



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité: *Edp et Applications*

Par :

M^{elle} ABDELOUAHAB Ahlem

Sur le thème

Contribution à l'étude mathématique d'un problème à frontière libre dans la modélisation de la croissance tumorale.

Soutenue publiquement le 23 Octobre 2025 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr T. Mahdjoub	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr. S. Bensid	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr. A. Attar	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr. H. Boughazi	Professeur	École Supérieure de Management de Tlemcen	Examineur
Mr. T. Touaoula	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur

*Laboratoire d'analyse Non-linéaire et Mathématiques Appliquées
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCCEN



THÈSE LMD

présentée à

Faculté des Sciences - Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et Applications

Par :

M^{elle} ABDELOUAHAB Ahlem

Sur le thème

**Contribution à l'étude mathématique d'un
problème à frontière libre dans la modélisation de
la croissance tumorale**

Soutenu publiquement le 23 octobre 2025 à Tlemcen devant le jury composé de :

M. T. Mahdjoub	Pr.	Université de Tlemcen	Président
M. S. Bensid	Pr.	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
M. A. Attar	Pr.	Université de Tlemcen	Examineur
M. H. Boughazi	Pr.	Ecole supérieure de Management de Tlemcen	Examineur
M. T. Touaoula	Pr.	Université de Tlemcen	Examineur

Laboratoire d'Analyse Non-linéaire et Mathématiques Appliquées
BP 119, 1300 Tlemcen- Algérie.

Dédicaces

A la mémoire de mon père,

Vous avez été, et demeurez, un exemple inébranlable pour moi. Aucune dédicace ne saurait rendre hommage à l'ampleur de mon respect et de mon amour éternel. Que Dieu bénisse votre âme.

À ma chère mère,

En témoignage de ma profonde gratitude et de ma reconnaissance infinie, pour tous vos sacrifices et l'amour incommensurable dont vous m'entourez. J'espère que votre bénédiction m'accompagnera toujours.

À mes deux sœurs adorées, IBTISSEM, DJALILA

Pour votre affection, votre patience et vos encouragements constants, qui m'ont porté dans les moments de doute.

À tous mes chers amis.

Remerciements

Je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir donné le courage, la force et la volonté nécessaires pour mener à bien cette thèse, une véritable porte d'entrée vers le savoir tout au long de mes années d'études.

Tout d'abord, je tiens à adresser mes sincères et chaleureux remerciements à mon directeur de thèse, le Professeur SABRI BENSID pour ses précieux conseils et son orientation, qui furent déterminants dans la réussite de mon doctorat. Je suis honorée d'avoir eu l'opportunité de travailler à ses côtés, car, au-delà de son soutien scientifique, il a toujours été présent pour me guider et me conseiller face aux défis rencontrés, du début à la fin de ce parcours.

Je souhaite également adresser mes remerciements à Monsieur T. MAHDJOUR professeur à l'université de Tlemcen, pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance pour son implication.

Je tiens à exprimer ma gratitude la plus sincère à Monsieur H. BOUGHAZI, Professeur à l'École supérieure de Management de Tlemcen, pour l'intérêt qu'il porta à mon travail et pour le temps qu'il consacra à l'examiner.

Ma profonde reconnaissance va également à Monsieur A. ATTAR, Professeur à l'université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il me fit en faisant partie de ce jury.

Je suis également heureuse de remercier Monsieur T. TOUAOULA, Professeur à l'université de Tlemcen, pour avoir accepté d'examiner mon travail et pour sa participation active au jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble des enseignants et collègues des laboratoires : ANALYSE NON LINÉAIRE ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES, ainsi que SYSTÈMES DYNAMIQUES ET APPLICATIONS, pour leur disponibilité, leurs conseils et leurs encouragements. Je n'oublie pas non plus toutes les personnes qui, de près ou de loin, contribuèrent à mon parcours et me soutinrent tout au long de mes études, même si je ne peux malheureusement pas les citer toutes ici.

Enfin, mes remerciements les plus profonds vont à ma mère et à mes sœurs, qui m'accompagnèrent tout au long de mon parcours académique. Leur soutien, leur encouragement constant et leur fierté me donnèrent la force de poursuivre mes études et de surmonter toutes les épreuves.

Table des matières

Liste des figures	5
Notations	6
Introduction générale	7
1 Préliminaires et outils de base	14
1 Espaces fonctionnels	14
1.1 Espaces de Lebesgue L^p	14
1.2 Espaces de Hölder	15
1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}$	15
2 Dérivées et points critiques	17
3 Hypersurface analytique	18
4 Théorie locale des bifurcations	18
4.1 Quelques théorèmes fondamentaux	18
4.2 Bifurcation à partir d'une valeur propre simple	22
5 Formes classiques du principe du maximum	28
6 Représentation de la fonction de Green par harmoniques sphériques	29
6.1 Rappel sur les polynômes de Legendre	30
6.2 Le Laplacien et les harmoniques sphériques	32
6.3 Expansion de la fonction de Green en harmoniques sphériques	34
7 Rappel sur la résolution des équations de degré 3 par la méthode de Cardan	36
2 La modélisation mathématique du problème	38
1 Introduction à la croissance tumorale	38
1.1 Fonctionnement et régulation du cycle cellulaire	38
1.2 Caractéristiques fondamentales des cellules cancéreuses	40
1.3 Principales étapes du développement tumoral	41
1.4 Approches thérapeutiques contre la maladie	42
2 Quelques modèles de la croissance tumorale	43
2.1 Modèles discrets	43
2.1.1 Modèles sur grille	43
2.1.2 Modèles agent-centrés	44
2.2 Modèles continus scalaires	44
2.3 Modèles continus spatiaux	45
2.4 Le modèle de Greenspan	47
2.5 Le modèle de McElwain et al	49
2.6 Les modèles de Byrne et Chaplain	50
2.7 Les modèles de Friedman et Reitich	51

3	Analyse mathématique d'un modèle à deux phases	53
1	Présentation du modèle mathématique	53
2	Analyse mathématique du modèle	55
2.1	Solutions stationnaires	55
2.2	Solution transitoire	63
2.3	Problème à frontière libre perturbé	65
2.3.1	Problème équivalent	65
2.3.2	Transformation du domaine	67
2.3.3	Résolution de l'équation intégrale	69
2.3.4	Régularité des frontières libres	74
2.4	Étude de la bifurcation pour un problème à frontière libre	76
4	Analyse mathématique d'un modèle avec multiphases	79
1	La présentation du modèle	79
2	L'analyse mathématique de notre modèle	80
2.1	Solution stationnaire	80
2.2	Solution transitoire	88
2.3	Problème à frontières libres perturbé	89
2.3.1	Problème équivalent	89
2.3.2	Résolution des équations intégrales	91
5	Sur un problème elliptique à n frontières libres	94
1	Introduction	94
2	Existence de la solution	96
3	Caractérisation des frontières libres	97
	Conclusion et perspectives	101
	Annexe	102
	Bibliographie	105

Table des figures

2.1	Schéma illustrant le cycle cellulaire.	39
2.2	Principales caractéristiques du cancer. Source [56].	41
2.3	Schéma représentant le développement tumoral	42
2.4	Modèles sur grille et modèles agent-centrés. Source [52].	44
2.5	Mouvement passif des cellules lié à la prolifération. Source [34]	46
2.6	Coupe transversale d'un carcinome montrant le noyau nécrotique, les cellules quiescentes, et les cellules proliférantes	46
2.7	Séquence des étapes de la croissance d'une tumeur solide. Source [71]	50
3.1	Diagrammes de bifurcation pour $\varepsilon \neq 1$	58
3.2	Graphique de la fonction g pour $\varepsilon \neq 1$	60
4.1	Diagramme de bifurcation pour $\varepsilon \in (0, 1)$	81
4.2	Graphique de la fonction h et de la fonction carrée pour $\lambda \leq \lambda_1$ et $\lambda > \lambda_1$	84

Notations

Symbole

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$k = (k_1, \dots, k_n)$$

$$|k| = \sum_{i=1}^n k_i$$

$$\chi_K$$

$$|\Omega|$$

$$\partial\Omega$$

$$B_r(x)$$

$$C_\Omega B_r(x)$$

$$D_{x_i} u = \partial_i u = u_{x_i}$$

$$D_{x_i x_j}^2 u = \partial_{ij}^2 u = u_{x_i x_j}$$

$$\nabla u = Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$$

$$D^2 u = (D_{ij} u)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\Delta u$$

$$D^k u = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}$$

$$C^\infty(\Omega)$$

$$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$$

$$D'(\Omega)$$

$$L^p(\Omega)$$

$$W^{m,p}(\Omega)$$

$$W_0^{m,p}(\Omega)$$

$$W^{-1,p'}(\Omega)$$

$$X'$$

$$\hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \hookrightarrow$$

Signification

Élément de \mathbb{R}^n .

Norme euclidienne de x dans \mathbb{R}^n .

Multi-indice, élément de \mathbb{N}^n .

Longueur du multi-indice k .

Fonction indicatrice de l'ensemble K .

Mesure de Ω .

Frontière de Ω .

Boule de centre x et de rayon r .

Complémentaire de la boule $B_r(x)$ par rapport à Ω .

Dérivée partielle de u par rapport à x_i .

Deuxième dérivée partielle de u par rapport à x_i, x_j .

Gradient de u .

Matrice Hessienne de u .

Laplacien de u .

Dérivée mixte de u .

Fonctions infiniment dérivables dans Ω .

Les fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.

Espace des distributions définies sur Ω .

Espace de Lebesgue défini sur Ω .

Espace de Sobolev défini sur Ω .

Espace de Sobolev avec trace nulle défini sur Ω .

Espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Espace dual de X .

Injection continue.

Injection compacte.

Introduction générale

Actuellement, le cancer constitue l'une des principales causes de mortalité à l'échelle mondiale, étant à l'origine d'environ un décès sur sept. Il se classe au deuxième rang des pathologies les plus mortelles dans les pays industrialisés, derrière les maladies cardiovasculaires, et occupe la troisième position dans les pays en développement, devancé par ces dernières ainsi que par les maladies infectieuses [8]. Les types de cancer les plus répandus incluent le cancer du poumon (12,3 % des cas diagnostiqués), le cancer du sein (10,4 %) et le cancer colorectal (9,4 %) [86]. Les origines exactes du cancer restent indéterminées dans près de 90 % des cas, plusieurs facteurs de risque ont été clairement établis. Parmi eux figurent l'exposition à des agents cancérigènes environnementaux (produits chimiques, rayonnements, pollution), des comportements à risque (tabagisme, alcool, sédentarité), certaines infections virales (comme le papilloma virus humain), ainsi que le vieillissement et les perturbations hormonales. Ces éléments favorisent l'apparition de mutations génétiques au sein des cellules, leur permettant de se multiplier de façon anarchique et de contourner les mécanismes d'apoptose.

Initialement, ces cellules anormales s'agrègent en une masse tumorale de forme généralement sphérique, dépourvue de vascularisation propre (phase dite « avasculaire »). Lorsque la tumeur atteint une taille critique, elle stimule la création de vaisseaux sanguins pour s'approvisionner en oxygène et en nutriments, un processus nommé « angiogenèse ». Cette transition vers un état vascularisé marque un tournant : les cellules cancéreuses acquièrent alors la capacité de migrer vers d'autres tissus ou organes via la circulation sanguine ou lymphatique, formant des métastases. Ces dernières, responsables de près de 90 % des décès liés au cancer [56, 72], illustrent la dangerosité de la maladie lorsqu'elle atteint un stade avancé.

Pour ces cas, plusieurs traitements sont disponibles en fonction de l'individu, du type de cancer et de son évolution, tels que la chirurgie, la chimiothérapie, la radiothérapie et les thérapies ciblées. Cependant, ces traitements endommagent également les cellules saines, ce qui explique pourquoi on les qualifie de cytotoxiques, et le taux de survie reste généralement faible. Depuis une vingtaine d'années, la recherche se concentre alors sur la compréhension des mécanismes impliqués dans l'apparition et le développement des tumeurs, ainsi que sur l'amélioration de ces traitements et des méthodes d'imagerie médicale qui permettent de suivre les patients.

Les premiers modèles de croissance tumorale ont été élaborés par A. V. Hill et W.V. Mayneord [58], [70] au début des années 1930. Ces approches étudiaient la diffusion dans les tissus et les cultures tissulaires, ainsi que la croissance des tumeurs sur une population de rats. Dans

les années 1970, Thomlinson et Gray [89], Burton [20], Sutherland et al. [60, 87, 88] se sont principalement intéressés à l'impact de l'oxygénation sur la croissance des tumeurs et leur résistance aux traitements, notamment la radiothérapie. Leurs recherches ont révélé que les tumeurs présentent souvent des régions où l'oxygénation est insuffisante, appelées régions hypoxiques. Ces régions sont plus résistantes aux traitements, car l'oxygène est essentiel pour que les radiations endommagent l'ADN des cellules tumorales. De plus, leurs travaux ont montré que la croissance tumorale dépend non seulement de la prolifération cellulaire, mais aussi de formation de nouveaux vaisseaux sanguins (le phénomène de l'angiogenèse).

Parmi les modèles les plus influents utilisés aujourd'hui figure celui proposé par H. P. Greenspan en 1972. Ce dernier a utilisé des équations aux dérivées partielles (EDP) de réaction-diffusion pour décrire l'évolution de la tumeur en fonction de la distribution spatiale de l'oxygène. Il a introduit l'idée de modèles à frontière libre pour représenter les interfaces entre les différentes populations cellulaires. Dans ce cadre, chaque population cellulaire est considérée comme occupant un domaine spécifique, et la frontière entre ces populations devient l'une des inconnues du modèle (voir la section 2.4).

Ce type de modélisation s'inscrit dans la classe des problèmes dits à frontière libre. Il s'agit de problèmes mathématiques, généralement formulés à l'aide d'EDP, dans lesquels la frontière entre deux régions n'est pas connue à l'avance mais fait partie de la solution. Dans le contexte tumoral, cela permet de modéliser de manière réaliste les interfaces dynamiques entre différentes régions cellulaires ou entre tissu tumoral et tissu sain. Plus généralement, ces problèmes apparaissent également en physique, en finance et en biologie. Mathématiquement, pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$ divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une frontière inconnue Γ . Le but est alors de déterminer à la fois la solution u dans Ω et la frontière Γ , telles que :

- u satisfasse l'équation différentielle dans Ω .
- Les conditions de transmissions sont imposées sur Γ , et que la solution u (ou ses dérivées) les satisfasse.

Un exemple typique de problème à frontière libre est le problème de Stefan, qui modélise le processus de fusion de la glace. Si, on note par $u(x, t)$ la température en un point x à l'instante $t > 0$, et $\Gamma(t)$ la frontière inconnue séparant la glace (où $u < 0$) et l'eau (où $u > 0$). Le modèle est donc formulé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega(t) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec la condition de Stefan, qui représente la conservation de l'énergie à la frontière entre les deux phases (glace et eau) :

$$V_n = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{glace}} - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{eau}}$$

où V_n est la vitesse normale de déplacement de la frontière $\Gamma(t)$, et $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale de u de part et d'autre de la frontière.

Pour plus de détails et pour d'autres exemples de problèmes à frontière libre, voir les références [45, 46, 64, 73, 81].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude d'une classe de problèmes à frontière libre décrivant la croissance tumorale in vitro (au stade avasculaire). Soit, $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ la région tumorale à l'instant $t > 0$, et $u(x, t)$ la concentration d'oxygène en un point x à cet instant. L'équation de réaction-diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u - \lambda f(u), \quad \text{dans } \Omega(t) \quad (2)$$

où D est le coefficient de diffusion, et $\lambda f(u)$ est le taux de consommation d'oxygène avec $\lambda > 0$. En supposant que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est négligeable en raison de la nature biologique de u à l'intérieur de $\Omega(t)$, alors nous nous concentrons sur le problème à frontière libre suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (3)$$

où \bar{u}_∞ désigne la concentration d'oxygène à la frontière $\partial\Omega(t)$, et f est une fonction discontinue. Les points de discontinuité de f donnent lieu à ce qu'on appelle des frontières libres. La forme exacte de f sera précisée ultérieurement, selon les différents cas étudiés dans ce manuscrit. Notons que l'une des principales difficultés rencontrées dans ce type de problème réside dans la fonctionnelle d'énergie associée E , définie par

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} |\nabla u(x)|^2 dx + \lambda \int_{\Omega(t)} F(u(x)) dx$$

où $F(t) = \int_0^t f(s) ds$.

Cette fonctionnelle n'est pas différentiable au sens de Fréchet, ce qui empêche l'application des méthodes variationnelles classiques. Une autre difficulté est due à la présence de deux types de frontières libres : une frontière libre extérieure $\partial\Omega(t)$, et des frontières libres intérieures, générées par la discontinuité de la fonction f .

Dans ce travail, nous proposons deux modèles distincts de croissance tumorale, construit à partir de différentes formulations de la non-linéarité f . Les principaux objectifs de cette étude peuvent être résumés comme suit :

- Dans un premier temps, nous abordons l'étude mathématique du problème dans le cas où la tumeur est modélisée par une sphère de rayon $R(t)$. Autrement dit, nous considérons $\Omega(t) = B(0, R(t))$. En raison de la symétrie du Laplacien, on s'intéresse aux solutions radiales $u = u(r)$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \lambda f(u) & 0 < r < R(t), \quad t > 0 \\ u(R(t), t) = u_\infty & \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 \end{cases}$$

Le principe de conservation de la masse régit l'évolution du rayon tumoral $R(t)$ selon la relation suivante :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}_{\text{Taux de variation du volume de la tumeur}} = \underbrace{\int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr}_{\text{Taux total de prolifération cellulaire}} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr}_{\text{Taux totale de mortalité cellulaire}}$$

Taux de variation du volume de la tumeur

Taux total de prolifération cellulaire

Taux totale de mortalité cellulaire

où $S(u)$ et $N(u)$ sont respectivement les taux locaux de prolifération et de mortalité des cellules. Donc, si l'on note par R_0 le rayon de la tumeur initiale, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = \int_0^{R(t)} S(u)r^2 dr - \int_0^{R(t)} N(u)r^2 dr \\ R(0) = R_0. \end{cases}$$

Ainsi, nous démontrons des résultats d'existence et de multiplicité des solutions $(u(r, t), R(t))$, et nous caractérisons les frontières libres générées par la fonction f pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda f(u) & 0 < r < R(t), t > 0 \\ u(R(t), t) = u_\infty, \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = \int_0^{R(t)} S(u)r^2 dr - \int_0^{R(t)} N(u)r^2 dr \\ R(0) = R_0. \end{cases} \quad (4)$$

- Ensuite, nous étudions un problème perturbé, dans lequel la tumeur est supposée être une sphère avec une petite perturbation β sur le rayon $R(t)$. Plus précisément, nous considérons un domaine $\Omega_\beta(t)$ tel que :

(C) La frontière $\partial\Omega_\beta(t)$ est paramétrée par $R(t) + \beta(\theta)$, avec $\beta \in C^2(S)$, où S est la sphère unité.

Nous étudions le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega_\beta(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta(t) \end{cases} \quad (5)$$

où \bar{u}_∞ est la concentration d'oxygène au bord $\partial\Omega_\beta(t)$, supposé proche de u_∞ .

Nous construisons des solutions du problème (5) à partir des solutions du problème (4). Pour cela, nous formulons une équation intégrale pour la solution, puis nous appliquons le théorème des fonctions implicites afin de démontrer l'existence de solutions. Nous établissons également certaines propriétés des frontières libres correspondantes.

- Finalement, nous étudions l'apparition d'un phénomène de bifurcation pour le problème (4), dans le cas où le théorème des fonctions implicites n'est plus applicable.

Ce travail se compose de cinq chapitres, organisés selon le plan suivant :

Le chapitre 1 présente un ensemble de définitions et de résultats fondamentaux nécessaires pour la suite de cette thèse, tels que les espaces de Sobolev, la théorie des points critiques et des bifurcations, le Laplacien, les fonctions harmoniques sphériques, ainsi que le développement de la fonction de Green en termes d'harmoniques sphériques. D'autres résultats essentiels à la résolution des problèmes traités y sont également exposés.

Le chapitre 2 est consacré aux aspects biologiques nécessaires à la compréhension des principaux mécanismes du cancer et des thérapies disponibles, suivi d'une section sur la modélisation mathématique de la croissance tumorale, afin de faciliter la compréhension de notre problématique et de permettre au lecteur de s'appropriier les concepts de la modélisation mathématique en oncologie.

Dans le chapitre 3, nous supposons que la tumeur évolue selon deux phases distinctes. La première correspond à une croissance exponentielle normale (où $u > \mu$). La seconde survient lorsque la disponibilité en nutriments diminue, ce qui entraîne un ralentissement de la prolifération cellulaire. Durant cette phase, les cellules de la région externe continuent de se diviser normalement, tandis que celles de la région interne voient leur croissance réduite (où $u < \mu$). On note par :

$$\Gamma(t) := \{x \in \Omega(t), \quad u(x) = \mu\}$$

la frontière inconnue qui sépare ces deux régions, et nous étudions le problème à frontière libre suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu)) & \text{dans } \Omega(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (6)$$

où $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ pour $t > 0$, et H est la fonction de Heaviside définie par :

$$H(s) = \begin{cases} 0 & , \quad s < 0 \\ 1 & , \quad s \geq 0 \end{cases}$$

avec λ , ε et \bar{u}_∞ des constantes positives, et μ une valeur critique vérifiant $0 < \mu < \bar{u}_\infty$.

Le premier résultat d'existence de solutions du problème (6) dans le cas où $\Omega(t) = B(0, R(t))$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Soit*

$$\lambda_1 := \frac{6(u_\infty - \mu)}{R^2}, \quad \lambda_2 := \frac{27(u_\infty - \mu)(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon^2 R^2 (\frac{4\varepsilon}{3} - \frac{3}{2})}$$

Alors, pour tout $\varepsilon \neq 1$ et $\lambda \geq \lambda_1$ le problème (6) possède une solution radiale positive unique u telle que la frontière libre $\Gamma(t)$ est une sphère de rayon $r_\lambda \in (0, R)$.

De plus, pour $\varepsilon > \frac{3}{2}$ et $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1$, le problème admet deux solutions positives radiales u et v , dont les frontières libres sont respectivement deux sphères de rayons \bar{r}_λ et \underline{r}_λ .

Finalement, pour $\varepsilon \in (0, 1)$, on a le comportement asymptotique suivant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R_s \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(r, t) = u_s(r)$$

avec (u_s, R_s) la solution stationnaire du problème (6).

Un deuxième résultat d'existence de solutions qui concerne le problème perturbé associé à (6), obtenu en étudiant l'effet de la perturbation β sur les solutions du problème (6) et leurs frontières libres.

Théorème 0.2. *Supposons que $\Omega(t)$ satisfait la condition (C) (voir la page 10). Alors :*

1. *Pour $\varepsilon \neq 1$, $\lambda \geq \lambda_1$ et $\lambda \neq \lambda_2$, le problème (6) admet une solution positive, et sa frontière libre est une hypersurface analytique de la forme :*

$$\Gamma(t) = \{r_\lambda + b(\theta), \quad \theta \in S\}, \quad t > 0$$

où $b \in C^{1,\alpha}$ est la perturbation causée par β , avec $0 < \alpha < 1$.

2. Pour $\varepsilon > \frac{3}{2}$ et $\lambda \in]\lambda_2, \lambda_1]$, le problème admet deux solutions positives, dont les frontières libres sont des hypersurfaces analytiques :

$$\bar{\Gamma}(t) = \{\bar{r}_\lambda + b_1(\theta), \theta \in S\}, \quad \underline{\Gamma}(t) = \{r_\lambda + b_2(\theta), \theta \in S\} \quad \text{pour } t > 0$$

où $b_1, b_2 \in C^{1,\alpha}$.

3. Dans le cas $\Omega(t) = B(0, R(t))$, si $\lambda = \lambda_2$, un phénomène de bifurcation apparaît, le problème admet alors une solution dont la frontière libre est de la forme

$$\frac{2\varepsilon - 3}{3(\varepsilon - 1)}R + s\phi_{00} + s\psi(s), \quad s \in]-\eta, +\eta[$$

où $\phi_{00} = \frac{-1}{4\pi}$ et $\psi \in C(]-\eta, +\eta[)$, avec $\eta > 0$.

Ces résultats ont fait l'objet de l'article [2].

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à l'étude des trois phases du développement de la tumeur au stade avasculaire : une phase de croissance normale (où $u > \mu_2$), suivie d'une phase de croissance ralentie conduisant à la formation d'une région hypoxique (où $\mu_1 < u < \mu_2$), puis une troisième phase caractérisée par l'apparition d'une région dite nécrotique au centre de la tumeur (où $u < \mu_1$). Nous notons par

$$\Gamma_{\mu_i}(t) := \{x \in \Omega(t), u(x) = \mu_i\}, \quad i = 1, 2$$

les frontières libres (inconnues) qui séparent ces trois régions. Dans ce contexte, nous étudions le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(u - \mu_2)) & \text{dans } \Omega(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega(t) \end{cases} \quad (7)$$

où $\varepsilon \in (0, 1)$, et μ_1, μ_2 sont les valeurs critiques vérifiant $0 < \mu_1 < \mu_2 < \bar{u}_\infty$.

Le résultat principal concernant le problème (7) dans le cas $\Omega(t) = B(0, R(t))$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.3. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\lambda_1 := \frac{6(u_\infty - \mu_2)}{R^2}$. Alors

1. Il existe $\lambda^* > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^*)$, le problème (7) admet une solution radiale unique u avec la frontière libre Γ_{μ_2} est une sphère de rayon $r_\lambda \in (0, R)$
2. Pour $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$, le problème admet une solution unique u possédant deux frontières libres Γ_{μ_1} et Γ_{μ_2} qui sont des sphères de rayons r_{λ, μ_1} et r_{λ, μ_2} respectivement.

De plus, sous l'hypothèse (4.12) nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \bar{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(r, t) = u_s(r)$$

avec (u_s, \bar{R}) la solution stationnaire du problème (7).

Un autre résultat d'existence pour le problème perturbé associé à (7) est présenté ci-dessous :

Théorème 0.4. *Supposons que $\Omega(t)$ satisfait la condition (C) (voir la page 10). Si $\lambda \geq \lambda^*$, alors le problème perturbé admet une solution positive, dont les frontières libres sont de la forme $r_{\lambda, \mu_i} + b_i(\theta)$, avec $b_i \in C(S)$ est la perturbation induite par β , pour $i = 1, 2$.*

Ces résultats ont été publiés dans l'article [1].

Dans le chapitre 5, nous généralisons les résultats d'existence et de régularité au problème à n frontières libres suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u - \mu_i) & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

où Ω est un domaine régulier borné dans \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), λ , μ_i , ε_i et \bar{u}_∞ sont des constantes positives pour $i = 1, 2, \dots, n$, vérifiant la condition :

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \bar{u}_\infty$$

Notons que ce problème ne modélise pas directement la croissance tumorale, mais il représente une extension naturelle du cadre des problèmes à frontière libre à plusieurs phases. Le résultat principal obtenu est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.5. *Le problème (8) admet au moins une solution $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, avec $\alpha \in (0, 1)$, telle que les frontières libres*

$$\Gamma_{\mu_i} = \{x \in \Omega, \quad u_\lambda(x) = \mu_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sont des hypersurfaces analytiques de classe $C^{1,\alpha}$.

Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article soumis.

Préliminaires et outils de base

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux outils de l'analyse non linéaire et rappelons les résultats essentiels utilisés tout au long de ce manuscrit. Toutefois, cette liste n'est pas exhaustive.

1 Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx . Les références de base de cette section sont [17], [35], [40], [49], [63] et [67].

1.1 Espaces de Lebesgue L^p

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}$, alors

- Pour $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

où

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

- Pour $p = +\infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{mesurable et } \exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, p.p \text{ dans } \Omega\}$$

qui est muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c, p.p \text{ dans } \Omega\}$$

Théorème 1.1. L'espace $L^p(\Omega)$ est :

- Un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.
- Un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.
- Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.

Propriété 1.1. (L'injection des espaces de Lebesgue)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de mesure finie, et soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Alors :

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

1.2 Espaces de Hölder

Définition 1.2. Soit $0 < \alpha \leq 1$, on note $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions hölderiennes sur Ω d'ordre α , défini par :

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega), \exists C > 0, \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega; |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \right\}$$

Si $\alpha = 1$, on l'appelle espace des fonctions Lipschitziennes. L'espace $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

où

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{\{(x,y) \in \Omega^2, x \neq y\}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Plus généralement, on définit l'espace $C^{m,\alpha}$ par :

$$C^{m,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega); \left(\forall k \in \mathbb{N}^n, |k| = m \right), D^k u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \right\}$$

Il est muni de la norme

$$\|u\|_{m,\alpha} = \sum_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{|k|=m} [D^k u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

$(C^{m,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{m,\alpha})$ est un espace de Banach et on a

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1); 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1 \implies C^{m,\alpha_2}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha_1}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\Omega)$$

avec des inclusions strictes.

1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}$

Dans cette sous-section nous introduisons les espaces de Sobolev d'ordre entier et leurs propriétés fondamentales.

Définition 1.3. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall k \in \mathbb{N}^n, |k| \leq m, D^k u \in L^p(\Omega) \right\}$$

Ici $D^k u$ est la dérivée au sens des distributions de u sur Ω , c.à.d

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \langle D^k u, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle u, D^k \varphi \rangle$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

- pour $1 \leq p < +\infty$:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- pour $p = +\infty$

$$\|u\|_{W^{m,+\infty}(\Omega)} := \max_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Proposition 1.1. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est :*

- Un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.
- Un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.
- Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.

Définition 1.4. *On définit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. Si Ω est un ouvert régulier, alors pour toute fonction $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on a*

$$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}^n, |k| \leq (n-1) \right) D^k u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Théorème 1.2. *Soit $p \in [1, +\infty[$, alors*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 1.3. (Injection continue des espaces de Sobolev)

Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

1. *Si $n > mp$, alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \text{ pour } p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$$

2. *Si $n = mp$, alors :*

- *Si $p > 1$, alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \text{ pour } p \leq q < +\infty.$$

- *Si $p = 1$, alors :*

$$W^{m,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$$

où $C_b(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R}^n .

3. *Si $n < mp$, alors :*

- *Pour $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ et j satisfait $(j-1)p < n < jp$, on a :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{m-j,\alpha}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } 0 < \alpha < j - \frac{n}{p}$$

où $C_b^{m-j,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions holdériennes bornées sur \mathbb{R}^n d'ordre α .

- *Pour $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geq j = \frac{n}{p} + 1$*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{m-j,\alpha}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } 0 < \alpha < 1.$$

Théorème 1.4. (Théorème de Rellich-Kondrachov)

Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien de \mathbb{R}^n avec $n > 1$.

- *Si $n > mp$, alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ pour } q \leq \frac{np}{n-mp}$$

- *Si $n = mp$, alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

- *Si $n < mp$, alors et $j = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + 1$ alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m-j,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ pour } \alpha < j - \frac{n}{p}.$$

Remarque 1.1. *On note que dans le théorème précédent, sans hypothèse de régularité sur $\partial\Omega$, on peut remplacer $W^{m,p}(\Omega)$ par $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

2 Dérivées et points critiques

Dans cette section, nous présentons une brève introduction à la théorie des dérivées et des points critiques dans le cas régulier.

Définition 1.5. (*Dérivée directionnelle [63]*)

Soient Ω une partie d'un espace de Banach X et $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \Omega$ et $v \in X$ sont tels que, pour $t > 0$ suffisamment petit, $u + tv \in \Omega$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite $J'_v(u)$.

Définition 1.6. (*Dérivée au sens de Gâteaux [63]*)

On dit que la fonction J définie d'un ouvert Ω d'un espace de Banach X à valeurs réelles est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in \Omega$ s'il existe $l \in X'$ tel que, dans chaque direction $v \in X$ où $J(u + tv)$ est définie pour $t > 0$ suffisamment petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle l, v \rangle$$

On posera $J'_g(u) = l$.

Définition 1.7. (*Dérivée au sens de Fréchet [63]*)

Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert de X et $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $u \in \Omega$, on dit que J est différentiable en u au sens de Fréchet s'il existe $l \in X'$ tel que :

$$\forall v \in \Omega \quad J(v) - J(u) = \langle l, v - u \rangle + o(v - u)$$

Si J est différentiable au sens de Fréchet, l est unique et on note $J'(u) = l$.

Proposition 1.2. ([63]). Soient Ω un ouvert de X et $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable dans un voisinage de $u \in \Omega$. Si l'application $u \rightarrow J'_g(u)$ est continue au voisinage de u , alors J est Fréchet différentiable en u et on a

$$J'(u) = J'_g(u).$$

Proposition 1.3. ([63]). Soient X un espace de Banach et Ω un ouvert de X . Si $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est Fréchet différentiable en un point $u \in \Omega$, alors J est continue en u .

Définition 1.8. ([63]). Soit X un espace de Banach. On note l'ensemble des fonctions continûment différentiables de X dans \mathbb{R} par $C^1(X)$. Si $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout $u \in X$ et que sa dérivée J' est continue, alors J est dit de classe $C^1(X)$.

Définition 1.9. ([63]). Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$ et $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On note par $C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions J m -fois continûment différentiable sur Ω .

En particulier, si $m = \infty$ alors

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$$

est l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω .

Définition 1.10. (*Points critiques [63]*)

Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\Omega)$. On dit que $u \in \Omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J .

Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J s'il existe $u \in \Omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de J .

3 Hypersurface analytique

Nous rappelons dans cette section deux notions essentielles de géométrie différentielle à savoir l'hypersurface et la frontière analytique.

Définition 1.11. (*Hypersurface*). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$, avec $\alpha \in (0, 1)$. On dit que l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \quad f(x) = 0\}$$

est une hypersurface régulière de \mathbb{R}^n de classe $C^{1,\alpha}$ si $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \neq (0, 0, \dots, 0)$ pour tout $a \in \mathcal{H}$.

Définition 1.12. (*Fonction analytique*). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite analytique réelle sur Ω , si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $s > 0$ et une suite de constantes $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < s$$

Définition 1.13. (*Frontière analytique*) Soit $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On dit que la frontière $\partial\omega$ est analytique si, pour tout point $x_0 \in \partial\omega$, il existe $s > 0$ et une fonction analytique $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in B(x_0, s)$, on ait :

$$\omega \cap B(x_0, s) = \{x \in B(x_0, s), \quad x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

où $B(x_0, s)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon s dans \mathbb{R}^n .

4 Théorie locale des bifurcations

Cette section est consacrée à la présentation de trois théorèmes fondamentaux. Le premier est le théorème des fonctions implicites, suivi du théorème de l'application ouverte. Enfin, nous présenterons le théorème de Crandall et Rabinowitz, qui constitue la base principale de la théorie de la bifurcation à partir d'une valeur propre simple.

4.1 Quelques théorèmes fondamentaux

Soient X, Y, Z des espaces de Banach, et $V \subset X, U \subset Y$ deux ensembles ouverts.

Théorème 1.5. (*Théorème des fonctions implicites [19]*)

Soit $f \in C^k(V \times U, Z)$, avec $k \geq 1$ et soit $(\lambda^*, u^*) \in V \times U$ tel que

$$f(\lambda^*, u^*) = 0$$

Si $D_u f(\lambda^*, u^*)$ est une application linéaire continue inversible, alors il existe un voisinage V^* de λ^* , un voisinage U^* de u^* et une application $\varphi \in C^k(V^*, U^*)$ telle que

$$f(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in V^* \times U^* \Leftrightarrow u = \varphi(\lambda)$$

De plus, La différentielle de φ en λ^* est donnée par la formule :

$$D\varphi(\lambda^*) = -\left(D_u f(\lambda^*, u^*)\right)^{-1} \circ D_\lambda f(\lambda^*, u^*).$$

Preuve du Théorème 1.5.

Commençons la démonstration par une petite digression. En effet, posons

$$\tilde{V} := \{v - \lambda^*, v \in V\} \text{ (le translaté de } V \text{ par le vecteur } -\lambda^*)$$

$$\tilde{U} := \{u - u^*, u \in U\} \text{ (le translaté de } U \text{ par le vecteur } -u^*)$$

Soit la fonction $\tilde{f} : \tilde{V} \times \tilde{U} \rightarrow Y$ définie par

$$\tilde{f}(\lambda, u) = \left(D_u f(\lambda^*, u^*)\right)^{-1} \left(f(\lambda + \lambda^*, u + u^*)\right)$$

Ce qui implique

$$\tilde{f}(0, 0) = \left(D_u f(\lambda^*, u^*)\right)^{-1} \left(f(\lambda^*, u^*)\right) = 0$$

et

$$D_u \tilde{f}(0, 0) = \left(D_u f(\lambda^*, u^*)\right)^{-1} \left(D_u f(\lambda^*, u^*)\right) = I_Y$$

On a donc, réduit le problème au cas $Y = Z$, $\lambda^* = 0$, $u^* = 0$ et $D_u f(0, 0) = I_Y$, ce que nous supposons dans la suite. Ainsi, posons $g(\lambda, u) = u - f(\lambda, u)$ donc

$$f(\lambda, u) = 0 \Leftrightarrow g(\lambda, u) = u$$

c.à.d, u est un point fixe de l'application $g_\lambda(u) := g(\lambda, u)$.

