République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

présenté par

BOUKHARI Loubna

Soutenu le : 22 juin 2024

Thème

Existence des Solutions Positives Pour Deux Problèmes Elliptiques Par La méthode Variationnelle et celle des Sous et Sur solutions

---

Soutenu devant le jury composé de

Mme Naima MERZAGUI	Professeur Université de Tlemcen	Présidente
Mme Aicha BENCHAIB	M.C.B Université de Tlemcen	Examinatrice
M. Ahmed BENSEDIK	M.C.A Université de Tlemcen	Encadrant

Année universitaire : 2023 - 2024

Remerciements

Tout d'abord, louange à Allah pour tous ses bienfaits innombrables.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon encadrant M. A. Bensedik, pour son aide, sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise, la réalisation de ce modeste travail n'aurait pas été possible.

Je tiens à remercier vivement Mme N. Merzagui pour l'honneur qu'elle m'a fait en présidant le jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Mme A. Benchaib qui a accepté d'examiner ce travail.

Je remercie plus particulièrement mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

Mes chers parents

Mon frère Mohamed El Amine

Ma sœur Zahra, son mari et leurs filles Lilya et Nada

Ma sœur Zineb

Et à ma famille et mes amis

Table des matières

INTRODUCTION

Le présent mémoire a pour objet l'étude de deux problèmes elliptiques. Le premier est caractérisé par la présence de deux termes l'un convexe et l'autre concave. Quant au deuxième, il contient le gradient de l'inconnue, ce qui rend, dans ce cas particulier, la méthode variationnelle inopérante.
Rappelons que les équations elliptiques modélisent des phénomènes physiques, biologiques ou plus généralement naturels ne dépendant pas du temps.
Soit par exemple une boule B conductrice, dont le potentiel p de sa frontière S est connu. Si on veut déterminer le potentiel u en tout point x à l'intérieur de la boule il suffit de résoudre le problème elliptique de Laplace suivant :

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in B; \quad u(s) = p(s), \quad s \in S.$$

C'est un petit exemple d'illustration.
Revenons aux problèmes sus-cités.
Concernant le premier problème, il s'agit de prouver, sous certaines hypothèses plus au moins restrictives, l'existence d'au moins une solution positive. En combinant les méthodes variationnelle et celle de sous et sur solutions en plus du principe du maximum les résultats d'existence sont établis.
Pour le deuxième problème où le gradient de l'inconnue a fait obstacle à l'application de la méthode variationnelle, ce dernier a été remplacé par le gradient d'une fonction paramètre. Pour ce problème paramétré ayant une structure variationnelle, l'existence de solutions est démontrée en utilisant le théorème du col appuyé par une condition d'Ambrosetti-Rabinowitz. Ensuite par une méthode itérative, l'existence de la solution du problème de départ est démontrée.
Ce mémoire constitue une introduction à la recherche. Son but est de tirer au maximum, des articles de sa base [16] et [9], les techniques de calcul et d'analyse en plus de l'application des notions étudiées durant la formation de master.
Le premier chapitre de ce mémoire, est dédié aux préliminaires et aux différents résultats utilisés. Le deuxième traite un problème elliptique avec des termes concave et convexe. Enfin le dernier chapitre est consacré à l'application de la méthode variationnelle à un problème contenant le gradient de l'inconnue.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1. *[4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$*

1. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$, on note par $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

$\|.\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

2. *Si $p = +\infty$, on note par $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{\alpha > 0 : |f(x)| \leqslant \alpha \quad p.p \ sur \quad \Omega\} < +\infty$$

$\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$ est une norme sur $L^\infty(\Omega)$.

Notation. *L'espace dual de $L^p(\Omega)$ est noté par $L^{p'}(\Omega)$, où p' est le conjugué de p ie : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder)**.** *[4] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} . \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Définition 1.2. *[4] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\}$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad pour\ 1 \leqslant p < +\infty.$$

Si $p = \infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Pour $p = 2$, on note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\big(u, v\big)_{H^1(\Omega)} = \big(u, v\big)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Définition 1.3. *Soit $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans*

$W^{1,p}(\Omega)$ c-à-d

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}}.$$

Pour $p = 2$, on note $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Notation. *On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Définition 1.4 (Espace réflexif)**.** *Soit E un espace de Banach et E'' son bidual et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Remarque 1.1. *La fonction $J : E \to E''$ est définie de la manière suivante pour x fixé dans E, on pose $J_x(f) = \langle f, x\rangle$ où $f \in E'$ c-à-d J est définie par*

$$\langle Jx, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}$$

J ainsi définie est une isométrie linéaire c-à-d $\forall x \in E : \|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$.

Proposition 1.1. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace*

1. *de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*
2. *séparable pour $1 \leqslant p < \infty$,*
3. *réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.2. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E, alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in E$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ faiblement dans E.*

1.3 Espaces de Hölder

Définition 1.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $0 < \alpha \leqslant 1$.*

- *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite continue Höldérienne d'exposant α s'il existe $C > 0$ tel que*
$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha, \qquad \forall x, y \in \Omega.$$
- *On note une semi norme d'ordre α de la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ par*
$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \left\{ \tfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}.$$
- *La norme d'ordre α est donnée par*
$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Définition 1.6. *L'espace de Hölder, noté $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, est constitué des fonctions de classe $C^k(\Omega)$ pour lesquelles la norme*

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leqslant k} ||D^\alpha u||_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \qquad \text{est finie.}$$

Donc l'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constitué des fonctions $k-$fois continument différentiables et leurs dérivées partielles sont continues hölderiennes d'exposant α.

1.4 Théorèmes d'injections

Proposition 1.2 (Inégalité de Poincaré)**.** *On suppose que Ω est borné. Alors, il existe une constante positive $C\big($ne dépendant que de $\Omega\big)$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.3 (Inégalité de Sobolev)**.** *[4] Soit $1 \leqslant p < N$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Corollaire 1.1. *Soit $1 \leqslant p < N$. Alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*],$$

avec injection continue.

Théorème 1.4 (Rellich-Kondrachov)**.** *[4]*
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Alors on a les injections compactes suivantes

1. *si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ où $p^* = \frac{Np}{N-p}$,*
2. *si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$,*
3. *si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.*

Remarque 1.2. *Les résultats ci-dessus restent vrais si on remplace $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.5. *[10] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On Suppose que sa frontière $\partial\Omega$ est de classe C^1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $N < p \leqslant \infty$, alors $u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ où $\gamma = 1 - \frac{N}{p}$ et on a*

$$||u||_{C^{0\gamma}(\bar{\Omega})} \leqslant C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

où C est une constante positive ne dépendant que de p, N et Ω.

Théorème 1.6. *[10] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière $\partial\Omega$ de classe C^1, et soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$, alors ;*

1. *Si $k < \frac{N}{p}$ alors $u \in L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$, et on a*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leqslant C||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$$

où $C = C(k, p, N, \Omega)$

2. *si $k > \frac{N}{p}$ alors $u \in C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\gamma}(\bar{\Omega})$ où*

$$\gamma = [\frac{N}{p}] + 1 - \frac{N}{p} \quad si \quad \frac{N}{p} \notin \mathbb{N}, \quad ou \quad \gamma \in]0, 1[\quad arbitraire\ si \quad \frac{N}{p} \in \mathbb{N}$$

et on a

$$||u||_{C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\gamma}(\bar{\Omega})} \leqslant C||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$$

où $C = C(k, p, N, \gamma, \Omega)$.

1.5 Formules de Green

Théorème 1.7 (Théorème de la divergence)**.**
Soit $w = (w_1, w_2, ..., w_N)$ un champ de vecteurs tel que $w_i \in C^1(\bar{\Omega}), i = 1, ..., N$. Alors

$$\int_\Omega div\ w\ dx = \int_{\partial\Omega} w.\eta\ dS,$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)^T$ est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de Ω, et dS la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Corollaire 1.2. *Soit $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Alors on a les formules de Green suivantes*

$$\int_\Omega \Delta u\ dx = \int_{\partial\Omega} \eta.\nabla u\ dS.$$

$$\int_\Omega u\Delta v\ dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta}\ dS.$$

$$\int_\Omega \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\ dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\ dS.$$

1.6 Notion de solution faible

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω est un ouvert borné et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction Carathéodory.

Définition 1.7. *Une fonction u est dite solution faible du problème* (1.1) *si $u \in H_0^1(\Omega)$, et si $-\Delta u = f(x,u)$ au sens des distributions.*

Corollaire 1.3. *Une fonction u est une solution du problème* (1.1) *dans $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx. \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

1.7 Théorème de Lax-Milgram

Dans ce qui suit H désigne un espace de Hilbert, et $\|.\|$ la norme associée.

Définition 1.8. *On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

1. *continue s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u,v)| \leqslant C\|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in H,$$

2. *coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.8 (Lax-Milgram)**.** *[4]*
Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \tfrac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

1.8 Méthode de sous et sur solutions

La méthode de sous et sur solution est une technique non variationnelle pour la résolution des problèmes elliptiques, basée sur la recherche de deux fonctions, dites sous solution, et sur solution qui encadrent la solution recherchée.

Considérons le problème (1.1) ci-dessus, où $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 par rapport à la variable u.

