

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN

---



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

## MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques & Modélisation

présenté par

SIDI YAKOUB Oumaima Amina

---

# Dynamique globale d'un modèle épidémiologique SVIR avec un retard distribué et une vaccination imparfaite

---

Soutenu devant le jury composé de :

M.MESK MOHAMED	Université de Tlemccen	Président
M.BENTOUT SOFIANE	Université de Aïn Temouchent	Examineur
M.MENOUER MOHAMMED AMINE	Université de Tlemccen	Encadrant

Année Universitaire : 2023-2024

# Dédicaces

Je dédie ce mémoire à mes très chers parents qui m'ont toujours soutenus et qui ont tout sacrifié pour mes études. Tout le mérite leur revient. Qu'ils trouvent ici ma sincère reconnaissance et mon amour.

À mes deux chers frères et à ma chère sœur.

À mes oncles, tantes, cousins et cousines, tant du côté paternel que maternel.

À mes chers amis et à tous ceux qui me sont chers.

# Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH de m'avoir assisté pour réaliser ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadreur Menouer Mohammed Amine, pour m'avoir permis d'effectuer ce travail sous sa direction et m'avoir offert la possibilité de travailler sur un sujet passionnant, mais aussi pour sa gentillesse, sa modestie et ses précieux conseils.

J'adresse toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements à Monsieur Mesk Mohamed

Je prie Monsieur Bentout Sofiane de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait d'examiner ce travail.

Il m'est agréable d'exprimer ma respectueuse gratitude et mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenu, de près ou de loin, pour mener ce travail à terme.

# Table des matières

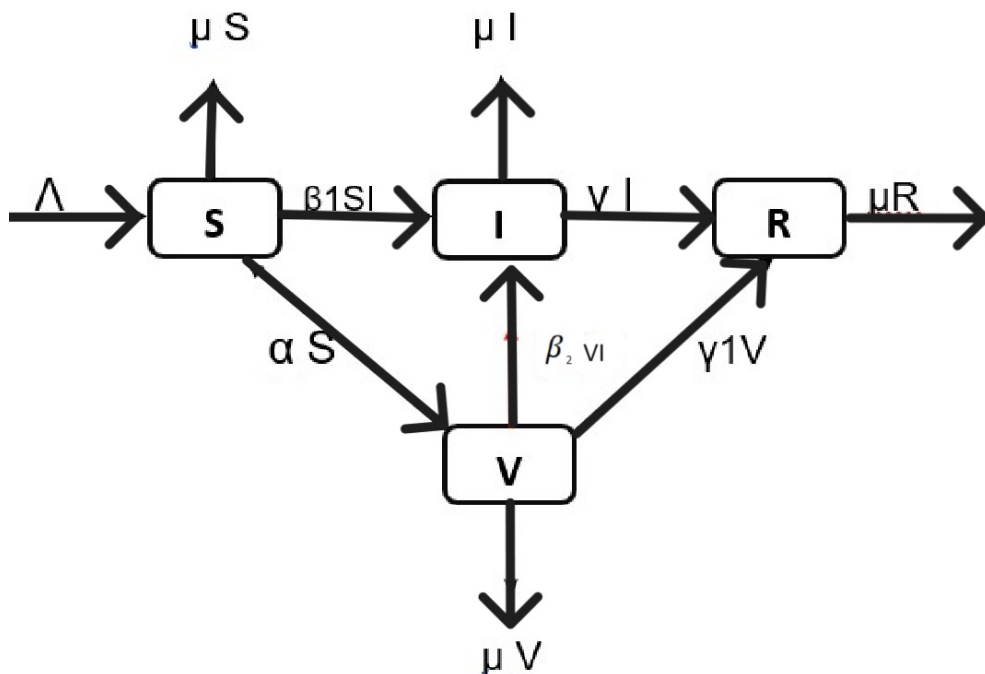
Introduction	3
1 Résultats préliminaires	7
2 La stabilité globale du DFE	15
3 La persistance uniforme	19
4 La stabilité asymptotique globale du PE	25
5 Simulations numériques	37
6 Conclusion	39
Bibliographie	43



# Introduction

Les modèles épidémiques ont attiré l'attention pendant la pandémie du COVID-19. Notre étude examine un modèle épidémiologique SVIR en prenant en compte une vaccination imparfaite, et met en évidence l'importance cruciale de la vaccination, qui permet de sauver des millions de vies, et représente un important investissement dans la santé publique [5]

Un modèle mathématique a été développé pour analyser l'effet de la vaccination sur la dynamique de la transmission des maladies infectieuses. Nous examinons donc le modèle SVIR comme décrit par Liu et al [7], et représentons les interactions entre les compartiments comme illustré ci-dessous :



Ce schéma est composé de quatre compartiments représentés par les lettres ( S, V, I, R ), qui signifient respectivement les individus Susceptibles, Vaccinés, Infectés et Rétablis(guérés).

Les paramètres sont définis comme suit :

$\Lambda$  :Flux entrant des nouveaux individus susceptibles dans la population.

$\beta_1, \beta_2$  : Taux de transmission de la maladie pour les individus susceptibles et vaccinés, respectivement.

$\mu$  : Taux de mortalité naturelle (non liée à la maladie).

$\alpha$  : Taux de vaccination des individus susceptibles.

$\gamma_1, \gamma$  : Taux de guérison des individus vaccinés et infectés, respectivement.

on traduit le schéma en les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta_1 S(t)I(t) - \mu S(t) - \alpha S(t), \\ \dot{V} = \alpha S(t) - \beta_2 V(t)I(t) - (\gamma_1 + \mu)V(t), \\ \dot{I} = (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I(t) - (\gamma + \mu)I(t), \end{cases} \quad (1)$$

tel que :

$\dot{S}$  : Le taux de changement du nombre d'individus susceptibles.

$\dot{V}$  : Le taux de changement du nombre d'individus vaccinés.

$\dot{I}$  : Le taux de changement du nombre d'individus infectés.

$\dot{R}$  : Le taux de changement du nombre d'individus rétablis.

Les équations décrivent comment les individus se déplacent entre ces compartiments au fil du temps en raison du flux entrant, de la vaccination, de l'infection et de la guérison ou de la mort. Ce modèle peut être utilisé pour prédire l'évolution d'une épidémie et pour évaluer l'impact des interventions comme la vaccination.

Le nombre de reproduction de base  $R_0$  est un seuil crucial pour déterminer si une infection se propagera dans une population. Pour mieux comprendre ce phénomène, nous souhaitons intégrer un retard dans le temps pour décrire la phase d'exposition variable et son impact sur la dynamique des seuils du système.

En appliquant ce retard au modèle SVIR, nous obtenons un système à retard, qui est une version modifiée du modèle initial.

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta_1 S(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \mu S(t) - \alpha S(t), \\ \dot{V} = \alpha S(t) - \beta_2 V(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - (\gamma_1 + \mu) V(t), \\ \dot{I} = (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - (\gamma + \mu) I(t), \\ \dot{R} = \gamma_1 V(t) + \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (2)$$

Le retard dans ce modèle représente le temps passé pour devenir infectueux et il est introduit sous forme d'un retard distribué avec  $\int_0^\tau f(s) ds = 1$  où  $f$  est une fonction positive et continue qui représente la fraction des individus infectés auxquels le temps nécessaire pour devenir contagieux est  $s$ .

Notre objectif est de démontrer que ce système à retard présente une persistance uniforme lorsque  $R_0 > 1$ , tandis que l'infection s'éteint lorsque  $R_0 < 1$ , les études numériques confirmeront ceci. De plus, la présence du retard distribué dans les trois populations, comme il est mis en évidence dans (2), génère des termes supplémentaires où nous ajouterons d'autres termes supplémentaires dans la fonction de Lyapunov pour prouver la stabilité globale. Pour atteindre ce résultat, nous écrivons le système (2) en termes du modèle (1) de la manière suivante :

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta_1 S(t) I(t) - \mu S(t) - \alpha S(t) - G_1, \\ V'(t) = \alpha S(t) - \beta_2 V(t) I(t) - (\gamma_1 + \mu) V(t) - G_2, \\ I'(t) = (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) I(t) - (\gamma + \mu) I(t) + G_1 + G_2, \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} G_1 &= \beta_1 S(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_1 S(t) I(t), \\ G_2(t) &= \beta_2 V(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_2 V(t) I(t). \end{aligned}$$

Les conditions initiales de (3) sont :

$$S_0(\xi) = \theta_1(\xi), \quad V_0(\xi) = \theta_2(\xi), \quad I_0(\xi) = \theta_3(\xi), \quad \xi \in [-\tau, 0] \quad (4)$$

$$\text{où } (\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^3))$$

Dans ce mémoire nous examinons comment la vaccination influence la propagation de la maladie contagieuse avec un retard.

