

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Spécialité : Biomathématiques et Modélisation

Mémoire de Master

présenté par

BEKHTAOUI Ghizlène

Soutenu le : 16 / 09 / 2021

**Analyse de la stabilité globale pour un modèle d'épidémie SIR
avec retard - Distribué ou discrète**

Soutenu devant le jury composé de :

M. Ahmed Attar	MCA, Université de Tlemcen	Président
M. Soufiane Bentout	MCA, Université de Ain Témouchent	Examineur
M. Salih Djilali	MCB, Université de Chlef	Encadreur

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicace

*Je dédie un merci particulier à :
Mes parents, et mon mari pour leurs
orientations, leurs encouragements,
leurs conseils, leurs soutiens et leurs
amours.
A tous ceux qui croient aux vertus du
sacrifice, de l'effort et du travail.*

*"Les bienfaits que nous avons reçus
de nos parents sont les plus grands
de tous."
Socrate; Le monde grec - Ve s. av.
J.-C.*

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce aux plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Mes remerciements vont d'abord au bon Dieu qui m'a doté d'intelligence et de volonté et m'a maintenu en santé pour mener à bien toutes les années d'études.

J'offre de sincères et chaleureux remerciements à M. Salih Djilali pour son encadrement, sa disponibilité, son orientation, ses conseils, sa patience et son savoir pour la réalisation de ce mémoire.

Un grand merci à tous les professeurs d'avoir partagé avec nous leurs passions pour l'enseignement, leurs soutiens et leurs expériences tout au long des années d'études.

Je tiens aussi à adresser mes remerciements à ma famille plus précisément mes parents et toutes les personnes chères à mon cœur qui m'ont toujours soutenue, encouragée et poussée à continuer mes études.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un système SIR avec retard. Tout d'abord, on étudie la stabilité globale d'équilibre endémique dans le cas des systèmes avec retard discrète et analyser l'effet du retard sur cette stabilité, puis on s'intéresse après au système SIR avec retard distribué. On étudie la stabilité d'équilibre endémique et nous déduisons l'effet du retard sur cette stabilité.

Abstract

The objective of this memory is to study a SIR model with delay. Based in our work, the global stability of the endemic equilibrium have been proved and we show the effect of the delay on stability. Further, we propose a SIR model with distributed delay and we prove the stability of the endemic equilibrium. We study the endemic equilibrium stability and we deduce the effect of the delay on this stability.

Table des matières

Introduction générale	4
Introduction	5
1 Préliminaire	6
1.1 Stabilité	6
1.1.1 Stabilité globale	7
1.1.2 Fonction de Lyapunov	7
1.1.3 Principe de Lasalle	7
1.2 Équations à retard	8
1.2.1 Théorème de bifurcation de Hopf	8
1.2.2 Équation logistique	8
1.2.3 Équation logistique avec retard constant	8
1.3 Modèle SIR classique	10
1.3.1 Stabilité locale d'équilibre endémique	10
1.3.2 Stabilité globale d'équilibre endémique	11
2 Stabilité globale de modèle SIR avec retard discrète	13
2.1 Introduction	13
2.2 Permanence et la bornitude de la solution	14
2.3 Stabilité locale de l'équilibre endémique	17
2.4 Stabilité globale de l'équilibre endémique	19
2.5 Conclusion	21
3 Stabilité globale de modèle SIR avec retard distribué	22
3.1 Introduction	22
3.2 Permanence et la bornitude de la solution	22
3.3 Stabilité locale de l'équilibre endémique	26
3.4 Stabilité globale de l'équilibre endémique	28
3.5 Conclusion	30
Bibliography	30

Introduction

Les modèles mathématiques se sont peu à peu affirmés comme outils d'aide à la décision pour les politiques publiques, car permettant de prévoir les conséquences sanitaires d'actions aussi variées que la vaccination, la mise en quarantaine ou la distribution de tests de dépistage.

Une approche fondatrice fut celle des modèles compartimentaux créés en 1927 par McKendrick et Kermack; elle fut ensuite étendue par ces derniers dans deux autres articles scientifiques quelques années plus tard (1932 et 1933). Le principe est de diviser la population en classes épidémiologiques telles que les individus susceptibles d'être infectés, ceux qui sont infectieux, et ceux qui ont acquis une immunité à la suite de la guérison. Depuis, cette approche est utilisée pour modéliser de nombreuses maladies, et continue d'être un sujet de recherche actif en prenant en compte de nouveaux éléments tels que les découvertes de la science des réseaux.

Le but de ce mémoire est de montrer la méthode de construction de la fonction Lyapunov dans le cas des systèmes avec retard. Il existe deux types de retard temporel, retard discrète et retard distribué. Le mémoire est divisée en trois chapitres principales :

Chapitre 1 : Résultats préliminaires qui contient tous les outils mathématiques utilisées à travers le mémoire.

Chapitre 2 : Un exemple de retard discrète, où nous considérons un exemple simple comme modèle SIR, où la stabilité globale de l'équilibre endémique est l'objective principale de ce chapitre.

Chapitre 3 : Un exemple de retard distribué, où nous considérons un exemple simple comme modèle SIR, nous montrerons également la stabilité globale de l'équilibre positif qui est l'objective principale de ce chapitre.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans notre travail. Nous rappelons les équations à retard, les équations logistiques et la fonction de Lyapunov, le théorème de bifurcation de Hopf et le principe de la salle. Nous donnons aussi quelques notions et définitions sur la stabilité.

Définition 1.0.1 (Taux d'incidence) ([4])

L'incidence dans le domaine épidémiologiques, rapportant le nombre de cas nouveaux d'une maladie observés durant une période précise, à la population à laquelle appartiennent les cas, ce taux est très efficace pour évaluer la vitesse à laquelle une maladie se propage.

Définition 1.0.2 (Taux de reproduction de base) ([4])

Nombre de reproduction de base R_0 , est le nombre moyen de personnes qu'une personne contagieuse peut infecter. Ce taux s'applique, et se calcule à partir d'une population qui est entièrement susceptible d'être infectée, c'est-à-dire qui n'a pas encore été vaccinée ni immunisée contre un agent infectieux. Ce nombre représente la vitesse de propagation de la maladie dans la population étudiée.

Définition 1.0.3 (Domaine positivement invariant) ([6])

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Un domaine D du plan est dit positivement invariant si : $\forall (x_0, y_0) \in D$, $(x(t), y(t))$ reste dans le domaine D pour $\forall t \geq 0$, telle que $(x(t), y(t))$ solution du système (1.1) avec condition initiale (x_0, y_0) .

Définition 1.0.4 (Domaine attractant) ([6])

Un domaine attractant signifie que toute trajectoire arrive à la frontière du domaine entre dans l'intérieure du domaine, et le domaine attractant est une région qui est compacte.

1.1 Stabilité

Considérons un système continu autonome d'écrit par une équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$x' = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

x^* est appelé point d'équilibre pour le système (1.2) s'il est vérifié l'équation : $f(x^*) = 0$.
Le point d'équilibre est stable si : $\forall \epsilon > 0, \exists \mu > 0$ tel que :

$$\|x(0) - x^*\| < \mu \implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Sinon il est instable.

Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable s'il existe $r > 0$ telle que pour toute solution $x(t)$ de (1.2) on a :

$$\|x(0) - x^*\| < r \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

1.1.1 Stabilité globale

L'équilibre x^* est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable pour n'importe quelle condition initiale dans $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Fonction de Lyapunov

Soit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ contenant l'équilibre x^* , on dit que v est définie positive (respectivement définie négative) si seulement si :

- (i) $v(x^*) = 0$,
- (ii) $v(x) > 0$ (respectivement $v(x) < 0$) $\forall x \in \Omega \setminus x^*$.

Elle est dit semi-définie positive (respectivement semi définie négative) si seulement si :

- (i) $v(x^*) = 0$,
- (ii) $v(x) \geq 0$ (respectivement $v(x) \leq 0$) $\forall x \in \Omega$.

Stabilité au sens Lyapunov

(voir[16])

Soit $x(t)$ solution de :

$$x' = f(x). \tag{1.3}$$

Et v une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ définie positive sur Ω au voisinage de $x^* = 0$.

- (i) Si v' est semi- définie négative alors x^* est stable pour le système (1.3).
- (ii) Si v' est définie négative alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.3).