Définition 1.9. *[10]*

i) On dit que $\underline{u}$ est une sous-solution du problème (1.1) *si*
- *pour presque tout $x \in \Omega$, $-\Delta \underline{u}(x) \leqslant f(x, \underline{u}(x))$,*
- *pour tout $x \in \partial\Omega$, $\underline{u}(x) \leqslant 0$.*

ii) On dit que $\overline{u}$ est une sur-solution de problème (1.1) *si*
- *pour presque tout $x \in \Omega$, $-\Delta \overline{u}(x) \geqslant f(x, \overline{u}(x))$,*
- *pour tout $x \in \partial\Omega$, $\overline{u}(x) \geqslant 0$.*

Exemple 1.1. *Considérons le problème en dimension* 1 *suivant*

$$\begin{cases} -u'' = u^2 \text{ dans }]0, \pi[\\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

- *Pour la sous solution, posons $\underline{u}(x) = x^2 - \pi x$. Alors*

$$-\underline{u}''(x) = -2 \leqslant (x^2 - \pi x)^2 = \underline{u}^2(x) \quad \forall x \in]0, \pi[.$$

et puisque $\underline{u}(0) = \underline{u}(\pi) = 0$, alors $\underline{u}$ est une sous-solution du problème.
- *Pour la sur solution, prenons la fonction $\bar{u}(x) = \sin x$, alors*

$$-\bar{u}''(x) = \sin(x) \geqslant \sin^2 x = \bar{u}^2(x) \quad \forall x \in]0, \pi[$$

de plus $\bar{u}(0) = \bar{u}(\pi) = 0$, donc $\bar{u}$ est une sur solution du problème.
- *Remarquons que $u \equiv 0$ est aussi une sous-solution du problème, donc s'il n'y a pas unicité alors le problème admet au moins une solution positive.*

Théorème 1.9. *[14] Soient $\underline{u}$ (resp. $\overline{u}$) une sous-solution (resp. sur-solution) du problème* (1.1) *telles que $\underline{u} \leqslant \overline{u}$ dans Ω. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites*

i) Il existe une solution u du problème (1.1) *satisfaisant $\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u}$.*

ii) Il existe une solution minimale u_{min} et une solution maximale u_{max} du problème (1.1) *dans l'intervalle $[\underline{u}, \overline{u}]$.*

Démonstration.

i) Soit $g(x, u) := f(x, u) + au$ où a est une constante réelle.
On peut choisir $a \geqslant 0$ suffisamment grand tel que $u \in \mathbb{R} \to g(x, u)$ soit croissante sur $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$ pour $x \in \Omega$. En effet, il suffit de choisir $a \geqslant 0$ tel que

$$a \geqslant \max\{-f_u(x, u); x \in \Omega, u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]\} \qquad \text{où} \quad f_u = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Pour ce choix de a nous définissons la suite de fonctions $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ comme suit :
$u_0 = \overline{u}$ et pour $n \geqslant 1, u_n$ est la solution unique du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n + a u_n = g(x, u_{n-1}) & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{p_n}$$

Montrons que

$$\underline{u} \leqslant ... \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant ... \leqslant u_0 = \overline{u}.$$

On a $u_1 \leqslant \bar{u}$. En effet, par définition de u_1, on a

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{u} - u_1) + a(\overline{u} - u_1) \geqslant g(x, \overline{u}) - g(x, \overline{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \overline{u} - u_1 \geqslant 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

comme l'opérateur $-\Delta + aI$ est coercif, il s'en suit que $\overline{u} \geqslant u_1$ dans Ω.
Pour montrer que $\underline{u} \leqslant u_1$, on remarque que $\underline{u} \leqslant 0 = u_1$ sur $\partial\Omega$, et pour $x \in \Omega$, la monotonie de g implique

$$-\Delta(\underline{u} - u_1) + a(\underline{u} - u_1) \leqslant f(x, \underline{u}) + a\underline{u} - g(x, \overline{u}) \leqslant 0.$$

Donc, par le principe de maximum, on obtient $\underline{u} \leqslant u_1$.
On montre maintenant que

$$\underline{u} \leqslant ... \leqslant u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant ... \leqslant u_0 = \overline{u}.$$

Il suffit de montrer que

$$\underline{u} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Par soustraction de (p_{n+1}) à (p_n), On obtient

$$\begin{cases} -\Delta(u_n - u_{n+1}) + a(u_n - u_{n+1}) \geqslant g(x, u_{n-1}) - g(x, u_n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n - u_{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

ce qui implique que $u_n \geqslant u_{n+1}$ dans Ω d'après le principe de maximum.
D'autre part, comme

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} + a\underline{u} = g(x, \underline{u}) & \text{dans } \Omega \\ \underline{u} \leqslant 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

et par définition de u_{n+1}, on obtient

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - \underline{u}) + a(u_{n+1} - \underline{u}) = g(x, u_n) - g(x, \underline{u}) \geqslant 0 & \text{dans } \Omega \\ u_{n+1} - \underline{u} \leqslant 0 & \text{sur} \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

On en déduit par le principe de maximum que

$$\underline{u} \leqslant u_{n+1} \quad \text{dans } \Omega.$$

Il s'ensuit que, pour chaque $x \in \Omega$ la suite $(u_n(x))$ est convergente, car elle est décroissante et bornée. Il existe donc une fonction $\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u}$ telle que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Soit $g_n(x) := g(x, u_n(x))$, on remarque que la suite (g_n) est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, et par suite dans tout $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. En passant à la limite dans (p_n) et d'après les estimations standard de Schauder la suite (u_n) est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$. Or l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans l'espace de Hölder $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{2p}$ si $p > N/2$. Donc (u_n) est bornée dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Par les estimations dans les espaces de Hölder, nous déduisons que (u_n) est bornée dans $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Et comme l'injection de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C^2(\overline{\Omega})$ est compacte, il s'en suit qu'il existe une sous-suite de (u_n), notée encore (u_n), telle que

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad C^2(\overline{\Omega}).$$

Donc, la suite (u_n) converge vers u dans $C^2(\Omega)$, puisque elle est monotone.
Par passage à la limite dans le problème (p_n) quand $n \to \infty$, on trouve que u est une solution du problème (1.1) (le premier point est démontré).

ii) On désigne par $\overline{u}$ la solution obtenue par la technique ci-dessus en choisissant $u_0 = \overline{u}$. Donc $u_{\max}$ est la solution maximale dans l'intervalle $[\underline{u}, \overline{u}]$.
En effet, soit $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ une solution arbitraire du problème. Par raisonnement analogue au précédent on obtient que $u \leqslant u_n$, pour tout n, donc $u \leqslant \overline{u}$. $\square$

1.9 Principe du maximum

Théorème 1.10. *[14] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière et $v \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} -\Delta v \geqslant 0 & dans\ \Omega \\ v \geqslant 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $v \geqslant 0$ dans $\bar{\Omega}$, et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) > 0$ alors $v > 0$ dans Ω.

Corollaire 1.4. *Soient $v, w \in H_0^1(\Omega)$ telles que*

$$\begin{cases} -\Delta v \geqslant -\Delta w & dans\ \Omega \\ v \geqslant w & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $v \geqslant w$ dans $\bar{\Omega}$ et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) > w(x_0)$ alors $v > w$ dans Ω.

1.10 Méthode Variationnelle

La méthode variationnelle est utilisée pour trouver les points critiques d'une fonctionnelle, ces points correspondent souvent aux solutions de l'équation différentielle associée à cette fonctionnelle.

Dans cette section, E est un espace de Banach, $V \subset E$ ouvert et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 sur V.

Définition 1.10. *On dit que $u_0 \in V$ est un point critique de J si $J'(u_0) = 0$. Dans ce cas $c = J(u_0)$ $(c \in \mathbb{R})$ est dite valeur critique de J.*
Si u_0 n'est pas un point critique, on dit que u_0 est un point régulier de J et c une valeur régulière de J.

Proposition 1.3. *Si $J : E \to \mathbb{R}$ admet un minimum relatif au point $u \in V$, et si J est différentiable au point u alors u est un point critique de J.*

Définition 1.11. *Soit $(u_n)_n$ une suite de E. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Palais-Smale au niveau c pour J noté $(PS)_c$, si*

$$|J(u_n)| \to c \quad et \quad \|J'(u_n)\|_{E'} \to 0, E' \text{ est le dual de } E.$$

Définition 1.12 (La condition de Palais-Smale)**.** *Soient E un espace de Banach, et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Soit $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite de $(PS)_c$ admet une sous-suite convergente dans E, c.à.d si $(u_n)_n \subset E$ vérifie*

$$|J(u_n)| \to c \quad et \quad \|J'(u_n)\|_{E'} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

alors il existe une sous-suite (u_{n_k}) *qui converge vers* $u \in E$.

Théorème 1.11. *[12] Supposons que la fonctionnelle* J *vérifie la condition de Palais-Smale au niveau* c *et que :*

i) $J(0) = 0$,

ii) il existe $\rho > 0$ *et* $a > 0$ *tels que si* $\|u\| = \rho$, *alors* $J(u) \geqslant a$,

iii) il existe $u_0 \in E$ *tel que* $\|u_0\| > \rho$ *et* $J(u_0) < a$.

Alors J *admet une valeur critique* c *telle que* $c \geqslant a$. *De façon plus précise, si on pose*

$$\varGamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\},$$

et

$$c = \inf_{\gamma \in \varGamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)).$$

Alors c *est une valeur critique de* J.

1.11 Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.13. *On dit que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de l'opérateur* $(-\Delta)$ *s'il existe* $\phi \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ *telle que* $-\Delta\phi = \lambda\phi$ *dans* Ω.

Théorème 1.12.
- *Les valeurs propres de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ *sont réelles.*
- *Ces valeurs propres constituent une suite croissante,*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant ...,$$

et

$$\lambda_k \to +\infty \quad \textit{quand} \quad k \to +\infty.$$

- *Il existe une base orthogonale* $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $L^2(\Omega)$, *où* $\phi_k \in H_0^1(\Omega)$ *est une fonction propre associée à* λ_k *i.e*

$$-\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k \quad \textit{dans } \Omega, \qquad \textit{pour} \quad k = 1, 2, ...$$

Théorème 1.13. *On a*

$$\lambda_1 := \lambda_1(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx; u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx = 1 \right\}.$$

Théorème 1.14 (Caractérisation variationnelle de la première valeur propre)**.** *[15] Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose*

$$Q(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}.$$

Q est appelé le quotient de Rayleigh.
Soit

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1} Q(u),$$

alors $\lambda_1 > 0$ et λ_1 est la plus petite valeur propre du Laplacien.