D'autre part, comme g est une fonction de classe C^1 , $g(0, 0) = 0$ et $D_u g(0, 0) = I_Y - D_u f(0, 0) = 0$. Par continuité de $D_u g$ en $(0, 0)$, il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que

$$\|D_u g(\lambda, u)\| \leq \frac{1}{2}, \forall \lambda \in \overline{B}(0, r) \subset V, u \in \overline{B}(0, s) \subset U.$$

Par le théorème des accroissements finis, nous avons

$$\|g(\lambda, u) - g(\lambda, u')\| \leq \frac{1}{2} \|u - u'\|, \forall \lambda \in \overline{B}(0, r), \forall u, u' \in \overline{B}(0, s).$$

Pour r suffisamment petit, on a

$$\|g(\lambda, 0)\| \leq \frac{s}{2}, \forall \lambda \in \overline{B}(0, r)$$

D'où, pour tout $\lambda \in \overline{B}(0, r)$ et $u \in \overline{B}(0, s)$, nous avons

$$\|g(\lambda, u)\| \leq \|g(\lambda, u) - g(\lambda, 0)\| + \|g(\lambda, 0)\| \leq \frac{1}{2}\|u\| + \frac{s}{2} \leq s.$$

Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} g_\lambda : \overline{B}(0, s) &\rightarrow \overline{B}(0, s) \\ u &\rightarrow g_\lambda(u) = g(\lambda, u) \end{aligned}$$

vérifie

$$\|g_\lambda(u) - g_\lambda(u')\| \leq \frac{1}{2}\|u - u'\|.$$

Donc, g_λ est une application strictement contractante de la boule fermée $\overline{B}(0, s)$ dans elle même. D'après le théorème du point fixe, g_λ admet un unique point fixe $\varphi(\lambda) \in \overline{B}(0, s)$, c.à.d $u = \varphi(\lambda)$. De plus, l'application $\varphi : \overline{B}(0, r) \rightarrow \overline{B}(0, s)$ est continue et vérifie

$$u = \varphi(\lambda) \Leftrightarrow f(\lambda, \varphi(\lambda)) = 0, \quad \forall \lambda \in \overline{B}(0, r), \quad u \in \overline{B}(0, s).$$

Maintenant, pour $\lambda, \lambda + h \in \overline{B}(0, r)$, posons $L = \varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)$. Alors

$$0 = f(\lambda + h, \varphi(\lambda + h)) = f(\lambda + h, \varphi(\lambda) + L) = D_\lambda f(\lambda, \varphi(\lambda)).h + D_u f(\lambda, \varphi(\lambda)).L + o(\|h\|, \|L\|)$$

d'où

$$L = -\left(D_u f(\lambda, \varphi(\lambda))\right)^{-1} \circ D_\lambda f(\lambda, \varphi(\lambda)).h + o(\|h\|).$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \overline{B}(0, r)$, on a

$$D\varphi(\lambda) = -\left(D_u f(\lambda, \varphi(\lambda))\right)^{-1} \circ D_\lambda f(\lambda, \varphi(\lambda))$$

Pour montrer que φ est de classe C^k il suffit de vérifier que $\left(D_u f(\lambda, \varphi(\lambda))\right)^{-1}$ est de classe C^{k-1} . Ceci termine la preuve du théorème 1.5. ■

Remarque 1.2.

Soient $V \subset \mathbb{R}^q$ et $U \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts, et $f : V \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 définie par

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_p(x, y))$$

Soit $(x_0, y_0) \in V \times U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $D_y f(x_0, y_0) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^p)$, c.à.d

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \neq 0$$

Alors il existe un voisinage V_0 de x_0 , un voisinage U_0 de y_0 et une application $g \in C^1(V_0, U_0)$ telle que

$$\forall (x, y) \in V_0 \times U_0, \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$$

De plus, la dérivée de g en x_0 est donnée par

$$Dg(x_0) = -\left(D_y f(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ D_x f(x_0, y_0).$$

Si f est de classe C^k , $k \geq 1$, il en est de même pour g .

Théorème 1.6. (*Théorème de l'application ouverte [17]*)

Soit f une application linéaire continue et surjective de X sur Y . Alors, f une application ouverte, c.à.d qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$f(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, c)$$

où $B_X(0, 1)$ est la boule ouverte de rayon 1 dans X centrée en 0, et $B_Y(0, c)$ est la boule ouverte de rayon c dans Y centrée en 0.

Preuve du Théorème 1.6.

On pose $Y_r = \overline{f(B_X(0, r))}$ pour $r > 0$. Puisque f est une application linéaire et surjective, nous avons

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n$$

Par le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Y_{n_0} a un intérieur non vide. Par conséquent, pour tout $r > 0$, $Y_r = \frac{r}{n_0} Y_{n_0}$ a un intérieur non vide.

Maintenant, soient $r_0 > 0$ et $y \in Y$ tels que

$$B_Y(y, r_0) \subset Y_{\frac{1}{2}}.$$

Alors, en utilisant la symétrie de $Y_{\frac{1}{2}}$ par rapport à 0, nous avons

$$B_Y(-y, r_0) \subset Y_{\frac{1}{2}}$$

Par addition et par convexité de $Y_{\frac{1}{2}}$, nous obtenons

$$B_Y(0, r_0) \subset Y_{\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}} = 2Y_{\frac{1}{2}} \subseteq Y_1$$

Ainsi, si $y \in Y_r$, il existe $x \in B_X(0, r)$ tel que $y - f(x) \in Y_{\frac{1}{2}}$. Appliquant cela à $y \in Y_1$, on trouve un $x_1 \in B_X(0, 1)$ tel que $y - f(x_1) \in Y_{\frac{1}{2}}$. Puis, par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $x_n \in B_X(0, \frac{1}{2^n})$ telle que

$$y - f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \in Y_{\frac{1}{2^n}}$$

Comme,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge vers un $x \in \overline{B_X(0, 2)}$. Par continuité de f , on a alors $y = f(x)$, et les inclusions suivantes s'en déduisent :

$$f(B_X(0, 4)) \supset \overline{f(B_X(0, 2))} \supset Y_1 \supset B_Y(0, r_0)$$

Ainsi, pour $c = \frac{r_0}{4}$, on obtient $f(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, c)$.

La preuve du théorème 1.6 est complète. ■

Corollaire 1.1. (*[17]*). Soit f une application linéaire continue et bijective de X sur Y . Alors, f^{-1} est continue, et f est un isomorphisme entre X et Y .

Corollaire 1.2. (*[17]*). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire continue et surjective entre deux espaces de Banach. Alors, f induit, par passage au quotient, un isomorphisme entre les espaces de Banach $X \setminus \mathcal{N}(f)$ et Y , où $\mathcal{N}(f)$ désigne le noyau de f .

4.2 Bifurcation à partir d'une valeur propre simple

Soient X et Y deux espaces de Banach, $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ et $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ un opérateur tel que $f(\lambda_0, u_0) = 0$. L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les solutions non triviales de l'équation

$$f(\lambda, u) = 0$$

dans un voisinage de (λ_0, u_0) .

Définition 1.14. ([7]). Soit $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ une application continue. On considère l'équation de la forme

$$f(\lambda, u) = 0 \tag{1.1}$$

qui vérifie la condition

$$f(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

La solution $(\lambda, 0)$ est appelée solution triviale de l'équation (1.1). L'ensemble des solutions non triviales de cette équation, noté S , est défini par :

$$S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X, u \neq 0, f(\lambda, u) = 0\}$$

Définition 1.15. ([7]). On dit que $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation s'il existe une suite $(\lambda_n, u_n) \in S$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda^*, 0)$$

Autrement dit, $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation si et seulement si tout voisinage de $(\lambda^*, 0)$ contient une solution non triviale de l'équation (1.1).

La caractérisation de ce point est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.4. ([7]). Si $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation de f , alors la dérivée partielle $D_u f(\lambda^*, 0)$ n'est pas inversible.

Preuve.

Supposons que $D_u f(\lambda^*, 0) : X \rightarrow Y$ est inversible. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $I \times V$ de $(\lambda^*, 0)$ et une application $\varphi : I \rightarrow V \subset X$ telle que $\varphi(\lambda^*) = 0$ et

$$f(\lambda, \varphi(\lambda)) = 0, \quad \forall \lambda \in I$$

Par l'hypothèse (1.2), on a $f(\lambda, 0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui implique $\varphi(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in I$. Cela signifie que f possède $(\lambda, 0)$ comme unique solution dans un voisinage de $(\lambda^*, 0)$. Ainsi, $(\lambda^*, 0)$ ne peut pas être un point de bifurcation pour f .

Ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Définition 1.16. ([66]). Soient A, B deux opérateurs linéaires bornées de X dans Y . Alors $\sigma \in \mathbb{R}$ est appelée valeur propre de (A, B) ou B -valeur propre de A si 0 est une valeur propre de $A - \sigma B$, c.à.d, si

$$\dim \mathcal{N}(A - \sigma B) \geq 1$$

Définition 1.17. ([31]). Soient A, B deux opérateurs linéaires bornés de X dans Y , et soit $x_0 \in X$. On dit que, $\sigma \in \mathbb{R}$ est une valeur propre simple de (A, B) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) $\dim \mathcal{N}(A - \sigma B) = \text{codim} \mathcal{R}(A - \sigma B) = 1$.
- 2) Si $\mathcal{N}(A - \sigma B) = [x_0]$, alors $Bx_0 \notin \mathcal{R}(A - \sigma B)$.

Remarque 1.3. Si $X \subset Y$ et $B = I_Y$, où I_Y est l'opérateur d'identité sur Y , on dit simplement que σ est une valeur propre simple de A .

Définition 1.18. ([50]). Un opérateur linéaire continue $A : X \rightarrow Y$ est dite de Fredholm si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{N}(A)$ est un sous-espace de X de dimension finie.
2. $\mathcal{R}(A)$ est un sous-espace fermé de Y de codimension finie.

Définition 1.19. ([50]). Si A est un opérateur de Fredholm, l'indice de A est l'entier :

$$\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) - \text{codim} \mathcal{R}(A)$$

Lemme 1.1. ([30]) Soient X et Y deux espaces de Banach, V un voisinage de 0 dans X , et $f : (-1, 1) \times V \rightarrow Y$ une application continue satisfaisante les hypothèses suivantes :

- 1) $f(\lambda, 0) = 0$ pour $|\lambda| < 1$.
- 2) Les dérivées partielles $D_\lambda f$, $D_u f$ et $D_{\lambda, u}^2 f$ sont continues.
- 3) $\dim \mathcal{N}(D_u f(0, 0)) = \text{Codim} \mathcal{R}(D_u f(0, 0)) = 1$.
- 4) La dérivée mixte $D_{u, \lambda}^2 f(0, 0)u^* \notin \mathcal{R}(D_u f(0, 0))$, où $u^* \in \mathcal{N}(D_u f(0, 0)) \setminus \{0\}$.

Alors, il existe un voisinage U de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times V$ et une fonction g continue sur \mathbb{R} avec $g(0) = 0$, tels que pour $s \in \mathbb{R}$, et $z \in Z$ où Z est le complémentaire de $\mathcal{N}(D_u f(0, 0))$ dans X , on ait :

$$f(\lambda, su^* + z) = 0, \quad \forall (\lambda, su^* + z) \in U.$$

De plus, la relation suivante est vérifiée :

$$\|z\| + |s||\lambda| \leq |s|g(s).$$

Preuve.

D'après l'hypothèse 2), l'application f est de classe C^1 , donc il existe un voisinage U_1 de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times V$ et une fonction continue $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $h(0) = 0$, telles que pour tout $(\lambda, su^* + z) \in U_1$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|f(\lambda, su^* + z) - f(\lambda, su^*) - D_u f(\lambda, su^*)z\| &\leq \|z\| h(\|z\|). \\ \|f(\lambda, su^*) - f(\lambda, 0) - sD_u f(\lambda, 0)u^*\| &\leq |s| h(|s|). \\ \|D_u f(\lambda, 0)u^* - \lambda D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*\| &\leq |\lambda| h(|\lambda|). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ces inégalités sont obtenues en utilisant les hypothèses de continuité des dérivées de f et en appliquant un développement de Taylor au voisinage de $(\lambda, 0)$. Ainsi, on considère $f(\lambda, su^* + z) = 0$ avec $f(\lambda, 0) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 0 &= f(\lambda, su^* + z) = f(\lambda, su^* + z) - f(\lambda, su^*) + f(\lambda, su^*) - f(\lambda, 0) \\
 &= \left(f(\lambda, su^* + z) - f(\lambda, su^*) - D_u f(\lambda, su^*)z \right) + \left(D_u f(\lambda, su^*)z - D_u f(0, 0)z \right) \\
 &+ \left(f(\lambda, su^*) - f(\lambda, 0) - sD_u f(\lambda, 0)u^* \right) + s \left(D_u f(\lambda, 0)u^* - \lambda D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^* \right) \\
 &+ \left(D_u f(0, 0)z + \lambda s D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^* \right).
 \end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned}
 \|D_u f(0, 0)z + \lambda s D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*\| &= \|(f(\lambda, su^* + z) - f(\lambda, su^*) - D_u f(\lambda, su^*)z) \\
 &+ (D_u f(\lambda, su^*)z - D_u f(0, 0)z) + (f(\lambda, su^*) - f(\lambda, 0) - sD_u f(\lambda, 0)u^*) \\
 &+ s(D_u f(\lambda, 0)u^* - \lambda D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*)\| \\
 &\leq \|f(\lambda, su^* + z) - f(\lambda, su^*) - D_u f(\lambda, su^*)z\| \\
 &+ \|D_u f(\lambda, su^*)z - D_u f(0, 0)z\| + \|f(\lambda, su^*) - f(\lambda, 0) - sD_u f(\lambda, 0)u^*\| \\
 &+ |s| \|D_u f(\lambda, 0)u^* - \lambda D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*\|
 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (1.3), on obtient :

$$\|D_u f(0, 0)z + \lambda s D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*\| \leq \|z\| h(\|z\|) + \|D_u f(\lambda, su^*) - D_u f(0, 0)\| \|z\| + |s| h(|s|) + |s| |\lambda| h(|\lambda|).$$

D'après les hypothèses 3) et 4) l'application linéaire $D_u f(0, 0)z + \lambda s D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*$ est bijective. Donc, par le théorème d'application ouverte, cette application est un isomorphisme. Ainsi, il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\|D_u f(0, 0)z + \lambda s D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^*\| \geq k(\|z\| + |s| |\lambda|), \quad \forall s, \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall z \in Z$$

Cela donne l'inégalité suivante :

$$k(\|z\| + |s| |\lambda|) \leq \|z\| h(\|z\|) + \|D_u f(\lambda, su^*) - D_u f(0, 0)\| \|z\| + |s| h(|s|) + |s| |\lambda| h(|\lambda|).$$

Nous choisissons maintenant un voisinage U de $(0, 0)$ tel que pour tout $(\lambda, su^* + z) \in U$, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$h(\|z\|) \leq \frac{k}{4}, \quad \|D_u f(\lambda, su^*) - D_u f(0, 0)\| \leq \frac{k}{4}, \quad |h(\lambda)| \leq \frac{k}{2}$$

Ce qui permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$k(\|z\| + |s| |\lambda|) \leq \frac{k}{2}\|z\| + |s| h(|s|) + \frac{k}{2}|s| |\lambda|$$

Ainsi,

$$\|z\| + |s| |\lambda| \leq \frac{2}{k}|s| h(|s|) := |s| g(s)$$

où $g(s) = \frac{2}{k}h(|s|)$.

Donc, on a montré qu'il existe une fonction continue g telle que $g(0) = 0$, et que l'on a :

$$\|z\| + |s| |\lambda| \leq |s| g(s), \quad \forall z \in Z$$

Cela conclut la preuve de l'existence d'un voisinage U et d'une fonction g continue satisfaisant les conditions du lemme 1.1. ■

Théorème 1.7. (Crandall-Rabinowitz [30])

Soient X et Y deux espaces de Banach, V un voisinage de 0 en X , et $f : (-1, 1) \times V \rightarrow Y$ une application continue vérifiant les hypothèses du lemme 1.1.

Soit Z est le complémentaire de $\mathcal{N}(D_u f(0, 0))$ dans X . Alors il existe un voisinage U de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times X$, un intervalle $(-\eta, +\eta)$ et des fonctions continues $\varphi : (-\eta, +\eta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : (-\eta, +\eta) \rightarrow Z$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\varphi(0) = 0$.
- $\psi(0) = 0$.
- $f^{-1}(0) \cap U = \{(\varphi(s), su^* + s\psi(s)), |s| < \eta\} \cup \{(\lambda, 0), (\lambda, 0) \in U\}$.

Preuve du Théorème 1.7.

Soit la fonction h définie par

$$h : \mathbb{R}^2 \times Z \rightarrow Y$$

$$(s, \lambda, z) \rightarrow h(s, \lambda, z) = \begin{cases} s^{-1}f(\lambda, s(u^* + z)) & , s \neq 0 \\ D_u f(\lambda, 0)(u^* + z) & , s = 0 \end{cases}$$

où $s(u^* + z) \in V$ et $|\lambda| < 1$.

Les dérivées partielles $D_z h$, $D_\lambda h$ existent et sont continues en (s, λ, z) et $\mathcal{N}(D_u f(0, 0)) = [u^*]$.

De plus, on a

$$h(0, 0, 0) = D_u f(0, 0)u^* = 0$$

La dérivée au sens de Fréchet de l'application $(\lambda, z) \rightarrow h(0, \lambda, z)$ par rapport à (λ, z) en $(0, 0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle h'(0, 0, 0), (\lambda, z) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(0, t\lambda, tz) - h(0, 0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_u f(t\lambda, 0)(u^* + tz)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_u f(t\lambda, 0)u^*}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_u f(t\lambda, 0)tz}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(D_u f(t\lambda, 0) - D_u f(0, 0))u^*}{t} + D_u f(0, 0)z \\ &= \lambda D_{\lambda, u}^2 f(0, 0)u^* + D_u f(0, 0)z \end{aligned}$$

Ainsi, l'application linéaire

$$h'(0, 0, 0) : \mathbb{R} \times Z \rightarrow Y$$

est continue. D'après les hypothèses 3) et 4) du lemme 1.1, on remarque que l'application $h'(0, 0, 0)$ est bijective et par le théorème de l'application ouverte, on en déduit que $h'(0, 0, 0)$

est un isomorphisme sur Y .

En appliquant le théorème des fonctions implicites, il existe deux applications continues φ et ψ définies sur un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R} telles que

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0$$

et

$$h(s, \varphi(s), \psi(s)) = 0, \quad s \simeq 0$$

Pour montrer l'unicité des solutions, on utilise le lemme 1.1 qui garantit l'existence d'un voisinage U_1 de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times V$ et d'une fonction g continue sur \mathbb{R} telle que :

$$f(\lambda, su^* + z) = 0, \quad \text{pour } (\lambda, su^* + z) \in U_1$$

et

$$\|z\| + |s| |\lambda| \leq |s| g(s), \quad \forall z \in Z$$

Dons, si $s = 0$ on a $z = 0$ et si $s \neq 0$ on obtient

$$\|s^{-1}z\| + |\lambda| \leq g(s).$$

Par la définition de h , on a :

$$h(s, \lambda, s^{-1}z) = s^{-1}f(\lambda, su^* + z) = 0$$

Pour s suffisamment petit et puisque $g(0) = 0$, nous avons

$$\|s^{-1}z\| + |\lambda| \simeq 0$$

Ainsi,

$$h(s, \varphi(s), \psi(s)) = h(s, \lambda, s^{-1}z) = 0$$

Ce qui donne les relations suivantes pour s proche de 0 :

$$\begin{cases} \lambda &= \varphi(s) \\ z &= s\psi(s) \end{cases}$$

En conclusion, nous avons :

$$(\lambda, su^* + z) = (\varphi(s), su^* + s\psi(s)).$$

La démonstration du théorème 1.7 est donc complète. ■

Maintenant, soit V^* un voisinage de λ^* avec $f(\lambda, 0) = 0$ pour tout $\lambda \in V^*$. On définit par

$$L(\lambda) := D_u f(\lambda, 0) : X \rightarrow Y$$

l'opérateur de Fredholm d'indice zéro. Si 0 est une valeur propre simple de $(L(\lambda^*), L'(\lambda^*))$, où $L'(\lambda^*)$ est la dérivée de L par rapport à λ en λ^* , alors, d'après le théorème de Crandall-Rabinowitz, nous obtenons que $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation. Nous pouvons maintenant en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1.3. ([66]). *Supposons que $f(\lambda, u)$ est une application de classe C^r pour $r \geq 2$, telle que*

$$f(\lambda, 0) = 0, \quad \text{pour tout } \lambda \in V^*$$

et que 0 est une valeur propre simple de $(L(\lambda^), L'(\lambda^*))$. Soit $Z \subset X$ un sous espace tel que :*

$$\mathcal{N}(L(\lambda^*)) \oplus Z = X$$

Alors, le point $(\lambda^, 0)$ est un point de bifurcation, et il existe $\eta > 0$, ainsi que deux applications de classe C^{r-1} :*

$$\varphi : (-\eta, +\eta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : (-\eta, +\eta) \rightarrow Z$$

telles que :

- $\varphi(0) = \lambda^*, \psi(0) = 0$.
- *pour chaque $s \in (-\eta, +\eta)$, nous avons :*

$$f(\varphi(s), s\phi_0 + s\psi(s)) = 0$$

où $\phi_0 \in X \setminus \{0\}$ est tel que $\mathcal{N}(L(\lambda^)) = [\phi_0]$.*

De plus, il existe $r^ > 0$ tel que si $f(\lambda, u) = 0$ et $(\lambda, u) \in B_{r^*}(\lambda^*, 0)$, alors soit $u \equiv 0$, soit $(\lambda^*, u) = (\varphi(s), s\phi_0 + s\psi(s))$ pour un certain $s \in (-\eta, \eta)$, où $B_{r^*}(\lambda^*, 0)$ est la boule de centre $(\lambda^*, 0)$ et de rayon r^* .*

Preuve.

Étant donné que 0 est une valeur propre simple de $(L(\lambda^*), L'(\lambda^*))$, nous en déduisons que :

$$\dim \mathcal{N}(L(\lambda^*)) = \text{Codim} \mathcal{R}(L(\lambda^*)) = 1$$

Autrement dit,

$$\dim \mathcal{N}(D_u f(\lambda^*, 0)) = \text{Codim} \mathcal{R}(D_u f(\lambda^*, 0)) = 1$$

De plus, nous avons $L'(\lambda^*)\phi_0 \notin \mathcal{R}(L(\lambda^*))$, avec $\mathcal{N}(L(\lambda^*)) = [\phi_0]$, ce qui implique que

$$D_{u,\lambda}^2 f(\lambda^*, 0)\phi_0 \notin \mathcal{R}(D_u f(\lambda^*, 0)).$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 1.7 sont satisfaites. En particulier, $\mathcal{N}(L(\lambda^*)) \oplus Z = X$, c.à.d Z est le complémentaire de $\mathcal{N}(D_u f(0, 0))$ dans X .

Par le théorème 1.7, nous concluons que $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation et qu'il existe un voisinage de $(\lambda^*, 0)$, un intervalle $(-\eta, +\eta)$ et deux fonctions de classe C^{r-1} ;

$$\varphi : (-\eta, +\eta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : (-\eta, +\eta) \rightarrow Z$$

satisfaisant les conditions suivantes :

$$\varphi(0) = \lambda^*, \quad \psi(0) = 0$$

$$f(\varphi(s), s\phi_0 + s\psi(s)) = 0, \quad \forall s \in (-\eta, +\eta)$$

Cela conclut la démonstration du corollaire 1.3. ■

5 Formes classiques du principe du maximum

Dans cette section, nous introduisons une version du principe du maximum pour le Laplacien. Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^n . Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.8. ([49]) *Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que*

$$-\Delta u \geq 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.4)$$

Alors,

$$\inf_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad (1.5)$$

En particulier, si $u(x) \geq 0$, pour tout $x \in \partial\Omega$, alors

$$u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Remarque 1.4.

1. Si $\Delta u \geq 0$ dans Ω , en considérant $-u$, on déduit du théorème 1.8, que :

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

2. Si $\Delta u = 0$ dans Ω , on obtient :

$$\inf_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y), \quad \forall x \in \Omega$$

Preuve du Théorème 1.8.

Tout d'abord, nous traitons le cas où la fonction u vérifie l'hypothèse plus forte (inégalité stricte) suivante :

$$-\Delta u > 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.6)$$

Comme $\overline{\Omega}$ est un fermé borné et u une fonction continue, il existe un point $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$u(x_0) = \inf_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$$

Nous avons alors l'alternative suivante :

1. Si $x_0 \in \partial\Omega$, alors l'équation (1.5) est vérifiée.
2. Si $x_0 \in \Omega$, on peut alors écrire la forme classique de minimalité sous la forme :

$$\nabla u(x_0) = 0, \quad D^2u(x_0) \geq 0$$

c.à.d. la matrice symétrique $D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive en x_0 . On en déduit donc,

$$\Delta u(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \geq 0.$$

Cela contredit (1.6). Par conséquent, l'alternative 2. est exclue, ce qui établit l'équation (1.5) sous l'hypothèse (1.6).

Nous allons maintenant prouver (1.5) lorsque u vérifie l'hypothèse (1.4). L'idée est de construire une fonction $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ qui vérifie (1.6). Par exemple, soit x_1 la première coordonnée de \mathbb{R}^n , et considérons la fonction

$$\varphi(x) = -\exp(x_1), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Nous avons,

$$-\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x) = \exp(x_1) > 0$$

Posons $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$ pour $\varepsilon > 0$, nous obtenons

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = -\Delta u(x) - \varepsilon\Delta\varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

c.à.d u_ε vérifie (1.6), ce qui implique

$$\inf_{x \in \Omega} u_\varepsilon(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

Comme $u_\varepsilon \rightarrow u$ uniformément quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit (1.5). Cela termine la preuve du théorème 1.8. ■

Le résultat précédent peut être généralisé aux opérateurs du type

$$Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + cu$$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

où les fonctions a_{ij} définies sur Ω sont continues, symétriques $a_{ij}(\cdot) = a_{ji}(\cdot)$ et vérifient :

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \alpha_2 |\xi|^2$$

c.a.d l'opérateur A (respectivement L) est elliptique dans Ω , avec c une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, telle que

$$c(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [18, 27, 49, 65].

6 Représentation de la fonction de Green par harmoniques sphériques

Dans cette section, nous présentons certaines propriétés des polynômes de Legendre et de la théorie des harmoniques sphériques, ainsi que quelques fonctions essentielles pour la suite.

6.1 Rappel sur les polynômes de Legendre

Définition 1.20. ([39]). Soit $t \in [-1, 1]$, on appelle $P_n(t)$ un polynôme de Legendre de degré n si et seulement s'il satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $P_n(1) = 1$.
2. Pour $t \in (-1, 1)$, on a :

$$\frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{d}{dt} P_n(t) \right) + n(n+1)P_n(t) = 0$$

De plus, $P_n(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$P_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} t^{n-2k}$$

où

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & , \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 1.5. (Formule de Rodrigue [39]).

Pour $-1 \leq t \leq 1$, la formule de Rodrigue est donnée par :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Preuve de Proposition 1.5. D'après la formule du binôme de Newton, nous avons :

$$(t^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (-1)^k t^{2n-2k}$$

Ce qui implique

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (-1)^k \frac{d^n}{dt^n} t^{2n-2k}$$

On remarque que

$$k > \frac{n}{2} \implies \frac{d^n}{dt^n} t^{2n-2k} = 0$$

Donc, on peut remplacer $\sum_{k=0}^n$ par $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ainsi, si $k \leq \frac{n}{2}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} t^{2(n-k)} &= [2(n-k)] [2(n-k) - 1] \dots [2(n-k) - n + 1] t^{2(n-k)-n} \\ &= \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} t^{n-2k} \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n (n-2k)! (n-k)! k!} t^{n-2k} = P_n(t)$$

Cela termine la preuve du proposition 1.5. ■

Une autre propriété nécessaire des polynômes de Legendre est énoncée dans la proposition suivante :

Proposition 1.6. (*Fonction génératrice*)

Pour $0 \leq x < 1$ et $-1 \leq t \leq 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$$

Preuve de Proposition 1.6. Nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}}$$

avec $u = x(2t-x)$. La formule du binôme de Newton pour les exposants négatifs est donnée par :

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n, \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} (1-u)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\dots\left(\frac{-2n+1}{2}\right)}{n!} (-1)^n u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!} u^n \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(2^n n!)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (1-u)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.2.3.4.5\dots(2n-1)(2n)}{2^{2n}(n!)^2} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n (2t-x)^n \quad (1.7)$$

En utilisant la formule de binôme de Newton, on trouve

$$(2t-x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (2t)^{n-k} (-x)^k \quad (1.8)$$

En remplaçons (1.8) dans l'équation (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (2t)^{n-k} x^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n)!}{2^{n+k} k!(n-k)! n!} t^{n-k} x^{n+k} \end{aligned}$$

Posons $m = n+k$. Nous avons alors :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!} t^{m-2k} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m(t)$$

Ceci termine la preuve du proposition 1.6. ■

6.2 Le Laplacien et les harmoniques sphériques

Tout d'abord, nous rappelons que dans les coordonnées sphériques (r, θ_1, θ_2) où $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ et $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ l'opérateur Laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2}.$$

Il nous faut donc chercher les fonctions $V(r, \theta_1, \theta_2)$ qui satisfont $\Delta V = 0$, c.à.d

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = 0.$$

Par la méthode de séparation des variables, on suppose que la fonction V peut s'écrire comme le produit de trois fonctions, chacune dépendant d'une variable distincte.

$$V(r, \theta_1, \theta_2) = R(r)P(\theta_1)Q(\theta_2)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation et en multipliant par $\frac{r^2}{RPQ}$, on obtient

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta_1} \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial P}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_2^2} = 0.$$

Ce qui implique

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_2^2} = -\frac{\sin^2 \theta_1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta_1}{P} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial P}{\partial \theta_1} \right) = -m^2$$

où $-m^2$ représente la constante de séparation, choisie négative afin que les solutions de $Q(\theta_2)$ soient périodiques sur 2π .

La solution de l'équation différentielle $\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_2^2} = -m^2$ est donnée par

$$Q(\theta_2) = e^{\pm im\theta_2}$$

On note que m est un entier car Q est une fonction périodique, c.à.d $Q(\theta_2 + 2\pi) = Q(\theta_2)$. Ainsi,

$$Q(\theta_2) = e^{im\theta_2}, \quad m = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

D'autre côté,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{P \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial P}{\partial \theta_1} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta_1} = l(l+1) \quad (1.9)$$

À cette étape, la constante de séparation est exprimée sous la forme $l(l+1)$, ce qui donne

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R}{\partial r} - l(l+1)R = 0 \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) est une équation d'Euler. Donc, la solution est de la forme $R(r) = r^s$, avec $s \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans (1.10), on obtient

$$R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}, \quad \text{avec } A_l, B_l \in \mathbb{R}$$

l'équation (1.9) conduit également à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial P}{\partial \theta_1} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta_1} \right) P = 0 \quad (1.11)$$

En appliquant le changement de variable $x = \cos \theta_1$, l'équation différentielle (1.11) se réduit à

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \quad (1.12)$$

Les fonctions solutions de cette équation sont les polynômes de Legendre, qui existent uniquement pour des valeurs entières et positives de l et des valeurs entières de m comprises entre $-l$ et $+l$. Ces polynômes s'écrivent

$$P_l^m(\cos \theta_1) = (-1)^m (1 - \cos^2 \theta_1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(\cos \theta_1)^m} P_l(\cos \theta_1) \quad (1.13)$$

où $l = 0, 1, \dots$, et $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ et P_l est le polynôme de Legendre de degré l défini dans la section 6.1.

En combinant ces résultats, on obtient la solution générale de l'équation de Laplace :

$$V(r, \theta_1, \theta_2) = R_l(r) P_l^m(\cos \theta_1) e^{im\theta_2}$$

où $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

La fonction des harmoniques sphériques Y_{lm} est la solution de la partie angulaire de l'équation de Laplace dans les coordonnées sphériques, qui s'écrit donc :

$$Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta_1) e^{im\theta_2} \quad (1.14)$$

avec $\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$ une constante de normalisation. Puisque la solution finale est réelle, les harmoniques sphériques peuvent s'écrire sous la forme :

$$Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta_1) \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\theta_2) & , \quad \text{si } m > 0 \\ 1 & , \quad \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(-m\theta_2) & , \quad \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [15], [59] et [75].

Un résultat caractérisant les harmoniques sphériques est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.9. (*Théorème d'addition [75]*)

Soit Y_{lm} une base orthonormée de $2l+1$ harmoniques sphériques de degré l . Alors

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma)$$

où P_l est un polynôme de Legendre de degré l et γ est l'angle entre deux vecteurs dont les angles directeurs sont respectivement (θ_1, θ_2) et (θ'_1, θ'_2) .

Lemme 1.2. ([75]). Soit $x = (R, \theta_1, \theta_2)$, $y = (r, \theta'_1, \theta'_2)$ avec $R \geq r$, alors

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^l P_l(\cos \gamma)$$

Preuve. Soient $x = (R, \theta_1, \theta_2)$, $y = (r, \theta'_1, \theta'_2)$, alors la distance entre x et y est donnée par :

$$|x - y| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma}$$

avec

$$\cos \gamma = \theta \cdot \theta'$$

où θ et θ' sont des vecteurs unitaire dans \mathbb{R}^3 associés aux directions angulaires d'un système de coordonnées sphériques, donnés par

$$\begin{cases} \theta = (\sin \theta_1 \cos \theta_2) \vec{i} + (\sin \theta_1 \sin \theta_2) \vec{j} + (\cos \theta_1) \vec{k} \\ \theta' = (\sin \theta'_1 \cos \theta'_2) \vec{i} + (\sin \theta'_1 \sin \theta'_2) \vec{j} + (\cos \theta'_1) \vec{k} \end{cases} \quad (1.15)$$

Si $R > r$, nous avons

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right) \cos \gamma}}$$

En utilisant la proposition 1.6 avec $x = \frac{r}{R} \in (0, 1)$ et $t = \cos \gamma \in (-1, 1)$, on obtient

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \gamma) \quad (1.16)$$

Lorsque $R = r$, nous remarquons que $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\gamma)$, donc

$$|x - y| = R \sqrt{2(1 - \cos \gamma)} = 2R \sin\left(\frac{1}{2}\gamma\right)$$

En prenant la limite dans l'équation (1.16) lorsque $r \rightarrow R$, on trouve :

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{2R \sin(\frac{1}{2}\gamma)} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma)$$

Ainsi, la preuve du lemme est terminée. ■

6.3 Expansion de la fonction de Green en harmoniques sphériques

Dans cette section, nous présentons la fonction de Green du Laplacien sous forme développée en harmoniques sphériques. La solution fondamentale de l'équation de Laplace est donnée par :

$$G_0(r) = -\frac{1}{4\pi} r^{-1}$$

D'après [37], la fonction de Green dans la boule $B(0, R)$ en dimension 3 s'écrit sous la forme suivante :

$$G(x, y) = G_0(|x - y|) - G_0\left(\frac{|x|}{R} \left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right| \right)$$

Pour simplifier, nous notons $x = (r_0, \theta)$ et $y = (r_0, \theta')$ dans $B(0, R)$, où $r_0 < R$, θ et θ' sont des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^3 définis par (1.15). Nous avons :

$$\begin{aligned} G_0(|x - y|) &= G_0\left(r_0 \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}\right) \\ G_0\left(\frac{|x|}{R} \left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right| \right) &= G_0\left(\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} \left(\frac{R^4}{r_0^4} r_0^2 + r_0^2 - 2\frac{R^2}{r_0^2} r_0^2 \cos \gamma\right)}\right) = G_0\left(R \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \cos \gamma}\right) \end{aligned}$$

où $\cos \gamma = \theta \cdot \theta' = \cos \theta_1 \cos \theta'_1 + \sin \theta_1 \sin \theta'_1 \cos(\theta_2 - \theta'_2)$, avec $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [0, 2\pi]$.

Cela implique que

$$G(r_0, \theta, r_0, \theta') = G_0\left(r_0 \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}\right) - G_0\left(R \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \cos \gamma}\right) \quad (1.17)$$

Maintenant, en appliquant la proposition 1.6 au deuxième terme de (1.17), on obtient

$$G_0\left(R \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \cos \gamma}\right) = \frac{-1}{4\pi R} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]^l P_l(\cos \gamma) \quad (1.18)$$

où P_l est le polynôme de Legendre de degré l . Par le théorème d'addition 1.9, nous avons

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \quad (1.19)$$

où Y_{lm} est une base orthonormée des harmoniques sphériques de degré l en dimension 3, définie dans la section précédente.

Ainsi, en utilisant (1.18) et (1.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} G_0\left(R \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \cos \gamma}\right) &= -\frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2l} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \\ &= -\frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{R} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2l} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

car $Y_{00}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ pour tout $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [0, 2\pi]$.