Le premier chapitre aborde des résultats préliminaires concernant les caractéristiques de la fonction de Volterra . Puis, le second chapitre met en lumière la stabilité globale de l'équilibre sans maladie dans le cas où  $R_0 < 1$ , en s'appuyant sur l'approche de Lyapunov. Nous y montrons que l'attracteur  $\mathcal{D}$ , de nature compacte, est formé de l'équilibre DFE qui assure, par sa présence, la stabilité asymptotique de l'état équilibré en question.

Le troisième chapitre se consacre à l'étude de persistance uniforme de la solution lorsque  $R_0 > 1$ .

Dans la dernière partie, nous avons établi une relation entre la fonction  $L$  du système à retard (3) et celle du système d'équations différentielles ordinaires (EDO) (1). Il est intéressant de noter que le retard introduit des termes positifs supplémentaires qui compliquent la vérification des propriétés de la fonction  $L$ . Pour surmonter cela, nous avons utilisé un terme supplémentaire dans la fonction de Lyapunov pour obtenir le résultat souhaité. De plus, nous avons constaté que l'attracteur global compact  $D$  est constitué de l'ensemble  $E^*$ . Ce concept permet d'éviter l'analyse du comportement local (voir également [4],[5]).

# Chapitre 1

## Résultats préliminaires

Nous considérons la fonction de Volterra suivante :  $H(y) = y - 1 - \ln(y)$ , qui vérifie  $H(y) \geq 0$  pour  $y > 0$ . Cette fonction a un minimum global unique :  $H(1) = 0$ . De plus, nous avons  $H'(y) = 1 - \frac{1}{y}$ . Cette fonction est très connue pour être utilisée dans la construction de fonctions de Lyapunov[7]. Le lemme suivant fournit certaines propriétés de cette fonction qui peuvent être très utiles dans la dernière partie du mémoire.

**Lemme 1.1.** [2]

*Supposons que  $y_0, y_1, \dots, y_n > 0$  avec  $\prod_{i=0}^n y_i = 1$ , nous avons :*

$$y_0 + y_1 + \dots + y_n - n = (H(y_0) + H(y_1) + \dots + H(y_n)) \geq 0.$$

**Lemme 1.2.** [2]

*Supposons que  $y_0, y_1, y_2, y_3 > 0$  alors nous avons :*

$$(y_0 - y_1)(y_2 - y_3) = H(y_0 y_2) + H(y_1 y_3) - H(y_0 y_3) - H(y_1 y_2)$$

*Maintenant, nous supposons que  $N(t) = S(t) + V(t) + I(t)$ . Dans le but de vérifier certaines propriétés de la solution de (2) nous établissons les lemmes suivants :*

**Lemme 1.3.**

*La solution  $(S(t), V(t), I(t))$  de (2) avec les conditions initiales (4) existe, est positive pour  $t > 0$*

et vérifie :

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) &\leq \frac{\Lambda}{\mu}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) &\leq \frac{\Lambda}{\mu + \alpha}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) &\leq \frac{\alpha\Lambda}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha)}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

PREUVE.

Les termes du côté droit de chaque équation du système (2) sont des fonctions continues et localement Lipschitziennes sur  $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^3)$ . Cela garantit l'existence et l'unicité de la solution  $(S(t), V(t), I(t))$  dans  $[0, T)$  pour un certain  $T > 0$ . Supposons que  $S(t) = 0$  pour un certain  $t \in [0, T)$ , alors la première équation de (2) devient :

$$\dot{S}(t) = \Lambda > 0$$

ceci signifie que  $S(t)$  augmente strictement à partir de  $S(t) = 0$ , ceci se traduit par  $S(t) > 0$  pour  $t \in [0, T)$ .

Un raisonnement similaire peut être appliqué pour  $V(t)$ . Supposons que  $V(t) = 0$  pour un certain  $t \in [0, T)$ , alors la deuxième équation de (2) devient :

$$\dot{V}(t) = \alpha S(t)$$

Puisque nous avons déjà montré que  $S(t) > 0$ ,  $\alpha S(t) > 0$ . ceci signifie que  $V(t)$  augmente strictement à partir de  $V(t) = 0$ , ceci se traduit par  $V(t) > 0$  pour  $t \in [0, T)$ . Maintenant, par contradiction, nous prouvons que  $I(t) > 0$  pour  $t \in [0, T)$ . Supposons qu'il existe  $t_1 \in [0, T)$  tel que  $I(t_1) = 0$  et  $I(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_1)$ . En intégrant la troisième équation de (2), nous obtenons :

$$I(t_1) = I_0 e^{-(\mu+\gamma)t_1} + \int_0^{t_1} \left( (\beta_1 S(\sigma) + \beta V(\sigma)) \int_0^\tau f_1(s) I(\sigma - s) ds \right) e^{-(\mu+\gamma)(t_1-\sigma)} d\sigma,$$

Ceci est une contradiction avec le fait que  $I(t_1) = 0$ . À partir de (2), nous obtenons  $R(t) > 0$  pour  $t \in [0, T)$ . En additionnant les trois équations de (2), nous obtenons :

$$\dot{S} + \dot{V} + \dot{I} = \Lambda - \mu S - (\gamma_1 + \mu)V - (\gamma + \mu)I,$$

$$\dot{S} + \dot{V} + \dot{I} \leq \Lambda - \mu N,$$

d'où

$$\dot{N} \leq \Lambda - \mu N,$$

donc

$$N(t) \leq C_1 e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu},$$

ainsi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

On déduit donc l'existence, la positivité et l'unicité de  $(S(t), V(t), I(t))$  la solution de (2).  
Maintenant, en nous concentrant sur la dernière partie du lemme. De la première équation de (2) :

$$\dot{S}(t) = \Lambda - \beta_1 S(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \mu S(t) - \alpha S(t),$$

et puisque  $\beta_1 S(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds > 0$ , étant donné que  $\beta_1 > 0$ ,  $S(t) > 0$ ,  $f(s) > 0$  et  $I(t-s) > 0$ , alors on obtient

$$\dot{S}(t) \leq \Lambda - (\mu + \alpha)S(t),$$

d'où

$$S(t) \leq C_2 e^{-(\mu+\alpha)t} + \frac{\Lambda}{\mu + \alpha},$$

et donc

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu + \alpha},$$

Pour  $t$  suffisamment grand, la seconde équation de (2) donne :

$$\dot{V}(t) = \alpha S(t) - \beta_2 V(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - (\gamma_1 + \mu) V(t),$$

$$\dot{V}(t) \leq \alpha S(t) - (\gamma_1 + \mu) V(t) \quad \text{car} \quad \beta_2 V(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds > 0$$

et donc

$$V(t) \leq C_3 e^{-(\gamma_1 + \mu)t} + \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \alpha)(\gamma_1 + \mu)},$$

d'où

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha)},$$

**Remarque 1.1.** Dans le Lemme 1.3, il a été prouvé que l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ (S, V, I) : S \geq 0, V \geq 0, I \geq 0, S + V + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

est positivement invariant et attire toutes les solutions pour le système (2), et par conséquent, il existe un attracteur compact global noté  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 1.4** (7). La solution de (2) vérifie (pour  $\epsilon$  suffisamment petit) :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{\Lambda \mu}{\beta_1(\Lambda + \epsilon \mu) + \mu}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} V(t) \geq \frac{\alpha \Lambda \mu^2}{(\beta_1(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \alpha)\mu)(\beta_2(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \gamma_1)\mu)}$$

PREUVE.

