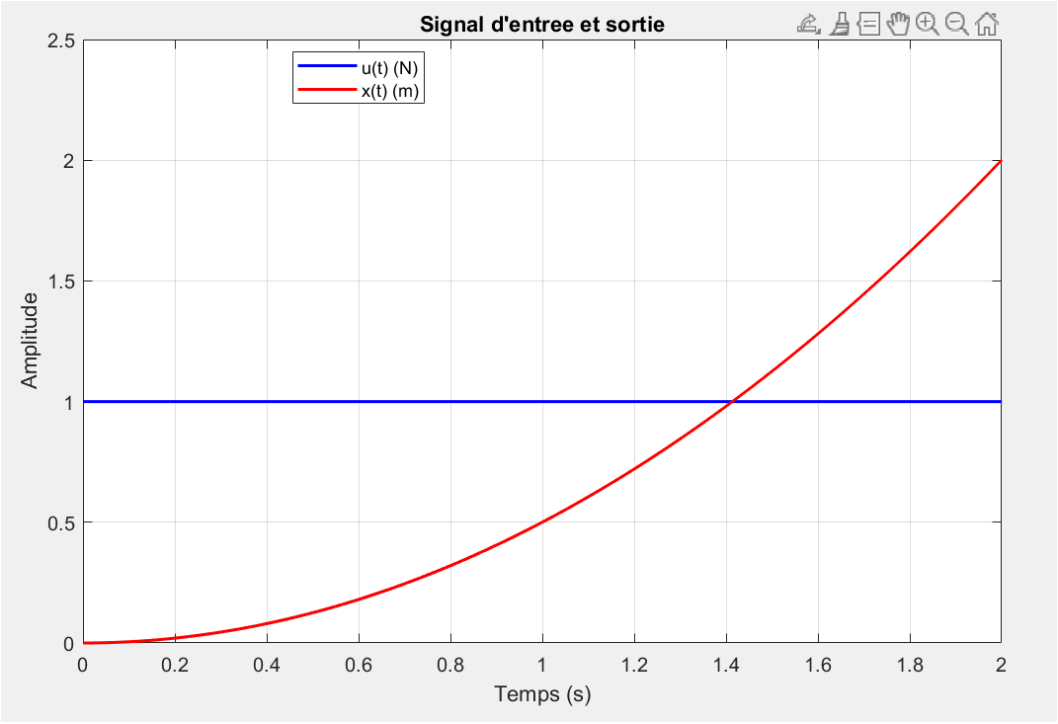


FIGURE 4.1 – l'entrée u(t) et la sortie x(t)