D'autre part, en appliquant le lemme 1.2 à le deuxième terme de (1.17), on obtient

$$G_0(|x - y|) = -\frac{1}{4\pi r_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma)$$

De la même manière, par le théorème d'addition 1.9, nous avons

$$\begin{aligned} G_0\left(r_0 \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}\right) &= -\frac{1}{4\pi r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \\ &= -\frac{1}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \\ &= -\frac{1}{4\pi r_0} - \frac{1}{r_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

En combinant alors (1.20) et (1.21), nous obtenons la fonction de Green en termes d'harmoniques sphériques comme suit :

$$G(r_0, \theta, r_0, \theta') = \frac{1}{r_0} \left[\frac{r_0 - R}{4\pi R} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2l+1} - 1 \right) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \right]$$

7 Rappel sur la résolution des équations de degré 3 par la méthode de Cardan

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution de l'équation cubique générale suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad \text{avec } a \neq 0. \quad (1.22)$$

Pour simplifier la résolution, il est plus facile de travailler avec une équation cubique sans le terme quadratique x^2 . Pour cela, en posant $x = z - \frac{b}{3a}$, cette substitution ramène l'équation (1.22) à la forme réduite :

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (1.23)$$

où

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{b}{27a} \left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a}$$

La méthode de Cardan permet de trouver les racines de l'équation réduite (1.23), en posant $z = u + v$ ce qui permet d'introduire deux inconnues au lieu d'une, offrant ainsi la possibilité de poser ultérieurement une condition sur u et v afin de simplifier le problème. Donc, l'équation (1.23) peut s'écrire :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

On impose un système de deux équations à deux inconnues en posant :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U + V = -q \\ UV = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

où $(U, V) = (u^3, v^3)$, on connaît alors la somme et le produit de U et V , c.à.d U et V sont les racines du polynôme $Q = X^2 + qX + \frac{p^3}{27}$. Soit, $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$ le discriminant de ce polynôme. Nous distinguons trois cas :

1. Si $\Delta > 0$, l'équation (1.23) possède une solution réelle et deux solutions complexes. On pose

$$u = \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

La solution réelle unique est donc $z_0 = u + v$. En outre, il existe deux solutions complexes qui sont conjuguées l'une de l'autre

$$\begin{cases} z_1 = ju + \bar{j}v \\ z_2 = j^2u + \bar{j}^2v, \quad \text{avec } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation (1.23) admet deux solutions réelles, dont l'une est simple et l'autre est double :

$$\begin{cases} z_0 = 2 \left(\frac{-q}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \\ z_1 = z_2 = - \left(\frac{-q}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{-p}{3}} \end{cases}$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation (1.23) possède trois solutions réelles. On pose

$$U = \frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2} = re^{i\theta}, \quad V = \frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2} = \bar{U} = re^{-i\theta}.$$

avec

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} > 0, \quad \theta = \arccos\left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right) \in]0, 2\pi[.$$

d'où les trois racines

$$\begin{cases} z_0 &= u + \bar{u} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ z_1 &= ju + \overline{j\bar{u}} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ z_2 &= j^2u + \overline{j^2\bar{u}} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

La modélisation mathématique du problème

Ce chapitre a pour objectif de formuler les problématiques fondamentales qui orientent notre démarche de modélisation, tout en positionnant notre méthodologie par rapport aux approches existantes. Nous commencerons par présenter des notions biologiques générales liées à la croissance tumorale. Nous nous intéresserons ensuite aux modèles mathématiques : d'une part, en dressant un aperçu des principaux types de modèles utilisés pour étudier ce phénomène ; d'autre part, en approfondissant l'étude des modèles continus spatiaux.

1 Introduction à la croissance tumorale

Cette section expose des éléments biologiques fondamentaux relatifs à la croissance tumorale. Elle s'ouvre sur une présentation du cycle cellulaire et de ses mécanismes de régulation, avant de s'attarder sur les propriétés des cellules cancéreuses et les principales étapes de l'évolution tumorale. Un aperçu non exhaustif des approches thérapeutiques est également proposé.

1.1 Fonctionnement et régulation du cycle cellulaire

Une tumeur correspond à un regroupement anormal de cellules résultant souvent d'un dérèglement du cycle cellulaire où les cellules prolifèrent de manière incontrôlée. Nous rappelons, que le cycle cellulaire est le processus pour lequel une cellule, dite "cellule mère" divise pour donner deux "cellules filles" identiques. Il est essentiellement constitué de quatre phases : les 3 phases **G1**, **S** et **G2**, formant l'Interphase, qui correspond à la croissance de la cellule et à la préparation du phase **mitose** qui est associée à la division de la cellule en deux cellules filles identiques (voir la figure 2.1)

- La phase **G1 (gap 1)** représente la première étape du cycle cellulaire. Pendant cette phase, la cellule synthétise des protéines, augmente de taille et se prépare à la réplication de son ADN
- La phase **S (synthèse)** est la phase où la cellule réplique son ADN pour que chaque cellule fille reçoive une copie identique.
- La phase **G2 (gap 2)** est la phase qui démarre lorsque la réplication de l'ADN est complète. Pendant cette phase, la cellule continue de croître et prépare les dernières étapes pour la mitose. Elle vérifie également l'intégrité de l'ADN répliqué.

- La phase **M (mitose)** est la dernière phase du cycle cellulaire, durant laquelle la cellule mère se divise en deux cellules filles identiques. Cette phase se compose de plusieurs étapes, telles que la prophase, la métaphase, l'anaphase et la télophase.

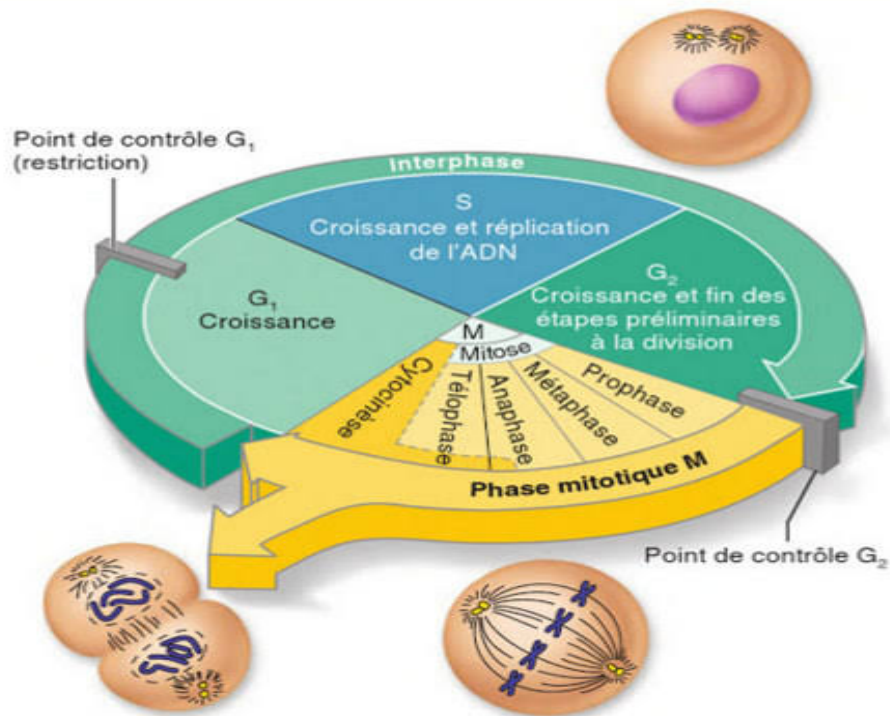


FIGURE 2.1 – Schéma illustrant le cycle cellulaire. Source <https://images.app.goo.gl/NR.xgMMDFDBHNzEuM8>

En effet, la majorité des cellules se trouvent en phase **G₀**, une phase correspondant à des cellules quiescentes ayant quitté le cycle. Dans cette phase, les cellules continuent de vivre et de fonctionner normalement mais ne prolifèrent pas. Ce phénomène peut être temporaire (comme pour les cellules hépatiques, qui entrent en phase **G₀** puis réintègrent le cycle cellulaire si un signal extracellulaire induit à la prolifération), ou permanent (comme pour les neurones et les cellules musculaires, qui entrent en phase **G₀** de manière irréversible). Pour qu'une cellule accomplisse un cycle cellulaire complet, elle doit traverser plusieurs mécanismes de régulation. Les principaux points de contrôle sont :

- Le point de contrôle **G₁/S (restriction)** est un point de contrôle qui a lieu à la fin de la phase **G₁**, au cours duquel la cellule vérifie la présence de facteurs de croissance extérieurs. La cellule vérifie également si l'environnement est favorable et si l'ADN est intact. Si tout est en ordre, la cellule passe en phase **S** pour répliquer son ADN.
- Le point de contrôle **G₂/M** est un point de contrôle qui a lieu à la fin de la phase **G₂**. La cellule contrôle l'intégrité des chromosomes qui ont été répliqués en phase **S**. Si des dommages sont détectés, la cellule peut réparer l'ADN ou déclencher l'apoptose (mort cellulaire programmée).

- Le point de contrôle de **la mitose (métaphase/anaphase)** assure que tous les chromosomes sont correctement alignés et attachés aux fibres du fuseau mitotique durant la mitose.

Ainsi, les points de contrôle du cycle cellulaire assurent que les altérations génétiques ne soient pas transmises. Si un dysfonctionnement affecte ce système de régulation, il peut en résulter la formation d'une tumeur, dans laquelle les cellules prolifèrent de façon incontrôlée et diffusent les mutations qu'elles portent. Nous renvoyons le lecteur à [57], [72] et [90] pour une présentation détaillée sur le cycle cellulaire, et ses liens avec le cancer.

1.2 Caractéristiques fondamentales des cellules cancéreuses

Comme nous l'avons mentionné, une cellule cancéreuse est une cellule au comportement anormal qui échappe aux mécanismes de contrôle. Elle possède des caractéristiques qui lui permettent de survivre, de proliférer et de se disséminer. Dans l'article [56], Hanahan et Weinberg ont établi les principales caractéristiques du cancer (voir la figure 2.2).

1. **Transmission continue des signaux de prolifération :**

Dans les cellules normales, la transmission et l'émission des signaux de prolifération sont soigneusement régulées pour induire l'entrée des cellules dans le cycle cellulaire, tandis que les cellules cancéreuses peuvent croître indépendamment de ces signaux.

2. **Insensibilité aux signaux d'inhibition :**

Contrairement aux cellules normales, les cellules cancéreuses ne répondent pas aux signaux antiprolifératifs.

3. **La résistance à la morte cellulaire (l'apoptose) :**

L'organisme peut demander à une cellule défectueuse de déclencher l'apoptose, c.à.d, la mort cellulaire programmée qui élimine les cellules endommagées ou inutiles. Les cellules cancéreuses échappent souvent à ce mécanisme, ce qui leur permet de survivre même lorsqu'elles sont anormales. En effet, la plupart des cellules tumorales ont tendance à mourir par nécrose plutôt que par apoptose.

4. **Réplication à l'infini :**

Les cellules cancéreuses accumulent souvent des mutations génétiques et des altérations chromosomiques qui augmentent leur diversité. Grâce à une production élevée de télomérase, elles sont capables de se répliquer indéfiniment.

5. **L'angiogenèse :**

Après une certaine taille de la tumeur, la vascularisation devient insuffisante pour assurer l'apport nécessaire en nutriments et en oxygène. Les tumeurs libèrent des signaux pour stimuler la formation de nouveaux vaisseaux sanguins (angiogenèse) afin d'être irriguées.

6. **La formation de métastases :**

Lorsque la tumeur forme sa vascularisation, certaines cellules cancéreuses ont la capacité de se propager dans les vaisseaux sanguins ou lymphatiques et de former de nouvelles colonies, appelées "métastases".

Dans [57], Hanahan et Weinberg ont ajouté deux nouvelles caractéristiques, dites "caractéristiques émergentes", à ces six caractéristiques fondamentales. Il s'agit des deux suivantes :

7. **La résistance au système immunitaire :**

Certaines cellules cancéreuses développent des mécanismes pour échapper à la détection par le système immunitaire ou de résister à sa destruction.

8. **La reprogrammation du métabolisme énergétique :**

Le métabolisme énergétique regroupe toutes les réactions liées à la production d'énergie au sein de la cellule, à partir des nutriments et de l'oxygène. Une cellule tumorale est capable de modifier ses besoins en nutriments et en oxygène pour s'adapter à son environnement.

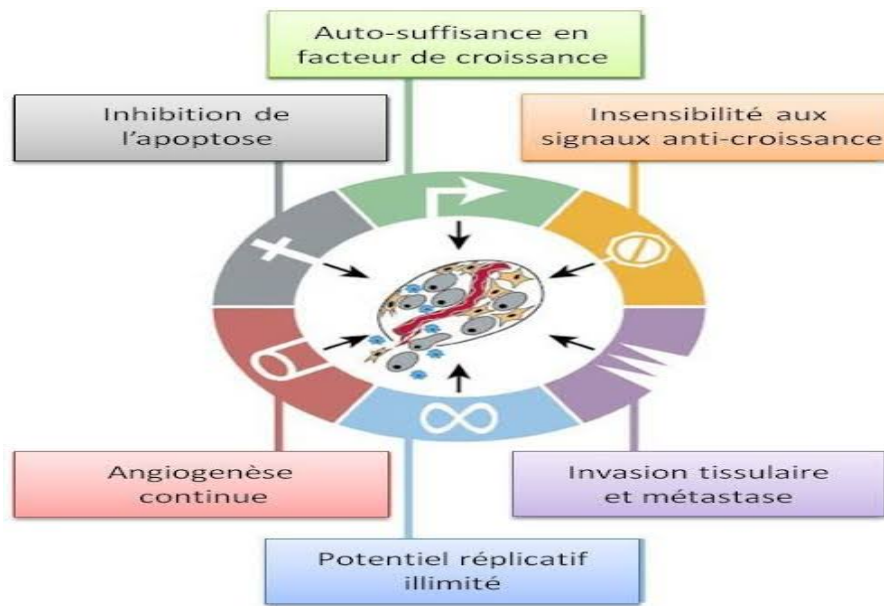


FIGURE 2.2 – Principales caractéristiques du cancer. Source [56].

1.3 Principales étapes du développement tumoral

Lors du développement d'une tumeur cancéreuse, les cellules passent par plusieurs phases intermédiaires qui sont illustrées en figure 2.3. Les trois grandes étapes sont les suivantes :

1. **La phase avasculaire :** représente la première étape de la croissance tumorale. Dans cette phase, la tumeur croît en utilisant les nutriments et l'oxygène présents dans son environnement. Lorsqu'elle atteint une certaine taille, la région centrale manque de nutriments et elle se divise donc en deux régions : une région de cellules quiescentes et une région de nécrose composée de cellules mortes
2. **La phase vasculaire :** à ce stade, la taille de la tumeur devient trop importante pour être soutenue par les seuls apports diffusifs en nutriments. Elle initie alors un processus d'angiogenèse, visant à induire la formation de nouveaux vaisseaux sanguins afin d'assurer son approvisionnement.
3. **La phase métastatique,** où la tumeur commence à disséminer des métastases dans l'organisme afin de fonder des tumeurs.

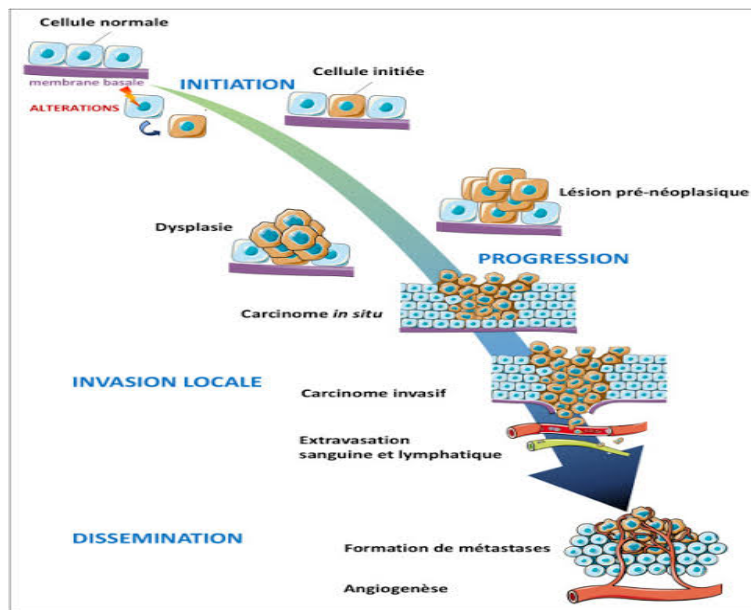


FIGURE 2.3 – Schéma représentant le développement tumoral. Source <https://images.app.goo.gl/KqErgYJVeUBrw6nM6>

1.4 Approches thérapeutiques contre la maladie

Le traitement du cancer repose sur diverses approches, selon qu'il s'agisse d'éradiquer totalement la maladie ou d'en freiner l'évolution. Nous présentons une liste, non exhaustive, des traitements disponibles [61], [62].

1. L'intervention chirurgicale :

Parmi les traitements disponibles, la chirurgie représente l'option la plus directe pour éliminer une tumeur. Elle consiste généralement à retirer la tumeur ainsi qu'une partie des tissus avoisinants, lorsque cela est jugé nécessaire. D'autres techniques chirurgicales peuvent également être mises en œuvre, comme la chirurgie par radiofréquence, qui utilise la chaleur pour détruire les cellules tumorales, ou la cryochirurgie, qui repose sur l'application d'un froid extrême. Cependant, lorsque les métastases sont trop nombreuses ou localisées dans des zones inaccessibles, la chirurgie devient impraticable, ce qui impose le recours à d'autres modalités thérapeutiques.

2. La chimiothérapie :

La chimiothérapie est un traitement médicamenteux qui agit en bloquant la mitose, ciblant ainsi les cellules qui se divisent rapidement. Elle endommage principalement les cellules cancéreuses, mais affecte malheureusement aussi les cellules à renouvellement rapide dans l'organisme, telles que les cellules des cheveux, les globules sanguins, les plaquettes et les cellules de l'estomac.

3. Les thérapies ciblées :

Les thérapies ciblées reposent sur l'utilisation de molécules conçues pour attaquer des mutations spécifiques dans les cellules cancéreuses. Elles visent à accroître l'efficacité du traitement tout en minimisant certains effets secondaires de la chimiothérapie, notamment dans les cas de cancers du poumon.

4. La radiothérapie :

La radiothérapie est une approche thérapeutique qui utilise des radiations ionisantes afin d'endommager l'ADN des cellules, ce qui entraîne leur mort.

5. L'immunothérapie :

L'immunothérapie consiste à stimuler le système immunitaire afin de combattre les cellules cancéreuses. Cette méthode est utilisée pour traiter divers types de cancer, notamment le mélanome, le cancer du poumon non à petites cellules, ainsi que certains lymphomes et leucémies. Parmi les méthodes d'immunothérapie, nous pouvons distinguer l'immunothérapie non spécifique, qui consiste à stimuler le système immunitaire de manière globale. Le deuxième type d'immunothérapie est la vaccinothérapie, consiste à éduquer le système immunitaire pour qu'il reconnaisse les antigènes spécifiques des cellules cancéreuses et les attaque.

2 Quelques modèles de la croissance tumorale

La modélisation mathématique constitue un outil précieux pour tester des hypothèses, mieux comprendre les mécanismes régissant la progression de la maladie et orienter les recherches cliniques futures. Sa valeur en biologie réside dans sa capacité à formuler de nouvelles théories et à les confronter aux données expérimentales.

Dans cette section, nous proposons une analyse de la modélisation mathématique de la croissance tumorale. Pour un aperçu plus détaillé des modèles existants, le lecteur pourra se référer aux travaux mentionnés dans [5, 9].

2.1 Modèles discrets

Les modèles discrets considèrent chaque cellule comme une entité distincte, équipée de caractéristiques et suivie individuellement. Nous pouvons distinguer deux sous-familles de modèles : les modèles sur grille et les modèles agent-centrés (voir la figure 2.4).

2.1.1 Modèles sur grille

Il s'agit de modèles dans lesquels l'espace est découpé en petites cases appelées sites, et formant une discrétisation appelée grille. L'état des cases change à chaque instant en fonction des interactions avec les cases environnantes. Ces modèles présentent l'avantage d'une implémentation numérique aisée et permettent une modification facile des règles de modélisation. Cependant, leurs inconvénients, résident dans le fait que les formes des cellules, leurs déplacements et leurs positions sont imposés par la structure de la grille. Nous distinguons :

- Les automates cellulaires constituent une classe de modèles dans lesquels chaque site représente une unité élémentaire de la population. Ces modèles ont connu un large usage en modélisation mathématique appliquée aux systèmes biologiques [4, 36].
- Les modèles de Potts cellulaires, qui sont une extension des automates cellulaires, où les entités peuvent occuper plusieurs sites, ce qui permet de modéliser la déformation et du changement de taille d'une entité [4], [82].

2.1.2 Modèles agent-centrés

Dans ces modèles, il n'existe pas de grille préétablie contraignant les entités, contrairement aux modèles sur grille. Leur position, leur forme et leurs mouvements sont donc totalement libres. Les entités, appelées agents, sont représentées par des objets individuels possédant des propriétés indépendantes. L'avantage de ces modèles réside dans leur capacité à offrir une représentation plus réaliste des phénomènes étudiés. Toutefois, leur implémentation numérique s'avère plus complexe que celle des modèles sur grille. Dans ce type de modèle, les entités sont généralement représentées sous une forme sphérique, comme dans les travaux de Drasdo et al. [38, 47], qui introduisent des entités sous forme d'ellipses, ce qui leur confère une orientation intrinsèque, à l'instar des travaux de Palsson et al. [77, 78].

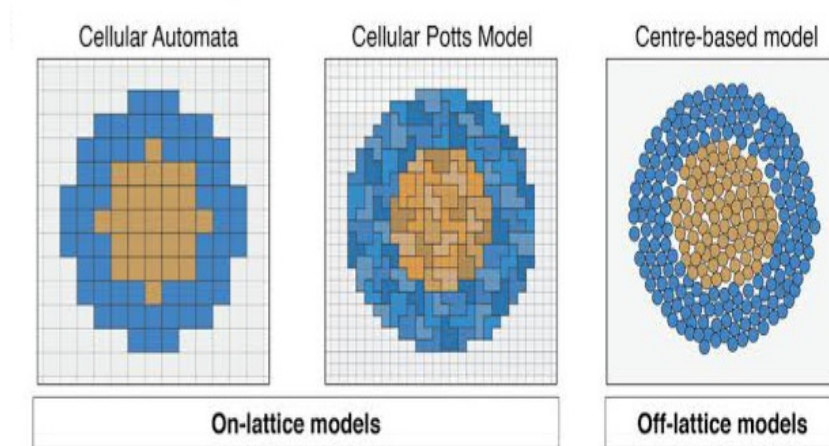


FIGURE 2.4 – Modèles sur grille et modèles agent-centrés. Source [52].

2.2 Modèles continus scalaires

Les modèles continus scalaires décrivent la dynamique temporelle de variables unidimensionnelles tumorales, telles que le volume ou la masse, à l'aide d'équations différentielles ordinaires (EDO). Parmi ces approches, le modèle de Gompertz constitue un cadre de référence pour simuler la croissance volumique tumorale. Initialement conçu pour modéliser la démographie humaine en intégrant la capacité limite d'un environnement ([51]), ce formalisme a été transposé en oncologie. Il postule que les cellules cancéreuses prolifèrent de manière exponentielle tant que les ressources environnementales (nutriments, oxygène) le permettent. Au-delà d'un seuil critique, les contraintes du microenvironnement (hypoxie, compétition spatiale) induisent un ralentissement asymptotique de la prolifération, conduisant à un plateau de taille tumorale maximale ([76]). Le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\tilde{N}}{dt}(t) = \lambda \ln\left(\frac{K}{\tilde{N}(t)}\right) \tilde{N}(t), \quad \text{pour } t > 0$$

où $\tilde{N}(t)$ est la taille de la tumeur à l'instant t , $\lambda > 0$ est un paramètre influençant la vitesse de prolifération et K est la taille maximale que la tumeur peut atteindre dans un environnement donné.

De nombreux modèles ont été élaborés à partir de modèle de Gompertz. Par exemple, le modèle utilisé dans les travaux de Hahnfeldt et al. [55] est représenté par le système

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(t) = \lambda \ln\left(\frac{K(t)}{V(t)}\right)V(t), & t > 0 \\ \frac{dK}{dt}(t) = -\alpha K(t) + \beta V(t) - \delta K(t)V^{\frac{2}{3}}(t) - \eta K(t), & t > 0 \end{cases}$$

où α , β , γ et η sont des constantes positives.

La première équation du système est l'équation de Gompertz appliquée au volume V de la tumeur. Dans ce modèle, la taille maximale K de la tumeur n'est plus une constante, mais une variable qui évolue dans le temps, comme indiqué dans la deuxième équation. Cette variable K représente la vascularisation des tissus entourant la tumeur, ce qui permet donc de prendre en compte les différents phénomènes liés à cette vascularisation.

Cependant, ces modèles présentent des limitations importantes, car ils ne prennent pas en compte les effets spatiaux, tels que la structure des tissus, qui sont pourtant cruciaux pour décrire la croissance tumorale et son hétérogénéité. Par conséquent, pour intégrer les données expérimentales et les observations cliniques, plusieurs modèles spatiaux ont été développés.

2.3 Modèles continus spatiaux

Les modèles continus spatiaux permettent de décrire l'évolution spatio-temporelle des populations cellulaires, en prenant en compte des facteurs tels que l'anisotropie des tissus, la densité locale des cellules cancéreuses et la distribution spatiale des nutriments. Ces modèles reposent sur des équations aux dérivées partielles (EDP). L'avantage principal de cette approche est qu'elle permet de prendre en compte l'hétérogénéité spatiale observée en clinique à partir des images médicales, sans se limiter à des mesures globales ou moyennées, comme c'est le cas dans les modèles scalaires. On distingue deux grandes catégories de modèles, selon la manière dont les mouvements cellulaires sont modélisés.

- Les modèles basés sur des équations de réaction-diffusion s'expriment sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-D\nabla T) = \text{termes de creation} - \text{termes de mort} \quad (2.1)$$

où T représente la densité de cellules tumorales, D est le coefficient de diffusion du milieu, et le terme $\nabla \cdot (-D\nabla T)$ est la diffusion des cellules cancéreuses dans les tissus environnants. Ce modèle suppose que les cellules ont un mouvement actif. Ce type de modèle est particulièrement adapté aux tumeurs primaires ou invasives, qui ne présentent pas de front tumoral net (voir [48]).

- Les modèles basés sur des équations de transport se présentent sous la forme suivante

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (vT) = \text{termes de creation} - \text{termes de mort} \quad (2.2)$$

où $\nabla \cdot (vT)$ est le terme d'advection, modélisant le transport des cellules cancéreuses à une vitesse $v(x, t)$. Ces modèles permettent de modéliser les tumeurs dans le cas où l'interface entre le tissu sain et la tumeur est nette et bien définie, comme pour les métastases (voir

[28], [34]). Dans ces modèles, la croissance de la tumeur est liée au mouvement passif induit par la prolifération cellulaire, comme illustré dans la figure 2.5 : l'apparition de nouvelles cellules dans un milieu saturé pousse les cellules environnantes vers l'extérieur de la tumeur, générant ainsi un mouvement passif global vers l'intérieur de la tumeur.

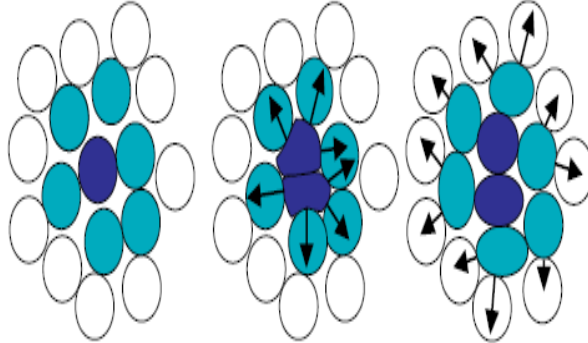


FIGURE 2.5 – Mouvement passif des cellules lié à la prolifération. Source [34]

En 1972, Greenspan propose une approche pionnière pour modéliser les interfaces dynamiques entre populations cellulaires hétérogènes : les modèles à frontière libre. Ceux-ci définissent chaque sous-population cellulaire comme occupant un domaine spatial distinct, dont les frontières évoluent selon des lois mécaniques ou biochimiques (contraintes de pression, gradients de prolifération).

En effet, lorsque la tumeur est petite, les cellules reçoivent des nutriments suffisants par diffusion, ce qui permet une croissance exponentielle. Cependant, à mesure que la tumeur grandit, la diminution des nutriments au centre conduit à la formation d'un noyau nécrotique. La croissance ralentit alors, car les nutriments deviennent plus difficiles à atteindre par diffusion. Ultérieurement, la tumeur se compose de trois populations : une population externe où les cellules se divisent et prolifèrent, une population intermédiaire contenant des cellules quiescentes, et une population centrale composée de cellules mortes (noyau nécrotique). La frontière entre chacune de ces populations est alors l'une des inconnues du modèle (voir la figure 2.6). Nous détaillons cela dans la section suivante.

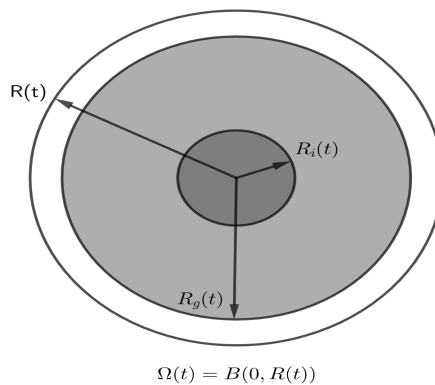


FIGURE 2.6 – Coupe transversale d'un carcinome montrant le noyau nécrotique $r < R_l$, les cellules quiescentes $R_l \leq r \leq R_g$, et les cellules proliférantes $R_g < r \leq R$. Source [53]

2.4 Le modèle de Greenspan

Le modèle de H.P. Greenspan permet de décrire l'évolution de la tumeur en fonction de la distribution spatiale de l'oxygène. En effet, l'augmentation du rayon de la tumeur est liée à la prolifération des cellules tumorales, laquelle est limitée par la quantité d'oxygène diffusée dans les tissus. Les cellules qui ne reçoivent pas suffisamment d'oxygène entrent alors en nécrose.

Soit $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ la région tumorale, à symétrie radiale à l'instant $t > 0$. On note $R(t)$ le rayon de la tumeur, et $u(r, t)$ la concentration en nutriments (oxygène) à l'instant $t > 0$ et à la distance $r \in [0, R(t)]$.

La concentration d'oxygène u satisfait l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{D \Delta u}_{\text{Taux de diffusion des cellules}} - \underbrace{\lambda f(u)}_{\text{Taux de consommation des nutriments}} \quad \text{dans } \Omega(t) \quad (2.3)$$

où D est le coefficient de diffusion et λ est une constante positive.

En raison de la symétrie du Laplacien, on s'intéresse aux solutions radiales $u = u(r)$ de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \lambda f(u), \quad 0 < r < R(t)$$

La diffusion de l'oxygène sur les distances microscopiques qui caractérisent la taille et la structure de la tumeur s'effectue dans un intervalle de temps très court par rapport à la période totale de croissance, mesurée en jours. Ces intervalles de temps peuvent même être considérés comme négligeables par rapport à la période de 12 à 18 heures nécessaire pour la mitose. Ainsi, la concentration en oxygène u demeure pratiquement stable, par la suite, Greenspan a étudié dans [53] l'équation suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = c_1 H(r - R_l(t)), \quad 0 < r < R(t), \quad t > 0 \quad (2.4)$$

où c_1 est une constante positive donnée, H est la fonction de Heaviside donnée par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

et $R_l(t)$ est la frontière du noyau nécrotique, qui est définie implicitement par l'équation :

$$u(R_l(t), t) = u_l$$

où u_l représente la valeur critique de la concentration du nutriment u , en dessous duquel les cellules cancéreuses ne peuvent plus survivre.

Dans le même travail, il a introduit la concentration d'un inhibiteur chimique $\beta(r, t)$ dans la tumeur, cet inhibiteur freine la prolifération des cellules cancéreuses sans les détruire, et satisfait l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) = -c_2 H(R_l(t) - r), \quad 0 < r < R(t), \quad t > 0$$

où $c_2 > 0$ est une constante donnée. Les concentrations u et β vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(R(t), t) = u_\infty & t > 0 \\ \beta(R_g(t), t) = \beta_g, \quad \beta(R(t), t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

avec u_∞ la concentration des nutriments sur le bord de la tumeur supposée constante, et $R_g(t)$ est la frontière à partir duquel la prolifération des cellules cancéreuses s'arrête car la concentration de l'inhibiteur chimique atteint une valeur critique β_g .

Ainsi, Greenspan a défini les fonctions $S(u, \beta)$ et $N(u, \beta)$ qui représentent respectivement les taux locaux de prolifération et de mortalité des cellules, données par :

$$S(u, \beta) = sH(u - u_l)H(\beta_g - \beta), \quad N(u, \beta) = 3\eta H(u_l - u).$$

où s, η des constantes positives données.

Il a supposé que la densité de masse des cellules vivantes est constante et égale à la densité des cellules nécrotiques, alors, la conservation de la masse est équivalent à la conservation du volume. En d'autre termes, la loi de conservation peut s'écrire :

$$A = B + C - D - E$$

où

- A est le volume total de cellules vivantes à un instant t .
- B est le volume initial de cellules vivantes à $t = 0$
- C représente le volume total produit par prolifération pour $t \geq 0$.
- D est le volume total de débris nécrotique à un instant t .
- E est le volume de tissu nécrotique éliminé de la région tumorale pour $t \geq 0$.

En coordonnées sphériques, les expressions mathématiques de ces termes introduits sont les suivantes :

$$A = \int_{R_l(t)}^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{4\pi}{3} (R^3(t) - R_l^3(t))$$

$$B = \int_0^{R(0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{4\pi}{3} R^3(0)$$

$$C = \int_0^t \left(\int_0^{R(\tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \right) d\tau = 4\pi \int_0^t \left(\int_0^{R(\tau)} S(u, \beta) r^2 \, dr \right) d\tau$$

$$D = \int_0^{R_l(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{4\pi}{3} R_l^3(t)$$

$$E = \int_0^t \left(\int_0^{R(\tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \right) d\tau = 4\pi \int_0^t \left(\int_0^{R(\tau)} N(u, \beta) r^2 \, dr \right) d\tau$$

En remplaçant ces formes et en dérivant par rapport au temps, on obtient l'équation suivante :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}_{\text{Taux de variation du volume de la tumeur}} = \underbrace{\int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr}_{\text{Taux total de prolifération cellulaire}} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr}_{\text{Taux totale de mortalité cellulaire}}$$

La simplification de cette équation implique que la dynamique du rayon de la tumeur peut être donnée par

$$R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = \int_0^{R(t)} S(u, \beta) r^2 \, dr - \int_0^{R(t)} N(u, \beta) r^2 \, dr$$

Dans le second modèle [54], Greenspan étudie la stabilité des cultures cellulaires et des tumeurs solides en introduisant une théorie pour modéliser leur comportement en réponse à une distribution arbitraire

de nutriments. Il montre que l'instabilité survient lorsque les forces de pression interne P_{int} deviennent supérieures à la tension de surface σ et les forces d'adhésion P_{adl} , pour plus de détails voir [54].

Il convient de noter que, dans les deux modèles proposés par Greenspan [53, 54], le taux de consommation des nutriments par les cellules vivantes, noté f , est supposé constant et indépendant de la concentration en nutriments u , ce qui constitue une hypothèse restrictive.

2.5 Le modèle de McElwain et al

À la fin des années 70, McElwain et Morris ont traité le taux de consommation des nutriments par les cellules tumorales de manière plus dynamique, en tenant en compte la disponibilité locale des nutriments. Contrairement à l'hypothèse de Greenspan, ils ont supposé que le taux de consommation de ces nutriments dépend directement de leur concentration dans la tumeur (voir [71]).

Ils ont également analysé l'effet de l'apoptose (mort cellulaire programmée), en intégrant le taux de perte de volume au sein des régions prolifératives de la tumeur.

Plus précisément, dans la région $B(0, R(t))$, la concentration d'oxygène u est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda f(u), \quad r \in (0, R(t))$$

où f est une fonction continue définie par :

$$f(u) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } u \geq \mu_2 \\ \frac{u}{\mu_2} & , \quad \text{si } \mu_1 < u \leq \mu_2 \\ 0 & , \quad \text{si } u \leq \mu_1 \end{cases}$$

avec λ une constante positive, μ_1 et μ_2 des valeurs critiques, et u satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(R(t), t) = u_\infty, & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'évolution du rayon tumoral $R(t)$ est donnée par

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{R^2(t)} \int_0^{R(t)} S(u) r^2 dr$$

où

$$S(u) = s f(u), \quad s > 0.$$

Notons que, McElwain et Morris ont supposé que la tumeur passe par trois phases. Dans la phase 1, lorsque $u > \mu_2$, la tumeur est très petite, toutes les cellules reçoivent suffisamment de nutriments, la prolifération cellulaire et l'apoptose sont toutes deux actives, et la consommation d'oxygène est normale. Dans la phase 2 (lorsque $\mu_1 < u \leq \mu_2$), le nodule présente une structure à deux couches : dans la couche externe, les cellules se comportent comme dans la phase 1 avec un taux de prolifération local normal. À l'intérieur de cette couche, le taux de consommation de nutriments et le taux de prolifération local diminuent, tandis que le taux local de perte de volume dû à l'apoptose reste constant dans tout le nodule. Dans la phase 3 ($u \leq \mu_1$), le nodule adopte une structure à trois couches : dans la couche externe, les cellules se comportent comme dans la phase 1. À l'intérieur de celle-ci, il y a une couche où la consommation de nutriments et le taux de prolifération local sont inférieurs aux valeurs normales. Dans la région la plus interne, il y a un noyau de débris nécrotiques (voir la figure 2.7).