En supposant qu'il existe un petit nombre réel  $\epsilon$ , et suivant les résultats du lemme 1.3 il existe un nombre suffisamment grand noté  $t_1 > 0$  tel que  $\forall t \geq t_1$ ,  $I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon$ . En utilisant (2), nous obtenons pour  $t \geq t_1 + \tau$  :

$$\text{on a} \quad S(t) \geq - \left[ \beta_1 \left( \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) + \mu + \alpha \right] S(t) + \Lambda,$$

d'où

$$S(t) \geq C_4 e^{-[\beta_1(\frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon) + \mu + \alpha]t} + \frac{\Lambda}{\beta_1 \left( \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) + \mu + \alpha},$$

donc

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{\Lambda \mu}{\beta_1(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \alpha)\mu},$$

De même, pour un temps suffisamment grand  $t_2 \gg t_1 + \tau$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \alpha S(t) - \beta_2 V(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds (\gamma_1 + \mu) V(t), \\ &\geq \alpha S(t) - \beta_2 V(t) \left( \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) - (\gamma_1 + \mu) V(t), \\ &\geq \frac{\alpha \Lambda \mu}{\beta_1(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \alpha)\mu} - \left[ \beta_2 \left( \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) - (\gamma_1 + \mu) \right] V(t), \end{aligned}$$

donc

$$V(t) \geq C_5 e^{-[\beta_2(\frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon) - (\gamma_1 + \mu)]t} + \frac{\alpha \Lambda \mu^2}{(\beta_1(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \alpha)\mu)(\beta_2(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \gamma_1)\mu)},$$

d'où

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} V(t) \geq \frac{\alpha \Lambda \mu^2}{(\beta_1(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \alpha)\mu)(\beta_2(\Lambda + \epsilon \mu) + (\mu + \gamma_1)\mu)}.$$

**Remarque 1.2.** [?] *Le nombre de reproduction de base  $R_0$  est donné par*

$$R_0 = \frac{\beta_1 \Lambda (\mu + \gamma_1) + \beta_2 \alpha \Lambda}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha)}$$

**Lemme 1.5.** [?]

*Le modèle (2) a toujours un DFE noté  $E_0 = (S_0, V_0, 0)$ , et a l'équilibre positif (PE) noté*

*$E^* = (S^*, V^*, I^*)$  qui existe si et seulement si  $R_0 > 1$ . Les points  $E_0$  et  $E^*$  sont définis comme*

*suiv :*

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{\Lambda}{\mu + \alpha}, & V_0 &= \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha)}, \\ S^* &= \frac{\Lambda}{\mu + \alpha + \beta_1 I^*}, & V^* &= \frac{\alpha S^*}{\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*} = \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*)}, \end{aligned}$$

PREUVE.

*on cherche les points d'équilibres comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{V} = 0 \\ \dot{I} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda - \beta_1 SI - \mu S - \alpha S = 0 \\ \alpha S - \beta_2 VI - (\gamma_1 + \mu)V = 0 \\ (\beta_1 S + \beta_2 V)I - (\gamma + \mu)I = 0 \end{cases}$$

pour  $I_0 = 0$  on a :

$$\begin{cases} \Lambda - \mu S_0 - \alpha S_0 = 0 \\ \alpha S_0 - (\gamma_1 + \mu)V_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_0 = \frac{\Lambda}{\mu + \alpha} \\ V_0 = \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha)} \end{cases}$$

pour  $I^* > 0$  on a :

$$\begin{cases} \Lambda - \beta_1 S^* I^* - \mu S^* - \alpha S^* = 0 \\ \alpha S^* - \beta_2 V^* I^* - (\gamma_1 + \mu)V^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^* = \frac{\Lambda}{\mu + \alpha + \beta_1 I^*} \\ V^* = \frac{\alpha S^*}{\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*} = \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*)} \end{cases}$$

au point d'équilibre PE on a de la troisième équation  $(\beta_1 S^*(t) + \beta_2 V^*(t) - (\gamma + \mu))I^*(t) = 0$

avec  $I^* > 0$  on obtient donc :

$$\beta_1 S^*(t) + \beta_2 V^*(t) - (\gamma + \mu) = 0,$$

en remplaçant  $S^*$  et  $V^*$  par les valeurs qu'on a trouvées avant on a

$$\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu + \alpha + \beta_1 I^*} + \beta_2 \frac{\alpha \Lambda}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*)} - (\gamma + \mu) = 0,$$

et donc

$$\frac{\beta_1 \Lambda}{\mu + \alpha + \beta_1 I^*} + \frac{\beta_2 \alpha \Lambda}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*)} = (\gamma + \mu),$$

d'où

$$\Rightarrow \frac{\beta_1 \Lambda (\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*) + \beta_2 \alpha \Lambda}{(\mu + \alpha + \beta_1 I^*)(\mu + \gamma_1 + \beta_2 I^*)} = \gamma + \mu,$$

on aboutit à

$$\beta_1\Lambda(\mu + \gamma_1 + \beta_2I^*) + \beta_2\alpha\Lambda - (\gamma + \mu)(\mu + \alpha + \beta_1I^*)(\mu + \gamma_1 + \beta_2I^*) = 0,$$

d'où

$$\beta_1\Lambda(\mu + \gamma_1) + \beta_1\Lambda\beta_2I^* + \beta_2\alpha\Lambda - (\gamma + \mu) [(\mu + \alpha)(\mu + \gamma_1) + (\mu + \alpha)\beta_2I^* + \beta_1I^*(\mu + \gamma_1) + \beta_1\beta_2I^{*2}] = 0,$$

après arrangement des termes, on trouve

$$\beta_1\Lambda(\mu + \gamma_1) + \beta_2\alpha\Lambda - \underbrace{(\gamma + \mu)(\gamma + \alpha)(\mu + \gamma_1)}_{A_0} + \underbrace{[\beta_1\beta_2\Lambda - (\gamma + \mu)(\gamma + \alpha)\beta_2 - (\gamma + \mu)(\mu + \gamma_1)\beta_1]}_{-A_1} I^* - \underbrace{(\gamma + \mu)\beta_1\beta_2}_{A_2} I^{*2} = 0$$

ou de manière équivalente

$$\beta_1\Lambda(\mu + \gamma_1) + \beta_2\alpha\Lambda - A_0 - A_1I^* - A_2I^{*2} = 0$$

ce qui se réécrit comme ceci

$$A_2I^{*2} + A_1I^* + A_0 \left( 1 - \frac{\beta_1\Lambda(\mu + \gamma_1) + \beta_2\alpha\Lambda}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha)} \right) = 0$$

d'où

$$A_2I^{*2} + A_1I^* + A_0(1 - R_0) = 0 \quad \dots\dots\dots(*)$$

avec  $A_2 = (\mu + \gamma)\beta_1\beta_2,$

$$A_1 = (\mu + \gamma)[(\mu + \alpha)\beta_1 + (\mu + \gamma_1)\beta_2] - \beta_1\beta_2\mu,$$

$$A_0 = (\mu + \gamma)(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha).$$

*Si  $R_0 > 1$  alors il y a une unique solution réelle positive  $I^*$  pour l'équation (\*) d'après la règle des signes de Descartes, et donc  $E^*$  existe bien.*

*Si  $R_0 < 1$  il peut y avoir des solutions pour l'équation mais elles seront négatives.*

*Donc pas de solution  $I^* > 0$  pour l'équation (\*), d'où  $E^*$  n'existe pas dans le cas  $R_0 < 1$ .*

# Chapitre 2

## La stabilité globale du DFE

### Théorème 2.1.

Si  $R_0 < 1$ , le DFE est GAS, et instable si  $R_0 > 1$ .

PREUVE.

Nous considérons une fonction de Lyapunov  $W_0(I(t)) = \frac{1}{2}I^2(t)$ , où nous choisissons les valeurs de  $t \geq \tau$  telles que  $W_0(I(t + \sigma)) \leq W_0(I(t))$  pour  $\sigma \in [-\tau, 0]$ , la dérivée de  $W_0(I(t))$  par rapport au temps est :

$$\dot{W}_0 = (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I(t) \int_0^\tau f(s)I(t-s) ds - (\gamma + \mu)I^2(t)$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit  $I(t) \cdot I(t-s)$ , qui donne :

$$I(t)I(t-s) \leq \frac{1}{2}(I^2(t) + I^2(t-s))$$

Appliquons cette inégalité à l'intégrale dans  $\dot{W}_0$  :

$$(\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) I(t) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds \leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \int_0^\tau f(s) \frac{1}{2} (I^2(t) + I^2(t-s)) ds$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\dot{W}_0 \leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \int_0^\tau f(s) \frac{1}{2} (I^2(t) + I^2(t-s)) ds - (\gamma + \mu) I^2(t)$$

Nous distribuons l'intégrale et utilisons la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} & (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \int_0^\tau f(s) \frac{1}{2} (I^2(t) + I^2(t-s)) ds \\ &= (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \frac{1}{2} \left[ \int_0^\tau f(s) I^2(t) ds + \int_0^\tau f(s) I^2(t-s) ds \right] \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\dot{W}_0 \leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \frac{1}{2} \left[ \int_0^\tau f(s) I^2(t) ds + \int_0^\tau f(s) I^2(t-s) ds \right] - (\gamma + \mu) I^2(t)$$

