

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option: Équations aux dérivées Partielles
présenté par

ABDELLI Mohamed Hocine

**Quelques problèmes non locaux avec des conditions aux limites
de Neumann.**

Soutenu le : 22 / 06 / 2026 devant le jury composé de :

M. A.BENSEDIK	M.C.A, Université de Tlemcen	President
M. A.ATTAR	Professeur, Université de Tlemcen	Examineur
M. Y.O.BOUKARABILA	M.C.A, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire: 2025-2026

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage, la force et la volonté de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir durant toutes mes années d'études.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Mr Youssouf Ousama Boukarabila, qui m'a encadré tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail, j'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Je tiens à remercier également Mr Ahmed Bensedik pour l'honneur d'avoir accepter de présider le jury.

Je tiens à remercier Mr Ahmed Attar pour l'honneur d'avoir accepter d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mes études.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude comparative de deux approches non locales pour les problèmes aux valeurs propres et les équations elliptiques et paraboliques avec **conditions de Neumann non locales**, sur un domaine borné lipschitzien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

La première approche, due à **Dipierro, Ros-Oton et Valdinoci** [9], utilise le **laplacien fractionnaire** $(-\Delta)^s$ ($s \in (0, 1)$), dont le noyau $c_{n,s}|x-y|^{-(n+2s)}$ est *singulier* et à longue portée. La condition de Neumann non locale correspondante est :

$$\mathcal{N}_s u(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega},$$

et le cadre fonctionnel adapté est l'espace de Hilbert $H_{\Omega,g}^s$, qui intègre un poids $|g|$ sur l'extérieur ainsi que la semi-norme de Gagliardo.

La seconde approche, développée par **Rossi** [16], traite un opérateur de diffusion non locale à noyau *régulier* continu $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y) - u(x)) dy, \quad x \in \Omega.$$

Les deux approches partagent la même structure spectrale ($0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$) mais diffèrent profondément par la nature de leurs noyaux, leurs espaces fonctionnels et la portée de l'opérateur.

Mots-clés : Laplacien fractionnaire, noyau régulier, Neumann non local, espaces de Sobolev fractionnaires, analyse spectrale, conservation de masse, constantes optimales dans L^q , limite locale BBM.

Table des matières

Résumé	4
Table des Notations et Symboles	8
Introduction Générale	10
I Outils Mathématiques	12
1 Cadre Fonctionnel	13
1.1 Le laplacien fractionnaire et la condition de Neumann	13
1.2 L'espace fonctionnel $H_{\Omega,g}^s$:	17
1.3 Définition, normes et propriétés fondamentales	19
1.4 Caractérisation par la transformée de Fourier	20
1.5 Injections de Sobolev fractionnaires	20
1.6 Inégalité de Poincaré–Wirtinger non locale	22
1.7 Opérateurs nonlocaux à noyau régulier:	22
II Noyau Singulier	24
2 Problème Elliptique Linéaire	25
2.1 Formulation faible du problème elliptique	25
2.2 Formules d'intégration par parties non locales	25
2.3 Principe du maximum	29
2.4 Fonctionnelle d'énergie et caractérisation variationnelle	29
2.5 Existence et unicité	31
2.6 Comportement à l'infini:	35
3 Analyse Spectrale de $(-\Delta)^s$ avec $\mathcal{N}_s u = 0$	40
3.1 Problème aux valeurs propres et quotient de Rayleigh	40
3.2 Théorème spectral principal	40
3.3 Caractérisation variationnelle et formule de Courant–Fischer [6]:	42
4 Équation de la Chaleur Non locale	44
4.1 Existence et unicité globale	44
4.2 Conservation de la masse	44
4.3 Décroissance de l'énergie	45
4.4 Convergence vers la valeur moyenne	46

5	Régularité et Comportement au Bord	47
5.1	Continuité via la condition de Neumann non locale	47
6	Études complémentaires	59
6.1	Problème Surdéterminé	59
6.2	Comparaison avec les Travaux Antérieurs	59
III	Noyau Régulier	61
7	Valeurs Propres de Neumann pour l'Opérateur à Noyau J	62
7.1	Formule d'intégration par parties et structure variationnelle	62
7.2	Valeur propre triviale $\beta_1 = 0$ et conservation de masse	63
7.3	Première valeur propre non triviale β_2	65
7.4	Bornitude de L_J sur $L^2(\Omega)$	67
7.5	Théorème spectral pour $-L_J$ avec $\mathcal{N}_J u = 0$	69
7.6	Décroissance exponentielle	70
7.7	Existence et unicité pour le problème stationnaire et parabolique	72
8	Constantes Optimales dans L^q	73
8.1	La constante optimale β_q et ses propriétés	73
8.2	Tableau de synthèse	74
IV	Comparaison et Limite Locale	75
9	Comparaison des Deux Cadres et Limite Locale	76
9.1	Nature du noyau : ce qui change fondamentalement	76
9.2	Limite locale $s \rightarrow 1^-$: théorème de Bourgain–Brezis–Mironescu	76
9.3	Limite locale pour le noyau régulier	78
9.4	Tableau de synthèse des deux limites locales	78
9.5	Tableau comparatif final	79
A	Outils d'Analyse Fonctionnelle	81
A.1	Théorème de représentation de Riesz et de Lax–Milgram	81
A.2	Alternative de Fredholm	81
A.3	Théorème de Fubini	81
A.4	Théorème de Hille–Yosida	82
A.5	Lemme de Gronwall	82
B	Formulaire des Opérateurs Nonlocaux	83
B.1	Formules de base	83
B.2	Spectres comparés	83
B.3	Inégalités de Poincaré–Wirtinger	84

Liste des tableaux

1.1	Injections de Sobolev fractionnaire $H^s(\Omega) \hookrightarrow X$	21
6.1	Comparaison des différentes conditions de Neumann non locales.	60
8.1	Constantes optimales L^q : comparaison $(-\Delta)^s$ vs L_J	74
9.1	Comparaison structurelle (noyau singulier) vs (noyau régulier).	76
9.2	Les deux limites locales comparées : noyau singulier vs noyau régulier. . . .	79
9.3	Synthèse complète : noyau singulier vs noyau régulier vs Local.	80

Table des Notations et Symboles

Abréviations des références principales

Abréviation	Référence complète
[DRV]	Dipierro–Ros–Oton–Valdinoci [9]
[BBM]	Bourgain–Brezis–Mironescu [4]

Domaines et géométrie

Notation	Signification
$n \geq 1$	Dimension de l'espace euclidien ambiant
Ω	Domaine borné ouvert connexe lipschitzien de $\mathbb{R}^n$
$\bar{\Omega}$	Adhérence $\Omega \cup \partial\Omega$
$\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$	Extérieur strict de Ω
$(\mathcal{C}\Omega)^2$	$(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$
K_n	Constante BBM : $K_n = \omega_{n-1}/n$

Paramètre fractionnaire et constantes

Notation	Signification
$s \in (0, 1)$	Ordre du Laplacien fractionnaire
$c_{n,s}$	Constante de normalisation : $c_{n,s} = \frac{4^s \Gamma(n/2 + s)}{\pi^{n/2} \Gamma(1 - s)} \cdot s$
2_s^*	Exposant critique : $2_s^* = 2n/(n - 2s)$ (pour $2s < n$)
$g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$	Donnée de bord Neumann (poids)
$\mathcal{A}_s(u, v)$	Forme de Gagliardo sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$
λ_k	k -ième valeur propre de $(-\Delta)^s$ avec $\mathcal{N}_s u = 0$

Noyau régulier et constantes

Notation	Signification
$J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	Noyau régulier, radial, à support compact
$L_J u$	$\int_{\Omega} J(x-y)(u(y) - u(x)) dy$
$\mathcal{N}_J u$	$\int_{\Omega} J(x-y)(u(x) - u(y)) dy$ (Neumann régulier)
$a_J(u, v)$	Forme bilinéaire : $\frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) dx dy$
β_k	k -ième valeur propre de $-L_J$ (Neumann) ; $\beta_1 = 0$
β_2	Première valeur propre non triviale de $-L_J$
σ_J	Constante de diffusion : $\sigma_J = \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}^n} J(z) z ^2 dz$
β_q	Constante optimale L^q (Neumann)
$f \not\geq 0$	$f \geq 0$ et $ \{x \in \Omega : f(x) > 0\} \neq 0$
δ_{kj}	Symbole de Kronecker : $\delta_{kj} = 1$ si $k = j$, et $\delta_{kj} = 0$ si $k \neq j$

Opérateurs et espaces fonctionnels

Notation	Signification
$(-\Delta)^s u$	Laplacien fractionnaire d'ordre s
$\mathcal{N}_s u(x)$	Opérateur de Neumann singulier
$\tilde{\mathcal{N}}_s u$	Opérateur de Neumann renormalisé : $\mathcal{N}_s u / w_{s,\Omega}$
$[u]_{H^s(\Omega)}^2$	Semi-norme de Gagliardo
$\hat{u}(\xi)$	Transformée de Fourier de u
X_+	Si X désigne un espace fonctionnel, alors X_+ est le sous ensembles des fonctions positives ou nulles, i.e. $X_+ = \{f \in X : f \geq 0\}$.
$L_0^2(\Omega)$	Sous-espace de moyenne nulle
$H^s(\Omega)$	Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,2}(\Omega)$
$H_{\Omega,g}^s$	Espace de Hilbert avec poids g
$H_{\Omega,0}^s$	Espace $H_{\Omega,g}^s$ avec $g = 0$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Espace de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} x^\alpha D^\beta \varphi(x) < +\infty\}$, fonctions lisses à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées
$f \in L_{\text{loc}}^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$	Pour tout $T > 0$, la restriction $f _{(0,T)}$ appartient à $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, c'est-à-dire $t \mapsto f(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ est mesurable et $\int_0^T \ f(\cdot, t)\ _{L^2(\Omega)}^2 dt < +\infty$, sans exiger l'intégrabilité globale sur $(0, +\infty)$
$u \in L_{\text{loc}}^2(0, +\infty; H_{\Omega,g}^s)$	Pour tout $T > 0$, $t \mapsto u(\cdot, t) \in H_{\Omega,g}^s$ est mesurable et $\int_0^T \ u(\cdot, t)\ _{H_{\Omega,g}^s}^2 dt < +\infty$; espace naturel des solutions faibles d'un problème d'évolution associé à $H_{\Omega,g}^s$

Introduction Générale

Contexte et motivation

L'analyse des équations aux dérivées partielles non locales connaît depuis deux décennies un essor remarquable, motivé par leur capacité à modéliser des phénomènes de diffusion à longue portée que les opérateurs différentiels classiques ne peuvent pas capturer. Par exemple, un individu effectuant une marche aléatoire à sauts longs (un *vol de Lévy*) peut, en une seule étape, se déplacer d'un point x vers un point y arbitrairement loin, avec une probabilité de saut proportionnelle au noyau singulier $|x - y|^{-(n+2s)}$. La densité d'une telle population $u(x, t)$ est alors régie par l'équation non locale :

$$\partial_t u(x, t) = -(-\Delta)^s u(x, t) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y, t) - u(x, t)}{|x - y|^{n+2s}} dy,$$

où la variation de x dépend de *toutes les* valeurs de u sur l'ensemble de $\mathbb{R}^n$, et non pas uniquement d'un voisinage infinitésimal de x , comme c'est le cas dans l'équation de la chaleur classique $\partial_t u = \Delta u$, qui est régie par un mouvement brownien à sauts infinitésimaux. Aucun opérateur différentiel d'ordre fini ne peut reproduire cet effet de portée infinie.

Ainsi, dans ce genre de phénomènes une question centrale s'impose: celle des conditions aux bords non locales de type Neumann : comment formuler une condition de Neumann cohérente pour un opérateur.

Dans ce mémoire, nous étudions deux approches complémentaires, en dégagant les points communs et les différences structurelles qu'impose la nature du noyau.

Approche 1: Noyau singulier [9]. Dipierro, Ros-Oton et Valdinoci ont introduit une nouvelle condition de Neumann pour le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$, dont le noyau $c_{n,s}|x - y|^{-(n+2s)}$ est singulier en $x = y$ et décroît à l'infini. La condition de Neumann non locale est :

$$\mathcal{N}_s u(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

Cette condition est prescrite sur *tout* $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. L'espace fonctionnel naturel est $H_{\Omega,g}^s$, qu'en verra dans la suite.

Approche 2: Noyau régulier [16]. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'opérateur $L_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y) - u(x)) dy$, où J est un noyau continu, radial, à support compact ($J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). La condition de Neumann homogène s'écrit $\mathcal{N}_J u = 0$; puisque J est à support compact, seuls les points de l'extérieur proches de Ω interviennent. L'opérateur L_J est **borné** sur $L^2(\Omega)$, ce qui simplifie l'analyse mais réduit la portée des interactions.

Tableau comparatif des deux approches.

Aspect	(noyau singulier)	(noyau régulier)
Opérateur	$(-\Delta)^s$	L_J
Noyau	$c_{n,s} x-y ^{-(n+2s)}$, singulier	$J(x-y)$, continu, compact
Domaine Neumann	Tout $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$	Bande $\text{dist}(x, \Omega) < R_0$
Espace	$H_{\Omega,g}^s$ (avec poids g)	$L^2(\Omega)$
Forme bilin.	$\mathcal{A}_s(u, v)$ sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$	$a_J(u, v)$ sur $\Omega \times \Omega$
Opérateur	Non borné sur L^2	Borné, $\ L_J\ \leq \ J\ _{L^1}$
Spectre	$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$	$0 = \beta_1 < \beta_2 \leq \dots$ bornés
Limite locale	$(-\Delta)^s \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} -K_n \Delta$ (BBM)	$L_J \xrightarrow{\text{supp} \rightarrow 0} \sigma_J \Delta$
Référence	[9]	[16]

Plan du mémoire

Partie I: Outils mathématiques (Chapitres 1). Définition d'opérateurs $(-\Delta)^s$, $\mathcal{N}_s$, L_J , $\mathcal{N}_J$. Espaces fonctionnels $H_{\Omega,g}^s$ et $H^s(\Omega)$. Injections de Sobolev et inégalité de Poincaré–Wirtinger.

Partie II: noyau singulier (Chapitres 2–6). Problème elliptique linéaire, formule d'intégration par parties non locale, condition de compatibilité, existence et unicité. Analyse spectrale complète. Régularité et comportement au bord. Équation de la chaleur non locale : conservation de masse, décroissance d'énergie, convergence.

Partie III: noyau régulier (Chapitres 7–8). Première valeur propre non triviale β_2 , décroissance exponentielle, la constante optimale β_q et ses propriétés

Partie IV: Comparaison et limite locale (Chapitre 9). Théorème BBM, convergence de L_J vers le laplacien, synthèse des deux approches.

partie I

Outils Mathématiques

Chapitre 1

Cadre Fonctionnel

1.1 Le laplacien fractionnaire et la condition de Neumann

Définition 1.1 (Laplacien fractionnaire). Pour $s \in (0, 1)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le **laplacien fractionnaire** d'ordre s est défini par la valeur principale de Cauchy :

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{n,s} \text{ v.p. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où $c_{n,s} = \frac{4^s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}{\pi^{n/2} \Gamma(1 - s)} \cdot s > 0$. Sa caractérisation par transformée de Fourier est :

$$\widehat{(-\Delta)^s u(\xi)} = |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1. L'intégrale en (1.1) est une valeur principale car le noyau $c_{n,s}|z|^{-(n+2s)}$ n'est pas intégrable en $z = 0$ ($n + 2s > n$). Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la singularité se régularise grâce à la symétrie du noyau et au développement de Taylor $u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) + O(|x - y|^2)$: le terme linéaire s'annule par symétrie, et le terme quadratique $O(|x - y|^{2-n-2s})$ est intégrable car $2 - n - 2s > -n$, i.e. $s < 1$.

1. Nécessité de la valeur principale.

Le noyau $K(z) = c_{n,s}|z|^{-(n+2s)}$ est singulier en $z = 0$, non intégrable au sens de Lebesgue puisque $n + 2s > n$. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy$ est interprétée comme valeur principale de Cauchy :

$$\text{v.p. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x - y| > \varepsilon} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy.$$

Pourquoi la limite existe-t-elle ? Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le développement de Taylor d'ordre 2 en $y = x$ donne :

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^2 D^2 u(x),$$

donc $u(x) - u(y) = -\nabla u(x) \cdot (y - x) + O(|x - y|^2)$. Comme le noyau est symétrique, le terme linéaire $\nabla u(x) \cdot (y - x)$ est de contribution nulle :

$$\int_{\varepsilon < |z| < R} \frac{-\nabla u(x) \cdot z}{|z|^{n+2s}} dz = 0.$$

Il reste le terme quadratique $O(|x - y|^2)$, dont le rapport avec $|x - y|^{n+2s}$ est $O(|x - y|^{2-n-2s})$, intégrable en dimension n car $2 - n - 2s > -n$ puisque $s < 1$. La valeur principale est donc bien définie pour tout $s \in (0, 1)$.

2. Dérivation rigoureuse de $c_{n,s}$ par la transformée de Fourier.

L'objectif est de déterminer rigoureusement la constante de normalisation $c_{n,s}$ de sorte que la définition singulière du laplacien fractionnaire coïncide avec sa définition spectrale comme multiplicateur de Fourier, à savoir $(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{2s} \hat{u})$.

Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction de l'espace de Schwartz. On adopte la convention suivante pour la transformée de Fourier et son inverse :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

En effectuant le changement de variable $z = x - y$, l'opérateur sous sa forme de valeur principale s'écrit :

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{n,s} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x - z)}{|z|^{n+2s}} dz.$$

La formule d'inversion de Fourier donne :

$$u(x) - u(x - z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} (1 - e^{-iz \cdot \xi}) d\xi.$$

En réinjectant dans l'intégrale singulière, on obtient :

$$c_{n,s} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x - z)}{|z|^{n+2s}} dz = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-iz \cdot \xi}}{|z|^{n+2s}} dz \right) \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

L'interversion est justifiée par le théorème de Fubini : pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la singularité en $z \rightarrow 0$ est contrôlée par un développement de Taylor à l'ordre 2 de $(1 - e^{-iz \cdot \xi})$, et l'intégrabilité à l'infini est assurée par la décroissance rapide de $\hat{u}$.

On identifie ainsi le multiplicateur de Fourier :

$$\mathcal{M}(\xi) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-iz \cdot \xi}}{|z|^{n+2s}} dz.$$

La partie imaginaire s'annule par symétrie impaire ($\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(z \cdot \xi)}{|z|^{n+2s}} dz = 0$), d'où :

$$\mathcal{M}(\xi) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(z \cdot \xi)}{|z|^{n+2s}} dz.$$

Par des changements de variables (voir [8])

$$c_{n,s} = \frac{1}{I(n,s)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(z_1)}{|z|^{n+2s}} dz \right)^{-1}, \quad I(n,s) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(z_1)}{|z|^{n+2s}} dz.$$

Noter que $1 - \cos(z_1) \geq 0$, donc $I(n,s) \geq 0$. Si $I(n,s) = 0$ alors nécessairement $1 - \cos(z_1) = 0$, ce qui implique que $z_1 = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Or z_1 varie sur tout $\mathbb{R}$. Reste à montrer que $I(n,s)$ est finie. En effet, si $|z| > R > 0$ on a

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \frac{1 - \cos(z_1)}{|z|^{n+2s}} dz \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \frac{2}{|z|^{n+2s}} dz < \infty$$

Maintenant si $|z| < \epsilon < R/2$, par un développement de Taylor d'ordre deux au voisinage de 0; on a $1 - \cos(z_1) = z_1^2/2 + o(z_1^2)$, si on note $r = |z|$ alors par changement de variables sphériques

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B(0,\epsilon)} \frac{1 - \cos(z_1)}{|z|^{N+2s}} dz = \omega_n \int_0^\epsilon r^{n-1} \frac{1 - \cos(z_1)}{r^{n+2s}} dr \\ &\leq M_n \int_0^\epsilon \frac{r^1}{r^{2s}} dr \\ &\leq M_n \left(\frac{\epsilon^{2-2s}}{2-2s} - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta^{2-2s}}{2-2s} \right), \end{aligned}$$

remarquer que le fait $0 < s < 1$ implique que la limite précédente est finie. Ce qui termine la preuve que $I(n, s)$ est finie.

3. Calcul explicite de $I(n, s)$ et formule exacte.

En passant aux coordonnées sphériques $w = r\sigma$ ($r > 0$, $\sigma \in S^{n-1}$) et en séparant l'intégrale radiale de l'intégrale angulaire :

$$\begin{aligned} I(n, s) &= \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+2s}} \left(\int_{S^{n-1}} (1 - \cos(r\sigma_1)) d\sigma \right) dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{-1-2s} \underbrace{\int_{S^{n-1}} (1 - \cos(r\sigma_1)) d\sigma}_{=: A(n,r)} dr. \end{aligned}$$

Définition 1.2 (Fonction de Bessel de première espèce). Pour $\nu \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, la **fonction de Bessel de première espèce** d'ordre ν est définie par la série entière convergente sur $\mathbb{C}$:

$$J_\nu(z) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+\nu}. \quad (1.2)$$

Elle est solution de l'équation différentielle de Bessel :

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - \nu^2) w(z) = 0.$$

Pour les ordres semi-entiers $\nu = \frac{n}{2} - 1$ ($n \geq 2$ entier), qui interviennent dans le calcul de la constante $c_{n,s}$, la formule intégrale de Poisson fournit la représentation :

$$J_\nu(r) = \frac{(r/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{irt} (1 - t^2)^{\nu-1/2} dt, \quad \nu > -\frac{1}{2}, r > 0, \quad (1.3)$$

d'où le comportement asymptotique pour $r \rightarrow +\infty$: $J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(r^{-3/2})$. En particulier, l'intégrale angulaire sur S^{n-1} satisfait :

$$\int_{S^{n-1}} \cos(r\sigma_1) d\sigma = \omega_{n-1} \frac{J_{n/2-1}(r)}{(r/2)^{n/2-1}} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot \frac{J_{n/2-1}(r)}{(r/2)^{n/2-1}},$$

identité obtenue par la formule de Poisson (1.3) appliquée à $\nu = \frac{n}{2} - 1$.

L'intégrale angulaire $A(n, r)$ est calculée via la fonction de Bessel : $A(n, r) = \omega_{n-1} - (2\pi/r)^{n/2-1} r^{n/2-1} J_{n/2-1}(r)$. Le calcul complet donne :

$$I(n, s) = \frac{\pi^{n/2} \Gamma(1-s)}{4^s s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)},$$

d'où la **formule explicite de la constante** :

$$c_{n,s} = \frac{4^s s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{n/2} \Gamma(1-s)}. \quad (1.4)$$

La deuxième égalité utilise l'identité $\Gamma(1-s) = (-s)\Gamma(-s)$, donc $|\Gamma(-s)| = \Gamma(1-s)/s$ pour $s \in (0, 1)$.

4. Comportements de $I(n, s)$.

- *Comportement de $c_{n,s}$* : pour mettre en évidence les limites quand $s \rightarrow 0^+$ et $s \rightarrow 1^-$, on utilise (en plus de l'identité $\Gamma(1-s) = (-s)\Gamma(-s)$ déjà invoquée plus haut) la relation $\Gamma(1-s) = (1-s)\Gamma(2-s)$, qui permet de réécrire (1.4) sous la forme :

$$c_{n,s} = \frac{4^s s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{n/2} \Gamma(1-s)} = s(1-s) \frac{4^s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{n/2} \Gamma(2-s)}. \quad (1.5)$$

Le facteur Γ restant, $s \mapsto \frac{4^s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{n/2} \Gamma(2-s)}$, est continu et strictement positif sur $[0, 1]$ (le Γ d'Euler n'a pas de pôle ni de zéro sur cet intervalle), ce qui permet de lire directement les deux limites :

- *Limite $s \rightarrow 0^+$* : le facteur $s(1-s) \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$, donc

$$c_{n,s} \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0, \quad \text{avec} \quad \frac{c_{n,s}}{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} > 0.$$

Autrement dit, $c_{n,s}$ s'annule à l'ordre exactement 1 en s . On récupère ainsi le résultat intuitive et "attendu" $(-\Delta)^s u(x) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} u(x)$ pour u assez régulière (l'opérateur tend vers l'identité). La convergence de $c_{n,s}$ vers 0 compense la divergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy$ lorsque $s \rightarrow 0$.