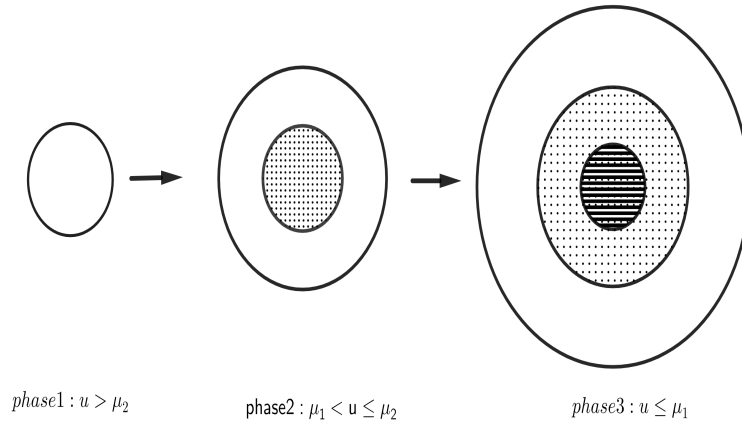


FIGURE 2.7 – Séquence des étapes de la croissance d’une tumeur solide. Source [71]

2.6 Les modèles de Byrne et Chaplain

En 1995, Byrne et Chaplain ont développé un modèle de croissance tumorale non nécrotique, dans lequel le phénomène d’apoptose est intégré à l’équation de conservation de la masse régissant l’évolution du rayon de la tumeur. Ils ont pris en compte le fait que les cellules tumorales peuvent être nourries non seulement par diffusion, mais aussi par échange entre le sang et les tissus. Le taux de transfert sang-tissu, noté γ , est modélisé comme étant proportionnel à la différence de concentration en nutriments entre la tumeur u et le milieu vasculaire u_B . Ce modèle s’applique ainsi à la croissance des tumeurs vascularisées.

Suivant la référence [22], les auteurs se sont intéressés au cas d’une tumeur sphérique de rayon $R(t)$, en explorant numériquement l’influence des nutriments u et d’un inhibiteur chimique β sur l’existence et la stabilité des solutions. Le modèle repose sur deux équations de réaction-diffusion décrivant la distribution spatiale des nutriments et de l’inhibiteur, ainsi qu’une équation intégrale-différentielle qui régit la dynamique du rayon tumoral :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D_1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \gamma(u_B - u) - \lambda u - g_1(u, \beta) \quad , 0 < r < R(t) \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{D_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) - g_2(u, \beta) \quad , 0 < r < R(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{R^2(t)} \int_0^{R(t)} S(u, \beta) r^2 dr \quad , t > 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où $\gamma(u_B - u)$ représente le taux de transfert des nutriments entre le sang et les tissus, supposé constant, et λu est le taux de consommation des nutriments. g_1 et g_2 sont des fonctions continues données. $S(u, \beta)$ est le taux de prolifération locale, supposé résulter d’un équilibre entre la création des cellules et l’apoptose. Il est défini par

$$S(u, \beta) = s(u - \tilde{u}) \left(1 - \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \right), \quad s > 0$$

avec \tilde{u} , $\tilde{\beta}$ des constantes positives.

les conditions initiales imposées sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0 \quad , \quad u(R(t), t) = u_\infty \quad , \quad u(0, t) = u_0 \quad t > 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial t}(0, t) = 0 \quad , \quad \beta(R(t), t) = \beta_\infty \quad , \quad \beta(0, t) = \beta_0 \quad t > 0 \\ R(0) = R_0 > 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

En 1996, Byrne et Chaplain ont étudié un autre modèle de croissance tumorale intégrant cette fois la présence d’une région nécrotique. Ce modèle distingue deux mécanismes de perte cellulaire :

l'apoptose, et la nécrose, cette dernière correspondant à la mort cellulaire induite par des altérations du microenvironnement. Le problème considéré présente ainsi deux frontières libres : l'une pour le rayon externe de la tumeur $R(t)$ et l'autre pour le rayon nécrotique interne $R_l(t)$. Plus précisément, dans la région $\Omega(t) = B(0, R(t))$, ils ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = g_1(u, \beta) H(r - R_l) & , 0 < r < R(t) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \beta}{\partial r}) = g_2(\beta) H(r - R_l) & , 0 < r < R(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{R^2(t)} \int_0^{R(t)} (S(u, \beta) H(r - R_l) - N(u, \beta) H(R_l - r)) r^2 dr & , t > 0 \end{cases}$$

où g_1 , g_2 , S et N sont des fonctions données, et R_l est définie implicitement par l'équation :

$$u(R_l(t), t) = \mu, \quad t > 0$$

où μ représente la valeur critique, en dessous de laquelle les cellules cancéreuses subissent une nécrose. Dans [23], les auteurs ont présenté des simulations numériques dans un contexte sans inhibiteurs ($\beta = 0$) et avec inhibiteurs ($\beta \neq 0$), en imposant les mêmes conditions initiales dans (2.6).

2.7 Les modèles de Friedman et Reitich

En 1999, Friedman et Reitich ont traité le modèle de Byrne et Chaplain [22], le modèle de croissance tumorale non nécrotique dans le cas d'absence de l'inhibiteur chimique $\beta = 0$. Ils ont développé des techniques mathématiques pour une analyse rigoureuse des solutions transitoires et stationnaires. Autrement dit, ils ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \gamma(u_B - u) + \lambda u & , 0 < r < R(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{R^2(t)} \int_0^{R(t)} S(u) r^2 dr = \frac{1}{R^2(t)} \int_0^{R(t)} s(u - \tilde{u}) r^2 dr & , t > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où u est la concentration des nutriments dans la tumeur, u_B celle dans le tissu sain, et $\gamma(u_B - u)$ représente le taux de transfert des nutriments entre le sang et les tissus, avec la condition au bord suivante :

$$u(R(t), t) = \tilde{u}, \quad t > 0$$

Ils ont montré que, pour $\tilde{u} > \frac{\gamma u_B}{\gamma + \lambda}$, le problème (2.7) admet une solution stationnaire unique. Sous certaines conditions, ils ont étudié le comportement asymptotique du rayon $R(t)$ et démontré l'existence d'une solution transitoire. Nous renvoyons le lecteur à [45] pour plus de détails.

Dans un autre article [46], ils ont étudié une fois de plus le modèle de Byrne et Chaplain [22], mais cette fois lorsque la région de la tumeur est un domaine général de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire lorsque la concentration des nutriments u satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \gamma(u_B - u) - \lambda u \quad \text{dans } \Omega(t), \quad t > 0$$

Des résultats d'existences et d'unicité ont été montrés. De plus, la stabilité de la solution stationnaire radiale u_0 avec la frontière libre R_0 . Autour de cette solution, ils ont démontré l'existence d'une infinité de branches de bifurcation, les frontières libres sur ces branches sont de la forme :

$$R = R_0 + \varepsilon \cos(l\theta) + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon^i f_i(\theta), \quad l = 2, 3, \dots \text{ et } |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

Ces bifurcations donnent lieu à une infinité de solutions stationnaires non radiales de la forme :

$$u = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \theta) + \varepsilon^2 u_2(r, \theta) + \dots$$

Notons que Friedman (en collaboration avec d'autres chercheurs tels que Cui dans [33] et Hu dans [43, 44]) a développé d'autres modèles de croissance tumorale. Ils ont mené une analyse rigoureuse de l'existence, de l'unicité des solutions et des bifurcations. De nombreux modèles ont été généralisés à partir du travail fondateur de Greenspan [53], parmi lesquels on peut citer, de manière non exhaustive, les références [21, 41, 42, 74, 79]. Ces travaux ont contribué à approfondir la compréhension des mécanismes de croissance tumorale et ont favorisé l'émergence de nouvelles approches à la fois théoriques et appliquées.

Analyse mathématique d'un modèle à deux phases

Ce chapitre est le développement de l'article [2].

1 Présentation du modèle mathématique

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle mathématique décrivant la croissance tumorale. Nous supposons que la tumeur traverse deux phases : une phase de croissance exponentielle, où les cellules cancéreuses se divisent et prolifèrent, et une phase de croissance ralentie, due à la diminution des nutriments, ce qui empêche les cellules de continuer leur prolifération normale.

Notons par :

- $\Omega_\beta(t)$ la région de la tumeur dans \mathbb{R}^3 pour $t > 0$, qui satisfait la condition suivante :
 - (C) La frontière $\partial\Omega_\beta(t)$ est paramétrée par $R(t) + \beta(\theta)$ pour $t > 0$, où β est une perturbation de classe $C^2(S)$, avec S la sphère unité.
- u la concentration d'oxygène ou de nutriments dans $\Omega_\beta(t)$.
- λf la consommation d'oxygène, donnée par :

$$\begin{aligned} f(u) &= \varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu) \\ &= \begin{cases} \varepsilon & , & u < \mu \\ 1 & , & u \geq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

avec λ , ε et μ des constantes positives, μ étant une valeur critique de u , en dessous de laquelle le taux de prolifération des cellules cancéreuses diminue, et H est la fonction de Heaviside.

- \bar{u}_∞ la concentration d'oxygène sur le bord de $\Omega_\beta(t)$, telle que $\bar{u}_\infty > \mu$.

Nous considérons donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu)) & \text{dans } \Omega_\beta(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour $t > 0$, on définit :

$$\omega^-(t) := \{x \in \Omega_\beta(t), \quad u(x) < \mu\}, \quad \omega^+(t) := \{x \in \Omega_\beta(t), \quad u(x) \geq \mu\}$$

Alors, le problème (3.1) est équivalent au problème à frontière libre suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\chi_{\omega^+(t)}) & \text{dans } \Omega_\beta(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\chi_{\omega^+(t)}$ représente la fonction caractéristique de ω^+ . L'ensemble inconnu

$$\Gamma(t) := \partial\omega^-(t) = \{x \in \Omega_\beta(t), \quad u(x) = \mu\}$$

est la frontière libre associée au problème (3.1).

Notons que lorsque $\varepsilon \in (0, 1)$, la tumeur se développe en deux phases distinctes. Dans phase 1, la tumeur est composée uniquement de cellules vivantes et proliférantes, ce qui implique que $\omega^-(t) = \emptyset$. Dans la phase 2, la tumeur présente deux régions : une région externe $\omega^+(t)$, où les cellules se prolifèrent normalement, et une région centrale $\omega^-(t)$, contenant des cellules quiescentes qui ne prolifèrent pas. Dans cette phase, le problème admet deux frontières libres : une frontière libre externe $\partial\Omega_\beta(t)$ et une frontière libre interne $\Gamma(t)$, qui sépare ces deux régions. Lorsque $\varepsilon \in [1, +\infty)$, le problème (3.1) ne décrit pas la croissance tumorale, mais il reste cependant très intéressant d'un point de vue mathématique.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer les solutions du problème perturbé (3.1) à partir des solutions du problème réduit lorsque $\Omega_\beta = \Omega_0$, c.à.d dans le cas où $\Omega_0(t)$ est supposé être de symétrie radiale à l'instant $t > 0$.

Ainsi, nous commençons par étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda f(u) & 0 < r < R(t), \quad t > 0 \\ u(R(t), t) = u_\infty & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où u_∞ est la concentration d'oxygène sur le bord de $\Omega_0(t)$, proche de \bar{u}_∞ et vérifiant $u_\infty > \mu$.

D'autre part, en appliquant le principe de conservation de la masse, nous obtenons l'évolution du rayon tumoral $R(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) = \int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr - \int_0^{R(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(u, \beta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \quad t > 0$$

où $S(u)$ et $N(u)$ sont respectivement les taux locaux de prolifération et de mortalité des cellules, définis par :

$$S(u) = \lambda f(u), \quad N(u) = \eta$$

où η est une constante positive représente le taux net de perte cellulaire due à l'apoptose.

Pour $R(0) = R_0 > 0$, la dynamique du rayon tumoral $R(t)$ est définie par :

$$\begin{cases} R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = \int_0^{R(t)} S(u) r^2 dr - \int_0^{R(t)} N(u) r^2 dr \\ R(0) = R_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Nous pouvons résumer la situation par le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu)) & 0 < r < R(t), \quad t > 0 \\ u(R(t), t) = u_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = \lambda \int_0^{R(t)} f(u) r^2 dr - \eta \int_0^{R(t)} r^2 dr \\ R(0) = R_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans ce cas, lorsque $\omega^-(t) \neq \emptyset$, le problème (3.5) présente une frontière libre externe $R(t)$ et une frontière libre interne $\Gamma(t)$ de la forme :

$$\Gamma(t) = \{(r_\lambda(t), \theta) \in (0, R(t)) \times S, \quad u(r_\lambda(t), t) = \mu\}$$

2 Analyse mathématique du modèle

Dans cette section, nous présentons les résultats d'existence de solutions pour le problème (3.1), ainsi que certaines propriétés relatives à leurs frontières libres correspondantes. Nous commençons par établir l'existence et la multiplicité des solutions stationnaires du problème (3.5) lorsque $\Omega_0(t) = \Omega_0 = B(0, R)$. Puis, nous prouvons l'existence globale d'une solution transitoire. Nous formulons enfin le problème perturbé (3.1) et montrons qu'il est équivalent à une équation intégrale non linéaire, dont la résolution nous permet de déterminer les solutions du problème (3.1).

2.1 Solutions stationnaires

Considérons le problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu)), & 0 < r < R \\ u(R) = u_\infty, & \frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

et l'équation intégrale :

$$\frac{1}{R^2} \left(\lambda \int_0^R f(u) r^2 dr - \eta \int_0^R r^2 dr \right) = 0 \quad (3.7)$$

Une solution $u_{\lambda, \mu}$ du problème (3.6) est une fonction $u_{\lambda, \mu} \in C^2((0, R) \setminus \{r_\lambda\}) \cap C^1([0, R])$ vérifiant le problème (3.6). La frontière libre correspondant à la solution stationnaire est donnée par :

$$\Gamma_s = \{(r_\lambda, \theta) \in (0, R) \times S, u_{\lambda, \mu}(r_\lambda) = \mu\}$$

Notons que ces solutions non négatives sont des fonctions strictement convexes, telles que :

$$\min_{0 \leq r \leq R} u_{\lambda, \mu}(r) = u_{\lambda, \mu}(0).$$

Ainsi, si $u_{\lambda, \mu}(0) > \mu$, on en déduit que $u_{\lambda, \mu}(r) > \mu$ pour tout $r \in [0, R]$. Le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda & 0 < r < R \\ u(R) = u_\infty, & u'(0) = 0 \end{cases}$$

À l'inverse, si $u_{\lambda, \mu}(0) \leq \mu$, la continuité de la solution implique qu'il existe un point $r_\lambda \geq 0$ tel que $u_{\lambda, \mu}(r_\lambda) = \mu$. Le problème se réécrit alors sous la forme suivante, avec deux régions distinctes :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda \varepsilon & 0 < r < r_\lambda \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda & r_\lambda < r < R \\ u(R) = u_\infty, & u'(0) = 0, & u(r_\lambda) = \mu. \end{cases}$$

Afin d'indiquer le résultat principal de cette partie, nous définissons deux valeurs critiques du paramètre λ :

$$\lambda_1 := \frac{6(u_\infty - \mu)}{R^2}, \quad \lambda_2 := \frac{27(u_\infty - \mu)(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{4\varepsilon}{3} - \frac{3}{2} \right)}$$

Le premier résultat concerne l'existence et la multiplicité des solutions du problème (3.6) donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1.

1. Pour $\varepsilon \in (0, +\infty)$ et $\lambda < \lambda_1$, le problème (3.6) possède une solution unique $u_{\lambda, \mu}^*$ sans frontière libre. De plus,

$$u_{\lambda, \mu}^*(0) = \frac{-\lambda}{6} R^2 + u_\infty$$

c.à.d. la courbe $(\lambda, \gamma_s^*(\lambda))$, avec $\gamma_s^*(\lambda) := \frac{-\lambda}{6} R^2 + u_\infty$ définit une partie décroissante du diagramme de bifurcation. Voir la figure 3.1

2. Pour $\varepsilon \in (0, \frac{9}{8}]$ et $\varepsilon \neq 1$, si $\lambda \geq \lambda_1$ alors (3.6) admet une solution unique $u_{\lambda, \mu}$ avec une frontière libre de la forme

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad \text{si } \varepsilon < 1$$

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 - 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) \right) \right] \quad \text{si } \varepsilon > 1$$

De plus, leur diagramme de bifurcation est donné par : $\gamma_s(\lambda) = -\frac{\lambda \varepsilon}{6} r_\lambda^2 + \mu$.

3. Pour $\varepsilon \in (\frac{9}{8}, \frac{3}{2})$, nous avons ;

(i) Si $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$, le problème (3.6) a une solution unique avec une frontière libre r_λ , qui est de la forme

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 - 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) \right) \right]$$

(ii) Si $\lambda \geq \lambda_2$, alors (3.6) possède une solution unique $u_{\lambda, \mu}$ avec une frontière libre donnée par

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R + \left(\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27} p^3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27} p^3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

où

$$p = \frac{-(\varepsilon - \frac{3}{2})^2}{3(\varepsilon - 1)^2} R^2, \quad q = \frac{-2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^3}{27(\varepsilon - 1)^3} - \frac{R(\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{(\varepsilon - 1)}$$

De plus,

$$\gamma_s(\lambda) = -\frac{\lambda \varepsilon}{6} r_\lambda^2 + \mu.$$

4. Si $\varepsilon = \frac{3}{2}$ et $\lambda \geq \lambda_1$, alors le problème (3.6) admet une solution unique avec une frontière libre donnée par

$$r_\lambda = \left[R \left(R^2 - \frac{6(u_\infty - \mu)}{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

Et

$$\gamma_s(\lambda) = -\frac{\lambda \varepsilon}{6} r_\lambda^2 + \mu.$$

5. Pour $\varepsilon \in (\frac{3}{2}, +\infty)$, nous avons :

(i) Si $\lambda = \lambda_2$, le problème (3.6) possède une solution unique $u_{\lambda_2, \mu}$ avec une frontière libre donnée par

$$r_{\lambda_2} = \frac{2\varepsilon - 3}{3(\varepsilon - 1)} R$$

(ii) Si $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_1$, alors (3.6) possède deux solutions positives $\bar{u}_{\lambda, \mu}$, $\underline{u}_{\lambda, \mu}$ avec leurs frontières libres correspondantes :

$$\bar{r}_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) \right) \right]$$

$$\underline{r}_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

De plus, leurs diagrammes de bifurcation sont les suivants :

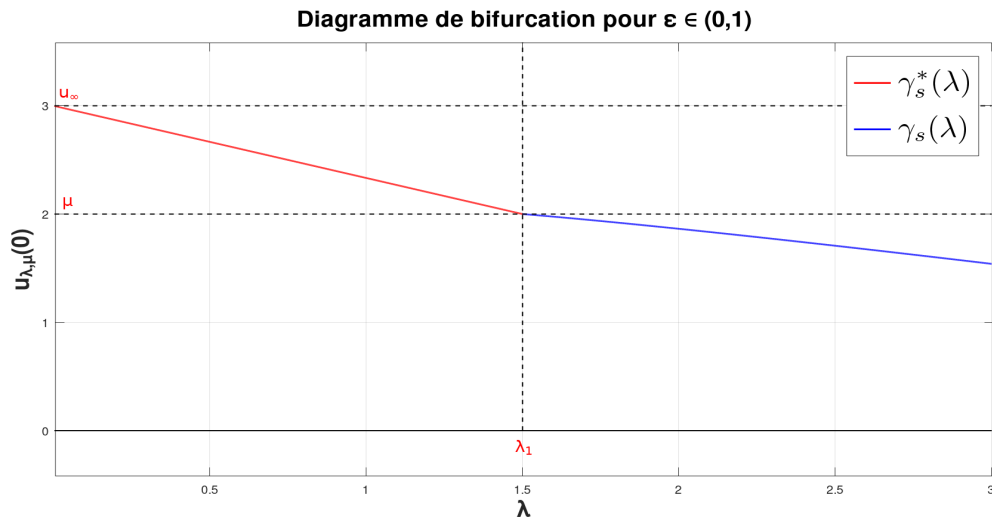
$$\bar{\gamma}_s(\lambda) = -\frac{\lambda\varepsilon}{6}r_\lambda^2 + \mu, \quad \underline{\gamma}_s(\lambda) = -\frac{\lambda\varepsilon}{6}r_\lambda^2 + \mu$$

(iii) Si $\lambda > \lambda_1$, alors le problème (3.6) admet une solution unique $u_{\lambda,\mu}$ avec une frontière libre, qui est de la forme

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)}R + \left(\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

De plus,

$$\gamma_s(\lambda) = -\frac{\lambda\varepsilon}{6}r_\lambda^2 + \mu.$$



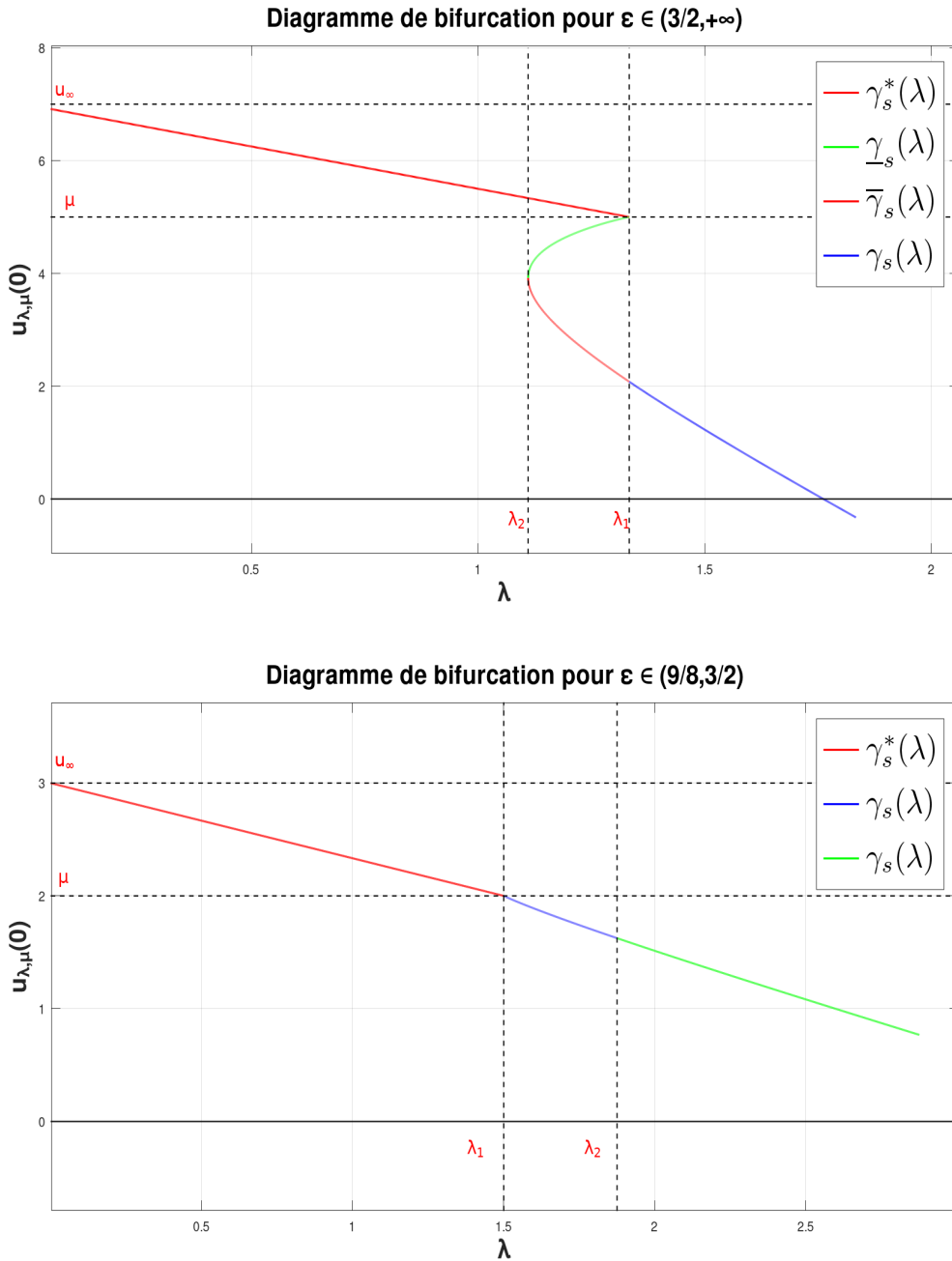


FIGURE 3.1 – Diagrammes de bifurcation pour $\varepsilon \neq 1$.

Remarque 3.1. Les diagrammes de bifurcation précédents fournissent le nombre exact de solutions du problème (3.6) en fonction de la position du paramètre $\lambda = \lambda(R, \varepsilon, \mu)$. Par exemple, lorsque $\varepsilon > 3/2$ et $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$, il existe deux solutions avec des frontières libres et une (en rouge) sans frontière libre (voir la Figure 3.1). De plus, la formule explicite des frontières libres, énoncée dans le théorème 3.1 et les différentes branches des courbes de bifurcation peuvent être simplifiées l'étude de la stabilité de nos solutions.

Preuve du Théorème 3.1.

Tout d'abord, nous considérons le cas $u_{\lambda, \mu}(0) > \mu$, ce qui correspond à l'absence de frontière libre. Nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda & 0 < r < R \\ u(R) = u_{\infty} \quad , \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

La solution est de la forme :

$$u_{\lambda,\mu}^*(r) = \frac{\lambda}{6}(r^2 - R^2) + u_\infty, \quad r \in [0, R]$$

Ainsi

$$\min_{0 \leq r \leq R} u_{\lambda,\mu}^*(r) = u_{\lambda,\mu}^*(0) = -\frac{\lambda}{6}R^2 + u_\infty > \mu \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda < \frac{6(u_\infty - \mu)}{R^2} := \lambda_1$$

Par conséquent, cela prouve le point (1) du théorème 3.1.

Maintenant, nous considérons le cas $u_{\lambda,\mu}(0) \leq \mu$, où le problème (3.6) possède une frontière libre sous la forme $\{(r_\lambda, \theta) \in (0, R) \times S, u_{\lambda,\mu}(r_\lambda) = \mu\}$. Alors, le problème (3.6) s'écrit dans les différentes régions comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \lambda \varepsilon & 0 < r < r_\lambda \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \lambda & r_\lambda < r < R \\ u(R) &= u_\infty, \quad u'(0) = 0, \quad u(r_\lambda) = \mu. \end{aligned}$$

Dans la région $(0, r_\lambda)$, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \lambda \varepsilon & r \in (0, r_\lambda) \\ u(r_\lambda) = \mu, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique,

$$u_{\lambda,\mu}(r) = \frac{\lambda \varepsilon}{6}(r^2 - r_\lambda^2) + \mu, \quad 0 \leq r \leq r_\lambda$$

Dans la région (r_λ, R) , nous avons :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \lambda & r \in (r_\lambda, R) \\ u(r_\lambda) = \mu, \quad u(R) = u_\infty \end{cases}$$

Alors,

$$u_{\lambda,\mu}(r) = u_\infty + \frac{\lambda}{6}(r^2 - R^2) + \frac{(r - R)r_\lambda}{(r_\lambda - R)r} \left(\mu - u_\infty - \frac{\lambda}{6}(r_\lambda^2 - R^2) \right), \quad r_\lambda \leq r \leq R$$

En utilisant la condition de transmission ($u \in C^1(\Omega)$) c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_\lambda^-) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_\lambda^+) \quad (3.8)$$

où $\frac{\partial u}{\partial r}(r_\lambda^+)$ et $\frac{\partial u}{\partial r}(r_\lambda^-)$ représentent respectivement les dérivées à droite et à gauche en $r = r_\lambda$. Nous obtenons

$$\lambda = \frac{3(u_\infty - \mu)}{(\varepsilon - 1)r_\lambda^2 \frac{(R - r_\lambda)}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - r_\lambda^2)} \quad (3.9)$$

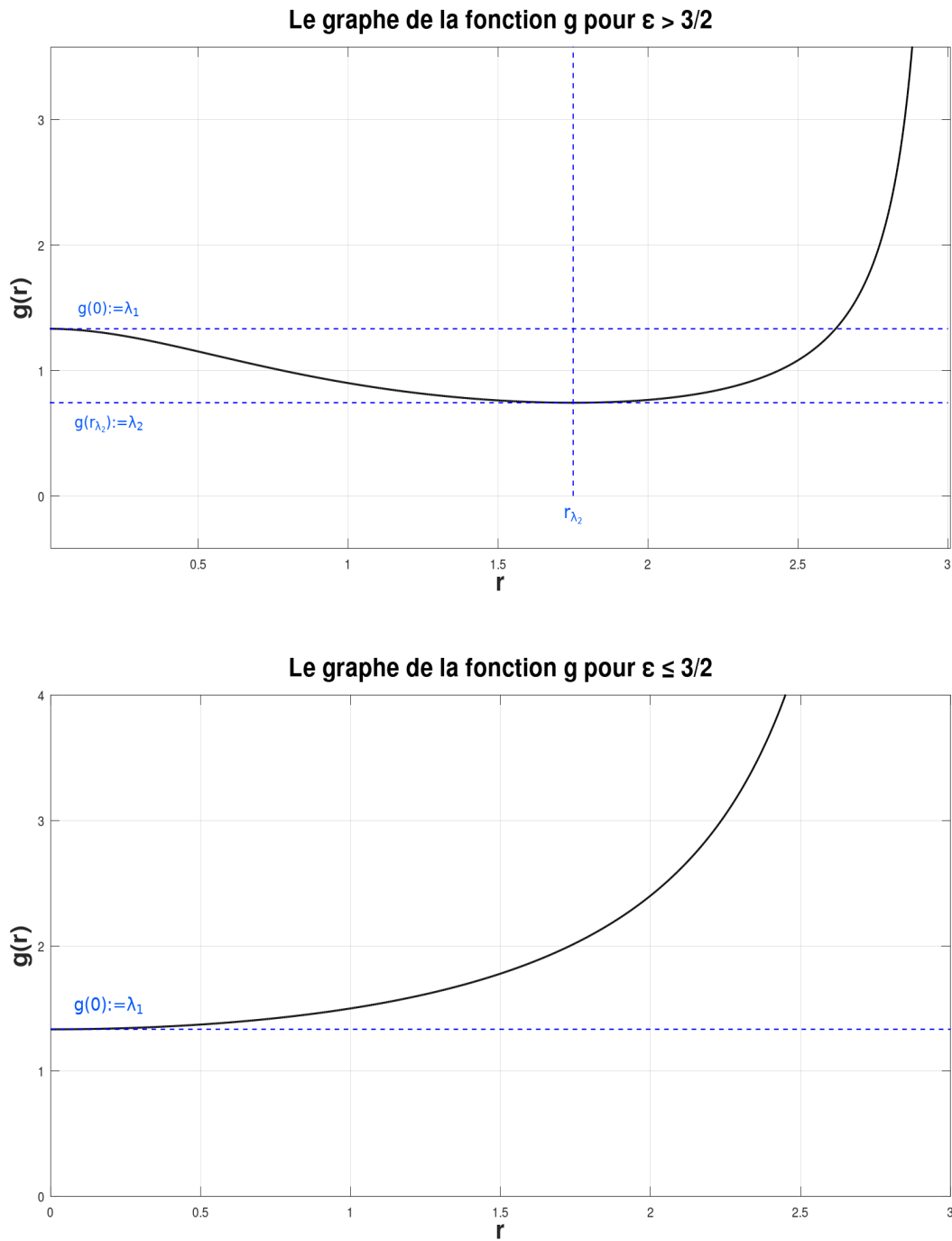
Posons

$$g(r) = \frac{3(u_\infty - \mu)}{(\varepsilon - 1)r^2 \frac{(R - r)}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - r^2)} \quad \text{pour } r \in (0, R) \quad (3.10)$$

avec

$$g'(r) = \frac{-3(u_\infty - \mu)r \left(\frac{\varepsilon - 1}{R}(2R - 3r) - 1 \right)}{\left(r^2(\varepsilon - 1) \frac{R - r}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - r^2) \right)^2}$$

Nous allons analyser le comportement de la fonction g en fonction des valeurs de λ , en distinguant deux cas (voir la figure 3.2) :


 FIGURE 3.2 – Graphique de la fonction g pour $\varepsilon \neq 1$.

1. Pour $\varepsilon \in (3/2, +\infty)$, la fonction g possède un minimum en r_{λ_2} donné par :

$$r_{\lambda_2} = \frac{2\varepsilon - 3}{3(\varepsilon - 1)}R, \quad g(r_{\lambda_2}) = \frac{27(u_\infty - \mu)(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{4\varepsilon}{3} - \frac{3}{2}\right)}$$

On conclut que,

- Si $\lambda < \lambda_2 := g(r_{\lambda_2})$, l'équation (3.9) n'admet pas de racine.
 - Si $\lambda = \lambda_2$, l'équation (3.9) a une racine unique r_{λ_2} .
 - Si $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_1 = g(0)$, alors (3.9) possède deux racines dans $(0, R)$.
 - Si $\lambda > \lambda_1$, l'équation (3.9) a une racine unique.
2. Pour $\varepsilon \in (0, \frac{3}{2}]$, la fonction g est strictement croissante et admet un minimum égal à λ_1 en 0. Ainsi,

- Si $\lambda < \lambda_1$, l'équation (3.9) ne possède pas de racine.
- Si $\lambda \geq \lambda_1$, l'équation (3.9) admet une racine unique.

Nous obtenons explicitement la formule des frontières libres en résolvant l'équation algébrique suivante :

$$\frac{-(\varepsilon - 1)}{R}r^3 + (\varepsilon - \frac{3}{2})r^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda} = 0, \quad 0 < r < R \quad (3.11)$$

Posons,

$$a = \frac{-(\varepsilon - 1)}{R}, \quad b = \varepsilon - \frac{3}{2}, \quad d = \frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda}$$

D'après la section 7 du préliminaire, nous considérons le discriminant de cette équation défini par :

$$\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$$

avec

$$\begin{aligned} p &= \frac{-b^2}{3a^2} = \frac{-(\varepsilon - \frac{3}{2})^2}{3(\varepsilon - 1)^2}R^2 \\ q &= \frac{b}{27a} \left(\frac{2b^2}{a^2} \right) + \frac{d}{a} = \frac{-2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^3}{27(\varepsilon - 1)^3} - \frac{R(\frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{(\varepsilon - 1)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta = \left(\frac{R^2(\frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - 1)^2} \right) \left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{4(\varepsilon - \frac{3}{2})^3}{27(\varepsilon - 1)^2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda} \right)$$

Pour $\varepsilon > 3/2$, nous avons

- Si $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_1$, alors $\Delta < 0$ et les deux racines sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{r}_\lambda &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}} \right) \right) - \frac{b}{3a} \\ &= \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}} \right) \right) \right] \\ &= \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{r}_\lambda &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) - \frac{b}{3a} \\ &= \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

- Si $\lambda > \lambda_1$, alors $\Delta > 0$ et la frontière libre est de la forme :

$$\begin{aligned} r_\lambda &= -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R + \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Pour obtenir (5.(i), 5.(ii) et 5.(iii)) du théorème 3.1, il suffit de noter par $u_{\lambda_2, \mu}$, $\bar{u}_{\lambda, \mu}$, $\underline{u}_{\lambda, \mu}$ et $u_{\lambda, \mu}$ les solutions associées aux frontières libres données par r_{λ_2} , \bar{r}_λ , \underline{r}_λ et r_λ respectivement.

Maintenant, soit $\varepsilon \in (0, \frac{3}{2}]$, nous distinguons trois cas :

1) Pour $\varepsilon \in (0, \frac{9}{8}]$, si $\lambda \geq \lambda_1$, alors $\Delta < 0$ et la racine est de la forme :

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \text{ si } \varepsilon < 1$$

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 - 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) \right) \right] \text{ si } \varepsilon > 1$$

2) Pour $\varepsilon \in (\frac{9}{8}, \frac{3}{2})$, nous avons

- Si $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$, alors $\Delta < 0$ et la racine est donnée par

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 - 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) \right) \right]$$

- Si $\lambda \geq \lambda_2$, nous obtenons la frontière libre suivante :

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R + \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

3) Pour $\varepsilon = \frac{3}{2}$, si $\lambda \geq \lambda_1$ alors $\Delta = (q)^2 > 0$ et la racine égale à :

$$r_\lambda = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left[R \left(R^2 - \frac{6(u_\infty - \mu)}{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

Ceci termine la preuve du théorème 3.1. ■

Maintenant, lorsque $\varepsilon \in (0, 1)$ et à partir du théorème 3.1, nous remarquons que les deux phases de la croissance tumorale sont caractérisées par $u_{\lambda, \mu}(0) > \mu$ et $u_{\lambda, \mu}(0) \leq \mu$. Cela conduit à déterminer le rayon R^* de la tumeur lorsqu'elle passe de la phase 1 (croissance normale) à la phase 2 (croissance ralentie). Ainsi, la tumeur reste en phase 1 tant que $u_{\lambda, \mu}(0) = \mu$ (c.à.d. $\frac{-\lambda}{6} R^2 + u_\infty = \mu$), et par conséquent, R^* est donné par

$$R^* = \sqrt{\frac{6(u_\infty - \mu)}{\lambda}}.$$

Alors, si $R < R^*$ la tumeur est en phase 1 (ce qui correspond à l'absence de frontière libre). Dans le cas où $R \geq R^*$, en raison du manque de nutriments, la tumeur forme une nouvelle région, et passe ainsi en phase 2 (le cas avec une frontière libre).

D'autre part, pour conclure sur l'existence de la solution $(u_{\lambda, \mu}, R)$ dans le cas stationnaire, nous devons déterminer le rayon de la tumeur R qui satisfait l'équation (3.7). Nous posons

$$L(R) = \lambda \int_0^R f(u) r^2 dr - \int_0^R N(u) r^2 dr$$

Lemme 3.1. *Supposons que*

$$\eta < \lambda \tag{3.12}$$

est satisfaite. Alors, l'opérateur L possède une racine unique $R_s > 0$. De plus, $L(R) > 0$ pour $R < R_s$, et $L(R) < 0$ pour $R > R_s$.