Remarquons que  $I^2(t)$  est indépendant de  $s$ , donc :

$$\int_0^\tau f(s) I^2(t) ds = I^2(t) \int_0^\tau f(s) ds$$

Étant donné que  $\int_0^\tau f(s) ds = 1$ , nous avons :

$$\int_0^\tau f(s) I^2(t) ds = I^2(t),$$

et d'après l'hypothèse sur  $W_0$  on a :

$$\int_0^\tau f(s)I^2(t-s) ds \leq \int_0^\tau f(s)I^2(t) ds$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{W}_0 &\leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \frac{1}{2} \left[ I^2(t) + \int_0^\tau f(s)I^2(t-s) ds \right] - (\gamma + \mu)I^2(t) \\ &\leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \frac{1}{2} \left[ I^2(t) + \int_0^\tau f(s)I^2(t) ds \right] - (\gamma + \mu)I^2(t) \\ &\leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t)) \frac{1}{2} [I^2(t) + I^2(t)] - (\gamma + \mu)I^2(t) \\ &\leq (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I^2(t) - (\gamma + \mu)I^2(t) \end{aligned}$$

Pour des valeurs suffisamment grandes de  $t$ , nous obtenons  $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu + \alpha}$  et  $V(t) \leq \frac{\alpha\Lambda}{(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)}$

(voir Lemme 1.3). En substituant ces résultats dans l'inégalité précédente, nous obtenons pour

$t$  suffisamment grand :

$$\begin{aligned} \dot{W}_0 &\leq \left( \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu + \alpha} + \beta_2 \frac{\alpha\Lambda}{(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)} \right) I^2(t) - (\gamma + \mu)I^2(t) \\ &= \left( \frac{\beta_1\Lambda}{\mu + \alpha} + \frac{\beta_2\alpha\Lambda}{(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)} - (\gamma + \mu) \right) I^2(t) \\ &= - \left( \frac{\beta_1\Lambda}{\mu + \alpha} + \frac{\beta_2\alpha\Lambda}{(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)} \right) \left[ \frac{1}{R_0} - 1 \right] I^2(t) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $R_0 < 1$  et le théorème de Lyapunov-Razumikin (par exemple, voir [1]),

nous concluons que  $I(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . En remplaçant ce résultat dans

le système (2), nous affirmons que  $S(t) \rightarrow S_0$  et  $V(t) \rightarrow V_0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Maintenant, nous présumons que la trajectoire totale  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$  est donnée par

$\phi(t) = (S_0(t), V_0(t), I_0(t))$ , avec  $S(t) = \theta_1(t)$ ,  $V(t) = \theta_2(t)$  et  $I(t) = \theta_3(t)$ , pour  $t \in [-\tau, 0]$  et  $(S(t), V(t), I(t))$  est solution du problème (2) pour  $t \in \mathbb{R}$ . Nous savons que  $\mathcal{D}$  est compact, alors  $\omega(x)$  et  $\alpha(x)$  sont non-vides, compacts, invariants et attirent  $\phi(t)$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ , respectivement.  $W_0(\phi(t))$  est une fonction décroissante de  $t$ ,  $W_0$  est constant sur  $\omega(x)$  et  $\alpha(x)$ , et donc  $\omega(x) = \alpha(x) = \{(S_0, V_0, 0)\}$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = \{(S_0, V_0, 0)\}$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} W_0(\phi(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} W_0(\phi(t)) = W_0((S_0, V_0, 0))$ . Alors, nous concluons que  $W_0(\phi(t)) = W_0(\theta_1, \theta_2, 0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous avons que  $\alpha(x) = \{(S_0, V_0, 0)\}$  alors  $W_0(\phi(t)) \leq W_0(\theta_1, \theta_2, 0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En utilisant le fait que  $\phi$  atteint son point minimum à  $(S_0, V_0, 0)$ , il s'ensuit que  $\phi(t) = (S_0, V_0, 0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (S(t), V(t), I(t)) = (S_0, V_0, 0)$ . Ainsi, l'attracteur  $\mathcal{D}$ , est l'ensemble singleton formé par le DFE  $(S_0, V_0, 0)$ . Au vu du Théorème 2.39 dans [3] le DFE est GAS.

# Chapitre 3

## La persistance uniforme

L'objectif de cette partie est de démontrer que l'infection persiste lorsque  $R_0 > 1$ .

D'après le lemme 1.5 on conclut que  $S(t)$  et  $V(t)$  sont permanent. Reste à vérifier si  $I$  est permanent ou non.

**Théorème 3.1.** (*Persistance Uniforme*)

Pour  $R_0 > 1$ , alors nous avons la persistance uniforme de  $I(t)$ , cela signifie :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > I^* e^{-(\mu+\gamma)\tau} \equiv I^* \nu.$$

PREUVE. Nous considérons

$$B(t) = I(t) + (\beta_1 S^* + \beta_2 V^*) \int_0^\tau f(s) \int_{t-s}^t I(\sigma) d\sigma ds,$$

$$\text{donc } \dot{B}(t) = \dot{I}(t) + (\beta_1 S^* + \beta_2 V^*) \int_0^\tau f(s)(I(t) - I(t-s)) ds,$$

$$= (\beta_1 S + \beta_2 V) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds + (\beta_1 S^* + \beta_2 V^*) \int_0^\tau f(s)(I(t) - I(t-s)) ds - (\mu + \gamma) I(t),$$

$$= \beta_1 (S - S^*) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds + \beta_2 (V - V^*) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds + \underbrace{(\beta_1 S^* + \beta_2 V^* - (\mu + \gamma))}_{=0} I(t),$$

$$= \beta_1 (S - S^*) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds + \beta_2 (V - V^*) \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds.$$

L'égalité :  $\beta_1 S^* + \beta_2 V^* - (\mu + \gamma) = 0$  vient de l'équation de  $\dot{I}^* = 0$  où l'on cherche à tirer  $I^*$ .

On aura :  $(\beta_1 S^* + \beta_2 V^* - (\mu + \gamma))I^* = 0 \Rightarrow \beta_1 S^* + \beta_2 V^* - (\mu + \gamma) = 0$  car  $I^* > 0$ .

Maintenant, nous allons montrer qu'il est impossible d'avoir  $I(t) \leq qI^*$  pour tout  $0 < q < 1$

et  $t \geq \rho\tau$  où  $\rho \geq 1$  est un nombre suffisamment grand.

Nous supposons que  $I(t) \leq qI^*$  pour tout  $t \geq \rho\tau$ .

En remplaçant ce résultat dans la première équation de (2), nous obtenons pour  $t \geq (\rho + 1)\tau$  :

$$\dot{S} = \Lambda - \beta_1 S \int_0^\tau f(s)I(t-s)ds - (\mu + \alpha)S \geq \Lambda - \beta_1 S q I^* - (\mu + \alpha)S = \Lambda - (\beta_1 q I^* + (\mu + \alpha))S.$$

car

$$\int_0^\tau f(s) ds = 1 \text{ et } \int_0^\tau f(s)I(t-s) ds \leq qI^* \int_0^\tau f(s) ds = qI^*$$

Donc, pour  $t \geq (\rho + 1)\tau$ , nous avons

$$S(t) > \frac{\Lambda}{\beta_1 q I^* + \mu + \alpha} (1 - e^{-(\beta_1 q I^* + \mu + \alpha)(t - (\rho + 1)\tau)})$$

et donc pour  $t \geq (2\rho + 1)\tau$  nous obtenons :

$$S(t) > \frac{\Lambda}{qI^*\beta_1 + \mu + \alpha} (1 - e^{-(qI^*\beta_1 + \mu + \alpha)\rho\tau}) \equiv S_\rho > S^* \quad (6)$$

Par une méthode similaire, on obtient pour  $t \geq (2\rho_1 + 1)\tau$  :

$$V(t) > \frac{\alpha S^*}{\beta_2 q I^* + \mu + \gamma_1} (1 - e^{-(qI^*\beta_1 + \mu + \gamma_1)\rho_1\tau}) \equiv V_\rho > V^* \quad (7)$$

En combinant les deux résultats et en les substituant dans l'expression explicite de  $\dot{B}$ ,

nous obtenons pour  $t \geq (2\rho_1 + 1)\tau$  :

$$\dot{B} > \beta_1(S_\rho - S^*) \int_0^\tau f(s)I(t-s)ds + \beta_2(V_\rho - V^*) \int_0^\tau f(s)I(t-s)ds$$

