

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques & Modélisations

présentée par

HASSOUN Ghizlène

SUR UN MODÈLE DE CROISSANCE D'UNE POPULATION AVEC DÉRIVÉE DE TYPE PSI-CAPUTO

Soutenue devant le jury composé de :

MR. DERHAB M	Professeur	Université de Tlemccen	Président
MME. KHITRI-KAZI-TANI L	MCB	Université de Tlemccen	Examineur
MME. HADJOU BELAID A	MCB	Université de Tlemccen	Examineur
MR. MESK M	MCA	Université de Tlemccen	Encadrant

Année Universitaire : 2021-2022

Dédicaces

C'est avec mon énorme plaisir, un cœur ouvert et une joie immense, que je dédie ce modeste travail tout d'abord à mes parents pour leurs amour, leurs sacrifices et leurs encouragements qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Vous présentez pour moi le symbole de la bonté, la source de tendresse et l'exemple du dévouement. Vos prières et vos bénédictions m'ont été d'un grand secours pour bien mener mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous vos sacrifices.

Je vous dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.

A mes sœurs Imane et Souâd qui n'ont jamais cessé de m'encourager pour qui je souhaite beaucoup de réussite, de bonheur et prospérité.

A mon frère Mohammed Akram que j'aime beaucoup, merci pour tout ce que vous avez fait pour moi. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de Réussite.

A mes chères Rahma, Dounia et Iman merci pour votre amitié. Vous étiez toujours disponible pour m'écouter. Merci

Aux personnes qui m'ont encouragé et motivé, qui n'ont cessé d'œuvré pour ma réussite et pour mon bonheur.

Hassoun Ghizlène

Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience et le courage d'accomplir ce modeste travail. C'est avec une immense reconnaissance que je tiens à remercier mon encadrant Mr **MESK MOHAMMED** pour ses précieux conseils et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce travail, ainsi pour l'orientation, la confiance, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.*

*Je lui présente donc mes sentiments de gratitude. Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr **DERHAB**, **MME KHITRI** et **MME HADJOU** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.*

Mes sincères remerciements à tous mes professeurs du département de mathématiques de la faculté des sciences à Tlemcen.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	4
1 Préliminaires et outils de base	6
2 Modèle logistique fractionnaire	10
2.1 Modèle logistique de croissance d'une population	10
2.2 Les résultats principaux du modèle logistique à dérivée de type ψ -Caputo	11
2.3 Croissance de population avec une grande capacité limite K	14
3 Résultats de simulation	17
Résumé	21
Annexe	22
Bibliographie	25

Introduction

Les phénomènes de la vie réelle sont souvent modélisés au moyen d'équations différentielles, aux dérivées partielles ou intégro-différentielles. Ces équations sont construites à l'aide de deux outils principaux que sont les dérivées et les intégrales d'ordres entiers naturels. Cependant, il y a trois siècles, un nouveau type de dérivée appelée dérivée fractionnaire a été introduite [11]. C'est une nouvelle forme de dérivée et d'intégrale qui tente de généraliser l'utilisation de tout nombre réel ou fraction comme ordre de dérivée ou d'intégrale et qui était à la genèse du calcul fractionnaire. Au premier temps, le calcul fractionnaire a été principalement étudié théoriquement. Par conséquent, les premiers travaux de recherche se sont concentrés sur la conception de modèles fractionnaires, puis sur la preuve de l'existence et de l'unicité de leurs solutions. Des exemples de telles études théoriques se trouvent dans ([2], [3]) et les références qui y figurent. Dans tout ce qui suit, des déclarations telles que l'approche classique et les équations différentielles classiques sont souvent utilisées pour faire référence au modèle dans lequel l'ordre des dérivées ou des intégrales sont tous des entiers.

Au cours des dernières décennies, le calcul fractionnaire a pris une nouvelle direction. En effet, après que les chercheurs aient bien établi la théorie des équations différentielles fractionnaires, beaucoup sont maintenant concentrés sur leur application pour résoudre des problèmes de la vie réelle. Il a depuis été prouvé dans de nombreux travaux que les équations différentielles fractionnaires peuvent être utilisées avec succès pour modéliser certains phénomènes naturels, même lorsque les équations différentielles classiques ne le font pas. De plus, dans le cas où les approches classiques et fractionnaires sont applicables pour résoudre un problème, il est observé que l'approche fractionnaire minimisera l'erreur par rapport à l'approche classique. Les équations différentielles fractionnaires ont été utilisées avec succès pour la modélisation en finance [4] et en épidémiologie [[5], [7]]. Pour d'autres exemples, on peut consulter [6] et les références qui s'y trouvent.

Ce travail est inspiré des deux articles [1] et [9] où on a considéré un modèle de croissance d'une population avec dérivée fractionnaire de type ψ -Caputo étudié dans [1]. On a explicité la démonstration du théorème d'existence et proposé une autre démonstration du théorème de l'unicité de la solution. On a réalisé l'étude numérique sur un exemple avec l'idée de trouver le modèle fractionnaire le plus proche de la réalité. Pour un aperçu sur les différents types de dérivées fractionnaires on peut consulter [12].

Pour le côté numérique, la modélisation de la croissance d'une population est envisagée

lorsque la capacité limite est très élevée. La population Indienne qui a une telle propriété a été considérée dans la simulation. Il est apparu que le modèle ψ -Caputo avec la fonction racine carrée utilisée comme noyau, $\psi(x) = \sqrt{x+1}$, s'adapte mieux à la population Indienne que le modèle logistique classique de croissance de la population.

Le travail est organisé comme suit : Les définitions préliminaires du calcul fractionnaire sont données dans le chapitre (1), le modèle de croissance logistique fractionnaire à dérivée de type Ψ -Caputo est défini dans la section (2.1), l'existence et l'unicité d'une solution sont données dans la section (2.2), l'approximation de la population à grande capacité limite est donnée dans la section (2.3), et enfin, une simulation avec la population Indienne est effectuée au chapitre (3).

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

Ce premier chapitre a pour objet la présentation des notions du calcul fractionnaire utilisées.