Preuve. Nous avons :

- * Pour $0 < R < R^*$

$$L(R) = \int_0^R \lambda r^2 dr - \int_0^R \eta r^2 dr = \left(\frac{\lambda - \eta}{3} \right) R^3 > 0.$$

* Pour $R \geq R^*$

$$\begin{aligned} L(R) &= \int_0^{r_\lambda} \lambda \varepsilon r^2 dr + \int_{r_\lambda}^R \lambda r^2 dr - \int_0^R \eta r^2 dr \\ &= \frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} r_\lambda^3 + \frac{\lambda - \eta}{3} R^3 \end{aligned}$$

où la frontière libre $r_\lambda \in (0, R)$ est donnée par le théorème 3.1 lorsque $\varepsilon \in (0, 1)$. Le comportement de la fonction g (voir (3.10)) implique que la fonction $R \rightarrow \lambda(R)$ est décroissante par rapport R , par la suite $\lim_{R \rightarrow +\infty} \lambda(R) = 0$. D'où,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{L(R)}{R^3} = -\frac{\eta}{3} < 0.$$

On en déduit qu'il existe $R_s > R^*$ telle que $L(R_s) = 0$. Ainsi, pour montrer l'unicité de R_s il suffit de prouver que la fonction \widehat{L} définie par

$$\widehat{L}(R) := \frac{L(R)}{R} = \frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} \left(\frac{r_\lambda}{R}\right)^3 + \frac{\lambda - \eta}{3}$$

est monotone pour cela voir le lemme 3.3 défini dans la sous-section suivante. \blacksquare

Remarque 3.2. *D'un point de vue biologique, la condition (3.12) est justifiée : la tumeur passe de la phase 1 à la phase 2 lorsque le taux de prolifération locale, donné par $S(u) = \lambda f(u)$, devient supérieur au taux de mortalité locale $N(u) = \eta$.*

2.2 Solution transitoire

Dans cette section, nous examinons l'existence des solutions globales du problème (3.5) et leur comportement asymptotique. Le principal résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit $R_0 > 0$, pour $0 < \varepsilon < 1$ le problème (3.5) possède une solution unique $(u(r, t), R(t))$ pour $t > 0$. De plus, pour $\eta < \lambda$, nous avons :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R_s \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(r, t) = u_{\lambda, \mu}$$

avec $(u_{\lambda, \mu}, R_s)$ la solution stationnaire du problème (3.6), (3.7).

La démonstration de ce théorème repose sur les lemmes suivants.

Lemme 3.2. [94]. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)f(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

avec f une fonction continue, dérivable et décroissante dans $(0, +\infty)$. S'il existe une constante unique $x_s > 0$ telle que $f(x_s) = 0$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_s.$$

D'autre côté, pour $t > 0$ et $\lambda \geq \lambda_1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= \frac{1}{R(t)^2} \left(\int_0^{r_0(t)} \lambda \varepsilon r^2 dr + \int_{r_0(t)}^{R(t)} \lambda r^2 dr - \int_0^{R(t)} \eta r^2 dr \right) = \frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} \frac{r_0^3(t)}{R^2(t)} + \frac{\lambda - \eta}{3} R(t) \\ &= R(t) \left[\frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} \left(\frac{r_0(t)}{R(t)}\right)^3 + \frac{\lambda - \eta}{3} \right] = R(t) \widehat{L}(R(t)) \end{aligned}$$

avec $r_0(t) := r_\lambda(R(t))$, où r_λ est donnée par le théorème 3.1 lorsque $\varepsilon \in (0, 1)$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.3. Pour $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\lambda \geq \lambda_1$, la fonction \widehat{L} est décroissante et satisfait

$$\frac{\lambda\varepsilon - \eta}{3} \leq \widehat{L}(R) \leq \frac{\lambda - \eta}{3}, \quad \forall R > 0 \quad (3.14)$$

Preuve. Nous avons

$$\frac{r_0(t)}{R(t)} = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2}R(t)^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R(t)^2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

Un calcul simple montre que

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{r_0}{R} \right) = \frac{3(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - \frac{3}{2})^2} \frac{u_\infty - \mu}{\lambda R^3(t) \sqrt{1 - A^2(R)}} \sin \left(\frac{1}{3} \arccos(A(R)) + \frac{4\pi}{3} \right)$$

où

$$A(R) = \left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}} \right) = 1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2}R(t)^2 - \frac{3(u_\infty - \mu)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R(t)^2}$$

Remarquons que pour $\lambda \geq \lambda_1$, on a $A(R) \in (0, 1)$, ce qui implique que

$$\frac{4\pi}{3} < \frac{1}{3} \arccos(A(R)) + \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{r_0}{R} \right) > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1)$$

Nous concluons que

$$\frac{d\widehat{L}}{dR}(R) = \lambda(\varepsilon - 1) \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{r_0}{R} \right) < 0 \quad \text{pour } \varepsilon \in (0, 1)$$

c'est-à-dire que \widehat{L} est une fonction décroissante.

De plus, puisque $0 \leq r_0 \leq R$ et $-1 < \varepsilon - 1 < 0$ nous avons

$$\frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} \leq \frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3 \leq 0$$

Ce qui donne

$$\frac{\lambda\varepsilon - \eta}{3} \leq \widehat{L}(R) \leq \frac{\lambda - \eta}{3}$$

On en déduit l'inégalité (3.14), ce qui termine la preuve du lemme. \blacksquare

Preuve du Théorème 3.2. Soit $R(t) > 0$. D'après la section précédente, nous savons que si $\lambda < \lambda_1$, le problème (3.5) admet une solution unique $u(r, R(t))$ sans frontière libre. Si $\lambda \geq \lambda_1$, alors le problème (3.5) possède une solution unique $u(r, R(t))$ avec une frontière libre unique $r_0(t) = r_\lambda(R(t))$. Ainsi, pour déterminer $R(t)$ nous distinguons deux cas,

1. Si $\lambda < \lambda_1$, nous avons

$$\begin{cases} R'(t) &= \left(\frac{\lambda - \eta}{3} \right) R(t), & t > 0 \\ R(0) &= R_0 > 0 \end{cases}$$

d'où,

$$R(t) = R_0 e^{\left(\frac{\lambda - \eta}{3} \right) t}, \quad t > 0.$$

2. Si $\lambda \geq \lambda_1$, on a

$$\begin{cases} R'(t) = R(t)\widehat{L}(R(t)), & t > 0 \\ R(0) = R_0 > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

En appliquant le résultat du lemme 3.3, nous obtenons que le problème (3.15) admet une solution unique qui satisfait :

$$R_0 e^{\left(\frac{\lambda\varepsilon-\eta}{3}\right)t} \leq R(t) \leq R_0 e^{\left(\frac{\lambda-\eta}{3}\right)t}, \quad t > 0. \quad (3.16)$$

Nous rappelons que \widehat{L} est une fonction décroissante et que pour $\eta < \lambda$, il existe une unique R_s , telle que

$$\widehat{L}(R_s) = 0$$

Alors, d'après le lemme 3.2, nous concluons que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R_s.$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(r, t) = u_{\lambda, \mu}.$$

La preuve du théorème 3.2 est complète. ■

Remarque 3.3. *Le résultat d'existence et de l'unicité du théorème 3.2 reste valable pour tout $\varepsilon > 0$, sauf dans le cas $\varepsilon > 3/2$ et $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_1]$, où l'unicité est perdue (voir 5.(ii) du théorème 3.1). De plus, nous rappelons que le cas $\varepsilon > 1$ ne décrit pas la croissance tumorale.*

2.3 Problème à frontière libre perturbé

Dans cette section, nous établissons le résultat principal de ce chapitre, énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Supposons que la condition (C) est satisfaite et $\varepsilon \neq 1$, nous avons :*

1. *Pour $\varepsilon \leq \frac{3}{2}$, $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$ et $\lambda \neq \lambda_2$, le problème (3.1) possède une solution positive, et sa frontière libre est une hypersurface analytique de classe $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.*
2. *Pour $\varepsilon > \frac{3}{2}$, nous avons*
 - (a) *Si $\lambda \in]\lambda_2, \lambda_1]$, le problème (3.1) admet deux solutions positives dont les frontières libres sont des hypersurfaces analytiques de classe $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.*
 - (b) *Si $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, le problème (3.1) possède une solution positive, et sa frontière libre est une hypersurface analytique de classe $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.*

La démonstration du théorème 3.3 se décompose en quatre étapes. Nous rappelons que, sous les hypothèses de ce théorème, nous avons établi que le problème réduit (3.3) admet une solution radiale positive, associée à une frontière libre r_λ dans le cas $\lambda \geq \lambda_1$, et possède deux solutions radiales positives correspondant aux frontières libres \bar{r}_λ et \underline{r}_λ pour $\varepsilon > 3/2$ et $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_1$.

2.3.1 Problème équivalent

Soit r_0 l'une des valeurs de la frontière libre considérées dans le théorème 3.1, qui satisfait l'équation

$$u(r_0, \theta) = \mu, \quad \forall \theta \in S$$

Au vu des sections 2.1 et 2.2, on peut considérer le cas stationnaire et généraliser les résultats dans le cas non-stationnaire, c.à.d. nous fixons $t = T$ et nous cherchons une frontière libre sous la forme

$\psi(\theta) := r_0 + b(\theta)$, où b est la perturbation causée par β .

Par conséquent, nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu)) & \text{dans } \Omega_\beta \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta \end{cases} \quad (3.17)$$

avec $\Omega_\beta = B(0, R + \beta(\theta))$, où $\beta \in C^2(S, \mathbb{R})$, et \bar{u}_∞ est proche de u_∞ vérifiant $\bar{u}_\infty > \mu$. Nous définissons l'ensemble des surfaces admissible dans Ω_β par

$$S_\beta = \{h \in C(S); (h(\theta), \theta) \in \Omega_\beta \text{ pour } \theta \in S\}$$

Pour une fonction $\psi \in S_\beta$, on considère l'ensemble :

$$\Omega_{\beta, \psi} = \{(r, \theta) \in \Omega_\beta, r < \psi(\theta)\}$$

On note aussi $\chi_{\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta, \psi}}$ la fonction caractéristique de $\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta, \psi}$. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Le problème*

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\chi_{\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta, \psi}}) & \text{dans } \Omega_\beta \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta \end{cases} \quad (3.18)$$

possède une solution unique $u_{\lambda, \beta} \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}_\beta, \mathbb{R})$ avec $\alpha = 1 - \frac{3}{p}$, et $p > 3$. De plus, s'il existe une fonction $\psi \in \Omega_{\beta, \psi}$ telle que,

$$u_{\lambda, \beta}(\psi(\theta), \theta) = \mu$$

Alors $u_{\lambda, \beta}$ est une solution du problème (3.17).

Preuve de Proposition 3.1. Tout d'abord, nous savons que

$$\lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\chi_{\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta, \psi}}) \in L^p(\Omega_\beta), \quad p > 1.$$

D'après le théorème 9.15 de [49], il existe une solution unique $u_{\lambda, \beta}$ du problème (3.18) dans $W^{2, p}(\Omega_\beta)$. De plus, pour $p > 3$, $W^{2, p}(\Omega_\beta) \hookrightarrow C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}_\beta, \mathbb{R})$ avec $\alpha = 1 - \frac{3}{p}$. La solution $u_{\lambda, \beta}$ vérifie

$$\begin{aligned} \Delta u_{\lambda, \beta} &= \lambda\varepsilon, & \Omega_{\beta, \psi} \\ \Delta u_{\lambda, \beta} &= \lambda, & \Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta, \psi} \\ u_{\lambda, \beta} &= \bar{u}_\infty, & \partial\Omega_\beta \end{aligned}$$

S'il existe une fonction ψ telle que $u_{\lambda, \beta}(\psi(\theta), \theta) = \mu$, alors $u_{\lambda, \beta}$ devient une solution de

$$\begin{aligned} \Delta u_{\lambda, \beta} &= \lambda\varepsilon, & \Omega_{\beta, \psi} \\ u_{\lambda, \beta} &= \mu, & \partial\Omega_{\beta, \psi} \\ \Delta u_{\lambda, \beta} &= \lambda, & \Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta, \psi} \\ u_{\lambda, \beta} &= \bar{u}_\infty, & \partial\Omega_\beta \end{aligned}$$

Dans la région $\Omega_{\beta, \psi}$, nous avons :

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda, \beta} = \lambda\varepsilon & \text{dans } \Omega_{\beta, \psi} \\ u_{\lambda, \beta} = \mu & \text{sur } \partial\Omega_{\beta, \psi} \end{cases}$$

Par le principe du maximum,

$$\max_{\bar{\Omega}_{\beta, \psi}} u_{\lambda, \beta} = \max_{\partial\Omega_{\beta, \psi}} u_{\lambda, \beta} = \mu$$

Ainsi, $u_{\lambda,\beta} < \mu$ dans $\Omega_{\beta,\psi}$. De la même manière, dans la région $\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta,\psi}$, nous avons ;

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\beta} = \lambda & \text{dans } \Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta,\psi} \\ u_{\lambda,\beta} = \mu & \text{sur } \partial\Omega_{\beta,\psi} \\ u_{\lambda,\beta} = \bar{u}_\infty & \text{on } \partial\Omega_\beta \end{cases}$$

Comme $\bar{u}_\infty > \mu$, alors

$$\frac{\min}{\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta,\psi}} u_{\lambda,\beta} = \min_{\partial\Omega_{\beta,\psi}} u_{\lambda,\beta} = \mu$$

Nous obtenons que $u_{\lambda,\beta} > \mu$ dans $\Omega_\beta \setminus \Omega_{\beta,\psi}$. Donc, la fonction $u_{\lambda,\beta}$ satisfait

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\beta} = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u_{\lambda,\beta} - \mu)) & \text{dans } \Omega_\beta \\ u_{\lambda,\beta} = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta \end{cases}$$

Cela termine la preuve du proposition 3.1. ■

Maintenant, pour conclure sur l'existence des solutions du problème (3.17), il nous faut démontrer l'existence d'une fonction ψ qui satisfait l'équation suivante

$$u_{\lambda,\beta}(\psi(\theta), \theta) = \mu \quad (3.19)$$

Nous remarquons que la solution $u_{\lambda,\beta}$ dépend du domaine Ω_β , ce qui nous empêche d'utiliser directement les méthodes locales pour résoudre l'équation (3.19). Par conséquent, nous devons recourir à une transformation T_β qui transforme le domaine Ω_β en un autre domaine Ω_0 , indépendant de β et résoudre la nouvelle équation dans Ω_0 . Cette approche sera développée dans la section suivante.

2.3.2 Transformation du domaine

Tout d'abord, nous considérons la transformation suivante :

$$\begin{aligned} T_\beta : \Omega_\beta &\rightarrow \Omega_0 = B(0, R) \\ (r, \theta) &\rightarrow T_\beta(r, \theta) = (\bar{r}, \theta) = \left(r + r \frac{\beta(\theta)}{R}, \theta\right) \end{aligned}$$

avec (r, θ) et (\bar{r}, θ) étant les coordonnées dans Ω_β et Ω_0 respectivement.

Par définition de T_β , nous avons :

$$T_\beta(\psi(\theta), \theta) = (f(\theta), \theta)$$

avec $\psi \in S_\beta$ et $f \in S_0$, c.à.d. T_β effectue une transformation de S_β à S_0 .

Notons que pour β suffisamment petit, la transformation T_β est un difféomorphisme de classe $C^2(\Omega_\beta, \Omega_0)$, ainsi

$$u_{\lambda,\beta}(r, \theta) = u_{\lambda,\beta}(T_\beta^{-1}(T_\beta(r, \theta))) = \bar{u}_\lambda(T_\beta(r, \theta)) = \bar{u}_\lambda(\bar{r}, \theta), \quad \forall (r, \theta) \in \Omega_\beta \quad (3.20)$$

où $\bar{u}_\lambda := u_{\lambda,\beta}(T_\beta^{-1})$, qui satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} L_\beta \bar{u}_\lambda = \lambda(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}}) & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{u}_\lambda = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

avec L_β un opérateur continûment linéaire par rapport à β . L'expression exacte de L_β est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.4. *L'opérateur linéaire L_β est donné par $L_\beta = \left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2 \Delta + \delta_\beta$, avec*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta$$

où Δ_θ est un opérateur donné par :

$$\Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \quad \text{pour } 0 \leq \theta_1 \leq \pi \text{ et } 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi.$$

Et δ_β est de la forme

$$\begin{aligned} \delta_\beta = & \left[\left(\frac{1}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r} \partial \theta_1} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right. \\ & + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \left(\frac{1}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r} \partial \theta_2} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta_2^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \\ & \left. + \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right] \frac{(1 + \frac{\beta}{R})}{R\bar{r}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Preuve. Tout d'abord, nous avons

$$\Delta u_{\lambda,\beta} = \frac{\partial^2 u_{\lambda,\beta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{\lambda,\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta u_{\lambda,\beta} \quad (3.23)$$

et

$$u_{\lambda,\beta}(r, \theta) = \bar{u}_\lambda(\bar{r}, \theta), \quad \text{avec } \bar{r} = r + r \frac{\beta(\theta)}{R}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\lambda,\beta}}{\partial r} &= \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} \left(1 + \frac{\beta}{R} \right) := Q \\ \frac{\partial^2 u_{\lambda,\beta}}{\partial r^2} &= \frac{\partial Q}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}^2} \left(1 + \frac{\beta}{R} \right)^2 \\ \frac{\partial u_{\lambda,\beta}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_i} = \frac{r}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \theta_i} \\ &= \frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \theta_i} := D \\ \frac{\partial^2 u_{\lambda,\beta}}{\partial \theta_i^2} &= \frac{\partial D}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \theta_i} \right) \frac{r}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \\ &= \left(\frac{1}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r} \partial \theta_i} \right) \frac{r}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} + \frac{r}{R} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta_i^2} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} + \frac{r}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r} \partial \theta_i} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \theta_i^2} \\ &= \left[\left(\frac{1}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r} \partial \theta_i} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta_i^2} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \bar{r}} \right] \frac{\bar{r}}{R(1 + \frac{\beta}{R})} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\lambda}{\partial \theta_i^2} \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$.

En remplaçant ses dérivées dans (3.23) et en utilisant le fait que $r = \frac{\bar{r}}{1 + \beta/R}$, on obtient

$$\Delta u_{\lambda,\beta} = \left(1 + \frac{\beta}{R} \right)^2 \Delta \bar{u}_\lambda + \delta_\beta \bar{u}_\lambda$$

où δ_β est donné par (3.22). ■

A partir de la relation (3.20), nous concluons que le problème (3.18) et l'équation $u_{\lambda,\beta}(\psi(\theta), \theta) = \mu$ sont équivalents au problème (3.21) et l'équation

$$\bar{u}_\lambda(f(\theta), \theta) = \mu \quad (3.24)$$

Ainsi, en utilisant la fonction de Green qui transforme le problème (3.21) en une équation intégrale pour \bar{u}_λ , nous démontrons la solvabilité de l'équation (3.24) en formulant une équation intégrale non-linéaire pour f . C'est l'objet de la partie suivante.

2.3.3 Résolution de l'équation intégrale

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution de l'équation intégrale (3.24). La solution \bar{u}_λ du problème (3.21) admet la représentation suivante :

$$\begin{aligned}\bar{u}_\lambda(x) &= \bar{u}_\infty \int_{\partial\Omega_0} P(x, y) ds(y) + \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}}(y)\right) G(x, y) dy \\ &\quad - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_\lambda(y) G(x, y) dy\end{aligned}$$

avec P le noyau de Poisson et G la fonction de Green.

Nous passons aux coordonnées sphériques et nous définissons l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned}J : \mathbb{R}^+ \times S_0 \times \mathbb{R}^+ \times D &\rightarrow C(S, \mathbb{R}) \quad \text{par} \\ J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)(\theta) &= \bar{u}_\lambda(f(\theta), \theta) - \mu, \quad \forall \theta \in S\end{aligned}$$

où D est un voisinage de 0 dans $C^2(S)$;

$$\begin{aligned}J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)(\theta) &= \bar{u}_\infty \int_S P(f(\theta), \theta, \theta') d\theta' \\ &\quad + \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}}(r', \theta')\right) G(f(\theta), \theta, r', \theta') dr' d\theta' \\ &\quad - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta') G(f(\theta), \theta, r', \theta') dr' d\theta' - \mu \\ &= \bar{u}_\infty \int_S P(f(\theta), \theta, \theta') d\theta' + \frac{\lambda(1 - \varepsilon)}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^R G(f(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' d\theta' \\ &\quad + \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} (\lambda\varepsilon - \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta')) G(f(\theta), \theta, r', \theta') dr' d\theta' - \mu\end{aligned}$$

Le résultat suivant permet de caractériser les frontières libres.

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.3, il existe un voisinage V de $(u_\infty, \mu, 0)$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times C^2(S)$ et une application unique $F : V \rightarrow C(S)$ continûment différentiable telles que :*

- (1) $F(u_\infty, \mu, 0) = r_0$
- (2) $J(\bar{u}_\infty, F(\bar{u}_\infty, \mu, \beta), \mu, \beta)(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in S.$

La démonstration du théorème 3.4 repose sur l'application du théorème des fonctions implicites ainsi que sur les lemmes suivants :

Lemme 3.5.

L'opérateur J défini de $\mathbb{R}^+ \times S_0 \times \mathbb{R}^+ \times D$ vers $C(S, \mathbb{R})$ est continûment différentiable par rapport à la deuxième variable au voisinage de $(u_\infty, r_0, \mu, 0)$.

Preuve. Soit $D_2 J$ la dérivée au sens de Frechet de J , par rapport à la second variable, et $\varphi(\theta)$ une petite perturbation de $f(\theta)$. Tout d'abord, nous montrons que l'expression de la dérivée $D_2 J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 D_2 J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)\varphi(\theta) &= \bar{u}_\infty \int_S \frac{\partial P}{\partial r}(f(\theta), \theta, \theta')\varphi(\theta)d\theta' \\
 &+ \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^R \frac{\partial G}{\partial r}(f(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta)r'^2 dr' d\theta' \\
 &+ \frac{1}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} (\lambda\varepsilon - \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta')) \frac{\partial G}{\partial r}(f(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta) dr' d\theta' \\
 &- \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \varphi(\theta') d\theta'
 \end{aligned}$$

Posons $L = D_2 J$. Alors

$$\begin{aligned}
 &J(\bar{u}_\infty, f + \varphi, \mu, \beta)(\theta) - J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)(\theta) - L\varphi(\theta) \\
 &= \bar{u}_\infty \int_S P(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, \theta')d\theta' - \bar{u}_\infty \int_S P(f(\theta), \theta, \theta')d\theta' - \bar{u}_\infty \int_S \frac{\partial P}{\partial r}(f(\theta), \theta, \theta')\varphi(\theta)d\theta' \\
 &+ \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \left[\int_S \int_{f(\theta')+\varphi(\theta')}^R G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta')r'^2 dr' d\theta' - \int_S \int_{f(\theta')}^R G(f(\theta), \theta, r', \theta')r'^2 dr' d\theta' \right. \\
 &- \left. \int_S \int_{f(\theta')}^R \frac{\partial G}{\partial r}(f(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta)r'^2 dr' d\theta' \right] \\
 &+ \frac{1}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \left[\int_{\Omega_0} (\lambda\varepsilon - \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta'))G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta')dr' d\theta' \right. \\
 &- \left. \int_{\Omega_0} (\lambda\varepsilon - \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta'))G(f(\theta), \theta, r', \theta')dr' d\theta' - \int_{\Omega_0} (\lambda\varepsilon - \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta')) \frac{\partial G}{\partial r}(f(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta)dr' d\theta' \right] \\
 &+ \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \varphi(\theta') d\theta'.
 \end{aligned}$$

On ajoute et on supprime le terme suivant

$$\frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^R G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta')r'^2 dr' d\theta'$$

Alors, nous obtenons

$$J(\bar{u}_\infty, f + \varphi, \mu, \beta)(\theta) - J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)(\theta) - L\varphi(\theta) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

avec

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \bar{u}_\infty \int_S \left[P(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, \theta') - P(f(\theta), \theta, \theta') - \frac{\partial P}{\partial r}(f(\theta), \theta, \theta')\varphi(\theta) \right] d\theta' \\
 I_2 &= \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^R \left[G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta') - G(f(\theta), \theta, r', \theta') - \frac{\partial G}{\partial r}(f(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta) \right] r'^2 dr' d\theta' \\
 I_3 &= \frac{1}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \left[G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta') - G(f(\theta), \theta, r', \theta') \right. \\
 &- \left. \frac{\partial G}{\partial r}(f(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta) \right] (\lambda\varepsilon - \delta_\beta \bar{u}_\lambda(r', \theta')) dr' d\theta'
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \left[- \int_{f(\theta')}^R G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' + \int_{(f+\varphi)(\theta')}^R G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' \right] d\theta' \\
 &+ \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \varphi(\theta') d\theta' \\
 &= \frac{-\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \left[\int_{f(\theta')}^{(f+\varphi)(\theta')} G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' - G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \varphi(\theta') \right] d\theta'
 \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous supposons

$$V(r, \theta) = \int_S P(r, \theta, \theta') d\theta', \quad (r, \theta) \in (0, R) \times S$$

D'après le théorème de Taylor, nous avons

$$V(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta) - V(f(\theta), \theta) - \frac{\partial V}{\partial r}(f(\theta), \theta) \varphi(\theta) = o(\|\varphi\|_\infty)$$

quand $\|\varphi\|_\infty \rightarrow 0$. Ainsi,

$$I_1 = o(\|\varphi\|_\infty)$$

Par des arguments similaires, on a

$$I_2, I_3 = o(\|\varphi\|_\infty)$$

Maintenant, pour l'intégrale I_4 , nous ajoutons et supprimons le terme suivant :

$$\frac{-\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^{(f+\varphi)(\theta')} G(f(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' d\theta'$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{-\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^{(f+\varphi)(\theta')} G(f(\theta) + \varphi(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 - G(f(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' d\theta' + \\
 &- \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \left[\int_{f(\theta')}^{(f+\varphi)(\theta')} G(f(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' - G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \varphi(\theta') \right] d\theta' \\
 &= I_{4,1} + I_{4,2}
 \end{aligned}$$

Nous estimons seulement l'intégrale $I_{4,2}$, l'intégrale $I_{4,1}$ se traite de la même manière. Nous remarquons que $I_{4,2}$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 I_{4,2} &= \frac{-\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^{(f+\varphi)(\theta')} \left(G(f(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 - G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \right) dr' d\theta' \\
 &= \frac{-\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1+\frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f(\theta')}^{(f+\varphi)(\theta')} \left(G(f(\theta), \theta, r', \theta') - G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') \frac{[f(\theta')]^2}{r'^2} \right) r'^2 dr' d\theta'
 \end{aligned}$$

Maintenant, soit B une boule de rayon $s \in (0, R)$ et de centre $(f(\theta), \theta)$. Ainsi,

$$I_{2,4} = \int_E D = \int_{E \cap B} D + \int_{E \setminus B} D$$

où E représente la région de l'intégration et D l'intégrande. Alors, il existe deux constantes C_1, C'_1 telles que

$$|\int_{E \cap B} D| \leq C_1 \int_0^s r^{-1} r^2 dr \leq C'_1 s^2$$

En dehors de B et en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $r \rightarrow G(f(\theta), \theta, r, \theta') \left(\frac{r}{r'}\right)^2$, on montre qu'il existe deux constantes C_2, C'_2 telles que

$$|\int_{E \setminus B} Q| \leq C_2 \int_{E \setminus B} r^{-2} \|\varphi\|_\infty d^3 r \leq C'_2 \|\varphi\|_\infty^3 s^{-2}$$

puisque $r \geq s$ dans $E \setminus B$, et

$$\int_{E \setminus B} d^3 r \leq C \|\varphi\|_\infty^2$$

où C est une constante positive.

Cela implique que

$$|\int_E D| \leq C'_1 s^2 + C'_2 \|\varphi\|_\infty^3 s^{-2}$$

Posons $s = \|\varphi\|_\infty^\tau$ avec $0 < \tau < 3/2$. Nous obtenons ;

$$I_{4,2} = o(\|\varphi\|_\infty), \quad \text{quand } \|\varphi\|_\infty \rightarrow 0$$

D'autre côté, l'opérateur $D_2 J$ peut s'écrire comme

$$D_2 J(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta) \varphi(\theta) = \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial r}(f(\theta), \theta) \varphi(\theta) - \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S G(f(\theta), \theta, f(\theta'), \theta') [f(\theta')]^2 \varphi(\theta') d\theta'$$

Par conséquent, l'application $D_2 J$ est continue, car la fonction $\frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial r}$ dépend continûment de $(\bar{u}_\infty, f, \mu, \beta)$ dans un voisinage de $(u_\infty, r_0, \mu, 0)$, et la singularité de G est intégrable. Cela achève la démonstration du lemme 3.5. \blacksquare

Lemme 3.6. *Si $r_0 \neq r_{\lambda_2}$, alors l'opérateur $D_2 J$ est inversible au voisinage de $(u_\infty, r_0, \mu, 0)$.*

Preuve. Nous avons

$$D_2 J(u_\infty, r_0, \mu, 0) \varphi(\theta) = \frac{\partial u_\lambda}{\partial r}(r_0) \varphi(\theta) - \lambda(1-\varepsilon) \int_S G(r_0, \theta, r_0, \theta') [r_0]^2 \varphi(\theta') d\theta'$$

avec u_λ étant la solution radiale du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon + (1-\varepsilon)\chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,r_0}}) & \text{dans } \Omega_0 \\ u = u_\infty & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

et satisfait l'équation

$$u(r_0) = \mu$$

Autrement dit, u_λ est la solution stationnaire du problème (3.6). D'après la section 2.1, nous avons

$$u_\lambda(r) = \begin{cases} \frac{\lambda\varepsilon}{6}(r^2 - r_0^2) + \mu, & 0 < r \leq r_0 \\ u_\infty + \frac{\lambda}{6}(r^2 - R^2) + \frac{(r-R)r_0}{(r_0-R)r}(\mu - u_\infty - \frac{\lambda}{6}(r_0^2 - R^2)), & r_0 \leq r < R \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} D_2 J(u_\infty, r_0, \mu, 0) \varphi(\theta) &= \frac{\lambda\varepsilon}{3} r_0 \varphi(\theta) - \lambda(1-\varepsilon) \int_S G(r_0, \theta, r_0, \theta') [r_0]^2 \varphi(\theta') d\theta' \\ &= \lambda r_0 \left(\frac{\varepsilon}{3} I - (1-\varepsilon) r_0 K \right) \varphi(\theta) \end{aligned}$$

avec K l'opérateur compact défini de $C(S)$ dans $C(S)$ par

$$K\varphi(\theta) = \int_S G(r_0, \theta, r_0, \theta') \varphi(\theta') d\theta'$$

Il convient de noter que la compacité de K est démontrée en Annexe. D'où, l'inversibilité de l'opérateur $D_2J(u_\infty, r_0, \mu, 0)$ est obtenue si l'on démontre que

$$\frac{\varepsilon}{3} - (1 - \varepsilon)r_0 \sigma \neq 0 \quad \text{pour tout } \sigma \text{ valeur propre de } K \quad (3.25)$$

D'après la section 6.3 du préliminaire nous savons que :

$$G(r_0, \theta, r_0, \theta') = \frac{1}{r_0} \left[\frac{r_0 - R}{4\pi R} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right) \sum_{m=1}^{2l+1} Y_{lm}(\theta_1, \theta_2) Y_{lm}(\theta'_1, \theta'_2) \right]$$

où les fonctions Y_{lm} sont les harmoniques sphériques de degré l en dimension 3, et (θ_1, θ_2) , (θ'_1, θ'_2) sont les vecteurs dont les angles directeur correspondent à $x = (r_0, \theta)$ et $y = (r_0, \theta')$.

De cette expression, nous pouvons lire que les valeurs propres σ_l de K sont données par

$$\sigma_l = \frac{1}{r_0} \frac{1}{2l+1} \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right) \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N} \quad (3.26)$$

Donc, nous distinguons deux cas

1) Si $l = 0$, nous avons

$$\frac{\varepsilon}{3} - (1 - \varepsilon)r_0 \sigma_0 = \frac{\varepsilon}{3} - (1 - \varepsilon) \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) = (\varepsilon - 1) \frac{r_0}{R} - \frac{2\varepsilon - 3}{3} \neq 0, \quad \text{car } r_0 \neq \frac{2\varepsilon - 3}{3(\varepsilon - 1)} R = r_{\lambda_2}.$$

1. Si $l \geq 1$, nous avons

$$\frac{\varepsilon}{3} - (1 - \varepsilon)r_0 \sigma_l = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon - 1}{2l+1} \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right)$$

On a

$$\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 < 0, \quad \forall r_0 \in (0, R)$$

ce qui implique

$$* \text{ Si } 0 < \varepsilon < 1, \text{ nous obtenons } \left[\frac{\varepsilon}{3} - (1 - \varepsilon)r_0 \sigma_l \right] > 0$$

$$* \text{ Si } \varepsilon > 1, \text{ nous avons } \left[(\varepsilon - 1) \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right) \right] < 0, \text{ donc}$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon - 1}{2l+1} \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon - 1}{3} \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right) = \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon - 1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{2l+1} > 0$$

Nous concluons que l'opérateur D_2J est inversible, ce qui achève la démonstration du lemme 3.6. ■

Remarque 3.4.

Notons que la position de la frontière libre r_0 est différente de r_{λ_2} si $\lambda \neq \lambda_2$. Cette situation est possible si et seulement si les conditions du théorème 3.3 sont satisfaites.

Preuve du Théorème 3.4.

En utilisant les lemmes 3.5 et 3.6, toutes les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont vérifiées, nous en déduisons alors l'existence d'une fonction unique F dépend de \bar{u}_∞ , μ et β au voisinage $(u_\infty, \mu, 0)$, telle que

$$\bar{u}_\lambda(F(\bar{u}_\infty, \mu, \beta)(\theta), \theta) = \mu, \quad \forall \theta \in S$$

et

$$F(u_\infty, \mu, 0) = r_0$$

■

Nous concluons finalement que, si $\varepsilon \neq 1$, $\lambda \geq \lambda_1$ et $\lambda \neq \lambda_2$, le problème (3.17) admet une solution pour r_0 qui prend la valeur r_λ . De plus, si $\varepsilon > 3/2$ et $\lambda \in]\lambda_2, \lambda_1[$ alors le problème possède deux solutions positives u et v qui correspondent respectivement à la valeur \bar{r}_λ et \underline{r}_λ .

2.3.4 Régularité des frontières libres

Cette partie concerne la régularité des frontières libres obtenues pour le problème (3.17) dans le cas où $r_0 \neq r_{\lambda_2}$. Sous les hypothèses du théorème 3.3, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soit $u_{\lambda,\beta}$ une solution du problème (3.17). Si $\|\beta\|_\infty$ est suffisamment petit et que \bar{u}_∞ proche de u_∞ , alors la frontière libre $\{x \in \Omega_\beta, u_{\lambda,\beta}(x) = \mu\}$ est une hypersurface analytique de classe $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha \in (0, 1)$.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soit \bar{u}_λ une solution du problème perturbé transformé (3.21), et $u_{\lambda,\mu}$ une solution du problème réduit (3.6). Sous les conditions du proposition 3.2, il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, tel que*

$$\|\bar{u}_\lambda - u_{\lambda,\mu}\|_{W^{2,p}(\Omega_0)} \leq \varepsilon, \quad \text{pour } p > 3$$

Preuve. Soit \bar{u}_λ une solution du problème (3.21) nous avons

$$\begin{aligned} \bar{u}_\lambda(x) &= \bar{u}_\infty \int_{\partial\Omega_0} P(x,y) ds(y) + \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \left[\int_{\Omega_0} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}}(y) \right) G(x,y) dy - \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_\lambda(y) G(x,y) dy \right] \\ &= \bar{u}_1(x) + \bar{u}_2(x) + \bar{u}_3(x) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x) &= \bar{u}_\infty \int_{\partial\Omega_0} P(x,y) ds(y) \\ \bar{u}_2(x) &= \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}}(y) \right) G(x,y) dy \\ \bar{u}_3(x) &= \frac{-\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_\lambda(y) G(x,y) dy \end{aligned}$$

De manière similaire, la solution du problème réduit (3.6) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} u_{\lambda,\mu}(x) &= u_\infty \int_{\partial\Omega_0} P(x,y) ds(y) + \lambda \int_{\Omega_0} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\omega_r}(y) \right) G(x,y) dy \\ &= u_1(x) + u_2(x) \end{aligned}$$

où

$$\omega_r = \{(r, \theta) \in (0, R) \times S, 0 < r \leq r_0\}$$

Ainsi,

$$\|\bar{u}_1 - u_1\|_{C^0(\bar{\Omega}_0)} \leq |\bar{u}_\infty - u_\infty| \max_{x \in \Omega_0} \int_{\partial\Omega_0} |P(x,y)| ds(y)$$

Si $\|\beta\|_\infty$ est suffisamment petit, et par la définition de l'opérateur δ_β , on a

$$\|\bar{u}_3\|_{C^0(\Omega_0)} = o(\|\beta\|_\infty)$$

De plus,

$$\begin{cases} \Delta(\bar{u}_2 - u_2) = \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \left(\left[\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}} \right] - \left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2 \left[\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\omega_r} \right] \right) & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{u}_2 - u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

D'après [17] (Th XI.32), nous concluons qu'il existe une constante positive $C_1 > 0$ telle que

$$\|\bar{u}_2 - u_2\|_{W^{2,p}(\Omega_0)} \leq C_1 \|\chi_{\Omega_0 \setminus \Omega_{0,f}} - \chi_{\omega_r}\|_{L^p(\Omega_0)}, \quad \text{pour } p > 3$$

Cela implique que, pour \bar{u}_∞ proche de u_∞ , il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, tel que

$$\|\bar{u}_\lambda - u_{\lambda,\mu}\|_{W^{2,p}(\Omega_0)} \leq \varepsilon.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. ■

Preuve de Proposition 3.2. Soit $u_{\lambda,\beta}$ une solution du problème (3.17), et \bar{u}_λ une solution du problème transformé (3.21). On définit

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \{x \in \Omega_\beta, \quad u_{\lambda,\beta}(x) = \mu\} \\ &= \{(r, \theta) \in \Omega_\beta, \quad u_{\lambda,\beta}(r, \theta) = \mu\} \\ &= \{(\bar{r}, \theta) \in \Omega_0, \quad \bar{u}_\lambda(\bar{r}, \theta) = \mu\} \\ &= \{(f(\theta), \theta), \quad \bar{u}_\lambda(f(\theta), \theta) - \mu = 0, \quad \theta \in S\} \end{aligned}$$

On pose

$$F(r, \theta) = \bar{u}_\lambda(r, \theta) - \mu, \quad \theta \in S, \quad g \in (0, R)$$

Notons que $\bar{u}_\lambda \in W^{2,p}(\Omega_0) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$ avec $\alpha = 1 - \frac{3}{p}$, où $p > 3$, donc F est de classe $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$.