Maintenant, nous posons :  $\underline{I} = \min_{\theta \in [-\tau, 0]} I(2\rho_1\tau + 2\tau + \theta)$ . Nous prouvons alors que  $I(t) \geq \underline{I}$ ,

pour  $t \geq (2\rho_1 + 1)\tau$ . En effet, s'il existe un  $T > 0$  tel que  $I(t) \geq \underline{I}$  pour

$(2\rho_1 + 1)\tau \leq t \leq (2\rho_1 + 1)\tau + T$ , et  $I(t) = \underline{I}$  pour  $t = (2\rho_1 + 1)\tau + T$ , et  $\dot{I}(2(\rho_1 + 1)\tau + T) \leq 0$ ,

alors, à partir de la troisième équation de (2) et (6), (7) pour  $t = \tau(2\rho_1 + 1) + T$  :

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &\geq [\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t) - (\mu + \gamma)]\underline{I} \\ &= [\beta_1 S_\rho + \beta_2 V_\rho - (\mu + \gamma)]\underline{I} \end{aligned}$$

L'équilibre endémique vérifie l'égalité  $\mu + \gamma_1 = \beta_1 S^* + \beta_2 V^*$ , donc l'inégalité précédente

devient :  $\dot{I}(t) \geq [\beta_1(S_\rho - S^*) + \beta_2(V_\rho - V^*)]\underline{I} > 0$ ,

donc  $\dot{B}(t) \geq [\beta_1(S_\rho - S^*) + \beta_2(V_\rho - V^*)]\underline{I} > 0$ .

or  $\dot{I}(2(\rho_1 + 1)\tau + T) \leq 0$  et ceci est une contradiction.

Donc  $I(t) \geq \underline{I}$  pour  $t \geq (2\rho_1 + 1)T$  avec  $\underline{I} = \text{cst} > 0$  car  $I(t) > 0$  quelque que soit

$t \geq 0$ , donc nous déduisons que  $B(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , ce qui est une contradiction

avec les résultats montrés dans le Lemme 1.3 ou

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \leq qI$$

donc, nous déduisons que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) > qI^* = \epsilon$$

Il reste maintenant à vérifier les deux cas différents suivants :

Cas 1 :  $I(t) \geq qI^*$  pour une grande valeur de  $t$ .

Cas 2 :  $I(t)$  oscille dans le voisinage de  $qI^*$  pour une grande valeur de  $t$ .

Nous étudions le deuxième cas. Nous considérons des valeurs de temps suffisamment grandes notées  $t_0, t_1$  vérifiant :

$$I(t_0) = I(t_1) = qI^*, \quad \text{et} \quad I(t) < qI^* \quad \text{pour} \quad t_0 < t < t_1. \quad (8)$$

Si  $t_1 - t_0 \leq \tau$ , la troisième équation de (2) donne :

$$\dot{I}(t) > -(\mu + \gamma)I(t),$$

pour  $t \in (t_0, t_1)$  nous avons :

$$I(t) > I(t_0)e^{-(\mu+\gamma)(t-t_0)} > qI^*e^{-(\mu+\gamma)\tau} := qI^*\nu$$

Évidemment, pour  $t_1 - t_0 > \tau$ , nous avons  $I(t) \geq qI^*\nu$  pour  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ . En utilisant la même méthode que celle utilisée dans la preuve ci-dessus et en utilisant les hypothèses (8), nous obtenons :

$$I(t) > I(t_0 + \tau)e^{-(\mu+\gamma)(t-t_0-\tau)} > qI^*e^{-(\mu+\gamma)(t-t_0-\tau)} > qI^*e^{-(\mu+\gamma)\tau} = qI^*\nu.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe  $T^* > 0$  tel que  $I(t) > q\nu I^*$  pour  $t_0 < t < t_0 + \tau + T^*$ ,

$I(t_0 + \tau + T^*) = qI^*\nu$ , et  $\dot{I}(t_0 + \tau + T^*) < 0$ .

De plus, à partir de l'équation de  $I$  dans (2) et (6), (7) nous avons pour  $t = t_0 + \tau + T^*$  :

$$\begin{aligned}
 I &\geq [\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t) - (\mu + \gamma)] q I^* \nu, \\
 &= [\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t) - (\beta_1 S^* + \beta_2 V^*)] q I^* \nu, \\
 &> [\beta_1 (S\rho - S^*) + \beta_2 (V\rho - V^*)] q I^* \nu, \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Ce qui contredit  $\dot{I}(t_0 + \tau + T^*) < 0$ . Ainsi,  $I(t) \geq q I^* \nu$  pour  $t \in [t_0, t_1]$ . Il est important de mentionner que cet intervalle est considéré de manière arbitraire et nous déduisons que  $I(t) \geq q I^* \nu$  pour tout  $t$  grand dans le Cas 2. Ainsi, nous déduisons que :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq q I^* \nu.$$

En utilisant le fait que  $0 < q < 1$  est choisi de manière arbitraire, nous considérons que  $q \rightarrow 1$ , donc nous obtenons :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq I^* \nu.$$



# Chapitre 4

## La stabilité asymptotique globale du PE

*Nous considérons la fonctionnelle Lyapunov [6]*

$$w(t) = S^* H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + V^* H\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) + I^* H\left(\frac{I(t)}{I^*}\right),$$

où  $H(y) = y - 1 - \ln(y)$ . Ici, nous utilisons la notation  $w'_{(1)}(t)$  pour la dérivée de la fonction de Lyapunov  $w(t)$  par rapport aux variables du système (1) et  $w'_{(3)}(t)$  pour la dérivée de la fonction  $w(t)$  par rapport aux variables de (3), où nous déterminerons la fonction de Lyapunov correspondante à (3) en utilisant la fonction de Lyapunov pour (1). Tout d'abord, nous calculons  $w'_{(1)}(t)$  dans la sous-section suivante.

### 4.1 Fonction de Lyapunov pour le modèle (1)

Pour calculer  $w'_{(1)}(t)$ , nous devons d'abord dériver chaque terme de  $w(t)$ .

$$S^* H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) = S^* \left(\frac{S(t)}{S^*} - 1 - \ln\left(\frac{S(t)}{S^*}\right)\right)$$

$$V^* H\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) = V^* \left(\frac{V(t)}{V^*} - 1 - \ln\left(\frac{V(t)}{V^*}\right)\right)$$

$$I^* H\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) = I^* \left(\frac{I(t)}{I^*} - 1 - \ln\left(\frac{I(t)}{I^*}\right)\right)$$

Utilisons la règle de dérivation pour chaque terme. Par exemple, pour  $S$  :

$$\frac{d}{dt} \left( S^* \left( \frac{S(t)}{S^*} - 1 - \ln\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) \right) \right) = S^* \left( \frac{1}{S^*} \frac{dS(t)}{dt} - \frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} \right)$$

Simplifiant, nous obtenons :

$$S^* \left( \frac{1}{S^*} - \frac{1}{S(t)} \right) \frac{dS(t)}{dt} = \left( 1 - \frac{S^*}{S(t)} \right) \frac{dS(t)}{dt}$$

Appliquons cela aux trois termes  $S$ ,  $V$  et  $I$  :

$$w'_{(1)}(t) = \left( 1 - \frac{S^*}{S(t)} \right) \frac{dS(t)}{dt} + \left( 1 - \frac{V^*}{V(t)} \right) \frac{dV(t)}{dt} + \left( 1 - \frac{I^*}{I(t)} \right) \frac{dI(t)}{dt}$$

Pour substituer les dérivées de  $S(t)$ ,  $V(t)$ , et  $I(t)$ , utilisons les équations différentielles du modèle SVIR :

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta_1 S(t) I(t) - \mu S(t) - \alpha S(t)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \alpha S(t) - \beta_2 V(t) I(t) - (\gamma_1 + \mu) V(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I(t) - (\gamma + \mu)I(t)$$

Substituons ces expressions dans notre dérivée de  $w(t)$  :

$$\begin{aligned} w'_{(1)}(t) &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (\Lambda - \beta_1 S(t)I(t) - \mu S(t) - \alpha S(t)) \\ &+ \left(1 - \frac{V^*}{V(t)}\right) (\alpha S(t) - \beta_2 V(t)I(t) - (\gamma_1 + \mu)V(t)) \\ &+ \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) ((\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I(t) - (\gamma + \mu)I(t)) \end{aligned}$$