Définition 1.1 (Riemann-Liouville) (Samko page – 33 – [11])

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$${}_{RL}I_{0+}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds, \quad (1.1)$$

où la fonction gamma Γ est donnée par : $\Gamma(v) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{v-1}dt, \forall v > 0$.

Définition 1.2 (Riemann-Liouville) (Samko page – 37 – [11])

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$${}_{RL}D_{0+}^{\alpha}g(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n {}_{RL}I_{0+}^{n-\alpha}g(t) \quad (1.2)$$

où $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ est la partie entière de α .

Définition 1.3

La dérivée de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$({}_cD_{0+}^{\alpha}g)(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}g^{(n)}(s)}{\Gamma(n-\alpha)} ds, & n-1 < \alpha < n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ g^{(n)}(t) & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad (1.3)$$

où $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ est la partie entière de α .

Définition 1.4 (voir[8])

Soit $\alpha > 0$ et $g \in L^1([0, T])$ et $\psi \in C^1([0, T])$ une fonction croissante avec $\psi'(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$. Alors $I_{0+}^{\alpha, \psi}g(t)$ désigne l'intégrale fractionnaire de g par rapport à ψ , et il est donné par :

$$I_{0+}^{\alpha, \psi}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}g(s)ds, \quad (1.4)$$

Exemple 1.1 Pour la fonction $g(s) = (\psi(s) - \psi(0))^\beta$, $\beta > -1$, on a :

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} (\psi(s) - \psi(0))^\beta ds \\ &= \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s) \left(1 - \frac{\psi(s) - \psi(0)}{\psi(t) - \psi(0)}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\psi(s) - \psi(0)}{\psi(t) - \psi(0)}\right)^\beta ds \end{aligned}$$

et en utilisant le changement de variables

$$u = \frac{\psi(s) - \psi(0)}{\psi(t) - \psi(0)} \text{ avec } du = \frac{\psi'(s)}{\psi(t) - \psi(0)} ds$$

on trouve

$$I_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t) = \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du$$

ce qui donne, avec la relation de la fonction Beta

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},$$

le résultat

$$I_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (\psi(t) - \psi(0))^{\alpha+\beta}.$$

Remarque 1.1 ([8]) Pour $\alpha, \beta > 0$ on a la propriété des semi groupes

$$I_{0^+}^{\alpha, \psi} I_{0^+}^{\beta, \psi} = I_{0^+}^{\alpha+\beta, \psi}.$$

Définition 1.5 (voir [8])

Soit $\alpha > 0$ et $g, \psi \in C^n([0, T])$ avec ψ une fonction croissante et $\psi'(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$. Alors ${}_c D_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t)$ désigne la dérivée fractionnaire de g par rapport à ψ donnée par :

$${}_c D_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{\psi'(s)} \frac{d}{ds}\right)^n g(s) ds. \quad (1.5)$$

où $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ est la partie entière de α .

En particulier, si $\alpha \in (0, 1)$, on obtient :

$${}_c D_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{-\alpha} g'(s) ds.$$

Exemple 1.2 La dérivée de Caputo de la fonction $g(s) = (\psi(s) - \psi(0))^\beta$, $\beta > n$, est donnée par :

$${}_c D_{0^+}^{\alpha, \psi} g(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (\psi(t) - \psi(0))^{\beta-\alpha}.$$

Pour la démonstration, il suffit de remarquer par récurrence sur n que

$$\left(\frac{1}{\psi'(s)} \frac{d}{ds}\right)^n g(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\psi(s) - \psi(0))^{\beta-n}$$

et de procéder comme dans l'exemple 1.1.

Remarque 1.2

- Pour $\psi(t) = t$ on a la dérivée de Caputo défini par (1.3).
- Pour $\psi(t) = \ln(t)$ on a la dérivée de Hadamard de type Caputo défini pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ par [12]

$${}^H D_{0+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \left(\ln \left(\frac{t}{s} \right) \right)^{n-\alpha-1} \left(s \frac{d}{ds} \right)^n g(s) ds. \quad (1.6)$$

Lemme 1.1 (Voir théorème 4 dans [8])

Soit $\alpha > 0$, n un entier naturel tel que $\alpha \in (n-1, n)$. Si $g, \psi \in C^n([0, T])$ alors

$$I_{0+}^{\alpha, \psi} ({}_c D_{0+}^{\alpha, \psi} g)(t) = g(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1/\psi'(s) d/ds)^i g(0)}{i!} (\psi(t) - \psi(0))^i. \quad (1.7)$$

preuve 1 Vu la remarque 1.1 et en posant

$$g_{\psi}^{[i]}(s) = (1/\psi'(s) d/ds)^i g(s)$$

alors on a en utilisant l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha, \psi} ({}_c D_{0+}^{\alpha, \psi} g)(t) &= I_{0+}^{\alpha, \psi} I_{0+}^{n-\alpha, \psi} g_{\psi}^{[n]}(t) = I_{0+}^{n, \psi} g_{\psi}^{[n]}(t) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{n-1} g_{\psi}^{[n]}(s) ds \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{n-1} \frac{d}{ds} g_{\psi}^{[n-1]}(s) ds \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{n-2} \frac{d}{ds} g_{\psi}^{[n-2]}(s) ds - \frac{g_{\psi}^{[n-1]}(0)}{(n-1)!} (\psi(t) - \psi(0))^{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-3)!} \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{n-3} \frac{d}{ds} g_{\psi}^{[n-3]}(s) ds - \sum_{i=n-2}^{n-1} \frac{g_{\psi}^{[i]}(0)}{i!} (\psi(t) - \psi(0))^i \\ &= \dots = \int_0^t \frac{d}{ds} g(s) ds - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{\psi}^{[i]}(0)}{i!} (\psi(t) - \psi(0))^i \\ &= g(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_{\psi}^{[i]}(0)}{i!} (\psi(t) - \psi(0))^i \end{aligned}$$

Lemme 1.2 (voir théorème 5 dans [8])

Soit $f \in C^1[0, T]$ et $\alpha > 0$, alors

$${}_c D_{0+}^{\alpha, \psi} I_{0+}^{\alpha, \psi} g(t) = g(t) \quad (1.8)$$

Définition 1.6 (Taux d'erreur) (voir [1])

Considérons un ensemble de données expérimentales représentées par un vecteur de taille n , obtenu à partir d'un processus dépendant du temps ou de l'espace tel que la i^{th} observation est notée par $y_i = y(t_i)$. Si les valeurs expérimentales sont données par une fonction \hat{y} , dont la i^{th}

valeur est indiquée par $\hat{y}_i = \hat{y}(t_i)$, alors le taux de l'erreur entre l'ensemble des données d'origine et l'ensemble des données ajusté est donnée par :

$$ER = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (y(t_i) - \hat{y}(t_i))^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (y(t_i))^2}} \quad (1.9)$$

Le taux ER évalue l'ampleur de l'erreur qui se produit lorsque les valeurs estimées sont utilisées à la place des valeurs d'origine.