Selon le lemme 3.7, nous concluons que \bar{u}_λ est proche dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$ à la solution $u_{\lambda,\mu}$ du problème réduit (3.6). Donc, puisque

$$\frac{\partial u_{\lambda,\mu}}{\partial r}(r_0, \theta) \neq 0, \quad \text{pour } \theta \in S$$

nous obtenons

$$\frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial r}(f(\theta), \theta) \neq 0, \quad \text{pour } \theta \in S$$

D'autre côté, soit $\theta_0 \in S$, on pose $h_0 = f(\theta_0) \in (0, R)$. Alors

$$F(h_0, \theta_0) = \bar{u}_\lambda(f(\theta_0), \theta_0) - \mu = 0$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial h}(h_0, \theta_0) = \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial r}(f(\theta_0), \theta_0) \neq 0$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on déduit qu'il existe $V(\theta_0)$ un voisinage de θ_0 et $V(h_0)$ un voisinage de h_0 , ainsi qu'une fonction unique h dans $C^{1,\alpha}$ telle que

$$h : V(\theta_0) \rightarrow V(h_0) \quad \text{et} \quad h(\theta_0) = h_0$$

Puisque, $\bar{u}_\lambda(f(\theta), \theta) = \mu$ pour tout $\theta \in V(\theta_0)$, alors, par unicité, on a $f(\theta) = h(\theta)$ pour tout $\theta \in V(\theta_0)$ ce qui implique que $f \in C^{1,\alpha}(V(\theta_0))$. Notons que θ_0 est arbitraire, alors on a $f \in C^{1,\alpha}(S)$.

Nous concluons donc que la frontière libre Γ est une hypersurface de classe $C^{1,\alpha}$. Pour analyser l'analyticité de Γ , nous utilisons la transformation de l'Hodographe introduite par Kinderlehrer, Nirenberg et Spruck (voir [64] pour plus de détails).

Soit B une petite boule de centre $x_0 = (f(\theta_0), \theta_0) \in \Gamma$. Nous translaterons cette boule pour amener x_0 à l'origine ($x_0 = 0$). Nous utilisons ensuite l'invariance du Laplacien par rapport aux rotations, et réécrivons Γ sous la forme $\Gamma \cap B$, avec $v = \bar{u}_\lambda - \mu$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda \varepsilon = 0 & \text{dans } B^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in B, \quad v(x) > 0\} \\ -\Delta v = 0 & \text{dans } B^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in B, \quad v(x) < 0\} \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in B, \quad v(x) = 0\} \end{cases} \quad (3.27)$$

La transformation d'Hodographe définie par

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = v(x), \quad \text{où } v \in C^{1,\alpha}(B^+ \cup B^- \cup \Gamma) \text{ et } x \in B \end{cases} \quad (3.28)$$

transforme les ensembles B^+ , B^- et Γ en U^+ , U^- et Σ respectivement, où

$$\begin{aligned} U^+ &= \{(y_1, y_2, y_3) \in U, y_3 > 0\} \\ U^- &= \{(y_1, y_2, y_3) \in U, y_3 < 0\} \\ \Sigma &= \{(y_1, y_2, y_3) \in U, y_3 = 0\} \end{aligned}$$

Nous définissons la transformation inverse par

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \psi(y), \end{cases} \text{ où } \psi \in C^{1,\alpha}(U^+ \cup U^- \cup \Sigma) \text{ et } y \in U \quad (3.29)$$

Par cette méthode, nous transformons les équations aux dérivées partielles dans les régions $\omega^- := \{(\bar{r}, \theta) \in B(0, R), \bar{u}_\lambda(\bar{r}, \theta) < \mu\}$ et $B(0, R) \setminus \omega^-$ en de nouvelles équations dans le demi-espace U^+ . Plus précisément, nous avons

$$\begin{cases} h(\psi, D\psi, D^2\psi) + \lambda\varepsilon = 0 & \text{dans } U^+ \\ h(\Phi, D\Phi, D^2\Phi) = 0 & \text{dans } U^+ \end{cases} \quad (3.30)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} \Phi - \psi = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial}{\partial y_3}\Phi + \frac{\partial}{\partial y_3}\psi = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.31)$$

où

$$\Phi(y) = \psi(y_1, y_2, -y_3), \text{ pour tout } (y_1, y_2, y_3) \in U^-$$

et

$$h(\psi, D\psi, D^2\psi) = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_3}\right)^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i^2} + 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_3}\right)^{-2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\psi}{\partial y_i} \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial y_3} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_3^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y_3}\right)^{-3} \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial y_i^2}\right)$$

Finalement, en montrant que les systèmes (3.30) sont elliptiques et que les conditions aux bords (3.31) sont coercives au point 0, nous pouvons conclure que la frontière Σ est analytique, et par conséquent la frontière Γ l'est aussi. Pour plus de détails sur la construction de la fonction h , la théorie classique de régularité des systèmes (3.30) avec les conditions (3.31), ainsi que les propriétés de la transformation d'Hodographe, nous renvoyons le lecteur aux références [11] et [64].

La démonstration de la proposition est donc complète. \blacksquare

2.4 Étude de la bifurcation pour un problème à frontière libre

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas $r_0 = r_{\lambda_2} = \frac{2\varepsilon-3}{3(\varepsilon-1)}R$, correspondant à $\lambda = \lambda_2$. Dans ce cas, l'opérateur $D_2J(u_\infty, r_0, \mu, 0)$ n'est pas inversible ce qui fait que le théorème des fonctions implicites ne s'applique plus, et un phénomène de bifurcation apparaît. Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Supposons que $\lambda = \lambda_2$ pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \neq 1$, c.à.d. qu'il existe $\mu^* > 0$ tel que*

$$\mu^* = u_\infty - \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{4\varepsilon}{3} - \frac{3}{2}\right)}{27(\varepsilon - 1)^2} \lambda, \text{ pour } \lambda > 0.$$

Soit Z le complémentaire de $\{\xi \in C(S), \int_S \xi(y) \varphi_{00} ds(y) = 0\}$, avec φ_{00} une constante donnée. Alors, il existe

1. un intervalle $I =]-\eta, +\eta[$, $\eta > 0$.
2. deux fonctions continues $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : I \rightarrow Z$ telles que, $\varphi(0) = \mu^*$ et $\psi(0) = 0$.

3. un voisinage V de (μ^*, r_{λ_2}) dans $\mathbb{R} \times C(S)$ tel que pour tout $s \in I$, la paire suivante

$$(\mu, f) = (\varphi(s), r_{\lambda_2} + s\varphi_{00} + s\psi(s))$$

est une solution de l'équation $J(u_\infty, f, \mu, 0) = 0$ dans V .

Pour démontrer le théorème 3.5, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.8. Soit $\varphi_{00} = -\frac{1}{4\pi}$, le noyau de l'opérateur $D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)$ est de dimension 1, engendré par φ_{00} , et son image est de codimension 1, coïncidant avec l'espace des noyaux des fonctionnelles linéaires continues

$$\Phi(\xi) = \int_S \xi(y) \varphi_{00} ds(y)$$

Preuve. Nous savons que l'opérateur $D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)$ est non inversible, alors

$$D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)\varphi_{00} = \lambda_2 r_{\lambda_2} \left(\frac{\varepsilon}{3} I - (1 - \varepsilon) r_{\lambda_2} K \right) \varphi_{00} = 0$$

Ceci implique que le noyau de l'opérateur $D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)$ est de dimension 1 engendré par φ_{00} , où φ_{00} est la première fonction propre correspond à la première valeur propre σ_0 . Puisque K est un opérateur compact, l'équation suivante :

$$D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)\varphi(\theta) = \xi(\theta), \quad \text{pour } \varphi \in C(S)$$

possède une solution si ξ est orthogonal à φ_{00} .

Donc,

$$\mathcal{R}(D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)) = \mathcal{N}(\Phi(\xi))$$

où

$$\Phi(\xi) = \int_S \xi(y) \varphi_{00} ds(y)$$

Ceci termine la preuve du lemme. ■

Lemme 3.9. [12] La dérivée mixte $D_3D_2J(u_\infty, f, \mu, 0)$ existe et continue dans un voisinage de $(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)$.

La preuve de ce lemme est similaire à la démonstration du lemme 3.5.

Maintenant, nous avons le résultat suivant

Lemme 3.10. $D_3D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)\varphi_{00}$ n'appartient pas à l'image de $D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)$

Preuve. Si $\beta = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} D_3D_2J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0)\varphi_{00} &= \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial r} (f(\theta), \theta) \varphi_{00} \right) \right]_{(f=r_{\lambda_2}, \mu=\mu^*, \beta=0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} (r_{\lambda_2}) \varphi_{00} \right) \end{aligned}$$

D'après la section 2.1 nous savons que,

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} (r_{\lambda_2}) = \frac{\varepsilon}{3} \lambda_2 r_{\lambda_2}$$

avec

$$\lambda_2 := \frac{27(u_\infty - \mu)(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{4\varepsilon}{3} - \frac{3}{2} \right)}, \quad r_{\lambda_2} = \frac{2\varepsilon - 3}{3(\varepsilon - 1)} R.$$

Ce qui implique

$$D_3 D_2 J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0) \varphi_{00} \neq 0 = D_2 J(u_\infty, r_{\lambda_2}, \mu^*, 0) \varphi_{00}$$

D'où, la démonstration du lemme est complète. ■

Preuve du Théorème 3.5. Soit Z le complémentaire de l'espace

$$\{\xi \in C(S), \int_S \xi(y) \varphi_{00} ds(y) = 0\}$$

D'après les lemmes 3.8, 3.9 et 3.10, toutes les hypothèses du corollaire 1.3 sont satisfaites. Donc, nous déduisons que (μ^*, r_{λ_2}) est un point de bifurcation et qu'il existe une fonction f de la forme

$$f(s) = r_{\lambda_2} + s\varphi_{00} + s\psi(s), \quad s \in]-\eta, +\eta[, \quad \eta > 0$$

qui satisfait

$$J(u_\infty, f(s), \varphi(s), 0) = 0, \quad \forall s \in]-\eta, +\eta[$$

où ψ et φ sont des fonctions continues, vérifiant $\psi(0) = 0$, et $\varphi(0) = \mu^*$.

Ainsi, la preuve du théorème est complète. ■

Remarque 3.5. *La régularité de la frontière libre dans le cas où $r_0 = r_{\lambda_2} = \frac{2\varepsilon-3}{3(\varepsilon-1)}R$ reste un problème ouvert. Nous avons seulement montré qu'il existe une fonction continue f . Il semble qu'il est possible d'étudier la régularité optimale en utilisant les idées de L. Caffarelli dans [24], [25].*

Analyse mathématique d'un modèle avec multiphases

Ce chapitre est le développement de l'article [1].

1 La présentation du modèle

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, au problème où la tumeur se développe en trois phases. Dans la phase 1, toutes les cellules prolifèrent et la tumeur croît de manière exponentielle. Après un certain temps, le niveau des nutriments diminue, ce qui empêche les cellules de continuer à proliférer à leur rythme de croissance habituel. Ainsi, la tumeur passe à la phase 2. Dans cette phase, les cellules de la région externe prolifèrent normalement, tandis que celles de la région interne voient leur croissance ralentir (comme déjà étudié dans le chapitre 3). Finalement, lorsque la concentration de nutriments atteint une autre valeur critique, une nécrose peut se développer, marquant une région où les cellules entrent en mort cellulaire. À ce stade, la tumeur entre en phase 3.

Rappelons que $\Omega_\beta(t)$ est la région de la tumeur dans \mathbb{R}^3 pour $t > 0$, qui satisfait la condition **(C)**, et u représente la concentration d'oxygène, qui vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega_\beta(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où λf représente le taux de consommation d'oxygène, qui est cette fois considéré comme la somme de deux fonctions discontinues, données par :

$$\begin{aligned} f(u) &= \varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon) H(u - \mu_2) \\ &= \begin{cases} 0 & , & u < \mu_1 \\ \varepsilon & , & \mu_1 \leq u < \mu_2 \\ 1 & , & u \geq \mu_2 \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in (0, 1)$, et μ_1, μ_2 étant les valeurs pour lesquelles la tumeur passe d'une phase à l'autre en vérifiant $0 < \mu_1 < \mu_2 < \bar{u}_\infty$.

Notons par

$$\omega_{\mu_i}^-(t) = \{x \in \Omega_\beta(t), u(x) < \mu_i\}, \quad \omega_{\mu_i}^+(t) = \{x \in \Omega_\beta(t), u(x) \geq \mu_i\},$$

pour $t > 0, i = 1, 2$.

La discontinuité de la fonction f en les deux points μ_1, μ_2 génère les deux frontières libres $\Gamma_{\mu_1}(t)$ et $\Gamma_{\mu_2}(t)$, données par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_i}(t) &= \partial\omega_{\mu_i}^-(t) \\ &= \{x \in \Omega_\beta(t), u(x) = \mu_i\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème (4.1) peut être formulé sous la forme du problème à frontière libre suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda(\varepsilon\chi_{\omega_{\mu_1}^+(t)} + (1-\varepsilon)\chi_{\omega_{\mu_2}^+(t)}) & \text{dans } \Omega_\beta(t) \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta(t) \end{cases}$$

Nous utilisons la même procédure de raisonnement que dans le chapitre précédent. Nous considérons tout d'abord le cas où $\Omega_\beta(t)$ est une boule de rayon $R(t)$ (c.à.d lorsque $\Omega_\beta(t) = \Omega_0(t) = B(0, R(t))$). Pour $t > 0$, nous avons le problème suivant à étudier :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda(\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(u - \mu_2)) & 0 < r < R(t), \quad t > 0 \\ u(R(t), t) = u_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = \int_0^{R(t)} S(u)r^2 dr - \int_0^{R(t)} N(u)r^2 dr \\ R(0) = R_0 > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

avec u_∞ la concentration d'oxygène sur le bord de $\Omega_0(t)$, qui est proche de \bar{u}_∞ . Les taux locaux de prolifération $S(u)$ et de mortalité $N(u)$ sont donnés par :

$$S(u) = \lambda(\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(u - \mu_2)), \quad N(u) = \eta_1 H(u - \mu_1) + \eta_2 H(\mu_1 - u).$$

où η_1 et η_2 sont des constantes positives représentant respectivement le taux net de perte cellulaire due à l'apoptose dans la région non-nécrotique, où les cellules tumorales sont vivantes et prolifèrent, et le taux de perte cellulaire dans la région nécrotique.

Les frontières libres associées au problème (4.2) sont de la forme :

$$\Gamma_{\mu_i}(t) = \{(r_{\lambda, \mu_i}(t), \theta) \in (0, R(t)) \times S, \quad u(r_{\lambda, \mu_i}(t), t) = \mu_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Ensuite, à partir du problème (4.2) et de la résolution de certaines équations intégrales non linéaires, nous construisons les solutions du problème perturbé (4.1) et nous obtenons quelques propriétés relatives à leurs frontières libres.

2 L'analyse mathématique de notre modèle

Dans cette section, nous présentons les résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème (4.2) dans le cas stationnaire, ainsi que les frontières libres qui y sont associées. Nous établissons ensuite l'existence de solutions globales (ou transitoires) pour ce même problème et analysons leur comportement asymptotique. Enfin, nous nous intéressons à l'étude du problème perturbé (4.1).

2.1 Solution stationnaire

Considérons le problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda(\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(u - \mu_2)), & 0 < r < R \\ u(R) = u_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

et l'équation intégrale

$$\frac{1}{R^2} \left(\int_0^R S(u)r^2 dr - \int_0^R N(u)r^2 dr \right) = 0. \quad (4.4)$$

Une solution du problème (4.3) est une fonction $u \in C^2((0, R) \setminus \cup_{i=1}^2 \{r_{\lambda, \mu_i}\}) \cap C^1([0, R])$, où $u(r_{\lambda, \mu_i}) = \mu_i$, qui satisfait le problème (4.3). Les ensembles

$$\Gamma_{\mu_i} = \{(r_{\lambda, \mu_i}, \theta) \in (0, R) \times S, \quad u(r_{\lambda, \mu_i}) = \mu_i\}$$

sont les frontières libres correspondant au problème (4.3).

Nous rappelons que ces solutions sont des fonctions strictement convexes telles que :

$$\min_{0 \leq r \leq R} u(r) = u(0).$$

Au vu de la section 2.1 du chapitre précédent, nous considérons trois cas. Le premier cas correspond à $u(0) > \mu_2$, ce qui représente la phase 1 de la croissance tumorale, le deuxième cas est $\mu_1 < u(0) \leq \mu_2$, associé à la phase 2 de la tumeur, et le troisième cas est $u(0) \leq \mu_1$, lorsque la tumeur développe une région de nécrose, c.à.d lorsqu'elle entre en phase 3.

Par la suite, on note par u_λ^* la solution du problème (4.3) dans le cas où $u(0) > \mu_2$, correspondant à l'absence de frontière libre, par u_{λ, μ_2} la solution dans le cas où $\mu_1 < u(0) \leq \mu_2$, correspondant à une frontière libre et $u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}$ la solution dans le cas où $u(0) \leq \mu_1$, celui avec deux frontières libres.

Le premier résultat concernant l'existence et l'unicité des solutions du problème (4.3) est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Pour $\varepsilon \in (0, 1)$, nous avons :*

(i) *Si $\lambda < \lambda_1 := \frac{6(u_\infty - \mu_2)}{R^2}$, le problème (4.3) possède une solution unique u_λ^* . De plus,*

$$u_\lambda^*(0) = -\frac{\lambda}{6}R^2 + u_\infty > \mu_2$$

la courbe $(\lambda, \gamma^(\lambda))$ où $\gamma^*(\lambda) = u_\lambda^*(0)$ définit une partie décroissante du diagramme de bifurcation, voir la figure 4.1.*

(ii) *Il existe $\lambda^* > 0$ tel que si $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^*)$, le problème (4.3) possède une solution unique u_{λ, μ_2} avec une frontière libre r_λ donnée par*

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)}R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2}R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu_2)}{\lambda})}{2(\varepsilon - \frac{3}{2})^3 R^2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

De plus,

$$\gamma_{\mu_2}(\lambda) = -\frac{\lambda\varepsilon}{6}r_\lambda^2 + \mu_2$$

(iii) *Si $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$, le problème (4.3) admet une solution unique $u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}$ avec deux frontières libres r_{λ, μ_1} et r_{λ, μ_2} , telles que $0 < r_{\lambda, \mu_1} < r_{\lambda, \mu_2} < R$.*

De plus

$$\gamma_{\mu_1, \mu_2}(\lambda) = \mu_1$$

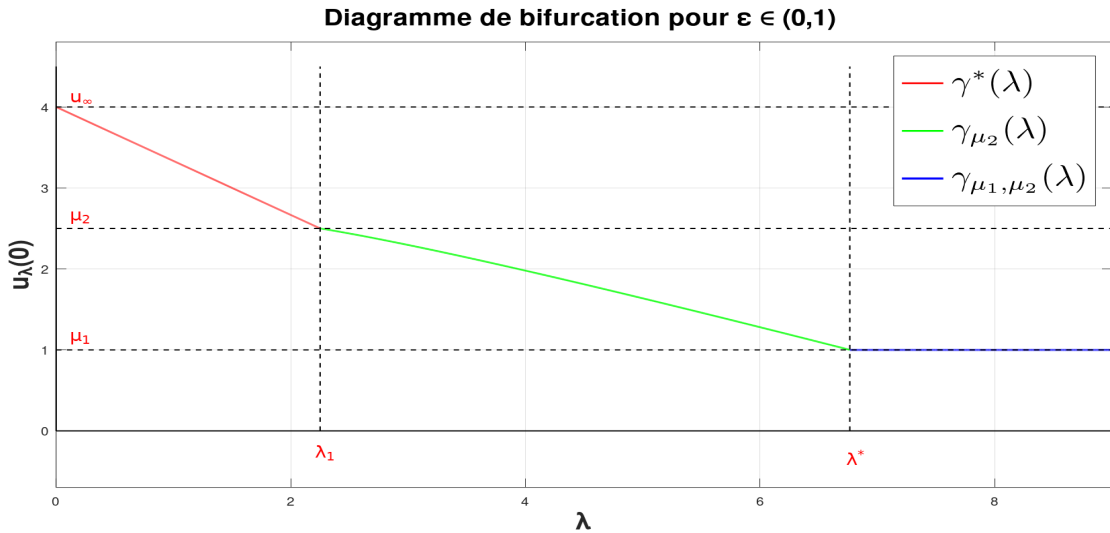


FIGURE 4.1 – Diagramme de bifurcation pour $\varepsilon \in (0, 1)$.

Preuve du Théorème 4.1.

Tout d'abord, pour montrer (i), (ii) nous considérons le cas $u(0) > \mu_1$ et donc nous avons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda (\varepsilon + (1 - \varepsilon) H(u - \mu_2)) & \text{dans } (0, R) \\ u(R) = u_\infty, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous rappelons que ce problème a été abordé dans le chapitre précédent pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \neq 1$. Nous avons étudié les deux cas $u(0) > \mu_2$ et $u(0) \leq \mu_2$, associés respectivement aux phases 1 et 2 de la croissance tumorale. Voir la section 2.1 pour plus de détails.

Maintenant, pour démontrer (iii), nous considérons le cas $u(0) \leq \mu_1$, qui est associé à des frontières libres sous la forme $\{(r_{\lambda, \mu_i}, \theta) \in (0, R) \times S\}$ avec $u(r_{\lambda, \mu_i}) = \mu_i$, pour $i = 1, 2$. Par conséquent, nous examinons les problèmes correspondants vérifiés par u dans les différentes régions $(0, r_{\lambda, \mu_1})$, $(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2})$ et (r_{λ, μ_2}, R) .

Dans la région $(0, r_{\lambda, \mu_1})$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = 0 & \text{dans } (0, r_{\lambda, \mu_1}) \\ u(r_{\lambda, \mu_1}) = \mu_1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

La solution est donnée par,

$$u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r) = \mu_1, \quad 0 \leq r \leq r_{\lambda, \mu_1}.$$

Ce qui implique

$$\gamma_{\mu_1, \mu_2}(\lambda) := u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(0) = \mu_1$$

Dans $(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2})$, nous avons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda \varepsilon & \text{dans } (r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}) \\ u(r_{\lambda, \mu_2}) = \mu_2, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(r_{\lambda, \mu_1}^-) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_{\lambda, \mu_1}^+) \end{cases}$$

Ainsi,

$$u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r) = \frac{\lambda \varepsilon}{6} (r^2 - r_{\lambda, \mu_2}^2) + \frac{\lambda \varepsilon}{3} r_{\lambda, \mu_1}^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\lambda, \mu_2}} \right) + \mu_2, \quad r_{\lambda, \mu_1} \leq r \leq r_{\lambda, \mu_2}$$

Dans la région $(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2})$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \lambda & \text{dans } (r_{\lambda, \mu_2}, R) \\ u(R) = u_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(r_{\lambda, \mu_2}^-) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_{\lambda, \mu_2}^+) \end{cases}$$

Donc, la solution est de la forme

$$u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r) = \frac{\lambda}{6} (r^2 - R^2) + \left(\frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} r_{\lambda, \mu_2}^3 - \frac{\lambda \varepsilon}{3} r_{\lambda, \mu_1}^3 \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) + u_\infty, \quad r_{\lambda, \mu_2} \leq r \leq R$$

D'autres part, la solution $u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}$ satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r_{\lambda, \mu_1}^+) = \mu_1 \\ u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r_{\lambda, \mu_2}^+) = \mu_2 \end{cases}$$

Plus précisément, nous obtenons le système

$$\begin{cases} \frac{\lambda \varepsilon}{6} (r_{\lambda, \mu_1}^2 - r_{\lambda, \mu_2}^2) + \frac{\lambda \varepsilon}{3} r_{\lambda, \mu_1}^3 \left(\frac{1}{r_{\lambda, \mu_1}} - \frac{1}{r_{\lambda, \mu_2}} \right) = \mu_1 - \mu_2 \\ \frac{\lambda}{6} (r_{\lambda, \mu_2}^2 - R^2) + \left(\frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} r_{\lambda, \mu_2}^3 - \frac{\lambda \varepsilon}{3} r_{\lambda, \mu_1}^3 \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_{\lambda, \mu_2}} \right) = \mu_2 - u_\infty \end{cases} \quad (4.6)$$

avec $0 < r_{\lambda,\mu_1} < r_{\lambda,\mu_2} < R$.

La résolution du système (4.6) implique l'existence des frontières libres r_{λ,μ_1} et r_{λ,μ_2} pour conclure avec l'étude des solutions du problème (4.3). La première équation du système peut être considérée comme une équation algébrique où la variable inconnue est r_{λ,μ_2} . Nous avons

$$r_{\lambda,\mu_2}^3 - \left(3r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{6(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon}\right) r_{\lambda,\mu_2} + 2r_{\lambda,\mu_1}^3 = 0 \quad (4.7)$$

Posons $r_{\lambda,\mu_1} := \eta$, on obtient

$$\lambda = \frac{6(\mu_2 - \mu_1) r_{\lambda,\mu_2}}{\varepsilon (r_{\lambda,\mu_2}^3 - 3\eta^2 r_{\lambda,\mu_2} + 2\eta^3)} \quad (4.8)$$

Nous introduisons la fonction :

$$K(r) = \frac{6(\mu_2 - \mu_1) r}{\varepsilon (r^3 - 3\eta^2 r + 2\eta^3)}, \quad r \in (\eta, R)$$

Ainsi,

$$K'(r) = \frac{12(\mu_2 - \mu_1)(\eta^3 - r^3)}{\varepsilon (r_{\lambda,\mu_2}^3 - 3\eta^2 r_{\lambda,\mu_2} + 2\eta^3)^2} < 0 \text{ pour tout } r \in (\eta, R)$$

Cela implique que la fonction K est strictement décroissante dans (η, R) et admet un minimum en R égal à

$$K(R) = \frac{6(\mu_2 - \mu_1)R}{\varepsilon(R^3 - 3\eta^2 R + 2\eta^3)} := \lambda_3$$

On conclut que

- Si $\lambda \leq \lambda_3$ l'équation (4.7) ne possède pas de racine dans (η, R) .
- Si $\lambda > \lambda_3$ l'équation (4.7) admet une racine unique $r_{\lambda,\mu_2} \in (\eta, R)$.

Alors, en supposant que $\lambda > \lambda_3$ et en utilisant la méthode de Cardan pour l'équation (4.7) nous avons :

$$r_{\lambda,\mu_2}^3 + c' r_{\lambda,\mu_2} + d' = 0$$

où

$$c' = -\left(3r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{6(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon}\right), \quad d' = 2r_{\lambda,\mu_1}^3.$$

Le discriminant de cette équation est de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (d')^2 + \frac{4}{27}(c')^3 \\ &= (2r_{\lambda,\mu_1}^3)^2 - \frac{4}{27}\left(3r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{6(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon}\right)^3 \\ &= \frac{-8(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon} \left[2r_{\lambda,\mu_1}^2 \left(r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda\varepsilon}\right) + \left(r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon}\right)^2\right] < 0 \end{aligned}$$

Donc, la frontière libre r_{λ,μ_2} est donnée par

$$\begin{aligned} r_{\lambda,\mu_2} &= 2\sqrt{\frac{-c'}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-d'}{2} \sqrt{\frac{27}{-c'^3}}\right) + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-r_{\lambda,\mu_1}^3 \frac{1}{\sqrt{\left(r_{\lambda,\mu_1}^2 + \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda\varepsilon}\right)^3}}\right) + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (4.9) \end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons la deuxième équation du système (4.6) où la variable inconnue est r_{λ,μ_1} . Nous obtenons

$$r_{\lambda,\mu_1} = \left(\left(\frac{3(u_\infty - \mu_2)}{\lambda\varepsilon} + \frac{r_{\lambda,\mu_2}^2 - R^2}{2\varepsilon}\right) \frac{R r_{\lambda,\mu_2}}{r_{\lambda,\mu_2} - R} + \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) r_{\lambda,\mu_2}^3\right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.10)$$

Nous cherchons la valeur du paramètre λ pour laquelle la frontière libre r_{λ, μ_1} satisfait l'inégalité $0 < r_{\lambda, \mu_1} < r_{\lambda, \mu_2}$. Posons

$$h(r) = \left(\frac{3(u_\infty - \mu_2)}{\lambda \varepsilon} + \frac{r^2 - R^2}{2\varepsilon} \right) \frac{R}{r - R} + \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) r^2, \quad r \in (0, R)$$

et

$$h'(r) = \frac{3(u_\infty - \mu_2)}{\lambda \varepsilon} \frac{-R}{(r - R)^2} + \frac{R}{2\varepsilon} + 2 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) r, \quad r \in (0, R)$$

Nous voulons démontrer que l'inégalité $0 < h(r) < r^2$ possède une solution dans $(0, R)$ sous certaines conditions sur λ . Pour cela, nous allons étudier le comportement de la fonction h suivant les valeurs de λ . Nous savons que la fonction h' est décroissante dans $(0, R)$. Ainsi, nous distinguons deux cas (voir la figure 4.2).

1. Si $\lambda \leq \lambda_1$, alors $h'(0) \leq 0$ et la fonction h est négative décroissante dans $(0, R)$.
2. Si $\lambda > \lambda_1$, alors $h'(0) > 0$ et la fonction h possède un maximum positif en $r^* \in (0, R)$.

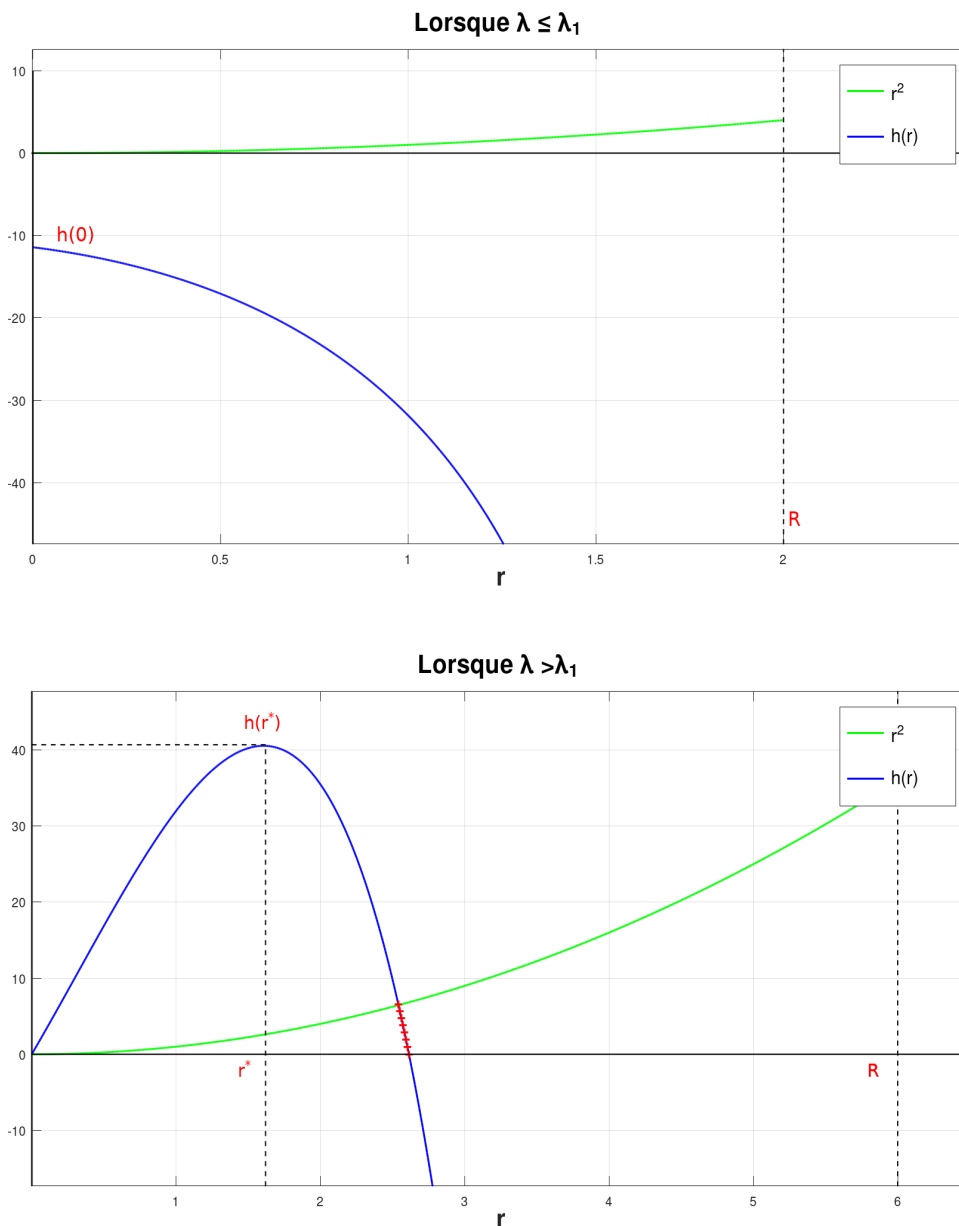


FIGURE 4.2 – Graphique de la fonction h et de la fonction carrée pour $\lambda \leq \lambda_1$ et $\lambda > \lambda_1$.

Alors, pour $\lambda > \lambda_1$ l'inégalité $0 < h(r) < r^2$ possède au moins une solution dans $(0, R)$. Ainsi, nous affirmons qu'il existe $\lambda^* > \max(\lambda_1, \lambda_3)$ tel que, si $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$, les frontières libres r_{λ, μ_1} et r_{λ, μ_2} données par (4.10) et (4.9) satisfont $0 < r_{\lambda, \mu_1} < r_{\lambda, \mu_2} < R$.

Finalement, en utilisant la continuité de la solution par rapport à λ , nous déduisons que :

- Si $\lambda \in (0, \lambda_1)$, le problème (4.3) a une solution unique u_λ^* sans frontière libre donnée par :

$$u_\lambda^*(r) = \frac{\lambda}{6}(r^2 - R^2) + u_\infty, \quad r \in [0, R]$$

- Si $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^*]$, le problème (4.3) possède une solution unique u_{λ, μ_2} avec une frontière libre r_λ telle que $u_{\lambda, \mu_2}(r_\lambda) = \mu_2$. D'après le théorème 3.1, la solution u_{λ, μ_2} et la frontière libre r_λ sont données par :

$$u_{\lambda, \mu_2} = \begin{cases} \frac{\lambda \varepsilon}{6}(r^2 - r_\lambda^2) + \mu_2 & , \quad 0 \leq r \leq r_\lambda \\ u_\infty + \frac{\lambda}{6}(r^2 - R^2) + \frac{(r-R)r_\lambda}{(r_\lambda - R)r}(\mu_2 - u_\infty - \frac{\lambda}{6}(r_\lambda^2 - R^2)) & , \quad r_\lambda \leq r \leq R \end{cases}$$

Et

$$r_\lambda = \frac{(\varepsilon - \frac{3}{2})}{3(\varepsilon - 1)} R \left[1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 + \frac{27(\varepsilon - 1)^2 (\frac{1}{2} R^2 - \frac{3(u_\infty - \mu_2)})}{\lambda} \right) \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \quad (4.11)$$

- Si $\lambda \in [\lambda^*, +\infty[$, le problème (4.3) admet une solution unique $u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}$ avec deux frontières libres r_{λ, μ_1} et r_{λ, μ_2} telles que :

$$\begin{cases} u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r_{\lambda, \mu_1}) = \mu_1 \\ u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}(r_{\lambda, \mu_2}) = \mu_2 \\ r_{\lambda, \mu_1} < r_{\lambda, \mu_2} < R \end{cases}$$

La preuve du théorème 4.1 est terminée. ■

Maintenant, soit le couple (u, \bar{R}) une solution du problème (4.3)–(4.4) avec $\bar{R} > 0$. Alors \bar{R} sera une solution de l'équation $I(R) = 0$, où I est une fonction continue définie par

$$\begin{aligned} I : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ R &\rightarrow I(R) = \frac{1}{R^3} \left[\lambda \int_0^R (\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon) H(u - \mu_2)) r^2 dr \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R (\eta_1 H(u - \mu_1) + \eta_2 H(\mu_1 - u)) r^2 dr \right] \end{aligned}$$

Nous rappelons que la tumeur évolue en trois phases ; une phase de croissance normale lorsque $u(0) > \mu_2$, une phase de croissance ralentie lorsque $\mu_1 < u(0) \leq \mu_2$, et une troisième phase correspondant à l'apparition de la nécrose lorsque $u(0) \leq \mu_1$.