Dans le cas (i) v est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (ii) v est dite fonction de Lyapunov stricte.

1.1.3 Principe de Lasalle

Théorème 1.1.1 (voir[16]) : S'il existe une fonction $v : U \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un voisinage U de x_0 telle que :

- (a) $v(x_0) = 0$ et $v(x) > 0$ si $x \neq x_0$.
- (b) $\Delta v = v(f(x)) - v(x) \leq 0, \forall x \in U$. Alors x_0 est un point d'équilibre stable.

Si de plus la fonction v est telle que :

$\Delta v(x) < 0, \forall x \in U - \{x_0\}$. Alors x_0 est asymptotiquement stable.

1.2 Équations à retard

On appelle équation différentielle à retard une équation de la forme :
 $x(t) = f(t, x(t), x(t-h)), t > t_0$, où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1.2.1 Théorème de bifurcation de Hopf

(voir[6])

Soit le système dynamique suivant gouvernant les variables réelles $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x' = f(x, y, c), \\ y' = g(x, y, c). c \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre de coordonnées $(x^*(c), y^*(c))$. Soit $A(x^*(c), y^*(c))$ la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre.

Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme : $\lambda_{1,2} = a(c) \pm ib(c)$ avec $a(c)$ la partie réelle et $b(c)$ la partie imaginaire. Soit c^* une valeur particulière du paramètre c pour laquelle on a $a(c^*) = 0$ et $b(c^*) \neq 0$ et $\frac{da}{dc}(c^*) \neq 0$, si les hypothèses précédente sont vérifiées alors le système (1.4) admet une bifurcation d'Hopf en $c = c^*$.

1.2.2 Équation logistique

L'équation logistique est de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}).$$

Avec r le taux de croissance de la population et la constante k la capacité limite de l'espace, c'est à dire la taille maximum de la population atteignable en fonction des facteurs limitants, la population à l'équilibre. Le terme de droite forme un polynôme du second degré, qui est ici factorisé. Ce polynôme possède deux racines $x = 0$ et $x = k$, qui forment les points d'équilibres de l'équation de la logistique. La racine $x = 0$ est triviale, la racine $x = k$ nous indique que k représente l'effectif de population pour lequel la dynamique de la population est stable, avec la condition initiale : $x(0) = x_0$, on trouve que la solution de cette équation est :

$$x(t) = \frac{k}{1 + (\frac{k}{x_0} - 1)e^{-rt}}.$$

Où l'on observe que la population tend vers la capacité limite k , qu'elle est croissante si la population initiale est inférieure à la population limite et décroissante si non.

1.2.3 Équation logistique avec retard constant

L'équation logistique avec retard est de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}).$$

Avec τ constant représentant le retard.

Telle que les équilibres sont : $x = 0$ et $x = k$, l'équation caractéristique est :

$$\lambda + \frac{r}{k} e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (1.5)$$

i) On pose $\tau = 0$, alors l'équation caractéristique (1.5) devient :

$$\lambda + \frac{r}{k} = 0,$$

on trouve $\lambda = -\frac{r}{k} < 0$, alors pour $\tau = 0$ l'équilibre $x = k$ est stable.

ii) On suppose que $\tau \neq 0$. On cherche les solutions de la forme $\lambda = iy$ avec $y > 0$, on remplace λ par iy dans l'équation caractéristique on trouve :

$$iy + \frac{r}{k} e^{-iy\tau} = 0,$$

et puisque : $e^{-iy\tau} = \cos y\tau - i \sin y\tau$. On peut séparer la partie réelle de la partie imaginaire. Alors on obtient :

$$\begin{cases} \frac{r}{k} \cos y\tau = 0, \\ y - \frac{r}{k} \sin y\tau = 0. \end{cases}$$

On met les deux équations au carré puis on somme alors on trouve : $y = \frac{r}{k} = y^*$.

On a déjà : $\cos \frac{r}{k} \tau^* = 0$ ce qui donne $\tau^* = \frac{k}{r} n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Maintenant on applique la condition de transversalité c'est à dire on calcule $\frac{d\lambda}{d\tau}$ au point $\tau = \tau^*$ dans l'équation caractéristique (1.5), on trouve l'équation :

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda \frac{r}{k} e^{-\lambda\tau}}{1 - \frac{r}{k} \tau e^{-\lambda\tau}},$$

alors

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*} = \frac{y^* \frac{r}{k} \sin y^* \tau^*}{1 + \frac{r}{k} \tau^* i \sin y^* \tau^*},$$

Remarque 1.2.1

$$\text{sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau^*} \right) \right] = \text{sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau^*} \right) \right]^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau^*} \right) \right]^{-1} &= \frac{1}{y^* \frac{r}{k} \sin y^* \tau^*} \\ &= \left(\frac{k}{r} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Alors $\frac{d\lambda}{d\tau} \neq 0$ donc il existe une bifurcation de Hopf.

1.3 Modèle SIR classique

On considère le système SIR suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) - \mu_1 S(t) + b, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \mu_2 I(t) - \lambda I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I(t) - \mu_3 R(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

Où $(S(t) + I(t) + R(t) = N(t))$ est la population totale $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ représente le nombre des susceptibles, des infectés et le nombre d'individus qui sont encore en vie en temps t , respectivement, μ_1, μ_2, μ_3 sont les taux de mortalité des susceptibles, des infectés, et réfractaires respectivement.

Le système (1.6) a un équilibre sans maladie $E_0 = (S_0, 0, 0)$ où $S_0 = \frac{b}{\mu_1}$ et un équilibre endémique : $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ où $S^* = \frac{\mu_2 + \lambda}{\beta}$, $I^* = \frac{b - \mu_1 S^*}{\beta S^*}$ et $R^* = \frac{\lambda(b - \mu_1 S^*)}{\mu_3 \beta S^*}$, qui existe si et seulement si $R_0 := \frac{b\beta}{\mu_1(\lambda + \mu_2)} > 1$. Puisque les deux premières équations sont indépendantes alors on peut étudier le système réduit de (1.6).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) - \mu_1 S(t) + b, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu_2 + \lambda)I(t). \end{cases}$$

1.3.1 Stabilité locale d'équilibre endémique

Théorème 1.3.1 Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.

Preuve

Le système linéarisé en E_+ est :

$$\begin{cases} \tilde{S}'(t) = (-\beta I^* - \mu_1)\tilde{S} - \beta S^* \tilde{I}(t), \\ \tilde{I}'(t) = \beta I^* \tilde{S}(t) + (\beta S^* - (\mu_2 + \lambda))\tilde{I}(t). \end{cases}$$

On définit la matrice Jacobienne de model SIR sans retard de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu_1 & -\beta S^* \\ \beta I^* & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$(\delta + \beta I^* + \mu_1)(\delta - \beta S^* + \mu_2 + \lambda) + \beta^2 S^* I^* = 0,$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\delta^2 + \delta(\mu_2 + \lambda + \beta I^* + \mu_1) + (\beta I^* + \mu_1)(\mu_2 + \lambda) - \delta\beta S^* - (\beta I^* + \mu_1)\beta S^* + \beta^2 S^* I^* = 0.$$

En utilisant $\mu_2 + \lambda = \beta S^*$ on trouve :

$$\delta^2 + \delta(\beta S^* + \beta I^* + \mu_1 - \beta S^*) + (\beta I^* + \mu_1)\beta S^* - (\beta I^* + \mu_1)\beta S^* + \beta^2 S^* I^* = 0.$$

Après les simplifications on trouve :

$$\delta^2 + \delta(\beta I^* + \mu_1) + \beta^2 S^* I^* = 0,$$

elle est de la forme :

$$\delta^2 - \delta \operatorname{tr}(J) + \det(J) = 0,$$

avec $\operatorname{tr}(J) = -(\beta I^* + \mu_1) < 0$ et $\det(J) = \beta^2 S^* I^* > 0$, alors l'équilibre endémique est localement stable.

