

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques & Modélisations

présenté par

SALHI AHMED

Soutenu le : 22 juin 2023

Thème :

L'ETUDE MATHEMATIQUE D'UN MODELE EPIDEMIOLOGIQUE
AVEC QUARANTAINE ET A RETARD DISTRIBUE

Devant le jury composé de :

M. MUSTAPHA YEBDRI	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. SALIH DJILALI	M.C.A, Université de Chlef	Examinateur
M. SIMON GIREL	M.C, Université Côte d'Azur	Co-encadrant
M. ABDENNASSER CHEKROUN	M.C.A, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2022-2023

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu tout-puissant pour la patience et la volonté qu'il m'a accordé pour réaliser ce travail.

Je veux profiter de cette occasion pour remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu pendant la recherche et l'écriture de ce travail.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadrant, Abdennasser Chekroun, pour son orientation, sa patience et son soutien indéfectible tout au long de ce travail. Je suis redevable envers son expertise et ses idées, qui ont été précieuses pour façonner mes recherches.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur Girel Simon de l'université de Nice, qui a accepté d'être mon co-encadrant. Je suis reconnaissant pour son précieux soutien dans la valorisation de ce travail.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers les membres de jury, Salih Djilali et le Pr. Mustapha Yebdri, pour le temps et le dévouement qu'ils ont consacré à l'examen de mon travail et à la fourniture de commentaires constructifs.

Je suis sincèrement reconnaissant au Pr. Tarik Mohamed Touaoula. Je le remercie pour son aide, ses encouragements et ses conseils.

J'aimerais également exprimer ma gratitude envers tous mes professeurs du département de mathématique de Tlemcen.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leur amour, leur encouragement et leur compréhension. Leur soutien a été une source de force et de motivation tout au long de mon parcours académique.

Table des matières

1	Introduction aux équations différentielles à retard (EDR)	9
1.1	Contexte historique	9
1.2	Pourquoi les équations différentielles à retard ?	10
1.3	Classification	10
2	Quelques résultats généraux et remarques sur les EDRs	15
2.1	Quelques remarques sur les EDRs	15
2.1.1	Problème de la non-unicité	16
2.1.2	Les structures dynamiques	16
2.1.3	La propagation des discontinuités	18
2.1.4	L'impact significatif des petits retards	19
2.2	Résultats d'existence et d'unicité	20
2.3	Méthode des pas	22
2.4	Stabilité locale et bifurcation de Hopf	26
2.4.1	Stabilité locale	27
2.4.2	Bifurcation de Hopf	29
2.5	Les équations caractéristiques	31
2.5.1	Équation du premier ordre à retard discret	34
3	Modélisation mathématiques par les EDRs	37
3.1	Modèle logistique avec retard	37
3.2	Modèle de Mackey-Glass	39
3.3	Modèle de Nicholson	42
4	Modèle SQIR à retard distribué	45
4.1	Introduction	45
4.2	Modèle et préliminaires	46
4.2.1	L'existence et l'unicité	48
4.2.2	La positivité	49
4.2.3	La solution bornée	50
4.2.4	Les points d'équilibre	51
4.3	La stabilité des équilibres	53
4.4	Bifurcation de Hopf de l'équilibre endémique	58
4.5	Simulations numériques	62
4.6	Conclusion et perspective	66
5	Nouveau modèle SQEIR à retard distribué	67
5.1	Modèle et préliminaire	67
5.2	Stabilité des équilibres	72
	Bibliographie	77

Prologue

La théorie de la dynamique des populations a longtemps été influencée par les équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations différentielles partielles (EDP), et ces équations resteront sans doute indispensables à l'avenir. Il convient toutefois de noter qu'il s'agit généralement de premières approximations des systèmes réels considérés. Pour des modèles plus réalistes, il serait avantageux d'inclure certains des états passés de ces systèmes, c'est-à-dire qu'il serait idéal qu'un système réel puisse être modélisé par des équations différentielles à retard (EDR).

La modélisation mathématique avec des EDRs est largement utilisée pour l'analyse et les prévisions dans divers domaines des sciences de la vie, par exemple la dynamique des populations, l'épidémiologie, l'immunologie, la physiologie et les réseaux de neurones. Les retards, dans ces modèles, peuvent être liés à la durée de certains processus cachés comme les étapes du cycle de vie, le temps entre l'infection d'une cellule et la production de nouveaux virus, la durée de la période infectieuse, la période immunitaire, etc [27]. Dans les EDOs, l'état inconnu et ses dérivées sont évalués au même instant. Par contre, dans les EDRs, l'évolution du système dépend du même instant et d'un instant passé. L'introduction des retards temporels dans un modèle différentiel augmente considérablement la complexité du modèle. Par conséquent, l'étude des comportements qualitatifs de tels modèles, en utilisant l'analyse de stabilité ou de bifurcation, est nécessaire.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'un modèle épidémique avec quarantaine et à retard distribuée. Nous calculons le nombre de reproduction de base, noté R_0 , et démontrons que si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable. En revanche, si $R_0 > 1$, il devient instable, et un équilibre endémique unique devrait exister. Des conditions suffisantes pour une bifurcation de Hopf sont données. Cette bifurcation induit une solution périodique non triviale qui représente des vagues épidémiques récurrentes. Ces résultats montrent que la quarantaine et le retard jouent un rôle important pour l'existence des vagues épidémiques récurrentes. Ensuite, nous avons continué cette étude en proposant un nouveau modèle avec une amélioration. Une première tentative était d'analyser ce système et nous avons obtenu quelques résultats.

En parallèle de la compréhension et l'analyse mathématique de ces problèmes et qui font l'objet de deux chapitres, nous avons développé plusieurs d'autres points dans d'autres chapitres comme : approfondissement des connaissances sur les équations différentielles à retard, la modélisation mathématique avec des EDRs et faire des simulations pour tracer la solution d'un système différentiel à retard distribué.

Chapitre 1

Introduction aux équations différentielles à retard (EDR)

Au cours de ce chapitre, nous présentons les équations différentielles à retard en offrant un aperçu historique, tout en illustrant l'importance de ce type d'équations à travers quelques exemples [1, 20].

1.1 Contexte historique

Les équations différentielles à retard (EDR) ont suscité un grand intérêt. Elles font partie des équations différentielles fonctionnelles et se caractérisent par l'introduction d'un retard temporel entre l'état présent d'un système et ses états passés. Cette particularité les rend particulièrement utiles pour modéliser des systèmes qui possèdent une mémoire.

L'histoire des EDRs remonte à au moins 200 ans, avec les premiers développements en géométrie et en théorie des nombres. Cependant, ce n'est qu'au début du XXe siècle que l'importance des effets héréditaires dans la modélisation des systèmes physiques a été soulignée, ce qui a conduit à des progrès significatifs dans ce domaine. Les premiers papiers traitant d'équations fonctionnelles retardées linéaires sont dus à Polossuchin [25] et Schmidt [26].

La théorie des équations différentielles fonctionnelles, y compris les EDRs, a connu une évolution significative dans les années cinquante, devenant ainsi un outil indispensable pour les chercheurs travaillant sur des applications spécifiques dans des domaines tels que la mécanique, les réacteurs nucléaires, les réseaux distribués, l'écoulement de la chaleur, les réseaux neuronaux, la combustion, la microbiologie, l'épidémiologie et la physiologie [12, 17, 23].

Dans les années 50, de nombreuses recherches ont été menées sur les équations différentielles à retard (EDRs), ce qui a conduit à la découverte de nombreux résultats généraux. Par exemple, Krasovskii a étendu la deuxième méthode de Lyapunov aux EDR [18, 19]. De plus, des travaux significatifs ont été réalisés dans ce domaine par Myshkis [24], Bellman et Cooke [5], ainsi que Halanay [14].