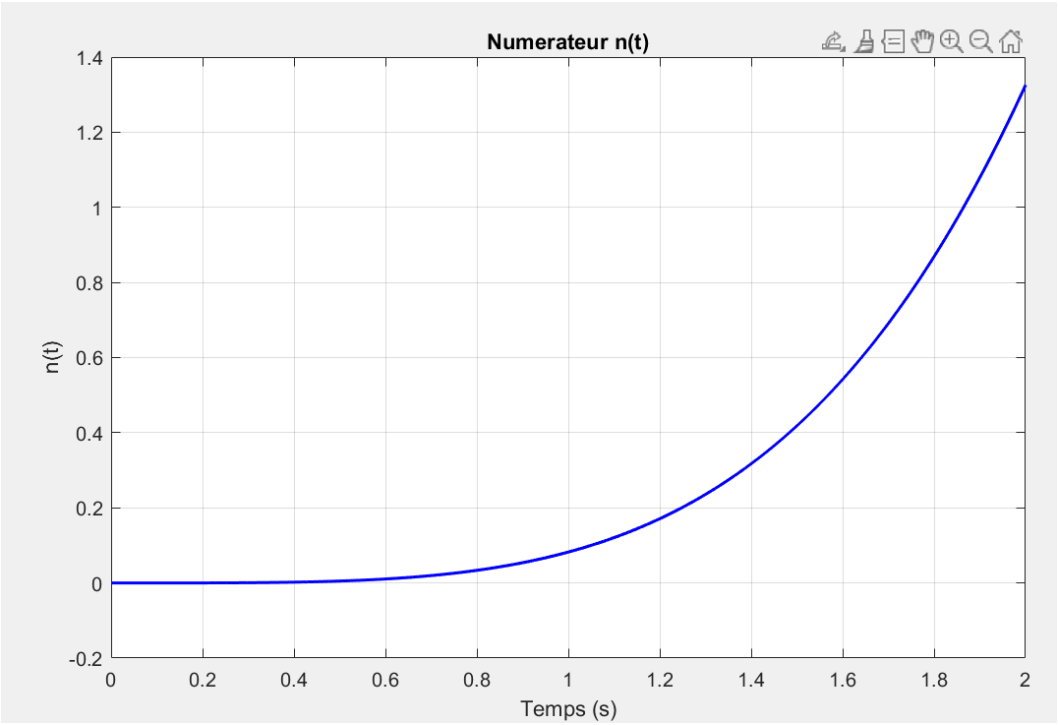


FIGURE 4.2 – le numérateur

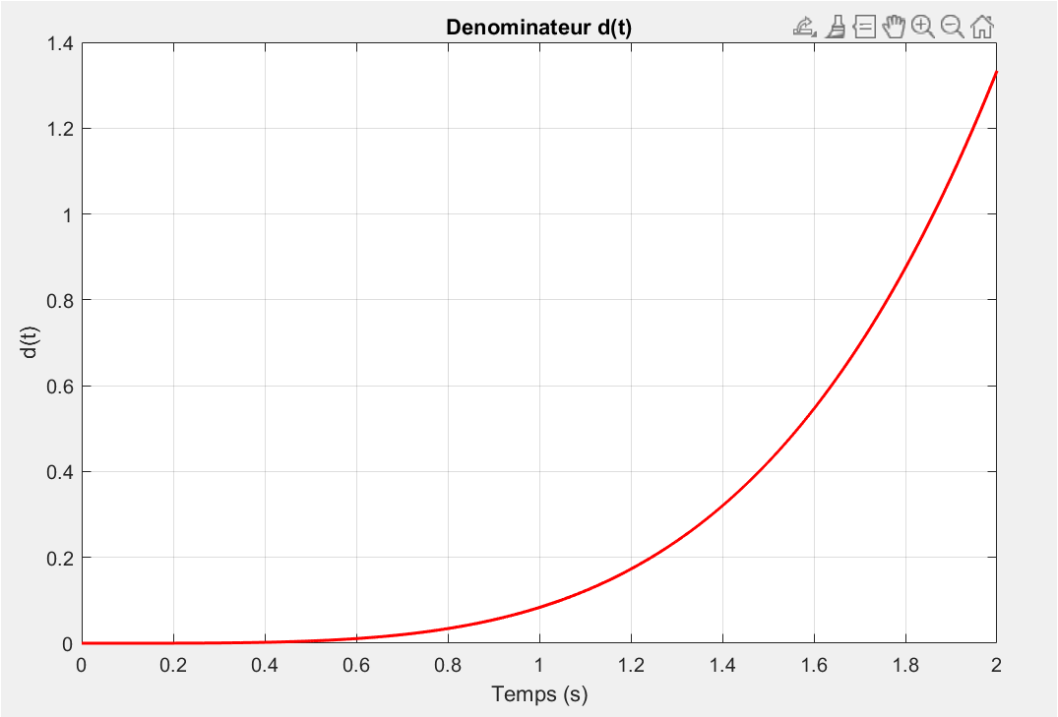


FIGURE 4.3 – dénominateur d(t)

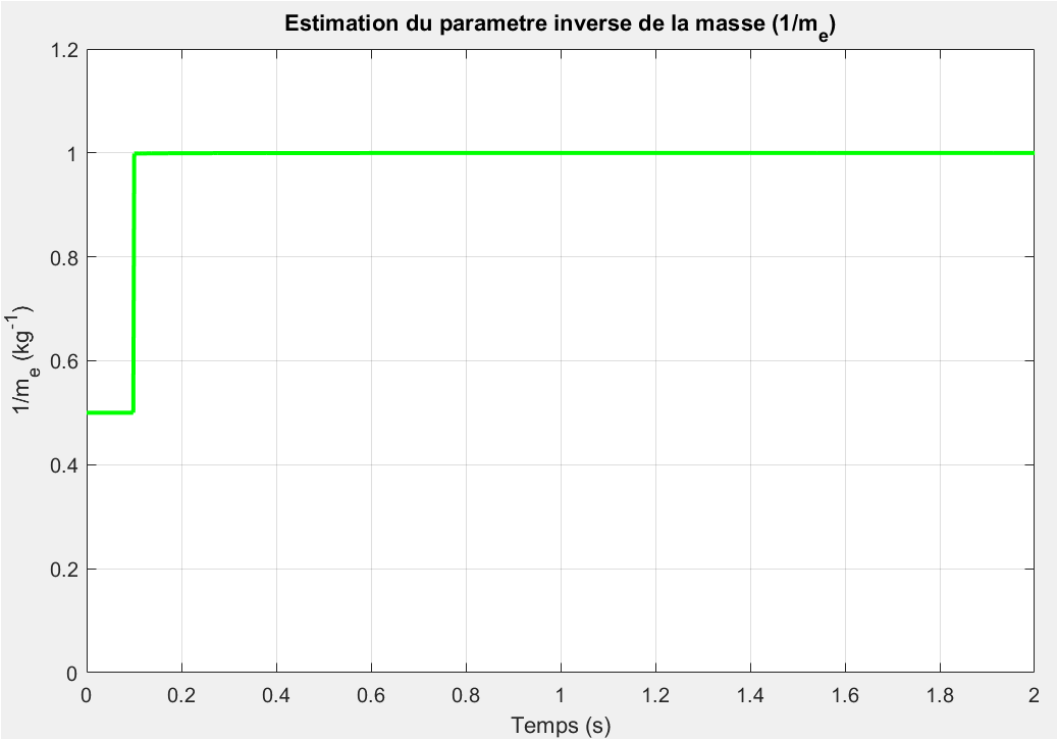


FIGURE 4.4 – la valeur estimée $1/m_e$

Pour nuancer la première observation concernant la précision chirurgicale de notre estimation, il convient de souligner que cette exactitude remarquable découle directement de deux facteurs clés : l'adéquation parfaite de la formule par rapport au modèle mathématique d'une part, et l'absence totale de perturbations dans ce scénario initial d'autre part [1]. Dans un cadre pratique, l'injection d'un bruit de mesure dégrade non seulement la fidélité de l'identification numérique, mais peut également altérer

sa convergence rapide.

Tandis que l'absence de contrainte sur la persistance de l'excitation reste un avantage indiscutable, la vulnérabilité structurelle liée à l'instabilité de nos filtres internes trouve une parade élégante et simple. Il suffit, du moins temporairement, de désactiver ou de débrayer (*switch-off*) l'algorithme d'estimation immédiatement après l'obtention de la valeur stable du paramètre [1]. La prise en compte des bruits de mesure s'avère toutefois cruciale pour garantir la viabilité de l'approche. C'est dans cette perspective que s'inscrit la technique de débruitage présentée ci-après.

4.1.1 Technique de débruitage (*Denoising*) par filtrage invariant

Pour immuniser notre schéma d'identification face aux bruits hautes fréquences omniprésents sur les capteurs industriels, l'expression algébrique initiale du rapport :

$$\frac{1}{m} = \frac{n(t)}{d(t)} \tag{4.10}$$

est profondément restructurée. En exploitant les propriétés constructives du calcul opérationnel, les signaux temporels du numérateur $n(t)$ et du dénominateur $d(t)$ subissent une opération de convolution linéaire avec un filtre invariant approprié, noté $\mathcal{G}$ [1]. L'estimation de la masse inverse prend alors la forme robuste suivante :

$$\frac{1}{m} = \frac{\mathcal{G} \star n(t)}{\mathcal{G} \star d(t)} \tag{4.11}$$

Où l'opérateur $\star$ désigne le produit de convolution dans le domaine temporel. Cette formulation alternative permet d'incorporer directement des dynamiques de filtrage passe-bas d'ordre élevé au sein même de la structure algébrique, assurant ainsi l'atténuation des bruits sans introduire de déphasage néfaste sur l'estimation finale du $1/m$.