Comme mentionné dans la section 2.1, nous en déduisons l'existence de deux rayons caractéristiques de la tumeur, notés R^* , R^{**} , tels que $R^*, R^{**} > 0$, et correspondent respectivement aux seuils de transition entre les différentes phases de l'évolution tumorale : le rayon R^* marque le passage de la phase 1 à la phase 2, tandis que R^{**} marque celui de la phase 2 à la phase 3.

Ainsi, la tumeur reste en phase 1 tant que $u(0) = \mu_2$, ce qui correspond à l'équation

$$-\frac{\lambda}{6} R^2 + u_\infty = \mu_2$$

Par conséquent, le rayon critique R^* s'écrit :

$$R^* = \sqrt{\frac{6(u_\infty - \mu_2)}{\lambda}}$$

En suite, la tumeur entre en phase 2 et y reste dans cette phase tant que $u(0) = \mu_1$, ce qui implique :

$$\frac{-\lambda\varepsilon}{6}r_\lambda^2 + \mu_2 = \mu_1$$

où r_λ est défini par l'équation (4.11) et dépende continûment de R , λ , ε , μ_1 et u_∞ . Nous pouvons ainsi garantir l'existence d'un rayon critique $R^{**} := R^{**}(\lambda, \varepsilon, \mu_1, \mu_2, u_\infty)$, qui correspond au passage à la phase 3.

En résumé, si $R < R^*$ la tumeur est en phase 1, sans frontière libre. Si $R^* \leq R < R^{**}$ elle est en phase 2, avec une frontière libre. Si $R \geq R^{**}$ la tumeur est en phase 3, correspondant à un problème avec deux frontières libres.

Nous avons ainsi le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Supposons que l'inégalité*

$$\lambda \varepsilon \geq \eta_1 \tag{4.12}$$

soit vérifiée. Alors, l'opérateur I possède une racine unique $\bar{R} > 0$.

La preuve du théorème 4.2 repose sur les lemmes suivants.

Lemme 4.1. *L'opérateur I est continûment différentiable sur l'intervalle $(0, +\infty)$.*

Preuve. Nous considérons les fonctions F_1, F_2 définies de \mathbb{R}_{+*}^3 dans \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, y) = \frac{\lambda\varepsilon}{6}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{\lambda\varepsilon}{3}x_1^3\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) - \mu_1 + \mu_2 \\ F_2(x_1, x_2, y) = \frac{\lambda}{6}(x_2^2 - y^2) + \left(\frac{\lambda(\varepsilon-1)}{3}x_2^3 - \frac{\lambda\varepsilon}{3}x_1^3\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x_2}\right) - \mu_2 + u_\infty \end{cases} \tag{4.13}$$

où $\lambda \geq \lambda^*$, $\varepsilon \in (0, 1)$ et $0 < \mu_1 < \mu_2 < u_\infty$.

Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, y) &= \lambda\varepsilon\left(x_1 - \frac{x_1^2}{x_2}\right) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, y) &= \frac{\lambda\varepsilon}{3}\left(-x_2 + \frac{x_1^3}{x_2^2}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, y) &= -\lambda\varepsilon x_1^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x_2}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, y) &= \frac{\lambda(3-2\varepsilon)}{3}x_2 + \lambda(\varepsilon-1)\frac{x_2^2}{y} - \frac{\lambda\varepsilon}{3}\frac{x_1^3}{x_2^2} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice jacobienne J de F_1 et F_2 par rapport à x_1 et x_2 est donnée par :

$$J(x_1, x_2, y) = \begin{pmatrix} \lambda\varepsilon\left(x_1 - \frac{x_1^2}{x_2}\right) & \frac{\lambda\varepsilon}{3}\left(-x_2 + \frac{x_1^3}{x_2^2}\right) \\ -\lambda\varepsilon x_1^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x_2}\right) & \frac{\lambda(3-2\varepsilon)}{3}x_2 + \lambda(\varepsilon-1)\frac{x_2^2}{y} - \frac{\lambda\varepsilon}{3}\frac{x_1^3}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

En utilisant le système (4.6), nous savons que pour $\lambda \geq \lambda^*$ les frontières libres $r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}$ vérifient :

$$F_1(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}, R) = F_2(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}, R) = 0$$

Et

$$0 < r_{\lambda, \mu_1} < r_{\lambda, \mu_2} < R$$

Ce qui implique

$$\det J(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}, R) > 0.$$

Donc, en appliquant le théorème des fonctions implicites dans un voisinage de $(r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}, R)$, nous concluons qu'il existe deux fonctions $y \rightarrow x_1(y)$ et $y \rightarrow x_2(y)$ de classe C^1 vérifiant le système (4.6). On en déduit que les frontières libres $R \rightarrow r_{\lambda, \mu_1}(R)$, $r_{\lambda, \mu_2}(R)$ sont de classe $C^1([R^{**}, +\infty))$.

Maintenant, nous avons :

— Pour $R < R^*$,

$$I(R) = \frac{\lambda - \eta_1}{3}.$$

— Pour $R^* \leq R < R^{**}$,

$$\begin{aligned} I(R) &= \frac{1}{R^3} \left(\lambda \int_0^R (\varepsilon + (1 - \varepsilon)H(u - \mu_2))r^2 dr - \int_0^R \eta_1 r^2 dr \right) \\ &= \frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} \frac{r_\lambda^3}{R^3} + \frac{\lambda - \eta_1}{3} \end{aligned}$$

où r_λ est donné dans le théorème 4.1 lorsque $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^*)$.

— Pour $R \geq R^{**}$

$$\begin{aligned} I(R) &= \frac{1}{R^3} \left(\lambda \int_0^R (\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(u - \mu_2))r^2 dr - \int_0^R (\eta_1 H(u - \mu_1) + \eta_2 H(\mu_1 - u))r^2 dr \right) \\ &= \frac{1}{R^3} \left(\int_{r_{\lambda, \mu_1}}^{r_{\lambda, \mu_2}} \lambda \varepsilon r^2 dr + \int_{r_{\lambda, \mu_2}}^R \lambda r^2 dr - \int_{r_{\lambda, \mu_1}}^R \eta_1 r^2 dr - \int_0^{r_{\lambda, \mu_1}} \eta_2 r^2 dr \right) \\ &= \frac{\lambda \varepsilon (r_{\lambda, \mu_2}^3 - r_{\lambda, \mu_1}^3) + \lambda (R^3 - r_{\lambda, \mu_2}^3) - \eta_1 (R^3 - r_{\lambda, \mu_1}^3) - \eta_2 r_{\lambda, \mu_1}^3}{R^3} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque les frontières $R \rightarrow r_\lambda, r_{\lambda, \mu_1}, r_{\lambda, \mu_2}$ sont de classe C^1 nous assurons que l'opérateur I est continûment différentiable dans $(0, +\infty)$.

La preuve du lemme 4.1 est complète. \blacksquare

Lemme 4.2. *Supposons que (4.12) soit satisfaite, alors la fonction I est décroissante et vérifie*

$$-\frac{\eta_2}{3} \leq I(R) \leq \frac{\lambda - \eta_1}{3} \quad (4.14)$$

Preuve. Posons $s = \frac{r}{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} I(R) &= \lambda \int_0^1 (\varepsilon H(u(Rs) - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(u(Rs) - \mu_2))s^2 ds \\ &\quad - \int_0^1 (\eta_1 H(u(Rs) - \mu_1) + \eta_2 H(\mu_1 - u(Rs)))s^2 ds \\ &= \int_0^1 g(u(Rs))s^2 ds \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} g(u) &= (\lambda \varepsilon - \eta_1)H(u - \mu_1) + \lambda(1 - \varepsilon)H(u - \mu_2) - \eta_2 H(\mu_1 - u) \\ &= \begin{cases} -\eta_2 & , \quad u < \mu_1 \\ \lambda \varepsilon - \eta_1 & , \quad \mu_1 \leq u < \mu_2 \\ \lambda - \eta_1 & , \quad u \geq \mu_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous remarquons que la fonction $U(r, R) := u(r)$ vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_r U = \lambda(\varepsilon H(U - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(U - \mu_2)) & 0 < r < R \\ U_r(0, R) = 0 & , \quad U(R, R) = u_\infty \end{cases}$$

où

$$\Delta_r U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

Ainsi, $U_R := \frac{\partial U}{\partial R}$ satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta_r U_R = \frac{\partial \lambda}{\partial R} (\varepsilon H(U - \mu_1) + (1 - \varepsilon)H(U - \mu_2)) & 0 < r < R \\ \frac{\partial}{\partial r} U_R(0, R) = 0 & , \quad U_R(R, R) = 0 \end{cases}$$

Nous rappelons que la fonction $R \rightarrow \lambda(R)$ est décroissante, alors par le principe du maximum nous obtenons que la fonction $R \rightarrow U(r, R)$ est décroissante.

Maintenant, en utilisant la condition (4.12) nous avons assuré que la fonction g est croissante. Cela implique que la fonction I est décroissante dans $(0, +\infty)$ et vérifie l'inégalité (4.14). Ceci termine la preuve du lemme. ■

Preuve du Théorème 4.2. Pour $R < R^*$, puisque $\eta_1 \leq \lambda \varepsilon$ nous avons

$$I(R) = \frac{\lambda - \eta_1}{3} > 0$$

D'après lemme 3.1 nous savons qu'il existe $R_s > R^*$ tel que

$$L(R_s) = \frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} r_\lambda^3 + \frac{\lambda - \eta_1}{3} R_s^3 = 0.$$

où r_λ est donné dans le théorème 4.1. Donc,

$$(\lambda - \eta_1) R_s^3 = -\lambda(\varepsilon - 1) r_\lambda^3 \quad (4.15)$$

Nous distinguons deux cas

- Si $R_s \in (0, R^{**})$, alors $I(R_s) = L(R_s)/R_s = 0$.
- Si $R_s \in [R^{**}, +\infty)$, alors nous avons

$$I(R_s) = \frac{1}{R_s^3} \left(\frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} r_{\lambda, \mu_2}^3 + \frac{\eta_1 - \lambda\varepsilon - \eta_2}{3} r_{\lambda, \mu_1}^3 + \frac{\lambda - \eta_1}{3} R_s^3 \right)$$

En utilisant l'équation (4.15) et la condition (4.12), nous obtenons

$$I(R_s) = \frac{1}{R_s^3} \left(\frac{\lambda(\varepsilon - 1)}{3} (r_{\lambda, \mu_2}^3 - r_\lambda^3) + \frac{\eta_1 - \lambda\varepsilon - \eta_2}{3} r_{\lambda, \mu_1}^3 \right) < 0$$

Par la continuité de la fonction I , nous déduisons qu'il existe $\bar{R} > 0$ tel que

$$I(\bar{R}) = 0$$

De plus, l'unicité de la racine \bar{R} découle de la monotonie de I (voir lemme 4.2). La preuve du théorème 4.2 est complète. ■

2.2 Solution transitoire

Dans cette section, nous démontrons l'existence des solutions globales du problème (4.2) ainsi que leurs comportements asymptotiques. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.3. Soit $R_0 > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$. Supposons que la condition (4.12) soit satisfaite, alors le problème (4.2) possède une solution globale unique $(u(r, t), R(t))$ pour $t > 0$.

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \bar{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(r, t) = u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}$$

avec $(u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}, \bar{R})$ la solution stationnaire de problème (4.3)-(4.4).

Preuve du Théorème 4.3. Soit $R(t) > 0$. En utilisant la section 2.1, nous savons que le problème (4.2) admet une solution unique $u(r, R(t))$ sans frontière libre pour $\lambda < \lambda_1$, avec une frontière libre $r_0(t) := r_\lambda(R(t))$ pour $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda^*$, et avec deux frontières libres $r_1(t) := r_{\lambda, \mu_1}(R(t))$ et $r_2(t) := r_{\lambda, \mu_2}(R(t))$ pour $\lambda \geq \lambda^*$.

Ainsi, nous déterminons $R(t)$ par résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} R'(t) = R(t)I(R(t)), & t > 0 \\ R(0) = R_0 \end{cases} \quad (4.16)$$

D'après les lemmes 4.1 et 4.2, le problème (4.16) possède une solution unique $R(t)$ qui satisfait :

$$R_0 e^{\left(\frac{-\eta_2}{3}\right)t} \leq R(t) \leq R_0 e^{\left(\frac{\lambda-\eta_1}{3}\right)t}, \quad t > 0.$$

Nous rappelons que la fonction I est décroissante et possède une racine unique $\bar{R} > 0$ telle que $I(\bar{R}) = 0$. Alors, en appliquant le lemme 3.2 nous concluons que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \bar{R}.$$

Par la suite, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(r, t) = u_{\lambda, \mu_1, \mu_2}$. Ce qui termine la démonstration du théorème 4.3. \blacksquare

2.3 Problème à frontières libres perturbé

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude du problème perturbé (4.1). Nous considérons le cas stationnaire, puis nous généralisons les résultats au cas non-stationnaire, c.à.d. nous fixons $t = T$ et nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda \left(\varepsilon H(u - \mu_1) + (1 - \varepsilon) H(u - \mu_2) \right) & \text{dans } \Omega_\beta \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta \end{cases} \quad (4.17)$$

avec $\Omega_\beta = B(0, R + \beta(\theta)) \subset \mathbb{R}^3$, où $\beta \in C^2(S, \mathbb{R})$, et \bar{u}_∞ proche de u_∞ .

Nous construisons des solutions du problème perturbé (4.17) à partir des solutions du problème réduit (4.3). Nous rappelons que, dans le théorème 4.1, nous avons montré que le problème (4.3) admet une solution unique avec une frontière libre lorsque $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^*)$ et deux frontières libres lorsque $\lambda \geq \lambda^*$. Ainsi, le premier cas sera similaire à celui de la section 2.3 du chapitre 3. Pour cela, nous considérons uniquement le deuxième cas. Nous notons par r_1, r_2 les frontières libres mentionnées dans le théorème 4.1, et nous cherchons les frontières libres du problème (4.17) sous la forme $\psi_i(\theta) = r_i + b_i(\theta)$, avec $\theta \in S$ et b_i représente la perturbation causée par β pour $i = 1, 2$.

2.3.1 Problème équivalent

Soit les fonctions $\psi_1, \psi_2 \in S_\beta$ où S_β est l'ensemble des surfaces admissible dans Ω_β , nous considérons les ensembles

$$\omega_{\psi_i} = \{(r, \theta) \in \Omega_\beta, \quad r < \psi_i(\theta)\}, \quad i = 1, 2$$

Dans la proposition suivante, nous formulons des équations non linéaires pour ψ_1, ψ_2 et prouvons qu'en les résolvant, nous pouvons résoudre le problème (4.17)

Proposition 4.1. *Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, le problème suivant*

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda \left(\varepsilon \chi_{\Omega_\beta \setminus \omega_{\psi_1}} + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_\beta \setminus \omega_{\psi_2}} \right) & \text{dans } \Omega_\beta \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta \end{cases} \quad (4.18)$$

possède une solution unique $u_{\lambda, \beta} \in C^{1, \alpha}(\overline{\Omega_\beta})$ avec $\alpha = 1 - \frac{3}{p}$, où $p > 3$.

De plus, si $\bar{u}_\infty > \mu_2 > \mu_1$ et s'il existe $\psi_1, \psi_2 \in S_\beta$ telles que

$$u_{\lambda, \beta}(\psi_i(\theta), \theta) = \mu_i \text{ pour } i = 1, 2 \quad (4.19)$$

alors $u_{\lambda, \beta}$ est une solution du problème (4.17).

Preuve de Proposition 4.1.

Nous remarquons que $\chi_{\Omega_\beta \setminus \omega_{\psi_i}} \in L^p(\Omega_\beta)$, pour $p > 1$ et $i = 1, 2$. Selon [49], nous savons que le problème (4.18) possède une solution unique $u_{\lambda, \beta}$ dans $W^{2, p}(\Omega_\beta)$. De plus, pour $p > 3$

$$W^{2, p}(\Omega_\beta) \hookrightarrow C^{1, \alpha}(\overline{\Omega_\beta}, \mathbb{R}), \quad \alpha = 1 - \frac{3}{p}.$$

Maintenant, nous supposons qu'il existe deux fonctions ψ_1, ψ_2 vérifiant (4.19), alors $u_{\lambda,\beta}$ devient une solution des problèmes suivants dans les différentes régions $\omega_{\psi_1}, \omega_{\psi_2} \setminus \omega_{\psi_1}$ et $\omega_{\psi_2} \setminus \omega_{\psi_1}$.

Dans la région ω_{ψ_1} , nous avons :

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\beta} = 0, & \omega_{\psi_1} \\ u_{\lambda,\beta} = \mu_1, & \partial\omega_{\psi_1} \end{cases}$$

Selon le principe du maximum, pour tout $x \in \omega_{\psi_1}$, on a

$$\inf_{y \in \partial\omega_{\psi_1}} u_{\lambda,\beta}(y) \leq u_{\lambda,\beta}(x) \leq \sup_{y \in \partial\omega_{\psi_1}} u_{\lambda,\beta}(y)$$

Ainsi,

$$u_{\lambda,\beta} = \mu_1, \quad \text{dans } \omega_{\psi_1}$$

Dans la régions $\omega_{\psi_2} \setminus \omega_{\psi_1}$, nous avons

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\beta} = \lambda\varepsilon, & \omega_{\psi_2} \setminus \omega_{\psi_1} \\ u_{\lambda,\beta} = \mu_1, & \partial\omega_{\psi_1} \\ u_{\lambda,\beta} = \mu_2, & \partial\omega_{\psi_2} \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse $\mu_1 < \mu_2$, et par le principe du maximum, nous obtenons :

$$\mu_1 < u_{\lambda,\beta} < \mu_2, \quad \text{dans } \omega_{\psi_2} \setminus \omega_{\psi_1}.$$

De manière similaire, dans la région $\Omega_\beta \setminus \omega_{\psi_2}$, et puisque $\mu_2 < \bar{u}_\infty$, nous obtenons que $u_{\lambda,\beta}$ satisfait

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\beta} = \lambda, & \Omega_\beta \setminus \omega_{\psi_2} \\ u_{\lambda,\beta} = \mu_2, & \partial\omega_{\psi_2} \\ u_{\lambda,\beta} = \bar{u}_\infty, & \partial\Omega_\beta \end{cases}$$

Et l'inégalité

$$\mu_2 < u_{\lambda,\beta} < \bar{u}_\infty, \quad \text{dans } \Omega_\beta \setminus \omega_{\psi_2}.$$

Nous concluons que $u_{\lambda,\beta}$ est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\beta} = \lambda \left(\varepsilon H(u_{\lambda,\beta} - \mu_1) + (1 - \varepsilon) H(u_{\lambda,\beta} - \mu_2) \right) & \text{dans } \Omega_\beta \\ u_{\lambda,\beta} = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_\beta \end{cases}$$

Cela termine la preuve du proposition 4.1. ■

Maintenant, nous démontrons l'existence des fonctions ψ_1 et ψ_2 qui vérifient l'équation (4.19). En appliquant le même raisonnement que dans le chapitre précédent, nous savons que la variation du domaine Ω_β nous conduit à utiliser la transformation T_β , qui transforme le domaine Ω_β en le domaine Ω_0 (voir la section 2.3.2). Ainsi, pour conclure sur l'existence des solutions du problème (4.17), nous devons montrer l'existence des fonctions $f_1, f_2 \in S_0$ telles que

$$\bar{u}_\lambda(f_i(\theta), \theta) = \mu_i. \quad (4.20)$$

pour $i = 1, 2$, avec \bar{u}_λ satisfaisant le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2 \Delta \bar{u}_\lambda + \delta_\beta \bar{u}_\lambda = \lambda \left(\varepsilon \chi_{\Omega_0 \setminus \omega_{f_1}} + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_0 \setminus \omega_{f_2}} \right) & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{u}_\lambda = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

où l'opérateur δ_β est donné par (3.22). C'est l'objet de la partie suivante.

2.3.2 Résolution des équations intégrales

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution de l'équation intégrale (4.20) pour $i = 1, 2$. Tout d'abord, nous commençons par démontrer l'existence de la fonction f_2 . On pose par \bar{u}_2 la restriction de la solution \bar{u}_λ dans l'espace $\Omega_0 \setminus \omega_{f_2}$, qui satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2 \Delta \bar{u}_2 + \delta_\beta \bar{u}_2 = \lambda \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_0 \setminus \omega_{f_2}}\right) & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{u}_2 = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

La représentation intégrale de la solution \bar{u}_2 dans les coordonnées sphériques est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(r, \theta) &= \bar{u}_\infty \int_S P(r, \theta, \theta') d\theta' + \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon) \chi_{\Omega_0 \setminus \omega_{f_2}}(r', \theta')\right) G(r, \theta, r', \theta') dr' d\theta' \\ &- \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_2(r', \theta') G(r, \theta, r', \theta') dr' d\theta' \end{aligned}$$

où P est le noyau de Poisson et G est la fonction de Green dans Ω_0 .

Nous cherchons à démontrer l'existence d'une fonction $f_2 \in S_0$ telle que :

$$\bar{u}_2(f_2(\theta), \theta) = \mu_2, \quad \text{pour } \theta \in S. \quad (4.22)$$

Pour cela, on introduit l'opérateur J_2 de $\mathbb{R}^+ \times S_0 \times \mathbb{R}^+ \times D$ dans $C(S, \mathbb{R})$ par

$$J_2(\bar{u}_\infty, f_2, \mu_2, \beta)(\theta) = \bar{u}_2(f_2(\theta), \theta) - \mu_2$$

avec D un voisinage de 0 dans $C^2(S)$.

Selon la section 2.3.3, pour $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\lambda \geq \lambda^*$, où $\lambda^* > \max(\lambda_1, \lambda_3)$, on peut montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage V_2 de $(u_\infty, \mu_2, 0)$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times C^2(S)$ et une application unique $F_2 : V_2 \rightarrow C(S)$ continûment différentiable, telle que :

$$F_2(u_\infty, \mu_2, 0) = r_2$$

et

$$J_2(\bar{u}_\infty, F_2(\bar{u}_\infty, \mu_2, \beta), \mu_2, \beta)(\theta) = 0, \quad \forall (\bar{u}_\infty, \mu_2, \beta) \in V_2 \text{ et } \forall \theta \in S.$$

Ainsi, par construction et en raison de l'unicité des solutions, au voisinage de V_2 nous avons :

$$\bar{u}_\lambda(F_2(\bar{u}_\infty, \mu_2, \beta)(\theta), \theta) = \mu_2.$$

Maintenant, nous montrons l'existence d'une fonction continue f_1 qui satisfait (4.20). De manière similaire, nous considérons une partie de la solution \bar{u}_λ dans ω_{f_2} , notée \bar{u}_1 . Nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2 \Delta \bar{u}_1 + \delta_\beta \bar{u}_1 = \lambda \varepsilon \chi_{\Omega_0 \setminus \omega_{f_1}} & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{u}_1 = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Nous passons aux coordonnées sphériques et nous définissons l'opérateur J_1 de $\mathbb{R}^+ \times S_0 \times \mathbb{R}^+ \times D$ dans $C(S, \mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} J_1(\bar{u}_\infty, f_1, \mu_1, \beta)(\theta) &= \bar{u}_1(f_1(\theta), \theta) - \mu_1 \\ &= \bar{u}_\infty \int_S P(f_1(\theta), \theta, \theta') d\theta' + \frac{\lambda \varepsilon}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f_1(\theta')}^R G(f_1(\theta), \theta, r', \theta') r'^2 dr' d\theta' \\ &- \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_1(r', \theta') G(f_1(\theta), \theta, r', \theta') dr' d\theta' - \mu_1, \quad \forall \theta \in S \end{aligned}$$

Lemme 4.3. *L'opérateur J_1 est continûment différentiable par rapport à la deuxième variable au voisinage $(u_\infty, r_1, \mu_1, 0)$. De plus, D_2J_1 est donné par*

$$D_2J_1(\bar{u}_\infty, f_1, \mu_1, \beta)\varphi(\theta) = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}(f_1(\theta), \theta)\varphi(\theta) - \frac{\lambda\varepsilon}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S G(f_1(\theta), \theta, f_1(\theta'), \theta') [f_1(\theta')]^2 \varphi(\theta') d\theta'$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}(f_1(\theta), \theta)\varphi(\theta) &= \bar{u}_\infty \int_S \frac{\partial P}{\partial r}(f_1(\theta), \theta, \theta')\varphi(\theta) d\theta' \\ &+ \frac{\lambda\varepsilon}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_S \int_{f_1(\theta')}^R \frac{\partial G}{\partial r}(f_1(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta) r'^2 dr' d\theta' \\ &- \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)^2} \int_{\Omega_0} \delta_\beta \bar{u}_1(r', \theta') \frac{\partial G}{\partial r}(f_1(\theta), \theta, r', \theta')\varphi(\theta) dr' d\theta' \end{aligned}$$

et $\varphi(\theta)$ est une petite perturbation de $f_1(\theta)$.

La démonstration de lemme 4.3 est similaire à celle du lemme 3.5.

Lemme 4.4. *Pour $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\lambda \geq \lambda^*$, l'opérateur D_2J_1 est inversible au voisinage de $(u_\infty, r_1, \mu_1, 0)$.*

Preuve. L'opérateur D_2J_1 peut s'écrire sous la forme :

$$D_2J_1(u_\infty, r_1, \mu_1, 0)\varphi(\theta) = \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}(r_1) - \lambda\varepsilon r_1^2 K_1 \right) \varphi(\theta)$$

avec \bar{u}_0 la solution radiale du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}_0 = \lambda\varepsilon \chi_{\Omega_0 \setminus \omega_{r_1}} & \text{dans } \Omega_0 = B(0, R) \\ \bar{u}_1 = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega_0 = \partial B(0, R) \end{cases} \quad (4.23)$$

et K_1 un opérateur compact défini de $C(S)$ dans $C(S)$ par :

$$K_1\varphi(\theta) = \int_S G(r_1, \theta, r_1, \theta')\varphi(\theta') d\theta' \quad (4.24)$$

Ainsi, le problème (4.23) peut s'écrire dans les différentes régions $(0, r_1)$ et (r_1, R) par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0 & 0 < r < r_1 \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \lambda\varepsilon & r_1 < r < R \\ u(R) &= u_\infty \end{aligned}$$

En ajoutant les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(r_1^+) = \frac{\partial u}{\partial r}(r_1^-)$$

Cela implique que \bar{u}_0 est de la forme :

$$\bar{u}_0(r) = \begin{cases} \mu_1, & 0 < r \leq r_1 \\ \frac{\lambda\varepsilon}{6}(r^2 - R^2) + \frac{\lambda\varepsilon}{3} r_1^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + u_\infty, & r_1 \leq r < R \end{cases}$$

Alors,

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}(r_1) = 0.$$

De plus, nous savons que les valeurs propres de l'opérateur compact K_1 sont données par :

$$\sigma_l = \frac{1}{r_1} \frac{1}{2l+1} \left(\left(\frac{r_1}{R} \right)^{2l+1} - 1 \right) \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$D_2 J_1(u_\infty, r_1, \mu_1, 0) \phi_l(\theta) = -\lambda \varepsilon r_1^2 \sigma_l \phi_l(\theta) > 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

où ϕ_l représente la fonction propre associée à la valeur propre σ_l pour tout $l \in \mathbb{N}$.

On en déduit que l'opérateur $D_2 J(u_\infty, r_1, \mu_1, 0)$ est inversible. La preuve du lemme est terminée. ■

Finalement, en utilisant les lemmes 4.3 et 4.4, et par le théorème des fonctions implicites, nous déduisons l'existence d'une fonction F_1 au voisinage de $(u_\infty, \mu_1, 0)$ qui dépend de \bar{u}_∞ , μ_1 et β telle que

$$F_1(u_\infty, \mu_1, 0) = r_1$$

et

$$J_1(\bar{u}_\infty, F_1(\bar{u}_\infty, \mu_1, \beta), \mu_1, \beta)(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in S$$

Par la suite, nous obtenons

$$\bar{u}_\lambda(F_1(\bar{u}_\infty, \mu_1, \beta)(\theta), \theta) = \mu_1.$$

Ainsi, nous avons montré qu'il existe deux fonctions $f_1, f_2 \in S_0$ telles que :

$$\bar{u}_\lambda(f_i(\theta), \theta) = \mu_i, \quad i = 1, 2$$

Ce qui implique l'existence de ψ_1 et ψ_2 dans S_β qui vérifient :

$$T_\beta(\psi_i(\theta), \theta) = (f_i(\theta), \theta), \quad i = 1, 2$$

et

$$u_{\lambda, \beta}(\psi_i(\theta), \theta) = \mu_i, \quad i = 1, 2$$

où T_β est la transformation définie dans la section 2.3.2 et $u_{\lambda, \beta}$ est la solution du problème (4.18).

Par conséquent, selon la proposition 4.1 nous avons prouvé que $u_{\lambda, \beta}$ est une solution du problème perturbé (4.17) avec les deux frontières libres ψ_1 et ψ_2 lorsque $\lambda \geq \lambda^*$.

Sur un problème elliptique à n frontières libres

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence de solutions ainsi qu'à la régularité des frontières libres du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

où Ω est un domaine régulier borné dans \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), λ et \bar{u}_∞ sont des constantes positives, et f est une fonction non linéaire discontinue par rapport à u définie par :

$$f(u) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u - \mu_i)$$

avec $\varepsilon_i, \mu_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, satisfaisant la condition :

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \bar{u}_\infty.$$

Notons que ce problème ne modélise pas directement la croissance tumorale, mais constitue une généralisation des résultats d'existence et de régularité de la frontière libre dans le cas d'un problème à n phases. Il présente néanmoins un grand intérêt d'un point de vue mathématique, notamment en prolongement des cas à deux et trois phases que nous avons déjà étudiés dans un contexte de croissance tumorale, respectivement dans les chapitres 3 et 4.

Ainsi, le problème (5.1) peut être formulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{dans } \{x \in \Omega, u(x) < \mu_1\} \\ \Delta u = \lambda \varepsilon_1 & \text{dans } \{x \in \Omega, \mu_1 \leq u(x) < \mu_2\} \\ \vdots & \\ \Delta u = \lambda \sum_{j=1}^i \varepsilon_j & \text{dans } \{x \in \Omega, \mu_i \leq u(x) < \mu_{i+1}\} \\ \vdots & \\ \Delta u = \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j & \text{dans } \{x \in \Omega, \mu_{n-1} \leq u(x) < \mu_n\} \\ \Delta u = \lambda \sum_{j=1}^n \varepsilon_j & \text{dans } \{x \in \Omega, u(x) \geq \mu_n\} \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Nous supposons que la solution u atteint son maximum sur $\partial\Omega$, où $u = \bar{u}_\infty$ et qu'elle décroît en direction de l'intérieur du domaine Ω . Cette propriété suggère l'existence de sous-domaines $\{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$ définis par :

$$\Omega_n \subset \Omega_{n-1} \subset \dots \subset \Omega_1 \subset \Omega$$

où

$$\Omega_i = \{x \in \Omega, \quad u(x) \geq \mu_i\}.$$

Dans chaque région $\Omega_i \setminus \Omega_{i+1}$, l'équation se réduit à :

$$\Delta u = \lambda \sum_{j=1}^i \varepsilon_j.$$

Pour $s > 0$, posons :

$$\Gamma_s := \{x \in \Omega, \quad u(x) = s\}.$$

Remarquons que sur chaque interface Γ_{μ_i} , la solution u doit satisfaire la condition de transmission : le gradient ∇u doit être continu à travers chaque Γ_{μ_i} . Ainsi, une solution du problème (5.1) est une fonction de classe $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, avec $\alpha \in (0, 1)$, qui satisfait (5.1) et telle que les frontières libres Γ_{μ_i} , pour $i = 1, 2, \dots, n$, sont des hypersurfaces analytiques.

Dans ce travail, nous utilisons une technique d'approximation pour résoudre le problème (5.1). Nous désignons par $u_{\lambda,\eta}$ la solution du problème approximé (5.3) et montrons que cette solution converge vers u_λ , la solution du notre problème (5.1), lorsque $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \rightarrow 0$ dans l'espace approprié.

$$\begin{cases} \Delta u_{\lambda,\eta} = \lambda H_\eta(u_{\lambda,\eta}) & \text{dans } \Omega \\ u_{\lambda,\eta} = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.3)$$

où H_η est une approximation régulière de la fonction de Héaviside H , donnée par

$$H_\eta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < \mu_1 \\ \varepsilon_1 \left(\frac{t - \mu_1}{\eta_1} \right) & , \quad \mu_1 \leq t < \mu_1 + \eta_1 \\ \varepsilon_1 & , \quad \mu_1 + \eta_1 \leq t < \mu_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(\frac{t - \mu_2}{\eta_2} \right) & , \quad \mu_2 \leq t < \mu_2 + \eta_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & , \quad \mu_2 + \eta_2 \leq t < \mu_3 \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j + \varepsilon_i \left(\frac{t - \mu_i}{\eta_i} \right) & , \quad \mu_i \leq t < \mu_i + \eta_i \\ \sum_{j=1}^i \varepsilon_j & , \quad \mu_i + \eta_i \leq t < \mu_{i+1} \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j + \varepsilon_n \left(\frac{t - \mu_n}{\eta_n} \right) & , \quad \mu_n \leq t < \mu_n + \eta_n \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_j & , \quad t \geq \mu_n + \eta_n \end{cases} \quad (5.4)$$

avec $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ qui satisfait

$$0 < \eta_i < \mu_{i+1} - \mu_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

2 Existence de la solution

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u - \mu_i) & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.5)$$

Le premier résultat de ce travail est énoncé dans la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Le problème*

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda H_\eta(u) & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.6)$$

où H_η est donné par (5.4), possède une solution $u_{\lambda,\eta} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $\alpha \in (0,1)$. De plus, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|u_{\lambda,\eta} - u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(K)} = 0, \quad \text{pour tout compact } K \subset \Omega$$

où $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ est une solution du problème (5.5).

Preuve de Proposition 5.1. Nous avons que H_η est une fonction continue et uniformément bornée sur \mathbb{R} ;

$$\|H_\eta\|_\infty \leq \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$$

D'après [49], le problème (5.6) admet une solution $u_{\lambda,\eta} \in W^{2,p}(\Omega) \leftrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ où $p > N$ et $\alpha \in (0,1)$. Nous voulons montrer que

$$\|u_{\lambda,\eta} - u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(K)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0 \text{ (i.e. quand } \eta_i \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n) \quad (5.7)$$

où K est un compact dans Ω et u_λ est une solution du problème (5.5).

Remarquons que la suite $(u_{\lambda,\eta})_\eta$ est uniformément bornée dans $C^{1,\alpha}(K)$:

$$\|u_{\lambda,\eta}\|_{C^{1,\alpha}(K)} \leq C < +\infty, \quad \forall \eta \in \mathbb{N}^n.$$

Ainsi, par le théorème d'Arzela-Ascoli on peut extraire une sous-suite, notée $(u_{\lambda,\eta})_\eta$ qui converge uniformément vers une fonction $v \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Donc, si nous montrons que $(u_{\lambda,\eta})_\eta$ converge vers u_λ , la solution du problème (5.5), dans $W^{1,2}(\Omega)$, alors par unicité de la limite, nous concluons que $u_\lambda = v$ et que $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Pour cela, en multipliant l'équation du problème (5.5) et celle du problème (5.6) par $(u_{\lambda,\eta} - u_\lambda)$ et en l'intégrant par rapport à x dans Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u_{\lambda,\eta} - \Delta u_\lambda)(u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx &= \int_{\Omega} \lambda \left(H_\eta(u_{\lambda,\eta}) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u_\lambda - \mu_i) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \left(H_\eta(u_\lambda) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u_\lambda - \mu_i) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \left(H_\eta(u_{\lambda,\eta}) - H_\eta(u_\lambda) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda,\eta} - \nabla u_\lambda|^2 dx &= \lambda \int_{\Omega} \left(H_\eta(u_\lambda) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u_\lambda - \mu_i) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \left(H_\eta(u_{\lambda,\eta}) - H_\eta(u_\lambda) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que H_η est une fonction croissante, ce qui implique que :

$$\left(H_\eta(u_{\lambda,\eta}) - H_\eta(u_\lambda) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) \geq 0.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda,\eta} - \nabla u_\lambda|^2 dx \leq \lambda \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u_\lambda - \mu_i) - H_\eta(u_\lambda) \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx$$

où

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u(x) - \mu_i) - H_\eta(u(x)) = \begin{cases} 0 & , \quad u(x) < \mu_1 \\ \varepsilon_1 \left(1 - \frac{u(x) - \mu_1}{\eta_1} \right) & , \quad \mu_1 \leq u(x) < \mu_1 + \eta_1 \\ 0 & , \quad \mu_1 + \eta_1 \leq u(x) < \mu_2 \\ \varepsilon_2 \left(1 - \frac{u(x) - \mu_2}{\eta_2} \right) & , \quad \mu_2 \leq u(x) < \mu_2 + \eta_2 \\ \vdots & \\ 0 & , \quad \mu_{i-1} + \eta_{i-1} \leq u(x) < \mu_i \\ \varepsilon_i \left(1 - \frac{u(x) - \mu_i}{\eta_i} \right) & , \quad \mu_i \leq u(x) < \mu_i + \eta_i \\ \vdots & \\ \varepsilon_n \left(1 - \frac{u(x) - \mu_n}{\eta_n} \right) & , \quad \mu_n \leq u(x) < \mu_n + \eta_n \\ 0 & , \quad u(x) \geq \mu_n + \eta_n \end{cases} \quad (5.8)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda,\eta} - \nabla u_\lambda|^2 dx &\leq \lambda \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega \cap \{\mu_i \leq u_\lambda(x) \leq \mu_i + \eta_i\}} \varepsilon_i \left(1 - \frac{u_\lambda - \mu_i}{\eta_i} \right) (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \right] \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega \cap \{0 \leq u_\lambda(x) - \mu_i \leq \eta_i\}} \varepsilon_i (u_{\lambda,\eta} - u_\lambda) dx \right] \\ &\leq C |\Omega \cap \cup_{i=1}^n \{0 \leq u_\lambda(x) - \mu_i \leq \eta_i\}| \end{aligned}$$

avec $C = C(\lambda, \varepsilon_i, \mu_i)$ une constante positive, et $|\cdot|$ désignant la mesure de Lebesgue.