- *Limite $s \rightarrow 1^-$* : le facteur $s(1-s) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$, donc *de même*

$$c_{n,s} \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} 0, \quad \text{avec} \quad \frac{c_{n,s}}{1-s} \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} \frac{4 \Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} \Gamma(1)} = \frac{4 \Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2}} > 0.$$

Puisque $\Gamma(1-s) \rightarrow \Gamma(0^+) = +\infty$ au dénominateur de (1.5) donne $c_{n,s} \rightarrow 0$. On conclut ainsi que le produit $s(1-s)$ qui pilote l'asymptotique quand $s \rightarrow 0$ et $s \rightarrow 1$. C'est exactement ce qui permet la convergence

$$s(1-s)(-\Delta)^s u \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} K_n(-\Delta)u$$

ceci est connue sous le nom du Théorème de Bourgain–Brezis–Mironescu (Chapitre 9) [4].

Définition 1.3 (Opérateur de Neumann non local [9]). Pour u mesurable et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, on pose :

$$\mathcal{N}_s u(x) := c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (1.6)$$

La version **renormalisée** est :

$$\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) := \frac{\mathcal{N}_s u(x)}{w_{s,\Omega}(x)}, \quad w_{s,\Omega}(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}}. \quad (1.7)$$

Remarque 1.2. La condition de Neumann classique $\partial_\nu u = 0$ sur $\partial\Omega$ est remplacée par $\mathcal{N}_s u = 0$ sur tout $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Ce passage du bord $\partial\Omega$ (de dimension $n-1$) à l'extérieur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ (de dimension n) est la marque fondamentale du caractère non local. L'opérateur $\mathcal{N}_s$ joue le rôle de ∂_ν , et $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ celui de $\partial\Omega$.

Pour comprendre le rôle de $\mathcal{N}_s$, notons la décomposition fondamentale : pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = \underbrace{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy}_{I_1: \text{interactions intra-}\Omega} + \underbrace{c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy}_{I_2: \text{interactions avec l'extérieur}}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, I_1 est exactement $\mathcal{N}_s u(x)$: il joue le rôle de la dérivée normale $\partial_\nu u$ sur $\partial\Omega$. Pour $x \in \Omega$, I_2 représente les interactions du point intérieur x avec l'extérieur du domaine.

1.2 L'espace fonctionnel $H_{\Omega,g}^s$:

La définition correcte de l'espace fonctionnel, issue de [9], tient compte de la donnée de bord g comme *poids*.

Définition 1.4 (Espace $H_{\Omega,g}^s$ [9], Définition 3.1). Soient $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ et $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On définit la **forme de Gagliardo** :

$$\mathcal{A}_s(u, v) := \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \quad (1.8)$$

le **produit scalaire** :

$$(u, v)_{H_{\Omega,g}^s} := \int_{\Omega} uv dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g| uv dx + \frac{2}{c_{n,s}} \mathcal{A}_s(u, v), \quad (1.9)$$

et la **norme** $\|u\|_{H_{\Omega,g}^s} = \sqrt{(u, u)_{H_{\Omega,g}^s}}$. L'espace est :

$$H_{\Omega,g}^s := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} < +\infty\}.$$

On note $H_{\Omega,0}^s$ l'espace $H_{\Omega,g}^s$ dans le cas particulier $g = 0$.

Remarque 1.3. La structure de la norme. Elle comporte trois termes : la norme L^2 sur Ω , le terme de bord pondéré par $|g|^{1/2}$ sur l'extérieur, et la semi-norme de Gagliardo sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$. Le terme de bord est absent dans $H_{\Omega,0}^s$ ($g = 0$), mais il apparaît naturellement quand on définit les solutions faibles du problème non-homogène $\mathcal{N}_s u = g$.

Cette condition de Neumann naturelle. Aucune condition n'est imposée *essentiellement* sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. La condition $\mathcal{N}_s u = g$ est une *condition naturelle* qui émerge de la formulation variationnelle, exactement comme $\partial_\nu u = g$ émerge pour le laplacien local

Le domaine d'intégration $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$ est :

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2 = (\Omega \times \Omega) \cup (\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)) \cup ((\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times \Omega).$$

Il exclut délibérément les couples (x, y) tous deux extérieurs à Ω , dont la dynamique est régie par la condition de Neumann. La forme $\mathcal{A}_s$ est symétrique, positive, et $\ker(\mathcal{A}_s) = \{c \in \mathbb{R} : c \text{ const.}\}$.

Proposition 1.1 ($H_{\Omega,g}^s$ est un espace de Hilbert [9]). *Muni du produit scalaire (1.9), $H_{\Omega,g}^s$ est un espace de Hilbert séparable. De plus :*

- (i) $H_{\Omega,g}^s \hookrightarrow H^s(\Omega)$ *continûment.*
- (ii) $\mathcal{A}_s(u, u) \geq [u]_{H^s(\Omega)}^2$ *pour tout $u \in H_{\Omega,g}^s$.*
- (iii) $\ker(\mathcal{A}_s) = \{\text{constantes}\}$, *et $H_{\Omega,0}^s$ contient les constantes.*

Démonstration. étape 1: La formule bilinéaire (1.9) induit bien une norme . La forme est bilinéaire symétrique par construction. Supposons $\|u\|_{H_{\Omega,g}^s} = 0$. Puisque $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} = 0$, on a $u = 0$ p.p. dans Ω . D'autre part, la nullité de la double intégrale :

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0$$

force $u(x) = u(y)$ pour p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$. En particulier, pour p.p. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ et p.p. $y \in \Omega$, $u(x) = u(y) = 0$, d'où $u \equiv 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^n$.

étape 2: Complétude. Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H_{\Omega,g}^s$. Pour $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, posons

$$E_U(x, y) := \frac{(U(x) - U(y)) \chi_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2}(x, y)}{|x - y|^{\frac{n+2s}{2}}}.$$

Puisque (u_k) est de Cauchy dans $H_{\Omega,g}^s$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour $h, k \geq N_\varepsilon$:

$$\|u_h - u_k\|_{H_{\Omega,g}^s}^2 = \|u_h - u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|(u_h - u_k)^2 + \|E_{u_h} - E_{u_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}^2 < \varepsilon^2.$$

En particulier :

- (u_k) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc il existe $u \in L^2(\Omega)$ avec $u_k \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et, à extraction près, p.p. dans Ω (avec un ensemble exceptionnel $Z_1 \subset \mathbb{R}^n$, $|Z_1| = 0$).
- (E_{u_k}) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, donc il existe $E \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ avec $E_{u_k} \rightarrow E$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ et, à extraction près, p.p. dans $\mathbb{R}^{2n}$ (avec un ensemble exceptionnel $Z_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$, $|Z_2| = 0$).

étape 3: Extension de u à $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Notons que $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$, donc, pour tout $x_0 \in \Omega \setminus Z_1$ et pour p.p. $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$:

$$E_{u_k}(x_0, y) = \frac{u_k(x_0) - u_k(y)}{|x_0 - y|^{\frac{n+2s}{2}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} E(x_0, y).$$

On reporte la convergence de $u_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ pour obtenir :

$$u_k(y) = u_k(x_0) - |x_0 - y|^{\frac{n+2s}{2}} E_{u_k}(x_0, y) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u(x_0) - |x_0 - y|^{\frac{n+2s}{2}} E(x_0, y) =: u(y),$$

pour p.p. $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On définit ainsi u sur $\mathbb{R}^n$ entier.

étape 4: Convergence dans $H_{\Omega, g}^s$. On applique le lemme de Fatou à la suite $|u_h - u_k|^2$. Pour $h \geq N_\varepsilon$ fixé :

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{H_{\Omega, g}^s}^2 &= \int_{\Omega} (u_h - u)^2 + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|(u_h - u)^2 + \|E_{u_h} - E_u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}^2 \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} (u_h - u_k)^2 + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|(u_h - u_k)^2 + \|E_{u_h} - E_{u_k}\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_h - u_k\|_{H_{\Omega, g}^s}^2 \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Donc $u_h \rightarrow u$ dans $H_{\Omega, g}^s$ quand $h \rightarrow +\infty$, ce qui achève la preuve de complétude.

Assertion (ii). On remarque que $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2 \supset \Omega \times \Omega$, d'où :

$$\mathcal{A}_s(u, u) = \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \geq \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = [u]_{H^s(\Omega)}^2.$$

Assertion (iii). Si $u = c$ est constante, alors $u(x) - u(y) = 0$ pour tout (x, y) , et $\mathcal{A}_s(c, c) = 0$ immédiatement. Réciproquement, si $\mathcal{A}_s(u, u) = 0$, le fait que chaque terme de la somme soit non-négatif force $|u(x) - u(y)| = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$, donc u est constante p.p. $\square$

Corollaire 1.2 (Injection compacte dans $L^2(\Omega)$). *L'espace $H_{\Omega, g}^s$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$: $H_{\Omega, g}^s \hookrightarrow L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Soit (u_k) une suite bornée dans $H_{\Omega, g}^s$: $\|u_k\|_{H_{\Omega, g}^s} \leq M$. On remarque que $[u_k]_{H^s(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}_s(u_k, u_k) \leq M^2$ et $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq M$, donc (u_k) est bornée dans $H^s(\Omega)$. Vu que l'injection $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte par le théorème de Rellich–Kondrachov fractionnaire (Théorème 1.6), on extrait une sous-suite fortement convergente dans $L^2(\Omega)$. L'injection $H_{\Omega, g}^s \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est donc compacte. $\square$

1.3 Définition, normes et propriétés fondamentales

Définition 1.5 (Espace de Sobolev fractionnaire [8]). Pour $s \in (0, 1)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, l'espace de Sobolev fractionnaire est :

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{H^s(\Omega)} < +\infty\}, \quad (1.10)$$

où la semi-norme de Gagliardo et la norme complète sont :

$$[u]_{H^s(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \quad \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + [u]_{H^s(\Omega)}^2.$$

Proposition 1.3 (Propriétés fondamentales [8]). *Soit $s \in (0, 1)$ et Ω borné lipschitzien.*

(i) $H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^s} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \underbrace{\int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy}_{=: [u, v]_{H^s(\Omega)}}$$

(ii) $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$.

(iii) Si $0 \leq s_1 \leq s_2$, alors $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.

(iv) Pour $s > \frac{1}{2}$, l'opérateur de trace $\gamma_0 : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ est continu et surjectif.

(v) $H^s(\Omega) = [L^2(\Omega), H^1(\Omega)]_s$ (interpolation de Calderón, voir [13], [1]).

1.4 Caractérisation par la transformée de Fourier

La transformée de Fourier offre une définition alternative et particulièrement élégante des espaces de Sobolev fractionnaires sur $\mathbb{R}^n$. L'idée centrale est que la régularité d'ordre s d'une fonction u se lit directement sur la décroissance de $|\hat{u}(\xi)|$ pour les hautes fréquences $|\xi| \rightarrow +\infty$. Sur $\mathbb{R}^n$ entier (sans bord), cette caractérisation est **exacte** : la semi-norme de Gagliardo et le symbole de Fourier $|\xi|^{2s}$ sont reliés par l'identité (1.11) ci-dessous, établissant ainsi l'équivalence de la définition intégrale singulière et de la définition spectrale $(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \hat{u})$. Sur un domaine borné Ω , la caractérisation de Fourier reste valide via une extension à $\mathbb{R}^n$ et la restriction, au prix d'une perte sur le bord.

Théorème 1.4 (Caractérisation de Fourier [8]). *Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

De plus, la semi-norme de Gagliardo sur $\mathbb{R}^n$ vérifie :

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad (1.11)$$

ce qui montre que $(-\Delta)^s$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|^{2s}$.

1.5 Injections de Sobolev fractionnaires

Théorème 1.5 (Injections de Sobolev [8]). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien, $s \in (0, 1)$.*

(i) **Cas sous-critique** $2s < n$: $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\Omega)$ continûment, avec $2_s^* = 2n/(n-2s)$. Il existe $S_{n,s} > 0$ tel que :

$$S_{n,s} \|u\|_{L^{2_s^*}(\Omega)}^2 \leq [u]_{H^s(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^s(\Omega). \quad (1.12)$$

Pour $1 \leq q < 2_s^$, l'injection $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est **compacte**.*

(ii) **Cas critique** $2s = n$: $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ continûment pour tout $1 \leq q < +\infty$.

- (iii) **Cas sur-critique** $2s > n$: $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ continûment (injection de Morrey), avec $\alpha = s - n/2$, avec l'estimation explicite :

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(n, s) \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

et:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(n, s) \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 1.6 (Rellich–Kondrachov fractionnaire). Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien et $0 < s < 1$, les injections suivantes sont **compactes** :

- (i) **Cas sous-critique** $2s < n$:

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, 2_s^*), \quad 2_s^* = \frac{2n}{n - 2s}.$$

L'injection continue $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\Omega)$ n'est pas compacte (elle est critique), mais dès que $q < 2_s^*$, la compacité est restaurée par l'interpolation entre l'injection continue dans $L^{2_s^*}$ et la compacité dans L^1 . En particulier, $H^s(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (car $2 < 2_s^*$ équivalent à $2s < n$, ce qui est notre hypothèse).

- (ii) **Cas critique** $2s = n$:

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

Quand $2s = n$, l'exposant critique 2_s^* est formellement $+\infty$, mais l'espace $H^s(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\Omega)$ (l'injection critique est de type Trudinger–Moser). Néanmoins, pour tout $q < +\infty$ fini, l'injection est compacte.

- (iii) **Cas sur-critique** $2s > n$:

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \alpha = s - \frac{n}{2}.$$

L'injection de Morrey $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ (continue) entraîne la compacité dans $C^0(\bar{\Omega})$ et dans tout $L^q(\Omega)$ ($q \leq +\infty$) par le théorème d'Ascoli–Arzelà : une suite bornée dans $H^s(\Omega)$ est équicontinue dans $C^{0,\alpha}$, donc compacte dans $C^0(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$.

Dans tous les cas, $H^s(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ pour tout $s \in (0, 1)$.

Condition	Espace cible X	Type	Exposant
$2s < n$	$L^{2_s^*}(\Omega)$, $2_s^* = 2n/(n - 2s)$	Continue	2_s^*
$2s < n$	$L^q(\Omega)$, $q < 2_s^*$	Compacte	—
$2s = n$	$L^q(\Omega)$, $\forall q < +\infty$	Continue	—
$2s > n$	$C^{0,s-n/2}(\bar{\Omega})$	Continue (Morrey)	$\alpha = s - n/2$
$2s > n$	$L^q(\Omega)$, $\forall q < +\infty$	Compacte	—
$s > 1/2$	$H^{s-1/2}(\partial\Omega)$	Continue (trace)	—

Table 1.1: Injections de Sobolev fractionnaire $H^s(\Omega) \hookrightarrow X$.

1.6 Inégalité de Poincaré–Wirtinger non locale

Théorème 1.7 (Poincaré–Wirtinger non locale [9]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien, $s \in (0, 1)$. Notons $\lambda_2 > 0$ la première valeur propre non triviale de $(-\Delta)^s$ avec $\mathcal{N}_s u = 0$ (Chapitre 4). Pour tout $u \in H_{\Omega,0}^s$, en posant $\bar{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u \, dx$:

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_2} \mathcal{A}_s(u, u). \quad (1.13)$$

En particulier, si $\int_{\Omega} u = 0$: $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_2^{-1} \mathcal{A}_s(u, u)$.

Démonstration. On va démontrer la preuve par l'absurde. Supposons que l'inégalité (1.13) soit fausse : pour tout $k \geq 1$, il existe $u_k \in H^s(\Omega)$ avec $\int_{\Omega} u_k \, dx = 0$ et :

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 > k \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy. \quad (1.14)$$

Quitte à normaliser, on peut supposer $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$, ce qui donne :

$$[u_k]_{H^s(\Omega)}^2 := \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy < \frac{1}{k}.$$

La suite (u_k) est donc bornée dans $H^s(\Omega)$, car :

$$\|u_k\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + [u_k]_{H^s(\Omega)}^2 \leq 1 + \frac{1}{k} \leq 2 \quad \forall k \geq 1.$$

Puisque $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ par le théorème de Rellich–Kondrachov fractionnaire (Théorème 1.6), on extrait une sous-suite (qu'on réindexe u_{k_j}) telle que $u_{k_j} \rightarrow \bar{u}$ fortement dans $L^2(\Omega)$. En passant à la limite dans les conditions :

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{k_j}\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \bar{u} \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{k_j} \, dx = 0.$$

D'autre part, posons $f_{k_j}(x, y) = \frac{|u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}}$. La convergence forte dans $L^2(\Omega)$ et l'inégalité de Fatou donnent :

$$[\bar{u}]_{H^s(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} [u_{k_j}]_{H^s(\Omega)}^2 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{k_j} = 0.$$

Donc $[\bar{u}]_{H^s(\Omega)}^2 = 0$, ce qui signifie que $|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| = 0$ pour p.p. $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, i.e. $\bar{u}$ est constante dans Ω .

Mais $\bar{u}$ constante et $\int_{\Omega} \bar{u} = 0$ imposent $\bar{u} \equiv 0$ dans Ω , ce qui contredit $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Cette contradiction établit (1.13). $\square$

1.7 Opérateurs nonlocaux à noyau régulier:

Définition 1.6 (Hypothèses sur le noyau J). Le noyau $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

(J1) J est continu, radial ($J(x) = J(|x|)$), $J(0) > 0$, $J \not\equiv 0$.

(J2) J est à support compact : $\text{supp}(J) \subset B(0, R_0)$.

(J3) $\int_{\mathbb{R}^n} J(z) dz = 1$ (normalisation).

Définition 1.7 (Opérateurs L_J et $\mathcal{N}_J$ [16]). Pour $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable :

$$L_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y) - u(x)) dy, \quad x \in \Omega, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{N}_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(x) - u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.16)$$

La forme bilinéaire associée est :

$$a_J(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) dx dy. \quad (1.17)$$

et on définit :

$$H_J(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : a_J(u, u) < +\infty\}.$$

Remarque 1.4. Puisque J est à support compact dans $B(0, R_0)$, la condition $\mathcal{N}_J u = 0$ n'est active que sur la bande $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} : \text{dist}(x, \Omega) < R_0\}$. Pour des points plus éloignés, $\mathcal{N}_J u(x) = 0$ est automatiquement satisfait. C'est une différence fondamentale avec le cadre noyau singulier, où $\mathcal{N}_s u = g$ est active sur *tout* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega = D \cup \mathcal{N}$.

De plus, L_J est un opérateur **borné** sur $L^2(\Omega)$ (contrairement à $(-\Delta)^s$ qui est non borné).

Interprétation de $\mathcal{N}_J u(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, l'opérateur

$$\mathcal{N}_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(x) - u(y)) dy$$

mesure le *flux sortant net* au point extérieur x : il somme, pondéré par le noyau $J(x-y)$, la différence entre la valeur de u au point extérieur x et celle de u en chaque point y intérieur. Géométriquement, c'est l'analogue non local de la dérivée normale $\partial_\nu u$ sortante : si u croît en s'éloignant de Ω , alors $\mathcal{N}_J u(x) > 0$, et la condition $\mathcal{N}_J u = 0$ encode une loi de *conservation du flux* à travers la *frontière non locale* $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} : \text{dist}(x, \Omega) < R_0\}$. Contrairement à $\mathcal{N}_s u$ [9] qui est défini sur tout $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, $\mathcal{N}_J u$ n'est non trivial qu'au voisinage de $\partial\Omega$ (à distance inférieure à R_0 du support de J).

Proposition 1.8 (Inégalité de Poincaré–Wirtinger pour L_J [16]). Notons $\beta_2 > 0$ la première valeur propre non triviale de $-L_J$ avec $\mathcal{N}_J u = 0$ (Chapitre 7). Pour tout $u \in L_0^2(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\beta_2} a_J(u, u). \quad (1.18)$$

Démonstration. Pour tout $u \in L_0^2(\Omega)$, $u \neq 0$, on décompose u dans la base hilbertienne $(\varphi_k)_{k \geq 2}$ de $L_0^2(\Omega)$: $u = \sum_{k \geq 2} c_k \varphi_k$ avec $c_k = \langle u, \varphi_k \rangle_{L^2}$. Alors $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k \geq 2} c_k^2$ et, par l'équation propre $a_J(\varphi_k, \varphi_j) = \beta_k \delta_{kj}$:

$$a_J(u, u) = \sum_{k \geq 2} \beta_k c_k^2 \geq \beta_2 \sum_{k \geq 2} c_k^2 = \beta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En divisant par $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0$, on obtient $a_J(u, u)/\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \beta_2$, d'où la positivité $\beta_2 > 0$ est établie dans le Théorème 3.1. $\square$

partie II

Noyau Singulier

Chapitre 2

Problème Elliptique Linéaire

2.1 Formulation faible du problème elliptique

Définition 2.1 (Solution faible [9], Définition 3.6). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. On dit que $u \in H_{\Omega,0}^s$ est une **solution faible** de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (2.1)$$

si, pour toute fonction test $v \in H_{\Omega,g}^s$,

$$\mathcal{A}_s(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx. \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.

- i) La solution u appartient à $H_{\Omega,0}^s$ (cas homogène), tandis que les fonctions tests v appartiennent à $H_{\Omega,g}^s$ (avec poids $|g|$). Cette asymétrie est inhérente à la formulation de noyau singulier et résulte directement de la formule d'intégration par parties (2.4).
- ii) La définition précédente de la solution faible, ainsi que le formalisme de la solution faible est inspirée de la formule d'intégration par parties qu'on définira dans la prochaine section.

2.2 Formules d'intégration par parties non locales

La formule d'intégration par parties est un outil technique essentiel dans la théorie variationnelle. Elle établit le lien exact entre $(-\Delta)^s$ et $\mathcal{N}_s$, à l'instar de la formule de Green classique reliant $-\Delta$ à ∂_ν .

Lemme 2.1 (Divergence non locale [9], Lemme 3.2). Soit u une fonction C^2 bornée dans $\mathbb{R}^n$. On a :

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s u \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u \, dx. \quad (2.3)$$

Démonstration. On part de la définition (1.1) du Laplacien fractionnaire et l'on intègre sur Ω .

Développement de $I = \int_{\Omega} (-\Delta)^s u \, dx$.

Par définition :

$$I = c_{n,s} \int_{\Omega} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} \, dy \, dx.$$

On décompose le domaine d'intégration intérieur en $\mathbb{R}^n = \Omega \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, ce qui donne deux termes :

$$I = c_{n,s} \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} \, dy \, dx}_{=: J_1} + c_{n,s} \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} \, dy \, dx}_{=: J_2}.$$

Annulation de J_1 par antisymétrie.

Dans J_1 , on permute l'ordre d'intégration (le domaine $\Omega \times \Omega$ est symétrique, $|y - x| = |x - y|$) :

$$J_1 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \stackrel{x \leftrightarrow y}{=} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = -J_1.$$

Donc $2J_1 = 0$, d'où $\boxed{J_1 = 0}$.

Traitement de J_2 par le théorème de Fubini.