Où $\mathcal{G}$ représente un filtre passe-bas caractérisé par une fonction de transfert rationnelle $G(s)$ [1]. Selon les développements théoriques établis par les auteurs, l'application d'un tel filtrage invariant permet d'atténuer efficacement les bruits à moyenne nulle et à fortes fluctuations [1]. Cela inclut aussi bien le bruit de dynamique du procédé $\zeta(t)$ que le bruit de mesure $\xi(t)$ intervenant dans le système physique suivant :

$$m\ddot{x}(t) = u(t) + \zeta(t), \quad y(t) = x(t) + \xi(t) \tag{4.12}$$

Pour mener à bien l'estimation de la masse inverse en présence de ces deux sources de perturbation, nous adoptons la structure de filtres variants dans le temps proposée dans l'article, dont les sorties filtrées passe-bas correspondent à une intégration de second ordre [1] :

$$\begin{cases} n(t) = z_1 \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = t^2 y(t) + z_3 \\ \dot{z}_3 = -4ty(t) + z_4 \\ \dot{z}_4 = 2y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d(t) = \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = t^2 u(t) \end{cases} \tag{4.13}$$

Cette configuration dynamique est initialisée avec des conditions de départ strictement nulles, soit $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0$ et $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \cdots = \eta_4(0) = 0$, garantissant ainsi une base d'intégration propre [1].

Dans le cadre de nos simulations numériques visant à reproduire fidèlement l'environnement de

test de la référence, les signaux stochastiques de perturbation sont définis par $\xi(t) = 0.02(\text{rect}(t) - 0.5)$ et $\zeta(t) = (\text{rect}(t) - 0.5)$ [1]. Ici, la fonction $\text{rect}(t)$ désigne un processus aléatoire généré par ordinateur, constitué de variables aléatoires constantes par morceaux et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$ [1]. L'intégration de ces expressions analytiques permet de valider de manière rigoureuse la robustesse et l'immunité de l'algorithme face à des bruits de dynamique et de mesure simultanés.

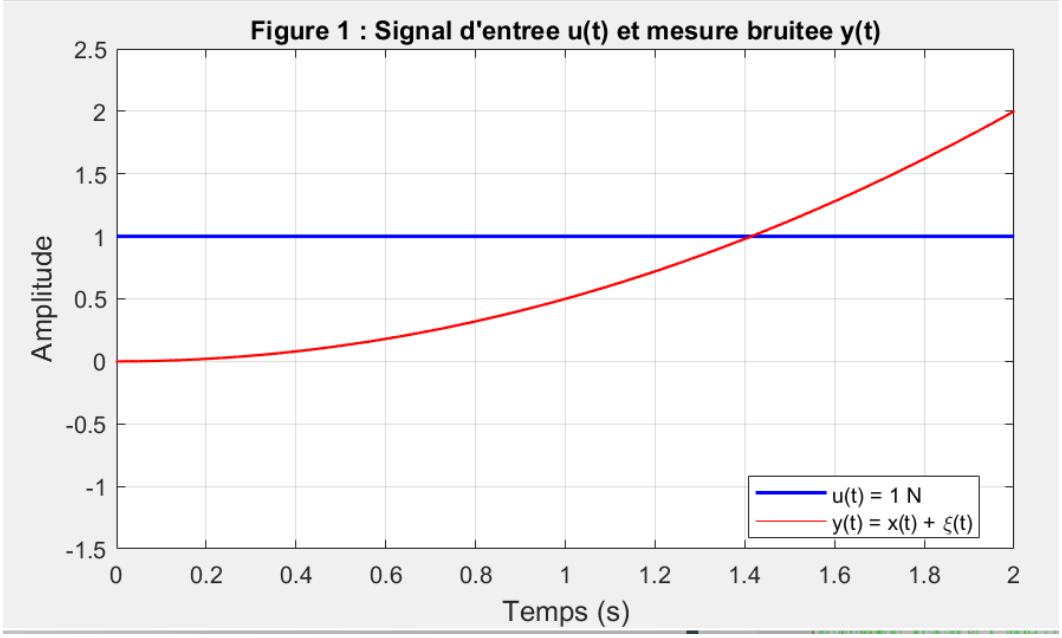


FIGURE 4.5 – u(t) et y(t)