En regroupant les termes similaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned} w'_{(1)}(t) &= (\Lambda - \mu S(t) - \alpha S(t)) - \frac{S^*}{S(t)}\Lambda + \frac{S^*}{S(t)}\mu S(t) + \frac{S^*}{S(t)}\alpha S(t) \\ &+ (\alpha S(t) - \beta_2 V(t)I(t) - (\gamma_1 + \mu)V(t)) - \frac{V^*}{V(t)}\alpha S(t) + \frac{V^*}{V(t)}\beta_2 V(t)I(t) + \frac{V^*}{V(t)}(\gamma_1 + \mu)V(t) \\ &+ ((\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I(t) - (\gamma + \mu)I(t)) - \frac{I^*}{I(t)}(\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 V(t)I(t) - (\gamma + \mu)I(t)). \end{aligned}$$

Cela peut être réécrit en groupant les coefficients des termes :

$$\begin{aligned} w'_{(1)}(t) &= \Lambda - \mu S(t) - \alpha S(t) + \frac{S^*}{S(t)}\mu S(t) + \frac{S^*}{S(t)}\alpha S(t) - \frac{S^*}{S(t)}\Lambda \\ &+ \alpha S(t) - \beta_2 V(t)I(t) - (\gamma_1 + \mu)V(t) + \frac{V^*}{V(t)}\beta_2 V(t)I(t) + \frac{V^*}{V(t)}(\gamma_1 + \mu)V(t) - \frac{V^*}{V(t)}\alpha S(t) \\ &+ (\beta_1 S(t) + \beta_2 V(t))I(t) - (\gamma + \mu)I(t) - \frac{I^*}{I(t)}(\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 V(t)I(t) - (\gamma + \mu)I(t)). \end{aligned}$$

En simplifiant encore, nous obtenons l'expression finale :

$$\begin{aligned} w'_{(1)}(t) &= \Lambda - \mu S - (\mu + \gamma_1)V - (\mu + \gamma)I - \frac{S^*}{S}\Lambda + \beta_1 S^* I + \mu S^* + \alpha S^* \\ &\quad - \alpha S \frac{V^*}{V} + \beta_2 V^* I + (\mu + \gamma_1)V^* - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^* + (\mu + \gamma)I^*. \end{aligned}$$

Nous utilisons les relations d'équilibre suivantes :

$$(\mu + \gamma_1) = \frac{\alpha S^* - \beta_2 V^* I^*}{V^*},$$

$$(\mu + \gamma) = \beta_1 S^* + \beta_2 V^*,$$

$$\Lambda = \beta_1 S^* I^* + (\alpha + \mu)S^*$$

Ces relations permettent de simplifier les expressions pour les dérivées des compartiments au point d'équilibre. Nous reprenons l'expression de  $w'(t)$  obtenue précédemment :

$$\begin{aligned} w'_1(t) &= \Lambda - \mu S - (\mu + \gamma_1)V - (\mu + \gamma)I - \frac{S^*}{S}\Lambda + \beta_1 S^* I^* + \mu S^* + \alpha S^* \\ &\quad - \alpha S \frac{V^*}{V} + \beta_2 V^* I + (\mu + \gamma_1)V^* - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^* + (\mu + \gamma)I^*. \end{aligned}$$

En utilisant les relations d'équilibre, nous pouvons remplacer  $(\mu + \gamma_1)$  et  $(\mu + \gamma)$  dans l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} w'_1(t) &= \Lambda - \mu S - \left( \frac{\alpha S^* - \beta_2 V^* I^*}{V^*} \right) V - (\beta_1 S^* + \beta_2 V^*) I - \frac{S^*}{S} \Lambda \\ &\quad + \beta_1 S^* I^* + \mu S^* + \alpha S^* - \alpha S \frac{V^*}{V} + \beta_2 V^* I + \left( \frac{\alpha S^* - \beta_2 V^* I^*}{V^*} \right) V^* \\ &\quad - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^* + (\beta_1 S^* + \beta_2 V^*) I^*. \end{aligned}$$

En regroupant les termes et simplifiant, nous obtenons :

$$w'_1(t) = \Lambda - \mu S - \alpha S^* \frac{V}{V^*} - \frac{S^*}{S}(\mu S^* + \alpha S^*) + \alpha S^* - \alpha S \frac{V^*}{V} - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^*.$$

En simplifiant, nous obtenons l'expression finale :

$$w'_1(t) = 2\Lambda - \mu S - \alpha S^* \frac{V}{V^*} - \frac{S^*}{S}(\mu S^* + \alpha S^*) + \alpha S^* - \alpha S \frac{V^*}{V} - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^*.$$

En utilisant le fait que  $\Lambda = \beta_1 S^* I^* - (\alpha + \mu) S^*$ , nous substituons  $\Lambda$  dans  $w'(1)(t)$  :

$$w'_1(t) = 2(\beta_1 S^* I^* - (\alpha + \mu) S^*) - \mu S - \alpha S^* \frac{V}{V^*} - \frac{S^*}{S}(\mu S^* + \alpha S^*) + \alpha S^* - \alpha S \frac{V^*}{V} - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^*$$

En simplifiant les termes, nous obtenons :

$$w'_1(t) = 2\beta_1 S^* I^* - 2(\alpha + \mu) S^* - \mu S - \alpha S^* \frac{V}{V^*} - \frac{S^*}{S}(\mu S^* + \alpha S^*) + \alpha S^* - \alpha S \frac{V^*}{V} - \beta_1 S I^* - \beta_2 V I^*$$

Nous simplifions les termes pour obtenir l'expression finale :

$$w'_1(t) = -(\mu S^* + \beta_1 S^* I^*) \left( \frac{S}{S^*} + \frac{S^*}{S} - 2 \right) - \alpha S^* \left( \frac{V}{V^*} + \frac{S^*}{S} + \frac{S V^*}{S^* V} - 3 \right)$$

En utilisant le Lemma 1.1, nous obtenons :

$$w'_{(1)}(t) = -(\mu S^* + \beta_1 S^* I^*) \left( H \left( \frac{S}{S^*} \right) + H \left( \frac{S^*}{S} \right) \right) - \alpha S^* \left( H \left( \frac{V}{V^*} \right) + H \left( \frac{S^*}{S} \right) + H \left( \frac{S V^*}{S^* V} \right) \right) \leq 0.$$

Conditions à vérifier pour la fonction de Lyapunov :

**Positivité de  $w_{(1)}(t)$**  : La fonction  $w_{(1)}(t)$  est définie comme :

$$w_{(1)}(t) = S^* H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + V^* H\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) + I^* H\left(\frac{I(t)}{I^*}\right)$$

où  $H(y) = y - 1 - \ln(y)$ . Pour que  $w_{(1)}(t)$  soit positive : La fonction  $H(y)$  est toujours positive ou nulle pour  $y > 0$ . Donc,  $w_{(1)}(t)$  est toujours positive ou nulle, ce qui signifie que  $w_{(1)}(t) \geq 0$ .

**Nullité de  $w_{(1)}(t)$**  : à l'équilibre,  $S(t) = S^*$ ,  $V(t) = V^*$ , et  $I(t) = I^*$ . En remplaçant ces valeurs dans  $w_{(1)}(t)$ , on obtient :

$$w_{(1)}(t) = S^* H(1) + V^* H(1) + I^* H(1) = 0$$

Donc,  $w_{(1)}(t) = 0$  lorsque le système est à l'équilibre.