Au cours des années qui ont suivi, de nombreux travaux ont émergé dans ce domaine,

en particulier ceux portant sur l'analyse de la stabilité des équations différentielles avec un terme à retard. Des chercheurs tels qu'El'sgol'ts et Norkin [11], Hale [15], Hale et Lunel [16], Diekmann, Van Gils, Lunel et Walther [9] ont contribué à cette avancée.

Dans l'ensemble, l'histoire des EDRs reflète la riche interaction entre théorie et application en mathématiques et en science. L'étude des EDRs continue d'être un terrain fertile pour de nouvelles découvertes et défis, ainsi qu'une source d'inspiration pour la recherche interdisciplinaire.

1.2 Pourquoi les équations différentielles à retard ?

La raison principale d'utiliser des équations différentielles à retard est de capturer les effets retardés dans le temps qui se produisent dans de nombreux systèmes réels. Dans ces systèmes, l'état du système à un moment donné dépend non seulement de son état actuel, mais également de ses états passés.

Par exemple, il est possible de représenter une réaction chimique par une équation différentielle ordinaire (EDO) ou une équation aux dérivées partielles (EDP) pour décrire l'évolution temporelle des concentrations des espèces chimiques impliquées dans la réaction. Toutefois, dans certaines situations, l'utilisation des EDRs peut être nécessaire pour prendre en compte les retards dans la réaction chimique. Ces retards peuvent résulter de mécanismes de transport, de réactions lentes ou de processus d'activation.

Un autre exemple du retard se produit en raison du fait que les animaux doivent prendre du temps pour digérer la nourriture. Par conséquent, tout modèles de dynamique des espèces qui ne prennent pas en compte les retards ne sont qu'une approximation, pour simplifier l'étude du système car les EDRs peuvent avoir des effets importants sur la dynamique du système, comme l'apparition d'oscillations et la possibilité de bifurcations et de chaos (voir Chapitre 2).

De manière générale, les EDRs fournissent un outil puissant pour modéliser et comprendre les systèmes complexes qui présentent des retards dans leur comportement.

1.3 Classification

On peut classer les équations différentielles à retard en différentes catégories selon leurs caractéristiques, telles que leur linéarité, leur autonomie, leur périodicité et les types de retards impliqués. Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur la classification des équations à retard en fonction des types de retards mentionnés dans la littérature. Voici quelques classifications fréquentes avec f est une fonction continue :

• Équations différentielles à retard constant

Une équation différentielle à retard constant est un type d'EDR où le retard, τ , est une constante positive. L'équation prend la forme suivante,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R},$$

Exemple 1.1 *Considérons le modèle de Malthus qui décrit l'évolution d'une population des individus, représentée par $N(t)$ à un instant t donné :*

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t),$$

où a est le taux de naissance et b est le taux de mortalité. Il est facile de résoudre cette équation,

$$N(t) = N(t_0) e^{(a-b)(t-t_0)}, \quad \text{pour } t \geq t_0.$$

Trois situations sont possibles :

— Soit la population croît exponentiellement ($a > b$),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty.$$

— Soit la population décroît exponentiellement ($a < b$) et disparaît,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0.$$

— Soit la population est constante ($a = b$),

$$N(t) = N(t_0), \quad \text{pour } t \geq t_0.$$

Ce modèle n'est pas valable à long terme car il ne prend pas en compte les fluctuations de la population (voir Section 2.1). En 1973, Cooke et Yorke ont proposé une version modifiée du modèle "Malthus" qui prend en compte la population d'individus adultes :

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t - \tau) - bN(t),$$

où τ est l'âge auquel un individu atteint la maturité sexuelle marque son passage à l'âge adulte ou, en d'autres termes, sa capacité à se reproduire. Par conséquent, leur contribution à la dynamique de la population est décalée dans le temps puisqu'elle ne se manifeste pas immédiatement, mais seulement après qu'ils aient atteint l'âge adulte.

Remarque 1.1 *On peut résoudre facilement ce type d'équation à retard par des méthodes telles que la méthode des pas (voir Section 2.3).*

• Équations différentielles à retard dépendant du temps

Une équation différentielle à retard qui dépend du temps prend la forme suivante,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R},$$

où $\tau(t)$ est une fonction de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ . À titre d'exemple, on trouve les équations différentielles à retard dépend du temps dans les modèles de transport. Les laminoirs fournissent un exemple typique d'un système à retard dépendant du temps [17, p. 46].

• Équations différentielles à retard dépendant de l'état

Une équation différentielle à retard qui dépend de l'état prend la forme suivante,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t))), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R},$$

où $\tau(x(t))$ est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^+ . Voir par exemple le modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment une nourriture [2].

• Équations différentielles à retards multiples

Une équation différentielle à retards multiples prend la forme suivante,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_n)), \quad \text{pour } \tau_i \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } i \in \mathbb{N},$$

où les $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ sont les retards du temps associés à l'équation.

• Équations différentielles avec retard distribué

Une équation différentielle avec retard distribué a un retard qui varie avec l'historique passé de la solution.

Une forme générale d'une équation différentielle avec retard distribué est donnée par,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{-\tau}^0 k(s)x(t+s)ds\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

où l'intégrale est prise sur un intervalle approprié (τ peut être infini).

Exemple 1.2 [3] *Le modèle de proie-prédateur classique proposé par Lotka et Volterra en 1920 est donné par,*

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta xy, \\ y'(t) = -\delta y + \gamma xy, \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. $x(t)$ représente la densité des proies et $y(t)$ est la densité des prédateurs à l'instant t . Les paramètres α , β , δ et γ sont des constantes positives telles que

α : le taux de reproduction des proies.

β : le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés.

δ : le taux de mortalité des prédateurs.

γ : le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

Volterra a introduit la première équation à retard distribué, en 1928 dans son étude de modèles de prédation [31] :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) = -\delta y(t) + \gamma y(t) \int_{-\tau}^0 k(s)x(t+s)ds. \end{cases}$$

Volterra a supposé que la croissance des prédateurs en contact avec la proie n'est pas instantanée. La fonction k est censée décrire la manière dont le gain du prédateur à chaque instant t .

• Équation différentielle de type neutre

La forme générale d'une équation différentielle de type neutre (EDN) à retard discret s'écrit comme suit,

$$\frac{d}{dt}[y(t) - g(y(t - \tau))] = f(t, y(t), y(t - \tau)).$$

Le terme "neutre" fait référence au fait que ce type d'équation différentielle inclut un retard à la fois dans l'état et sa dérivée, ce qui peut conduire à des comportements intéressants et non intuitifs.

Les EDNs peuvent survenir dans diverses applications, telles que la dynamique des populations, les réactions chimiques et la théorie de la commande. Elles peuvent être difficiles à résoudre analytiquement, mais des méthodes numériques peuvent être utilisées pour approximer les solutions. Par exemple, on trouve ce type d'équations dans le modèle de réseaux distribués [17].

Chapitre 2

Quelques résultats généraux et remarques sur les EDRs

2.1 Quelques remarques sur les EDRs

En règle générale, les EDRs ont des données initiales qui sont des fonctions continues sur un intervalle fini. Cette caractéristique les distingue des systèmes d'équations différentielles ordinaires, où les données initiales sont des points dans un espace euclidien. Ainsi et dans la suite, nous choisissons un espace connu dans la littérature sur les EDRs afin d'éviter des problèmes comme la non-unicité.