Définition 1.7 (Équicontinuité)

Soient X et Y deux espaces métriques, et F une famille de fonctions de X dans Y .

On dit que la famille F est équicontinue en un point $x_0 \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $d(x_0, x) < \delta$ pour tout $g \in F$ et tout x alors $d(g(x_0), g(x)) < \epsilon$.

La famille F est équicontinue ponctuellement si elle est équicontinue en tout point de X .

Théorème 1.1 (Arzela Ascoli)

Soit A un sous ensemble de $C(J; E)$; A est relativement compacte dans $C(J; E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

— L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $k > 0$ tel que :

$$\forall g \in A, \|g\| \leq k.$$

— L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies |g(t_1) - g(t_2)| < \epsilon \quad \forall t_1, t_2 \in J \text{ et } \forall g \in A.$$

— Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{g(x), g \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 1.2 (Alternative de Leray-Schauder) [9]

Soient E un espace de Banach, C un sous ensemble de E fermé et convexe, et $U \subseteq C$ un sous ensemble ouvert avec $\mathbf{0} \in U$. Si $T : \bar{U} \rightarrow C$ est une application continue et $F(\bar{U})$ est relativement compacte, alors soit

1. L'application T a un point fixe dans \bar{U} , ou
2. il existe $u \in \partial \bar{U}$ et $\lambda \in (0; 1)$ avec $u = \lambda T(u)$.

Théorème 1.3 (Théorème du point fixe de Banach) [9]

Soit (X, d) un espace métrique complet non vide avec une application de contraction $T : X \rightarrow X$. Alors T admet un point fixe unique x^* dans X (c'est-à-dire $T(x^*) = x^*$). De plus, x^* peut être trouvé comme suit : commencez par un élément arbitraire $x_0 \in X$ et définissez une séquence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_n = T(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$. Puis $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Chapitre 2

Modèle logistique fractionnaire

2.1 Modèle logistique de croissance d'une population

Le modèle logistique ou de Verhulst de croissance d'une population a été introduit par un mathématicien nommé Verhulst [10]. Ce modèle a été proposé en réponse au modèle de Malthus qui supposait un taux d'accroissement constant d'une population vivant dans un milieu sans capacité limite conduisant à une croissance exponentielle de la population. Le modèle logistique est donné par l'équation :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad (2.1)$$

où r est le taux de croissance et K est la capacité limite, qui représente la valeur maximale que la taille de la population peut atteindre dans le milieu. Par conséquent la taille de la population se stabilise lorsque K est atteinte. Une solution générale du modèle logistique classique défini par l'équation 2.1 est :

$$N(t) = \frac{K}{1 + ((K - N_0)/N_0)e^{-rt}}, \quad (2.2)$$

ou $N_0 = N(0)$ est la taille initiale de la population à $t = 0$.

Puisque nous cherchons à comparer entre l'équation différentielle fractionnaire et l'équation différentielle classique, l'équation différentielle fractionnaire équivalente au problème défini par l'équation (2.1) est construite comme suit :

$${}_c D_{0+}^{\alpha, \psi} N(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad \alpha \in (0, 1), N(0) = N_0. \quad (2.3)$$

Avec une fonction démographique f plus générale on peut considérer le modèle :

$${}_c D_{0+}^{\alpha, \psi} N(t) = f(t, N(t)), \quad \alpha \in (0, 1), N(0) = N_0. \quad (2.4)$$

Le lemme suivant introduit une équation intégrale équivalente à l'équation (2.4).

Lemme 2.1

Supposons que f est une fonction intégrable définie sur $[0, T]$, alors l'équation différentielle

fractionnaire donnée par l'équation (2.4) est équivalente à l'équation intégrale suivante :

$$N(t) = N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} f(x, N(x)) dx. \quad (2.5)$$

Il est important de souligner l'utilisation des intégrales fractionnaires de ψ -Caputo, équation 1.7 dans le lemme 1.1.

preuve 2

\implies L'application de l'opérateur $I_{0+}^{\alpha, \psi}$ aux deux côtés de l'équation (2.4) conduit à : $N(t) - N_0 = I_{0+}^{\alpha, \psi} f(t, N(t))$. On remplace $I_{0+}^{\alpha, \psi} f(t, N(t))$ par sa formule (l'équation (1.4)) et on obtient :

$$N(t) = N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} f(x, N(x)) dx,$$

\Leftarrow Cette implication est évidente, d'après le lemme 1.2 et le fait que ${}_c D_{0+}^{\alpha, \psi}(N_0) = 0$.

2.2 Les résultats principaux du modèle logistique à dérivée de type ψ -Caputo

Dans cette section, l'étude théorique est menée autour de l'équation (2.4) afin de prouver l'existence et l'unicité d'une solution.

Soit $\phi = C([0, T], \|\cdot\|)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R} muni de la norme définie par $\|N\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |N(t)|$.

Un opérateur $F : \phi \rightarrow \phi$ associé au problème défini par l'équation (2.4) peut être défini comme suit

$$F(N)(t) = N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} f(x, N(x)) dx. \quad (2.6)$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour le problème donné par l'équation (2) est discuté dans la suite. Avant d'établir la preuve des principaux résultats, on a besoin des hypothèses mathématiques suivantes :

(A1) $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue .

(A2) Il existe $L > 0$ tel que $|f(t, N_1) - f(t, N_2)| \leq L|N_1 - N_2| \quad \forall t \in [0, T]$.

(A3) Il existe une fonction $g \in C([0, T], \mathbb{R}^+)$ et une fonction croissante $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que $|f(t, u)| \leq g(t)\chi(|u|)$, $\forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}$.

(A4) Il existe une constante $w > 0$ tel que

$$w/(N_0 + \|g\|\chi(w)(1/\Gamma(\alpha + 1)(\psi(T) - \psi(0))^\alpha)) > 1.$$

Le théoreme suivant établit l'existence d'au moins une solution de l'équation (2.4).

Théorème 2.1

Supposons que (A1), (A3) et (A4) sont vérifiées. Alors l'équation (2.4) a au moins une solution dans l'intervalle $[0, T]$.

preuve 3

La preuve sera divisée en plusieurs étapes.

1) Montrons que F est continue. Soit (g_n) une suite dans ϕ qui converge vers $g \in \phi$. Alors on a :

$$\begin{aligned} |F(g_n)(t) - F(g)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} |f(x, g_n(x)) - f(x, g(x))| dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} dx \max_{0 \leq t \leq T} |f(t, g_n(t)) - f(t, g(t))| \quad (2.7) \\ &\leq \frac{(\psi(T) - \psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \max_{0 \leq t \leq T} |f(t, g_n(t)) - f(t, g(t))|. \end{aligned}$$

Comme f est continue, alors le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2) Nous montrons que l'opérateur $F : \phi \rightarrow \phi$ transforme des ensembles bornés en ensembles bornés de ϕ . Soit $\bar{\mathbb{B}}_R = \{N \in \phi : \|N\| \leq R\}$ un ensemble borné dans ϕ ; alors ,

$$\begin{aligned} |(FN)(t)| &\leq N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} |f(x, N(x))| dx \\ &\leq N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} g(x) \chi(|N(x)|) dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'application de la norme $\sup_{0 \leq t \leq T}$ sur les deux côtés de l'équation (2.8) et le fait que les fonctions χ et ψ sont croissantes conduit à

$$\|FN\| \leq N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|g\| \chi(R) (\psi(T) - \psi(0))^\alpha. \quad (2.9)$$

3) L'étape suivante de la preuve est de montrer que l'opérateur $F : \phi \rightarrow \phi$ transforme les ensembles bornés en ensembles équi-continus de ϕ .

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ avec $t_1 < t_2$ et $N \in \bar{\mathbb{B}}_R$. On a :

$$\begin{aligned} |(FN)(t_1) - (FN)(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(x)(\psi(t_1) - \psi(x))^{\alpha-1} f(x, N(x)) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \psi'(x)(\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1} f(x, N(x)) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(x) [(\psi(t_1) - \psi(x))^{\alpha-1} - (\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1}] f(x, N(x)) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \psi'(x)(\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1} f(x, N(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Remarquons que les intégrandes des deux intégrales de la dernière égalité sont positifs. Effectivement, pour la première la fonction $(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1}$ est décroissante par rapport à t , $t \geq x$, car sa dérivée $(\alpha - 1)\psi'(t)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-2}$ est négative vu que $\alpha \in (0, 1)$. Donc, pour $x \leq t_1 < t_2$ on a

$$(\psi(t_1) - \psi(x))^{\alpha-1} - (\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1} \geq 0.$$

Pour $x \leq t_2$ on a $\psi(t_2) \geq \psi(x)$ car ψ est croissante. Donc $(\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1}$ est positif.

De ce qui précède on peut écrire

$$\begin{aligned} |(FN)(t_1) - (FN)(t_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(x)[(\psi(t_1) - \psi(x))^{\alpha-1} - (\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1}]f(x, N(x))dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \psi'(x)[(\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1}]f(x, N(x))dx \right| \\ &\leq \frac{\|g\|\chi(R)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(x)(\psi(t_1) - \psi(x))^{\alpha-1} - (\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1} dx \\ &\quad + \frac{\|g\|\chi(R)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \psi'(x)(\psi(t_2) - \psi(x))^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{\|g\|\chi(R)}{\Gamma(\alpha+1)} (\psi(t_1) - \psi(0))^\alpha + (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha - (\psi(t_2) - \psi(0))^\alpha \\ &\quad + \frac{\|g\|\chi(R)}{\Gamma(\alpha+1)} (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha \end{aligned} \tag{2.11}$$

où le membre de droite de l'équation (2.11) tend vers zéro lorsque $t_1 \rightarrow t_2$ donc $|(FN)(t_1) - (FN)(t_2)| \rightarrow 0$ quand $t_1 \rightarrow t_2$.

Notez que le membre de droite de l'équation (2.11) est indépendant de $N \in \bar{\mathbb{B}}_R$; par conséquent, par le théorème d'Arzela-Ascoli, nous concluons que $F(\bar{\mathbb{B}}_R)$ est relativement compact.

4) Soit

$$\mathbb{B}_w = \{N \in \phi : \|N\| < w\}$$

où w est le nombre réel vérifiant (A4). L'application $F : \bar{\mathbb{B}}_w \rightarrow \bar{\mathbb{B}}_w$ est bien définie d'après (A4) et (2.9). La dernière étape pour compléter les hypothèses du théorème alternatif non linéaire de Leray-schauder est de montrer que l'équation $N = \lambda FN$ n'a pas de solutions dans $\bar{\mathbb{B}}_w$ pour $\lambda \in (0; 1)$. Pour cela, supposons que $N \in \partial\mathbb{B}_w$ est une solution de l'équation $N = \lambda FN$; alors, d'après (A4) et (2.9) on a :

$$\begin{aligned} w = \|N\| &= \lambda \|F(N)\| \\ &\leq N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|g\|\chi(\lambda)(\psi(T) - \psi(0))^\alpha < w \end{aligned} \tag{2.12}$$

qui contredit (A4).