1.12 Résultat de l'existence de solutions pour un problème elliptique avec un terme concave

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x) u^p & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, à frontière régulière et $0 < p < 1$.
Ce problème a été considéré dans [7] pour un cas plus général où le membre de droite est de la forme $f(x,u)$ avec f une fonction vérifiant les hypothèses suivantes

- La fonction $u \mapsto f(x,u)$ est continue sur $[0, +\infty[$, pour presque tout $x \in \Omega$.
- La fonction $u \mapsto f(x,u)u^{-1}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, pour presque tout $x \in \Omega$.
- Pour tout $u \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,u)$ est bornée.
- Il existe une constante $C > 0$ telle que pour presque tout $x \in \Omega$

$$f(x,u) \leqslant C(1 + |u|), \quad \forall u \geqslant 0.$$

Théorème 1.15. *[7] Sous les hypothèses précédentes le problème* (1.6) *admet au plus une solution. De plus la solution existe si et seulement si*

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0, \quad \textit{et} \quad \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0,$$

où $a_0(x) = \lim_{u \to 0^+} f(x,u)u^{-1}, \quad a_\infty(x) = \lim_{u \to +\infty} f(x,u)u^{-1}.$

Remarque 1.3. *1. La preuve est basée sur les techniques de minimisation. En plus de l'existence, la positivité de la solution est aussi établie.*

2. Dans [5] le problème a été étudié pour $\Omega = \mathbb{R}^N$, *et* $g \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Chapitre 2

Résultat d'existence de solutions pour un problème elliptique avec des termes concave et convexe par la méthode de sous et sur solutions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions positives du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u^p + b(x) u^q & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, $0 < p < 1 < q$, λ un paramètre positif, a et b sont des fonctions vérifiant les hypothèses suivantes

($\mathbf{H}_1$) $a,\ b \in L^\infty(\Omega)\,;\ a(x) \geqslant c_0,\ b(x) \leqslant -c_1$, pour tout $x \in \Omega$, où $c_0,\ c_1$ sont des constantes positives.

Ou bien

($\mathbf{H}_2$) $a,\ b \in L^\infty(\Omega)\,;\ a(x), b(x) \geqslant c_0$, pour tout $x \in \Omega$, où c_0 est une constante positive.

Si les fonctions a et b vérifient l'hypothèse (H_1) le problème correspondant sera noté (P_λ^1), pour l'hypothèse (H_2) le problème est noté (P_λ^2).

Notons que le problème (2.1) a été étudié dans le cas $a \equiv 1$ et $b \equiv 1$ par Brézis et al. dans leur article pionner [1].

En combinant les méthodes topologique et variationnelle les auteurs ont montré l'existence de solutions positives. Il a été aussi prouvé que, pour $\lambda > 0$ assez petit, le problème admet une infinité de solutions.

Concernant le cas $b \equiv 0$, une étude générale incluant le terme concave $\lambda|u|^{p-1}u$, $0 < p < 1$, a été faite dans [7]. dans cet article l'existence est établie par les techniques de minimisation, quant à l'unicité elle a été prouvée par la méthode d'énergie. Revenons à notre problème. La fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.1) est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega a(x)|u|^{p+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega b(x)|u|^{q+1}dx. \tag{2.2}$$

On note (λ_1, ϕ_1) le premier couple propre dans $H_0^1(\Omega)$ du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{dans } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $0 \leqslant \phi_1(x) \leqslant 1$.

2.2 Étude de l'existence de solutions positives du problème (P_λ^1)

On sait que $|\nabla\phi_1| > 0$ sur $\partial\Omega$ (voir [10], page 363), donc $M := \min_{\partial\Omega}|\nabla\phi_1|^2 > 0$. Considérons la partition de Ω, $\Omega = \Omega_\varepsilon \cup (\Omega\backslash\Omega_\varepsilon)$,
où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |\nabla\phi_1(x)|^2 \geqslant M/2 \quad \text{et} \quad \phi_1(x) \leqslant \varepsilon\}$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit.
Posons $m = \inf_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} \phi_1(x)$, alors $m \geqslant \varepsilon$ car ϕ_1 est positive dans Ω et $\Omega\backslash\Omega_\varepsilon$ n'est pas vide pour ε assez petit.

Théorème 2.1. *Supposons que les fonctions a et b vérifient l'hypothèse (H_1), et que $0 < p < 1 < q < 2^* - 1$, où $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Alors il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que le problème (P_λ^1) possède au moins une solution faible positive $u^* \in H_0^1(\Omega)$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$.*

Démonstration. Soit ν l'unique solution positive du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta\nu = 1 & \text{dans } \Omega, \\ \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

La solution ν de ce problème est assurée par le théorème de Lax-Milgram.
Posons $A = \|a\|_\infty, B = \|b\|_\infty, E = \|\nu\|_\infty$.
Comme $0 < p < 1$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, il existe une constante $\tau = \tau(\lambda) > 0$ telle que

$$\tau \geqslant \lambda A \tau^p E^p.$$

En effet, en étudiant la fonction continue $t \mapsto t - \lambda A t^p E^p$, on voit qu'elle tend vers l'infini quand t tend vers l'infini, donc il existe τ tel que $\tau - \lambda A\tau^p E^p > 0$.

La fonction $\tau\nu$ vérifie

$$-\Delta(\tau\nu) = \tau \geqslant \lambda A(\tau\nu)^p,$$

et puisque $b(x) \leqslant -c_1 < 0$, alors

$$\tau = -\Delta(\tau\nu) \geqslant \lambda a(x)(\tau\nu)^p + b(x)(\tau\nu)^q.$$

Donc $\tau\nu = \overline{u}$ est une sur-solution du problème (P^1_λ).
Soit $l \in]1, +\infty[$, alors $\underline{u}(x) = \phi_1^l$ est la sous-solution du problème (P^1_λ).
En effet, pour $x \in \Omega$, on a soit $x \in \Omega_\varepsilon$, soit $x \in \Omega \backslash \Omega_\varepsilon$. Donc, nous avons deux cas à discuter.

1. Pour $l > 1$, et ε assez petit, on a

$$\frac{M}{2} l(l-1)s^{-2} - Bs^{l(q-1)} > \lambda_1 l, \qquad \forall s \in (0, \varepsilon).$$

Pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$ on a $\phi_1(x) \leqslant \varepsilon$, et $|\nabla\phi_1|^2 \geqslant M/2$, d'où

$$\lambda_1 l \leqslant l(l-1)\phi_1(x)^{-2}|\nabla\phi_1(x)|^2 - B\phi_1(x)^{l(q-1)}, \qquad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.5}$$

En multipliant (2.5) par ϕ_1^l, on obtient

$$\lambda_1 l \phi_1(x)^l \leqslant l(l-1)\phi_1(x)^{l-2}|\nabla\phi_1(x)|^2 - B\phi_1(x)^{lq}, \qquad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

ainsi

$$l(1-l)\phi_1(x)^{l-2}|\nabla\phi_1(x)|^2 + \lambda_1 l \phi_1(x)^l \leqslant -B\phi_1(x)^{lq}, \qquad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.6}$$

Or,

$$\begin{aligned} \Delta(\phi_1^l) &= l(l-1)\phi_1^{l-2}|\nabla\phi_1|^2 + l\phi_1^{l-1}\Delta\phi_1 \\ &= l(l-1)\phi_1^{l-2}|\nabla\phi_1|^2 - \lambda_1 l \phi_1^l. \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (2.6) devient

$$-\Delta(\phi_1^l) \leqslant -B\phi_1^{lq}, \qquad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.7}$$

Alors,

$$-\Delta(\phi_1^l) \leqslant \lambda a(x)(\phi_1^l)^p + b(x)(\phi_1^l)^q. \tag{2.8}$$

Donc pour $x \in \Omega_\varepsilon$, $\underline{u}(x)$ est la sous-solution du problème (P^1_λ).

2. Pour le deuxième cas, on sait qu'il existe $\lambda^* > 0$, telle que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, on a

$$\lambda c_0 s^{pl} - Bs^{ql} \geqslant \lambda_1 l s^l, \qquad \forall\ s \in \mathbb{R},\ m \leqslant s \leqslant 1,$$

En fait $\lambda^* = \frac{1}{c_0}(\lambda_1 l + B)$, il suffit d'étudier la fonction

$$s \mapsto c_0^{-1}(\lambda_1 l s^{l-pl} + BS^{ql-pl}).$$

Alors, pour tout $x \in \Omega \backslash \Omega_\varepsilon$ ($\phi_1(x) \geqslant m$ et $\phi_1(x) \leqslant 1$), on obtient

$$\begin{aligned} -\Delta(\phi_1^l) &\leqslant \lambda_1 l \phi_1^l \leqslant \lambda c_0 \phi_1^{lp} - B\phi_1^{ql}, \\ &\leqslant \lambda a(x)(\phi_1^l)^p + b(x)(\phi_1^l)^q. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Et donc, pour $x \in \Omega \backslash \Omega_\varepsilon$, ϕ_1^l est une sous-solution du problème (P_λ^1).
Alors, d'après ces deux résultats, on en déduit que pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$, on a

$$-\Delta(\phi_1^l) \leqslant \lambda a(x)(\phi_1^l)^p + b(x)(\phi_1^l)^q, \tag{2.10}$$

donc $\underline{u}$ est sous-solution du problème (P_λ^1).