Soit le nombre $\tau \geq 0$ et $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni de la norme de la convergence uniforme. Si $[a, b] = [-\tau, 0]$, on pose $X = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ et on désigne la norme d'un élément $\varphi \in X$ par :

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t)|,$$

avec $|\cdot|$ est une norme de \mathbb{R}^n .

Définition 2.1 [1] Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $T \geq 0$ et $x \in C([t_0 - \tau, t_0 + T], \mathbb{R}^n)$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, on définit $x_t \in X$ par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \text{pour } \theta \in [-\tau, 0],$$

x_t est appelée la fonction de translation.

Supposons que Ω est un sous-ensemble de $[t_0, t_0 + T] \times X$, et considérons la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors, on appelle

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{2.1}$$

une équation différentielle à retard sur Ω . On pose $x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta)$, pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$.

Exemple 2.1 Soit $x'(t) = \frac{\beta x(t - \tau)}{1 + (x(t - \tau))^n} - \gamma x(t) = f(x_t)$, pour tout $t \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}([-\tau, 0]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto f(\varphi) = \frac{\beta \varphi(-\tau)}{1 + (\varphi(-\tau))^n} - \gamma \varphi(0). \end{aligned}$$

Exemple 2.2 Soit $x'(t) = x(t) + \int_{-\tau}^0 K(\theta)x(t+\theta)d\theta = f(x_t)$, pour tout $t \geq 0$. Nous avons

$$f : \mathcal{C}([-\tau, 0]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto f(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 K(\theta)\varphi(\theta)d\theta.$$

2.1.1 Problème de la non-unicité

Il est maintenant temps d'observer que la fourniture d'une condition initiale à l'instant $t_0 \in \mathbb{R}$, telle que pour les EDOs, n'est pas suffisante pour déterminer une solution unique pour les équations différentielles à retard. Pour illustrer cela, nous allons examiner l'une des équations à retard les plus simples associée à une condition initiale en $t_0 = 0$ [1].

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1), & t > 0, \\ x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ce problème a au moins deux solutions,

$$t \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right),$$

ce qui implique qu'il n'y a pas d'unicité. Pour y remédier, il est essentiel d'avoir une fonction initiale définie sur un intervalle de longueur du retard $\tau = 1$. Par conséquent, nous prenons la condition initiale sur l'intervalle $[-1, 0]$.

Typiquement, pour que le problème (2.1) soit bien posé, il est nécessaire de spécifier une fonction initiale définie sur un intervalle de longueur τ "le retard". Par conséquent, le problème de Cauchy d'une EDR est formulé comme suit,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.2)$$

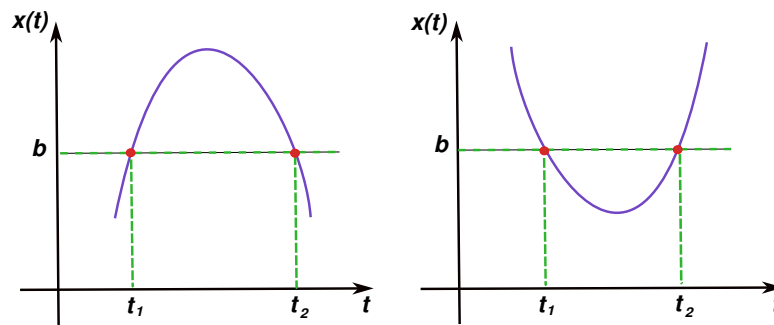
avec t_0 est le temps initial et φ l'état initiale.

Dans les EDRs, l'incorporation du retard peut engendrer des comportements dynamiques plus complexes que ceux observés dans les équations différentielles ordinaires. C'est ce que nous verrons dans la partie suivante.

2.1.2 Les structures dynamiques

Pour une EDO unidimensionnel $x'(t) = f(x(t))$ avec $f \in C(\mathbb{R})$, on peut facilement démontrer l'absence de fluctuation. En effet, par absurde on suppose qu'il existe une solution x non monotone. Alors, il existe t_1, t_2 et b tel que (voir la Figure 2.1),

$$x(t_1) = x(t_2) = b \quad \text{et} \quad x'(t_1)x'(t_2) < 0,$$

FIGURE 2.1 – Le cas de présence d’une fluctuation pour $x(t)$

ce qui implique

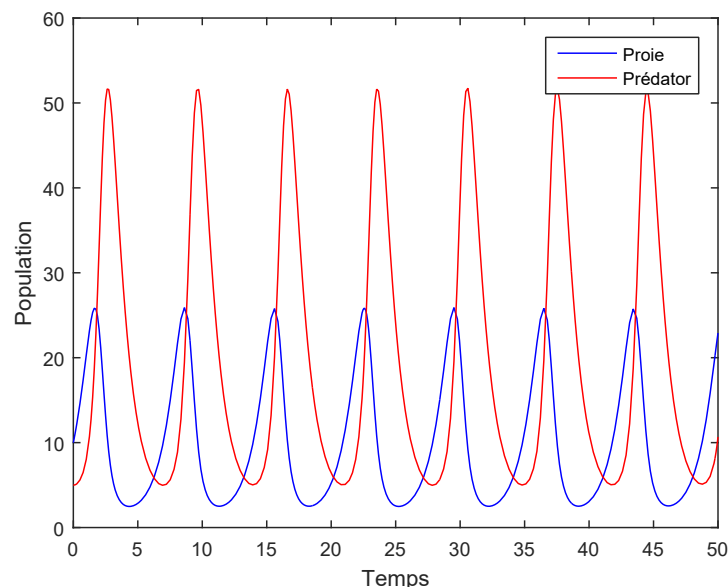
$$0 > x'(t_1)x'(t_2) = f(x(t_1))f(x(t_2)) = (f(b))^2 \geq 0.$$

C’est absurde. Par conséquent, la solution est forcément monotone.

La solution bornée d’une EDO autonome ne peut osciller que s’il y a au moins deux composants. Prenons comme exemple le modèle classique de Lotka-Volterra (voir la Figure 2.2),

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta xy, \\ y'(t) = -\delta y + \gamma xy, \end{cases}$$

où x représente la population de l’espèce proie, y représente la population de l’espèce prédatrice, et α , β , δ , γ sont des paramètres positifs qui régissent le comportement du modèle.

FIGURE 2.2 – Simulation numérique du modèle de Lotka-Volterra avec $\alpha = 1$, $\beta = 0.05$, $\delta = 0.1$ et $\gamma = 1$.

Pour que des solutions chaotiques apparaissent dans une EDO, il est nécessaire que le système ait au moins trois composants. Un exemple très célèbre qui décrit un compor-

tement chaotique est le système de Lorenz [29],

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y - x), & \sigma > 0, \\ y'(t) = x(\rho - z) - y, & \rho > 0, \\ z'(t) = xy - \beta z, & \beta > 0. \end{cases}$$

Le système de Lorenz présente un comportement chaotique pour certaines valeurs de ces paramètres. Cela signifie que de petites variations dans les conditions initiales du système peuvent conduire à des trajectoires très différentes à long terme. Ce phénomène est souvent appelé l'effet papillon (voir la Figure 2.3).