Théorème 2.2

Supposons que (A1) et (A2) sont vérifiées. Alors le problème défini par l'équation (2.4) a une solution unique sur $[0, T]$.

preuve 4

Soit $F : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ l'opérateur défini dans l'équation (2.6) et soit la norme

$$\|v\| = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-\lambda\psi(t)} |v(t)|, \text{ avec } \lambda > 0.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda\psi(t)}(FN_1)(t) - (FN_2)(t)| &= \frac{e^{-\lambda\psi(t)}}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} (f(x, N_1(x)) - f(x, N_2(x))) dx \right| \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \|N_1 - N_2\| \int_0^t e^{-\lambda(\psi(t) - \psi(x))} \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En posant $v = \psi(t) - \psi(x)$, la dernière expression devient

$$\begin{aligned} &\frac{L}{\Gamma(\alpha)} \|N_1 - N_2\| \int_0^{\psi(t) - \psi(0)} e^{-\lambda v} v^{\alpha-1} dv, \\ &< \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \|N_1 - N_2\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda v} v^{\alpha-1} dv := J \end{aligned} \quad (2.14)$$

Par le changement de variables $w = \lambda v$, on obtient

$$\begin{aligned} J &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha} \|N_1 - N_2\| \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{L}{\lambda^\alpha} \|N_1 - N_2\|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Enfin on a montrer que

$$\|F(N_1) - F(N_2)\| \leq \frac{L}{\lambda^\alpha} \|N_1 - N_2\|.$$

Si on choisit λ telle que $\frac{L}{\lambda^\alpha} < 1$, on obtient une contraction.

Alors d'après le théorème de contraction de Banach, l'équation différentielle fractionnaire (2.4), a une solution unique.

2.3 Croissance de population avec une grande capacité limite K

En considérant la modélisation de la croissance de la population humaine, nous observerons qu'il existe des pays qui essaient de contrôler la croissance de leur population. Ceci conduit à un faible taux de croissance et, par conséquent, pour une population à grande capacité limite ($K \rightarrow \infty$), la taille de la population est de loin inférieure à la capacité limite. Mathématiquement, elle est noté comme :

$$N(t) \ll K \quad (2.16)$$

c'est à dire :

$$\frac{N(t)}{K} \rightarrow 0 \quad K \rightarrow +\infty \quad (2.17)$$

Dans les conditions définies par les équations (2.16) et (2.17), l'équation logistique (2.1) devient un modèle exponentiel

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (2.18)$$

La solution générale du modèle exponentiel (2.18) est donnée par

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (2.19)$$

Cette solution montre que la taille de la population augmentera à l'infini à mesure que le temps approchera de l'infini. Un tel résultat signifie que la population augmentera à l'infini. Cela ne coïncide pas avec ce qu'on sait pratiquement des populations. La fonction exponentielle n'est pas une bonne approximation de la réalité à partir d'un certain temps (voir figure 2.1). Dans ce qui suit, une approche alternative est proposée pour la modélisation d'une population de grande taille avec une capacité limite $K \rightarrow +\infty$. D'après la définition 1.5 de la dérivée le ψ -Caputo, le modèle défini par l'équation (2.18) peut être écrit au sens fractionnaire comme suite :

$$\begin{cases} {}_c D_{0+}^{\alpha, \psi} N(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

on a,

$$N(t) = N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} rN(s) ds.$$

on définit la suite de fonction (u_n) par

$$\begin{aligned} U_0 &= N_0 \\ U_n(t) &= N_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} rU_{n-1}(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1(t) &= N_0 + \frac{rN_0}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\psi(t) - \psi(s))^\alpha}{\alpha} = N_0 + \frac{rN_0(\psi(t) - \psi(s))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ U_2(t) &= N_0 + \frac{rN_0(\psi(t) - \psi(s))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{r^2 N_0}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} \psi'(s) (\psi(s) - \psi(0))^\alpha ds \\ &= N_0 + \frac{rN_0(\psi(t) - \psi(s))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{r^2 N_0}{\Gamma(2\alpha+1)} (\psi(t) - \psi(0))^{2\alpha} \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$U_n = N_0 \sum_{k=0}^n \frac{r^k (\psi(t) - \psi(0))^{k \cdot \alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

Alors

$$\begin{aligned} U(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(t) = N_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k (\psi(t) - \psi(0))^{k \cdot \alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= N_0 E_\alpha(r(\psi(t) - \psi(0))^\alpha) \end{aligned}$$

Donc on trouve la solution du modèle défini par l'équation (2.20) comme suit :

$$N(t) = N_0 E_\alpha[r(\psi(t) - \psi(0))^\alpha], \quad (2.21)$$

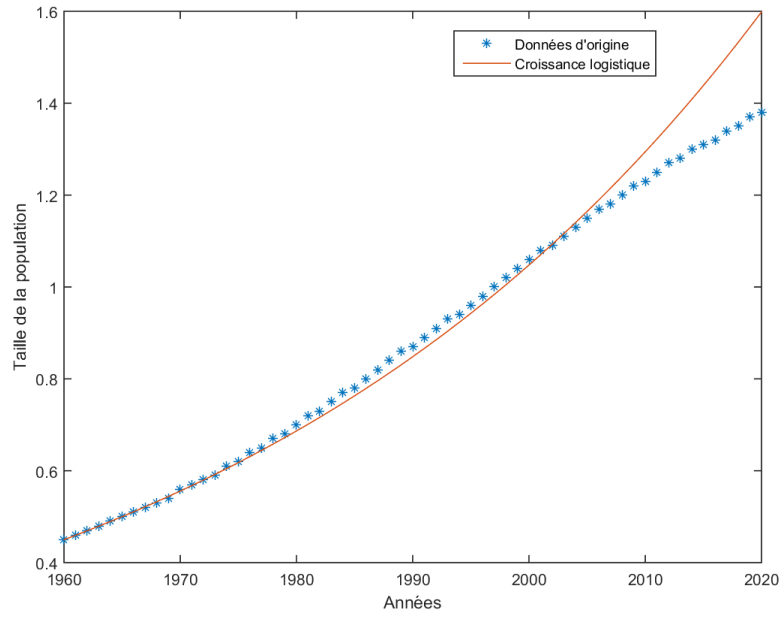


FIGURE 2.1 – Croissance exponentiel pour la population Indienne

où $E_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i / \Gamma(\alpha i + 1)$, $t \in \mathbb{R}$ est une fonction de Mittag-Leffler.