1.3.2 Stabilité globale d'équilibre endémique

Théorème 1.3.2 *Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve

On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = S^* g\left(\frac{S}{S^*}\right) + I^* g\left(\frac{I}{I^*}\right),$$

Avec

$$g(y) = y - 1 - \ln y.$$

Remarquons que :

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{y}.$$

Alors

$$V'(t) = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right)(b - \beta SI - \mu_1 S) + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right)(\beta SI - (\mu_2 + \lambda)I),$$

puisque : $b = \beta S^* I^* + \mu_1 S^*$, alors

$$\begin{aligned} V'(t) &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right)(\beta S^* I^* + \mu_1 S^* - \beta SI - \mu_1 S) + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right)(\beta SI - (\mu_2 + \lambda)I), \\ &= -\mu_1(S - S^*)^2 + \beta S^* I^* - \beta SI - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S} + \beta S^* I + \beta SI - (\mu_2 + \lambda)I - \beta SI^* + (\mu_2 + \lambda)I^*, \\ &= -\mu_1(S - S^*)^2 + \beta S^* I^* - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S} + \beta S^* I - \beta S^* I - \beta SI^* + \beta S^* I^*, \\ &= -\mu_1(S - S^*)^2 + 2\beta S^* I^* - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S} - \beta SI^*, \\ &= -\mu_1(S - S^*)^2 + \beta S^* I^* \left(2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*}\right). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1

$$\begin{aligned} 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} &= 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} + \ln\left(\frac{SS^*}{S^2}\right) \\ &= 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} + \ln\left(\frac{S}{S^*}\right) + \ln\left(\frac{S^*}{S}\right) \\ &= -\left(\frac{S^*}{S} - 1 - \ln\left(\frac{S^*}{S}\right)\right) - \left(\frac{S}{S^*} - 1 - \ln\left(\frac{S}{S^*}\right)\right) \\ &= -g\left(\frac{S^*}{S}\right) - g\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$V'(t) = -g\left(\frac{S^*}{S}\right) - g\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 0$$

Donc l'équilibre endémique est globalement attractive. D'après le théorème de Lasalle, l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable pour $R_0 > 1$.

Chapitre 2

Stabilité globale de modèle SIR avec retard discret

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous représentons un modèle SIR avec retard discret, et nous étudions la stabilité globale du point endémique ([15], [3], [5], [14]), puis nous déduisons l'effet du retard sur cette stabilité. Le modèle considéré est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t-h) - \mu_1 S(t) + b, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t-h) - \mu_2 I(t) - \lambda I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I(t) - \mu_3 R(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $(S(t) + I(t) + R(t) = N(t))$ est la population totale $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ est la densité des susceptibles, des infectés et des réfractaires respectivement, μ_1, μ_2, μ_3 représente les taux de mortalité des susceptibles, des infectés, et réfractaires, respectivement.

Supposons que $\mu_1 \leq \min(\mu_2, \mu_3)$, la constante h est le retard discret. Aussi, on considère la condition initiale :

$$S(\theta) = \phi_1(\theta), \quad I(\theta) = \phi_2(\theta), \quad R(\theta) = \phi_3(\theta), \quad (-h \leq \theta \leq 0).$$

Où

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{C}, \text{ tel que : } \phi_i(\theta) \geq 0, \quad (-h \leq \theta \leq 0, \quad i = 1, 2, 3).$$

$\mathbb{C}$ représente l'espace de Banach, avec $\mathbb{C}([-h, 0], \mathbb{R}^3)$ des fonctions continues de $[-h, 0]$ vers $\mathbb{R}^3$. Pour des raisons biologiques([1]), nous supposons que $\phi_i(0) > 0$ pour $i = 1, 2, 3$, (2.1) a un équilibre sans maladie $E_0 = (S_0, 0, 0)$ où $S_0 = \frac{b}{\mu_1}$. Pour le modèle SIR avec retard on trouve le même R_0 avec le modèle SIR sans retard, qui s'écrit sous la forme :

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu_1(\mu_2 + \lambda)}.$$

Ensuite, (2.1) a également un équilibre endémique (où équilibre intérieur) $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ où $I^* = \frac{b - \mu_1 S^*}{\beta S^*}$ et $R^* = \frac{\lambda(b - \mu_1 S^*)}{\mu_3 \beta S^*}$, qui existe si et seulement si $R_0 := \frac{b\beta}{\mu_1(\lambda + \mu_2)} > 1$.

Notre objectif est de déterminer la stabilité globale de l'équilibre endémique pour $R_0 > 1$.

2.2 Permanence et la bornitude de la solution

Lemme 2.2.1 (voir[2]) Pour tout solution $(S(t), I(t), R(t))$ de (2.1) on a que :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{b}{\mu_1}.$$

Lemme 2.2.2 Si $S_0 > S^*$, alors pour tout solution $(S(t), I(t), R(t))$ de (2.1) on a :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{\mu_1 b}{b\beta + \mu_1^2} \equiv v_1,$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq I^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h} \equiv v_2, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} R(t) \geq \frac{\lambda v_2}{\mu_3} \equiv v_3.$$

Preuve. ([15])

On montre seulement $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2$. On considère pour tout solution $(S(t), I(t), R(t))$ de (2.1) avec les conditions initiales pour $t \geq 0$ la fonction différentiable $V(t)$ telle que :

$$V(t) = I(t) + \beta S^* \int_{t-h}^t I(u) du.$$

Alors la dérivée de $V(t)$ satisfait :

$$\begin{aligned} V'(t) &= I'(t) + \beta S^* I(t) - \beta S^* I(t-h), \\ &= I'(t) + \beta S^* (I(t) - I(t-h)), \\ &= \beta S(t) I(t-h) - \mu_2 I(t) - \lambda I(t) + \beta S^* I(t) - \beta S^* I(t-h), \\ &= \beta I(t-h) (S(t) - S^*). \end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$, pour tout $q : 0 < q < 1$ on a :

$$\beta S^* I^* + \mu_1 S^* - b = 0,$$

puisque $0 < q < 1$ donc :

$$qI^* < I^*,$$

alors

$$\beta S^* qI^* < \beta S^* I^*,$$

de même

$$\beta S^* qI^* + \mu_1 S^* - b < \beta S^* I^* + \mu_1 S^* - b,$$

puisque

$$\beta S^* I^* + \mu_1 S^* - b = 0,$$

donc

$$S^* (\beta qI^* + \mu_1) < b,$$

alors d'après la première équation de (2.1) on a :

$$S^* < \frac{b}{\beta qI^* + \mu_1},$$

il existe $\rho \geq 1$ telle que :

$$S^* < \frac{b}{(\beta q I^* + \mu_1)(1 - e^{-(\beta q I^* + \mu_1)\rho h})} \equiv S^\Delta.$$

Il est bien que $I(t) \leq I^*$ pour tout $t \geq \rho h$. Par contradiction nous prouvons le résultat.
On suppose que $I(t) \leq q I^*$, $t \geq \rho h$. D'après la première équation de (2.1), pour $t \geq \rho h + h$,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t-h) - \mu_1 S(t) + b, \\ &\geq -q I^* \beta S(t) - \mu_1 S(t) + b, \\ &= b - (q I^* \beta + \mu_1) S(t). \end{aligned}$$

Donc

$$S'(t) + (q I^* \beta + \mu_1) S(t) \geq b,$$

de même

$$S'(t)e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} + (q I^* \beta + \mu_1)e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} S(t) \geq b e^{(\beta q I^* + \mu_1)t},$$

alors

$$\int_{\rho h+h}^t (S(s)e^{(\beta q I^* + \mu_1)s})' ds \geq \int_{\rho h+h}^t b e^{(\beta q I^* + \mu_1)s} ds,$$

donc

$$S(t)e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} - S(\rho h + h)e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h+h)} \geq \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} - e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h+h)}).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} S(t) &\geq e^{-(\beta q I^* + \mu_1)t} \left[S(\rho h + h)e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h+h)} + \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} - e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h+h)}) \right], \\ &\geq S(\rho h + h)e^{(\beta q I^* - \mu_1)(\rho h+h-t)} + \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (1 - e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h+h-t)}), \\ &> \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu_1)(t-\rho h-h)}), \end{aligned}$$

on a pour $t \geq 2\rho h + h$:

$$\begin{aligned} S(t) &> \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu_1)\rho h}) \\ &= S^\Delta \\ &> S^*. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ensuite, par (2.2) on a pour $t \geq 2\rho h + h$:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \beta(S(t) - S^*)I(t-h), \\ &> \beta(S^\Delta - S^*)I(t-h). \end{aligned}$$

Et

$$n = \min_{\theta \in [-h, 0]} I(2\rho h + 2h + \theta).$$

Maintenant, nous allons montrer que $I(t) \geq n$ pour $t \geq 2\rho h + h$. En fait, s'il existe un $T \geq 0$ telle que $I(t) \geq n$ pour $2\rho h \leq t \leq 2\rho h + 2h + T$, $I(2\rho h + 2h + T) = n$ et $I'(2\rho h + 2h + T) \leq 0$, nous avons du deuxième équation de (2.1) et (2.2), pour $t = 2\rho h + 2h + T$.