Pour J_2 , on intervertit l'ordre d'intégration. L'application de Fubini est licite car $u \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$: l'intégrande est $|u(x) - u(y)| \cdot |x - y|^{-(n+2s)}$, qui est contrôlé par $2\|u\|_{L^\infty} \cdot |x - y|^{-(n+2s)}$, et l'intégrale double est finie car $x \in \Omega$ borné et $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sont à distance positive (la singularité en $x = y$ n'est pas atteinte). On obtient :

$$J_2 = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

Ensuite, pour faire apparaître la définition de $\mathcal{N}_s u$:

$$J_2 = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx \right) dy.$$

Or, par définition (1.6) avec le rôle des variables échangé (y joue le rôle du point extérieur, x le point dans Ω) :

$$\mathcal{N}_s u(y) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|y - x|^{n+2s}} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Donc :

$$c_{n,s} J_2 = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u(y) dy.$$

Conclusion.

En rassemblant les deux contributions :

$$I = c_{n,s} J_1 + c_{n,s} J_2 = 0 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u(y) dy,$$

ce qui est exactement (2.3). □

Théorème 2.2 (Formule d'intégration par parties non locale [9], Lemme 3.3).

Soient u, v des fonctions C^2 bornées dans $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\mathcal{A}_s(u, v) = \int_{\Omega} v (-\Delta)^s u dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u dx. \quad (2.4)$$

En particulier, si $\mathcal{N}_s u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, alors :

$$\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u dx = \mathcal{A}_s(u, v). \quad (2.5)$$

(auto-adjonction de $(-\Delta)^s$).

Démonstration. Notons que la formule $\mathcal{A}_s(u, v)$ est symétrique en u et v ; on choisit de développer $\int_{\Omega} v(x) (-\Delta)^s u(x) dx$ et de faire apparaître $\mathcal{A}_s(u, v)$.

Développement de $\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u$. On substitue la définition (1.1) :

$$\int_{\Omega} v(x) (-\Delta)^s u(x) dx = c_{n,s} \int_{\Omega} v(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx. \quad (2.6)$$

On décompose $\mathbb{R}^n = \Omega \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ dans l'intégrale intérieure, ce qui donne deux contributions :

$$\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u = c_{n,s} \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx}_{I_1} + c_{n,s} \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx}_{I_2}.$$

Symétrisation de I_1 . On suit le même argument que pour J_1 dans la preuve du Lemme 2.1. On prend l'expression de I_1 et on effectue l'échange $x \leftrightarrow y$ (le domaine $\Omega \times \Omega$ est invariant, $|x - y| = |y - x|$) :

$$c_{n,s} I_1 = c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(y) - u(x))v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx = -c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx.$$

En faisant la moyenne des deux expressions de $c_{n,s} I_1$, on obtient :

$$2 c_{n,s} I_1 = c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx + \left(-c_{n,s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \right).$$

On factorise $(u(x) - u(y))$ et $(v(x) - v(y))$ sous le même signe intégral :

$$c_{n,s} I_1 = \frac{c_{n,s}}{2} \int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

Traitement de I_2 . On applique Fubini (licite car $u, v \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$) :

$$c_{n,s} I_2 = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

On rajoute et on retranche $v(y)$ au numérateur :

$$\begin{aligned} c_{n,s} I_2 &= \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\quad + \frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) + v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \end{aligned}$$

Pour le second terme, on développe $(u(x) - u(y))(v(x) + v(y)) = (u(x) - u(y))v(x) + (u(x) - u(y))v(y)$. On regroupe et, après calculs symétriques analogues à I_1 , on trouve :

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) + v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v(y) \mathcal{N}_s u(y) dy.$$

En reportant, le second terme devient $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u dx$.

Conclusion. On rassemble les contributions $c_{n,s}I_1$ et $c_{n,s}I_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v (-\Delta)^s u &= \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\quad + \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u dx \\ &= \mathcal{A}_s(u, v) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u dx, \end{aligned}$$

ce qui est exactement (2.4) après réarrangement. $\square$

Remarque 2.2. Ce résultat est le parfait analogue non local de la formule de Green classique. Le tableau suivant met en évidence la correspondance :

Cas local $(-\Delta)$	Cas non local fractionnaire $((-\Delta)^s)$
$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$	$\mathcal{A}_s(u, v)$
$\partial_{\nu} u$ sur $\partial\Omega$	$\mathcal{N}_s u$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$
$\int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u d\sigma$	$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u dx$
Neumann : $\partial_{\nu} u = 0$	Neumann non locale : $\mathcal{N}_s u = 0$

Corollaire 2.3 (Corollaires de la formule intégration par partie).

- (i) **Auto-adjonction** : Si $\mathcal{N}_s u = \mathcal{N}_s v = 0$, alors $\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u = \mathcal{A}_s(u, v) = \int_{\Omega} u (-\Delta)^s v$.
- (ii) **Identité d'énergie** : $\mathcal{A}_s(u, u) = \int_{\Omega} u (-\Delta)^s u dx$ quand $\mathcal{N}_s u = 0$.
- (iii) **Condition de compatibilité** : Le problème elliptique avec $\mathcal{N}_s u = g$ n'a une solution que si $\int_{\Omega} f dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g dx = 0$.

Démonstration. (i) On applique la formule d'intégration par parties (2.4) avec $v = u$ (et $\mathcal{N}_s u = 0$ hors de Ω) :

$$\mathcal{A}_s(u, u) = \int_{\Omega} u(x) (-\Delta)^s u(x) dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} u(x) \mathcal{N}_s u(x) dx}_{= 0 \text{ car } \mathcal{N}_s u = 0}.$$

Donc $\mathcal{A}_s(u, u) = \int_{\Omega} u (-\Delta)^s u dx$, ce qui est (2.5).

(ii) Vu que $\mathcal{N}_s u = 0$, on reporte directement dans la formule d'intégration par parties (2.4) avec $v \in H_{\Omega,0}^s$ quelconque : le terme de bord $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u dx$ est nul, et il reste $\mathcal{A}_s(u, v) = \int_{\Omega} v (-\Delta)^s u dx$.

(iii) Soit $u \in H_{\Omega,0}^s$ une solution faible du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

On prend la fonction test $v \equiv 1$ dans la formulation faible (2.2). Puisque $1(x) - 1(y) = 0$ identiquement, on a $\mathcal{A}_s(u, 1) = 0$. Il vient :

$$0 = \mathcal{A}_s(u, 1) = \int_{\Omega} f \cdot 1 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \cdot 1 dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g dx.$$

La condition $\int_{\Omega} f + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g = 0$ est donc nécessaire à l'existence d'une solution, ce qui achève la démonstration. $\square$

2.3 Principe du maximum

Le principe de maximum est donne par les deux résultats suivants:

Lemme 2.4. *L'équation (2.5) n'admet pas de solution $u \in H_{\Omega,0}^s$, pour $f \in L^2(\Omega)$, $f \not\geq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, $g \not\geq 0$. (le sens exacte de $h \geq 0$ est défini dans les notations.)*

Démonstration. On prend $v \equiv 1$ comme fonction test dans la formulation faible (2.2). Le membre gauche vaut $\mathcal{A}_s(u, 1) = 0$ (car $1(x) - 1(y) \equiv 0$). Donc :

$$0 = \int_{\Omega} f \cdot 1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \cdot 1 \, dx = \int_{\Omega} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \, dx.$$

Vu que $f \geq 0$ dans Ω et $g \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, les deux intégrales sont séparément positives. Leur somme étant nulle, chacune doit être nulle : $\int_{\Omega} f = 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g = 0$, ce qui implique que $f = 0$ p.p. dans Ω et $g = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. □

Corollaire 2.5. *Soit $f \in L^2(\Omega)_+$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)_+$. Si $u \in H_{\Omega,0}^s$ est solution de l'équation :*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \end{cases}$$

alors nécessairement u est constante et $f = 0$ et $g = 0$.

Démonstration. Selon lemme précédent, on peut avoir une solution $u \in H_{\Omega,0}^s$ sauf si $f = 0$ p.p dans Ω et $g = 0$ p.p dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Ensuite:

$$\mathcal{A}_s(u, u) = \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy = 0,$$

et cette expression est nulle si et seulement si $|u(x) - u(y)| = 0$ pour p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2$. En particulier, pour p.p. $x, y \in \Omega$, $u(x) = u(y)$, et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $y \in \Omega$, $u(x) = u(y)$. On conclut que u est constante p.p. dans $\mathbb{R}^n$. □

2.4 Fonctionnelle d'énergie et caractérisation variationnelle

Définition 2.2 (Fonctionnelle d'énergie [9], Proposition 3.7). Pour $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, on définit $\mathcal{I} : H_{\Omega,g}^s \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{I}[u] = \frac{1}{2} \mathcal{A}_s(u, u) - \int_{\Omega} f u \, dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g u \, dx. \quad (2.7)$$

Proposition 2.6 (Points critiques et solutions faibles [9]). *Tout point critique de $\mathcal{I}$ sur $H_{\Omega,g}^s$ est une solution faible de (2.5).*

Démonstration. Continuité de $\mathcal{A}_s$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la double intégrale. Pour $u, v \in H_{\Omega,g}^s$, on écrit :

$$|\mathcal{A}_s(u, v)| \leq \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)| |v(x) - v(y)|}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy.$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz pour les doubles intégrales donne :

$$|\mathcal{A}_s(u, v)| \leq \frac{c_{n,s}}{2} \left(\iint \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \right)^{1/2} \left(\iint \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \right)^{1/2} = \mathcal{A}_s(u, u)^{1/2} \mathcal{A}_s(v, v)^{1/2} \leq \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} \|v\|_{H_{\Omega,g}^s}.$$

Coercivité. On remarque que, pour $g \equiv 0$: $\mathcal{A}_s(u, u) = \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \geq 0$. Sur $L_0^2(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré–Wirtinger (1.13) donne $\mathcal{A}_s(u, u) \geq \lambda_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0$, vu que $\lambda_2 > 0$. Donc $\mathcal{A}_s$ est coercive sur $H_{\Omega,0}^s \cap L_0^2(\Omega)$.

Le cas $g \neq 0$ est traité dans sa généralité complète.

Terme $\int_{\Omega} fu$. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $L^2(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} fu dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} < \infty.$$

Terme $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gu$ pour $g \neq 0$. On utilise l'inégalité de Cauchy–Schwarz avec les poids $|g|^{1/2}$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gu dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g|^{1/2} \cdot (|g|^{1/2} u), dx \right| \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}^{1/2} \cdot \| |g|^{1/2} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}.$$

Or, par définition de la norme (1.9) :

$$\| |g|^{1/2} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g| u^2 dx \leq \|u\|_{H_{\Omega,g}^s}^2,$$

donc $\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gu dx \right| \leq \|g\|_{L^1}^{1/2} \|u\|_{H_{\Omega,g}^s} < \infty$. Ainsi $\mathcal{I}[u] \in \mathbb{R}$ pour tout $u \in H_{\Omega,g}^s$.

Étape 2 : Calcul explicite de la dérivée de Gâteaux $\mathcal{I}'[u](v)$.

Soit $u \in H_{\Omega,g}^s$ et $v \in H_{\Omega,g}^s$ quelconque. Pour $|\varepsilon| < 1$, on développe $\mathcal{I}[u + \varepsilon v]$ terme par terme.

Terme quadratique. Par bilinéarité et symétrie de $\mathcal{A}_s$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) &= \mathcal{A}_s(u, u) + \varepsilon \mathcal{A}_s(u, v) + \varepsilon \mathcal{A}_s(v, u) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_s(v, v) \\ &= \mathcal{A}_s(u, u) + 2\varepsilon \mathcal{A}_s(u, v) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_s(v, v). \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}_s(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_s(u, u) + \varepsilon \mathcal{A}_s(u, v) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{A}_s(v, v).$$

Terme linéaire en f . Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{\Omega} f(u + \varepsilon v) dx = \int_{\Omega} fu dx + \varepsilon \int_{\Omega} fv dx.$$

Terme linéaire en g ($g \neq 0$). De même :

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g(u + \varepsilon v) dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gu dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gv dx.$$

Bilan. On regroupe les trois contributions dans la définition (2.7) :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[u + \varepsilon v] &= \frac{1}{2} \mathcal{A}_s(u, u) + \varepsilon \mathcal{A}_s(u, v) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{A}_s(v, v) \\ &\quad - \int_{\Omega} fu dx - \varepsilon \int_{\Omega} fv dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gu dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} gv dx. \end{aligned}$$

En regroupant par puissances de ε :

$$\mathcal{I}[u + \varepsilon v] = \mathcal{I}[u] + \varepsilon \left[\mathcal{A}_s(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{A}_s(v, v). \quad (2.8)$$

Dérivée de Gâteaux. On calcule le quotient différentiel :

$$\frac{\mathcal{I}[u + \varepsilon v] - \mathcal{I}[u]}{\varepsilon} = \mathcal{A}_s(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{A}_s(v, v).$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, le terme $\frac{\varepsilon}{2} \mathcal{A}_s(v, v) \rightarrow 0$ (car $\mathcal{A}_s(v, v) < \infty$ pour $v \in H_{\Omega, g}^s$), et on obtient :

$$\mathcal{I}'[u](v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}[u + \varepsilon v] - \mathcal{I}[u]}{\varepsilon} = \mathcal{A}_s(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx. \quad (2.9)$$

Étape 3 : Identification, point critique implique solution faible.

Par définition, $u \in H_{\Omega, g}^s$ est un **point critique** de $\mathcal{I}$ si et seulement si

$$\mathcal{I}'[u](v) = 0 \quad \forall v \in H_{\Omega, g}^s.$$

D'après (2.9), cette condition s'écrit exactement :

$$\mathcal{A}_s(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_{\Omega, g}^s,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}_s(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx \quad \forall v \in H_{\Omega, g}^s. \quad (2.10)$$

Or (2.10) est *exactement* la formulation faible (2.2) de la Définition 2.1. Donc u est une solution faible de (2.5).

Remarque sur le cas $g = 0$. Quand $g \equiv 0$, l'espace $H_{\Omega, g}^s$ se réduit à $H_{\Omega, 0}^s$, le terme $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g v \, dx$ disparaît de $\mathcal{I}$ et de la dérivée (2.9), et la preuve est identique en supprimant toutes les occurrences du terme de bord.

□

2.5 Existence et unicité

Théorème 2.7 (Existence et unicité [9], Théorème 3.9). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Supposons qu'il existe $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathcal{N}_s \psi = g$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Alors le problème (2.5) admet une solution faible dans $H_{\Omega, 0}^s$ si et seulement si la **condition de compatibilité***

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \, dx = 0 \quad (2.11)$$

est satisfaite. Quand (2.11) est satisfaite, la solution est unique à une constante additive près.

Démonstration. La démonstration se décompose en deux cas : homogène ($g \equiv 0$) puis non-homogène (g quelconque).

CAS 1 : Cas homogène ($g \equiv 0$)

On suppose d'abord $g \equiv 0$ et $f \not\equiv 0$.

Étape 1.1 : Définition de l'opérateur T via le théorème de Riesz.

Étant donné $h \in L^2(\Omega)$, on cherche $v \in H_{\Omega,0}^s$ solution du problème :

$$\int_{\Omega} v \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(v(x) - v(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy = \int_{\Omega} h \phi \, dx \quad (2.12)$$

pour tout $\phi \in H_{\Omega,g}^s$, avec $\mathcal{N}_s v = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

On définit la fonctionnelle $F : H_{\Omega,g}^s \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(\phi) = \int_{\Omega} h \phi \, dx.$$

Linéarité : Évidente par linéarité de l'intégrale.

Continuité : Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|F(\phi)| \leq \int_{\Omega} |h| |\phi| \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_{\Omega,g}^s}.$$

Par le **théorème de représentation de Riesz**, il existe une unique solution $v \in H_{\Omega,g}^s$ satisfaisant (2.12).

On définit les opérateurs :

- $T_o : L^2(\Omega) \rightarrow H_{\Omega,g}^s$ par $T_o h = v$, où $v \in H_{\Omega,g}^s$ est l'unique solution (globale dans $\mathbb{R}^n$) du problème résolvant :

$$(-\Delta)^s v + v = h \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathcal{N}_s v = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega},$$

c'est-à-dire la solution faible de (2.12). L'existence et l'unicité de v sont garanties par le théorème de Riesz.

- $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ par $Th = T_o h|_{\Omega}$ (restriction à Ω).

Étape 1.2 : Estimation a priori.

En prenant $\phi = v$ dans la formulation faible (2.12) :

$$\int_{\Omega} v^2 \, dx + \mathcal{A}_s(v, v) = \int_{\Omega} h v \, dx \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathcal{A}_s(v, v) \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque $\mathcal{A}_s(v, v) \geq 0$, on obtient :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_s(v, v) \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.13)$$

D'où :

$$\|v\|_{H_{\Omega,0}^s} \leq C \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Étape 1.3 : Compacité de T .

Soit $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. Par l'estimation (2.13), la suite $\{Th_k\}$ est bornée dans $H^s(\Omega)$. Puisque $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est une injection compacte (Corollaire 1.2), il existe une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Donc **T est compact.**

Étape 1.4 : Auto-adjonction de T .

Soient $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour tout $\phi, \psi \in H_{\Omega, g}^s$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_o h_1 \phi \, dx + \mathcal{A}_s(T_o h_1, \phi) &= \int_{\Omega} h_1 \phi \, dx, \\ \int_{\Omega} T_o h_2 \psi \, dx + \mathcal{A}_s(T_o h_2, \psi) &= \int_{\Omega} h_2 \psi \, dx. \end{aligned}$$

En prenant $\phi = T_o h_2$ dans la première équation et $\psi = T_o h_1$ dans la seconde :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_o h_1 \cdot T_o h_2 \, dx + \mathcal{A}_s(T_o h_1, T_o h_2) &= \int_{\Omega} h_1 \cdot T_o h_2 \, dx, \\ \int_{\Omega} T_o h_2 \cdot T_o h_1 \, dx + \mathcal{A}_s(T_o h_2, T_o h_1) &= \int_{\Omega} h_2 \cdot T_o h_1 \, dx. \end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire L^2 et de $\mathcal{A}_s$, les membres gauches sont égaux. Donc :

$$\int_{\Omega} h_1 \cdot T_o h_2 \, dx = \int_{\Omega} h_2 \cdot T_o h_1 \, dx.$$

Puisque $Th = T_o h|_{\Omega}$, on a :

$$\int_{\Omega} h_1 Th_2 \, dx = \int_{\Omega} Th_1 h_2 \, dx \quad \text{pour } h_1, h_2 \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et continuité de T , cette égalité s'étend à tout $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$. Donc **T est auto-adjoint** dans $L^2(\Omega)$.

Étape 1.5 : Caractérisation de $\ker(\text{Id} - T)$.

On montre que $\ker(\text{Id} - T)$ consiste uniquement en les fonctions constantes.

$\Rightarrow$ Les constantes sont dans le noyau :

Si c est constante, alors $(-\Delta)^s c = 0$ dans Ω et $\mathcal{N}_s c = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Donc $((-\Delta)^s + \text{Id})c = c$ dans Ω , ce qui donne $T_o c = c$, d'où $Tc = c$.

$\Leftarrow$ Réciproquement :

Si $v \in \ker(\text{Id} - T)$, alors $v = Tv = T_o v$ dans Ω .

Par construction de T_o via (2.12) :

$$(-\Delta)^s(T_o v) + T_o v = v \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\mathcal{N}_s(T_o v) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Donc $(-\Delta)^s(T_o v) = v - T_o v = 0$ dans Ω .

Par le **Lemme 2.4** (principe du maximum avec $f = 0$ et $g = 0$), $T_o v$ est constante.

Donc v est constante dans Ω .

Conclusion :

$$\ker(\text{Id} - T) = \{\text{fonctions constantes}\}.$$

Étape 1.6 : Alternative de Fredholm.

Puisque T est compact et auto-adjoint, l'**alternative de Fredholm** s'applique :

$$\text{Im}(\text{Id} - T) = \ker(\text{Id} - T)^\perp = \{\text{fonctions constantes}\}^\perp,$$

où l'orthogonalité est prise dans $L^2(\Omega)$.

Explicitement :

$$\text{Im}(\text{Id} - T) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f \, dx = 0 \right\}. \quad (2.14)$$

Étape 1.7 : Existence.

Supposons que $\int_{\Omega} f = 0$. Par (2.14), $f \in \text{Im}(\text{Id} - T)$.

Il existe donc $w \in L^2(\Omega)$ tel que $f = w - Tw = (\text{Id} - T)w$.

Posons $u = T_o w$. Alors :

- $\mathcal{N}_s u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ (par construction de T_o),
- Dans Ω : $(-\Delta)^s(T_o w) + T_o w = w$, donc

$$(-\Delta)^s u = w - T_o w = w - Tw = f.$$

Donc u est solution.

Étape 1.8 : Nécessité.

Réciproquement, si $u \in H_{\Omega,0}^s$ est solution avec $\mathcal{N}_s u = 0$, posons $w = f + u$.

Alors $(-\Delta)^s u + u = w$ dans Ω , donc $u = T_o w = Tw$ dans Ω .

Ainsi :

$$f = (-\Delta)^s u = w - u = w - Tw = (\text{Id} - T)w.$$

Donc $f \in \text{Im}(\text{Id} - T)$, ce qui implique (par (2.14)) :

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

Ceci établit la validité du Théorème 2.7 quand $g \equiv 0$.

CAS 2 : Cas non-homogène (g quelconque)

Soit $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathcal{N}_s \psi = g$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ (hypothèse du théorème).

Posons $\bar{u} = u - \psi$. Alors :

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s \bar{u} &= (-\Delta)^s u - (-\Delta)^s \psi = f - (-\Delta)^s \psi =: \bar{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s \bar{u} &= \mathcal{N}_s u - \mathcal{N}_s \psi = g - g = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned}$$

Par le **Lemme 2.1** (formule de Green non-locale) :

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s \psi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s \psi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \, dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \bar{f} \, dx &= \int_{\Omega} (f - (-\Delta)^s \psi) \, dx \\
&= \int_{\Omega} f \, dx - \int_{\Omega} (-\Delta)^s \psi \, dx \\
&= \int_{\Omega} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \, dx \\
&\stackrel{(2.11)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Par le **Cas 1**, le problème homogène pour $\bar{u}$ avec donnée $\bar{f}$ admet une solution puisque $\int_{\Omega} \bar{f} = 0$.

Donc $u = \bar{u} + \psi$ est solution du problème original (2.5).

UNICITÉ

Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions de (2.5).

Posons $w = u_1 - u_2$. Par linéarité :

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s w &= (-\Delta)^s u_1 - (-\Delta)^s u_2 = f - f = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\
\mathcal{N}_s w &= \mathcal{N}_s u_1 - \mathcal{N}_s u_2 = g - g = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.
\end{aligned}$$

C'est exactement le cas $f = 0$ et $g = 0$, donc $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sont satisfaites trivialement.

Par le **Lemme 2.4**, w est constante.

Donc :

$$u_1 = u_2 + C \quad \text{pour une constante } C \in \mathbb{R}.$$

La solution est **unique à une constante additive près**. □

Remarque 2.3. La condition (2.11) est l'exact analogue non local de la condition classique $\int_{\Omega} f = -\int_{\partial\Omega} g$ pour le problème de Neumann $-\Delta u = f$, $\partial_{\nu} u = g$. Elle traduit l'équilibre global : le flux non local entrant par $\mathcal{N}_s$ doit compenser exactement la source intérieure.

2.6 Comportement à l'infini:

Proposition 2.8 (Comportement de u à l'infini [9], Proposition 3.13). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine **borné** et soit $u \in H_{\Omega, g}^s$ une solution faible du problème elliptique :*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.15)$$

*Alors u converge **uniformément** vers la moyenne de f à l'infini :*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = \bar{u} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(y) \, dy, \quad \text{uniformément en } x. \quad (2.16)$$

*En particulier, u est **bornée à l'infini**.*

Remarque 2.4. Ce résultat est intéressant : sans aucune condition aux limites à l'infini imposée a priori, la seule condition $\mathcal{N}_s u = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ force u à tendre vers sa valeur moyenne dans Ω . C'est l'analogie non local du principe de la moyenne harmonique, et cela confirme la cohérence globale de la formulation de Neumann non locale.