Chapitre 3

Résultats de simulation

Dans ce chapitre, l'étude numérique est faite sur la population Indienne pour comparer la méthode proposée dans le chapitre 3 avec le modèle logistique à grande capacité limite. Les données historiques de la population Indienne ont été ré-extrait du site Web de la Banque mondiale [13]. Un programme de minimisation sur Matlab a été utilisé pour déterminer les paramètres qui correspondraient le mieux à l'équation du modèle exponentiel (2.18), et l'équation du modèle fractionnaire psi-Caputo (2.21). Rappelons que r est le taux de croissance d'une population donnée en unité de période (dans ce cas par année), α est l'ordre fractionnaire de la dérivée impliquée dans la conception du modèle et ER de la définition (1.6) est l'erreur entre les valeurs réels et celles du modèle. Par un programme sur Matlab (voir annexe), les résultats suivants ont été obtenus :

La figure 2.1 représente les données réels et l'approximation de ces données avec une exponentielle classique. La meilleure valeur du taux de croissance est de $r = 0.0211$ avec un taux d'erreur $ER = 6.65\%$. Ceci signifie que sur la période de 1960 à 2020, le modèle exponentiel a révélé que le taux de croissance global de la population Indienne était presque 2%. Notons que, pour une grande capacité limite, le modèle de croissance logistique et le modèle de croissance exponentielle coïncident.

La figure 3.1 représente le résultat obtenu en approximent les données réels par le modèle ψ -Caputo avec la fonction noyau $\ln(x + 1)$. Les meilleurs paramètres du modèle estimés sont le taux de croissance $r = 0.0191$, et l'ordre fractionnaire de la dérivée $\alpha=0.4011$. L'estimation des données réelles à l'aide de ces paramètres produit une erreur $ER = 1.51 \%$.

La figure 3.2 montre les données réelles aux côtés des données approximées à l'aide du modèle ψ -Caputo avec $\sqrt{X + 1}$ comme fonction du noyau. Les meilleurs paramètres pour ce modèle sont le taux de croissance $r=0.0200$ et l'ordre fractionnaire de la dérivée $\alpha=0.3121$. L'utilisation de ces paramètres a produit une erreur totale de $ER = 1.18\%$.