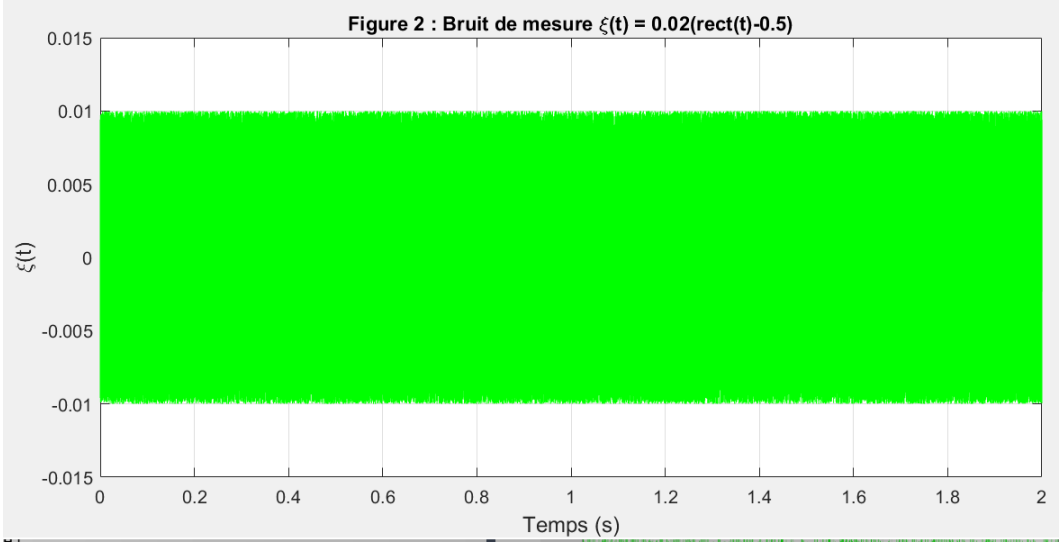


FIGURE 4.6 – le bruit de mesure

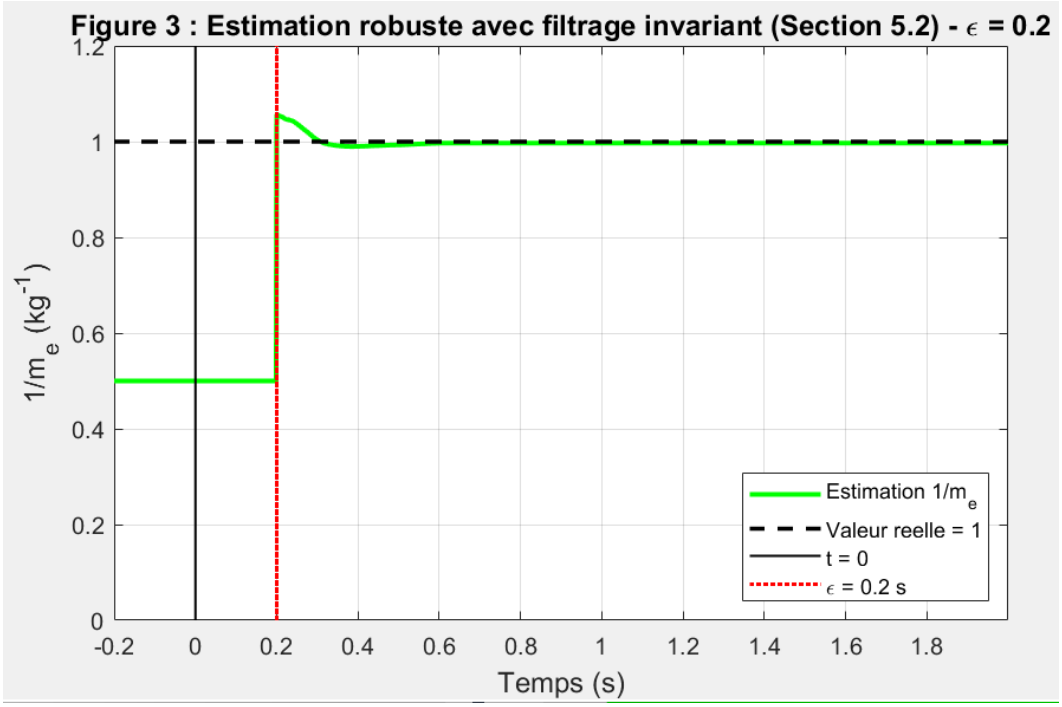


FIGURE 4.7 – Identification du paramètre de la masse inverse en présence de bruits de mesure et de dynamique par filtrage invariant [1].

Il est fondamental de mettre en évidence une modification paramétrique cruciale introduite lors de cette simulation en milieu bruité par rapport au cas idéal. Comme le souligne la description de la référence [1], une valeur plus élevée du paramètre de la zone morte, fixée ici à $\epsilon = 0.2$ s, a été volontairement adoptée.

Ce choix méthodologique est dicté par la nécessité de garantir un calcul numérique fiable et hautement sécurisé du quotient algébrique $\theta_e(t) = n(t)/d(t)$. En effet, l'introduction simultanée des bruits de mesure et de dynamique affecte le rapport signal sur bruit (RSB ou *Signal-to-Noise Ratio*) à l'origine du temps ($t = 0$).

L'extension de cet intervalle transitoire à $\epsilon = 0.2$ s permet d'attendre que l'énergie du signal utile présent au numérateur devienne statistiquement dominante face à la puissance globale du bruit. On évite ainsi toute fausse convergence ou instabilité numérique lors de la phase cruciale de saut de l'estimateur [1].

4.2 Exemple 2 : Contrôle d'une masse inconnue

La procédure décrite dans l'exemple précédent ne distingue pas réellement entre les schémas en boucle ouverte et ceux en boucle fermée. Les valeurs de u interviennent, dans les deux cas, exactement de la même manière dans la formule de calcul de la masse inconnue.

Pour illustrer ce dernier fait, nous posons maintenant le problème du contrôle de la masse inconnue le long d'une trajectoire pré-spécifiée.

Nous incluons également un terme de perturbation dû au frottement de Coulomb, afin de montrer comment notre algorithme d'identification se combine naturellement avec les stratégies de contrôle robuste existantes.

Considérons alors le système à masse inconnue,

$$m\ddot{x} = u(t) - \mu \operatorname{sign}(\dot{x}) \tag{4.14}$$

$$y = x$$

où μ est l'amplitude constante inconnue de la force de frottement de Coulomb. Notons que tant que la masse est en mouvement, le terme de frottement de Coulomb est constant par morceaux. Près de l'équilibre ($\dot{x} \approx 0$), ce terme présente un comportement typique "bang-bang" à haute fréquence.

Si le paramètre de masse m était complètement connu, nous trouverions que le contrôleur Proportionnel-Intégral Généralisé (GPI) suivant, écrit sous forme classique, permet un suivi précis d'une trajectoire donnée $x^*(t)$ malgré la perturbation inconnue du frottement de Coulomb.

$$u = m\left[\ddot{x}^*(t) - \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s + k_3)}(x - x^*(t))\right] \tag{4.15}$$

où l'ensemble des coefficients $\{k_2, \ldots, k_0\}$ est choisi de sorte que le polynôme caractéristique en boucle fermée

$$p(s) = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \tag{4.16}$$

ait toutes ses racines dans le demi-plan gauche du plan complexe.

Les performances du contrôleur GPI, lorsque la masse m est connue, s'avèrent satisfaisantes comme le montre la figure suivante.