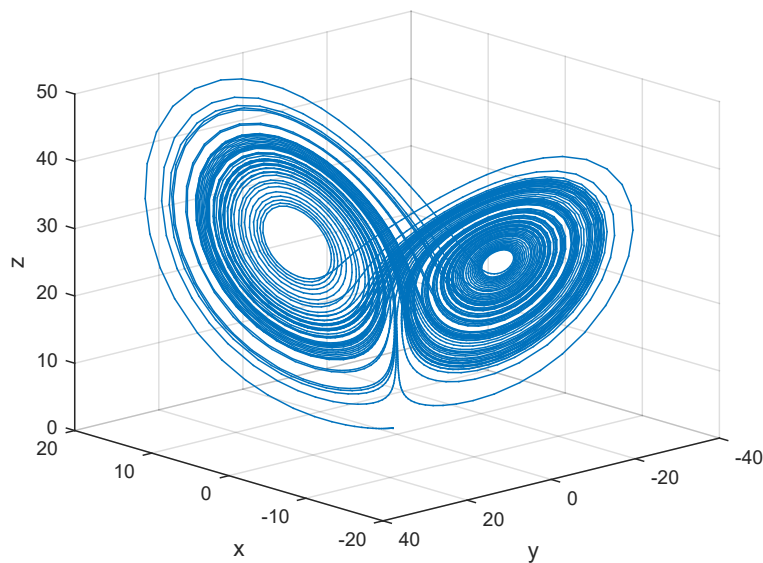


FIGURE 2.3 – L'effet papillon dans le système de Lorenz avec $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$.

Par contre, il est possible d'observer des oscillations ou des comportements chaotiques même dans le cas d'une EDR unidimensionnelle (voir Sections 3.1 et 3.2).

2.1.3 La propagation des discontinuités

On considère par exemple l'EDR suivante,

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = 1, & t \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Avoir une histoire initiale a un effet différent sur la solution d'une EDR par rapport à une EDO. Dans l'exemple spécifique que nous examinons, il est important de remarquer que,

$$\begin{aligned} y'(0^-) &= 0 \neq -1 = y'(0^+), \\ y''(1^-) &= 0 \neq 1 = y''(1^+), \end{aligned}$$

on remarque que le saut dans $y'(t)$ à $t = 0$ se propage au saut dans $y''(t)$ à $t = 1$, et ainsi de suite (voir la Figure 2.4 et la section 2.3). Plus généralement, le saut dans $y'(t)$ à l'instant $t = 0$ se propage à un saut dans $y^{n+1}(t)$ à l'instant $t = n$.

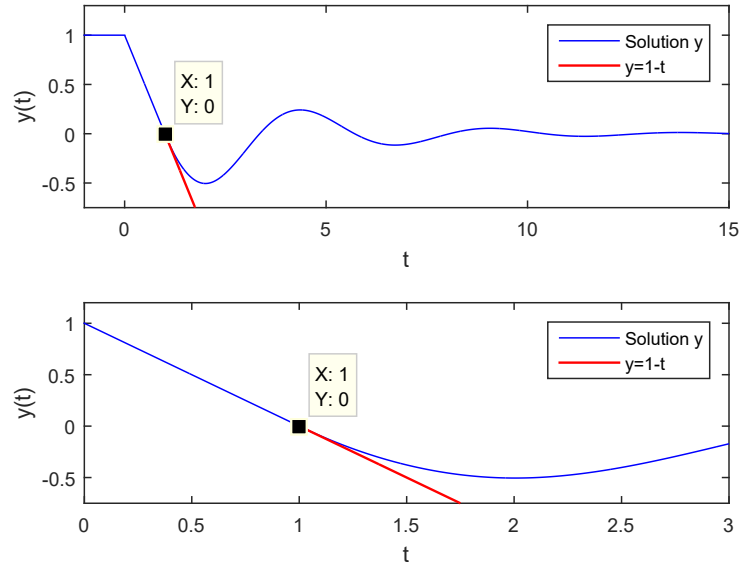


FIGURE 2.4 – Simulation numérique de la solution de l'équation (2.3) montrant que $y''(1^-) = 0 \neq 1 = y''(1^+)$ (la figure du bas est la même que celle du haut mais pour $t \in [0, 3]$).

Les graphes présentés dans ce mémoire (notamment celui ci-dessus) ont été obtenus en traçant la solution à l'aide de la commande **dde23** dans Matlab.

2.1.4 L'impact significatif des petits retards

Comme nous le verrons plus tard dans la section 3.1, une grande valeur de retard peut déstabiliser l'équilibre positif d'un système, tandis qu'une petite valeur de retard n'affectera pas significativement le comportement des solutions. C'est la raison pour laquelle les petits retards sont souvent négligés dans de nombreux modèles, mais cette affirmation n'est généralement pas correcte.

Examinons un exemple de base qu'illustre comment un petit retard peut entraîner des conséquences importantes. Il est bien établi que la solution triviale pour l'EDO suivante,

$$x'(t) + 2x'(t) = 3x'(t) = -x(t),$$

est asymptotiquement stable. Cependant, la solution triviale de l'EDN suivante,

$$x'(t) + 2x'(t - \tau) = -x(t),$$

est instable pour tout retard positif τ (voir les Théorèmes 2.7 et 2.10).

2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous proposons quelques résultats conventionnelles concernant l'existence et l'unicité des solutions (voir [1]).

Définition 2.2 *Pour $\varphi \in X$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, on dit que la fonction $x : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T > 0$ est une solution de (2.2) si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- a) *x est continue sur $[t_0 - \tau, t_0 + T]$.*
- b) *$x(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_0]$.*
- c) *x est différentiable sur $[t_0, t_0 + T]$ et satisfait l'équation $x'(t) = f(t, x_t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.*

Une telle fonction $x(t)$ est dite solution de (2.2) à travers (t_0, φ) et elle est notée souvent par,

$$x(t) = x(t, t_0, \varphi, f).$$

L'équation (2.2) est un type d'équation assez général. Comme mentionné précédemment, elle peut prendre différentes formes.

Remarque 2.1 *Lorsque qu'on a une fonction $f(t, \varphi)$ définie par,*

$$f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t),$$

où L est linéaire en φ , l'équation (2.2) est dite une équation différentielle linéaire avec retard. Si $h \equiv 0$, on dit que cette équation est homogène. Si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, alors cette équation est considérée comme autonome.

Lemme 2.1 [1] *Pour $\varphi \in X$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R} \times X$, la recherche d'une solution de l'équation (2.2) à travers (t_0, φ) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale,*

$$\begin{cases} x_{t_0} = \varphi, \\ x(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq t_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Lemme 2.2 [1] *Si $x : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, alors $t \mapsto x_t$ est une fonction continue en t pour $t \in [t_0, t_0 + T]$.*

PREUVE. Comme x est continue sur un intervalle compact $I = [t_0 - \tau, t_0 + T]$, alors elle est uniformément continue et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $t_1, t_2 \in I$,

$$|t_1 - t_2| < \varepsilon \implies |x(t_1) - x(t_2)| < \delta_\varepsilon.$$

Par conséquent, pour $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + T]$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \varepsilon,$$

On trouve

$$|x_{t_1}(\theta) - x_{t_2}(\theta)| = |x(t_1 + \theta) - x(t_2 + \theta)| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } \theta \in [-\tau, 0],$$

La preuve est complète. ■

En utilisant le Lemme 2.2, on a x_t est continue, alors l'application de $[t_0, t_0 + T]$ dans \mathbb{R}^n donnée par,

$$t \mapsto f(t, x_t),$$

est continue si f est continue. Le théorème ci-dessous établit l'existence d'une solution locale de (2.2).

Théorème 2.1 (Existence) [1] Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Pour tout $(t_0, \varphi) \in \Omega$, il existe un réel $T > 0$ et une solution de (2.2) passant par (t_0, φ) définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T)$.