Conclusion : Le problème (P_λ^1) admet une solution u telle que

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u}.$$

□

2.3 Étude de l'existence de solutions positives du problème (P_λ^2)

Théorème 2.2. *Supposons que les fonctions a et b vérifient l'hypothèse $\big(H_2\big)$, et que $0 < p < 1 < q < +\infty$. Alors il existe $\Lambda \in \mathbb{R}_+^*$, tel que*

- *i) Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, le problème (P_λ^2) admet une solution minimale u_λ telle que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$, de plus la fonction $\lambda \mapsto u_\lambda$ est croissante.*
- *ii) Le problème (P_Λ^2) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$.*
- *iii) Pour tout $\lambda > \Lambda$, le problème (P_λ^2) n'admet pas de solution.*

Avant d'établir la démonstration du théorème, nous établissons quelques lemmes auxiliaires.
Définissons

$$\Lambda = \sup\{\lambda > 0 : \text{le problème } (P_\lambda^2) \text{ admet une solution}\}.$$

Lemme 2.1. *On a $0 < \Lambda < +\infty$.*

Démonstration. Soit ν la solution du problème (2.4).
Puisque $0 < p < 1 < q$, on peut trouver $\bar{\lambda} > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda \leqslant \bar{\lambda}$, il existe une constante $\tau = \tau(\lambda) > 0$ vérifiant

$$\tau \geqslant \lambda A \tau^p E^p + B \tau^q E^q.$$

En effet, en examinant la fonction $g : t \mapsto 1 - \lambda A t^{p-1} E^p - B t^{q-1} E^q$, on voit que pour t assez petit $g(t) > 0$, donc

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \lambda A t^{p-1} E^p + B t^{q-1} E^q, \\ \lambda &\leqslant \frac{1 - B t^{q-1} E^q}{A t^{p-1} E^p}, \end{aligned}$$

donc pour λ ne dépassant pas un certain seuil $\bar{\lambda} > 0$, il existe τ telle que

$$\tau \geqslant \lambda A \tau^p E^p + B \tau^q E^q.$$

En conséquence, la fonction $\tau\nu$ vérifie

$$\tau = -\Delta(\tau\nu) \geqslant \lambda A (\tau\nu)^p + B(\tau\nu)^q \geqslant \lambda a(x)(\tau\nu)^p + b(x)(\tau\nu)^q.$$

Donc $\tau\nu$ est une sur-solution du problème (P_λ^2).
Maintenant, soit u_0 l'unique solution positive du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda a(x) u_0^p & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

(l'existence de u_0 est assurée par les résultats de [5]).
En multipliant (2.11) par ε, où $0 < \varepsilon < 1$, on obtient

$$-\Delta(\varepsilon u_0) = \lambda \varepsilon a(x) u_0^p,$$

et puisque $0 < \varepsilon < 1$ et $0 < p < 1$, on trouve que

$$-\Delta(\varepsilon u_0) \leqslant \lambda a(x)(\varepsilon u_0)^p + b(x)(\varepsilon u_0)^q,$$

cela implique que pour tout ε assez petit et tout $\lambda > 0$, εu_0 est une sous-solution du problème (P_λ^2). En choisissant convenablement $\varepsilon > 0$ assez petit, nous obtenons

$$\varepsilon u_0 < \tau\nu.$$

Par conséquent, pour tout $0 < \lambda \leqslant \bar{\lambda}$ le problème (P_λ^2) admet une solution u, telle que

$$\varepsilon u_0 \leqslant u \leqslant \tau\nu,$$

ainsi

$$\Lambda \geqslant \bar{\lambda} > 0.$$

Reste à montrer que $\Lambda < +\infty$.
On sait qu'il existe $\tilde{\lambda}$ tel que

$$c_0(\tilde{\lambda} t^p + t^q) > \lambda_1 t \qquad \forall t > 0. \tag{2.12}$$

En effet, pour $0 < t < 1$, on a

$$t^p > t \quad \text{car} \quad 0 < p < 1, \tag{1'}$$

en prenant λ' telle que

$$c_0 \lambda' > \lambda_1, \tag{2'}$$

en multipliant membre à membre (1') et (2'), on trouve

$$c_0 \lambda' t^p > \lambda_1 t$$

d'où

$$c_0 \lambda' t^p + c_0 t^q > \lambda_1 t.$$

Maintenant si $t \geqslant 1$, il suffit de prendre $\lambda'' > \max_{t \geqslant 1} G(t)$ où

$$G(t) = \lambda_1 c_0^{-1} t^{1-p} - t^{q-p}.$$

A noter que sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction G admet un maximum en
$t_0 = \big((1-p)(q-p)^{-1}\lambda_1 c_0^{-1}\big)^{\frac{1}{q-1}}$ si $t_0 > 1$, sinon son maximum est atteint en 1.
Avec ce choix de λ'', nous obtenons

$$\lambda'' > \lambda_1 c_0^{-1} t^{1-p} - t^{q-p} \qquad \forall t \geqslant 1$$

d'où

$$c_0(\lambda'' t^p + t^q) > \lambda_1 t, \qquad \forall t \geqslant 1.$$

En prenant, $\tilde{\lambda} = \max\{\lambda', \lambda''\}$, on obtient

$$c_0(\tilde{\lambda} t^p + t^q) > \lambda_1 t \qquad \forall t > 0.$$

Si λ est tel que le problème (P_λ^2) admet une solution positive u, en multipliant le problème (P_λ^2) par ϕ_1 et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \phi_1(x)\Delta u(x)\, dx = \lambda \int_\Omega a(x) u^p \phi_1(x)\, dx + \int_\Omega b(x) u^q \phi_1(x)\, dx, \tag{2.13}$$

et par la formule de Green on a

$$-\int_{\Omega} u(x)\Delta\phi_1(x)\,dx = \lambda\int_{\Omega} a(x)u^p(x)\phi_1(x)\,dx + \int_{\Omega} b(x)u^q(x)\phi_1(x)\,dx, \tag{2.14}$$

d'où, d'après (2.3) et l'hypothèse (H_2), on a

$$\lambda_1\int_{\Omega} u(x)\phi_1(x)\,dx \geqslant c_0\Big[\int_{\Omega}\big(\lambda u^p(x)\phi_1(x) + u^q(x)\phi_1(x)\big)\,dx\Big], \tag{2.15}$$

ensuite, par utilisation de l'inégalité (2.12) avec $t = u(x) > 0$, on trouve que

$$c_0\int_{\Omega}\big(\tilde{\lambda}u^p(x)\phi_1(x)+u^q(x)\phi_1(x)\big)\,dx > \lambda_1\int_{\Omega} u(x)\phi_1(x)\,dx \geqslant c_0\int_{\Omega}\big(\lambda u^p(x)\phi_1(x)+u^q(x)\phi_1(x)\big)\,dx,$$

donc

$$\int_{\Omega}\big(\tilde{\lambda}u^p(x) + u^q(x)\big)\phi_1(x)\,dx > \int_{\Omega}\big(\lambda u^p(x) + u^q(x)\big)\phi_1(x)\,dx$$

ce qui implique que $\lambda < \tilde{\lambda}$ ainsi $\Lambda \leqslant \tilde{\lambda} < \infty$.

Conclusion : $0 < \Lambda < +\infty$. □

Lemme 2.2. *[1] Supposons que f est une fonction telle que $t \mapsto t^{-1}f(t)$ soit décroissante sur $]0, +\infty[$. Soient v_1 et v_2 vérifiant*

$$\begin{cases} -\Delta v_1 \leqslant f(v_1) & \textit{dans } \Omega \\ v_1 > 0 & \textit{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta v_2 \geqslant f(v_2) & \textit{dans } \Omega \\ v_2 > 0 & \textit{dans } \Omega \\ v_2 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Alors $v_2 \geqslant v_1$ dans Ω.

Démonstration. Multiplions l'équation (2.16) par $-v_2$ et l'équation (2.17) par v_1 on obtient

$$v_2\Delta v_1 \geqslant -f(v_1)v_2,$$

et

$$-v_1\Delta v_2 \geqslant f(v_2)v_1.$$

On additionne terme à terme, on trouve

$$v_2\Delta v_1 - v_1\Delta v_2 \geqslant f(v_2)v_1 - f(v_1)v_2 = v_1v_2\left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right). \tag{2.18}$$

Soit $\delta : t \mapsto \delta(t)$ une fonction de classe C^∞, croissante telle que

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Posons

$$\delta_\varepsilon(t) = \delta(\frac{t}{\varepsilon}).$$

Donc, on a

$$\delta_\varepsilon(t) \geqslant 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En multipliant (2.18) par $\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)$ et en intégrant sur Ω, nous obtenons

$$\int_\Omega (-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx \geqslant \int_\Omega v_1v_2\left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx. \tag{2.19}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega -v_1\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\Delta v_2\, dx &= \int_\Omega \nabla(v_1\delta_\varepsilon(v_1 - v_2))\nabla v_2\, dx, \\ &= \int_\Omega \delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\nabla v_2 + v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_2\, dx,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_2\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\Delta v_1\, dx &= -\int_\Omega \nabla(v_2\delta_\varepsilon(v_1 - v_2))\nabla v_1\, dx, \\ &= -\int_\Omega \delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\nabla v_2 + v_2(\nabla v_1 - \nabla v_2)\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\, dx.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx = &\int_\Omega v_1\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_2.(\nabla v_1 - \nabla v_2)\, dx \\ &- \int_\Omega v_2\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1.(\nabla v_1 - \nabla v_2)\, dx\end{aligned}$$