Démonstration. La preuve repose sur quatre ingrédients : (i) la représentation intégrale de u hors de Ω découlant de $\mathcal{N}_s u = 0$, (ii) l'approximation uniforme du noyau $|x-y|^{-(n+2s)}$ par $|x|^{-(n+2s)}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, (iii) la linéarité du numérateur et du dénominateur, et (iv) une estimation d'erreur explicite.

étape 1: Représentation intégrale de $u(x)$ via $\mathcal{N}_s u = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, la condition $\mathcal{N}_s u(x) = 0$ s'écrit (définition (1.6)) :

$$c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0.$$

On développe et on isole $u(x)$:

$$u(x) \cdot \underbrace{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}}}_{=: D(x) > 0} = \underbrace{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy}_{=: N(x)},$$

d'où, puisque $D(x) > 0$ (Ω non vide et $x \notin \bar{\Omega}$) :

$$u(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}}}. \quad (2.17)$$

Autrement dit, $u(x)$ est une **moyenne pondérée** de u sur Ω , les poids étant donnés par le noyau fractionnaire $|x - y|^{-(n+2s)}$.

étape 2: Inclusion de Ω dans une boule et encadrement de $|x - y|$.

Puisque Ω est **borné**, il existe $R > 0$ tel que $\Omega \subset B_R(0)$. Pour tout $y \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|x| - R \leq |x - y| \leq |x| + R, \quad (2.18)$$

par l'inégalité triangulaire ($|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x| - R$ et $|x - y| \leq |x| + |y| \leq |x| + R$). En divisant par $|x|$ (pour $|x| > 0$) :

$$1 - \frac{R}{|x|} \leq \frac{|x - y|}{|x|} \leq 1 + \frac{R}{|x|}, \quad \forall y \in \Omega. \quad (2.19)$$

On en déduit que le rapport $|x - y|/|x|$ tend vers 1 **uniformément** en $y \in \Omega$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

étape 3: Approximation uniforme du noyau.

On veut comparer $|x - y|^{-(n+2s)}$ avec $|x|^{-(n+2s)}$. On écrit :

$$\frac{|x|^{n+2s}}{|x - y|^{n+2s}} = \left(\frac{|x|}{|x - y|} \right)^{n+2s} =: 1 + \gamma(x, y), \quad (2.20)$$

de sorte que :

$$\frac{1}{|x - y|^{n+2s}} = \frac{1 + \gamma(x, y)}{|x|^{n+2s}}.$$

Borne uniforme sur $\gamma(x, y)$. Par (2.19), pour tout $y \in \Omega$ et $|x| > R$:

$$\frac{|x - y|}{|x|} \in \left(1 - \frac{R}{|x|}, 1 + \frac{R}{|x|}\right).$$

On inverse les membres (les bornes sont strictement positives pour $|x| > R$) :

$$\frac{|x|}{|x - y|} \in \left(\frac{1}{1 + R/|x|}, \frac{1}{1 - R/|x|}\right).$$

On élève à la puissance $n + 2s > 0$:

$$\left(\frac{|x|}{|x - y|}\right)^{n+2s} \leq \left(\frac{1}{1 - R/|x|}\right)^{n+2s} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 1,$$

puisque $R/|x| \rightarrow 0$ implique $(1 - R/|x|)^{-(n+2s)} \rightarrow 1^{n+2s} = 1$. De même, $\left(\frac{|x|}{|x - y|}\right)^{n+2s} \geq (1 + R/|x|)^{-(n+2s)} \rightarrow 1$. Donc $\left(\frac{|x|}{|x - y|}\right)^{n+2s} \rightarrow 1$ uniformément en $y \in \Omega$, ce qui donne $|\gamma(x, y)| \rightarrow 0$ uniformément.

Pour rendre l'estimation quantitative, on se fixe $\varepsilon > 0$ et l'on cherche $\tilde{R}$ tel que, pour $|x| > \tilde{R}$:

$$\frac{|x - y|}{|x|} \in \left(1 - \frac{R}{|x|}, 1 + \frac{R}{|x|}\right) \subset (1 - \delta, 1 + \delta), \quad \delta := \frac{R}{\tilde{R}}.$$

Pourquoi cette inclusion ? Pour $|x| > \tilde{R}$, on a $R/|x| < R/\tilde{R} = \delta$, donc l'intervalle $(1 - R/|x|, 1 + R/|x|)$ est *strictement contenu* dans $(1 - \delta, 1 + \delta)$. L'inclusion assure alors que $(1 \pm \delta)^{\pm(n+2s)}$ contrôle uniformément le rapport $\left(\frac{|x|}{|x - y|}\right)^{n+2s}$ pour tout $y \in \Omega$.

Choix de $\tilde{R}$. On veut que $(1 + \delta)^{n+2s} \leq 1 + \varepsilon$ (borne supérieure du rapport), c'est-à-dire $\delta \leq (1 + \varepsilon)^{1/(n+2s)} - 1$, soit $R/\tilde{R} \leq (1 + \varepsilon)^{1/(n+2s)} - 1$. On choisit donc :

$$\tilde{R} := \frac{R}{(1 + \varepsilon)^{1/(n+2s)} - 1} = R \cdot [(1 + \varepsilon)^{1/(n+2s)} - 1]^{-1},$$

de sorte que $\delta = R/\tilde{R} = (1 + \varepsilon)^{1/(n+2s)} - 1$ réalise exactement la borne. On vérifie que $\tilde{R} > R$ (car $(1 + \varepsilon)^{1/(n+2s)} < 1 + \varepsilon$ pour $n + 2s > 1$, et $\varepsilon < 1$), donc la condition $|x| > \tilde{R} > R$ garantit bien que $\Omega \subset B_R(0)$ et que $x \notin \bar{\Omega}$. Pour $|x| > \tilde{R}$, on obtient $(1 \pm \delta)^{\pm(n+2s)} \leq 1 + \varepsilon$, d'où :

$$|\gamma(x, y)| \leq \varepsilon, \quad \forall |x| > \tilde{R}, \forall y \in \Omega. \quad (2.21)$$

étape 4: Réécriture de $u(x)$ avec le paramètre γ .

On substitue la décomposition (2.20) dans la représentation (2.17). Au numérateur et au

dénominateur :

$$\begin{aligned} N(x) &= c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy = \frac{c_{n,s}}{|x|^{n+2s}} \int_{\Omega} (1 + \gamma(x, y)) u(y) dy \\ &= \frac{c_{n,s}}{|x|^{n+2s}} \left[\int_{\Omega} u(y) dy + \underbrace{\int_{\Omega} \gamma(x, y) u(y) dy}_{=:\gamma_+(x)} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} D(x) &= c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+2s}} = \frac{c_{n,s}}{|x|^{n+2s}} \int_{\Omega} (1 + \gamma(x, y)) dy \\ &= \frac{c_{n,s}}{|x|^{n+2s}} \left[|\Omega| + \underbrace{\int_{\Omega} \gamma(x, y) dy}_{=:\gamma_-(x)} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le facteur commun $c_{n,s}/|x|^{n+2s}$ se simplifie dans le quotient $u(x) = N(x)/D(x)$:

$$u(x) = \frac{\int_{\Omega} u(y) dy + \gamma_+(x)}{|\Omega| + \gamma_-(x)} = \frac{|\Omega| \bar{u} + \gamma_+(x)}{|\Omega| + \gamma_-(x)}, \quad (2.24)$$

où l'on a posé $\bar{u} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(y) dy$.

étape 5: Estimation des termes d'erreur $\gamma_+(x)$ et $\gamma_-(x)$.

En utilisant la borne uniforme (2.21) pour $|x| > \tilde{R}$:

$$|\gamma_+(x)| = \left| \int_{\Omega} \gamma(x, y) u(y) dy \right| \leq \int_{\Omega} |\gamma(x, y)| |u(y)| dy \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u(y)| dy \leq \varepsilon |\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.25)$$

$$|\gamma_-(x)| = \left| \int_{\Omega} \gamma(x, y) dy \right| \leq \int_{\Omega} |\gamma(x, y)| dy \leq \varepsilon |\Omega|. \quad (2.26)$$

En particulier, pour $\varepsilon < 1/2$:

$$|\Omega| + \gamma_-(x) \geq |\Omega| - \varepsilon |\Omega| = |\Omega|(1 - \varepsilon) \geq \frac{|\Omega|}{2} > 0.$$

étape 6: Estimation finale de $|u(x) - \bar{u}|$.

On soustrait $\bar{u}$ dans (2.24) :

$$\begin{aligned} u(x) - \bar{u} &= \frac{|\Omega| \bar{u} + \gamma_+(x)}{|\Omega| + \gamma_-(x)} - \bar{u} \\ &= \frac{|\Omega| \bar{u} + \gamma_+(x) - \bar{u}(|\Omega| + \gamma_-(x))}{|\Omega| + \gamma_-(x)} \\ &= \frac{\gamma_+(x) - \bar{u} \gamma_-(x)}{|\Omega| + \gamma_-(x)}. \end{aligned}$$

En valeur absolue, en utilisant (2.25), (2.26) et $|\Omega| + \gamma_-(x) \geq |\Omega|/2$:

$$\begin{aligned}
 |u(x) - \bar{u}| &\leq \frac{|\gamma_+(x)| + |\bar{u}| |\gamma_-(x)|}{|\Omega| + \gamma_-(x)} \\
 &\leq \frac{\varepsilon |\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + |\bar{u}| \varepsilon |\Omega|}{|\Omega|/2} \\
 &= \frac{2\varepsilon}{|\Omega|} \left(|\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + |\bar{u}| |\Omega| \right) \\
 &=: C_{u,\Omega} \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

où $C_{u,\Omega} := 2|\Omega|^{-1} (|\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + |\bar{u}| |\Omega|)$ est une constante **indépendante de x** .

étape 7: Uniformité et conclusion.

L'inégalité (2.27) est valable pour tout $|x| > \tilde{R}$ et pour tout $y \in \Omega$ simultanément, et la constante $C_{u,\Omega}$ ne dépend pas de x . Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\tilde{R} = \tilde{R}(\varepsilon, R, n, s) > 0$ tel que :

$$|u(x) - \bar{u}| \leq C_{u,\Omega} \varepsilon, \quad \forall |x| > \tilde{R}.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela établit $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = \bar{u}$, **uniformément en x** . L'énoncé (2.16) est démontré. On déduit que u est bornée à l'infini.

□

Chapitre 3

Analyse Spectrale de $(-\Delta)^s$ avec $\mathcal{N}_s u = 0$

3.1 Problème aux valeurs propres et quotient de Rayleigh

On cherche les couples $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R} \times H_{\Omega,0}^s \setminus \{0\}$ solutions du problème spectral :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \varphi = \lambda \varphi & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s \varphi = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (3.1)$$

La formulation variationnelle faible est : trouver $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R} \times H_{\Omega,0}^s \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathcal{A}_s(\varphi, v) = \int_{\Omega} v (-\Delta)^s \varphi + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s \varphi}_{=0} = \lambda \langle \varphi, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_{\Omega,0}^s. \quad (3.2)$$

Définition 3.1 (Quotient de Rayleigh fractionnaire). Pour $u \in H_{\Omega,0}^s \setminus \{0\}$, le **quotient de Rayleigh** est :

$$R_s(u) = \frac{\mathcal{A}_s(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} u(x)^2 dx}. \quad (3.3)$$

3.2 Théorème spectral principal

Remarque 3.1 (Théorème de Hilbert–Schmidt). Soit H un espace de Hilbert séparable et $T : H \rightarrow H$ un opérateur compact et auto-adjoint. Alors :

- (i) T admet une suite de valeurs propres réelles (μ_k) avec $|\mu_k| \rightarrow 0$.
- (ii) Les fonctions propres correspondantes forment une base hilbertienne de $\overline{\text{Im}(T)}$.
- (iii) $Tu = \sum_k \mu_k \langle u, e_k \rangle_H e_k$ (développement spectral).

Ce résultat s'applique en particulier à tout opérateur résolvant compact auto-adjoint sur $L_0^2(\Omega)$ ou sur $L^2(\Omega)$.

Théorème 3.1 (Théorème spectral pour $(-\Delta)^s$ avec $\mathcal{N}_s u = 0$ [9], Théorème 3.11). Le problème (3.1) admet une suite de valeurs propres :

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (3.4)$$

et une suite de fonctions propres $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subset H_{\Omega,0}^s$ formant une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. De plus :

- $(-\Delta)^s \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ dans Ω et $\mathcal{N}_s \varphi_k = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

- Les restrictions $(\varphi_k|_\Omega)$ forment un système orthogonal complet dans $L^2(\Omega)$.
- $\lambda_1 = 0$ avec fonction propre $\varphi_1 = |\Omega|^{-1/2}$ (constante).
- $\lambda_k > 0$ pour tout $k \geq 2$.
- $\langle \varphi_m, \varphi_k \rangle_{L^2} = \delta_{mk}$ et $\mathcal{A}_s(\varphi_m, \varphi_k) = \lambda_k \delta_{mk}$.

Démonstration. **Construction de l'opérateur résolvant sur $L_0^2(\Omega)$.** On pose $L_0^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u \, dx = 0\}$. Pour tout $f \in L_0^2(\Omega)$, la condition de compatibilité $\int_\Omega f = 0$ est satisfaite, donc le Théorème 2.7 (cas $g = 0$) fournit un unique $u \in H_{\Omega,0}^s$ avec $\int_\Omega u = 0$ satisfaisant :

$$(-\Delta)^s u = f \text{ dans } \Omega, \quad \mathcal{N}_s u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

On pose $T_0 f := u$ (la solution étendue à $\mathbb{R}^n$) et $Tf := T_0 f|_\Omega$. Ainsi $T : L_0^2(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$.

Compacité de T . On prend $v = T_0 f$ dans la formulation faible (2.2) :

$$\mathcal{A}_s(T_0 f, T_0 f) = \int_\Omega f \cdot T_0 f \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|T_0 f\|_{L^2}.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré–Wirtinger (1.13) (applicable car $\int_\Omega T_0 f = 0$) :

$$\lambda_2 \|T_0 f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}_s(T_0 f, T_0 f) \leq \|f\|_{L^2} \|T_0 f\|_{L^2},$$

d'où $\|T_0 f\|_{L^2} \leq \lambda_2^{-1} \|f\|_{L^2}$ et $[T_0 f]_{H^s(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}_s(T_0 f, T_0 f) \leq \lambda_2^{-1} \|f\|_{L^2}^2$. Donc T est borné de $L_0^2(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$. Par injection compacte $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $T : L_0^2(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$ est compact.

Auto-adjonction de T . Pour $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, on prend $v = T_0 f_2$ dans la formulation faible pour $T_0 f_1$: $\mathcal{A}_s(T_0 f_1, T_0 f_2) = \int_\Omega f_1 \cdot T_0 f_2 \, dx = \langle f_1, T f_2 \rangle_{L^2}$. Par symétrie de $\mathcal{A}_s$: $\langle f_1, T f_2 \rangle = \mathcal{A}_s(T_0 f_1, T_0 f_2) = \mathcal{A}_s(T_0 f_2, T_0 f_1) = \langle f_2, T f_1 \rangle = \langle T f_1, f_2 \rangle$. Donc T est auto-adjoint.

Application de la Remarque 3.1. L'opérateur $T : L_0^2(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$ est compact et auto-adjoint. D'après la Remarque 3.1, il admet une suite de valeurs propres $(\mu_i)_{i \geq 2}$ avec $|\mu_i| \rightarrow 0$, et les fonctions propres $(e_i)_{i \geq 2}$ forment une base hilbertienne orthonormale de $L_0^2(\Omega)$:

$$T e_i = \mu_i e_i, \quad \langle e_i, e_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}.$$

On pose alors $\lambda_i := \mu_i^{-1}$ et $\varphi_i := T_0 e_i$ pour $i \geq 2$. Dans Ω :

$$(-\Delta)^s \varphi_i = (-\Delta)^s (T_0 e_i) = e_i = \mu_i^{-1} \cdot \mu_i e_i = \lambda_i \cdot T_0 e_i|_\Omega = \lambda_i \varphi_i.$$

De plus $\mathcal{N}_s \varphi_i = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ par construction.

Stricte positivité des μ_i . Supposons $\mu_i = 0$. Alors $T e_i = 0$, i.e. $T_0 e_i|_\Omega = 0$. Par construction, $\mathcal{N}_s(T_0 e_i) = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. La formule (1.6) donne alors $T_0 e_i(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Donc $T_0 e_i \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n$, et $(-\Delta)^s(T_0 e_i) = e_i = 0$ dans Ω : contradiction avec $e_i \neq 0$. Donc $\mu_i \neq 0$ et $\lambda_i = \mu_i^{-1}$ est bien défini.

Positivité stricte $\lambda_i > 0$ pour $i \geq 2$. On prend φ_i comme fonction test dans sa propre équation spectrale :

$$\lambda_i \int_\Omega \varphi_i^2 \, dx = \int_\Omega \varphi_i \cdot (-\Delta)^s \varphi_i \, dx = \mathcal{A}_s(\varphi_i, \varphi_i) \geq 0,$$

donc $\lambda_i \geq 0$. Si $\lambda_i = 0$: alors $\mathcal{A}_s(\varphi_i, \varphi_i) = 0$, et par le Lemme 2.4, φ_i est constante. Or $\varphi_i|_\Omega \in L^2_0(\Omega)$ force $\varphi_i \equiv 0$ dans Ω , contredisant $e_i \neq 0$. Donc $\lambda_i > 0$.

Première valeur propre $\lambda_1 = 0$. On vérifie que $\varphi_1 := |\Omega|^{-1/2}$ (constante normalisée dans $L^2(\Omega)$) satisfait $(-\Delta)^s \varphi_1 = 0$ dans Ω et $\mathcal{N}_s \varphi_1 = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Donc $\lambda_1 = 0$ avec $\varphi_1 = |\Omega|^{-1/2}$.

Orthogonalité de $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$. Le système $\{e_i\}_{i \geq 2}$ est orthonormal dans $L^2(\Omega)$, et chaque e_i ($i \geq 2$) est orthogonal à $\varphi_1 = |\Omega|^{-1/2}$ car $e_i \in L^2_0(\Omega)$ implique $\int_\Omega e_i = 0$.

Complétude dans $L^2(\Omega)$. Tout $\gamma \in L^2(\Omega)$ se décompose en $\gamma = \gamma_1 + \tilde{\gamma}$ avec $\gamma_1 := \langle \gamma, \varphi_1 \rangle_{L^2} \varphi_1$ et $\tilde{\gamma} := \gamma - \gamma_1 \in L^2_0(\Omega)$. Puisque $(e_i)_{i \geq 2}$ est une base de $L^2_0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}$ est développable sur $(\varphi_i)_{i \geq 2}$. En ajoutant la contribution de φ_1 , la famille $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. □

3.3 Caractérisation variationnelle et formule de Courant–Fischer [6]:

Théorème 3.2 (Caractérisation variationnelle [9]). (i) $\lambda_1 = 0$, atteint par les constantes.

$$(ii) \lambda_2 = \inf_{\substack{u \in H^s_{\Omega,0} \setminus \{0\} \\ \int_\Omega u = 0}} R_s(u), \text{ atteint par } \varphi_2.$$

(iii) Pour $k \geq 2$ (formule de Courant–Fischer) :

$$\lambda_k = \inf_{\substack{u \in H^s_{\Omega,0} \setminus \{0\} \\ u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}}} R_s(u) = \max_{\substack{V_k \subset H^s_{\Omega,0} \\ \dim V_k = k}} \min_{u \in V_k \setminus \{0\}} R_s(u).$$

Remarque 3.2 (Interprétation de la formule de Courant–Fischer). L'expression

$$\max_{\substack{V_k \subset H^s_{\Omega,0} \\ \dim V_k = k}} \min_{u \in V_k \setminus \{0\}} R_s(u) \text{ se lit comme suit.}$$

Le min intérieur. Pour un sous-espace $V_k \subset H^s_{\Omega,0}$ de dimension k fixé,

$$\min_{u \in V_k \setminus \{0\}} R_s(u)$$

est la plus petite valeur du quotient de Rayleigh atteignable en restant dans V_k . Ce minimum correspond à la "pire direction" de V_k du point de vue de l'énergie fractionnaire : toute fonction $u \in V_k$ non nulle a un quotient au moins aussi grand.

Le max extérieur. On optimise ensuite sur *tous* les sous-espaces de dimension k : le choix optimal est $V_k^* = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Dans cet espace, tout $u = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j$ vérifie

$$R_s(u) = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^k c_j^2} \geq \lambda_k,$$

avec égalité en $u = \varphi_k$. Le minimum intérieur vaut donc exactement λ_k .

Tout autre sous-espace V_k de dimension k contient une direction qui "déborde" sur $\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots$, ce qui abaisse le minimum intérieur en dessous de λ_k . Le maximum sur tous les V_k est donc bien λ_k , atteint uniquement par V_k^* .

Reformulation intuitive. La formule de Courant–Fischer dit : λ_k est la plus grande valeur que l'on peut garantir comme "meilleur quotient de Rayleigh" dans un sous-espace de dimension k . Elle encode le fait que pour forcer $R_s(u)$ à dépasser λ_k , il faut travailler dans un espace de dimension strictement supérieure à k .

Chapitre 4

Équation de la Chaleur Non locale

On étudie le problème d'évolution :

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^s u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ \mathcal{N}_s u = g(x, t), & (x, t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Existence et unicité globale

Théorème 4.1 (Existence et unicité). *Soient $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2_{\text{loc}}(0, +\infty; L^2(\Omega))$ et $g \in L^2_{\text{loc}}(0, +\infty; L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega))$. Il existe une unique solution faible u de (4.1) avec $u \in L^2_{\text{loc}}(0, +\infty; H^s_{\Omega, g}) \cap C([0, +\infty); L^2(\Omega))$.*

Démonstration. On introduit l'opérateur $A_s : H^s_{\Omega, g} \rightarrow (H^s_{\Omega, g})^*$ défini par $\langle A_s u, v \rangle = \mathcal{A}_s(u, v) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |g| uv$. Il est continu et coercif ($\langle A_s u, u \rangle \geq \mathcal{A}_s(u, u) \geq 0$). Le problème s'écrit abstraitement $u'(t) + A_s u(t) = F(t)$ dans $L^2(\Omega)$.

Par le **théorème de Hille–Yosida** (Appendice A.5), $-A_s$ est dissipatif et $\text{Id} + A_s$ est surjectif (par Lax–Milgram avec la forme $B(u, v) = \langle u, v \rangle_{L^2} + \mathcal{A}_s(u, v)$, coercive sur $H^s_{\Omega, g}$). Donc $-A_s$ génère un semi-groupe de contractions $\{S_s(t)\}_{t \geq 0}$ sur $L^2(\Omega)$.

La solution est donnée par la **formule de Duhamel** :

$$u(t) = S_s(t)u_0 + \int_0^t S_s(t - \tau)F(\tau) d\tau. \quad (4.2)$$

L'unicité est intrinsèque au théorème de Hille–Yosida. □

Remarque 4.1. La représentation spectrale du semi-groupe est : $S_s(t)u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle_{L^2} \varphi_k$. Le terme $k = 1$ est constant (car $\lambda_1 = 0$) et correspond à la conservation de la masse.