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \beta S(t)I(t-h) - \mu_2 I(t) - \lambda I(t), \\
&\geq \beta S(t)n - \mu_2 n - \lambda n, \\
&= (\beta S(t) - \mu_2 - \lambda)n, \\
&\geq (\mu_2 + \lambda) \left[\frac{\beta}{\mu_2 + \lambda} S(t) - 1 \right] n, \\
&\geq (\mu_2 + \lambda) \left[\frac{S^\Delta}{S^*} - 1 \right] n, \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction avec $I'(2\rho h + 2h + T) \leq 0$. Ainsi, $I(t) \geq n$ pour tout $t \geq 2\rho h + h$. Par conséquent, pour $t \geq 2\rho h + 2h$,

$$V'(t) > \beta(S^\Delta - S^*)n,$$

ce qui implique que $V(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. A partir du lemme (2.1.1) et (2.1.2), il existe un $\bar{T} > 0$ telle que pour $t \geq \bar{T}$,

$$V(t) \leq \frac{b}{\mu_1} + 1 + \beta S^* h \left(1 + \frac{b}{\mu_1} \right).$$

C'est une contradiction avec $V(t) \rightarrow +\infty$ quant $t \rightarrow +\infty$. Dans le reste, il nous reste à considérer deux cas :

- (i) $I(t) \geq qI^*$ pour tout t grand.
- (ii) $I(t)$ oscille autour de qI^* pour tout t grand.

Nous montrons que $I(t) \geq qI^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h}$ pour tout t grand. Nous n'avons besoin de considérer que le cas (ii). Soit t_1 et t_2 des temps suffisamment grands tel que :

$$I(t_1) = I(t_2) = qI^*,$$

$$I(t) < qI^*, \quad (t_1 < t < t_2).$$

Si $t_2 - t_1 \leq h$, à partir de la deuxième équation de (2.1), on a que :

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \beta S(t)I(t-h) - (\mu_2 + \lambda)I(t), \\
&\geq -(\mu_2 + \lambda)I(t).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que, pour $t \in (t_1, t_2)$:

$$I(t) > I(t_1) e^{-(\mu_2 + \lambda)(t - t_1)}.$$

Il est clair que pour $t_1 < t < t_2$ et $t_2 - t_1 \leq h$ on a :

$$\begin{aligned}
I(t) &> qI^* e^{-(\mu_2 + \lambda)(t_2 - t_1)} = qv_2, \\
&> qI^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h}.
\end{aligned}$$

Si $(t_2 - t_1 > h)$, nous pouvons facilement obtenir $I(t) \geq qv_2$ pour $t \in [t_1, t_1 + h]$. En fait, si non il existe un $T^* > 0$ telle que $I(t) \geq qv_2$ pour $t_1 \leq t \leq t_1 + h + T^*$, $I(t_1 + h + T^*) = qv_2$ et $I'(T_1 + h + T^*) \leq 0$. D'autre part, nous avons de la deuxième équation de (2.1) et (2.2) que, pour $t = t_1 + h + T^*$,

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta S(t)I(T-h) - (\mu_2 + \lambda)I(t), \\ &> [\beta S(t) - (\mu_2 + \lambda)]qv_2, \\ &> (\mu_2 + \lambda)\left[\frac{\beta}{\mu_2 + \lambda}S(t) - 1\right]qv_2, \\ &> (\mu_2 + \lambda) - \left[\frac{S^\Delta}{S^*} - 1\right]qv_2, \\ &> 0. \end{aligned}$$

C'est une contradiction avec $I'(t) \leq 0$. Par conséquent, $I(t) \geq qv_2$ pour $t \in [t_1, t_2]$. On choisit l'intervalle $[t_1, t_2]$ d'une manière arbitraire, on conclut que $I(t) > qv_2$ pour tout t grand dans le cas (ii). Par conséquent, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq qv_2$. Puisque $(0 < q < 1)$ est choisi arbitrairement, soit $q \rightarrow 1$, nous avons $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2$. Cela a prouvé que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2$.

À partir des lemmes (2.1.1), (2.1.2), nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.2.1 *Si $R_0 > 1$, alors (2.1) est permanent pour tout retard h . De plus, si de plus h est suffisamment petit pour que :*

$$0 \leq he^{(\mu_2 + \lambda)h} \leq \frac{bI^*(\mu_1 + \beta I^*)}{\beta^2(S^* + I^*)[\mu_1(S^* + I^*) + b]},$$

alors l'équilibre endémique E_+ de (2.1) est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 2.2.1 • Si $h=0$ on a que : $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq I^*$. Notons que l'équilibre endémique E_+ du système (2.1) est globalement asymptotiquement stable lorsque $S_0 > S^*$ et $h=0$. Cela montre que l'estimation de v_2 dans le lemme (2.1.2) est nette pour $h=0$.

• $v_2 = I^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h}$ montre que le retard h a un effet sur la permanence du système (2.1).

2.3 Stabilité locale de l'équilibre endémique

Puisque les deux premières équations sont indépendante de R , alors on peut étudier le système réduit de (2.1) qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t-h) - \mu_1 S(t) + b, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t-h) - (\mu_2 + \lambda)I(t). \end{cases}$$

Théorème 2.3.1 *Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.*

Preuve

Le système linéarisé en E_+ est :

$$\begin{cases} \tilde{S}'(t) = (-\beta I^* - \mu_1)\tilde{S} - \beta S^* \tilde{I}(t-h), \\ \tilde{I}'(t) = \beta I^* \tilde{S}(t) - (\mu_2 + \lambda)\tilde{I}(t) + \beta S^* \tilde{I}(t-h). \end{cases}$$

On définit la matrice Jacobienne de model SIR sans retard de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu_1 & -\beta S^* \\ \beta I^* & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$(\delta + \beta I^* + \mu_1)(\delta + \mu_2 + \lambda - \beta S^* e^{-\delta h}) + \beta^2 S^* I^* e^{-\delta h} = 0.$$

Est nommé l'équation :

$$\delta^2 + \delta(\mu_2 + \lambda + \beta I^* + \mu_1) + (\beta I^* + \mu_1)(\mu_2 + \lambda) - \delta \beta S^* e^{-\delta h} - (\beta I^* + \mu_1)\beta S^* e^{-\delta h} + \beta^2 S^* I^* e^{-\delta h} = 0,$$

En utilisant $\mu_2 + \lambda = \beta S^*$ on trouve :

$$\delta^2 + \delta(\beta S^* + \beta I^* + \mu_1 - \beta S^* e^{-\delta h}) + (\beta I^* + \mu_1)\beta S^* - (\beta I^* + \mu_1)(\beta S^* e^{-\delta h}) + \beta^2 S^* I^* e^{-\delta h} = 0,$$

1- Supposons que $h = 0$ et après les simplifications on trouve :

$$\delta^2 + \delta(\beta I^* + \mu_1) + \beta^2 S^* I^* = 0,$$

elle est de la forme :

$$\delta^2 - \delta tr(J) + det(J)$$

telle que $tr = -(\beta I^* + \mu_1) < 0$ et $det = \beta^2 S^* I^* > 0$. Alors pour $R_0 > 1$ et $h = 0$ l'équilibre endémique est localement stable.