Théorème 2.2 [27] Soit Ω un ensemble ouvert de $[t_0, +\infty) \times X$ et supposons que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et bornante (c'est-à-dire que l'image de tout borné du domaine de définition est bornée). Si x est une solution maximale de (2.2), alors elle est définie sur $[t_0 - \tau, t_0 + T)$ avec

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|x(t)\| = +\infty \quad \text{ou} \quad T = +\infty.$$

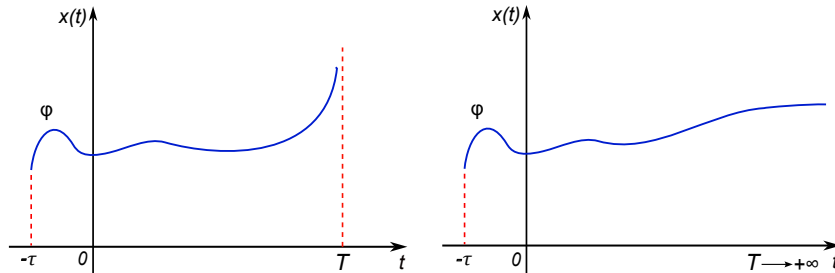


FIGURE 2.5 – Schéma comparatif des deux possibilités : solution globale et explosion en temps fini (Blow up).

Proposition 2.1 [1] Supposons que f vérifie $|f(t, \varphi)| \leq a\|\varphi\| + b$ avec $a, b > 0$, alors il existe une solution globale i.e. pour tout $\varphi \in X$, la solution $x(t_0, \varphi)$ est définie sur $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Définition 2.3 On dit que :

- $f(t, \varphi)$ est localement lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times X$ s'il existe une constante $k > 0$ (k dépend du compact K) telle que pour $(t, u), (t, v) \in K$, nous avons

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k\|u - v\|.$$

- $f(t, \varphi)$ est (globalement) lipschitzienne par rapport à φ sur $\mathbb{R} \times X$ s'il existe une constante $k > 0$ pour tout compact de $\mathbb{R} \times X$ telle que pour $(t, u), (t, v) \in \mathbb{R} \times X$, nous avons

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k\|u - v\|.$$

Remarque 2.2 [1] Si f est globalement lipschitzienne, alors la solution de l'équation (2.2) est définie pour tout $t \in [t_0, +\infty)$. En effet, si f est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors elle vérifie l'hypothèse de la Proposition 2.1.

Pour observer cela, supposons que $\mu = 0$ est la fonction nulle sur X . Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in X$ et k la constante de Lipschitz, nous avons

$$|f(t, \varphi)| \leq |f(t, \varphi) - f(t, \mu)| + |f(t, \mu)| \leq k\|\varphi - \mu\| + |f(t, \mu)| \leq a\|\varphi\| + b,$$

avec $a = k$ et $b = \max_{\alpha \leq s \leq \beta} |f(s, \mu)|$. ■

Maintenant, on va traiter l'unicité des solutions.

Théorème 2.3 (Unicité) [1, 15] Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ et on suppose que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur tout sous ensemble compact de Ω . Si $(t_0, \varphi) \in \Omega$, alors l'équation (2.2) admet une solution unique passant par (t_0, φ) .

Exemple 2.3 On considère l'équation différentielle avec retard distribué,

$$x'(t) = -\alpha x(t) + \beta \tanh \left(\int_{t-\tau}^t x(s) ds \right),$$

cette équation représente un modèle de base d'un neurone qui présente une auto-excitation avec retard distribué et $\alpha, \beta > 0$, on a

$$f(\varphi) = -\alpha \varphi(0) + \beta \tanh \left(\int_{-\tau}^0 \varphi(s) ds \right).$$

En utilisant le fait que la fonction tangente hyperbolique a une dérivée positive dont la magnitude ne dépasse pas un, nous trouvons que,

$$\begin{aligned} |f(t, \varphi) - f(t, \psi)| &\leq \alpha |\varphi(0) - \psi(0)| + \beta \int_{-\tau}^0 |\varphi(s) - \psi(s)| ds, \\ &\leq (\alpha + \tau\beta) \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, f satisfait la condition du Lipschitz globale.

2.3 Méthode des pas

La "méthode des pas" est une approche permettant entre autre de résoudre les EDRs. Elle peut être utilisée pour déterminer l'existence, l'unicité et même la positivité d'une solution.

Maintenant, on donne une illustration pour résoudre l'équation suivante par la méthode des étapes,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Le principe de cette méthode est de chercher des solutions sur des intervalles de type $[k\tau, (k+1)\tau]$ où $k \in \mathbb{N}$ en suivant les étapes suivantes :

1^{ère} étape : Dans l'intervalle $[-\tau, 0]$, La fonction $x(t)$ correspond à la fonction donnée $\varphi(t)$. Ainsi, l'équation admet dans cet intervalle une solution notée $x_0(t)$. Il est important de noter que si $t \in [0, \tau]$, alors $t - \tau \in [-\tau, 0]$.

2^{ème} étape : Dans l'intervalle $[0, \tau]$, si $t \in [0, \tau]$, alors $t - \tau$ résidera dans $[-\tau, 0]$, donc $x(t - \tau) = x_0(t - \tau)$ dans l'intervalle $[0, \tau]$ et le système devient

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_0(t - \tau)), & t \in [0, \tau], \\ x(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

qui est un problème à valeur initiale pour une EDO. Dans ce cas, on connaît la valeur de $x_0(t - \tau) = \varphi(t - \tau)$. En utilisant la condition initiale $x(0) = \varphi(0)$, on peut résoudre cette EDO dans l'intervalle $[0, \tau]$ et désigner la solution obtenue dans cet intervalle par $x_1(t)$.

3^{ème} étape : Dans l'intervalle $[\tau, 2\tau]$, le système devient

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_1(t - \tau)), & t \in [\tau, 2\tau], \\ x(\tau) = x_1(\tau). \end{cases}$$

Il est possible de résoudre cette EDO avec la condition initiale $x_1(\tau)$, ce qui permet de trouver la solution $x_2(t)$ dans l'intervalle $[\tau, 2\tau]$ et ainsi de suite.

Exemple 2.4 *Considérons le cas particulier suivant,*

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t - \tau), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t) = 1, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.5)$$

1^{ère} étape : Dans l'intervalle $[-\tau, 0]$,

$$x(t) = 1.$$

2^{ème} étape : Pour $t \in [0, \tau]$. En intégrant les deux parties de l'équation différentielle sur l'intervalle de temps de 0 à t , on obtient,

$$x(t) = x(0) + a \int_0^t x(s - \tau) ds.$$

Comme $s \in [0, \tau]$, alors $s - \tau \in [-\tau, 0]$. Sachant que $x(t) = 1$ pour $t \in [-\tau, 0]$, alors

$$x(s - \tau) = 1,$$

pour $s \in [0, \tau]$, ce qui conduit à

$$x(t) = at + 1,$$

dans l'intervalle $[0, \tau]$.

3^{ème} étape : Pour $t \in [\tau, 2\tau]$. En intégrant les deux parties de l'équation différentielle sur l'intervalle de temps de τ à t , on obtient

$$x(t) = x(\tau) + a \int_{\tau}^t x(s - \tau) ds.$$

Comme $s \in [\tau, 2\tau]$, alors $s - \tau \in [0, \tau]$. Sachant que $x(t) = at + 1$ pour $t \in [0, \tau)$, alors

$$x(s - \tau) = a(s - \tau) + 1,$$

pour $s \in [\tau, 2\tau]$, ce qui conduit à

$$x(t) = a^2 \frac{t^2}{2} + (a - a^2\tau)t + a^2 \frac{\tau^2}{2} + 1,$$

dans l'intervalle $[\tau, 2\tau]$.