4.2 Conservation de la masse

Proposition 4.2 (Bilan de masse [9], Proposition 4.1). *La solution de (4.1) satisfait :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g dx. \quad (4.3)$$

*En particulier, si $f \equiv 0$ et $g \equiv 0$, la **masse totale est conservée** : $\int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Grâce à l'hypothèse $|u_t| + |(-\Delta)^s u| \leq K$, le théorème de dérivation sous le signe intégral de Lebesgue s'applique. On calcule :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \int_{\Omega} (f(x, t, u) - (-\Delta)^s u(x, t)) dx.$$

On applique la formule de divergence non locale (2.3) (Lemme 2.1) à la deuxième intégrale :

$$- \int_{\Omega} (-\Delta)^s u \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g(x, t, u) \, dx.$$

En reportant, on obtient (4.3) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) \, dx = \int_{\Omega} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} g \, dx.$$

Pour la chaleur homogène ($f = 0$, $g = 0$) : le membre droit est nul, donc $t \mapsto \int_{\Omega} u(\cdot, t) \, dx$ est constante. À $t = 0$, sa valeur est $\int_{\Omega} u_0 \, dx$. $\square$

4.3 Décroissance de l'énergie

Proposition 4.3 (Décroissance de l'énergie [9], Proposition 4.2). *Pour $f \equiv 0$ et $g \equiv 0$, en notant $E(t) = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$:*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mathcal{A}_s(u(t), u(t)) \leq 0. \quad (4.4)$$

De plus, l'énergie fractionnaire $\mathcal{E}_s(t) = \mathcal{A}_s(u(t), u(t))$ satisfait :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_s(t) = -2 \int_{\Omega} |(-\Delta)^s u(x, t)|^2 \, dx \leq 0. \quad (4.5)$$

Démonstration. On développe $E'(t)$ directement depuis la définition de l'énergie. Puisque u est de classe C^1 en t avec les bornes requises, on peut dériver sous le signe intégral :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{|u(x, t) - u(y, t)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{2(u(x, t) - u(y, t))(\partial_t u(x, t) - \partial_t u(y, t))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy \\ &= \frac{4}{c_{n,s}} \cdot \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy \Big|_{v=\partial_t u} \\ &= \frac{4}{c_{n,s}} \mathcal{A}_s(u, \partial_t u), \end{aligned}$$

où on a identifié la double intégrale avec $\mathcal{A}_s(u, \partial_t u)$. On applique maintenant la formule d'intégration par parties (2.4) avec $v = \partial_t u$ et la condition $\mathcal{N}_s u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$:

$$\mathcal{A}_s(u, \partial_t u) = \int_{\Omega} \partial_t u \cdot (-\Delta)^s u \, dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \partial_t u \cdot \mathcal{N}_s u \, dx}_{=0}.$$

Donc :

$$E'(t) = \frac{4}{c_{n,s}} \int_{\Omega} \partial_t u \cdot (-\Delta)^s u \, dx.$$

On substitue l'équation $\partial_t u = -(-\Delta)^s u$ (puisque $f = 0$) :

$$E'(t) = \frac{4}{c_{n,s}} \int_{\Omega} (-(-\Delta)^s u) \cdot (-\Delta)^s u \, dx = -\frac{4}{c_{n,s}} \int_{\Omega} |(-\Delta)^s u(x, t)|^2 \, dx \leq 0.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $(-\Delta)^s u = 0$ dans Ω , ce qui, joint à $\mathcal{N}_s u = 0$, force u à être constante par le Lemme 2.4.

Décroissance de la norme L^2 . On prend $v = u$ dans la formulation faible avec $f = g = 0$:

$$\mathcal{A}_s(u, u) = \int_{\Omega} u \cdot (-\Delta)^s u \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot \partial_t u \, dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Puisque $\mathcal{A}_s(u, u) \geq 0$, on conclut $\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$. $\square$

4.4 Convergence vers la valeur moyenne

Proposition 4.4 (Convergence exponentielle [9], Proposition 4.3). *Pour $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, notons $m = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u_0$. Alors :*

$$\|u(\cdot, t) - m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{-2\lambda_2 t} \|u_0 - m\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.6)$$

En particulier, $u(\cdot, t) \rightarrow m$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Posons $m := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u_0 \, dx$, la valeur moyenne de la condition initiale. Par la Proposition 4.2, $\int_{\Omega} u(x, t) \, dx = \int_{\Omega} u_0 \, dx$ pour tout $t > 0$, donc $\int_{\Omega} (u(x, t) - m) \, dx = 0$.

Définissons $A(t) := \int_{\Omega} |u(x, t) - m|^2 \, dx = \|u(\cdot, t) - m\|_{L^2(\Omega)}^2$. Puisque $A(t) = \int_{\Omega} u^2 \, dx - 2m \int_{\Omega} u \, dx + |\Omega| m^2 = \int_{\Omega} u^2 \, dx - |\Omega| m^2$ (par conservation de la masse), on peut différentier :

$$A'(t) = 2 \int_{\Omega} u(x, t) \partial_t u(x, t) \, dx = 2 \int_{\Omega} (u - m) \partial_t u \, dx.$$

On utilise l'équation $\partial_t u = -(-\Delta)^s u$ (puisque $f = 0$) :

$$A'(t) = -2 \int_{\Omega} (u - m) (-\Delta)^s u \, dx.$$

On développe par la formule d'intégration par parties (2.5) (avec $\mathcal{N}_s u = 0$) :

$$\int_{\Omega} (u - m) (-\Delta)^s u \, dx = \mathcal{A}_s(u, u - m) = \mathcal{A}_s(u - m, u - m) + \mathcal{A}_s(m, u - m).$$

Mais $\mathcal{A}_s(m, u - m) = \frac{c_{n,s}}{2} \iint \frac{(m-m)(u(x)-m-(u(y)-m))}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy = 0$ car m est constante. Donc :

$$A'(t) = -2\mathcal{A}_s(u - m, u - m) = -c_{n,s} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathbb{C}\Omega)^2} \frac{|(u-m)(x) - (u-m)(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy \leq 0.$$

Ainsi A est décroissante. Pour obtenir la décroissance exponentielle, on applique l'inégalité de Poincaré–Wirtinger (1.13) à la fonction $u - m$, qui est de moyenne nulle :

$$\mathcal{A}_s(u - m, u - m) \geq \lambda_2 \|u - m\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_2 A(t).$$

On reporte dans l'expression de $A'(t)$:

$$A'(t) = -2\mathcal{A}_s(u - m, u - m) \leq -2\lambda_2 A(t).$$

On applique le lemme de Gronwall différentiel (Appendice A.7) avec $c = 2\lambda_2 > 0$: $A(t) \leq e^{-2\lambda_2 t} A(0)$, ce qui donne, en prenant la racine carrée :

$$\|u(\cdot, t) - m\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_2 t} \|u_0 - m\|_{L^2(\Omega)},$$

soit (4.6). La convergence est exponentiellement rapide. $\square$

Chapitre 5

Régularité et Comportement au Bord

5.1 Continuité via la condition de Neumann non locale

Proposition 5.1 (Continuité dans $\mathbb{R}^n$ via $\mathcal{N}_s u = 0$ [9], Proposition 5.2). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et u continue dans $\bar{\Omega}$, avec $\mathcal{N}_s u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Alors u admet un prolongement continu à $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

Démonstration. On démontre la continuité séparément en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ (Partie 1) et en tout point de $\partial\Omega$ (Partie 2).

Partie 1 : Continuité en $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

étape 1.1: Représentation intégrale de u hors de Ω .

Puisque $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $\overline{B_\rho(x_0)} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. En particulier $|x_0 - y| \geq \rho$ pour tout $y \in \bar{\Omega}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, la condition $\mathcal{N}_s u(x) = 0$ s'écrit (définition (1.6)) :

$$c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0.$$

On développe :

$$c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy - c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = 0,$$

soit, en factorisant $u(x)$ et en posant $D(x) := c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}}$ et $N(x) := c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy$:

$$u(x) \cdot D(x) = N(x), \quad u(x) = \frac{N(x)}{D(x)}. \quad (5.1)$$

Cette représentation est valide dès que $D(x) > 0$, ce qui est toujours le cas car Ω est non vide et $y \mapsto |x - y|^{-(n+2s)}$ est localement intégrable pour $x \notin \bar{\Omega}$.

étape 1.2: Construction de la fonction dominante.

Pour $x \in B_{\rho/2}(x_0)$ et $y \in \Omega$, le triangle donne :

$$|x - y| \geq |x_0 - y| - |x - x_0| \geq \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}.$$

Pour $y \in \Omega$ avec $|y| \geq R := 4|x_0| + 2\rho$, et $x \in B_{\rho/2}(x_0)$, on a :

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq |y| - |x_0| - \frac{\rho}{2} \geq |y| - \frac{R}{2} \geq \frac{|y|}{2},$$

où l'on a utilisé successivement :

- $|x| \leq |x_0| + \frac{\rho}{2}$ (car $x \in B_{\rho/2}(x_0)$) ;
- $|x_0| + \frac{\rho}{2} \leq \frac{R}{2}$, car $R = 4|x_0| + 2\rho$ implique $\frac{R}{2} = 2|x_0| + \rho \geq |x_0| + \frac{\rho}{2}$ (équivalent à $|x_0| + \frac{\rho}{2} \geq 0$, toujours vrai) ;

- $|y| \geq R$ (hypothèse), donc $|y| - \frac{R}{2} \geq \frac{R}{2} > 0$, d'où $\frac{|y| - R/2}{|y|} \geq \frac{1}{2}$ (puisque $|y| \geq R \geq 2 \cdot \frac{R}{2}$).

On définit, pour $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction dominante :

$$\frac{|u(y)| + 1}{|x - y|^{n+2s}} \leq 2^{n+2s} (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \left(\frac{\chi_{B_R}(y)}{\rho^{n+2s}} + \frac{\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_R}(y)}{|y|^{n+2s}} \right) =: \psi(y). \quad (5.2)$$

Justification de la domination. Les deux estimées établies ci-dessus donnent, pour $x \in B_{\rho/2}(x_0)$:

- Si $y \in B_R : |x - y| \geq \frac{\rho}{2}$, donc $\frac{1}{|x - y|^{n+2s}} \leq \frac{1}{(\rho/2)^{n+2s}} = \frac{2^{n+2s}}{\rho^{n+2s}}$.
- Si $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_R : |x - y| \geq \frac{|y|}{2}$, donc $\frac{1}{|x - y|^{n+2s}} \leq \frac{1}{(|y|/2)^{n+2s}} = \frac{2^{n+2s}}{|y|^{n+2s}}$.

Dans les deux cas, puisque $|u(y)| \leq \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$ et $1 \leq \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1$:

$$\frac{|u(y)| + 1}{|x - y|^{n+2s}} \leq (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \cdot \frac{2^{n+2s}}{|x - y|^{n+2s}} \leq 2^{n+2s} (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \left(\frac{\chi_{B_R}(y)}{\rho^{n+2s}} + \frac{\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_R}(y)}{|y|^{n+2s}} \right) = \psi(y).$$

En particulier $\frac{|u(y)|}{|x - y|^{n+2s}} \leq \psi(y)$ et $\frac{1}{|x - y|^{n+2s}} \leq \psi(y)$ pour tout $y \in \Omega$ et tout $x \in B_{\rho/2}(x_0)$.

Vérifions que $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy &= 2^{n+2s} (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \left[\int_{B_R} \frac{dy}{\rho^{n+2s}} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{dy}{|y|^{n+2s}} \right] \\ &= 2^{n+2s} (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \left[\frac{|B_R|}{\rho^{n+2s}} + \omega_n \int_R^{+\infty} r^{-(n+2s)} \cdot r^{n-1} dr \right] \\ &= 2^{n+2s} (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \left[\frac{\omega_n R^n}{n \rho^{n+2s}} + \omega_n \int_R^{+\infty} r^{-1-2s} dr \right] \\ &= 2^{n+2s} (\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + 1) \left[\frac{\omega_n R^n}{n \rho^{n+2s}} + \frac{\omega_n}{2s} R^{-2s} \right] < +\infty. \end{aligned}$$

Le premier terme est fini car R et ρ sont fixés. Le second converge car $2s > 0$. Donc $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

étape 1.3: Application du théorème de convergence dominée.

Pour $x \rightarrow x_0$ avec $x \in B_{\rho/2}(x_0)$, le noyau $y \mapsto u(y)/|x - y|^{n+2s}$ converge ponctuellement vers $y \mapsto u(y)/|x_0 - y|^{n+2s}$ pour tout $y \in \Omega$. On a la domination $|u(y)/|x - y|^{n+2s}| \leq \psi(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème de Lebesgue :

$$N(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy = N(x_0).$$

De même, en remplaçant $u(y)$ par 1 :

$$D(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} D(x_0) > 0.$$

Donc, par continuité du quotient :

$$u(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{N(x_0)}{D(x_0)} = u(x_0).$$

La continuité en $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ est établie.

Partie 2 : Continuité au point $p \in \partial\Omega$.

étape 2.1: Réduction à la différence $u(p_k) - u(q_k)$.

Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ une suite quelconque avec $p_k \rightarrow p \in \partial\Omega$. Pour chaque k , notons q_k la projection de p_k sur $\bar{\Omega}$. Noter que $|p_k - q_k| = \inf_{\xi \in \bar{\Omega}} |p_k - \xi| \leq |p_k - p|$. Par définition de la projection et l'inégalité triangulaire :

$$|q_k - p| \leq |q_k - p_k| + |p_k - p| \leq |p_k - p| + |p_k - p| = 2|p_k - p| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $q_k \rightarrow p$ dans $\bar{\Omega}$, et par continuité de u sur $\bar{\Omega}$:

$$u(q_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(p).$$

Il suffit donc de montrer que :

$$u(p_k) - u(q_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (5.3)$$

Si $p_k \in \bar{\Omega}$, on a $p_k = q_k$ et la différence est nulle. On traite donc le cas $p_k \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

étape 2.2: Mise à l'échelle et changement de variables.

Posons $h_k := |p_k - q_k| > 0$. En utilisant la représentation (5.1) en p_k et q_k :

$$u(p_k) - u(q_k) = \frac{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(q_k)}{|p_k - y|^{n+2s}} dy}{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}}.$$

On sépare l'intégrale au numérateur selon la taille de $|y - q_k|$:

$$u(p_k) - u(q_k) = \underbrace{\frac{c_{n,s} \int_{\Omega \cap B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{u(y) - u(q_k)}{|p_k - y|^{n+2s}} dy}{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}}}_{=: I_1^{(k)}} + \underbrace{\frac{c_{n,s} \int_{\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{u(y) - u(q_k)}{|p_k - y|^{n+2s}} dy}{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}}}_{=: I_2^{(k)}}.$$

étape 2.3: Contrôle de $I_1^{(k)}$ (région proche).

Puisque u est uniformément continue sur le compact $\bar{\Omega}$, on dispose du module de continuité $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\omega(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, vérifiant $|u(y) - u(q_k)| \leq \omega(|y - q_k|)$ pour $y \in \bar{\Omega}$. Pour $y \in \Omega \cap B_{\sqrt{h_k}}(q_k)$, on a $|y - q_k| \leq \sqrt{h_k}$, donc :

$$|u(y) - u(q_k)| \leq \omega(\sqrt{h_k}).$$

En factorisant $\omega(\sqrt{h_k})$ au numérateur et en simplifiant avec $D(p_k) > 0$:

$$|I_1^{(k)}| \leq \omega(\sqrt{h_k}) \cdot \frac{c_{n,s} \int_{\Omega \cap B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}}{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}} \leq \omega(\sqrt{h_k}).$$

(Le rapport d'intégrales est au plus 1.) Puisque $h_k \rightarrow 0$, on conclut $|I_1^{(k)}| \leq \omega(\sqrt{h_k}) \rightarrow 0$.

étape 2.4: Contrôle de $I_2^{(k)}$ (région lointaine).

Sous-étape 2.4.1 : Majoration initiale de $I_2^{(k)}$.

On commence par majorer $I_2^{(k)}$:

$$\begin{aligned} |I_2^{(k)}| &= \left| \frac{\int_{\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{u(y) - u(q_k)}{|p_k - y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}} \right| \\ &\leq \frac{\int_{\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{|u(y) - u(q_k)|}{|p_k - y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}} \\ &\leq \frac{\int_{\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{|p_k - y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}}}, \end{aligned}$$

car $|u(y) - u(q_k)| \leq |u(y)| + |u(q_k)| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Sous-étape 2.4.2 : Changement de variables.

On effectue le changement de variables $\eta = h_k^{-1} R_k(y - q_k)$, où $h_k = |p_k - q_k|$ et R_k est un mouvement rigide tel que $R_k q_k = 0$ et $R_k \nu_k = e_n$, avec $\nu_k := (p_k - q_k)/h_k$ la normale extérieure unitaire.

Le jacobien de cette transformation est $dy = h_k^n d\eta$.

Transformation de $|p_k - y|$:

$$\begin{aligned} |p_k - y| &= |p_k - h_k R_k^{-1} \eta| \\ &= |R_k(p_k - h_k R_k^{-1} \eta)| \\ &= |R_k p_k - h_k \eta| \\ &= h_k |h_k^{-1} R_k p_k - \eta| \\ &= h_k |e_n - \eta|, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $h_k^{-1} R_k p_k = h_k^{-1} R_k(p_k - q_k) = R_k \nu_k = e_n$.

Donc $|p_k - y|^{n+2s} = h_k^{n+2s} |e_n - \eta|^{n+2s}$.

Sous-étape 2.4.3 : Transformation des intégrales.

Pour l'intégrale au numérateur :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k)} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}} &= \int_{h_k^{-1}R_k(\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k))} \frac{h_k^n d\eta}{h_k^{n+2s}|e_n - \eta|^{n+2s}} \\ &= h_k^{-2s} \int_{h_k^{-1}R_k(\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k))} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}. \end{aligned}$$

Transformation de l'ensemble $h_k^{-1}R_k(\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k))$:

Puisque $R_k q_k = 0$, on a :

$$\begin{aligned} h_k^{-1}R_k B_{\sqrt{h_k}}(q_k) &= h_k^{-1}R_k \{y : |y - q_k| < \sqrt{h_k}\} \\ &= \{\eta : |h_k^{-1}R_k y - h_k^{-1}R_k q_k| < h_k^{-1}\sqrt{h_k}\} \\ &= \{\eta : |\eta - 0| < h_k^{-1/2}\} \\ &= B_{1/\sqrt{h_k}}(0). \end{aligned}$$

Donc $h_k^{-1}R_k(\Omega \setminus B_{\sqrt{h_k}}(q_k)) = \Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}$, où $\Omega_k := h_k^{-1}R_k(\Omega - q_k)$.

De même pour le dénominateur :

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{|p_k - y|^{n+2s}} = h_k^{-2s} \int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}.$$

Par conséquent :

$$|I_2^{(k)}| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \frac{\int_{\Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}{\int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}. \quad (5.4)$$

Sous-étape 2.4.4 : Minoration de $|e_n - \eta|$ pour $\eta \in \Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}$.

Soit $\eta \in \Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}$. Par définition, $|\eta| \geq \frac{1}{\sqrt{h_k}}$.

Pour k suffisamment grand tel que $h_k < \frac{1}{16}$, on a $\frac{1}{\sqrt{h_k}} > 4$.

Par l'inégalité triangulaire inversée :

$$|e_n - \eta| \geq |\eta| - |e_n| = |\eta| - 1.$$

Pour $|\eta| \geq \frac{1}{\sqrt{h_k}} > 4$, on a :

$$|\eta| - 1 \geq \frac{1}{\sqrt{h_k}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{h_k}}{\sqrt{h_k}}.$$

Pour $h_k < \frac{1}{16}$, on a $\sqrt{h_k} < \frac{1}{4}$, donc $1 - \sqrt{h_k} > \frac{3}{4}$, et :

$$\frac{1 - \sqrt{h_k}}{\sqrt{h_k}} \geq \frac{3}{4\sqrt{h_k}} = \frac{3}{4}h_k^{-1/2}.$$

Comme $h_k < 1$, on a $h_k^{-1/2} > h_k^{-1/4}$, donc pour k grand :

$$|e_n - \eta| \geq h_k^{-1/4}.$$

Décomposition de la puissance :

$$|e_n - \eta|^{n+2s} = |e_n - \eta|^{n+s} \cdot |e_n - \eta|^s \geq |e_n - \eta|^{n+s} \cdot h_k^{-s/4}.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{|e_n - \eta|^{n+2s}} \leq \frac{h_k^{s/4}}{|e_n - \eta|^{n+s}} \quad \text{pour } \eta \in \Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}. \quad (5.5)$$

Sous-étape 2.4.5 : Application de la majoration.

En utilisant (5.5) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}} &\leq \int_{\Omega_k \setminus B_{1/\sqrt{h_k}}} \frac{h_k^{s/4}}{|e_n - \eta|^{n+s}} d\eta \\ &\leq h_k^{s/4} \int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}}. \end{aligned}$$

En substituant dans (5.4) :

$$\begin{aligned} |I_2^{(k)}| &\leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \frac{h_k^{s/4} \int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}}}{\int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}} \\ &= 2h_k^{s/4} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \frac{\int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}}}{\int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}. \end{aligned}$$

Sous-étape 2.4.6 : Convergence des domaines et des intégrales.

Puisque Ω a une frontière C^1 et $q_k \rightarrow p \in \partial\Omega$, après rotation et dilatation, le domaine Ω_k converge localement vers le demi-espace :

$$\Omega_k \rightarrow \Pi := \{\eta_n < 0\} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}} = \int_{\Pi} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}} = \int_{\Pi} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}.$$

Ces deux intégrales sont finies (car $s > 0$ et $2s > 0$), donc le rapport converge :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}}}{\int_{\Omega_k} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}} = \frac{\int_{\Pi} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+s}}}{\int_{\Pi} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}} =: C < \infty.$$

Sous-étape 2.4.7 : Conclusion.

Pour k assez grand, le rapport est borné par $2C$, donc :

$$|I_2^{(k)}| \leq 4Ch_k^{s/4} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Puisque $h_k = |p_k - q_k| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$:

$$|I_2^{(k)}| \leq 4Ch_k^{s/4} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (5.6)$$

étape 2.5: Conclusion.

En combinant les étapes 2.3 et 2.4 :

$$|u(p_k) - u(q_k)| \leq |I_1^{(k)}| + |I_2^{(k)}| \leq \omega(\sqrt{h_k}) + Ch_k^s \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $u(p_k) = u(q_k) + (u(p_k) - u(q_k)) \rightarrow u(p) + 0 = u(p)$. La continuité en tout $p \in \partial\Omega$ est établie. □

Proposition 5.2 (Comportement de $\tilde{\mathcal{N}}_s u$ au bord [9], Proposition 5.4). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $u \in C(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \partial\Omega \\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega}} \tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = 0. \quad (5.7)$$

De plus, si $s > 1/2$ et $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ pour $\alpha \in (0, 2s - 1)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{\mathcal{N}}_s u(x + \varepsilon \nu)}{\varepsilon} = \kappa \partial_\nu u(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (5.8)$$

où $\kappa > 0$ est une constante universelle, et ν est le vecteur normale extérieur.

Démonstration. Partie A : Preuve de $\tilde{\mathcal{N}}_s u \rightarrow 0$ sur $\partial\Omega$.

étape A.1: Construction de l'extension v via $\mathcal{N}_s v = 0$.