On en déduit que $\nabla u_{\lambda,\eta} \rightarrow \nabla u_\lambda$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ c.a.d lorsque $\eta_i \rightarrow 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Alors, puisque $u_{\lambda,\eta} - u_\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$, nous avons

$$\|u_{\lambda,\eta} - u_\lambda\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0$$

Ainsi, nous obtenons

$$\|u_{\lambda,\eta} - u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(K)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 5.1. ■

3 Caractérisation des frontières libres

Dans cette section, nous analysons la structure des frontières libres dans le cas où $\Omega = B(0, R)$. La symétrie radiale du domaine permet une caractérisation explicite des solutions ainsi que de leurs frontières libres Γ_{μ_i} . Nous étudierons ensuite le comportement de ces frontières libres sous une petite perturbation $\beta \in C^2(S)$ du domaine, c'est-à-dire lorsque $\Omega = B(0, R + \beta(\theta))$, en examinant la persistance et la régularité des interfaces Γ_{μ_i} dans des géométries plus générales.

Supposons que $\Omega = B(0, R)$, et considérons une solution radiale $u = u(r)$. Le problème (5.5) se réduit alors au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_i H(u - \mu_i) & 0 < r < R \\ u(R) = u_\infty, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Les frontières libres associées sont données par :

$$\Gamma_{\mu_i} = \{(r_i, \theta) \in (0, R) \times S, \quad u(r_i) = \mu_i\}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

où S est la sphère unité.

Puisque u atteint son minimum en $r = 0$, le nombre de frontières libres dépend de la position de $u(0)$ par rapport aux seuils μ_i . Par exemple :

- Si $u(0) > \mu_n$, il n'existe aucune frontière libre.
- Si $\mu_{n-1} < u(0) \leq \mu_n$, une seule frontière libre Γ_{μ_n} se forme.
- Si $\mu_{n-2} < u(0) \leq \mu_{n-1}$, deux frontières libres $\Gamma_{\mu_{n-1}}$ et Γ_{μ_n} se forment.
- Si $u(0) \leq \mu_1$, toutes les frontières libres $\Gamma_{\mu_n}, \Gamma_{\mu_{n-1}}, \dots, \Gamma_{\mu_1}$ apparaissent.

Rappelons que les rayons r_i sont déterminés par l'équation $u(r_i) = \mu_i$, ainsi que par la condition de transmission :

$$u'(r_i^+) = u'(r_i^-)$$

où $u'(r_i^+)$ et $u'(r_i^-)$ représentent respectivement les dérivées à droite et à gauche en r_i .

Ces conditions impliquent l'existence d'un paramètre $\lambda^* > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, les frontières libres Γ_{μ_i} sont des sphères de rayon r_i .

Maintenant, supposons que $\Omega = B(0, R + \beta(\theta))$ où $\beta \in C^2(S)$ et \bar{u}_∞ proche u_∞ . Soit les fonctions $\psi_1, \dots, \psi_n \in S_\beta$, où S_β est l'ensemble des surfaces admissible dans Ω .

On considère les ensembles :

$$\Omega_{\psi_i} = \{(r, \theta) \in \Omega, \quad r < \psi_i(\theta)\}, \quad i = 1, \dots, n$$

On note aussi $\chi_{\Omega \setminus \Omega_{\psi_i}}$ la fonction caractéristique de $\Omega \setminus \Omega_{\psi_i}$. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.2. *Soit $\varepsilon_i \in (0, 1)$ et $\lambda \geq \lambda^*$. Le problème*

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \chi_{\Omega \setminus \Omega_{\psi_i}} & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{u}_\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.10)$$

possède une solution unique $u_\beta \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et $p > N$.

De plus, si $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \bar{u}_\infty$ et s'il existe des fonctions $\psi_i \in \Omega_{\psi_i}$ telles que,

$$u_\beta(\psi_i(\theta), \theta) = \mu_i \quad i = 1, \dots, n$$

Alors u_β est une solution du problème (5.5).

La preuve de cette proposition est similaire à celles des propositions 3.1 et 4.1.

Au vu des chapitres précédents, les fonctions ψ_i , qui représentent nos frontières libres, prennent la forme suivante :

$$r_i + b_i(\theta), \quad i = 1, \dots, n$$

où b_i représente la perturbation causée par β .

Notre approche construit une solution dans laquelle les frontières libres $\{\Gamma_{\mu_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ émergent successivement, sous l'effet de la croissance de u . Ce qui implique

$$\{u < \mu_1\} \supset \{u < \mu_2\} \supset \dots \supset \{u < \mu_n\}$$

où chaque frontière libre Γ_{μ_i} n'existe qu'une fois que u dépasse la valeur critique μ_i .

Pour cela, nous supposons que $\mu_{i+1} - \mu_i \geq \delta > 0$ et nous définissons les fonctions $v_j = u - \mu_j$ pour $j = 1, \dots, n$. Alors, chaque v_j satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta v_j = \lambda \sum_{i=1}^j \varepsilon_i H(v_i) & \text{dans } \Omega \\ v_j = \bar{u}_\infty - \mu_j & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.11)$$

et nous désignons par γ_{μ_j} la frontière libre associée, définie par

$$\gamma_{\mu_j} = \{x \in \Omega, v_j(x) = 0\}$$

Nous obtenons alors le résultat de régularité suivante :

Proposition 5.3. *Sous les hypothèses $\varepsilon_i \in (0, 1)$, $\lambda \geq \lambda^*$ et $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \bar{u}_\infty$, les frontières libres γ_{μ_j} sont des hypersurfaces analytiques de classe $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha \in (0, 1)$.*

Preuve de Proposition 5.3. Nous construisons les frontières libres γ_{μ_j} de manière itérative et établissons leur régularité.

Tout d'abord, pour $j = 1$, la fonction v_1 est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = \lambda \varepsilon_1 H(v_1) & \text{dans } \Omega \\ v_1 = \bar{u}_\infty - \mu_1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.12)$$

D'après [10] et en utilisant le théorème des fonctions implicites, on en déduit que γ_{μ_1} est une hypersurface de classe $C^{1,\alpha}$ et de la forme :

$$\gamma_{\mu_1} = \{r_1 + b_1(\theta), \theta \in S\}$$

où $b_1 \in C^{1,\alpha}$ est la perturbation causée par β .

Ainsi, en appliquant la transformation de l'Hodograph, on obtient l'analyticité de la frontière libre γ_{μ_1} . Cette méthode a été utilisée dans [10] en dimension $N \geq 2$. En effet, cette approche de régularité est similaire à celle étudiée pour le problème (3.17), défini dans la section 2.3.4 en dimension $N = 3$. Pour une description complète de cette méthode, nous renvoyons le lecteur à [64].

Ainsi, pour $j = 2$, l'équation de v_2 est donnée par :

$$\Delta v_2(x) = \lambda \varepsilon_2 H(v_2(x)) + \lambda \varepsilon_1, \quad x \in \Omega \quad (5.13)$$

Puisque v_1 est déjà résolu (la frontière libre γ_{μ_1} existe), nous analysons maintenant v_2 pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta v_2 = \lambda \varepsilon_2 H(v_2) + \lambda \varepsilon_1 & \text{dans } \Omega \\ v_2 = \bar{u}_\infty - \mu_2 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.14)$$

Donc, de manière analogue, la régularité de frontière libre :

$$\gamma_{\mu_2} = \{x \in \Omega, v_2(x) = 0\} = \{r_2 + b_2(\theta), \theta \in S\}, \quad \text{où } b_2 \in C^{1,\alpha}$$

s'obtient en appliquant le théorème des fonctions implicites, ainsi que la transformation de l'Hodographe introduite par Kinderlehrer, Nirenberg et Spruck en dimension $N \geq 2$.

Finalement, pour $j \geq 3$ supposons que le même résultat soit valable pour tout $i < j$, où les frontières libres γ_{μ_i} sont des hypersurfaces de classe $C^{1,\alpha}$ de la forme :

$$\gamma_{\mu_i} = \{r_i + b_i(\theta), \theta \in S\}, \quad \text{où } b_i \in C^{1,\alpha}$$

Pour la solution v_j , nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta v_j = \lambda \varepsilon_j H(v_j) + \lambda \sum_{i=1}^{j-1} \varepsilon_i & \text{dans } \Omega \\ v_j = \bar{u}_\infty - \mu_j & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.15)$$

où v_1, v_2, \dots, v_{j-1} sont les solutions du problème (5.11) pour $i = 1, 2, \dots, j-1$ respectivement.

Ainsi, la construction itérative se déroule pour $j = 1, \dots, n$, où n représente le nombre total de nos frontières libres $\gamma_{\mu_j} = \{r_j + b_j(\theta), \theta \in S\}$ pour $j = 1, \dots, n$ (ou équivalamment Γ_{μ_j}) qui sont des hypersurfaces analytiques de classe $C^{1,\alpha}$.

La démonstration de la proposition est complète. ■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons développé deux modèles de type frontière libre pour décrire la croissance des sphéroïdes tumoraux. Le premier modèle, présenté au chapitre 3, suppose que la tumeur évolue en deux phases : une phase initiale de croissance exponentielle, marquée par une prolifération cellulaire active, suivie d'une phase de ralentissement due à la diminution progressive des nutriments. Le second modèle, abordé au chapitre 4, introduit une troisième phase caractérisée par l'apparition d'une région nécrotique.

Notre étude s'est d'abord concentrée sur l'existence de solutions stationnaires du problème (3) dans le cas où la tumeur occupe une région sphérique de rayon R . En réduisant le problème de frontière libre (3) à une équation différentielle ordinaire avec conditions initiales, nous avons démontré l'existence de solutions globales et analysé leur comportement asymptotique. Par la suite, une approche perturbative nous a permis de caractériser les frontières libres lorsque la région tumorale est une sphère légèrement perturbée.

Dans la continuité de ces travaux, nous avons généralisé les résultats d'existence et de régularité des frontières libres pour le problème (3) dans un cadre plus général, en tenant compte d'une non-linéarité f discontinue en n points et d'un domaine Ω de dimension $N \geq 2$. D'autres prolongements peuvent être envisagés, notamment l'étude du problème (3) avec des conditions de Neumann, des conditions mixtes ou encore des conditions dépendant de manière non triviale de la concentration en oxygène u . Il serait également pertinent d'aborder ce problème sous l'angle des équations paraboliques. Ces perspectives ouvrent de nombreuses pistes de recherche, parmi lesquelles :

1. Les diagrammes de bifurcation obtenus pourraient jouer un rôle clé dans l'analyse de la stabilité des solutions des problèmes (3.6) et (4.3). Rappelons que le théorème de Crandall–Rabinowitz [30], utilisé classiquement dans ce type d'analyse, ne s'applique pas dans notre cadre.
2. Dans le problème principal (3.17) du chapitre 3, un phénomène de bifurcation apparaît lorsque $\lambda = \lambda_2$. Il serait intéressant d'étudier le comportement des solutions après perturbation dans ce cas. Nous avons seulement montré l'existence d'une fonction continue b telle que la frontière libre s'exprime sous la forme $r_{\lambda_2} + b$ où

$$r_{\lambda_2} = \frac{2\varepsilon - 3}{3(\varepsilon - 1)}R.$$

Il est probable que les méthodes développées par L. Caffarelli puissent être utilisées pour établir la régularité optimale de cette frontière libre.

Annexe

Dans cette partie, nous montrons la compacité de l'opérateur K défini sur $C(S)$ dans $C(S)$ par

$$K\varphi(\theta) = \int_S G(r_0, \theta, r_0, \theta') \varphi(\theta') d\theta'$$

Nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 5.1. [12]. *Soit x un vecteur unitaire de la sphère unité $\partial B(0, 1)$ en dimension 3. Alors, il existe un système orthonormal $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ tel que les points de $\partial B(0, 1)$ seront représentés par*

$$\eta = \cos \phi x + \sin \phi \tilde{\eta}, \quad \text{pour } \phi \in [0, \pi]$$

avec $(x, \eta) = \cos \phi$, où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire entre x et η , et $\tilde{\eta}$ est le vecteur unitaire dans l'espace engendré par γ_1, γ_2 .

Preuve. Soit $x_1 = x$, il existe deux vecteurs x_2, x_3 tels que l'ensemble

$$S = \{x_1, x_2, x_3\}$$

forme une base de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . En appliquant le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, nous obtenons les vecteurs suivants

$$\begin{aligned} y_3 &= x_1 = x \\ y_2 &= x_2 - c_1 x_1 \\ y_1 &= x_3 - c_2 x_2 - c_1 x_1 \end{aligned}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont choisis de manière à orthogonaliser $\{y_1, y_2, y_3\}$. En divisant chaque vecteur y_i par sa norme $|y_i|$, nous obtenons une base orthonormée $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, où $\gamma_i = \frac{y_i}{|y_i|}$ pour $i = 1, 2, 3$.

Puisque $\gamma_3 = x$, alors les points η de $\partial B(0, 1)$ peuvent être représentés sous la forme

$$\eta = \cos \phi x + \sin \phi \tilde{\eta}$$

avec $\phi \in [0, \pi]$, et $\tilde{\eta}$ étant le vecteur unitaire dans l'espace engendré par γ_1, γ_2 .

Cela termine la preuve du lemme. ■

Lemme 5.2. [12]. *Soit $x \in \partial B(0, 1)$, alors*

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 2 \text{meas}(\partial B_2(0, 1))$$

où $\text{meas}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue, et $\partial B_2(0, 1)$ est la sphère unité en dimension 2.

Preuve. Soit $x, y \in \partial B(0, 1)$, d'après le résultat du lemme précédent, on a

$$y = \cos \phi x + \sin \phi \tilde{\eta}, \quad \text{pour } \phi \in [0, \pi]$$

où $\phi \in [0, \pi]$, et $\tilde{\eta}$ est le vecteur unitaire dans l'espace engendré par γ_1, γ_2 .

Ce qui implique

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2(x, y)} = \sqrt{2 - 2 \cos \phi}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|x - y|} ds(y) &= \int_0^\pi \int_{\partial B_2(0,1)} \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \phi}} \sin \phi ds(y) d\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{meas}(\partial B_2(0, 1)) \int_0^\pi \frac{\sin \phi}{\sqrt{1 - \cos \phi}} d\phi \end{aligned}$$

Posons $t = \cos \phi$, avec $t \in [-1, 1]$. Alors

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|x - y|} ds(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{meas}(\partial B_2(0, 1)) \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t}} = 2 \text{meas}(\partial B_2(0, 1))$$

la preuve du lemme est complète. ■

Maintenant, en utilisant les coordonnées cartésiennes, l'opérateur K s'écrit :

$$K\tilde{\varphi}(x) = \int_{\partial B(0, r_0)} G(x, y) \tilde{\varphi}(y) ds(y)$$

Soit M l'ensemble des fonctions mesurables et bornées. Donc, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $|\tilde{\varphi}| \leq c_1$ pour tout $\tilde{\varphi} \in M$.

Nous voulons montrer que $K(M)$ est borné et équicontinu. Nous avons

$$\begin{aligned} |K\tilde{\varphi}(x)| &\leq c_1 \int_{\partial B(0, r_0)} |G(x, y)| ds(y) \\ &\leq c_1 \int_{\partial B(0, r_0)} \left(|G_0(|x - y|)| + \left| G_0\left(\frac{|x|}{R} \left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right| \right) \right| \right) ds(y) \end{aligned}$$

Nous rappelons que $G_0\left(\frac{|x|}{R} \left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right| \right)$ est une fonction régulière sur $\partial B(0, r_0)$ et bornée. Ainsi,

$$|K\tilde{\varphi}(x)| \leq c_1 \int_{\partial B(0, r_0)} |G_0(|x - y|)| ds(y) + c_2.$$

Pour estimer la première intégrale, nous avons

$$\int_{\partial B(0, r_0)} |G_0(|x - y|)| ds(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0, r_0)} \frac{1}{|x - y|} ds(y) = \frac{r_0}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{1}{|z_0 - z|} ds(z)$$

où $x = r_0 z_0$ et $y = r_0 z$. D'après le lemme 5.2, on en déduit que l'intégrale est bornée.

Maintenant, nous montrons que $K(M)$ est équicontinu. On a

$$\begin{aligned} |K\tilde{\varphi}(x_1) - K\tilde{\varphi}(x_2)| &= \left| \int_{\partial B(0, r_0)} (G(x_1, y) - G(x_2, y)) \tilde{\varphi}(y) ds(y) \right| \\ &\leq c_1 \int_{\partial B(0, r_0)} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| ds(y) \end{aligned}$$

Soit $B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2)$ deux boules centrées respectivement en x_1 et x_2 , de rayons $\varepsilon > 0$ suffisamment petits, telles que

$$B_\varepsilon(x_1) \cap B_\varepsilon(x_2) = \emptyset$$

et soit $\delta > 0$, telle que $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,r_0)} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| ds(y) &= \int_{\partial B(0,r_0) \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| ds(y) \\ &+ \int_{\partial B(0,r_0) \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| ds(y) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

L'intégrale I_2 est bornée puisque la fonction de Green est uniformément continue sur

$$\partial B(0, r_0) \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)).$$

Pour l'intégrale I_1 , nous avons

$$I_1 = \int_{\partial B(0,r_0) \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} \left| G_0(|x_1 - y|) - G_0(|x_2 - y|) + \psi(x_1, x_2, y) \right| ds(y)$$

où ψ est la partie analytique de la fonction de Green, qui est donnée par

$$\psi(x_1, x_2, y) = G_0\left(\frac{|x_2|}{R} \left| \frac{R^2}{|x_2|^2} x_2 - y \right| \right) - G_0\left(\frac{|x_1|}{R} \left| \frac{R^2}{|x_1|^2} x_1 - y \right| \right)$$

Il nous reste à estimer le terme

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\partial B(0,r_0) \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} \left| G_0(|x_1 - y|) - G_0(|x_2 - y|) \right| ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,r_0) \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} \left| \frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{1}{|x_2 - y|} \right| ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,r_0) \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} \left| \frac{|x_2 - y| - |x_1 - y|}{|x_1 - y||x_2 - y|} \right| ds(y) \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,r_0) \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))} \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - y||x_2 - y|} ds(y) \\ &\leq c_2 |x_1 - x_2| \int_{\partial B(0,r_0) \cap B_\varepsilon(x_1)} \frac{1}{|x_1 - y||x_2 - y|} ds(y) + c_2 |x_1 - x_2| \int_{\partial B(0,r_0) \cap B_\varepsilon(x_2)} \frac{1}{|x_1 - y||x_2 - y|} ds(y) \\ &\leq c_3 |x_1 - x_2| \int_{\partial B(0,r_0) \cap B_\varepsilon(x_1)} \frac{1}{|x_1 - y|} ds(y) + c_4 |x_1 - x_2| \int_{\partial B(0,r_0) \cap B_\varepsilon(x_2)} \frac{1}{|x_2 - y|} ds(y) \end{aligned}$$

D'autre côté, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,r_0) \cap B_\varepsilon(x_i)} \frac{1}{|x_i - y|} ds(y) &= \int_{\partial B(0,r_0)} \frac{1}{|x_i - y|} \chi_{\partial B(0,r_0) \cap B_\varepsilon(x_i)} ds(y) \\ &\leq \int_{\partial B(0,r_0)} \frac{1}{|x_i - y|} ds(y) = r_0 \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|z_i - z|} ds(z) \leq \text{const.} \end{aligned}$$

où $x_i = r_0 z_i$ pour $i = 1, 2$, et $y = r_0 z$.

Finalement, nous avons

$$|K\tilde{\varphi}(x_1) - K\tilde{\varphi}(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$$

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, nous concluons que $K\tilde{\varphi}$ est un opérateur compact.

Bibliographie

- [1] A. Abdelouahab, S. Bensid, Analysis of a multiphase free boundary problem, *Opuscula Math*, **44**, (2024), 631-649. 13, 79
- [2] A. Abdelouahab, S. Bensid, Perturbation analysis in a free boundary problem arising in tumor growth model, *Complex Variables and Elliptic Equations*, accepté, (2025), 1–27, <https://doi.org/10.1080/17476933.2025.2459613>. 12, 53
- [3] J. A. Adam, General aspects of modeling tumor growth and immune response, *In A survey of models for tumor-Immune System Dynamics*, eds J. A. Adam and N. Bellomo, Birkhauser, (1996), 15-87
- [4] M. S. Alber, M. A. Kiskowski, J. A. Glazier, and Y. Jiang, On cellular automaton approaches to modeling biological cells, *Mathematical Systems Theory in Biology, Communications, Computation, and Finance*, Springer, (2003), 1–39. 43
- [5] P. M. Altrock, L. L. Liu, and F. Michor, The mathematics of cancer : integrating quantitative models, *Nature Reviews Cancer*, **15**, (2015), 730–745. 43
- [6] A. Ambrosetti, M. Badiale, The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl*, **140**, (1989), 363-373.
- [7] A. Ambrosetti, G. Prodi, A primer of nonlinear analysis, Cambridge University Press, (1993). 22
- [8] American Cancer Society, Global cancer facts and figures, 3rd edition, <https://www.cancer.org/content/dam/cancer-org/research/cancer-facts-and-statistics/global-cancer-facts-and-figures/global-cancer-facts-and-figures-3rd-edition.pdf>. 7
- [9] R. Araujo, D. L. S. McElwain, A history of the study of solid tumour growth : The contribution of mathematical modelling, *Bull. Math. Biol.*, **66**, (2004), 1039–1091 43
- [10] S. Bensid, Perturbation of the free boundary in elliptic problems with discontinuities, *Electronic Journal of Differential Equations*, **132**, (2016), 1-14. 99
- [11] S. Bensid, S. M. Bouguima, Existence and multiplicity of solutions to elliptic problems with discontinuous and free boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, **56**, (2010), 1–16. 76
- [12] S. Bensid, S. M. Bouguima, On a free boundary problem, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, **68**, (2008), 2328-2348 . 77, 102
- [13] S. Bensid, JI. Diaz , Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a shaped bifurcation branch of stationary solutions, *Discrete and continuous dynamical systems, Ser B*, **22**, (2017), 1757-1778.
- [14] S. Bensid, JI. Diaz, On the exact number of monotone solutions of a simplified budyko climate model and their different stability, *Discrete and continuous dynamical systems, Ser B*, **24**, (2019), 1033-1047
- [15] M. A. Blanco, M. Flórez, and M. Bermejo, Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics, *Journal of Molecular Structure : Theochem*, **419**, (1997), 19–27. 33

- [16] G. Bonanno, P. Candito, Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities, *J. Differential Equations*, **244**, (2008), 3031-3059.
- [17] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, *Masson. Paris*, (1992). 14, 21, 74
- [18] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, *deuxième édition*, (1987) 29
- [19] B. Buffoni, J. Toland, Analytic Theory of Global Bifurcation, *Princeton University Press*. 19
- [20] A. C. Burton, Rate of growth of solid tumours as a problem of diffusion, *Growth*, **30**, (1966), 157-176. 8
- [21] H. M. Byrne, Mathematical Biomedicine and Modeling Avascular Tumor Growth, *Mathematics and Life Sciences. De Gruyter*, **1**, (2012), 277-303. 52
- [22] H. M. Byrne, M. A. J. Chaplain, Growth of Nonnecrotic Tumors in the Presence and Absence of Inhibitors. *Math Biosci*, **130**, (1995), 151-181. 50, 51
- [23] H. M. Byrne, M. A. J. Chaplain, Growth of Necrotic Tumors in the Presence and Absence of Inhibitors. *Math Biosci*, **135**, (1996), 187-216. 51
- [24] L. A. Caffarelli, The regularity of elliptic and parabolic free boundaries, *Bull. Amer. Math. Soc*, **82**, (1976), 616-618. 78
- [25] L. A. Caffarelli, The regularity of free boundaries in higher dimensions, *Acta Math*, **139**, (1977), no. 3-4, 155-184. 78
- [26] M. A. J. Chaplain, The developpement of a spatial pattern in a model for cancer growth, *Experimental and theoretical advances in Biological pattern functions*, eds. H. G. Othmer, P. K. Maini and J. D. Murray (plenum press 1993), 45-60.
- [27] M. Chipot, Elliptic Equations : An Introductory Course, *Springer*, (2009). 29
- [28] T. Colin, A. Iollo, D. Lombardi, and O. Saut, System identification in tumor growth modeling using semi-empirical eigenfunctions, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **22(06)**, (2012). 46
- [29] T. Colin, F. Cornelis, J. Jouganous, J. Palussi re, and O. Saut, Patient-specific simulation of tumor growth response to the treatment and relapse of a lung metastasis : a clinical case, *Journal of Computational Surgery*, **2**, (2015), 1-17.
- [30] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal*, **8**, (1971), 321-340. 23, 25, 101
- [31] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, Bifurcation perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, *Journal of Functional Analysis*, **52**, (1973), 162-180. 23
- [32] S. Cui, Analysis of a free boundary problem modeling tumor growth, *Acta. Math. Sin(Engl. ser)*, **21**, (2005), 1071-1082.
- [33] S. Cui, A. Friedman, Analysis of a mathematical model of the growth of necrotic tumors, *J. Math. Anal. Appl*, **255**, (2001), 636-677. 52
- [34] E. De Angelis, L. Preziosi, Advection-diffusion models for solid tumour evolution in vivo and related free boundary problem, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **10**, (2000), 379-407. 5, 46
- [35] F. Demengel, G. Demengel, and R. Ern e, Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations, London, UK :*Springer*, (2012). 14
- [36] A. Deutsch, S. Dormann, Cellular automaton modeling of biological pattern formation. *FASEB*, (2005). 43
- [37] E. Dibenedetto, Partial Differential Equations, Springer Science, Business Media New York, (1995) 34
- [38] D. Drasdo, S. H ohme, Individual-based approaches to birth and death in avascular tumors, *Mathematical and Computer Modelling*, **37**, (2003), 1163-1175. 44
- [39] R. El Attar, Special functions and orthogonal polynomials, Lulu press, USA, (2006). 30

- [40] C. Evans, Partial Differential Equations, *American Math. Society*, (2010). 14
- [41] A. Friedman, A hierarchy of cancer models and their mathematical challenges, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **4**, (2004), 147-160. 52
- [42] A. Friedman, Cancer models and their mathematical analysis, *Tutorials in Mathematical Biosciences*, **3**, (2005), 223-246. 52
- [43] A. Friedman, B. Hu, Bifurcation for stability to instability for a free boundary problem arising in a tumor model, *Arch. Rational Mech. Anal*, **180**, (2006), 293–330. 52
- [44] A. Friedman, B. Hu, Asymptotic stability for a free boundary problem arising in tumor models, *J. Differential Equations*, **227**, (2006), 598-639. 52
- [45] A. Friedman, F. Reitchi, Analysis of a mathematical model for the growth of tumors, *J. Math. Biol*, **38**, (1999), 262-284. 8, 51
- [46] A. Friedman, F. Reitchi, On the existence of spatially patterned dormant malignancies in a model for the growth of non-necrotic vascular tumors, *J. Math. Models and Methods in Appl. Sciences*, **11**, (2001), 601-625. 8, 51
- [47] J. Galle, M. Loeffler, and D. Drasdo, Modeling the effect of deregulated proliferation and apoptosis on the growth dynamics of epithelial cell populations in vitro, *Biophysical journal*, **88**, (2005), 62–75. 44
- [48] R. A. Gatenby, E. T. Gawlinski, A reaction-diffusion model of cancer invasion, *Cancer research*, **56**, (1996), 5745–5753. 45
- [49] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, (1983). 14, 28, 29, 66, 89, 96
- [50] M. Golubitsky, D. G. Schaeffer, Singularities and groups in bifurcation theory, Springer-Verlag New York Inc, (1985). 23
- [51] B. Gompertz, On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies, *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, **115**, (1825), 513–583. 44
- [52] I. G. Gonçalves, J. M. G. Aznar, Hybrid computational models of multicellular tumor growth considering glucose metabolism, *Computational and Structural Biotechnology Journal*, **21**, (2023), 1262-1271. 5, 44
- [53] H. P. Greenspan, Models for the growth of a solid tumor by diffusion, *Stud Appl Math*, **51**, (1972), 317-340. 46, 47, 49, 52
- [54] H. P. Greenspan, On the growth and stability of cell cultures and solid tumors, *J. Theor. Biol.*, **56**, (1976), 229-242. 48, 49
- [55] P. Hahnfeldt, D. Panigrahy, J. Folkman, and L. Hlatky, Tumor development under angiogenic signaling a dynamical theory of tumor growth, treatment response, and postvascular dormancy, *Cancer research*, **59**, (1999), 4770–4775. 45
- [56] D. Hanahan, R. A. Weinberg, The hallmarks of cancer, *Cell*, **100**, (2000), 57-70. 5, 7, 40, 41
- [57] D. Hanahan, R. A. Weinberg, Hallmarks of cancer : The next generation, *Cell*, **144**, (2011), 646-674. 40, 41
- [58] A. V. Hill, The diffusion of oxygen and lactic acid through tissues, *Proceedings of the Royal Society of London*, Series B, **104**, (1928), 39-96. 7
- [59] W. Huang, Z. Khalid, and R. A. Kennedy, Efficient computation of spherical harmonic transform using parallel architecture of CUDA, *2011 5th International Conference on Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS)*, (2011), 1–6. 33
- [60] W. R. Inch, J. A. McCreddie, and R. M. Sutherland, Growth of nodular carcinomas in rodents compared with multi-cell spheroids in tissue culture, *Growth*, **34**, (1970), 271-282. 8
- [61] Institut Curie, Les traitements contre le cancer, <https://curie.fr/les-traitements>. 42

- [62] Institut National du Cancer, Les cancers en France, *Faits et chiffres*, (2015), <https://www.cancer.fr/>. 42
- [63] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, **13**, Springer, (1993). 14, 17, 18
- [64] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and their Applications, New York-London : *Academic Press*, (1980). 8, 75, 76, 99
- [65] H. Le Dret, Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, *Springer-Verlag*, (1984). 29
- [66] J. Lopez-Gomez, Spectral theory and nonlinear functional analysis, CRC Press, (2001). 22, 27
- [67] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle, Ellipses, (2013). 14
- [68] S. A. Maggelakis, J. A. Adam, Mathematical model for prevascular growth of a spherical carcinoma, *Math. Comp. Modelling*, **13**, (1990), 23-38
- [69] N. V. Mantzaris, S. Webb, and H. G. Othmer, Mathematical modeling of tumorinduced angiogenesis, *Journal of mathematical biology*, **49**, (2004), 111–187.
- [70] W. V. Mayneord, On a law of growth of Jensen's rat sarcoma, *The American Journal of Cancer*, **16.4**, (1932), 841-846. 7
- [71] D. L. S. McElwain, L. E. Morris, Apoptosis as a Volume Loss Mechanism in Mathematical Models of Solid Tumor Growth, *Mathematical Biosciences*, **39**, (1978), 147-157. 5, 49, 50
- [72] L. Meijer, Le cycle de division cellulaire et sa régulation, *Oncologie* 5.7/8, (2003), 311–326. 7, 40
- [73] R. Monneau, Contribution à l'étude de problèmes à frontières libres et d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. Application en combustion et élasticité, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, (2002). 8
- [74] L. E. Morris, A mathematical model of tumor growth, *Mathematical Biosciences*, **39**, (1978), 1-16. 52
- [75] C. Muller, Spherical Harmonics, *Lecture Notes in Math*, **17**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1966). 33
- [76] L. Norton, A gompertzian model of human breast cancer growth, *Cancer research*, **48**, (1988), 7067–7071. 44
- [77] E. Palsson, A 3-D model used to explore how cell adhesion and stiffness affect cell sorting and movement in multicellular systems, *Journal of Theoretical Biology* , **254.1**, (2008), 1–13. 44
- [78] E. Palsson, H. G. Othmer, A model for individual and collective cell movement in Dictyostelium discoideum, *Proceedings of the National Academy of Sciences* , **97.19**, (2000), 10448–10453. 44
- [79] B. Perthame, Transport Equations in Biology, *Frontiers in Mathematics*, Birkhauser, (2007). 52
- [80] B. Ribba, O. Saut, T. Colin, D. Bresch, E. Grenier, and J. P. Boissel, A multiscale mathematical model of avascular tumor growth to investigate the therapeutic benefit of anti-invasive agents, *Journal of theoretical biology*, **243**, (2006), 532–541.
- [81] J. F. Rodrigues, Obstacle Problems in Mathematical Physics, *North-Holland Mathematics Studies*, **134**, (1987). 8
- [82] M. Scianna, L. Preziosi, Multiscale developments of the cellular potts model, *Multiscale Modeling & Simulation*, **10**, (2012), 342–382. 43
- [83] J. A. Sherratt, M. A. Chaplain, A new mathematical model for avascular tumour growth, *Journal of mathematical biology*, **43**, (2001), 291–312.
- [84] H. Song, W. Hu and Z. Wang, Analysis of nonlinear free boundary tumor model with angiogenesis and a connection between the nonnecrotic and necrotic phases, *Nonlinear Analysis : Real world and Applications*, **59**, (2021), 103-270.
- [85] H. Song, B. Hu and Z. Wang, Stationary solutions of a free boundary problem modeling the growth of vascular tumors with a necrotic core, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, **26**, (2021), 667-691.

- [86] B. W. Stewart, P. Kleihues, Le cancer dans le monde, *OMS, IARC Press Lyon* 2005, ISBN 92-832-0416-6. 7
- [87] R. M. Sutherland, W. R. Inch, and J. A. Mccredie, A multi-component radiation survival curve using an in vitro turnover model, *J. of Radiation Bio*, **18**, (1970), 491-495. 8
- [88] R. M. Sutherland, J. A. Mccredie, and W. R. Inch, Growth of multicell spheroids in tissue culture as a model of nodular carcinomas, *J. Nat. Cancer Inst*, **46**, (1971), 113-120. 8
- [89] R. H. Thomlinson, L. H. Gray, The histological structure of some human lung cancers and the possible implications for radio therapy, *Brit. J. Cancer*, **9**, (1955), 539-549. 8
- [90] K. Vermeulen, D. V. Bockstaele, and Z. N. Berneman, The cell cycle : a review of regulation, deregulation and therapeutic targets in cancer, *Cell Proliferation* , **36.3**, (2003), 131–149. 40
- [91] J. P. Ward, J. R. King, Mathematical modelling of avascular-tumour growth, *Mathematical Medicine and Biology*, **14**, (1997), 39–6.
- [92] J. Wu, Analysis of a Nonlinear Necrotic Tumor Model with Two Free Boundaries, *J Dyn Diff Equat*, **33**, (2021), 511–524.
- [93] J. Wu, C. Wang, Radially symmetric growth of necrotic tumors and connection with nonnecrotic tumors, *Nonlinear Analysis : Real world and Application*, **50**, (2019), 25-33.
- [94] S. Xu, Stability of Solutions to a Free Boundary Problem for Tumor Growth, *Int. J. Differ. Equ*, **4**, (2014). 63

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions une classe de problèmes à frontière libre modélisant la croissance tumorale. Le problème est exprimé sous la forme d'une équation elliptique impliquant des non-linéarités discontinues dans un domaine spécifié, avec une frontière externe libre. Sous différentes hypothèses concernant la non-linéarité, nous obtenons divers résultats d'existence et de multiplicité des solutions. Nous fournissons également une analyse qualitative des frontières libres générées par ce terme non-linéaire (frontières internes) et étudions la dynamique de la frontière de la région extérieure. Pour ce faire, nous utilisons des méthodes non variationnelles, la théorie des points critiques et de bifurcation, ainsi que des techniques de perturbation combinées aux méthodes locales.

Mots-clés : non-linéarité discontinue, frontière libre, perturbation, croissance tumorale.

Abstract

In this thesis, we study a class of free boundary problems modeling tumor growth. The problem is formulated as an elliptic equation involving discontinuous nonlinearities in a specified domain, with a moving boundary. Under different hypotheses concerning the nonlinearity, we obtain various results on the existence and multiplicity of solutions. We also provide a qualitative analysis of the free boundaries generated by this nonlinear term (inner boundaries) and study the dynamics of the outer region boundary.

To achieve this, we use non-variational methods, critical point theory and bifurcation theory, as well as perturbation techniques combined with local methods.

Keywords : discontinuous nonlinearity, free boundary, perturbation, tumor growth.

ملخص

في هذه الأطروحة، ندرس فئة من مسائل الحدود الحرة التي تمثل نمو الأورام. يتم صياغة المشكلة كمعادلة إهليلجية تحتوي على لاتخطيات منقطعة في مجال محدد مع وجود حد متحرك. بناءً على افتراضات مختلفة حول اللاتخطية، نحصل على نتائج متنوعة بشأن وجود وتعدد الحلول. نقدم أيضًا تحليلًا نوعيًا للحدود الحرة الناتجة عن هذا المصطلح غير الخطي (الحدود الداخلية) وندرس ديناميكيات حد المنطقة الخارجية.

لتحقيق ذلك، نستخدم الطرق غير التغيرية، نظرية النقاط الحرجة، ونظرية التفرع، بالإضافة إلى تقنيات الاضطراب التي تم دمجها مع الأساليب المحلية.

الكلمات المفتاحية : اللاتخطية المنقطعة، الحدود الحرة، الاضطراب، نمو الورم.