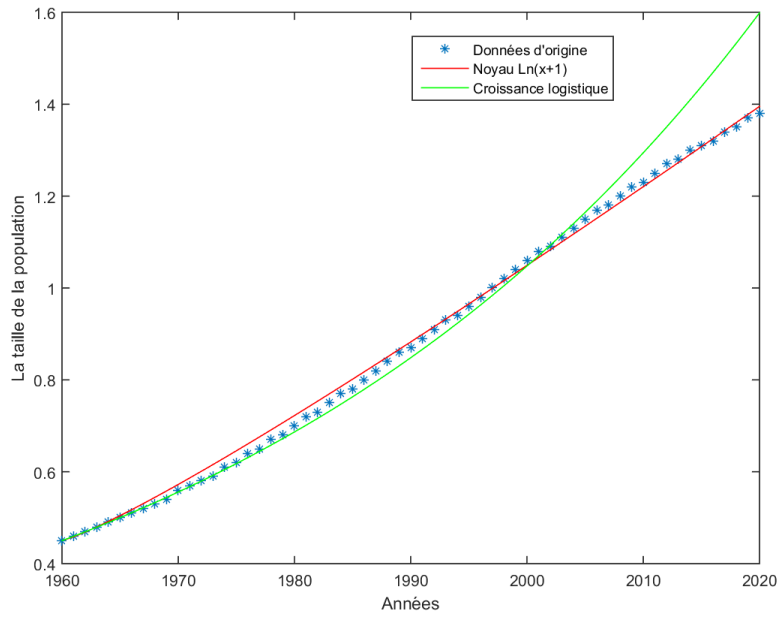


FIGURE 3.1 – ψ -Caputo avec le noyau logarithme

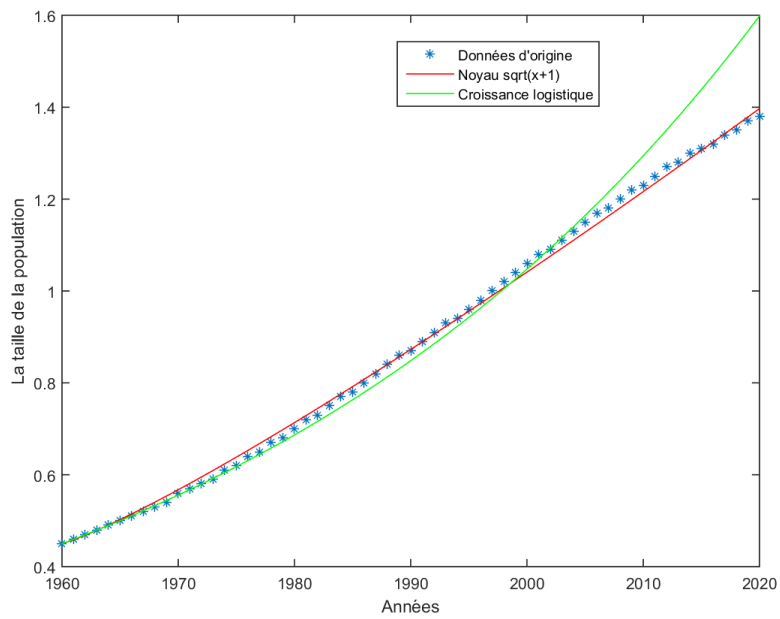


FIGURE 3.2 – ψ -Caputo avec le noyau racine carrée

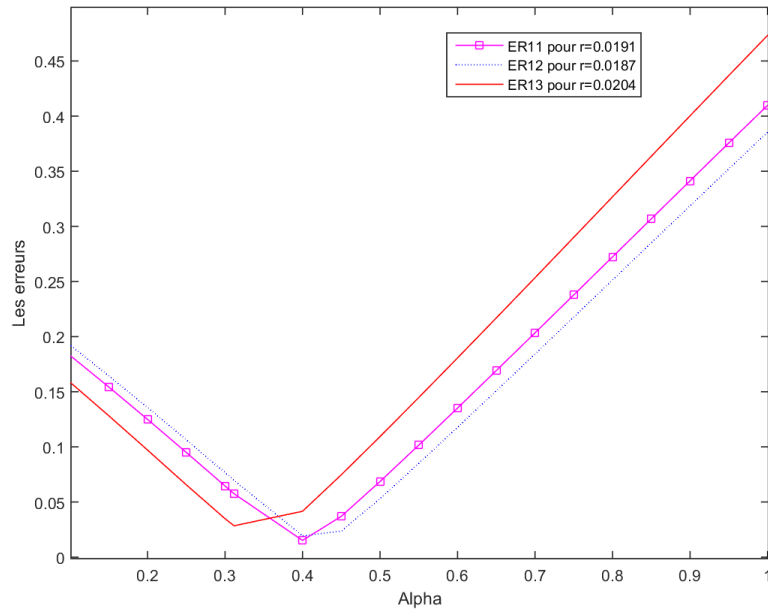


FIGURE 3.3 – Les erreurs d’approximations avec ψ -Caputo pour le noyau logarithme

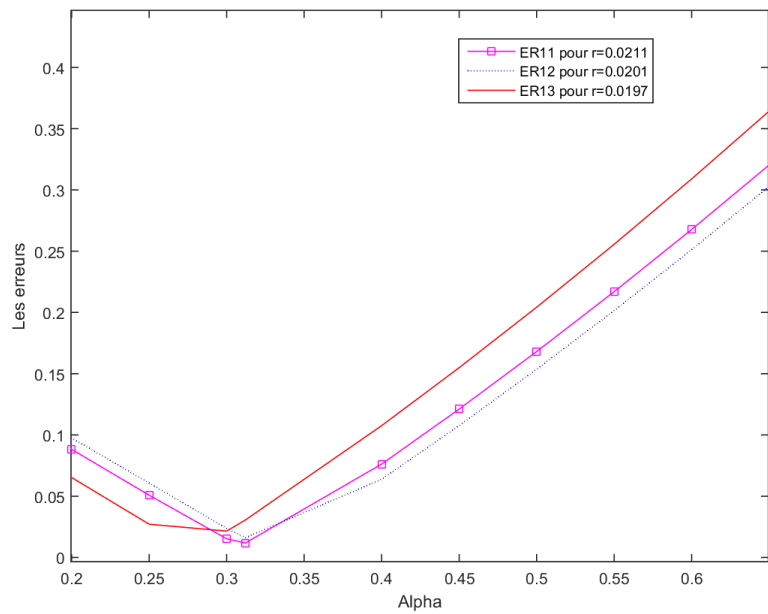


FIGURE 3.4 – Les erreurs d’approximations avec ψ -Caputo pour le noyau racine carrée

La figure 3.3 a été dessinée par le programme qui est dans l'annexe et elle représente les trois graphes des erreurs ER11, ER12 et ER13 en fonction de l'ordre fractionnaire de la dérivée correspondante à $r = 0.0191$, $r = 0.0187$ et $r = 0.0204$ respectivement, obtenu en utilisant la fonction noyau $\ln(x+1)$. D'après cette figure on remarque que la meilleur erreur correspond au graphe ER11 pour $r = 0.0191$ et $\alpha = 0.4011$ avec une valeur minimal de ER11 égal à 1.51%. Donc le meilleur modèle estimé à les paramètres suivants : taux de croissance $r = 0.0191$ et d'ordre fractionnaire de la dérivée $\alpha = 0.4011$.

La figure 3.4 a été tracée par le programme qui est dans l'annexe et représente les trois graphes des erreurs ER11, ER12 et ER13 en fonction de l'ordre fractionnaire de la dérivée correspondant à $r = 0.0211$, $r = 0.0201$ et $r = 0.0197$ respectivement, obtenu en utilisant la fonction noyau $\sqrt{x+1}$. D'après cette figure on remarque que la meilleur estimation de l'erreur à valeur égale à 1.18% correspond au graphe ER11 pour $r = 0.0211$ et $\alpha = 0.3121$. Donc le meilleur modèle à les paramètres suivants : le taux de croissance $r = 0.0211$ et avec un ordre fractionnaire de la dérivée $\alpha = 0.3121$.

Résumé

On étudie l'existence et l'unicité des solutions d'un modèle logistique de croissance d'une population à dérivée fractionnaire de type Psi-Caputo. Cette dérivée fractionnaire dépend d'une fonction noyau et d'un paramètre réel qui nous permettent de choisir le modèle le plus proche de la réalité en minimisant un taux d'erreur. Comme exemple, on a pris la population Indienne avec une grande capacité du milieu pour prouver que l'approche proposée est appropriée et modélise mieux la réalité que l'équation logistique classique. Pour la fonction noyau $\sqrt{x+1}$ et un ordre de dérivée fractionnaire $\alpha = 0.3121$ on a obtenu le meilleur modèle avec un taux d'erreur de 1.18%.

Abstract

We study the existence and uniqueness of solutions of a logistic model of the growth of a population with fractional derivative of Psi-Caputo type. This fractional derivative depends on a kernel function and a real parameter which allow us to choose the closest model to reality by minimizing an error rate. As an example, we took the Indian population with a great capacity of the environment to prove that the proposed approach is appropriate and models reality better than the classical logistic equation. For the kernel function $\sqrt{x+1}$ and an order fractional derivative $\alpha = 0.3121$ we obtained the best model with the error rate 1.18%.

ملخص

ندرس وجود وتفرد حلول نموذج لوجستي للنمو السكاني مع مشتق كسري من نوع Psi-Caputo. يعتمد هذا المشتق الكسري على دالة نواة ومعامل حقيقي يسمح لنا باختيار النموذج الأقرب إلى الواقع عن طريق تقليل معدل الخطأ. على سبيل المثال، أخذنا السكان الهنود لإثبات أن النهج المقترح مناسب لنمذجة الواقع بشكل أفضل من المعادلة اللوجستية الكلاسيكية. بالنسبة لدالة نواة $\sqrt{x+1}$ ومعامل مشتق كسري $\alpha = 0.3121$ ، حصلنا على أفضل نموذج بمعدل خطأ 1.18%.