On résume les résultats dans le tableau suivant,

t	EDO avec condition initiale	La solution
$[0, \tau]$	$\begin{cases} x'(t) = a, \\ x(0) = 1. \end{cases}$	$x(t) = at + 1.$
$[\tau, 2\tau]$	$\begin{cases} x'(t) = a^2(t - \tau) + a, \\ x(\tau) = a\tau + 1. \end{cases}$	$x(t) = a^2 \frac{t^2}{2} + (a - a^2\tau)t + a^2 \frac{\tau^2}{2} + 1.$

Prenons par exemple $a = -1$, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t, & t \in [0, \tau), \\ x(t) = 1 - t + (t - \tau)^2, & t \in [\tau, 2\tau). \end{cases}$$

De manière similaire, en itérant cette méthode n fois, on aura

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!}, \quad \text{pour } t \in [(n-1)\tau, n\tau) \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chaque intervalle $[(n-1)\tau, n\tau)$ contient un polynôme de degré n qui représente la solution $x(t)$. Sauf pour le point $n\tau$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la solution $x(t)$ est régulière dans tous les autres points. Ce phénomène est appelé "la propagation des discontinuités". D'après ce qui précède, on trouve que

- $x'(0^-) = 0 \neq -1 = x'(0^+)$, alors x' est discontinue en $t = 0$.
- $x''(\tau^-) = 0 \neq 1 = x''(\tau^+)$, alors x'' est discontinue en $t = \tau$.
- $x^{(n)}((n-1)\tau^-) = 0 \neq (-1)^n = x^{(n)}((n-1)\tau^+)$.

avec $(x^{(i)}(t))$ est la i -ème dérivée de x au point t ,

$$x^{(i)}(a^-) \equiv \lim_{t \xrightarrow{\leq} a} x^{(i)}(t) \quad \text{et} \quad x^{(i)}(a^+) \equiv \lim_{t \xrightarrow{\geq} a} x^{(i)}(t).$$

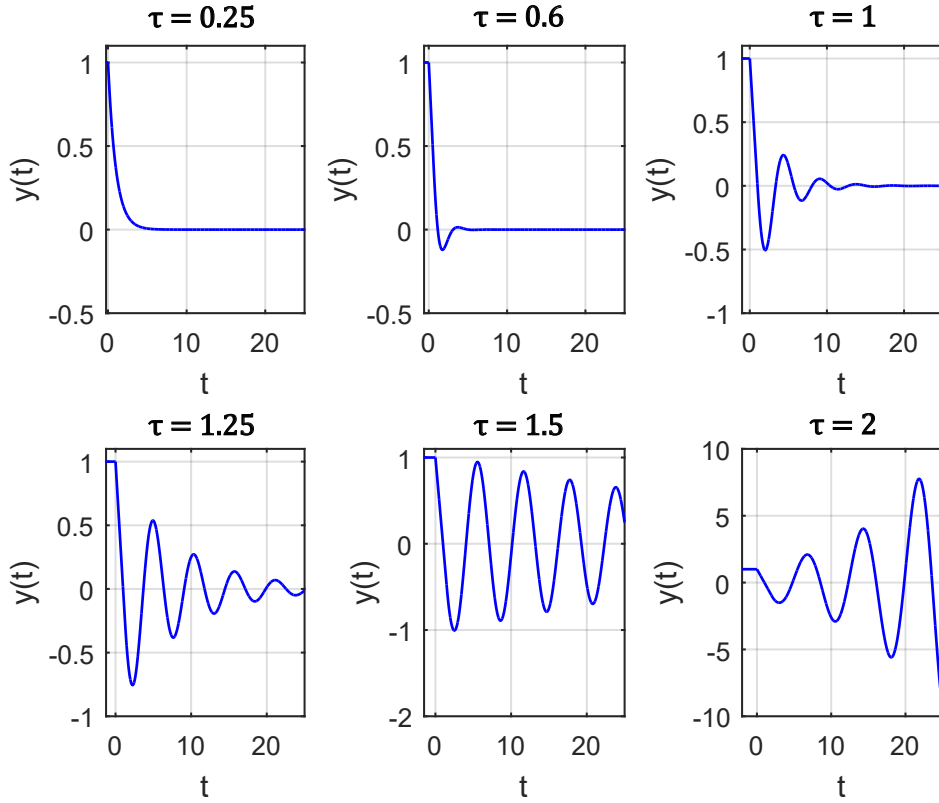


FIGURE 2.6 – Simulation numérique de la solution de l'équation (2.5) avec $a = -1$ pour différentes valeurs de τ .

Remarquons que lorsque $\tau = 0.25$, la solution $x(t)$ ressemble beaucoup à celle d'une équation différentielle ordinaire, car elle décroît progressivement vers la valeur 0 sans jamais la dépasser, c'est-à-dire sans osciller. En revanche, lorsque $\tau = 0.6$, la solution oscille. Plus τ augmente, plus les oscillations grandissent.

Exemple 2.5 On considère le système suivant,

$$\begin{cases} N'(t) = aN(t - \tau) - bN(t), & t \geq t_0, \\ N(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases} \quad (2.6)$$

Il est possible de résoudre ce système en intervalles de longueur τ . Ainsi, pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, le système (2.6) peut être exprimé de la manière suivante,

$$\begin{cases} N'(t) = a\varphi(t - \tau) - bN(t), & t \geq t_0, \\ N(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases}$$

De cette manière, on résout en utilisant la formule de variation de la constante [27],

$$N(t) = e^{-b(t-t_0)}\varphi(t_0) + ae^{-bt} \int_{t_0}^t e^{b\theta} \varphi(\theta - \tau) d\theta, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0].$$

Le système (2.6) devient

$$\begin{cases} N(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ N(t) = e^{-b(t-t_0)}\varphi(t_0) + ae^{-bt} \int_{t_0}^t e^{b\theta}\varphi(\theta - \tau)d\theta, & t \in [t_0, t_0 + \tau]. \end{cases}$$

En utilisant la condition initiale mentionnée ci-dessus, il est possible de résoudre le système (2.6) sur l'intervalle $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$. Cette opération peut être répétée pour résoudre le système sur $[t_0, +\infty)$.

L'utilisation des équations différentielles à retard en dynamique de population nécessite des solutions positives. Dans le cas du retard discret, la méthode des pas permet souvent de démontrer la positivité des solutions. Ce théorème utilise l'argument des pas pour obtenir un résultat sur la positivité des solutions.

Théorème 2.4 [27] *Soit le problème suivant,*

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t), x(t - \tau)), & t \geq t_0, \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq t_0, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^n : x_i = 0 \Rightarrow g_i(t, x, y) \geq 0.$$

Si la condition initiale φ satisfait $\varphi \geq 0$, alors la solution correspondante $x(t)$ satisfait $x(t) \geq 0$ (Plus précisément, les composantes du vecteur $x(t)$ sont positives) pour tout $t \geq t_0$ où elle est définie.

PREUVE. Il convient de rappeler que pour les EDOs de la forme $x'(t) = h(t, x)$, où $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, le résultat similaire nécessite que la fonction h vérifie la condition $h_i(t, x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$ et $x_i = 0$, comme décrit dans la proposition B.7 de [28].

Considérons la solution $x(t)$ du problème (2.7). Sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$, $x(t)$ est la solution de l'EDO $x'(t) = h(t, x)$, où $h(t, x) = g(t, x, \varphi(t - \tau))$. h satisfait les conditions du paragraphe précédent, et donc $x(t)$ est positive sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$. Nous pouvons maintenant utiliser la méthode des pas en répétant simplement cet argument. ■

Dans la section suivante, nous allons présenter plusieurs notions clés relatives à la stabilité, qui aideront à comprendre comment la solution peut se comporter lorsque sa résolution est complexe.