**Décroissance de  $w_{(1)}(t)$**  : On a montré que  $w'_{(1)}(t)$  est négative :

$$w'_{(1)}(t) = -(\mu S^* + \beta_1 S^* I^*) \left( H\left(\frac{S}{S^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) \right) - \alpha S^* \left( H\left(\frac{V}{V^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) + H\left(\frac{S V^*}{S^* V}\right) \right) \leq 0.$$

### 4.1 Fonction de Lyapunov pour le modèle (3)

Nous considérons la fonction  $W = w_{(3)}(t) + (\beta_1 S^* I^* + \beta_2 V^* I^*) \tilde{w}$ ,

où  $\tilde{w} = \int_0^\tau \alpha(s) H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds$ , et  $\alpha(s) = \int_s^\tau f(\sigma) d\sigma$

$$w'_{(3)}(t) = w'_{(1)}(t) - \frac{\partial w}{\partial S} G_1 - \frac{\partial w}{\partial V} G_2 + \frac{\partial w}{\partial I} (G_1 + G_2).$$

tel que :

$$G_1 = \beta_1 S \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_1 S I$$

$$G_2 = \beta_2 V \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_2 V I$$

La fonction  $w(t)$  est définie comme suit :

$$w(t) = S^* H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + V^* H\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) + I^* H\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) \quad \text{où} \quad H(y) = y - 1 - \ln(y)$$

Les dérivées partielles de  $w$  sont :

$$\frac{\partial w}{\partial S} = 1 - \frac{S^*}{S(t)} \quad \frac{\partial w}{\partial V} = 1 - \frac{V^*}{V(t)} \quad \frac{\partial w}{\partial I} = 1 - \frac{I^*}{I(t)}$$

En remplaçant  $G_1$  et  $G_2$  dans l'équation précédente et les dérivées partielles, nous obtenons :

$$\begin{aligned} w'_{(3)}(t) &= w'_{(1)}(t) - \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(\beta_1 S \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_1 S I\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \left(\beta_2 V \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_2 V I\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\beta_1 S \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds + \beta_2 V \int_0^\tau f(s) I(t-s) ds - \beta_1 S I - \beta_2 V I\right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\int_0^\tau f(s)ds = 1$ , les formules précédentes peuvent être réécrites comme

suit :

$$\begin{aligned} w'_{(3)}(t) = w''_{(1)}(t) - \int_0^\tau f(s) & \left[ \beta_1 S^* I^* \left( 1 - \frac{S^*}{S} \right) \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} - \frac{SI}{S^* I^*} \right) \right. \\ & - \beta_2 V^* I^* \left( 1 - \frac{V^*}{V} \right) \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} - \frac{VI}{V^* I^*} \right) \\ & + \beta_1 S^* I^* \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} + \frac{SI}{S^* I^*} \right) \\ & \left. + \beta_2 V^* I^* \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} + \frac{VI}{V^* I^*} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.2, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{S^*}{S} \right) \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} - \frac{SI}{S^* I^*} \right) &= H \left( \frac{S^* I^*}{SI(t-s)} \right) - H \left( \frac{S^* I^*}{SI} \right) - H \left( \frac{I^*}{I(t-s)} \right) + H \left( \frac{I^*}{I} \right) \\ \left( 1 - \frac{V^*}{V} \right) \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} - \frac{VI}{V^* I^*} \right) &= H \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{VI}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{I(t-s)}{I^*} \right) + H \left( \frac{I}{I^*} \right) \\ \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} + \frac{SI}{S^* I^*} \right) &= H \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} \right) - H \left( \frac{SI}{S^* I^*} \right) - H \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I} \right) + H \left( \frac{S}{S^*} \right) \\ \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} + \frac{VI}{V^* I^*} \right) &= H \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{VI}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I} \right) + H \left( \frac{V}{V^*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_{(3)}(t) = w'_{(1)}(t) + \int_0^\tau f(s) & \left[ \right. \\ & - \beta_1 S^* I^* \left( H \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} \right) - H \left( \frac{SI}{S^* I^*} \right) - H \left( \frac{I(t-s)}{I^*} \right) + H \left( \frac{I}{I^*} \right) \right) \\ & - \beta_2 V^* I^* \left( H \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{VI}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{I(t-s)}{I^*} \right) + H \left( \frac{I}{I^*} \right) \right) \\ & + \beta_1 S^* I^* \left( H \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I^*} \right) - H \left( \frac{SI}{S^* I^*} \right) - H \left( \frac{SI(t-s)}{S^* I} \right) + H \left( \frac{S}{S^*} \right) \right) \\ & + \beta_2 V^* I^* \left( H \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{VI}{V^* I^*} \right) - H \left( \frac{VI(t-s)}{V^* I} \right) + H \left( \frac{V}{V^*} \right) \right) \\ & \left. \right] ds \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned}
w'_{(3)}(t) = w'_{(1)}(t) + \int_0^\tau f(s) & \left[ -(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 V^* I^*) \left( H\left(\frac{I}{I^*}\right) - H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) \right) \right. \\
& - \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{SI(t-s)}{S^* I}\right) - \beta_2 I^* V^* H\left(\frac{VI(t-s)}{V^* I}\right) \\
& \left. + \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{S}{S^*}\right) + \beta_2 I^* V^* H\left(\frac{V}{V^*}\right) \right] ds
\end{aligned}$$

Maintenant, nous remplaçons la valeur de  $w'_{(2)}(t)$  dans l'équation précédente et en utilisant le fait que  $\int_0^\tau f(s)ds = 1$  (où les deux derniers termes positifs de l'équation précédente seront simplifiés avec les termes négatifs de  $w'_{(1)}(t)$ ), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
w'_{(3)}(t) = \int_0^\tau f(s) & \left[ -(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 V^* I^*) \left( H\left(\frac{I}{I^*}\right) - H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) \right) \right. \\
& - \mu S^* \left( H\left(\frac{S}{S^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) \right) \\
& - \beta_1 S^* I^* \left( H\left(\frac{S}{S^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) \right) \\
& - \alpha S^* \left( H\left(\frac{V}{V^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) + H\left(\frac{SV^*}{S^* V}\right) \right) \\
& - \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{SI(t-s)}{S^* I}\right) - \beta_2 I^* V^* H\left(\frac{VI(t-s)}{V^* I}\right) \\
& \left. + \beta_1 I^* S^* H\left(\frac{S}{S^*}\right) + \beta_2 V^* I^* H\left(\frac{V}{V^*}\right) \right] ds
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que  $\beta_2 I^* V^* H\left(\frac{V}{V^*}\right) = (\alpha S^* - (\mu + \gamma_1) V^*) H\left(\frac{V}{V^*}\right)$  et en effectuant quelques

simplifications, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
w'_{(3)}(t) = & \int_0^\tau f(s) \left[ -(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 V^* I^*) \left( H\left(\frac{I}{I^*}\right) - H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) \right) \right. \\
& - \mu S^* \left( H\left(\frac{S}{S^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) \right) - \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{S^*}{S}\right) \\
& - \alpha S^* \left( H\left(\frac{S^*}{S}\right) + H\left(\frac{SV^*}{S^*V}\right) \right) - \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{SI(t-s)}{S^*I}\right) \\
& \left. - \beta_2 I^* V^* H\left(\frac{VI(t-s)}{V^*I}\right) \right] ds.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Maintenant, nous calculons la dérivée temporelle de  $\tilde{w}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{w} &= \frac{d}{dt} \int_0^\tau \alpha(s) H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds \\
&= \int_0^\tau \alpha(s) \frac{d}{dt} H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds \\
&= - \int_0^\tau \alpha(s) \frac{d}{ds} H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds.
\end{aligned}$$

L'intégration par parties donne :

$$\frac{d}{dt} \tilde{w} = [-\alpha(s)]_{s=0}^\tau + \int_0^\tau \frac{d}{ds} \alpha(s) H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds. \tag{4.2}$$

Évidemment,

$$\alpha(\tau) = 0, \text{ et } \alpha(0) = \int_0^\tau f(s) ds.$$

De plus,

$$\frac{d}{ds} \alpha(s) = -f(s).$$

En substituant ces résultats dans (4.2), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \tilde{w} = \int_0^\tau f(s) ds H\left(\frac{I}{I^*}\right) - \int_0^\tau f(s) H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds.$$

qui est exprimé comme :

$$\frac{d}{dt}\tilde{w} = \int_0^\tau f(s) \left( H\left(\frac{I}{I^*}\right) - H\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) \right) ds \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W &= -\mu S^* \left( H\left(\frac{S}{S^*}\right) + H\left(\frac{S^*}{S}\right) \right) - \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{S^*}{S}\right) \\ &\quad - \alpha S^* \left( H\left(\frac{S^*}{S}\right) + H\left(\frac{SV^*}{S^*V}\right) \right) \\ &\quad - \int_0^\tau f(s) \left[ \beta_1 S^* I^* H\left(\frac{SI(t-s)}{S^*I}\right) + \beta_2 I^* V^* H\left(\frac{VI(t-s)}{V^*I}\right) \right] ds \leq 0. \end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 2.1, nous prouvons la stabilité asymptotique globale (GAS) du PE.