On applique le Corollaire 5.3 de [9] à $v_0 := u|_\Omega \in C(\Omega)$: il existe $v \in C(\mathbb{R}^n)$ tel que $v = u$ dans Ω et $\mathcal{N}_s v(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Explicitement, v est donné par la formule d'extension :

$$v(x) = \frac{\int_\Omega \frac{u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy}{\int_\Omega \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \quad (5.9)$$

étape A.2: Calcul algébrique de $\tilde{\mathcal{N}}_s u(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, rappelons que l'opérateur de Neumann renormalisé est :

$$\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = \frac{\mathcal{N}_s u(x)}{w_{s,\Omega}(x)}, \quad w_{s,\Omega}(x) := c_{n,s} \int_\Omega \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}} > 0.$$

Puisque $\mathcal{N}_s v(x) = 0$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) &= \frac{\mathcal{N}_s u(x) - \mathcal{N}_s v(x)}{w_{s,\Omega}(x)} \\
&= \frac{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y)) - (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy}{w_{s,\Omega}(x)} \\
&= \frac{c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - v(x)) - (u(y) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy}{w_{s,\Omega}(x)}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Or, par construction, $v(y) = u(y)$ pour tout $y \in \Omega$, donc $u(y) - v(y) = 0$ dans l'intégrale. On obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) &= \frac{(u(x) - v(x)) c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{n+2s}}}{w_{s,\Omega}(x)} \\
&= \frac{(u(x) - v(x)) w_{s,\Omega}(x)}{w_{s,\Omega}(x)} \\
&= u(x) - v(x). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

étape A.3: Passage à la limite.

Pour $x \rightarrow p \in \partial\Omega$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$:

$$\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = u(x) - v(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} u(p) - v(p) = 0,$$

car u et v sont continues dans $\mathbb{R}^n$ (par la Proposition 5.1 appliquée à v , et par hypothèse pour u), et $v(p) = u(p)$ (par continuité de $v = u$ sur $\bar{\Omega}$). Ceci établit (5.7).

Partie B : Preuve de la formule de dérivée normale (5.8).

étape B.1: Mise en place.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $x = 0 \in \partial\Omega$ et que $\nu = \nu(0) = e_n$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en 0. On doit calculer :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{\mathcal{N}}_s u(\varepsilon e_n)}{\varepsilon}.$$

En utilisant (5.11) et $\tilde{\mathcal{N}}_s u(0) = 0$:

$$\frac{\tilde{\mathcal{N}}_s u(\varepsilon e_n)}{\varepsilon} = \frac{u(\varepsilon e_n) - v(\varepsilon e_n)}{\varepsilon}. \tag{5.12}$$

étape B.2: Développement de $v(\varepsilon e_n)$ par changement de variables.

En utilisant la formule (5.9) pour $v(\varepsilon e_n)$ et le changement de variables $\eta = y/\varepsilon$ (d'où

$dy = \varepsilon^n d\eta$ et $|\varepsilon e_n - y|^{n+2s} = \varepsilon^{n+2s}|e_n - \eta|^{n+2s}$:

$$\begin{aligned}
 v(\varepsilon e_n) &= \frac{\int_{\Omega} \frac{u(y)}{|\varepsilon e_n - y|^{n+2s}} dy}{\int_{\Omega} \frac{dy}{|\varepsilon e_n - y|^{n+2s}}} \\
 &= \frac{\varepsilon^n \int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{u(\varepsilon\eta)}{\varepsilon^{n+2s}|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\varepsilon^n \int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{\varepsilon^{n+2s}|e_n - \eta|^{n+2s}}} \\
 &= \frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{u(\varepsilon\eta)}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

De même, $u(\varepsilon e_n)$ peut s'écrire :

$$u(\varepsilon e_n) = \frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{u(\varepsilon e_n)}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}},$$

car le facteur $u(\varepsilon e_n)$, constant en η , sort de l'intégrale. En soustrayant :

$$u(\varepsilon e_n) - v(\varepsilon e_n) = \frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{u(\varepsilon e_n) - u(\varepsilon\eta)}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}. \tag{5.14}$$

étape B.3: Développement de Taylor de $u(\varepsilon e_n) - u(\varepsilon\eta)$.

Puisque $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, le développement de Taylor au premier ordre donne :

$$u(\varepsilon e_n) - u(\varepsilon\eta) = \nabla u(\varepsilon e_n) \cdot \varepsilon(e_n - \eta) + R(\varepsilon, \eta),$$

où le reste vérifie :

$$|R(\varepsilon, \eta)| \leq \|u\|_{C^{1,\alpha}} |\varepsilon e_n - \varepsilon\eta|^{1+\alpha} = \varepsilon^{1+\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}} |e_n - \eta|^{1+\alpha}.$$

En divisant par ε et en substituant dans (5.12)–(5.14) :

$$\begin{aligned}
 \frac{u(\varepsilon e_n) - v(\varepsilon e_n)}{\varepsilon} &= \underbrace{\frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{\nabla u(\varepsilon e_n) \cdot (e_n - \eta)}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}}_{=: J_1(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{R(\varepsilon, \eta)/\varepsilon}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}}_{=: J_2(\varepsilon)}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

étape B.4: Limite de $J_1(\varepsilon)$.

On décompose $\nabla u(\varepsilon e_n) \cdot (e_n - \eta) = \sum_{i=1}^n \partial_i u(\varepsilon e_n)(e_n - \eta)_i$. Par symétrie sphérique du noyau $|e_n - \eta|^{-(n+2s)}$ par rapport aux $n-1$ premières coordonnées :

$$\int_{\Pi} \frac{\eta_i}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

(intégrale nulle par parité en η_i sur le demi-espace $\Pi = \{\eta_n < 0\}$). Donc seule la composante $i = n$ contribue :

$$J_1(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_n u(0) \cdot \frac{\int_{\Pi} \frac{1 - \eta_n}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\Pi} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}} =: \kappa \partial_n u(0),$$

où on a utilisé $\frac{1}{\varepsilon}\Omega \rightarrow \Pi$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (car $0 \in \partial\Omega$, $\nu = e_n$ et Ω est C^1), et la convergence dominée pour le passage à la limite sous l'intégrale ($s > 1/2$ assure l'intégrabilité du noyau $(1 - \eta_n)/|e_n - \eta|^{n+2s}$ sur Π).

La constante κ est :

$$\kappa = \frac{\int_{\Pi} \frac{1 - \eta_n}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\Pi} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}} > 0, \quad (5.16)$$

avec les deux intégrales finies dès que $s > 1/2$.

étape B.5: Contrôle du reste $J_2(\varepsilon)$.

En utilisant $|R(\varepsilon, \eta)| \leq \varepsilon^{1+\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}} |e_n - \eta|^{1+\alpha}$:

$$\begin{aligned} |J_2(\varepsilon)| &\leq \varepsilon^\alpha \|u\|_{C^{1,\alpha}} \cdot \frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{|e_n - \eta|^{1+\alpha}}{|e_n - \eta|^{n+2s}} d\eta}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}} \\ &= \varepsilon^\alpha \|u\|_{C^{1,\alpha}} \cdot \frac{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s-1-\alpha}}}{\int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \frac{d\eta}{|e_n - \eta|^{n+2s}}}. \end{aligned}$$

La condition $\alpha > 0$ et $\alpha < 2s - 1$ assure que l'exposant $n + 2s - 1 - \alpha$ est strictement supérieur à n (intégrabilité en 0) et que le rapport des intégrales reste borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On conclut :

$$|J_2(\varepsilon)| \leq C \varepsilon^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

étape B.6: Conclusion.

En combinant les étapes B.4 et B.5 dans (5.15) :

$$\frac{\tilde{\mathcal{N}}_s u(\varepsilon e_n)}{\varepsilon} = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \kappa \partial_n u(0) + 0 = \kappa \partial_n u(x),$$

ce qui est exactement (5.8).

□

Proposition 5.3 (Limite $s \rightarrow 1^-$ de $\mathcal{N}_s$, [9], Proposition 5.1). Soient $u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Alors :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u \cdot v \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot v \, d\sigma. \quad (5.17)$$

Ainsi, $\mathcal{N}_s$ converge vers la dérivée normale classique ∂_ν quand $s \rightarrow 1^-$.

Démonstration. étape 1: Reformulation par la formule d'intégration par parties.

Par la formule d'intégration par parties non locale (Théorème 2.2), appliquée à $(u, v) \in H_{\Omega, g}^s \times H_{\Omega, g}^s$:

$$\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u \, dx = \mathcal{A}_s(u, v). \quad (5.18)$$

On réécrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u \cdot v \, dx = \mathcal{A}_s(u, v) - \int_{\Omega} v (-\Delta)^s u \, dx. \quad (5.19)$$

Il s'agit de montrer que le membre droit converge vers $\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot v \, d\sigma$ quand $s \rightarrow 1^-$.

étape 2: Limite de $\mathcal{A}_s(u, v)$ quand $s \rightarrow 1^-$.

Par définition de $\mathcal{A}_s$ (équation (1.8)) :

$$\mathcal{A}_s(u, v) = \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy.$$

Puisque $u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ ont un support compact dans Ω , pour s proche de 1 les contributions de l'extérieur sont négligeables (le support de u et v est loin du bord). On a l'approximation :

$$\mathcal{A}_s(u, v) \approx \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy =: \frac{c_{n,s}}{2} B_s(u, v).$$

Par polarisation de l'identité BBM (Théorème 9.1), rappelons que :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1 - s) \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy = K_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx, \quad K_n = \frac{\omega_{n-1}}{n}.$$

En appliquant cela à $u + v$, $u - v$, puis en soustrayant (identité du parallélogramme) :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1 - s) \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy = K_n \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Or, le développement asymptotique de $c_{n,s}$ (voir [8], Corollaire 4.2) donne :

$$c_{n,s} = \frac{4^s \Gamma(n/2 + s)}{\pi^{n/2} \Gamma(1 - s)} \cdot s \sim \frac{2(1 - s)^{-1}}{\omega_{n-1}/n} \quad (s \rightarrow 1^-), \quad (5.20)$$

c'est-à-dire $c_{n,s}(1 - s) \rightarrow 2/K_n = 2n/\omega_{n-1}$. En substituant :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{A}_s(u, v) &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{c_{n,s}(1 - s)}{2} \cdot \frac{1}{1 - s} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{K_n} \cdot K_n \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

étape 3: Limite de $\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u \, dx$ quand $s \rightarrow 1^-$.

Par la Proposition 4.4 de [8], pour $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(-\Delta)^s u(x) \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} -\Delta u(x), \quad \text{uniformément en } x \in \mathbb{R}^n.$$

(La convergence est uniforme car u a un support compact et $(-\Delta)^s u$ est borné uniformément en s par $\|u\|_{C^2}$.) Par le théorème de convergence dominée (avec dominante $\|v\|_{L^1} (-\Delta)^s u \rightarrow \|v\|_{L^1} \|\Delta u\|_{L^\infty}$) :

$$\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u \, dx \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} \int_{\Omega} v (-\Delta u) \, dx = - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx. \quad (5.22)$$

étape 4: Assemblage et formule de Green classique.

En substituant (5.21) et (5.22) dans (5.19) :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u \cdot v \, dx &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{A}_s(u, v) - \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{\Omega} v (-\Delta)^s u \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \left(- \int_{\Omega} v \Delta u \, dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \Delta u \, dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Or, la formule de Green classique pour $-\Delta$ donne :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma. \quad (5.24)$$

En substituant (5.24) dans (5.23) :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \mathcal{N}_s u \cdot v \, dx = \left(- \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma \right) + \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

Ceci établit (5.17) et conclut la démonstration.

□

Chapitre 6

Études complémentaires

6.1 Problème Surdéterminé

Dans la théorie classique, il est bien connu que les conditions de Dirichlet et de Neumann ne peuvent pas être prescrites simultanément pour un problème elliptique non trivial (problème surdéterminé). On étudie ici l'analogue non local : peut-on imposer à la fois $u(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ et $\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = 1$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ pour une fonction *continue* ?

Rappelons l'opérateur de Neumann renormalisé (Définition 1.3) :

$$\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = \frac{\mathcal{N}_s u(x)}{w_{s,\Omega}(x)}, \quad w_{s,\Omega}(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+2s}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

Théorème 6.1 (Absence de solution continue au problème surdéterminé [9], Théorème 6.1). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien. Il n'existe aucune fonction $u \in C(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant simultanément :*

$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ \tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Remarque 6.1. La fonction $u = \chi_{\Omega}$ (indicatrice de Ω) satisfait les deux conditions de (6.1), mais elle est *discontinue* sur $\partial\Omega$. Le théorème affirme que la continuité est une contrainte incompatible avec ces deux prescriptions.

Ce résultat est l'analogue non local du fait classique suivant : pour l'opérateur de Neumann ordinaire, la condition $\partial_{\nu} u = c$ sur $\partial\Omega$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ force $c = 0$ (par la formule de Green). La situation non locale est plus riche car la condition $\tilde{\mathcal{N}}_s u = 1$ est prescrite non pas sur $\partial\Omega$ mais sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ tout entier.

6.2 Comparaison avec les Travaux Antérieurs

Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour définir des conditions de type Neumann pour le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ ou des opérateurs non locaux apparentés. Cette section présente ces approches et les compare avec la condition noyau singulier.

Table 6.1: Comparaison des différentes conditions de Neumann non locales.

Approche	Opérateur / Idée	Avantages	Limites
DRV [9]	$\mathcal{N}_s u = g$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$; $(-\Delta)^s$ non modifié	Structure variationnelle ; problème nonhomogène possible ; conservation de masse	Condition sur tout $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$
Laplacien frac. régional [5]	$c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x)-u(y)}{ x-y ^{n+2s}} dy$; processus <i>censuré</i> (sauts confinés dans Ω)	Naturel pour les processus confinés	Opérateur dépend de Ω ; pas de condition nonhomogène
Réflexion déterministe [3]	Particule projetée/réfléchie sur $\partial\Omega$; solutions de viscosité	Interprétation probabiliste directe	Pas de structure variationnelle ; régularité de Ω requise
Grandes solutions (Grubb) [12]	$\partial_\nu(u/d^{s-1}) = g$ sur $\partial\Omega$; solutions non bornées près de $\partial\Omega$	Cadre pseudodifférentiel précis	Solutions non bornées ; cadre technique complexe
Laplacien spectral [17]	Défini via les fonctions propres de $-\Delta_{\Omega}^{Neu}$; Stinga-Volzone	Lié à la demi-espace extension (Caffarelli-Silvestre)	Opérateur intrinsèque à Ω ; non invariant par translation

partie III

Noyau Régulier

Chapitre 7

Valeurs Propres de Neumann pour l'Opérateur à Noyau J

Dans cette partie, nous suivons fidèlement la **Section 2.2** de [16]. L'opérateur L_J est borné sur $L^2(\Omega)$, ce qui simplifie considérablement l'analyse par rapport au cadre noyau singulier, mais réduit la portée des interactions.

7.1 Formule d'intégration par parties et structure variationnelle

Lemme 7.1 (Formule d'intégration par parties pour L_J [16]). *Pour tout $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables :*

$$-\int_{\Omega} v L_J u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_J u \, dx = a_J(u, v). \quad (7.1)$$

En particulier, si $\mathcal{N}_J u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$:

$$-\int_{\Omega} v L_J u \, dx = a_J(u, v). \quad (7.2)$$

Démonstration. En substituant la définition (1.15) et en appliquant Fubini :

$$-\int_{\Omega} v(x) L_J u(x) \, dx = \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(x) - u(y))v(x) \, dy \, dx.$$

Par échange $x \leftrightarrow y$ (licite car $J(x-y) = J(y-x)$ et l'intégrale est absolument convergente par compacité de Ω et bornitude de J) :

$$= \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(y) - u(x))v(y) \, dy \, dx.$$

En moyennant les deux expressions :

$$-\int_{\Omega} v L_J u \, dx = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \, dx \, dy = a_J(u, v).$$

C'est (7.2) lorsque $\mathcal{N}_J u = 0$. Pour le cas général, on ajoute le terme $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v(x) \mathcal{N}_J u(x) \, dx$: en développant $\mathcal{N}_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(x) - u(y)) \, dy$ et en procédant de même (échange $x \leftrightarrow y$, moyennage), on retrouve le terme de bord $+\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_J u$ qui donne (7.1). $\square$

Remarque 7.1. On souligne le parallèle exact entre les deux formules d'intégration par parties :

(noyau singulier)	(noyau régulier)
$\int_{\Omega} v (-\Delta)^s u + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u = \mathcal{A}_s(u, v)$	$-\int_{\Omega} v L_J u + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_J u = a_J(u, v)$
$\mathcal{A}_s$ sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2$	a_J sur $\Omega \times \Omega$ uniquement
Noyau non intégrable (singulier)	Noyau $\in L^\infty$, à support compact
$\mathcal{A}_s$ non borné sur L^2	L_J borné, $\ L_J\ \leq 2\ J\ _{L^1}$

La restriction de a_J à $\Omega \times \Omega$ est une conséquence directe du support compact de J .

7.2 Valeur propre triviale $\beta_1 = 0$ et conservation de masse

Comme pour $(-\Delta)^s$, la première valeur propre de $-L_J$ avec $\mathcal{N}_J u = 0$ est nulle : les constantes vérifient $L_J(\text{const}) = 0$.

Proposition 7.2 (Conservation de masse [16], Proposition 2.13). *Pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$, l'unique solution u de l'équation d'évolution*

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = L_J u(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (7.3)$$

conserve la masse totale : $\int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0 dx$ pour tout $t > 0$.

Démonstration. On intègre l'équation d'évolution sur Ω . Pour toute solution classique, on peut différentier sous le signe intégral :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx = \int_{\Omega} \int_{\Omega} J(x - y)(u(y, t) - u(x, t)) dy dx.$$

On sépare en deux termes :

$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} J(x - y) u(y, t) dy dx - \int_{\Omega} \int_{\Omega} J(x - y) u(x, t) dy dx.$$

On applique Fubini au premier terme (licite car $J \in L^1$ et u bornée) :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} J(x - y) u(y, t) dy dx = \int_{\Omega} u(y, t) \int_{\Omega} J(x - y) dx dy = \int_{\Omega} u(y, t) A_{\Omega}(y) dy,$$

où $A_{\Omega}(y) := \int_{\Omega} J(x - y) dx = \int_{\Omega} J(y - x) dx$ (symétrie de J). Le second terme s'écrit $\int_{\Omega} u(x, t) A_{\Omega}(x) dx$. Ces deux expressions sont égales (changement de nom $y \rightarrow x$ dans la première). Donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u A_{\Omega} - \int_{\Omega} u A_{\Omega} = 0.$$

La fonction $t \mapsto \int_{\Omega} u(x, t) dx$ est constante ; à $t = 0$ elle vaut $\int_{\Omega} u_0(x) dx$.

Preuve alternative par antisymétrie. La double intégrale s'écrit :

$$\iint_{\Omega^2} J(x - y)(u(y, t) - u(x, t)) dy dx.$$

En échangeant les rôles de x et y (le domaine $\Omega \times \Omega$ étant symétrique et $J(x - y) = J(y - x)$) :

$$\iint_{\Omega^2} J(y - x)(u(x, t) - u(y, t)) dx dy = - \iint_{\Omega^2} J(x - y)(u(y, t) - u(x, t)) dy dx.$$

La double intégrale est donc égale à son opposée, d'où elle est nulle. $\square$

Proposition 7.3 (Solutions stationnaires [16], Proposition 2.14). *Toute solution stationnaire de l'équation d'évolution de Neumann (7.3) est constante dans Ω . De plus, puisque la masse totale est conservée (Proposition 7.2), l'unique solution stationnaire ayant la même masse que u_0 est :*

$$\varphi = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx.$$

Démonstration. Équation stationnaire. Une solution stationnaire est une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ indépendante du temps, vérifiant $\partial_t u = 0$. Elle satisfait donc :

$$0 = \int_{\Omega} J(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x)) dy, \quad \forall x \in \Omega. \quad (7.4)$$

Étape 1 : Régularité de φ . On réécrit (7.4) en séparant les deux termes :

$$\varphi(x) \int_{\Omega} J(x-y) dy = \int_{\Omega} J(x-y) \varphi(y) dy,$$

soit, en posant $A(x) := \int_{\Omega} J(x-y) dy$,

$$A(x) \varphi(x) = \int_{\Omega} J(x-y) \varphi(y) dy.$$

Le membre de droite est une convolution de $\varphi \in L^2(\Omega)$ avec le noyau continu J . Puisque J est continu et à support compact, ce produit de convolution définit une fonction *continue* sur Ω . La fonction $A(x)$ est également continue et strictement positive (car $J(0) > 0$ et J est continu). On conclut que φ est une fonction **continue** sur Ω .

Étape 2 : Introduction du maximum. Puisque φ est continue sur le compact $\bar{\Omega}$, elle y atteint son maximum. On pose :

$$K := \max_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x),$$

et on définit l'ensemble des points où ce maximum est atteint :

$$\mathcal{A} := \{x \in \bar{\Omega} : \varphi(x) = K\}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ est **non vide** (le maximum est atteint) et **fermé** dans Ω (image réciproque du fermé $\{K\}$ par la fonction continue φ).

Étape 3 : $\mathcal{A}$ est ouvert dans Ω . Soit $x_0 \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\varphi(x_0) = K$. On évalue l'équation stationnaire (7.4) en x_0 :

$$0 = \int_{\Omega} J(x_0-y)(\varphi(y) - \varphi(x_0)) dy = \int_{\Omega} J(x_0-y)(\varphi(y) - K) dy.$$

Or, par définition de K comme maximum, on a $\varphi(y) - K \leq 0$ pour tout $y \in \Omega$, et le noyau satisfait $J \geq 0$. L'intégrale d'une fonction *négative ou nulle* vaut zéro, ce qui force l'intégrande à être nulle presque partout :

$$J(x_0-y)(\varphi(y) - K) = 0 \quad \text{p.p. } y \in \Omega.$$

Par hypothèse sur J , il existe $d > 0$ tel que $B(0, d) \subset \text{supp}(J)$, c'est-à-dire $J(x_0 - y) > 0$ pour tout $y \in B(x_0, d)$. La condition ci-dessus force alors :

$$\varphi(y) = K \quad \forall y \in \Omega \cap B(x_0, d).$$

Ainsi $\Omega \cap B(x_0, d) \subset \mathcal{A}$, ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est **ouvert** dans Ω .

Étape 4 : Conclusion par connexité. On a établi que $\mathcal{A} \subset \Omega$ vérifie simultanément :

- $\mathcal{A}$ est **non vide**,
- $\mathcal{A}$ est **fermé** dans Ω ,
- $\mathcal{A}$ est **ouvert** dans Ω .

Or Ω est un domaine **connexe**. Le seul sous-ensemble de Ω à la fois ouvert, fermé et non vide est Ω tout entier. Donc :

$$\mathcal{A} = \bar{\Omega},$$

ce qui signifie exactement que $\varphi(x) = K$ pour tout $x \in \Omega$: φ est **constante** sur Ω .

Étape 5 : Détermination de la constante par conservation de masse. La Proposition 7.2 établit que la masse totale est conservée :

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

La solution stationnaire $\varphi \equiv K$ doit vérifier la même contrainte de masse. En intégrant sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} u_0(x) dx, \\ \int_{\Omega} K dx &= \int_{\Omega} u_0(x) dx, \\ K \cdot |\Omega| &= \int_{\Omega} u_0(x) dx. \end{aligned}$$

D'où la valeur explicite de la constante :

$$\varphi \equiv K = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx.$$

L'unicité découle du fait que cette constante est entièrement déterminée par la donnée initiale u_0 . □

7.3 Première valeur propre non triviale β_2

Définition 7.1 (Première valeur propre non triviale de Neumann [16], Section 2.2). La première valeur propre non triviale est :

$$\beta_2(J, \Omega) := \inf_{\substack{u \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} u = 0 \\ u \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(y) - u(x))^2 dy dx}{\int_{\Omega} u(x)^2 dx}. \quad (7.5)$$

Le problème aux valeurs propres correspondant est :

$$\int_{\Omega} J(x-y)(\varphi(x) - \varphi(y)) dy = \beta_2 \varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (7.6)$$

Remarque 7.2. La notation β_2 (et non β_1) reflète la numérotation correcte : $\beta_1 = 0$ est la première valeur propre (triviale), et $\beta_2 > 0$ est la première valeur propre *non triviale*. Dans la littérature de noyau régulier [16], cette quantité est parfois notée β_1 (première valeur propre *de la partie non triviale*). Nous adoptons ici la convention spectrale cohérente avec le cadre noyau singulier.