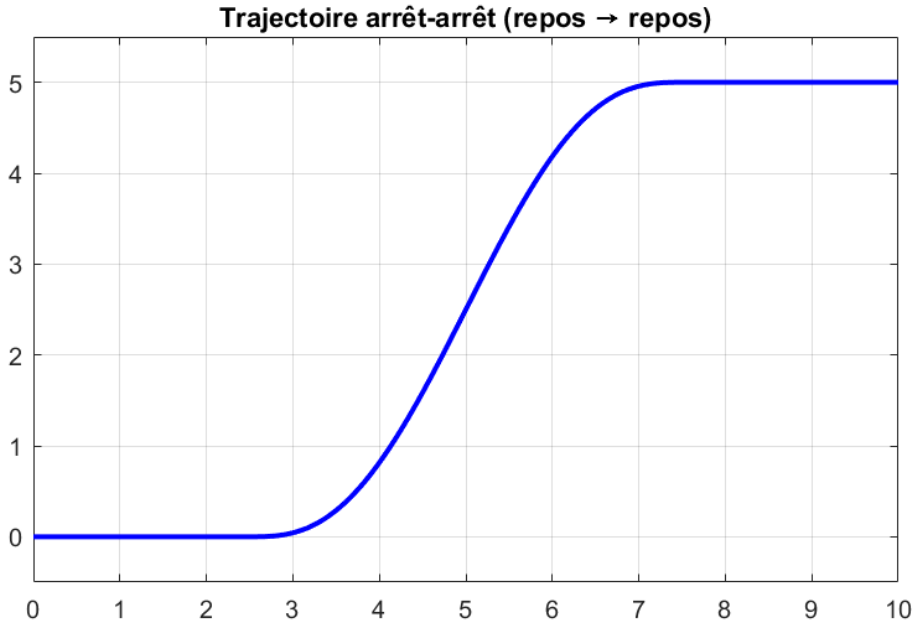


FIGURE 4.8 – La trajectoire arrêt-arrêt du régulateur GPI

Nous fixons ici comme objectif de déplacer la masse en douceur depuis une position initiale au repos jusqu'à une position finale au repos située à 5 mètres, en 5 secondes.

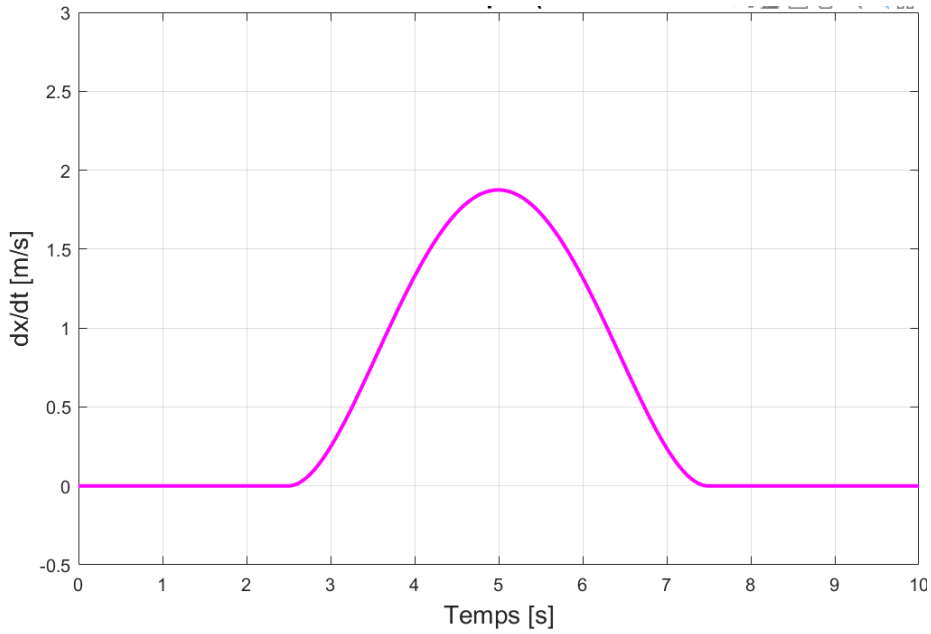


FIGURE 4.9 – dx/dt

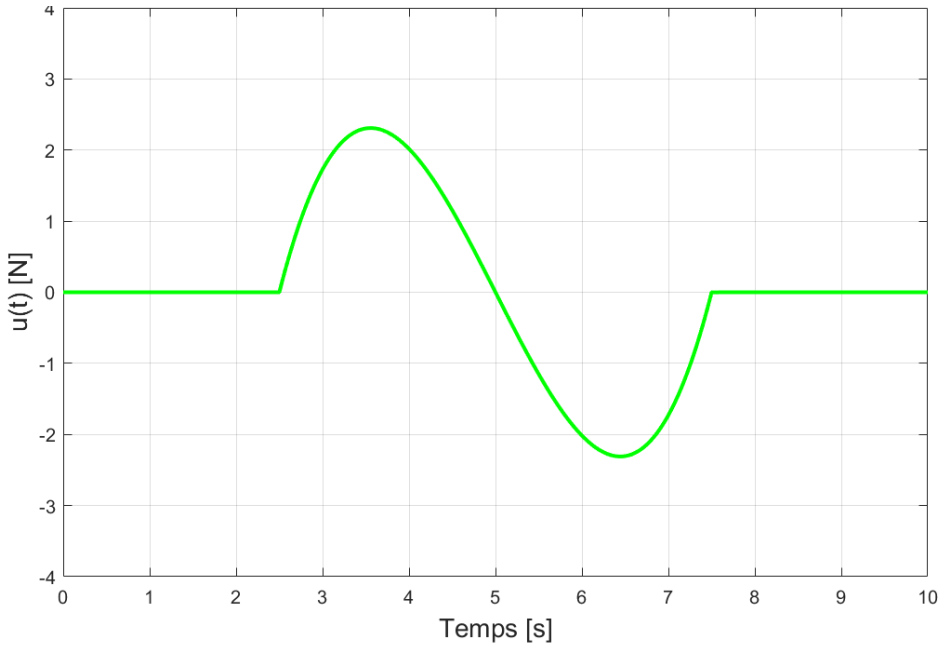


FIGURE 4.10 – la commande u(t)

L'identification du paramètre de masse inconnu est maintenant confrontée aux effets du terme de perturbation inconnu provenant du frottement de Coulomb. Comme cette perturbation adopte la forme d'une perturbation constante par morceaux tant que l'objet est en mouvement, nous pouvons procéder comme s'il s'agissait d'une perturbation constante.