# Chapitre 5

## Simulations numériques

Le comportement global de la solution de (2) (ou (3)), avec les valeurs suivantes  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.011$ ,  $\beta_2 = 0.011$ ,  $\gamma_1 = 0.3$ ,  $\tau = 20$ , et  $f(s) = e^{-s}/(1 - e^{-\tau})$ , et les conditions initiales  $S(t) = 7 + 0.5 \cos(0.3t)$ ,  $V(t) = 6 + 0.7 \cos(0.5t)$ ,  $I(t) = 5 + 0.2 \cos(0.9t)$ , pour  $t \in [-\tau, 0]$  où :

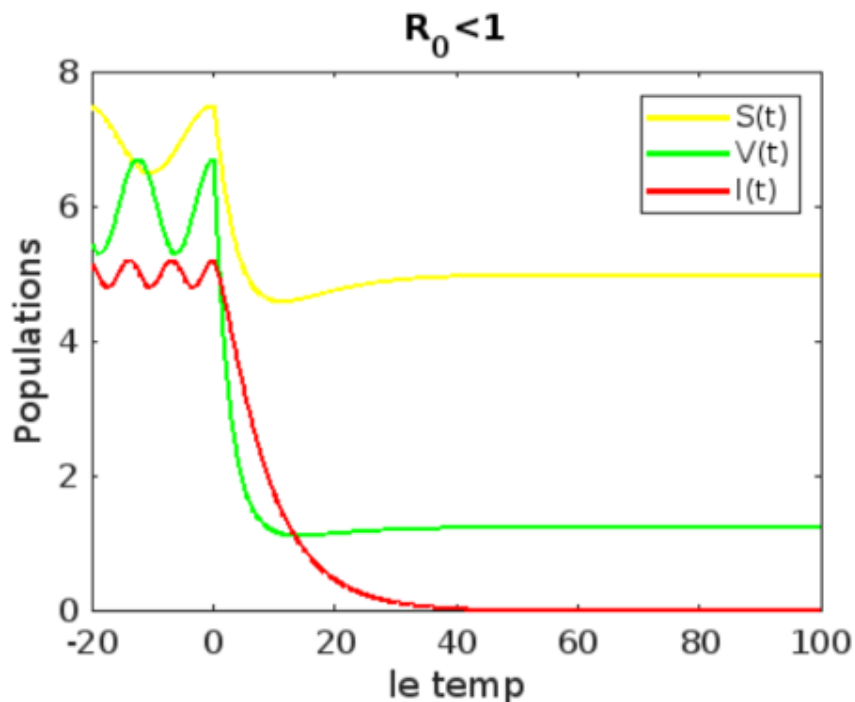


Fig1 :  $\Lambda = 1$  et nous avons  $R_0 = 0.68$  et nous obtenons la stabilité globale du l'DFE.

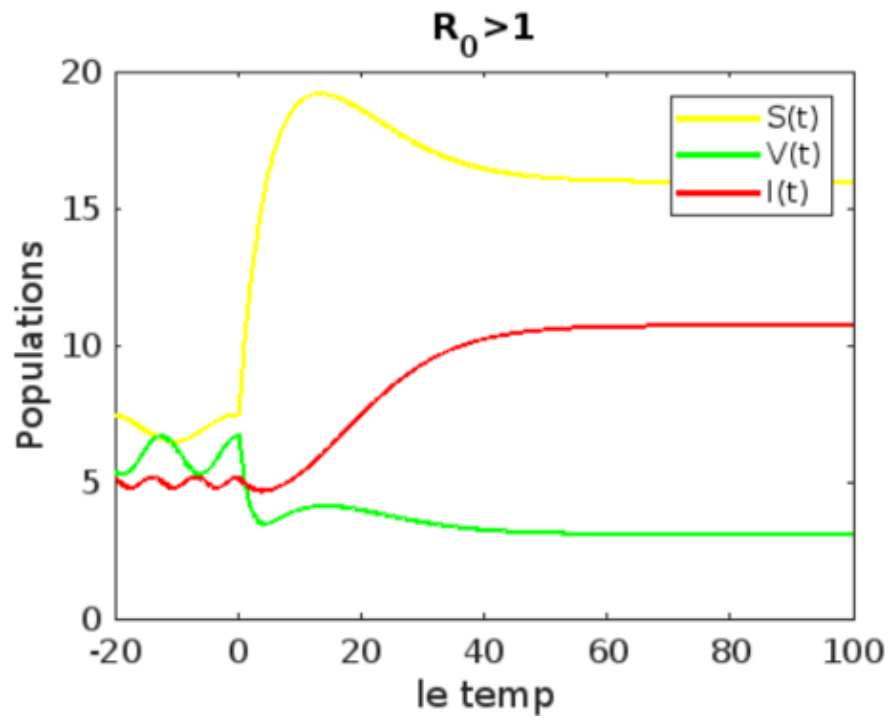


Fig2 :  $\Lambda = 5$  et nous avons  $R_0 = 1.71$  et nous obtenons la stabilité globale du l'PE.

# Chapitre 6

## Conclusion

*Dans cette étude, on a exploré un modèle à retard distribué [3] construit à partir du modèle de Lui et all [5] on a mis en exergue différents points comment le retard distribué , également appelé retard faible, qui influence la construction de la fonction de Lyapunov par rapport au modèle EDO (1). Dans la partie initiale, nous avons confirmé la cohérence du système analysé (2). Dans la section "Stabilité globale du DFE", en utilisant l'approche de Lyapunov, on a vu que l'attracteur compact est formé par le DFE  $E_0$ , garantissant ainsi la stabilité asymptotique globale de cet équilibre lorsque  $R_0 < 1$ . Pour  $R_0 > 1$ , la persistance uniforme de la solution, traduit par :*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq \nu I^*,$$

*est essentielle pour assurer la cohérence de la fonction de Lyapunov pour le PE. Enfin, dans la dernière partie, on a vu comment exprimer la fonction de Lyapunov pour le système (3) par rapport à celle du système EDO (1), révélant que le retard génère des termes positifs supplémentaires qui compliquent la vérification des propriétés de la fonction de Lyapunov ( $\dot{w} \leq 0$ ). un terme supplémentaire a été introduit  $\tilde{w}$  pour obtenir les résultats souhaités, et on*

*a constaté que l'attracteur compact global  $\mathcal{D}$  est formé de  $E^*$ . Enfin, on a terminé par des simulations numériques qui attestent des résultats démontrés.*

**Résumé :** Dans cette recherche, nous étudions un système SVIR avec retard distribué. Nous fournissons d'abord des résultats préliminaires sur les propriétés de la fonction de Volterra et la bien-possession de la solution, ainsi que l'existence d'un attracteur compact global noté  $\mathcal{A}$ . Ensuite, nous déterminons en détail le comportement global de la solution, caractérisé dans deux cas différents en fonction du nombre de reproduction de base  $R_0$ . Pour  $R_0 < 1$ , nous utilisons une fonction de Lyapunov appropriée pour montrer la stabilité globale, et nous affirmons que  $\mathcal{A}$  se réduit à l'équilibre sans maladie en utilisant les propriétés des ensembles de limite  $\alpha$  et  $w$ . Pour  $R_0 > 1$ , nous prouvons la persistance uniforme.

**Abstract :** In this research, we investigate an SVIR system with distributed delay. We first provide some preliminary results on the properties of the Volterra function and the well-posedness of the solution, as well as the existence of a global compact attractor denoted as  $\mathcal{A}$ . Next, we delve into the detailed global behavior of the solution, characterized in two different cases based on the basic reproduction number  $R_0$ . For  $R_0 < 1$ , we utilize an appropriate Lyapunov function to demonstrate global stability, asserting that  $\mathcal{A}$  reduces to the disease-free equilibrium using the properties of the  $\alpha$ -limit and  $w$ -limit sets. For  $R_0 > 1$ , we establish uniform persistence.



# Bibliographie

- [1] BÉREPAIRE, JACQUES, *Stabilité dans un modèle de réseau de neurones retardé* *Stabilité dans un modèle de réseau de neurones retardé. Journal de dynamique et d'équations différentielles*, 1993, 607-623 .
- [2] C CONNELL, MCCLUSKEY, *Using Lyapunov functions to construct Lyapunov functionals for delay differential equations* *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2015, 1-24, 14 .
- [3] L HAL . SMITH, R HORST . THIEME, *Systèmes dynamiques et persistance de la population* *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2011, 118 .
- [4] S BENTOUT, Y CHEN, S DJILALI, *Dynamique globale d'un modèle SEIR avec deux structures d'âge et une incidence non linéaire* *Acta Applicandae Mathematicae*, 2021, 7, 171 .
- [5] S DJILALI, S BENTOUT, *Global dynamics of SVIR epidemic model with distributed delay and imperfect vaccine* *Results in Physics*, 2021, 104245, 25 .
- [6] S DJILALI, T M TOUAOULA, S EL-HADI MIRI, *Un modèle d'épidémie d'héroïne : incidence non linéaire très générale, âge traité et stabilité globale* *Acta Applicandae Mathematicae*, 2017, 171-194,152.