Proposition 7.4 (Positivité de β_2 [16], Proposition 2.11). *La quantité $\beta_2(J, \Omega)$ est strictement positive.*

Démonstration. Il est clair que $\beta_2 \geq 0$ (le numérateur et le dénominateur sont tous deux non négatifs). On veut établir que $\beta_2 > 0$.

Construction de l'opérateur T . Posons $H = L^2(\Omega)$ et définissons l'opérateur symétrique $T : H \rightarrow H$ par :

$$T(u)(x) := \int_{\Omega} J(x-y)(u(x) - u(y)) dy = A(x)u(x) - S_J u(x), \quad x \in \Omega,$$

où $A(x) := \int_{\Omega} J(x-y) dy$ et $S_J u(x) := \int_{\Omega} J(x-y)u(y) dy$. La symétrie de T sur H résulte de l'échange $x \leftrightarrow y$ et de la symétrie de J : $\langle Tu, v \rangle_{L^2} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^2} J(x-y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) dx dy = \langle u, Tv \rangle_{L^2}$.

Expression de β_2 . La première valeur propre non triviale s'écrit :

$$\beta_2 = \inf_{\substack{u \in H, \int_{\Omega} u = 0 \\ u \neq 0}} \frac{\langle Tu, u \rangle_{L^2}}{\|u\|_{L^2}^2} = \inf_{\substack{u \in H, \int_{\Omega} u = 0 \\ u \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} \iint_{\Omega^2} J(x-y)(u(x) - u(y))^2 dx dy}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

On a clairement $\beta_2 \geq 0$. Montrons que $\beta_2 > 0$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons $\beta_2 = 0$. Puisque S_J est compact (noyau $J \in L^\infty$ à support compact sur Ω borné : S_J est de Hilbert-Schmidt), $T = A(\cdot) - S_J$ est la somme d'un opérateur de multiplication borné et d'un opérateur compact. Par l'alternative de Fredholm appliquée à T sur $H = L^2(\Omega)$, l'hypothèse $\beta_2 = 0$ implique qu'il existe $u \in H$, $u \not\equiv 0$, avec $\int_{\Omega} u = 0$ et $T(u) = 0$.

Contradiction. On calcule :

$$0 = \langle Tu, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y)(u(x) - u(y))^2 dx dy.$$

Puisque $J \geq 0$ et $(u(x) - u(y))^2 \geq 0$, l'intégrande est partout non-négative. Pour qu'elle soit nulle p.p., il faut $u(x) = u(y)$ pour p.p. $x, y \in \Omega$ avec $|x - y| < r_0$ (là où $J > 0$).

Vu que Ω est connexe et $r_0 > 0$, un argument de connexité (chemin reliant deux points de Ω , découpé en pas de longueur $< r_0$) entraîne que u est constante dans Ω . Mais la contrainte $\int_{\Omega} u = 0$ impose alors $u \equiv 0$, ce qui contredit $u \not\equiv 0$. D'où $\beta_2 > 0$. $\square$

Lemme 7.5 (Borne supérieure pour β_2 [16], Lemme 2.12). *On a l'estimation :*

$$\beta_2(J, \Omega) \leq \min_{x \in \Omega} \int_{\Omega} J(x-y) dy. \quad (7.7)$$

Démonstration. Posons $A(x) := \int_{\Omega} J(x-y) dy$. La fonction A est continue sur le compact $\bar{\Omega}$, donc le théorème des valeurs extrêmes Weierstrass garantit l'existence d'un point x_0 , elle y atteint son minimum : il existe $x_0 \in \bar{\Omega}$ (et même $x_0 \in \Omega$ car le bord n'est pas atteint généralement) tel que $A(x_0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} A(x)$.

Construction de la fonction test. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit (de sorte que les boules restent dans Ω), on prend deux boules disjointes $B_i^\varepsilon = B(x_{i,\varepsilon}, \varepsilon) \subset \Omega$, $i = 1, 2$, avec $x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon} \rightarrow x_0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. On pose :

$$u_\varepsilon := \chi_{B_1^\varepsilon} - \chi_{B_2^\varepsilon} \in L^2(\Omega).$$

Puisque $|B_1^\varepsilon| = |B_2^\varepsilon| = |B(0, \varepsilon)|$, on a $\int_{\Omega} u_\varepsilon = 0$, donc $u_\varepsilon \in L_0^2(\Omega)$ et est admissible dans (7.5).

Calcul du quotient de Rayleigh. On développe le numérateur. Vu que $u_\varepsilon^2 = \chi_{B_1^\varepsilon} + \chi_{B_2^\varepsilon}$ et $u_\varepsilon(x)u_\varepsilon(y)$ vaut $+1$ si x, y sont dans la même boule, -1 s'ils sont dans des boules différentes, 0 sinon :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint J(x-y)(u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x))^2 dx dy &= \int_{\Omega} A(x) u_\varepsilon^2(x) dx - \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y) u_\varepsilon(x) u_\varepsilon(y) dx dy \\ &=: N_1^\varepsilon - N_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

Le dénominateur vaut $\int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx = 2|B(0, \varepsilon)|$. Donc :

$$\beta_2 \leq \frac{N_1^\varepsilon - N_2^\varepsilon}{2|B(0, \varepsilon)|}.$$

Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Pour $N_1^\varepsilon : \int_{\Omega} A(x) u_\varepsilon^2 dx = \int_{B_1^\varepsilon} A(x) dx + \int_{B_2^\varepsilon} A(x) dx$. Par continuité de A et le fait que $x_{i,\varepsilon} \rightarrow x_0$:

$$\frac{N_1^\varepsilon}{2|B(0, \varepsilon)|} = \frac{\int_{B_1^\varepsilon} A + \int_{B_2^\varepsilon} A}{2|B(0, \varepsilon)|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(x_0) + A(x_0)}{2} = A(x_0).$$

Pour N_2^ε : vu que les boules B_1^ε et B_2^ε sont disjointes et leur diamètre $2\varepsilon \rightarrow 0$, la distance entre elles tend vers 0 aussi ; mais le terme $\iint_{B_1^\varepsilon \times B_2^\varepsilon} J(x-y) dx dy \leq J(0) \cdot |B_1^\varepsilon| \cdot |B_2^\varepsilon| / \text{dist}^{n+2s} \dots$ Plus précisément :

$$\frac{|N_2^\varepsilon|}{2|B(0, \varepsilon)|} \leq \frac{2 \iint_{B_1^\varepsilon \times B_2^\varepsilon} J(x-y) dx dy}{2|B(0, \varepsilon)|} \leq \frac{\|J\|_{L^\infty} |B(0, \varepsilon)|^2}{|B(0, \varepsilon)|} = \|J\|_{L^\infty} |B(0, \varepsilon)| \rightarrow 0.$$

En combinant : $\beta_2 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (N_1^\varepsilon - N_2^\varepsilon) / (2|B(0, \varepsilon)|) = A(x_0) - 0 = \min_{x \in \bar{\Omega}} A(x)$. $\square$

7.4 Bornitude de L_J sur $L^2(\Omega)$

Proposition 7.6 (Bornitude de L_J). Soit $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $J \in L^1(\mathbb{R}^n)$, J symétrique. L'opérateur $L_J : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ défini par

$$L_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y) - u(x)) dy$$

est **borné** et satisfait :

$$\|L_J\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq 2\|J\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration. **Décomposition de L_J .** On réécrit L_J comme différence de deux opérateurs :

$$L_J u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} J(x-y) u(y) dy}_{S_J u(x)} - \underbrace{\left(\int_{\Omega} J(x-y) dy \right) u(x)}_{A(x) u(x)} = S_J u(x) - A(x) u(x), \quad (7.8)$$

où S_J est l'opérateur de convolution tronqué à Ω et M_A est l'opérateur de multiplication par $A(x)$. Par l'inégalité triangulaire dans $L^2(\Omega)$:

$$\|L_J u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|S_J u\|_{L^2(\Omega)} + \|A(\cdot) u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (7.9)$$

Il suffit donc de borner chacun des deux termes du membre de droite.

Étape 1 : Borne ponctuelle sur $A(x)$.

Puisque $J \geq 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on a :

$$A(x) = \int_{\Omega} J(x-y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} J(z) dz = \|J\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc pour tout $x \in \Omega$:

$$A(x) \leq \|J\|_{L^1}. \quad (7.10)$$

Étape 2 : Borne sur $\|M_A u\|_{L^2(\Omega)}$.

En utilisant la borne (7.10) et la définition de la norme L^2 :

$$\begin{aligned} \|A(\cdot) u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} A(x)^2 |u(x)|^2 dx \\ &\leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \|J\|_{L^1}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En extrayant la racine carrée :

$$\|A(\cdot) u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|J\|_{L^1} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (7.11)$$

Étape 3 : Borne sur $\|S_J u\|_{L^2(\Omega)}$ par Cauchy–Schwarz et Fubini.

Pour tout $x \in \Omega$, on factorise $J(x-y) = J(x-y)^{1/2} \cdot J(x-y)^{1/2}$ et on applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $L^2(\Omega_y)$:

$$\begin{aligned} |S_J u(x)|^2 &= \left| \int_{\Omega} J(x-y)^{1/2} \cdot J(x-y)^{1/2} u(y) dy \right|^2 \\ &\leq \left(\int_{\Omega} J(x-y) dy \right) \left(\int_{\Omega} J(x-y) |u(y)|^2 dy \right) \\ &= A(x) \cdot \int_{\Omega} J(x-y) |u(y)|^2 dy \\ &\leq \|J\|_{L^1} \cdot \int_{\Omega} J(x-y) |u(y)|^2 dy. \quad (\text{par (7.10)}) \end{aligned}$$

On intègre sur $x \in \Omega$ et on applique le théorème de Fubini (licite car le membre est dans $L^1(\Omega \times \Omega)$) :

$$\begin{aligned}
\|S_J u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |S_J u(x)|^2 dx \\
&\leq \|J\|_{L^1} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} J(x-y) |u(y)|^2 dy \right) dx \\
&= \|J\|_{L^1} \int_{\Omega} |u(y)|^2 \underbrace{\left(\int_{\Omega} J(x-y) dx \right)}_{\leq \|J\|_{L^1}} dy \quad (Fubini) \\
&\leq \|J\|_{L^1}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

En extrayant la racine carrée :

$$\|S_J u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|J\|_{L^1} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (7.12)$$

Étape 4 : Conclusion.

On reporte les bornes (7.12) et (7.11) dans l'inégalité triangulaire (7.9) :

$$\begin{aligned}
\|L_J u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|S_J u\|_{L^2(\Omega)} + \|A(\cdot) u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|J\|_{L^1} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|J\|_{L^1} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&= 2\|J\|_{L^1} \|u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on conclut :

$$\|L_J\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} := \sup_{\substack{u \in L^2(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|L_J u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq 2\|J\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

□

7.5 Théorème spectral pour $-L_J$ avec $\mathcal{N}_J u = 0$

Théorème 7.7 (Analyse spectrale de $-L_J$ [16]). *Il existe une suite de valeurs propres :*

$$0 = \beta_1 < \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots \leq 2\|J\|_{L^1} < +\infty, \quad (7.13)$$

et une suite de fonctions propres $(\psi_k)_{k \geq 1}$ formant une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, avec $\psi_1 = |\Omega|^{-1/2}$.

(i) $\beta_2 = \inf_{\substack{u \in L_0^2(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{a_J(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2},$ atteint par ψ_2 .

(ii) Pour tout $u \in L_0^2(\Omega)$: $a_J(u, u) \geq \beta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$.

(iii) Les valeurs propres β_k sont **bornées** : $\beta_k \leq 2\|J\|_{L^1}$ pour tout k .

Démonstration. **Opérateur de convolution compact.** Définissons $S_J : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ par $S_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)u(y) dy$. Puisque $J \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact et Ω est borné, S_J est un opérateur de Hilbert–Schmidt (noyau dans $L^2(\Omega \times \Omega)$), donc compact. La symétrie $J(x-y) = J(y-x)$ rend S_J auto-adjoint.

Lien avec $-L_J$. On a $-L_J u(x) = A(x)u(x) - S_J u(x)$ avec $A(x) = \int_{\Omega} J(x-y) dy$. Sur $L_0^2(\Omega)$, l'opérateur $T_J = A(\cdot) - S_J$ est auto-adjoint et correspond à $-L_J$.

Application de Hilbert–Schmidt. T_J est compact (somme de la multiplication par $A(x) \in L^\infty$ et de $-S_J$ compact) et auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$. Par la Remarque 3.1, il admet une base hilbertienne $(\psi_k)_{k \geq 2}$ avec valeurs propres $\beta_k \geq 0$, $\beta_k \geq \beta_2 > 0$ pour $k \geq 2$ (par la Proposition 7.4). On complète par $\psi_1 = |\Omega|^{-1/2}$ pour obtenir une base de $L^2(\Omega)$.

Borne supérieure. Puisque $\|L_J\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq 2\|J\|_{L^1}$, les valeurs propres de $-L_J$ vérifient $\beta_k \leq 2\|J\|_{L^1}$ pour tout k .

Assertion (ii). La définition variationnelle de β_2 (Définition 7.1) donne directement $a_J(u, u) \geq \beta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour $u \in L^2(\Omega)$. $\square$

Remarque 7.3. La **différence fondamentale** entre les deux spectres est la suivante. Dans le cadre noyau singulier, l'opérateur $(-\Delta)^s$ agit sur l'espace $H_{\Omega,0}^s \subset L^2(\Omega)$ et est *non borné* sur $L^2(\Omega)$: ses valeurs propres $\lambda_k \rightarrow +\infty$ sont non bornées. Dans le cadre noyau régulier, l'opérateur $-L_J$ agit sur $L^2(\Omega)$ et est *borné* sur $L^2(\Omega)$: ses valeurs propres β_k restent bornées par $2\|J\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

	$((-\Delta)^s \text{ sur } H_{\Omega,0}^s \subset L^2(\Omega))$	$(-L_J \text{ sur } L^2(\Omega))$
Valeurs propres	$0 < \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$	$0 < \beta_2 \leq \dots \leq 2\ J\ _{L^1}$
Borné sur $L^2(\Omega)$?	Non	Oui ($\ L_J\ _{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq 2\ J\ _{L^1}$)
Taux de décroissance	$e^{-\lambda_2 t}$	$e^{-\beta_2 t}$

7.6 Décroissance exponentielle

Théorème 7.8 (Décroissance exponentielle [16], Théorème 2.15). *Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solution de (7.3) satisfait, en notant $\bar{u}_0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u_0$:*

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\beta_2 t} \|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (7.14)$$

De plus, si u_0 est continue et bornée, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{-\beta_2 t}.$$

Démonstration. Posons $\bar{u}_0 := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u_0 dx$ (la moyenne conservée) et $H(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(x, t) - \bar{u}_0)^2 dx$.

Étape 1 : calcul de $H'(t)$. On différencie sous le signe intégral (licite par bornitude de u) :

$$H'(t) = \int_{\Omega} (u(x, t) - \bar{u}_0) \partial_t u(x, t) dx.$$

On substitue l'équation d'évolution $\partial_t u = L_J u$:

$$H'(t) = \int_{\Omega} (u - \bar{u}_0) L_J u dx.$$

On développe $L_J u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y) - u(x)) dy$ et on emploie la formule d'intégration par parties (7.2) :

$$\int_{\Omega} v L_J u dx = -a_J(u, v) = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega^2} J(x-y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) dx dy.$$

Avec $v = u - \bar{u}_0$, et vu que $\bar{u}_0$ est constante et $a_J(\bar{u}_0, u - \bar{u}_0) = 0$ (car $\bar{u}_0(x) - \bar{u}_0(y) = 0$) :

$$H'(t) = -a_J(u, u - \bar{u}_0) = -a_J(u - \bar{u}_0, u - \bar{u}_0) = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega^2} J(x-y)((u - \bar{u}_0)(x) - (u - \bar{u}_0)(y))^2 dx dy \leq 0.$$

Étape 2 : minoration par β_2 . Posons $w := u - \bar{u}_0$. Par conservation de masse (Proposition 7.2), $\int_{\Omega} w(\cdot, t) dx = 0$, donc $w(\cdot, t) \in L_0^2(\Omega)$ pour tout t . Par définition de β_2 (Définition 7.1) :

$$a_J(w, w) \geq \beta_2 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 = \beta_2 \cdot 2H(t).$$

On reporte dans le calcul de $H'(t)$:

$$H'(t) = -a_J(w, w) \leq -2\beta_2 H(t).$$

Étape 3 : lemme de Gronwall et estimée L^2 . L'inégalité différentielle $H'(t) \leq -2\beta_2 H(t)$ avec $\beta_2 > 0$ (Proposition 7.4) donne, par le lemme de Gronwall différentiel (Appendice A.7) :

$$H(t) \leq e^{-2\beta_2 t} H(0).$$

Comme $H(t) = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t) - \bar{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ et $H(0) = \frac{1}{2} \|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2$, on extrait (7.14).

Étape 4 : estimée L^∞ . Posons $w(x, t) = u(x, t) - \bar{u}_0$. L'équation pour w est $\partial_t w = L_J w$, i.e. $\partial_t w(x, t) = -A(x)w(x, t) + \int_{\Omega} J(x-y)w(y, t) dy$. C'est une équation linéaire, et par variation de constantes :

$$w(x, t) = e^{-A(x)t} w_0(x) + \int_0^t e^{-A(x)(t-\tau)} \int_{\Omega} J(x-y)w(y, \tau) dy d\tau.$$

En prenant la valeur absolue et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|w(x, t)| \leq e^{-A(x)t} |w_0(x)| + \int_0^t e^{-A(x)(t-\tau)} \|J(x - \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|w(\cdot, \tau)\|_{L^2} d\tau.$$

Vu que $A(x) \geq \beta_2 > 0$ (Lemme 7.5) et $\|w(\cdot, \tau)\|_{L^2} \leq C e^{-\beta_2 \tau}$ (par (7.14)) :

$$|w(x, t)| \leq e^{-\beta_2 t} |w_0(x)| + C \|J\|_{L^2} \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} e^{-\beta_2 \tau} d\tau = e^{-\beta_2 t} (|w_0(x)| + C \|J\|_{L^2} \cdot t).$$

Pour t grand, le facteur polynomial est absorbé par l'exponentielle, ce qui donne bien une décroissance $O(e^{-\beta_2 t/2})$ en L^∞ . $\square$

Remarque 7.4. Ce résultat est l'analogue exact de la Proposition 4.4 pour le laplacien fractionnaire. La différence fondamentale : dans le cadre noyau singulier, le taux est λ_2 (première valeur propre non triviale de $(-\Delta)^s$), et dans le cadre noyau régulier, le taux est β_2 . Les deux taux gouvernent la convergence vers la valeur moyenne conservée.

7.7 Existence et unicité pour le problème stationnaire et parabolique

Proposition 7.9 (Existence et unicité, problème stationnaire). *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\int_{\Omega} f = 0$, il existe une unique solution $u \in L_0^2(\Omega)$ de : $-L_J u = f$ dans Ω , $\mathcal{N}_J u = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.*

Démonstration. La forme bilinéaire a_J sur $L_0^2(\Omega)$ est :

- **Symétrique** : par symétrie $J(x - y) = J(y - x)$.
- **Continue** : $|a_J(u, v)| \leq \frac{1}{2} \|J\|_{L^1} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$ (par Cauchy–Schwarz et Fubini).
- **Coercive** : $a_J(u, u) \geq \beta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ (Proposition 1.8), avec $\beta_2 > 0$.

La forme linéaire $\ell : v \mapsto \int_{\Omega} f v$ est continue sur $L_0^2(\Omega)$ (Cauchy–Schwarz) ; elle est bien définie sur $L_0^2(\Omega)$ car $\int_{\Omega} f = 0$.

Par le théorème de Lax–Milgram (Appendice A.2), il existe un unique $u \in L_0^2(\Omega)$ tel que $a_J(u, v) = \int_{\Omega} f v$ pour tout $v \in L_0^2(\Omega)$, ce qui est exactement la formulation faible de $-L_J u = f$ avec $\mathcal{N}_J u = 0$. $\square$

Théorème 7.10 (Existence et unicité, problème parabolique). *Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, le problème (7.3) admet une unique solution $u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$, donnée par la représentation spectrale :*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\beta_k t} \langle u_0, \psi_k \rangle_{L^2} \psi_k. \quad (7.15)$$

Démonstration. Puisque L_J est borné sur $L^2(\Omega)$ (avec $\|L_J\| \leq 2\|J\|_{L^1}$), le problème de Cauchy $\partial_t u = L_J u$ avec $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ est une équation différentielle ordinaire dans l'espace de Banach $L^2(\Omega)$. Par le théorème de Cauchy–Lipschitz en dimension infinie (Picard–Lindelöf), il admet une unique solution globale $u \in C^1([0, +\infty); L^2(\Omega))$.

La représentation spectrale (7.15) est valide car les (ψ_k) forment une base hilbertienne, les exponentielles $e^{-\beta_k t}$ sont toutes ≤ 1 pour $\beta_k \geq 0$ et $t \geq 0$, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\beta_k t} |\langle u_0, \psi_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u_0, \psi_k \rangle|^2 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty.$$

Donc la série (7.15) converge dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$. $\square$

Chapitre 8

Constantes Optimales dans L^q

La **Section 2.3.2** de [16], intitulée “*Optimal constants in L^q , The Neumann case*”, s’intéresse à la détermination des meilleures constantes dans les inégalités de type Poincaré–Wirtinger pour des exposants q quelconques, dans le cadre du problème de Neumann à noyau régulier J .

8.1 La constante optimale β_q et ses propriétés

Pour tout $q \geq 1$, on définit la **constante optimale** L^q par le quotient variationnel [16] :

$$\beta_q = \beta_q(J, \Omega) := \inf_{\substack{u \in L^q(\Omega) \\ \int_{\Omega} u = 0, u \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y) |u(y) - u(x)|^q dy dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^q dx}. \quad (8.1)$$

Pour $q = 2$, cette définition coïncide exactement avec la première valeur propre non triviale β_2 du Théorème 7.7. L’extension aux $q \neq 2$ fournit des inégalités de contrôle dans des espaces L^q pour la solution du problème parabolique associé.

La constante β_q est **strictement positive** pour tout $q \geq 1$ (Théorème 2.17 de [16]), et l’inégalité de Poincaré–Wirtinger L^q correspondante est satisfaite :

$$\beta_q \int_{\Omega} \left| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \right|^q dx \leq \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x-y) |u(y) - u(x)|^q dy dx, \quad \forall u \in L^q(\Omega). \quad (8.2)$$

La preuve repose sur un raisonnement par l’absurde combiné à un argument de compacité et de connexité : supposer $\beta_q = 0$ conduit à l’existence d’une suite (u_n) normalisée dans L^q dont les oscillations tendent vers zéro, ce qui, par propagation locale via le noyau J et connexité de Ω , force u_n à converger vers une constante non nulle de moyenne nulle, contradiction.

La famille $q \mapsto \beta_q$ possède les propriétés suivantes, établies dans [16] et [2] :

- (i) La fonction $q \mapsto \beta_q$ est **non décroissante**. Cela résulte de l’inégalité de Jensen appliquée à la mesure $\mu_x(dy) = J(x-y) dy / A(x)$ (mesure de probabilité sur Ω pour chaque x), qui permet de comparer les quotients de Rayleigh pour des exposants $q_1 < q_2$.
- (ii) Pour $q = 2$, on retrouve exactement β_2 , la première valeur propre non triviale de $-L_J$ avec $\mathcal{N}_J u = 0$.
- (iii) Pour $q > 2$, on a $\beta_q \leq \beta_2$, obtenu en prenant la fonction propre ψ_2 comme fonction test dans (8.1).
- (iv) La fonction est **continue en** $q = 2$: $\lim_{q \rightarrow 2} \beta_q = \beta_2$.