2- Supposons $h \neq 0$ alors on suppose qu'il existe des valeurs propres purement imaginaires de la forme $\delta = i\omega$. L'équation caractéristique s'écrit sous la forme :

$$\delta^2 + \delta(\beta S^* + \beta I^* + \mu_1 - \beta S^* e^{-\delta h}) + (\beta I^* + \mu_1)\beta S^* - (\beta I^* + \mu_1)(\beta S^* e^{-\delta h}) + \beta^2 S^* I^* e^{-\delta h} = 0,$$

et puisque $b = \beta S^* I^* + \mu_1 S^*$, c'est à dire $\beta I^* + \mu_1 = \frac{b}{S^*}$, alors on trouve l'équation :

$$\delta^2 - \delta[-(\beta S^* + \frac{b}{S^*}) + \beta S^* e^{-\delta h}] - \beta b(-1 + e^{-\delta h}) + \beta^2 S^* I^* e^{-\delta h} = 0,$$

on remplace δ par $i\omega$ et puisque $e^{-i\omega h} = \cos \omega h - i \sin \omega h$ on trouve :

$$\begin{cases} -\omega^2 + \beta b - \omega \beta S^* \sin \omega h + (\beta^2 S^* I^* - \beta b) \cos \omega h = 0, \\ \omega(\beta S^* + \frac{b}{S^*}) - \beta S^* \omega \cos \omega h - (\beta^2 S^* I^* - \beta b) \sin \omega h = 0, \end{cases}$$

on pose : $A = \beta^2 S^* I^* - \beta b = \beta(\beta S^* I^* - b) = -\beta \mu_1 S^*$, de plus on multiplie la 1ère équation par $(\beta \mu_1 S^*)$ et la 2ème équation par $(\beta S^* \omega)$ on trouve :

$$\begin{cases} (\omega^2 + \beta b) \beta \mu_1 S^* = \omega(S^*)^2 \beta^2 \mu_1 \sin \omega h + (\beta \mu_1 S^*)^2 \cos \omega h, \\ \omega^2 \beta S^* (\beta S^* + \frac{b}{S^*}) = (\beta S^* \omega)^2 \cos \omega h - \beta^2 \mu_1 (S^*)^2 \omega \sin \omega h, \end{cases}$$

la somme de la 1^{ère} et la 2^{ème} équation donne :

$$(\omega^2 + \beta)\beta\mu_1 S^* + \omega^2 \beta S^* (\beta S^* + \frac{b}{S^*}) = ((\beta\mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2) \cos \omega h,$$

on a

$$b = \beta S^* I^* + \mu_1 S^*,$$

alors

$$\omega^2 (\beta\mu_1 S^* + \beta b) + \beta\mu_1 S^* (\beta^2 S^* I^* + \beta\mu_1 S^*) + (\omega \beta S^*)^2 = [(\beta\mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] \cos \omega h.$$

D'ailleurs on sait que

$$\cos \omega h \leq 1,$$

alors

$$[(\beta\mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] \cos \omega h \leq (\beta\mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2,$$

ce qui implique

$$[(\beta\mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] \cos \omega h < [(\beta\mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] + \omega^2 (\beta\mu_1 S^* + \beta b) + \beta^3 \mu_1 I^* (S^*)^2,$$

alors $\nexists \omega$ telle que $\delta = i\omega$, donc pour $h > 0$ et $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est localement stable.

2.4 Stabilité globale de l'équilibre endémique

Théorème 2.4.1 Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Preuve

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \left(\frac{1}{\beta I^*} \right) u_s + \left(\frac{1}{\beta S^*} \right) u_i + U_+,$$

avec

$$\begin{cases} u_s(t) = g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right), \\ u_i(t) = g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right), \end{cases}$$

et

$$U_+(t) = \int_{\tau=0}^h \alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau,$$

où

$$\alpha(\tau) = \int_{\sigma=\tau}^h f(\sigma) d\sigma,$$

avec

$$g(y) = y - 1 - \ln y.$$

Alors

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{y},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \frac{S'(t)}{S^*} - g'\left(\frac{S(t)}{S^*}\right), \\ &= \frac{S'(t)}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right), \\ &= \frac{-\beta S(t)I(t-h) - \mu_1 S(t) + b}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right), \\ &= \frac{1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (-\beta S(t)I(t-h) - \mu_1 S(t) + \beta S^* I^* + \mu_1 S^*), \\ &= \frac{1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (-\beta S(t)I(t-h) - \mu_1 S(t) + \beta S^* I^* + \mu_1 S^*), \\ &= \frac{1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (\mu_1 (S^* - S(t)) + \beta (S^* I^* - S(t)I(t-h))), \\ &= \frac{\mu_1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (S^* - S(t)) + \frac{\beta}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (S^* I^* - S(t)I(t-h)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u'_s &= \frac{-\mu_1}{S^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + \frac{\beta S^* I^*}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)I(t-\tau)}{S^* I^*}\right), \\ &= \frac{-\mu_1}{S^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + \beta I^* \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)I(t-\tau)}{S^* I^*}\right). \end{aligned}$$

De plus on pose : $X = \frac{S(t)}{S^*}$, $Y = \frac{I(t)}{I^*}$, $Z = \frac{I(t-\tau)}{I^*}$, alors

$$\begin{aligned} u'_s &= \frac{-\mu_1}{S^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + \beta I^* \left(1 - \frac{1}{X}\right) (1 - XZ), \\ &= \frac{-\mu_1}{S^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + \beta I^* \left(1 - \frac{1}{X} - XZ + Z\right). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{I'(t)}{I^*} - g'\left(\frac{I(t)}{I^*}\right), \\ &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) (\beta S(t)I(t-h) - (\mu_2 + \lambda)I(t)), \\ &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) (\beta S(t)I(t-h) - \beta S^* I(t)), \\ &= \frac{\beta S^* I^*}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) \left(\frac{S(t)I(t-h)}{S^* I^*} - \frac{I(t)}{I^*}\right), \\ &= \beta S^* \left(1 - \frac{1}{Y}\right) (XZ - Y), \\ &= \beta S^* \left(1 - Y - \frac{XZ}{Y} + XZ\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dU_+}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^h g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= \int_0^h \frac{d}{dt} g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= - \int_0^h \left(\frac{d}{d\tau} g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right)\right) d\tau, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{dU_+}{dt} &= - \left[g \left(\frac{I(t-\tau)}{I^*} \right) \right]_0^h, \\
&= -g \left(\frac{I(t-h)}{I^*} \right) + g \left(\frac{I(t)}{I^*} \right), \\
&= -g(Z) + g(Y).
\end{aligned}$$

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \left(\frac{1}{\beta I^*} \right) u_s + \left(\frac{1}{\beta S^*} \right) u_i + U_+.$$

On note que : $\alpha(\tau) > 0$ pour chaque $\tau \in [0, h)$. Aussi $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ a le minimum global $g(1)=0$. Donc $V(t) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $S(t)=I(t)=1$ et $I(t-\tau) = 1$ pour presque tout $\tau \in [0, h)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{1}{\beta I^*} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\beta S^*} \frac{du_i}{dt} + \frac{dU_+}{dt}, \\
&= \frac{-\mu_1}{\beta S^* I^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + 1 - \frac{1}{X} - XZ + Z + 1 - Y - \frac{XZ}{Y} + XZ - g(Z) + g(Y), \\
&= \frac{-\mu_1}{\beta S^* I^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + C(\tau),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= 2 - \frac{1}{X} + Z - Y - \frac{XZ}{Y} - (Y - 1 - \ln(Z)) + Y - 1 - \ln(Y), \\
&= 2 - \frac{1}{X} - \frac{XZ}{Y} + \ln(Z) - \ln(Y), \\
&= 2 - \frac{1}{X} - \frac{XZ}{Y} + \ln\left(\frac{Z}{Y}\right), \\
&= 2 - \frac{1}{X} - \frac{XZ}{Y} + \ln\left(\frac{ZX}{YX}\right), \\
&= 2 - \frac{1}{X} - \frac{XZ}{Y} + \ln\left(\frac{ZX}{Y}\right) + \ln\left(\frac{1}{X}\right), \\
&= 1 - \frac{1}{X} + \ln\left(\frac{1}{X}\right) + 1 - \frac{XZ}{Y} + \ln\left(\frac{XZ}{Y}\right), \\
&= -g\left(\frac{1}{X}\right) - g\left(\frac{XZ}{Y}\right),
\end{aligned}$$

alors

$$C(\tau) < 0.$$

Puisque

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-\mu_1}{\beta S^* I^* S(t)} (S(t) - S^*)^2 + C(\tau) < 0.$$

Donc l'équilibre endémique est globalement attractive. D'après le théorème de Lasalle cité dans le préliminaire, l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

2.5 Conclusion

Nous avons détaillé l'étude d'un modèle SIR avec retard discrète, où ce retard représente la période d'incubation. Le paramètre de seuil R_0 est obtenu et déterminé si la maladie est éteinte ou non. En utilisant la fonction de Lyapunov on a prouvé que l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable, telle que la stabilité reste malgré la présence du retard, c'est à dire le retard discrète il a aucun effet sur la stabilité dans le modèle SIR.