Maintenant, en ajoutant à l'égalité le terme $[\int_\Omega v_1 \delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)\, dx]$ et son opposé, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx &= \int_\Omega v_1\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)(\nabla v_2 - \nabla v_1)(\nabla v_1 - \nabla v_2)\, dx \\ &+ \int_\Omega (v_1 - v_2)\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)\, dx, \\ &\leqslant \int_\Omega (v_1 - v_2)\delta'_\varepsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)\, dx, \\ &= \int_\Omega \nabla v_1.\nabla[\gamma_\varepsilon(v_1 - v_2)]\, dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega (-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx \leqslant -\int_\Omega \Delta v_1 \gamma_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx,$$

où, $\gamma_\varepsilon(t) = \int_0^t s\delta'_\varepsilon(s)\, ds$. On a

$$0 \leqslant \gamma_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

il s'en suit que

$$\int_\Omega (-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Alors, (2.19) implique que

$$\int_\Omega v_1 v_2\left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\delta_\varepsilon(v_1 - v_2)\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on arrive à

$$\int_{[v_1 > v_2]} v_1 v_2\left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right) dx \leqslant 0,$$

où $[v_1 > v_2] = \{x \in \Omega; v_1(x) > v_2(x)\}$.
Or,

$$\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} > 0 \quad \text{sur} \quad [v_1 > v_2].$$

Donc la mesure de $[v_1 > v_2]$ est nulle, ainsi $v_1 \leqslant v_2$. □

Lemme 2.3. *[1] Soient $\psi < \Psi$, telles que ψ (resp. Ψ) est une sous solution (resp. sur solution) du problème (P^2_λ), et supposons que ψ n'est pas une solution, soit u la solution minimale telle que $\psi \leqslant u \leqslant \Psi$. Alors il existe $\mu_1 > 0$ et $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega)$ telles que $(-\Delta - h(x))\varphi_1 = \mu_1\varphi_1$, où $h(x) = \lambda p a(x) u^{p-1} + q b(x) u^{q-1}$, c-à-d μ_1 est la première valeur propre de l'opérateur $[-\Delta - h(x)]$ dans $H^1_0(\Omega)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\mu_1 < 0$ et $\bar{\varphi}_1$ la fonction propre associée au problème

$$\begin{cases} -\Delta\bar{\varphi}_1 - h\bar{\varphi}_1 = \mu_1\bar{\varphi}_1 & \text{dans } \Omega \\ \bar{\varphi}_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u - \vartheta\bar{\varphi}_1$ est une sur-solution du problème (P_λ^2) pour $\vartheta > 0$ assez petit.
En effet

$$-\Delta(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)-[\lambda a(x)(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)^p+b(x)(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)^q] = -\Delta u+\vartheta\Delta\bar{\varphi}_1-\lambda a(x)(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)^p-b(x)(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)^q,$$

$$= \lambda a(x)u^p+b(x)u^q-\vartheta\mu_1\bar{\varphi}_1-\vartheta(\lambda pa(x)u^{p-1}+qb(x)u^{q-1})\bar{\varphi}_1-\lambda a(x)(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)^p-b(x)(u-\vartheta\bar{\varphi}_1)^q.$$

Puisque $0 < p < 1$ la fonction $t \mapsto t^q$ est concave, et on a

$$(u - \vartheta\bar{\varphi}_1)^p \leqslant u^p - \vartheta p u^{p-1}\bar{\varphi}_1.$$

d'où

$$\begin{aligned} -\Delta(u - \vartheta\bar{\varphi}_1) - [\lambda a(x)(u - \vartheta\bar{\varphi}_1)^p + b(x)u - \vartheta\bar{\varphi}_1{}^q] &\geqslant b(x)u^p - \vartheta\mu_1\bar{\varphi}_1 - \vartheta b(x)qu^{q-1}\bar{\varphi}_1 \\ &- b(x)(u - \vartheta\bar{\varphi}_1)^q. \\ &= -\vartheta\mu_1\bar{\varphi}_1 + \varepsilon(\vartheta\bar{\varphi}_1) > 0, \end{aligned}$$

donc pour $\vartheta > 0$ assez petit, puisque $\mu_1 < 0$ et $\bar{\varphi}_1 > 0$ la fonction $u - \vartheta\bar{\varphi}_1$ est une sur-solution du problème (P_λ^2).
De plus, puisque ψ n'est pas une solution, alors $u > \psi$, et pour $\vartheta << 1$, on peut supposer aussi que

$$u - \vartheta\bar{\varphi}_1 \geqslant \psi.$$

Alors le problème (P_λ^2) admet une solution $\tilde{u}$ telle que

$$\psi \leqslant \tilde{u} \leqslant u - \vartheta\bar{\varphi}_1.$$

C'est une contradiction car u est une solution minimale. □

Remarque 2.1. *Puisque $\mu_1 > 0$ on a*

$$\int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2 - h\phi^2\right) dx \geqslant 0, \quad \forall\phi \in H_0^1.$$

Passons maintenant à la démonstration du Théorème 2.2.

Démonstration. i) D'après ce qui précède le problème (P_λ^2) admet une solution positive notée v_λ pour $\lambda \in (0, \Lambda)$.
Montrons que le problème (P_λ^2) admet une solution minimale u_λ, c'est-à-dire que pour toute solution u du problème (P_λ^2), on a $u_\lambda \leqslant u$.

Pour cela, définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$-\Delta u_{n+1} = \lambda a(x)u_n^p + b(x)u_n^q := g(u_n),$$

où u_0 est la solution du problème (2.11).
La suite (u_n) est croissante et $u_n \leq v_\lambda$ pour tout entier n. En effet, on a

$$u_n \leqslant u_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrons-le par récurrence :

- Pour $n = 0$, puisque u_0 est une solution du problème (2.11), on a

$$-\Delta u_0 = \lambda a(x)u_0^p \leqslant \lambda a(x)u_0^p + b(x)u_0^q = -\Delta u_1,$$

et par le principe de maximum on obtient que : $u_0 \leqslant u_1$.

- Supposons que $u_k \leqslant u_{k+1}$ pour un rang k entier fixé, et montrons que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$.

Par hypothèse, on a

$$u_k \leqslant u_{k+1},$$

la fonction $g : t \mapsto \lambda a(x)t^p + b(x)t^q$ étant croissante, donc

$$g(u_k) = \lambda a(x)u_k^p + b(x)u_k^q \leqslant \lambda a(x)u_{k+1}^p + b(x)u_{k+1}^q = g(u_{k+1}),$$

ainsi

$$-\Delta u_{k+1} \leqslant -\Delta u_{k+2},$$

donc, d'après le principe de maximum on a

$$u_{k+1} \leqslant u_{k+2}.$$

On conclut que $u_n \leqslant u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Montrons maintenant que $u_n \leq v_\lambda$ pour tout entier n.

- Pour $n = 0$, u_0 est la solution du problème (2.11) c'est-à-dire

$$-\Delta u_0 = \lambda a(x)u_0^p := f(u_0).$$

Or, v_λ vérifie

$$-\Delta v_\lambda = \lambda a(x)v_\lambda^p + b(x)v_\lambda^q \geqslant \lambda a(x)v_\lambda^p := f(v_\lambda).$$

On remarque que la fonction $t \mapsto f(t)/t$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Alors, d'après le lemme (2.2) on a $v_\lambda \geqslant u_0$.

- Supposons que $u_n \leqslant v_\lambda$ pour n fixé et montrons que $u_{n+1} \leqslant v_\lambda$.

D'après nos hypothèses, il en résulte que

$$\lambda a(x)u_n^p + b(x)u_n^q \leqslant \lambda a(x)v_\lambda^p + b(x)v_\lambda^q,$$

d'où

$$-\Delta u_{n+1} \leqslant -\Delta v_\lambda.$$

Alors

$$u_{n+1} \leqslant v_\lambda.$$

On a donc $u_{n+1} \leqslant v_\lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_n) est bornée et par conséquent elle converge. Supposons que $u_n \to u_\lambda$ quand $n \to +\infty$, alors $u_\lambda \leqslant v_\lambda$ et vérifie

$$-\Delta u_\lambda = \lambda a(x)u_\lambda^p + b(x)u_\lambda^q.$$

Donc, u_λ est une solution du problème.
Vérifions que u_λ est la solution minimale de (P_λ^2). Il suffit de montrer que pour toute solution positive u du problème, on a $u_\lambda \leq u$.
Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u$.

- Pour $n = 0$, on a

$$-\Delta u_0 = \lambda a(x)u_0^p := f(u_0),$$

comme u est solution du problème (P_λ^2), on a

$$-\Delta u = \lambda a(x)u^p + b(x)u^q \geqslant \lambda a(x)u^p := f(u).$$

La fonction $t \mapsto f(t)/t$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc d'après le lemme (2.2) on a $u \geqslant u_0$.

- Supposons que $u_k \leqslant u$ pour un rang k entier fixé, et montrons que $u_{k+1} \leqslant u$.

On a

$$-\Delta u_{k+1} = \lambda a(x)u_k^p + b(x)u_k^q,$$

et d'après ce que nous avons supposé on a

$$-\Delta u_{k+1} \leqslant \lambda a(x)u^p + b(x)u^q = -\Delta u,$$

d'où, d'après le principe de maximum on obtient que $u_{k+1} \leqslant u$.
On conclut que $u_n \leqslant u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En faisant tendre n vers l'infini on aboutit à $u_\lambda \leqslant u$. Donc u_λ est bien la solution minimale de (P_λ^2).
Montrons à présent que u_λ vérifie $J_\lambda(u_\lambda) < 0$.
u_λ est une solution du problème (P_λ^2), alors

$$-\Delta u_\lambda = \lambda a(x)u_\lambda^p + b(x)u_\lambda^q,$$

en multipliant par u_λ et en intégrant sur Ω, par la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2\, dx = \int_\Omega \lambda a(x) u_\lambda^{p+1}\, dx + \int_\Omega b(x) u_\lambda^{q+1}\, dx. \tag{2.20}$$

d'après le lemme 2.3 et la remarque 2.1 on a

$$\int_\Omega \big[|\nabla u_\lambda|^2 - \big(\lambda p a(x) u_\lambda^{p-1} + q b(x) u_\lambda^{q-1}\big)\phi^2\big] dx \geqslant 0 \quad \forall \phi \in H_0^1 \tag{2.21}$$

en particulier pour $\phi = u_\lambda$, alors

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2\, dx \geqslant \lambda p \int_\Omega a(x) u_\lambda^{p+1}\, dx + q \int_\Omega b(x) u_\lambda^{q+1}\, dx. \tag{2.22}$$