L'idée est que si cette perturbation reste constante pendant une courte période, nous devrions alors être capables d'estimer avec précision le paramètre durant cette période. Mais, clairement, pour cela nous devons également rendre le processus d'identification indépendant de l'amplitude de la force de frottement μ, quel que soit son signe. D'autre part, lorsque la vitesse de la masse est proche de zéro, le terme de frottement de Coulomb présente un comportement "bang-bang" rapidement variable. Cela

équivaut à un bruit haute fréquence qui, du point de vue du processus d'estimation des paramètres, sera moyenné à zéro par les intégrations itérées considérées.

En prenant une dérivée temporelle du modèle sous l'hypothèse que le terme de Coulomb donne temporairement une force constante, nous obtenons :

$$m\dddot{x} = \dot{u} \tag{4.17}$$

$$y = x$$

Ainsi, dans ce cas, nous multiplions le modèle modifié du système par $(t-t_0)^3$ et nous intégrons par parties trois fois les deux membres de l'expression. Nous obtenons, après avoir résolu pour $1/m$:

$$\frac{1}{m} = \frac{6\left(\int_0^1 y\right) - 18\left(\int_0^1 (t-t_0)^2 y\right) + 9\left(\int_0^1 (t-t_0)^3 y\right) - \left(\int_0^1 (t-t_0)^4 y\right)}{\left(\int_0^1 (t-t_0)^2 u\right) - \left(\int_0^1 (t-t_0)^3 u\right)} \tag{4.18}$$

Malgré la possibilité d'introduction de bruit haute fréquence dans la mesure de la variable de position, on intègre deux fois les expressions du numérateur et du dénominateur. Nous obtenons alors la formule suivante pour l'estimation de la masse inconnue en présence de bruits de mesure et d'entrées de perturbation dues au frottement.

$$\frac{1}{m} = \begin{cases} \text{arbitraire pour } t \in [t_0, t_0+\varepsilon] \\ \\ \dfrac{n(t)}{d(t)} \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} n(t) = \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_3 - (t-t_0)^3 y(t) \\ \dot{\zeta}_3 = \zeta_4 + 9(t-t_0)^2 y(t) \\ \dot{\zeta}_4 = \zeta_5 - 18(t-t_0) y(t) \\ \dot{\zeta}_5 = 6y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} d(t) = \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = \eta_5 - (t-t_0)^3 u(t) \\ \dot{\eta}_5 = 3(t-t_0)^2 u(t) \end{cases} \tag{4.20}$$

où $y(t)$ est le signal de position de la masse mesuré, lequel est inévitablement soumis à des processus de bruit caractérisés par leur fréquence, ou à des variations rapides :

$$y(t) = x(t) + \xi(t) \tag{4.21}$$

Le contrôleur de trajectoire GPI joue le rôle d'un contrôleur certainement équivalent. En tant que tel, il devrait maintenant être spécifié de manière adaptative comme suit :

$$u = m_e \left[\dot{y}^*(t) - \left[\frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s+k_3)}\right](y - y^*(t))\right] \tag{4.22}$$

où $y^*(t) = x^*(t)$ est la trajectoire de position de référence désirée et m_e est la masse estimée.

Une petite perturbation d'état de la position d'équilibre déclenche une action de commande suffisante pour identifier le paramètre dans un intervalle $\varepsilon = 0,1$ seconde. En attendant, une valeur fausse de la masse est utilisée dans le contrôleur GPI.

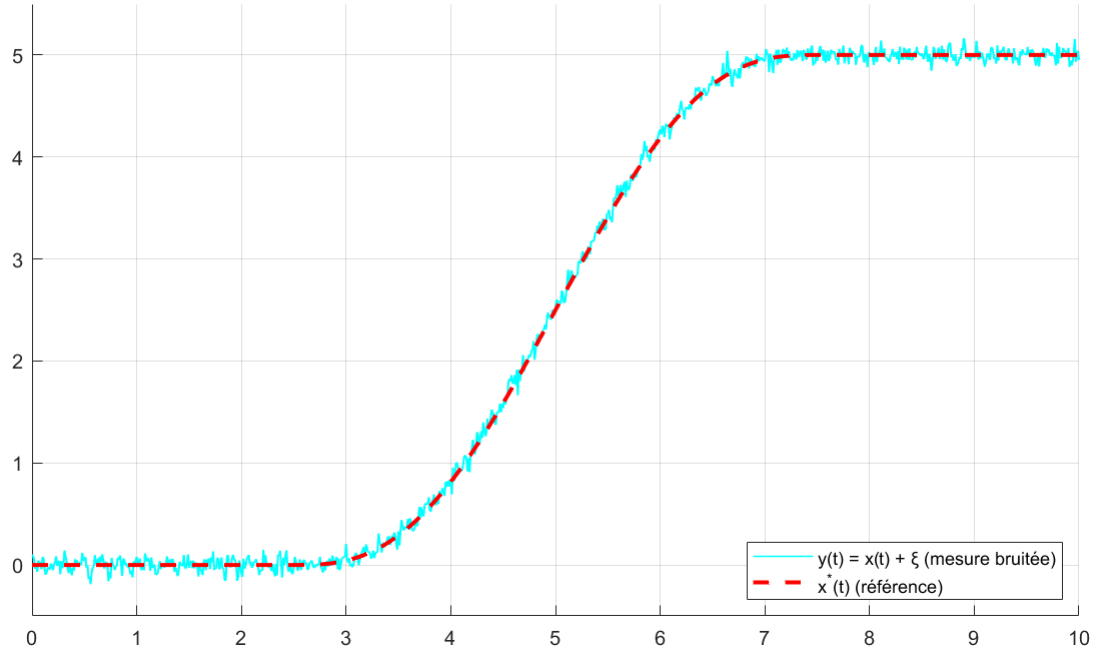


FIGURE 4.11 – la trajectoire arrêt-arrêt x*(t),et la sortie y(t)