Chapitre 3

Stabilité globale de modèle SIR avec retard distribué

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous représentons un modèle SIR avec retard distribué, et on étudie la stabilité globale du point endémique([15], [3], [5], [14]), nous déduisons l'effet du retard sur cette stabilité. Le modèle considéré est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu_1 S(t), \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu_2 + \lambda) I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I(t) - \mu_3 R(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Où l'on garde les mêmes notations que dans le cas du modèle SIR à retard discrète. De plus, L'infectiosité d'un individu nouvellement infecté est supposé varier dans le temps à partir du moment initial de l'infection jusqu'à ce qu'une durée h . Cette variation est décrite par la fonction f qui rend compte de l'ineffectivité relative ainsi que la survie des individus infectés a des moments intérieurs jusqu'au temps t . Le coefficient d'action de masse est β est choisi de telle sorte que :

$$\int_0^h f(\tau) d\tau = 1.$$

Puisque la variable R n'apparaît pas dans les deux premières équations $\frac{dS}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$ il suffit d'analyser le comportement asymptotique des solutions pour les deux premiers seulement. Les conditions initiales sont : $S(0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $I_0 \in \mathbb{C}([-h, 0], \mathbb{R}_{\geq 0})$. Ainsi le nombre d'infectieuse est déterminé à partir du temps $(-h)$, permettant (3.1) décrire comment le changement de variable pour tout $t \geq 0$.

3.2 Permanence et la bornitude de la solution

Lemme 3.2.1 (voir[2]) Pour tout solution $(S(t), I(t), R(t))$ de (3.1) on a que :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{b}{\mu_1}.$$

Lemme 3.2.2 Si $S_0 > S^*$, alors pour tout solution $(S(t), I(t), R(t))$ de (3.1) on a :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{\mu_1 b}{b\beta + \mu_1^2} \equiv v_1,$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq I^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h} \equiv v_2, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} R(t) \geq \frac{\lambda v_2}{\mu_3} \equiv v_3.$$

Preuve. ([15])

On montre seulement $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2$. On considère pour tout solution $(S(t), I(t), R(t))$ de (3.1) avec les conditions initiales pour $t \geq 0$ la fonction différentiable $V(t)$ telle que :

$$V(t) = I(t) + \beta S^* \int_0^h \int_{t-\tau}^t f(\tau) I(u) du.$$

Alors

$$\begin{aligned} V'(t) &= I'(t) + \beta S^* I(t) - \beta S^* \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau, \\ &= I'(t) + \beta S^* (I(t) - \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau), \\ &= \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu_2 I(t) - \lambda I(t) + \beta S^* I(t) - \beta S^* \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau, \\ &= \beta (S(t) - S^*) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$, pour tout $0 < q < 1$ on a :

$$\beta S^* I^* + \mu_1 S^* - b = 0,$$

Utilisons $0 < q < 1$, alors

$$qI^* < I^*,$$

donc

$$\beta S^* qI^* < \beta S^* I^*,$$

de même

$$\beta S^* qI^* + \mu_1 S^* - b < \beta S^* I^* + \mu_1 S^* - b,$$

puisque

$$\beta S^* I^* + \mu_1 S^* - b = 0,$$

donc

$$S^* (\beta qI^* + \mu_1) < b,$$

La première équation de (3.1) donne :

$$S^* < \frac{b}{\beta qI^* + \mu_1},$$

il existe $\rho \geq 1$ tel que :

$$S^* < \frac{b}{(\beta qI^* + \mu_1)(1 - e^{-(\beta qI^* + \mu_1)\rho h})} \equiv S^\Delta.$$

On sait que $I(t) \leq I^*$ pour tout $t \geq \rho h$. Par contradiction nous prouvons le résultat.
On suppose que $I(t) \leq qI^*$, $t \geq \rho h$. D'après la première équation de (3.1), pour $t \geq \rho h + h$,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu_1 S(t) + b, \\ &\geq -qI^* \beta S(t) - \mu_1 S(t) + b, \\ &= b - (qI^* \beta + \mu_1) S(t). \end{aligned}$$

Alors

$$S'(t) + (qI^* \beta + \mu_1) S(t) \geq b,$$

de même

$$S'(t) e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} + (qI^* \beta + \mu_1) e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} S(t) \geq b e^{(\beta q I^* + \mu_1)t},$$

Donc

$$\int_{\rho h+h}^t (S(s) e^{(\beta q I^* + \mu_1)s})' ds \geq \int_{\rho h+h}^t b e^{(\beta q I^* + \mu_1)s} ds,$$

alors

$$S(t) e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} - S(\rho h + h) e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h + h)} \geq \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} - e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h + h)}).$$

On trouve que :

$$\begin{aligned} S(t) &\geq e^{-(\beta q I^* + \mu_1)t} \left[S(\rho h + h) e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h + h)} + \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (e^{(\beta q I^* + \mu_1)t} - e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h + h)}) \right], \\ &\geq S(\rho h + h) e^{(\beta q I^* - \mu_1)(\rho h + h - t)} + \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (1 - e^{(\beta q I^* + \mu_1)(\rho h + h - t)}), \\ &> \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu_1)(t - \rho h - h)}), \end{aligned}$$

pour $t \geq 2\rho h + h$ on a :

$$\begin{aligned} S(t) &> \frac{b}{\beta q I^* + \mu_1} (1 - e^{-(\beta q I^* + \mu_1)\rho h}) \\ &= S^\Delta \\ &> S^*. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ensuite, par (3.2), pour $t \geq 2\rho h + h$ on a :

$$\begin{aligned} V'(t) &= \beta (S(t) - S^*) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau \\ &> \beta (S^\Delta - S^*) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Et

$$n = \min_{\theta \in [-h, 0]} I(2\rho h + 2h + \theta).$$

Maintenant, nous allons montrer que $I(t) \geq n$ pour $t \geq 2\rho h + h$. En effet, s'il existe un $T \geq 0$ telle que $I(t) \geq n$ pour $2\rho h \leq t \leq 2\rho h + 2h + T$, $I(2\rho h + 2h + T) = i$ et $I'(2\rho h + 2h + T) \leq 0$, nous avons

du deuxième équation de (3.1) et (3.2), pour $t = 2\rho h + 2h + T$.

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu_2 I(t) - \lambda I(t) \\
&\geq \beta S(t)n - \mu_2 n - \lambda n, \\
&= (\beta S(t) - \mu_2 - \lambda)n, \\
&\geq (\mu_2 + \lambda) \left[\frac{\beta}{\mu_2 + \lambda} S(t) - 1 \right] n, \\
&\geq (\mu_2 + \lambda) \left[\frac{S^\Delta}{S^*} - 1 \right] n, \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction avec $I'(2\rho h + 2h + T) \leq 0$. Ainsi, $I(t) \geq i$ pour tout $t \geq 2\rho h + h$. Par conséquent, pour $t \geq 2\rho h + 2h$,

$$V'(t) > \beta(S^\Delta - S^*)n,$$

ce qui implique que $V(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. A partir du lemme (2.1.1) et (2.1.2), il existe un $\bar{T} > 0$ telle que pour $t \geq \bar{T}$,

$$V(t) \leq \frac{b}{\mu_1} + 1 + \beta S^* h \left(1 + \frac{b}{\mu_1} \right).$$

C'est une contradiction avec $V(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Dans la dernière partie de démonstration, il nous reste à considérer deux cas :

(i) $I(t) \geq qI^*$ pour tout t grand.

(ii) $I(t)$ oscille autour de qI^* pour tout t grand.