De (2.20) et (2.2) on obtient

$$J_\lambda(u_\lambda) = \lambda\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\big) \int_\Omega a(x) u_\lambda^{p+1}\, dx + \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\big) \int_\Omega b(x) u_\lambda^{q+1}\, dx, \tag{2.23}$$

d'autre part en utilisant l'expression (2.20) dans l'inégalité (2.22), on obtient

$$(1-p) \int_\Omega \lambda a(x) u_\lambda^{p+1}\, dx + (1-q) \int_\Omega b(x) u_\lambda^{q+1}\, dx \geqslant 0,$$

ainsi,

$$\int_\Omega b(x) u_\lambda^{q+1}\, dx \leqslant \left(\frac{1-p}{q-1}\right) \int_\Omega \lambda a(x) u_\lambda^{p+1}\, dx.$$

On en déduit finalement que

$$J_\lambda(u) \leqslant \lambda\big(\frac{1-p}{2}\big)\big(-\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}\big) \int_\Omega a(x) u_\lambda^{p+1}\, dx < 0.$$

Reste à montrer que u_λ est croissante par rapport à λ, c-à-d

$$u_\lambda < u_{\lambda'} \quad \text{pour tout} \quad \lambda < \lambda'.$$

Si $\lambda < \lambda'$, alors

$$-\Delta u_{\lambda'} = \lambda' a(x) u_{\lambda'}^p + b(x) u_{\lambda'}^q > \lambda a(x) u_{\lambda'}^p + b(x) u_{\lambda'}^q,$$

donc, $u_{\lambda'}$ est une sur solution du problème (P_λ^2).
Or, εu_0 est une sous solution du problème, donc le problème possède une solution v telle que

$$\varepsilon u_0 \leqslant v \leqslant u_{\lambda'}.$$

d'autre part u_λ est la solution minimale du problème, alors

$$u_\lambda \leqslant v \leqslant u_{\lambda'}.$$

De plus,

$$-\Delta u_{\lambda'} = \lambda' a(x) u_{\lambda'}^p + b(x) u_{\lambda'}^q > \lambda a(x) u_\lambda^p + b(x) u_\lambda^q = -\Delta u_\lambda,$$

d'où d'après le principe de maximum, on a

$$u_{\lambda'} > u_\lambda.$$

D'où le premier point.

ii) Soit (λ_n) une suite croissante convergeant vers Λ, d'après i) pour $u_{\lambda_n} = u_n$ on a

$$J_{\lambda_n}(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - \frac{\lambda_n}{p+1}\int_\Omega a(x)|u_n|^{p+1}\, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega b(x)|u_n|^{q+1}\, dx < 0,$$

alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|u_n\|_{H_0^1}^2 \leqslant c,$$

de l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ $(1 < p+1 < 2)$, on a

$$\|u_n\|_{p+1}^{p+1} \leqslant c' \|u_n\|_{H_0^1}^{p+1} \leqslant c' c^{\frac{p+1}{2}} = C.$$

Donc il existe $u^* \in H_0^1$ tel que $u_n \to u^* > 0$ p.p dans Ω, fortement dans $L^{p+1}(\Omega)$ et faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, u^* est une solution du problème (P_λ^2) pour $\lambda = \Lambda$.

iii) Finalement on a pour $\lambda > \Lambda$ le problème (P_λ^2) n'admet pas de solution d'après la définition de Λ. $\square$

Chapitre 3

Résultat d'existence pour un problème elliptique contenant le gradient de l'inconnue par la méthode variationnelle

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$.
Le problème (3.1) n'est pas variationnel à cause de la présence du gradient de la fonction inconnue u. Pour appliquer la méthode variationnelle nous allons associer au problème (3.1) le problème semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla \omega) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où ω est une fonction quelconque de l'espace $H_0^1(\Omega)$, et $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue localement Lipschitzienne qui satisfait les hypothèses suivantes

(f_1) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x,t,z)}{t} = 0$ uniformément pour tout $(x, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$.
(f_2) il existe deux constantes $\alpha_1 > 0$ et $p \in]1, 2^* - 1[$ telles que

$$|f(x, t, z)| \leqslant \alpha_1 (1 + |t|^p) \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^N.$$

(f_3) il existe deux constantes $\theta > 2$ et $R > 0$ telles que

$$0 < \theta F(x,t,z) \leqslant t f(x,t,z) \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, |t| \geqslant R, z \in \mathbb{R}^N,$$

où

$$F(x,t,z) = \int_0^t f(x,s,z)\, ds.$$

(f_4) il existe deux nombres positifs α_2, α_3 tels que

$$F(x,t,z) \geqslant \alpha_2 |t|^\theta - \alpha_3 \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 3.1. *Un exemple de fonction satisfaisant les hypothèses ci-dessus est donné par*

$$f(x,t,z) = b_1 |t|^{p-1} t g(z)$$

où $b_1 > 0$ *et* $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ *telle que* $0 < b_2 \leqslant g(z)$ *pour une constante* b_2*.*

3.2 Résultat d'existence de solutions pour le problème auxiliaire

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.2) est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$J_\omega(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_\Omega F(x, v, \nabla \omega)\, dx.$$

Notons que les solutions du problème (3.2) sont les points critiques de J_ω.

Remarque 3.2. *De* (f_2) *et* (f_3)*, on a* $\theta \leqslant p+1$*.*

En effet, l'hypothèse (f_3) implique que pour tout t assez grand on a

$$\frac{\theta}{t} \leqslant \frac{f(x,t,z)}{F(x,t,z)},$$

par intégration de R à t on obtient

$$\frac{t^\theta}{R^\theta} \leqslant \frac{F(x,t,z)}{F(x,R,z)},$$

d'où

$$F(x,t,z) \geqslant k(x,R,z) t^\theta,$$

où, $k(x,R,z) = \frac{F(x,R,z)}{R^\theta}$.

En multipliant les deux membres de cette inégalité par θ

$$\theta k(x,R,z)t^{\theta} \leqslant \theta F(x,t,z),$$

maintenant en utilisant l'hypothèse (f_2) on obtient

$$\theta k(x,R,z)t^{\theta} \leqslant \theta F(x,t,z) \leqslant tf(x,t,z) \leqslant \alpha_1(t+|t|^{p+1}),$$

donc, on en déduit que $\theta \leqslant p+1$.

Notation. *Dans la suite de ce chapitre, on va noter par* $\|.\|_p$ *la norme de l'espace* $L^p(\Omega), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ *; et par* $\|.\|$ *celle de l'espace* $H_0^1(\Omega)$.
la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ *est désignée par* λ_1.

Dans le théorème suivant, on établira l'existence de la solution du Problème (3.2).

Théorème 3.1. *Supposons que la fonction* f *vérifie les hypothèses de* (f_1) *à* (f_4). *Alors il existe deux constantes positives* c_1 *et* c_2 *telles que, pour* $\omega \in H_0^1(\Omega)$ *le problème* (3.2) *admet une solution positive* u_ω *avec*

$$c_1 \leqslant \|u_\omega\| \leqslant c_2.$$

Remarque 3.3. *Pour avoir seulement des solutions positives, on suppose que*

$$f(x,t,z) = 0 \qquad \forall t \in]-\infty, 0[.$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est basée sur les lemmes suivants. □

Lemme 3.1. *Soit* $\omega \in H_0^1(\Omega)$. *Il existe deux nombres positifs* a *et* ρ, *indépendants de* ω *tels que*

$$J_\omega(v) \geqslant a \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) : \|v\| = \rho.$$

Démonstration. On a

$$J_\omega(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \int_\Omega F(x,v,\nabla\omega)\,dx. \tag{3.3}$$

Le terme $F(x,v,\nabla\omega)$ est majoré.
En effet, la condition (f_1) implique que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : \forall t > 0,\ |t| < \delta \implies \frac{|f(x,t,z)|}{t} \leqslant \varepsilon,$$

par conséquent, pour $|t| < \delta$ on a

$$|F(x,t,z)| = |\int_0^t f(x,s,z)\,ds| \leqslant \varepsilon \int_0^t |s|\,ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}t^2. \tag{3.4}$$

D'autre part, de l'hypothèse (f_2) on a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists C_\varepsilon > 0 : |f(x,t,z)| \leqslant C_\varepsilon |t|^p,$$

d'où

$$|F(x,t,z)| \leqslant \frac{C_\varepsilon}{p+1}|t|^{p+1}. \tag{3.5}$$

Donc, de (3.4) et (3.5) on a

$$|F(x,v,z)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon v^2 + C_{\varepsilon,p}|v|^{p+1},$$

où $C_{\varepsilon,p} = \frac{C_\varepsilon}{p+1}$.

Alors, (3.3) devient

$$J_\omega(v) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega v^2\,dx - C_{\varepsilon,p}\int_\Omega |v|^{p+1}\,dx,$$

ce qui implique que

$$J_\omega(v) \geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_2^2 - C_{\varepsilon,p}\|v\|_{p+1}^{p+1}.$$

Or, par la représentation de la première valeur propre selon Rayleigh on a

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H_0^1, v \neq 0} Q(v) \implies \lambda_1 \leqslant \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2},$$

d'où

$$\|v\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|v\|^2, \tag{3.6}$$

et par l'injection $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)\,(p+1 < 2^*)$, il existe une constante $\bar{C}$ telle que

$$\|v\|_{p+1}^{p+1} \leqslant \bar{C}\|v\|^{p+1}.$$

Alors

$$J_\omega(v) \geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|v\|^2 - \bar{C}_{\varepsilon,p}\|v\|^{p+1},$$

d'où

$$J_\omega(v) \geqslant \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\big)\|v\|^2 - \bar{C}_{\varepsilon,p}\|v\|^{p+1}.$$

Si

$$P(\|v\|) := \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\big)\|v\|^2 - \bar{C}_{\varepsilon,p}\|v\|^{p+1} > 0,$$

alors, on a

$$J_\omega(v) > 0.$$

Posons $\|v\| = \rho$, alors

$$\begin{aligned} P(\rho) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})\rho^2 - \bar{C}_{\varepsilon,p}\rho^{p+1} > 0, \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}) - \bar{C}_{\varepsilon,p}\rho^{p-1} > 0, \\ &\Longleftrightarrow \quad \rho < \left(\frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})}{\bar{C}_{\varepsilon,p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} := \rho_0. \end{aligned}$$

On conclut ainsi, que $J_\omega(v) > 0$ pour tout v tel que $\|v\| < \rho_0$.