2.4 Stabilité locale et bifurcation de Hopf

La stabilité d'un état stationnaire fait référence à sa capacité à supporter des perturbations mineures et imprévues. Si un processus demeure essentiellement inchangé malgré de telles perturbations, il est considéré comme stable.

Cette section vise le traitement de stabilité d'un système linéaire ou non linéaires. Soit le système suivant,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $\varphi \in X$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il est nécessaire de fournir quelques définitions.

Définition 2.4 Une solution constante x^* est considérée comme un état d'équilibre (ou une solution stationnaire) du système (2.8) lorsque $f(x^*) = 0$, ce qui signifie que x^* est une solution constante en temps de l'équation (2.8).

Sans perdre la généralité, on va considérer souvent $x^* = 0$.

Définition 2.5 [15] Soit $x^* = 0$ un équilibre de (2.8).

- La solution x^* de l'équation est dite stable si pour tout t_0 et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_{t_0, \varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varphi \in X$ et $\|\varphi\| < \delta_{t_0, \varepsilon}$, on a,

$$\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

- La solution x^* de l'équation est dite asymptotiquement stable si elle est stable et il existe $b(t_0) > 0$ tel que pour tout $\varphi \in X$ et $\|\varphi\| < b(t_0)$, on a,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, \varphi) = 0.$$

- La solution x^* de l'équation est dite uniformément stable, si le nombre δ dans cette définition est indépendant de t_0 .
- La solution x^* de l'équation est dite instable s'il n'est pas stable.

Une approche fréquemment utilisée pour évaluer la stabilité locale d'un point d'équilibre dans une équation différentielle à retard consiste à linéariser l'équation autour de ce point, puis à construire une équation caractéristique associée.

2.4.1 Stabilité locale

On considère l'opérateur $L : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors on dit que

- L est linéaire s'il vérifie

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L(\varphi) + \beta L(\psi), \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in X \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

- L est borné s'il existe $k > 0$ tel que,

$$|L(\varphi)| \leq k\|\varphi\|, \quad \text{pour tout } \varphi \in X.$$

D'une manière générale, considérons l'EDR linéaire sous la forme suivante pour tout $t > 0$,

$$x'(t) = L(x_t), \quad (2.9)$$

où L est un opérateur linéaire borné.

Maintenant, on va définir comment linéariser l'équation (2.8).

Définition 2.6 On suppose que l'application $\varphi \rightarrow f(\varphi)$ est de classe C^1 et soit x^* une solution particulière de (2.8) (un état d'équilibre). Dans ce cas, l'équation linéarisée de (2.8) est formulée comme suit,

$$x'(t) = Df(x_t^*)x_t := L(x_t), \quad t \geq t_0,$$

avec $Df(\varphi) : X \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est un opérateur linéaire continu défini par,

$$\forall \psi \in X, \quad Df(\varphi)\psi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi + h\psi) - f(\varphi)}{h}.$$

Exemple 2.6 Considérons l'équation différentielle à retard discret $\tau > 0$ et non linéaire de Hutchinson (1948),

$$\frac{dx}{dt}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right) = f(x_t).$$

Cette équation admet deux solutions particulières $x_1^* = 0$ et $x_2^* = K$. Pour $\varphi \in X$, on a

$$f(\varphi) = r\varphi(0) \left(1 - \frac{\varphi(-\tau)}{K} \right).$$

Pour tout $\varphi, \psi \in X$ et $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} Df(\varphi)\psi &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi + h\psi) - f(\varphi)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[r(\varphi(0) + h\psi(0)) \left(1 - \frac{\varphi(-\tau) + h\psi(-\tau)}{K} \right) - r\varphi(0) \left(1 - \frac{\varphi(-\tau)}{K} \right) \right], \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{Kh} \left[K\varphi(0) - \varphi(0)\varphi(-\tau) - h\varphi(0)\psi(-\tau) - hK\psi(0) + h\psi(0)\varphi(-\tau) \right. \\ &\quad \left. + h^2\psi(0)\psi(-\tau) - K\varphi(0) + \varphi(0)\varphi(-\tau) \right], \\ &= -\frac{r}{K}\varphi(0)\psi(-\tau) - r\psi(0) \left(1 - \frac{\varphi(-\tau)}{K} \right). \end{aligned}$$

Pour $x_1^* = 0$, $Df(0)x_t = -rx_t(0)$, alors on obtient

$$x'(t) = -rx(t).$$

Pour $x_2^* = K$, $Df(K)x_t = -rx_t(-\tau)$, alors on obtient,

$$x'(t) = -rx(t-\tau).$$

Le principe de linéarisation des EDRs, permet de conclure la stabilité locale de (2.8) en se basant sur la stabilité de sa forme linéarisée (2.9). Le résultat fondamental de cette section concerne la stabilité de la solution $x = 0$ de l'équation (2.9), qui s'exprime comme suit.

Théorème 2.5 (Théorème 4.3 de [27]) Posons

$$\det(\Delta(\lambda)) = 0, \quad \text{avec } \Delta(\lambda) = \lambda I - L(e^{\lambda \cdot} I).$$

Cette équation est appelée l'équation caractéristique correspondante à (2.9) (voir la section 2.5). Supposons que $\operatorname{Re}(\lambda) < \mu$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors il existe $K > 0$ tel que

$$|x(t, \varphi)| \leq K e^{\mu t} \|\varphi\|, \quad t \geq 0,$$

où $x(t, \varphi)$ est la solution de (2.9) qui satisfait $x_0 = \varphi$.

Alors, Si toutes les racines caractéristiques vérifient $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable pour (2.9) (resp. l'équilibre x^* de (2.8) est localement asymptotiquement stable). Cependant, s'il existe au moins une racine où $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors $x = 0$ est instable (resp. x^* est instable).

2.4.2 Bifurcation de Hopf

Dans une EDR, une bifurcation de Hopf se produit lorsqu'un équilibre stable devient instable en raison d'un changement de paramètre, ce qui provoque l'apparition de solutions périodiques. La stabilité de l'équilibre est déterminée en évaluant les valeurs propres de l'équation caractéristique associée à l'équation linéarisée (2.9). Si une paire de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe imaginaire, l'équilibre perd sa stabilité et des solutions périodiques apparaissent.

On considère l'équation différentielle linéaire suivante,

$$\frac{dx}{dt} = L_\gamma x_t, \quad t \geq 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

avec γ est le paramètre de la bifurcation.

Théorème 2.6 [27] *On suppose que :*

(H1) *Pour $\gamma = 0$, l'équation caractéristique associée à (2.10) possède une paire des valeurs propres simples $\lambda_0 = \pm i\omega_0$, où $\omega_0 \neq 0$, et il n'y a pas d'autres racines qui peuvent être exprimées comme $n\lambda_0$, avec $n \in \mathbb{Z}$.*

(H2) *La branche de valeurs propres $\lambda(\gamma)$, qui satisfait la condition $\lambda(0) = \lambda_0$ vérifie,*

$$\operatorname{Re}(\lambda'(0)) \neq 0.$$

Alors, pour γ proche de 0, l'équation (2.10) a des solutions périodiques non triviales dont la période est proche de $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Exemple 2.7 [27] *On considère l'EDR non linéaire suivante,*

$$y'(t) = y(t-1)[- \gamma + y^2(t) + y^2(t-1)], \quad (2.11)$$

avec γ est un paramètre réel strictement positif (de bifurcation). Les points d'équilibres sont les solutions de l'équation,

$$y^*(-\gamma + 2(y^*)^2) = 0,$$

alors, $y^* = 0$ est un équilibre pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ et $y^* = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{2}}$ pour tout $\gamma > 0$.