Nous montrons que $I(t) \geq qI^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h}$ pour tout t grand. Nous n'avons besoin de considérer que le cas (ii). Soit t_1 et t_2 des temps suffisamment grands tel que :

$$I(t_1) = I(t_2) = qI^*,$$

$$I(t) < qI^*, \quad (t_1 < t < t_2).$$

Si $t_2 - t_1 \leq h$, à partir de la deuxième équation de (3.1), on a que :

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \beta S(t) I(t-h) - (\mu_2 + \lambda) I(t), \\
&\geq -(\mu_2 + \lambda) I(t).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que, pour $t \in (t_1, t_2)$:

$$I(t) > I(t_1) e^{-(\mu_2 + \lambda)(t-t_1)}.$$

Il est claire que pour $t_1 < t < t_2$ et $t_2 - t_1 \leq h$ on a :

$$\begin{aligned}
I(t) &> qI^* e^{-(\mu_2 + \lambda)(t_2-t_1)} = qv_2 \\
&> qI^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h}.
\end{aligned}$$

Si $(t_2 - t_1 > h)$, nous pouvons facilement obtenir $I(t) \geq qv_2$ pour $t \in [t_1, t_1 + h]$. En fait, si non il existe un $T^* > 0$ telle que $I(t) \geq qv_2$ pour $t_1 \leq t \leq t_1 + h + T^*$, $I(t_1 + h + T^*) = qv_2$ et $I'(T_1 + h + T^*) \leq$

0. D'autre part, nous avons de la deuxième équation de (3.1) et (3.2) que, pour $t = t_1 + h + T^*$,

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu_2 + \lambda) I(t) \\
&> [\beta S(t) - (\mu_2 + \lambda)] q v_2 \\
&> (\mu_2 + \lambda) \left[\frac{\beta}{\mu_2 + \lambda} S(t) - 1 \right] q v_2 \\
&> (\mu_2 + \lambda) - \left[\frac{S^\Delta}{S^*} - 1 \right] q v_2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

C'est une contradiction avec $I'(t) \leq 0$. Par conséquent, $I(t) \geq q v_2$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Depuis cela type d'intervalle $[t_1, t_2]$ est choisi de manière arbitraire, on conclut que $I(t) > q v_2$ pour tout t grand dans le cas (ii). Par conséquent, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq q v_2$. Puisque $(0 < q < 1)$ est choisi arbitrairement, soit $q \rightarrow 1$, nous avons $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2$. Cela a prouvé que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2$.

À partir des lemmes (3.1.1), (3.1.2), nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 : Si $S_0 > S^*$, alors (3.1) est permanent pour tout retard h . De plus, si de plus h est suffisamment petit pour que :

$$0 \leq h e^{(\mu_2 + \lambda)h} \leq \frac{b I^* (\mu_1 + \beta I^*)}{\beta^2 (S^* + I^*) [\mu_1 (S^* + I^*) + b]},$$

alors l'équilibre endémique E_+ de (3.1) est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 3.2.1 • Si $h=0$ on a que : $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq I^*$. Notons que l'équilibre endémique E_+ du système (3.1) est globalement asymptotiquement stable lorsque $S_0 > S^*$ et $h=0$. Cela montre que l'estimation de v_2 dans le lemme (3.1.2) est nette pour $h=0$.

• $v_2 = I^* e^{-(\mu_2 + \lambda)h}$ montre que le retard h a un effet sur la permanence du système (3.1).

3.3 Stabilité locale de l'équilibre endémique

Puisque les deux premières équations sont indépendante alors on peut étudier le système réduit de (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu_1 S(t), \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu_2 + \lambda) I(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Théorème 3.3.1 Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.

Preuve

Le système linéarisé de (3.3) en E_+ est :

$$\begin{cases} \tilde{S}'(t) = (-\beta I^* - \mu_1) \tilde{S} - \beta S^* \int_0^h f(\tau) \tilde{I}(t-\tau) d\tau, \\ \tilde{I}'(t) = \beta I^* \tilde{S} - (\mu_2 + \lambda) \tilde{I} + \beta S^* \int_0^h f(\tau) \tilde{I}(t-\tau) d\tau, \end{cases}$$

On définit la matrice Jacobienne de model SIR sans retard de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu_1 & -\beta S^* \\ -\beta I^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$(\delta + \beta I^* + \mu_1)(\delta + \mu_2 + \lambda - \beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau) + \beta^2 S^* I^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta^2 + \delta(\mu_2 + \lambda + \beta I^* + \mu_1) + (\beta I^* + \mu_1)(\mu_2 + \lambda) - \delta \beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau - (\beta I^* + \mu_1) \beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau \\ + \beta^2 S^* I^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau = 0, \end{aligned}$$

En utilisant $\mu_2 + \lambda = \beta S^*$ on trouve :

$$\begin{aligned} \delta^2 + \delta(\beta S^* + \beta I^* + \mu_1 - \beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau) + (\beta I^* + \mu_1) \beta S^* - (\beta I^* + \mu_1)(\beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau) \\ + \beta^2 S^* I^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau = 0, \end{aligned}$$

1- Supposons que $h = 0$ et après les simplifications on trouve :

$$\delta^2 + \delta(\beta I^* + \mu_1) + \beta^2 S^* I^* = 0,$$

elle est de la forme :

$$\delta^2 - \delta \operatorname{tr}(J) + \det(J) = 0,$$

telle que $\operatorname{tr}(J) = -(\beta I^* + \mu_1) < 0$ et $\det(J) = \beta^2 S^* I^* > 0$. Alors pour $R_0 > 1$ et $h = 0$ l'équilibre endémique est localement stable.

2- Supposons $h \neq 0$ alors on suppose qu'il existe des valeurs propres purement imaginaires de la forme $\delta = i\omega$.

On a déjà trouvé l'équation :

$$\begin{aligned} \delta^2 + \delta(\beta S^* + \beta I^* + \mu_1 - \beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau) + (\beta I^* + \mu_1) \beta S^* - (\beta I^* + \mu_1)(\beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau) \\ + \beta^2 S^* I^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau = 0, \end{aligned}$$

et puisque $b = \beta S^* I^* + \mu_1 S^*$, c'est à dire $\beta I^* + \mu_1 = \frac{b}{S^*}$, alors on trouve l'équation :

$$\delta^2 - \delta[-(\beta S^* + \frac{b}{S^*}) + \beta S^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau] - \beta b(-1 + \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau) + \beta^2 S^* I^* \int_0^h f(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau = 0,$$

on remplace δ par $i\omega$ et puisque $e^{-i\omega \tau} = \cos \omega \tau - i \sin \omega \tau$ on trouve :

$$\begin{cases} -\omega^2 + \beta b - \omega \beta S^* \int_0^h f(\tau) \sin \omega \tau d\tau + (\beta^2 S^* I^* - \beta b) \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 0, \\ \omega(\beta S^* + \frac{b}{S^*}) - \beta S^* \omega \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau d\tau - (\beta^2 S^* I^* - \beta b) \int_0^h f(\tau) \sin \omega \tau d\tau = 0, \end{cases}$$

on pose : $A = \beta^2 S^* I^* - \beta b = \beta(\beta S^* I^* - b) = -\beta \mu_1 S^*$,
de plus on multiplie la 1ère équation par $(\beta \mu_1 S^*)$ et la 2ème équation par $(\beta S^* \omega)$ on trouve :

$$\begin{cases} (\omega^2 + \beta b) \beta \mu_1 S^* = \omega (S^*)^2 \beta^2 \mu_1 \int_0^h f(\tau) \sin \omega \tau d\tau + (\beta \mu_1 S^*)^2 \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\ \omega^2 \beta S^* (\beta S^* + \frac{b}{S^*}) = (\beta S^* \omega)^2 \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \beta^2 \mu_1 (S^*)^2 \omega \int_0^h f(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \end{cases}$$

la somme de la 1ère et la 2ème équation donne :

$$(\omega^2 + \beta) \beta \mu_1 S^* + \omega^2 \beta S^* (\beta S^* + \frac{b}{S^*}) = ((\beta \mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2) \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau,$$

on a

$$b = \beta S^* I^* + \mu_1 S^*,$$

alors

$$\omega^2 (\beta \mu_1 S^* + \beta b) + \beta \mu_1 S^* (\beta^2 S^* I^* + \beta \mu_1 S^*) + (\omega \beta S^*)^2 = [(\beta \mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau.$$

D'ailleurs on sait que

$$\cos \omega \tau \leq 1,$$

alors

$$[(\beta \mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] \cos \omega \tau \leq (\beta \mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2,$$

ce qui implique

$$[(\beta \mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] \int_0^h f(\tau) \cos \omega \tau d\tau < [(\beta \mu_1 S^*)^2 + (\beta S^* \omega)^2] + \omega^2 (\beta \mu_1 S^* + \beta b) + \beta^3 \mu_1 I^* (S^*)^2,$$

alors $\nexists \omega$ telle que $\delta = i\omega$, donc pour $h > 0$ et $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est localement stable.