□

Lemme 3.2. *Soit $\omega \in H_0^1(\Omega)$. Fixons $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, avec $\|v_0\| = 1$. Alors il existe $T > 0$, indépendant de ω tel que*

$$J_\omega(tv_0) \leqslant 0 \qquad \forall\, t \geqslant T.$$

Démonstration. Posons $v = tv_0$, on obtient

$$J_\omega(v) = J_\omega(tv_0) = \frac{1}{2}t^2 - \int_\Omega F(x, tv_0, \nabla\omega)\, dx.$$

Or, d'après l'hypothèse (f_4) on a

$$F(x, tv_0, \nabla\omega) \geqslant \alpha_2 |tv_0|^\theta - \alpha_3,$$

d'où,

$$J_\omega(tv_0) \leqslant \frac{1}{2}t^2 - M|t|^\theta + \alpha_3|\Omega|,$$

avec $M = \alpha_2 \int_\Omega |v_0|^\theta\, dx$.
Ce qui donne

$$\lim_{t\to+\infty} J_\omega(tv_0) = -\infty.$$

Alors, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geqslant T$ on a $J_\omega(tv_0) \leqslant 0$. □

Lemme 3.3. *Supposons que la fonction f vérifie les hypothèses de (f_1) à (f_4). Alors le problème (3.2) admet au moins une solution $u_\omega \not\equiv 0$ pour tout $\omega \in H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. On a bien $J_\omega(0) = 0$, et d'après les lemmes 3.1 et 3.2 on conclut que J_ω vérifie les conditions du théorème du col.
Maintenant reste à montrer que J_w vérifie la condition de Palais-Smale.

Montrons d'abord que toute suite (u_n) de Palais-Smale est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|J_\omega(u_n)| < C \quad \text{et} \qquad J'_\omega(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

On a,

$$J_\omega(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x, u_n, \nabla\omega)dx,$$

et

$$\langle J'_\omega(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x, u_n, \nabla\omega)u_n\, dx,$$

où, $\langle ., .\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.
D'après les hypothèses on a

$$-C < J_\omega(u_n) < C \quad \text{i.e} \quad -C < \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x, u_n, \nabla\omega)dx < C.$$

En multipliant par θ on obtient

$$-C\theta < \frac{\theta}{2}\|u_n\|^2 - \theta\int_\Omega F(x, u_n, \nabla\omega)dx < C\theta. \tag{*}$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$-\varepsilon < \|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x, u_n, \nabla\omega)u_n\, dx < \varepsilon,$$

d'où

$$-\varepsilon < -\|u_n\|^2 + \int_\Omega f(x, u_n, \nabla\omega)u_n\, dx < \varepsilon. \tag{**}$$

Par addition du (*) et (**), on obtient

$$-\varepsilon - C\theta < (\frac{\theta}{2} - 1)\|u_n\|^2 + \int_\Omega f(x, u_n, \nabla\omega)u_n\, dx - \theta\int_\Omega F(x, u_n, \nabla\omega)dx < \varepsilon + C\theta.$$

et puisque

$$\int_\Omega f(x, u_n, \nabla\omega)u_n\, dx - \theta\int_\Omega F(x, u_n, \nabla\omega)dx > 0,$$

d'après l'hypothèse (f_3). Alors,

$$0 < (\frac{\theta}{2} - 1)\|u_n\|^2 < \varepsilon + C\theta,$$

d'où,

$$\|u_n\|^2 < \frac{2(\varepsilon + C\theta)}{\theta - 2} \qquad (\theta > 2),$$

ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
Alors, on peut extraire une sous suite notée $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement vers $u_\omega \in H_0^1(\Omega)$, c-à-d

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_w \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

et converge fortement vers u_w dans $L^{p+1}(\Omega)$, c-à-d

$$u_{n_k} \to u_w \qquad \text{dans } L^{p+1}(\Omega).$$

Et puisque $p+1 < 2^*$, l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$, donne

$$u_{n_k} \to u_w \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

ce qui implique que la fonctionnelle J_ω vérifie la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$.
Et d'après le théorème du col, u_ω vérifie

$$J'_\omega(u_\omega) = 0 \quad \text{et} \quad J_\omega(u_\omega) = \inf_{\gamma\in\mathit{\Gamma}} \max_{t\in[0,1]} J_\omega(\gamma(t)),$$

où $\mathit{\Gamma} = \{\gamma \in C^0([0,1]; H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = Tv_0\}$, pour un certain $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ et T comme dans le lemme 3.2.
Par conséquent u_ω est une solution du problème (3.2) □

Lemme 3.4. *Soit $\omega \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante positive c_2, indépendante de ω, telle que*

$$\|u_\omega\| \leqslant c_2, \tag{3.7}$$

Démonstration. Du lemme précédent, on a

$$J_\omega(u_\omega) = \inf_{\gamma\in\mathit{\Gamma}} \max_{t\in[0,1]} J_\omega(\gamma(t)),$$

alors pour $\gamma(t) = tv_0$ on a

$$J_\omega(u_\omega) \leqslant \max_{t\geqslant 0} J_\omega(tv_0),$$

Nous estimons $J_\omega(tv_0)$ en utilisant (f_4)

$$J_\omega(tv_0) \leqslant \frac{t^2}{2} - M|t|^\theta + \alpha_3|\Omega| =: h(t)$$

d'où

$$J_\omega(u_\omega) \leqslant \max_{t\geqslant 0} h(t) = h(t_1),$$

où, $t_1 = \left(\frac{1}{\theta M}\right)^{\frac{1}{\theta-2}}$.
Donc,

$$J_\omega(u_\omega) \leqslant c_2,$$

qui implique que

$$\|u_\omega\|_{H_0^1} \leqslant c_2.$$

$\square$

Lemme 3.5. *Soit $w \in H_0^1(\Omega)$. Il existe une constante positive c_1, indépendante de w, telle que*

$$\|u_\omega\| \geqslant c_1. \tag{3.8}$$

Démonstration. u_ω étant une solution du problème (3.2) alors,

$$-\Delta u_\omega = f(x, u_\omega, \nabla\omega),$$

en multipliant l'équation par u_ω et en intégrant sur Ω, par la formule de Green on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\omega|^2\, dx = \int_\Omega f(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega\, dx. \tag{3.9}$$

Il résulte de (f_1) et (f_2) que, pour $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive k_ε, indépendante de ω, telle que

$$|f(x,t,z)| \leqslant \varepsilon|t| + k_\varepsilon |t|^p. \tag{3.10}$$

De (3.9) et (3.10) on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\omega|^2\, dx \leqslant \varepsilon \int_\Omega |u_\omega|^2\, dx + k_\varepsilon \int_\Omega |u_\omega|^{p+1}\, dx,$$

alors, de (3.6) et de l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\big(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\big)\|u_\omega\|^2_{H_0^1} \leqslant \bar{k}_\varepsilon \|u_\omega\|^{p+1}_{H_0^1},$$

ainsi

$$\|u_\omega\|_{H_0^1} \geqslant \left(\frac{1}{\bar{k}_\varepsilon}(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'où le résultat avec $c_1 = \big(\frac{1}{\bar{k}_\varepsilon}(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})\big)^{\frac{1}{p-1}}$. $\square$

Démonstration. (du Théorème 3.1) D'après les cinq lemmes précédents le problème (3.2) admet une solution u_ω telle que

$$c_1 \leqslant \|u_\omega\| \leqslant c_2.$$

Montrons maintenant que le problème admet une solution positive.
Soit $\bar{f}$ la fonction définie par

$$\bar{f}(x,t,z) = \begin{cases} f(x,t,z) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

On remarque que $\bar{f}$ vérifie (f_3) et (f_4) pour tout $t \geqslant 0$.
Posons $\Omega^+ = \{x \in \Omega \ : \ u_\omega(x) \geqslant 0\}$ et $\Omega^- = \{x \in \Omega \ : \ u_\omega(x) < 0\}$.