8.2 Tableau de synthèse

Propriété	$(-\Delta)^s$	(L_J)
Cas $q = 2$	$\lambda_2 > 0$ (spectre frac.)	$\beta_2 > 0$ (spectre L_J)
Cas critique	$q = 2_s^*$, constante $S_{n,s}$	Pas de cas critique
Monotonie en q	Indépendant de q	$q \mapsto \beta_q$ non décroissant
Limite $q \rightarrow 1^+$	Constante isopérim. frac.	$h_J(\Omega) > 0$
Atteinte	φ_2 (fct. propre)	u^* minimiseur
Borné	$\lambda_k \rightarrow +\infty$	$\beta_k \leq 2\ J\ _{L^1}$

Table 8.1: Constantes optimales L^q : comparaison $(-\Delta)^s$ vs L_J .

partie IV

Comparaison et Limite Locale

Chapitre 9

Comparaison des Deux Cadres et Limite Locale

9.1 Nature du noyau : ce qui change fondamentalement

Table 9.1: Comparaison structurelle (noyau singulier) vs (noyau régulier).

Propriété	$((-\Delta)^s, \text{noyau singulier})$	$(L_J, \text{noyau régulier})$
Noyau	$c_{n,s} x-y ^{-(n+2s)}$, singulier	$J(x-y) \in C_c$, continu
Portée	Infinie ($\mathbb{R}^n$ entier)	Finie ($\text{supp}(J) = B(0, R_0)$)
Domaine Neumann	$\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ (tout l'extérieur)	Bande $\{x : \text{dist}(x, \Omega) < R_0\}$
Espace fonct.	$H_{\Omega,g}^s$ (Hilbert, poids g)	$L^2(\Omega)$ (simplicité)
Opérateur	Non borné sur L^2	Borné, $\ L_J\ \leq 2\ J\ _{L^1}$
Spectre	$\lambda_k \rightarrow +\infty$	$\beta_k \leq 2\ J\ _{L^1}$ (borné)
Régularité fcts propres	$\varphi_k \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ (Schauder)	$\psi_k \in C(\bar{\Omega})$ (noyau continu)
Limite locale	$(-\Delta)^s \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} -K_n \Delta$	$L_{J_\varepsilon} u(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_J \Delta$

Remarque 9.1 (Points communs). Malgré leurs différences, les deux cadres partagent :

- La structure spectrale $0 = \lambda_1$ (ou β_1) $< \lambda_2$ (ou β_2) avec λ_1 associée aux constantes.
- La conservation de la masse totale $\int_{\Omega} u$.
- La décroissance exponentielle vers la valeur moyenne, au taux λ_2 (resp. β_2).
- Une formule d'intégration par parties non locale reliant la forme bilinéaire à la condition de Neumann.
- La condition de compatibilité $\int_{\Omega} f + \int_{\partial} g = 0$ pour l'existence du problème elliptique.

9.2 Limite locale $s \rightarrow 1^-$: théorème de Bourgain–Brezis–Mironescu

Théorème 9.1 (Bourgain–Brezis–Mironescu [4]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien et $u \in H^1(\Omega)$. Alors :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)[u]_{H^s(\Omega)}^2 = K_n \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad K_n = \frac{\omega_{n-1}}{n}. \quad (9.1)$$

Démonstration. On commence par la réduction aux fonctions $u \in C_c^\infty(\Omega)$ (densité dans H^1). Pour une telle u , le développement de Taylor à l'ordre 2 donne $u(x) - u(y) = \nabla u(y) \cdot (x - y) + O(|x - y|^2)$.

Décomposition. Pour $\delta > 0$ fixé, on écrit :

$$[u]_{H^s(\Omega)}^2 = I_s^{\text{loc}} + I_s^{\text{nl}},$$

avec $I_s^{\text{loc}} = \iint_{|x-y| < \delta} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy$ et $I_s^{\text{nl}} = \iint_{|x-y| \geq \delta}$.

Partie non locale. u est bornée, donc $|u(x) - u(y)|^2 \leq 4\|u\|_{L^\infty}^2$. Ainsi :

$$(1-s)I_s^{\text{nl}} \leq 4\|u\|_{L^\infty}^2(1-s) \iint_{|x-y| \geq \delta} \frac{dx dy}{|x-y|^{n+2s}} \leq C(1-s)\delta^{-2s} \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} 0.$$

Partie locale. On effectue le passage en coordonnées polaires $h = x - y = r\sigma$ ($r \in [0, \delta]$, $\sigma \in S^{n-1}$) :

$$(1-s)I_s^{\text{loc}} \approx (1-s) \int_{\Omega} \int_{S^{n-1}} |\nabla u(y) \cdot \sigma|^2 \underbrace{\int_0^\delta r^{1-2s} dr}_{=\frac{\delta^{2-2s}}{2-2s}} d\sigma dy.$$

On calcule les trois facteurs :

- $(1-s) \cdot \frac{\delta^{2-2s}}{2-2s} \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $s \rightarrow 1^-$ (en écrivant $2-2s = 2(1-s)$, on obtient $(1-s) \cdot \frac{1}{2(1-s)} \rightarrow \frac{1}{2}$ pour $\delta = 1$; le terme $\delta^{2-2s} \rightarrow 1$).
- $\int_{S^{n-1}} |\sigma \cdot e_j|^2 d\sigma = \omega_{n-1}/n$ (calcul standard).
- $\int_{S^{n-1}} |\nabla u(y) \cdot \sigma|^2 d\sigma = |\nabla u(y)|^2 \cdot \omega_{n-1}/n$ (isotropie).

En rassemblant (et en envoyant $\delta \rightarrow 0$ pour éliminer l'erreur de Taylor) :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)[u]_{H^s(\Omega)}^2 = \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy = K_n \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

Corollaire 9.2 (Limite de la forme bilinéaire). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)\mathcal{A}_s(u, u) = K_n \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (9.2)$$

En particulier, le problème spectral $(1-s)\lambda_k^s \rightarrow K_n \mu_k$ quand $s \rightarrow 1^-$, où μ_k est la k -ième valeur propre de $-\Delta$ avec $\partial_\nu u = 0$ (Neumann classique).

Démonstration. Pour tout $u \in H_{\Omega,0}^s$, le théorème BBM (9.1) donne :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)\mathcal{A}_s(u, u) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{c_{n,s}(1-s)}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = K_n \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où on a utilisé que la contribution de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ est négligeable (cf. preuve de la Proposition 5.1 dans [9]).

Pour la convergence des valeurs propres, la caractérisation de Courant–Fischer (Théorème 3.2) donne :

$$(1-s)\lambda_k^s = \inf_{\substack{u \perp \varphi_1^s, \dots, \varphi_{k-1}^s \\ u \neq 0}} \frac{(1-s)\mathcal{A}_s(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} \inf_{\substack{u \perp \psi_1, \dots, \psi_{k-1} \\ u \neq 0}} \frac{K_n \|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = K_n \mu_k,$$

par la continuité des valeurs propres par rapport aux formes bilinéaires (théorème de convergence des résolvantes). □

9.3 Limite locale pour le noyau régulier

Proposition 9.3 (Convergence de L_J vers le laplacien [2]). *Pour $J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$ et $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a :*

$$L_{J_\varepsilon} u(x) := \int_{\Omega} J_\varepsilon(x-y)(u(y) - u(x)) dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sigma_J \Delta u(x), \quad x \in \Omega, \quad (9.3)$$

où $\sigma_J = \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}^n} J(z)|z|^2 dz$. De plus, les valeurs propres vérifient $\beta_k^\varepsilon \rightarrow \sigma_J \mu_k$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Démonstration. On effectue le changement de variables $y = x + \varepsilon z$ dans l'intégrale :

$$L_{J_\varepsilon} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J(z)[u(x + \varepsilon z) - u(x)] \mathbf{1}_\Omega(x + \varepsilon z) dz.$$

Pour ε assez petit et $x \in \Omega$, $x + \varepsilon z \in \Omega$ pour $z \in \text{supp}(J)$ (distance de x à $\partial\Omega$ strictement positive). Le développement de Taylor de u à l'ordre 2 donne :

$$u(x + \varepsilon z) - u(x) = \varepsilon \nabla u(x) \cdot z + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j} \partial_{x_i x_j}^2 u(x) z_i z_j + O(\varepsilon^3 |z|^3).$$

En intégrant contre $J(z)$:

$$L_{J_\varepsilon} u(x) = \varepsilon \int J(z) \nabla u(x) \cdot z dz + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j} \partial_{x_i x_j}^2 u(x) \int J(z) z_i z_j dz + O(\varepsilon^3).$$

Le premier terme est nul (par isotropie de J : $\int J(z) z_i dz = 0$). Pour le second, par isotropie : $\int J(z) z_i z_j dz = \sigma_J^{2/n} \delta_{ij}$ (nul si $i \neq j$), avec $\sigma_J^{2/n} = \frac{1}{n} \int J(z) |z|^2 dz$. Plus précisément,

$$\sum_{i,j} \partial_{x_i x_j}^2 u(x) \int J(z) z_i z_j dz = \Delta u(x) \cdot \frac{1}{n} \int J(z) |z|^2 dz = 2\sigma_J \Delta u(x).$$

Après division par ε^2 , on obtient $L_{J_\varepsilon} u(x) \rightarrow \sigma_J \Delta u(x)$. □

Remarque 9.2 (Interprétation du paramètre σ_J). La constante $\sigma_J = \frac{1}{2n} \int |z|^2 J(z) dz$ est le **deuxième moment** (normalisé) du noyau J . Elle mesure l'étendue des interactions : plus J est concentré autour de l'origine, plus σ_J est petit. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est exactement cette quantité qui détermine la constante de diffusion locale. L'analogie dans le cadre noyau singulier est la constante $K_n = \omega_{n-1}/n$, qui est universelle (indépendante de s , dans la normalisation BBM).

9.4 Tableau de synthèse des deux limites locales

Théorème 9.4 (Convergence commune vers le laplacien classique). *Les deux familles d'opérateurs nonlocaux, dans leurs limites respectives, convergent vers le même problème classique :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{avec spectre } 0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \quad (9.4)$$

Plus précisément :

Table 9.2: Les deux limites locales comparées : noyau singulier vs noyau régulier.

Aspect	noyau singulier ($s \rightarrow 1^-$)	noyau régulier ($\text{supp}(J) \rightarrow 0$)	Local
Paramètre	$1 - s \rightarrow 0$	$\varepsilon \rightarrow 0$	—
Opérateur	$(1 - s)(-\Delta)^s$	$\varepsilon^{-2}L_{J_\varepsilon}$	$-K_n\Delta$ (resp. $\sigma_J\Delta$)
Valeurs propres	$(1 - s)\lambda_k^s$	$\varepsilon^{-2}\beta_k^\varepsilon$	$K_n\mu_k$ (resp. $\sigma_J\mu_k$)
Espace limite	$H^s(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$	$H^1(\Omega)$
Semi-norme	$(1 - s)[u]_{H^s}^2 \rightarrow K_n\ \nabla u\ ^2$	$\varepsilon^{-2}a_{J_\varepsilon} \rightarrow \sigma_J\ \nabla u\ ^2$	$\ \nabla u\ _{L^2}^2$
Cond. bord	$\mathcal{N}_s u = 0 \rightarrow \partial_\nu u = 0$	$\mathcal{N}_J u = 0 \rightarrow \partial_\nu u = 0$	$\partial_\nu u = 0$
Référence	[4, 9]	[16, 2]	—

- $\frac{1}{K_n}(1 - s)\lambda_k^s \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} \mu_k.$

- $\frac{1}{\sigma_J}\beta_k^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k.$

Démonstration. Le Corollaire 9.2 établit que $(1 - s)\lambda_k^s \rightarrow K_n\mu_k$ quand $s \rightarrow 1^-$, donc $\frac{1}{K_n}(1 - s)\lambda_k^s \rightarrow \mu_k$.

La Proposition 9.3 montre que $\varepsilon^{-2}L_{J_\varepsilon}u \rightarrow \sigma_J\Delta u$ ponctuellement pour $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Par la caractérisation variationnelle de β_k^ε et la convergence des formes bilinéaires $\varepsilon^{-2}a_{J_\varepsilon}(u, u) \rightarrow \sigma_J \int_\Omega |\nabla u|^2$ (analogue BBM pour les noyaux réguliers, voir [16], Théorème 2.10), on conclut $\varepsilon^{-2}\beta_k^\varepsilon \rightarrow \sigma_J\mu_k$.

Unicité de la limite. Dans les deux cas, la limite est μ_k , la k -ième valeur propre de $-\Delta$ sur Ω avec $\partial_\nu u = 0$ sur $\partial\Omega$, bien définie et indépendante de la famille non locale approchante. $\square$

9.5 Tableau comparatif final

Propriété	noyau singulier	noyau régulier	Local
Opérateur	$(-\Delta)^s$	$-L_J$	$-\Delta$
Ordre	$2s \in (0, 2)$	0	2
Noyau	$ x - y ^{-(n+2s)}$	$J(x - y) \in C_c$	Noyau de Green $G(x, y)$
Condition bord	$\mathcal{N}_s u = g$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$	$\mathcal{N}_J u = 0$ (locale)	$\partial_\nu u = 0$ sur $\partial\Omega$
IPP	$\mathcal{A}_s(u, v) = \int_\Omega v(-\Delta)^s u + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u$	$a_J(u, v) = - \int_\Omega v L_J u$	$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$
$\lambda_1 = \beta_1$	0 (constantes)	0 (constantes)	0
λ_2, β_2	$> 0, \nearrow +\infty$	> 0 , borné	$\mu_2 > 0$
Conservation	$\int_\Omega u$	$\int_\Omega u$	$\int_\Omega u$
Décroissance	$e^{-\lambda_2 t}$	$e^{-\beta_2 t}$	$e^{-\mu_2 t}$
Poincaré	$\mathcal{A}_s(u, u) \geq \lambda_2 \ u - \bar{u}\ _{L^2(\Omega)}^2$	$a_J(u, u) \geq \beta_2 \ u\ _{L^2(\Omega)}^2$	$\int \nabla u ^2 \geq \mu_2 \ u - \bar{u}\ ^2$
Limite	$s \rightarrow 1^-, (-\Delta)^s \rightarrow -K_n \Delta$	$\varepsilon \rightarrow 0, L_J \rightarrow \sigma_J \Delta$	Opérateur limite

Table 9.3: Synthèse complète : noyau singulier vs noyau régulier vs Local.

Chapitre A

Outils d'Analyse Fonctionnelle

A.1 Théorème de représentation de Riesz et de Lax–Milgram

Théorème A.1 (Théorème de représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, et soit $\ell : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique élément $\ell^* \in H$, tel que

$$\ell(v) = \langle \ell^*, v \rangle_H, \quad \forall v \in H,$$

et de plus $\|\ell^*\|_H = \|\ell\|_{H'}$.

Théorème A.2 (Théorème de Lax–Milgram). Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive ($a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$, $\alpha > 0$), et $\ell : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.

A.2 Alternative de Fredholm

Théorème A.3 (Alternative de Fredholm). Soit H un espace de Hilbert et $T : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire compact. Alors :

- (i) $\ker(\text{Id} - T)$ est de dimension finie ;
- (ii) $\text{Im}(\text{Id} - T)$ est fermée, et $\text{Im}(\text{Id} - T) = (\ker(\text{Id} - T^*))^\perp$;
- (iii) $\ker(\text{Id} - T) = \{0\}$ si et seulement si $\text{Im}(\text{Id} - T) = H$ (i.e. $\text{Id} - T$ est bijectif) ;
- (iv) $\dim \ker(\text{Id} - T) = \dim \ker(\text{Id} - T^*)$.

En particulier, pour tout $f \in H$, l'équation $u - Tu = f$ admet : soit une unique solution $u \in H$ pour tout f (cas injectif), soit une solution si et seulement si $f \perp \ker(\text{Id} - T^*)$ (cas non injectif), la solution n'étant alors déterminée qu'à l'addition d'un élément de $\ker(\text{Id} - T)$ près.

A.3 Théorème de Fubini

Théorème A.4 (Théorème de Fubini). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis, et soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -mesurable. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $f \geq 0$ $\mu \otimes \nu$ -presque partout (théorème de Tonelli) ;
- (ii) $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$, c'est-à-dire $\iint_{X \times Y} |f(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) < +\infty$ (théorème de Fubini proprement dit).

Alors les fonctions partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ -mesurable pour ν -presque tout y et $\mathcal{B}$ -mesurable pour μ -presque tout x , les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ -mesurable et $\mathcal{B}$ -mesurable, et on a l'égalité des trois intégrales :

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \iint_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

A.4 Théorème de Hille–Yosida

Définition A.1 (Semi-groupe de contractions). Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur H est un *semi-groupe (fortement) continu de contractions* (ou semi-groupe C_0 de contractions) si :

- (i) $S(0) = \text{Id}$;
- (ii) $S(t + \tau) = S(t)S(\tau)$ pour tous $t, \tau \geq 0$ (propriété de semi-groupe) ;
- (iii) $\|S(t)u\|_H \leq \|u\|_H$ pour tout $u \in H$ et tout $t \geq 0$ (contraction) ;
- (iv) pour tout $u \in H$, $t \mapsto S(t)u$ est continue de $[0, +\infty)$ dans H (continuité forte).

Définition A.2 (Générateur infinitésimal). Le *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ défini par

$$Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t},$$

le domaine $D(A)$ étant l'ensemble des $u \in H$ pour lesquels cette limite existe dans H . L'opérateur A est alors fermé et densément défini, et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est l'unique semi-groupe dont A est le générateur : on note formellement $S(t) = e^{tA}$, et $u(t) := S(t)u_0$ résout le problème de Cauchy abstrait $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0 \in D(A)$.

Théorème A.5 (Hille–Yosida [15]). Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans un espace de Hilbert H . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est le générateur infinitésimal (au sens de la Définition A.2) d'un semi-groupe de contractions $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur H , au sens de la Définition A.1.
- (ii) A est dissipatif : $\langle Au, u \rangle_H \leq 0$ pour tout $u \in D(A)$, et $\text{Id} - A$ est surjectif.

Dans ce cas, la solution de $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$, est $u(t) = S(t)u_0$, et la formule de Duhamel donne :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \tau)F(\tau) d\tau.$$

A.5 Lemme de Gronwall

Lemme A.6 (Gronwall (version intégrale) [15]). Soit $\varphi : [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ continue vérifiant $\varphi(t) \leq c_0 + c_1 \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ ($c_0, c_1 \geq 0$). Alors : $\varphi(t) \leq c_0 e^{c_1 t}$.

Lemme A.7 (Gronwall différentiel). Si $A'(t) \leq -c A(t)$ pour $c > 0$ et $A(0) \geq 0$, alors $A(t) \leq e^{-ct} A(0)$.

Chapitre B

Formulaire des Opérateurs Nonlocaux

B.1 Formules de base

Objet	Formule
Laplacien fractionnaire	$(-\Delta)^s u(x) = c_{n,s} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{ x - y ^{n+2s}} dy$
Transformée de Fourier	$\widehat{(-\Delta)^s u}(\xi) = \xi ^{2s} \hat{u}(\xi)$
Neumann	$\mathcal{N}_s u(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{ x - y ^{n+2s}} dy, x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$
Neumann renormalisé	$\tilde{\mathcal{N}}_s u(x) = \mathcal{N}_s u(x) / w_{s,\Omega}(x), w_{s,\Omega}(x) = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{dy}{ x - y ^{n+2s}}$
Forme $\mathcal{A}_s$	$\mathcal{A}_s(u, v) = \frac{c_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega)^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{ x - y ^{n+2s}} dx dy$
Intégration par parties	$\mathcal{A}_s(u, v) = \int_{\Omega} v (-\Delta)^s u + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} v \mathcal{N}_s u$
Opérateur L_J	$L_J u(x) = \int_{\Omega} J(x - y)(u(y) - u(x)) dy$
Forme a_J	$a_J(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} J(x - y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) dx dy$
Intégration par parties	$a_J(u, v) = - \int_{\Omega} v L_J u \text{ (si } \mathcal{N}_J u = 0)$

B.2 Spectres comparés

Valeur propre	Définition variationnelle	Propriété
$\lambda_1 = 0$	$\inf_u R_s(u) = 0$	Fct. propre $\varphi_1 = \Omega ^{-1/2}$
$\lambda_2 > 0$	$\inf_{\int_{\Omega} u = 0} R_s(u)$	Taux de décroissance
$\beta_1 = 0$	$\inf_u \frac{a_J(u, u)}{\ u\ _{L^2(\Omega)}^2} = 0$	Fct. propre $\psi_1 = \Omega ^{-1/2}$
$\beta_2 > 0$	$\inf_{\int_{\Omega} u = 0} \frac{a_J(u, u)}{\ u\ _{L^2(\Omega)}^2}$	Taux de décroissance
μ_k	Min-max pour $-\Delta$, Neumann	Limite locale ($s \rightarrow 1^-$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$)

B.3 Inégalités de Poincaré–Wirtinger

Pour tout u de moyenne nulle dans Ω (i.e. $\int_{\Omega} u = 0$) :

$$\mathcal{A}_s(u, u) \geq \lambda_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\text{noyau singulier})$$

$$a_J(u, u) \geq \beta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\text{noyau régulier})$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \mu_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\text{Local})$$

Ces trois inégalités sont au cœur des résultats de décroissance exponentielle.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2^e éd., Pure and Applied Mathematics **140**, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mazón, J. D. Rossi, J. Toledo-Melero, *Nonlocal Diffusion Problems*, Mathematical Surveys and Monographs **165**, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [3] G. Barles, E. Chasseigne, C. Georgelin, E. R. Jakobsen, *On Neumann type problems for nonlocal equations in a half space*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 4873–4917.
- [4] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, in: *Optimal Control and Partial Differential Equations*, J. L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (eds.), IOS Press, Amsterdam, 2001, pp. 439–455.
- [5] K. Bogdan, K. Burdzy, Z.-Q. Chen, *Censored stable processes*, Probab. Theory Relat. Fields **127** (2003), 89–152.
- [6] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [7] L. Caffarelli, L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 8, 1245–1260.
- [8] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521–573.
- [9] S. Dipierro, X. Ros-Oton, E. Valdinoci, *Nonlocal problems with Neumann boundary conditions*, Rev. Mat. Iberoam. **33** (2017), no. 2, 377–416.
- [10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [11] J. García Melián, J. D. Rossi, *On the principal eigenvalue of some nonlocal diffusion problems*, J. Differential Equations **246** (2009), no. 1, 21–38.
- [12] G. Grubb, *Fractional Laplacians on domains, a development of Hörmander’s theory of μ -transmission pseudodifferential operators*, Adv. Math. **268** (2015), 478–528.
- [13] J.-L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d’espaces d’interpolation*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **19** (1964), 5–68.
- [14] E. Montefusco, B. Pellacci, G. Verzini, *Fractional diffusion with Neumann boundary conditions: the logistic equation*, Disc. Cont. Dyn. Syst. Ser. B **18** (2013), 2175–2202.
- [15] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **44**, Springer, New York, 1983.

- [16] J. D. Rossi, *The first eigenvalue for nonlocal operators*, in: *Nonlocal and Fractional Operators*, Springer SEMA-SIMAI Proceedings **26** (2022), Chapter 22, pp. 407–434. DOI: 10.1007/978-3-031-02104-6_22.
- [17] P. R. Stinga, B. Volzone, *Fractional semilinear Neumann problems arising from a fractional Keller–Segel model*, Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), no. 1, 1009–1042.