3.4 Stabilité globale de l'équilibre endémique

Théorème 3.4.1 Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Preuve On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \left(\frac{1}{\beta I^*} \right) u_s + \left(\frac{1}{\beta S^*} \right) u_i + u_+,$$

avec

$$\begin{cases} u_s(t) = g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right), \\ u_i(t) = g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right), \end{cases}$$

et

$$U_+(t) = \int_0^h \alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau,$$

où

$$\alpha(\tau) = \int_{\sigma=\tau}^h f(\sigma) d\sigma,$$

et

$$g(y) = y - 1 - \ln y,$$

telle que

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{y}.$$

On note que : $\alpha(\tau) > 0$ pour chaque $\tau \in [0, h)$. Aussi $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ a le minimum globale $g(1)=0$. Donc $V(t) \geq 0$ si et seulement si $S(t)=I(t)=1$ et $I(t-\tau) = 1$ pour presque tout $\tau \in [0, h)$. Les dérivés de u_s , u_i et u_+ seront calculés séparément puis combinés pour obtenir la quantité désirée $\frac{dV}{dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \frac{1}{S^*} \left(\frac{S-S^*}{S} \right) \frac{dS}{dt}, \\ &= \frac{1}{S^*} \left(\frac{S-S^*}{S} \right) (b - \beta S \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu_1 S). \end{aligned}$$

On remplace b par $\beta S^* I^* + \mu_1 S^*$ on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \frac{1}{S^*} \left(\frac{S-S^*}{S} \right) (\beta \int_0^h f(\tau) (S^* I^* - S I(t-\tau)) d\tau + \mu_1 (S^* - S)), \\ &= -\frac{\mu_1}{S^*} \frac{(S-S^*)^2}{S} + \beta I^* \int_0^h f(\tau) \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(1 - \frac{S}{S^*} \frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau. \end{aligned}$$

On définit : $X = \frac{S(t)}{S^*}$, $Y = \frac{I(t)}{I^*}$ et $Z = \frac{I(t-\tau)}{I^*}$ donc on trouve :

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{\mu_1}{S^*} \frac{(S-S^*)^2}{S} + \beta I^* \int_0^h f(\tau) \left(1 - \frac{1}{X} - XZ + Z\right) d\tau.$$

Puis on calcule $\frac{du_i}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (\beta S \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu_2 + \lambda) I), \\ &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \beta S^* I^* \int_0^h f(\tau) \left(\frac{S}{S^*} \frac{I(t-\tau)}{I^*} - \frac{I}{I^*}\right) d\tau - (\mu_2 + \lambda) I^* \frac{I}{I^*}. \end{aligned}$$

On remplace $(\mu_2 + \lambda) I^*$ par $\beta S^* I^*$ on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \beta S^* I^* \int_0^h f(\tau) \left(\frac{S}{S^*} \frac{I(t-\tau)}{I^*} - \frac{I}{I^*}\right) d\tau, \\ &= \beta S^* \int_0^h f(\tau) (XZ - Y - \frac{XZ}{Y} + 1) d\tau. \end{aligned}$$

Maintenant on va calculer $\frac{du_+}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{du_+}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^h \alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= \int_0^h \alpha(\tau) \frac{d}{dt} g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= -\int_{a=0}^h \alpha(\tau) \frac{d}{d\tau} g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau. \end{aligned}$$

On fait l'intégration par partie, on trouve :

$$\frac{du_+}{dt} = \left[-\alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) \right]_0^h + \int_0^h \frac{d}{d\tau} \alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau.$$

On observe que $\alpha(h) = 0$ et $\alpha(0) = \int_0^h f(\sigma) d\sigma$. Ainsi, notons que $\frac{d}{d\tau} \alpha(\tau) = -f(\tau)$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{du_+}{dt} &= \int_0^h f(\sigma) d\sigma g\left(\frac{I}{I^*}\right) - \int_0^h f(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= \int_0^h f(\tau) \left(g\left(\frac{I}{I^*}\right) - g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{\beta I^*} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\beta S^*} \frac{du_i}{dt} + \frac{du_+}{dt}, \\ &= \frac{-\mu_1}{\beta S^* I^*} \frac{(S(t) - S^*)^2}{S} - \int_0^h f(\tau) \left(1 - \frac{1}{X} - XZ + Z + 1 - Y - \frac{XZ}{Y} + XZ - g(Z) + g(Y) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} C(\tau) &= 1 - \frac{1}{X} - XZ + Z + 1 - Y - \frac{XZ}{Y} + XZ - g(Z) + g(Y) \\ &= \left(\frac{1}{X} - 1 - \ln \frac{1}{X} \right) + \left(\frac{XZ}{Y} - 1 - \ln \frac{XZ}{Y} \right) \\ &= g\left(\frac{1}{X}\right) + g\left(\frac{XZ}{Y}\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-\mu_1}{\beta S^* I^*} \frac{(S(t) - S^*)^2}{S} - \int_0^h f(\tau) C(\tau) d\tau < 0.$$

Donc l'équilibre endémique est globalement attractive. D'après le théorème de Lasalle, l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

3.5 Conclusion

Nous avons détaillé l'étude d'un modèle SIR avec un retard distribué, où le retard représente à la période incubation. La stabilité globale de l'équilibre endémique a été déterminé pour montrer pour $R_0 > 1$ en utilisant la stabilité locale et l'attraction globale par une fonction de Lyapunov. La stabilité globale de l'équilibre endémique pour $R_0 > 1$ reste toujours malgré la présence du retard, c'est-à-dire que le retard distribué il a aucun effet sur la stabilité dans le modèle SIR.

Bibliographie

- [1] R.M. Anderson and R.M. May, Population biology of infectious diseases : Part I, Nature 280,361-367, (1979).
- [2] E. Beretta, V. Capasso and F. Rinaldi, Global stability results for a generalized Lotka-Volterra system with distributed delays : Applications to predator-prey and epidemic systems, J. Math. Biol. 26,661-668, (1988).
- [3] E. Beretta and Y. Takeuchi, Convergence results in SIR epidemic model with varying population sizes, Nonl. Anal. 28, 1909-1921, (1997).
- [4] E. Beretta and Y. Takeuchi, Global stability of an SIR epidemic model with time delays, J. Math. Biol. 33, 250-260, (1995).
- [5] E. Beretta, T. Hara, W. Ma and Y. Takeuchi, Global asymptotically stability of an SIR epidemic model with distributed time delay, Nonl. Anal. 47, 4107-4115, (2001).
- [6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris, (1983).
- [7] G. Butler, H.I. Freedman and P. Waltman, Uniformly persistent systems, Proc. Amer. Math. Soc. 96, 425- 430, (1986).
- [8] K.L. Cooke, Stability analysis for a vector disease model, Rocky Mountain J. Math. 9, 31-42, (1979).
- [9] H.I. Freedman and S. Ruan, Uniform persistence in functional differential equations, J. Differential Equations 115, 173-192, (1995).
- [10] H.W. Hethcote, Qualitative analyses of communicable disease models, Math. Biosei. 7, 335-356, (1976).
- [11] J.K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1977).
- [12] Y. Kuang, Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, San Diego, CA, (1993).
- [13] J.K. Hale and P. Waltman, Persistence in infinite-dimensional systems, SIAM J. Math. Anal. 20, 388-395, (1989).
- [14] W. Ma, Y. Takeuchi, T. Hara and E. Beretta, Permanence of an SIR epidemic model with distributed time delays, Tohoku Math. J. 54, 581-591, (2002).
- [15] Y. Takeuchi, W. Ma and E. Beretta, Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times, Nonl. Anal. 42, 931-947, (2000).
- [16] T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, (1966).
- [17] W. Wang, Global behavior of an SEIRS epidemic model with time delay, Appl. Math. Lett. 15 (4), 423-428, (2002).