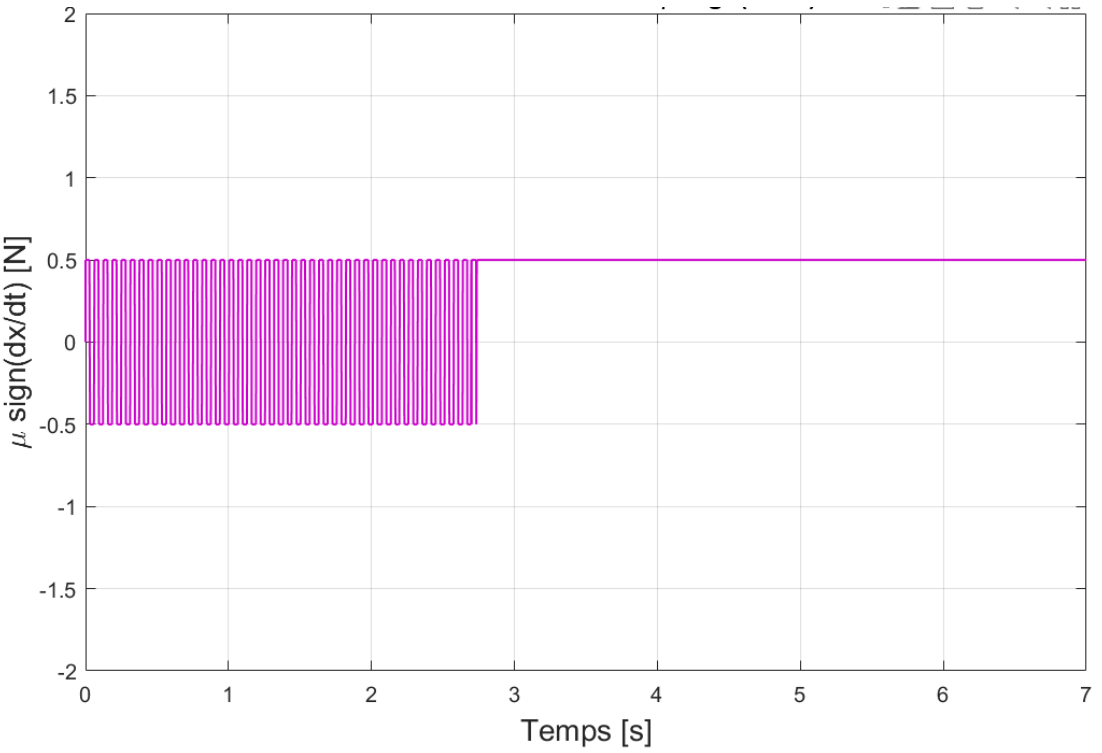


FIGURE 4.12 – la perturbation du frottement de Coulomb

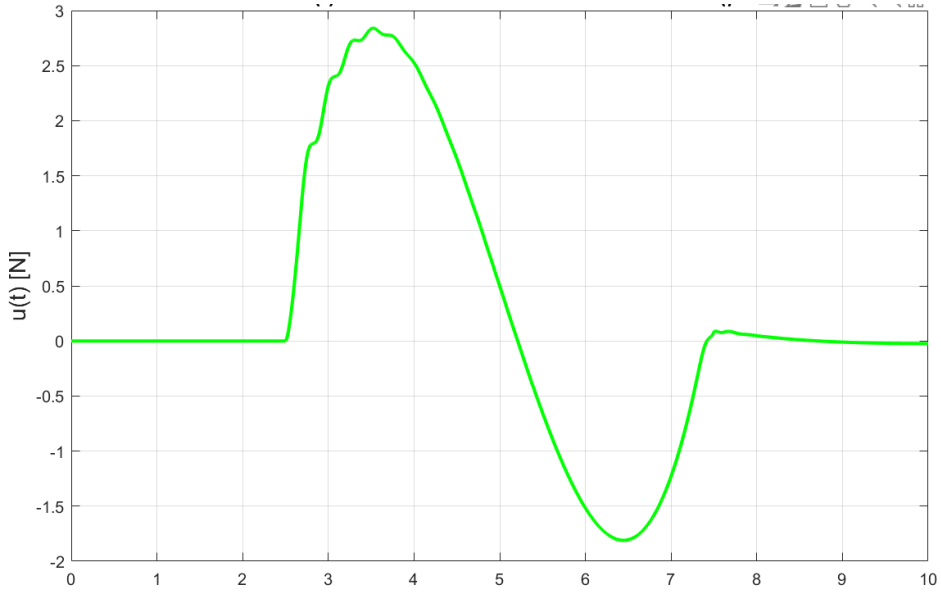


FIGURE 4.13 – la commande u(t)

Remarque

dans cet exemple l'effet de perturbation est important , le problème est le choix de la trajectoire $x^*(t)$,et les paramètres du GPI.



Conclusion



conclusion générale

Ce mémoire de fin d'études a permis d'explorer, de formaliser et de valider une méthodologie moderne d'identification paramétrique des systèmes dynamiques en temps continu, en mettant en relief les apports fondamentaux des techniques algébriques récentes par rapport aux approches conventionnelles.

La première partie de ce travail, à travers les deux premiers chapitres, a posé les jalons indispensables à notre étude. Après avoir rappelé les bases de la modélisation et de la représentation d'état des systèmes linéaires, nous avons dressé un panorama des techniques d'identification traditionnelles, à commencer par la méthode des moindres carrés. Bien que performantes sous certaines conditions d'excitation stable, ces approches classiques révèlent des limites contraignantes en pratique, notamment leur forte sensibilité vis-à-vis des propriétés stochastiques du bruit de mesure et l'exigence de larges fenêtres d'observation de données.