La fonction u_ω est solution du problème (3.2), donc

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega = \bar{f}(x, u_\omega, \nabla \omega) & \text{dans } \Omega \\ u_\omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Posons $u_\omega = u_\omega^+ + u_\omega^-$, en multipliant par u_ω^- et en intégrant sur Ω on obtient

$$-\int_\Omega u_\omega^- \Delta u_\omega \, dx = \int_\Omega \bar{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx,$$

ce qui implique que

$$-\int_\Omega u_\omega^- \Delta u_\omega \, dx = \int_{\Omega^+} \bar{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx + \int_{\Omega^-} \bar{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx = \int_{\Omega^+} \bar{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx,$$

d'où, par la formule de Green on a

$$\int_\Omega \nabla u_\omega^- \nabla u_\omega \, dx = \int_{\Omega^+} \bar{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx,$$

ainsi

$$0 \leqslant \int_\Omega |\nabla u_\omega^-|^2 \, dx = \|u_\omega^-\|^2 = \int_{\Omega^+} \bar{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx \leqslant 0,$$

Donc $u_\omega^- = 0$. Alors, $u_\omega \geqslant 0$ dans Ω. □

3.3 Résultat d'existence de solution pour le problème initial

Le résultat principal concerne l'existence de solutions pour le problème (3.1), pour cela, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire.
(f_5) la fonction f vérifie la condition de Lipschitz locale :

$$\exists\, S_1, S_2 > 0 \quad \text{avec} \quad S_1 < \lambda_1 \quad \text{tels que}$$

$$|f(x, t', z) - f(x, t'', z)| \leqslant S_1 |t' - t''| \quad \forall x \in \bar{\Omega}, t', t'' \in [0, \beta_1], \ |z| \leqslant \beta_2$$

et

$$|f(x, t, z') - f(x, t, z'')| \leqslant S_2 |z' - z''| \quad \forall x \in \bar{\Omega}, t \in [0, \beta_1]; |z'|, \ |z''| \leqslant \beta_2.$$

Théorème 3.2. *Supposons que f vérifie les hypothèses de (f_1) à (f_5). Alors si*

$$S_1 + \lambda_1^{1/2} S_2 < \lambda_1,$$

le problème (3.1) admet une solution positive.

Démonstration. On considère la suite (u_n), où u_n est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f(x, u_n, \nabla u_{n-1}) & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_n}$$

En multipliant (P_n) et (P_{n+1}) par $(u_{n+1} - u_n)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u_n (u_{n+1} - u_n)\, dx &= \int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_{n-1})(u_{n+1} - u_n)\, dx, \\ -\int_\Omega \Delta u_{n+1} (u_{n+1} - u_n)\, dx &= \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n)\, dx, \end{aligned}$$

par la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u_n (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)\, dx = \int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_{n-1})(u_{n+1} - u_n)\, dx, \tag{3.11}$$

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)\, dx = \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n)\, dx, \tag{3.12}$$

et par soustraction, on obtient

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 = \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n)\, dx - \int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_{n-1})(u_{n+1} - u_n)\, dx,$$

en ajoute et en retranche le terme $\int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n)\, dx$ au second membre, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|^2 = &\int_\Omega [f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) - f(x, u_n, \nabla u_n)](u_{n+1} - u_n)\, dx \\ &+ \int_\Omega [f(x, u_n, \nabla u_n) - f(x, u_n, \nabla u_{n-1})](u_{n+1} - u_n)\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (f_5) on trouve

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leqslant S_1 \int_\Omega |u_{n+1} - u_n|^2\, dx + S_2 \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla_{n-1}||u_{n+1} - u_n|\, dx,$$

et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2 \leqslant S_1 \int_\Omega |u_{n+1}-u_n|^2\, dx + S_2 \left(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla_{n-1}|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_{n+1}-u_n|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

La représentation de la première valeur propre selon Rayleigh donne

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\|u_{n+1}-u_n\|^2}{\|u_{n+1}-u_n\|_2^2}.$$

Alors

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2 \leqslant \frac{S_1}{\lambda_1}\|u_{n+1}-u_n\|^2 + \frac{S_2}{\lambda_1^{1/2}}\|u_{n+1}-u_n\|\|u_n-u_{n-1}\|,$$

et par conséquent

$$\|u_{n+1}-u_n\| \leqslant \frac{S_2\lambda_1^{-1/2}}{1-S_1\lambda_1^{-1}}\|u_n-u_{n-1}\| := K\|u_n-u_{n-1}\|$$

d'où

$$\|u_{n+1}-u_n\| \leqslant K^n\|u_1-u_0\|,$$

et puisque $K < 1$, donc (u_n) est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$ qui est complet, ainsi il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que (u_n) converge fortement vers u.
Et d'après le lemme 3.5, $\|u_n\| \geqslant c_1$ pour tout n. Alors le problème (3.1) admet une solution non triviale u.
Pour la positivité de la solution u, on procède de la même manière que dans la démonstration Théorème 3.1.

□

Terminons ce chapitre par un exemple d'une fonction f vérifiant les hypothèses (f_i), $i = 1, ..., 5$.

Exemple 3.1. *On donne*

$$f(x,t,z) = a(1+|x|)t^2(1+\sin^2(|z|^2))$$

*où a est une constante réelle telle que $0 < a \leq \lambda_1(2+2diam(\Omega))^{-1}$,
avec $diam(\Omega) = sup\{|x-y|; x, y \in \Omega\}$.*

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce mémoire est l'application de deux méthodes pour la résolution des équations elliptiques. La première est une méthode topologique, à savoir la méthode de sous et sur solutions, que nous avons appliquée pour établir l'existence de solutions positives pour un problème contenant des termes concave et convexe.

La deuxième méthode est variationnelle, et le problème elliptique concerné contient le gradient de l'inconnue. Il s'est avéré que ce problème n'a pas une structure variationnelle. En conséquence, le gradient de l'inconnue a été remplacé par celui d'une fonction paramètre. En supposant que la fonction source du second membre satisfait la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz, un résultat d'existence de solutions pour le nouveau problème est démontré. Ensuite, par itération on démontre que le problème initial admet une solution positive.

Pour perspectives, on souhaite, en s'appuyant sur les articles analysés, l'étude des problèmes suivants

1. Généraliser les résultats du deuxième chapitre dans le cas où les fonctions a et b ne sont pas bornées.
2. Analyser le cas où le Laplacien, dans le troisième chapitre, est remplacé par l'opérateur de Kirchhoff,

$$K(u) := -M(\|u\|)\Delta u,$$

où M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

Bibliographie

[1] A. Ambrostti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, J. Funct. Anal. Appl 122 (1994) ,519-543.

[2] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J.Funct. Anal. 14 (1973), 349-381, .

[3] H. Amann, M.G. Crandall, *On some existence theorems for semi-linear elliptic equations*, Indiana University Mathematics Journal. 27 (1978), 779-790.

[4] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, (2011).

[5] H. Brezis, S. Kamin, *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, Manuscripta math, 74 (1992), 87-106.

[6] H.Brezis, L. Nirenberg, H^1 *versus* C^1 *local minimizers*, C.R. Acad.Sci. Paris 317 (1993), 465-472.

[7] H. Brezis, L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. 10 (1986), 55-64.

[8] P. Clément, G. Sweers, *Getting a solution between sub-and supersolutions without monotone iteration.* (1987), 189-194.

[9] D. De Frigueiredo, M.Girardi, M.Matzeu, *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain pass techniques*, Differential Integral Equations. 17 (2004), 119-126.

[10] L.C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society. 19 (2010).

[11] R. Kajikiya, *Comparison theorem and uniqueness of positive solutions for sublinear elliptic equations*, Archiv der Mathematik. 91 (2008), 427-435.

[12] O. Kavian, Introduction à la Théorie des Points critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques, Springer-Verlag, (1993).

[13] M. Montenegro, A. Ponce, *The sub-supersolution method for weak solutions.* Proceedings of the American Mathematical Society. 136 (2008), 2429-2438.

[14] V.D. Radulescu, Qualitative analusis of non linear elliptic partial differential equations : Monotonocity Analytic , and Variational Methods, Hindawi , Vol.6 (2008).

[15] M. Struwe, Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential equations and Hamiltonian Systems, Springer. 34 (2008).

[16] C. Yuan, S. Guo, K. Tong, *Positive Solution for the Elliptic Problems with Sublinear and Superlinear Nonlinearities*, J. Mathematical Problems in Engineering, (2010).

ملخص /

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة مسألتين إهليلجيتن. الأولى تتميز بوجود حدين أحدهما محدب والآخر مقعر. أما الثاني ففيه تدرج المجهول مما يجعل الطريقة التغايرية في هذه الحالة بالذات غير فعالة.

بالنسبة للمسألة الأولى، فهي مسألة إثبات وجود حل إيجابي واحد على الأقل. من خلال الجمع بين الطرق التغايرية وطرق الحلول السفلية والعلوية بالإضافة إلى مبدأ الحد الأقصى، يتم تحديد نتائج وجود الحلول.

بالنسبة للمسألة الثانية، تم استبدال تدرج المجهول بتدرج دالة وسيطية. بالنسبة لهذه المسألة الجديدة، تم إثبات وجود الحلول باستخدام نظرية "ممر الجبل" المدعومة بشرط أمبروسيتي- رابينوفيتش. ثم، باستخدام الطريقة التكرارية، يتم إثبات وجود الحل للمسألة الأصلية.

Summary: The present dissertation aims to study two elliptic problems. The first is characterized by the presence of two terms, one convex and the other concave. As for the second, it contains the gradient of the unknown, which makes, in this particular case, the variational method ineffective.

Concerning the first problem, it is a question of proving the existence of at least one positive solution. By combining the variational methods and that of sub and super solutions in addition to the maximum principle, the existence results are established.

For the second problem the gradient of the unknown was replaced by the gradient of a parameter function. For this new problem, the existence of solutions is established using Mountain-Pass theorem supported by an Ambrosetti-Rabinowitz condition. Then, using an iterative method, the existence of the solution to the initial problem is demonstrated.

Résumé : Le présent mémoire a pour objet l'étude de deux problèmes elliptiques. Le premier est caractérisé par la présence de deux termes l'un convexe et l'autre concave. Quant au deuxième, il contient le gradient de l'inconnue, ce qui rend, dans ce cas particulier, la méthode variationnelle inopérante.

Concernant le premier problème, il s'agit de prouver l'existence d'au moins une solution positive. En combinant les méthodes variationnelle et celle de sous et sur solutions en plus du principe du maximum les résultats d'existence sont établis.

Pour le deuxième problème le gradient de l'inconnue a été remplacé par le gradient d'une fonction paramètre. Pour ce nouveau problème, l'existence de solutions est établie en utilisant le théorème du col appuyé par une condition d'Ambrosetti-Rabinowitz. Ensuite par une méthode itérative, l'existence de la solution du problème de départ est démontrée.