Annexe

```
function y=logarithme(x)
y=log(x+1);
end
```

Programme

```
t=[1961,1962,1963,1964,1965,1966,1967,1968,1969,1970,1971,1972,1973,1974,1975,
,1976,1977,1978,1979,1980,1981,1982,1983,1984,1985,1986,1987,1988,1989,1990,
,1991,1992,1993,1994,1995,1996,1997,1998,1999,2000,2001,2002,2003,2004,2005,
,2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014,2015,2016,2017,2018,2019,2020];
y=[0.46,0.47,0.48,0.49,0.5,0.51,0.52,0.53,0.54,0.56,0.57,0.58,0.59,0.61,0.62,0.64,
,0.65,0.67,0.68,0.7,0.72,0.73,0.75,0.77,0.78,0.8,0.82,0.84,0.86,0.87,0.89,0.91,0.93,
,0.94,0.96,0.98,1,1.02,1.04,1.06,1.08,1.09,1.11,1.13,1.15,1.17,1.18,1.2,1.22,1.23,
,1.25,1.27,1.28,1.3,1.31,1.32,1.34,1.35,1.37,1.38];
a=[];
s=0;
N1=[];
for i=0 :59
    i=i+1;
    a(i)=(log(y(i)/0.45))/(t(i)-1960);
    s=s+a(i);
end
r=s/60
N1=0.45*exp(r*(t-1960));
q1=0;
q2=0;
for l=1 :60
    q1=q1+(y(l)-N1(l)).^2;
    q2=q2+y(l).^2;
    l=l+1;
end
ER=sqrt(q1)/sqrt(q2+0.2025)
```

```

%plot([1960,t],[0.45,y],'*',[1960,t],[0.45,0.45*exp(r*(t-1960))],'-')
alpha=[0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.3116,0.4,0.45,0.5,0.55,0.6,0.65,0.7,0.75,0.8,0.85,0.9,
0.95,1];
ER21=[];ER22=[];ER23=[]
for b=56 :56
    b=b+1
    ER11=[];ER12=[];ER13=[];
    for k=1 :19
        N2=[];N3=[];N4=[];
        s11=0;s12=0;
        s21=0;s22=0;
        s31=0;s32=0;
        p1=0;p2=0;p3=0;
        for j=1 :60
            for i=1 :99
                p1=p1+((a(b)^i*(logarithme(t(j)-1960)).^(i*alpha(k)))/(gamma(alpha(k)*i+1)));
                p2=p2+((a(b+3)^i*(logarithme(t(j)-1960)).^(i*alpha(k)))/(gamma(alpha(k)*i+1)));
                p3=p3+((a(b-8)^i*(logarithme(t(j)-1960)).^(i*alpha(k)))/(gamma(alpha(k)*i+1)));
                i=i+1;
            end
            N2=0.45*(p1+1);
            N3=0.45*(p2+1);
            N4=0.45*(p3+1);
            s11=s11+(y(j)-N2).^2;
            s12=s12+y(j).^2;
            s21=s21+(y(j)-N3).^2;
            s22=s22+y(j).^2;
            s31=s31+(y(j)-N4).^2;
            s32=s32+y(j).^2;
            j=j+1;
        end
        ER11(k)=sqrt(s11)/sqrt(s12+0.2025);
        ER12(k)=sqrt(s21)/sqrt(s22+0.2025);
        ER13(k)=sqrt(s31)/sqrt(s32+0.2025);
        k=k+1
    end
    plot(alpha,ER11,'s-m',alpha,ER12,':b',alpha,ER13,'-r')
    ER21(b)=min(ER11);
    ER22(b)=min(ER12);
    ER23(b)=min(ER13);
end
ER31=min(ER21(ER21 > 0))

```

ER32=min(ER22(ER22 > 0))

ER33=min(ER23(ER23 > 0))

Affichage

r=

0.0211

ER=

0.0665

ER31=

0.0152

ER32

0.0194

ER33

0.0284

Bibliographie

- [1] Awadalla, Muath, Yves Yannick Yameni Noupoue, and Kinda Abu Asbeh. "Psi-Caputo logistique population growth model." *Journal of Mathematics 2021* (2021).
- [2] N. I. Mahmudov, M. Awadalla, and K. Abuassba, "Nonlinear sequential fractional differential equations with nonlocal boundary conditions," *Advances in Difference Equations*, vol. 2017, no. 1, p. 319, 2017.
- [3] C. Li and S. Sarwar, "Existence and continuation of solution for Caputo type fractional differential equations," *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2016, pp. 1–14, 2016.
- [4] M. A. Dokuyucu, "Analysis of a novel finance chaotic model via ABC fractional derivative," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Article ID 22598, 2020.
- [5] K. O. C. A. Ilknur, E. Akçetin, and P. Yaprakdal, "Numerical approximation for the spread of SIQR model with caputo fractional order derivative," *Turkish Journal of Science*, vol. 5, no. 2, pp. 124–139, 2020.
- [6] H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, and Y. Chen, "A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 64, pp. 213–231, 2018.
- [7] I. Area and H. Losada, J. Fi et al., "On a fractional order Ebola epidemic model," *Advances in Difference Equations*, vol. 2015, no. 1, p. 278, 2015.
- [8] R. Almeida, "A caputo fractional derivative of a function with respect to another function," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 44, pp. 460–481, 2017.
- [9] R. Almeida, "Functional differential equations involving the ψ -caputo fractional derivative," *Fractal and Fractional*, vol. 4, no. 2, p. 29, 2020.
- [10] Bacaer, N. (2011). *A short history of mathematical population dynamics* (Vol. 618). London :springer.
- [11] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, p. 44, Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, 1993.
- [12] Teodoro, G. Sales, Machado, JA Tenreiro, et De Oliveira, E. Capelas. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 2019, vol. 388, p. 195-208.e
- [13] Population, total. (n.d.). Retrieved from <https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL?locations=CN>.