Pour s'affranchir de ces limites, le troisième chapitre a introduit un formalisme novateur basé sur l'identification algébrique non asymptotique, s'appuyant sur le calcul opérationnel, la théorie des modules et la théorie des anneaux non commutatifs. Les développements théoriques présentés ont démontré qu'il est possible de formuler des estimateurs de paramètres en ligne, ultra-rapides, et n'exploitant que les signaux directement mesurables (les entrées et les sorties). Cette approche élimine de manière élégante l'impact des conditions initiales inconnues ainsi que l'effet des entrées de perturbations extérieures classiques.

La validation par simulation de cette méthodologie, au cœur de notre quatrième chapitre, a pleinement confirmé la viabilité et l'efficacité de la théorie. Menées à travers deux exemples d'application distincts sous l'environnement Simulink du logiciel MATLAB, les modélisations numériques ont mis en exergue la vitesse de convergence remarquable des paramètres identifiés. De plus, face aux bruits de mesure haute fréquence, la méthode algébrique a manifesté une robustesse bien supérieure aux estimateurs classiques, évitant l'amplification des perturbations inhérente aux méthodes de dérivation numérique directe.

En guise de perspectives, ce travail ouvre la voie à plusieurs extensions scientifiques prometteuses :

Il serait particulièrement intéressant d'étendre cette approche algébrique déterministe à des structures de systèmes non linéaires plus complexes ou à des systèmes multivariables (MIMO).

Une suite logique à ce travail consisterait à valider ces algorithmes de calcul en ligne sur un banc d'essai physique ou un système expérimental réel, afin de tester les performances de la méthode face aux contraintes concrètes des processus industriels.



Bibliographie



Bibliographie

[1] Michel Fliess and Hebertt Sira-Ramírez. Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. In H. Garnier and L. Wang, editors, *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Advances in Industrial Control, pages 362–391. Springer, 2008.

[2] Bohdan T Kulakowski, John F Gardner, and J Lowen Shearer. *Dynamic modeling and control of engineering systems*. Cambridge University Press, 2007.

[3] Katsuhiko Ogata. *Modern control engineering*. Prentice hall, 2010.

[4] Ioan Doré Landau and Alireza Besançon-Voda. *Identification des systèmes*. Collection Traité IC2, série Systèmes automatisés. Hermès Science Publications, Paris, 2001.

[5] S. Lounes and S. Ould Mohammed. Identification des systèmes dynamiques par l'optimisation globale. Mémoire de fin d'études, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, Département de Génie Électrique et Informatique, 2019.

[6] Ahmed Alsuleiman. Méthode algébrique d'estimation et d'identification. Projet de fin d'études, Université Abou Bekr Belkaïd, Tlemcen, Algérie, octobre 2007.

[7] Hugues Garnier, Marion Gilson, and Thierry Bastogne. Identification de modèles paramètriques à temps continu. méthodes, outil logiciel et avantages. In *Journées Identification et Modélisation Expérimentale (JIME'2006)*, page pp.CDROM, Poitiers, France, November 2006. HAL Id : hal-00109105, version 1.

[8] A. Neves. *Identification algébrique et déterministe de signaux et systèmes à temps continu : Application à des problèmes de communication numérique*. Thèse de doctorat, Université René Descartes - Paris V, France, 2005.

Résumé

Ce travail introduit une approche algébrique inédite dédiée à l'identification paramétrique des systèmes continus, qu'ils soient linéaires ou non linéaires. Reposant sur le calcul opérationnel, la théorie des modules ainsi que la théorie des anneaux non commutatifs, cette méthode se distingue par sa rapidité d'exécution et sa capacité à fonctionner directement en ligne à partir des seuls signaux d'entrée et de sortie. L'efficacité de cette technique est ici mise en évidence pour la classe des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) soumis à des perturbations externes inconnues.

La structure de ce projet se déploie en deux axes principaux. Le premier volet pose les fondements théoriques à travers l'étude de la modélisation des systèmes, des approches d'identification usuelles et des principes fondamentaux de l'analyse algébrique. Le second volet est quant à lui consacré à la validation pratique de cette méthodologie à travers le développement de deux exemples d'application distincts.

Mots-clés :Identification algébrique,Estimation paramétrique,Systèmes dynamiques linéaires,Filtrage des variables d'état (FVE)

Abstract :

This work introduces a novel algebraic approach dedicated to the parametric identification of both linear and nonlinear continuous-time systems. Grounded in operational calculus, module theory, and non-commutative ring theory, this method stands out for its high-speed performance and its capacity to operate online using only input and output measurements. The effectiveness of this technique is highlighted for the class of linear time-invariant (LTI) systems subject to conventional unknown disturbance inputs.

The structure of this project is deployed in two main areas. The first part establishes the theoretical foundations through the study of system modeling, conventional identification approaches, and the core principles of algebraic analysis. The second part is devoted to the practical validation of this methodology through the development of four distinct application examples.

Keywords :Algebraic identification,Parameter estimation,Linear dynamic systems ,Continuous-time

ملخص :

يقدم هذا العمل مقاربة جبرية مبتكرة مخصصة للتعرف المعلمي على الأنظمة المستمرة، سواء كانت خطية أو غير خطية. وتتميز هذه الطريقة، القائمة على الحساب العملياتي ونظرية المقاييس بالإضافة إلى نظرية الحلقات غير التبادلية، بسرعتها العالية في التنفيذ وقدرتها على العمل مباشرة على الخط بالاعتماد فقط على إشارات الإدخال والإخراج. وقد تم تسليط الضوء على فعالية هذه التقنية من خلال تطبيقها على فئة الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً (شةي) الخاضعة لاضطرابات خارجية مجهولة.

تتوزع هيكلية هذا المشروع على محورين رئيسيين؛ حيث يرتكز المحور الأول على إرساء القواعد النظرية من خلال دراسة نمذجة الأنظمة، وطرق التعرف التقليدية، والمبادئ الأساسية للتحليل الجبري. في حين يخصص المحور الثاني للتحقق التجريبي والتطبيقي من هذه المنهجية، وذلك عبر تطوير أربعة أمثلة تطبيقية مختلفة.

الكلمات المفتاحية :التعرف الجبري،تقدير المعلمات ، الأنظمة الديناميكية الخطية، الوقت المستمر