Notre attention sera portée sur l'état d'équilibre $y^* = 0$. Pour linéariser l'équation (2.11) autour de $y^* = 0$, nous pouvons ignorer les termes d'ordre supérieur tels que $x^2(t)$ et $x^2(t-1)$ pour obtenir une équation linéaire.

$$u'(t) = -\gamma u(t-1), \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation linéaire (2.12) est donnée par,

$$\lambda + \gamma e^{-\lambda} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.13)$$

Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ est une valeur propre de (2.13). Alors,

$$\alpha + i\beta + \gamma e^{-\alpha}(\cos(\beta) - i \sin(\beta)) = 0.$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \gamma e^{-\alpha} \cos \beta = 0, \\ \beta - \gamma e^{-\alpha} \sin \beta = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Il est important de noter que si (α, β) est une solution de l'équation (2.14), alors $(\alpha, -\beta)$ est aussi une solution car $\cos(-\beta) = \cos \beta$ et $\sin(-\beta) = -\sin \beta$. Par conséquent, nous allons chercher des solutions où $\beta \geq 0$.

La démarche initiale consiste à rechercher des solutions qui sont purement imaginaires $\pm i\beta$ avec $\beta > 0$. Supposons qu'il existe $\gamma_0 > 0$ tel que $\alpha = 0$. Alors, d'après (2.14), on a

$$\begin{cases} \gamma_0 \cos \beta = 0, \\ \beta - \gamma_0 \sin \beta = 0. \end{cases}$$

Comme $\gamma_0 > 0$, on déduit que $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$. Et on trouve que

$$\gamma_0 = \frac{\beta}{\sin \beta} = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)} = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Si l'on veut que γ_0 soit strictement positif, il est impératif que k soit pair. En d'autres termes, cela signifie que

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$$

Maintenant, on va montrer que pour $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives. On suppose par l'absurde que $\alpha \geq 0$. Alors, $0 < e^{-\alpha} \leq 1$ et $0 < \beta = \gamma e^{-\alpha} \sin \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. Donc, on obtient que $\gamma \cos \beta > 0$.

Ce qui implique $\alpha = -\gamma e^{-\alpha} \cos \beta < 0$, ce qui contredit l'hypothèse, donc $\alpha < 0$ pour tout $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. On conclut que l'équilibre $y^* = 0$ de (2.11) est localement asymptotiquement stable pour $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Supposons que $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$ et vérifions les hypothèses du théorème de Hopf :

(H1) Si $\gamma = \gamma_0 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_0 = \pm i\beta$ purement imaginaires et ce sont les seules.

De plus il n'est pas difficile de montrer que λ_0 est une valeur propre simple.

(H2) On va vérifier que $\operatorname{Re}(\lambda'(0)) \neq 0$. On suppose que λ dépend de γ . En dérivant l'équation (2.13) par rapport à γ , on obtient

$$\lambda'(\gamma) = \frac{e^{-\lambda(\gamma)}}{\gamma e^{-\lambda(\gamma)} - 1} = \frac{-\frac{\lambda(\gamma)}{\gamma}}{-\gamma \frac{\lambda(\gamma)}{\gamma} - 1} = \frac{\lambda(\gamma)}{\gamma(1 + \lambda(\gamma))}.$$

Ainsi,

$$\lambda'(\gamma_0) = \frac{\lambda_0}{\gamma(1 + \lambda_0)} = \frac{i\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}(i\frac{\pi}{2} + 1)} = \frac{i + \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

On conclut que

$$\operatorname{Re}(\lambda'(\gamma_0)) = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \neq 0.$$

Selon le théorème de Hopf, l'équation (2.11) présente des solutions périodiques lorsque γ est proche de $\frac{\pi}{2}$ avec une période proche de 4.

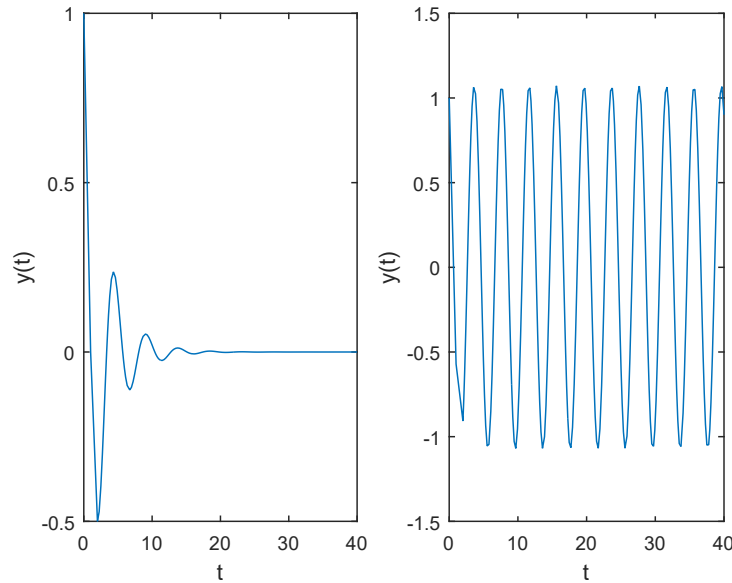


FIGURE 2.7 – Simulation numérique de la solution $y(t)$ de (2.11) pour $\gamma = 1$ à gauche et $\gamma = \frac{\pi}{2}$ à droite avec la condition initiale $y(t) = 1$ sur $[-1, 0]$.

2.5 Les équations caractéristiques

Comme on a vu précédemment, pour évaluer la stabilité des EDRs au niveau local, il est nécessaire de construire une équation caractéristique liée à l'équation linéarisée (2.9) de l'équation (2.8). Tout comme pour les EDOs, les solutions exponentielles sont souvent recherchées pour l'équation linéarisée (2.9) afin de construire l'équation caractéristique correspondante. Cette équation est généralement transcendante, c'est-à-dire qu'elle implique des exponentielles et peut prendre la forme suivante,

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

avec P_1 et P_2 sont des polynômes de λ . Dans la plupart des cas, ces équations caractéristiques ont un nombre infini de solutions, rendant plus complexe l'analyse de leur stabilité linéaire. En outre, les techniques classiques utilisées pour trouver la position des racines d'un polynôme (telles que le critère de Routh-Hurwitz) ne peuvent pas être appliquées dans ce cas.

On considère l'équation suivante avec un seul retard discret τ ($\tau > 0$),

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) + \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k}{dt^k} y(t - \tau) = 0, \quad (2.15)$$

avec $\frac{d^k}{dt^k} y(t)$ est la dérivée $k^{\text{ième}}$ de y ($\frac{d^0}{dt^0} y(t) \equiv y(t)$).

La stabilité de l'équation (2.15) peut être analysée de manière similaire à auparavant, c'est à dire, il faut que toutes les racines de son équation caractéristique,

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \left(\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k \right) e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (2.16)$$

se situent dans la moitié gauche du plan complexe.

Exemple 2.8 [20] *Considérons l'équation logistique à retard discret $\tau > 0$ de type neutre,*

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t - \tau) + \rho y'(t - \tau)}{K} \right), \quad (2.17)$$

où r, K des constantes réelles positives. Soit $x(t) = 1 - \frac{y(t)}{K}$, alors (2.17) est équivalente à

$$x'(t) = r(x(t) - 1)(x(t - \tau) + \rho x'(t - \tau)). \quad (2.18)$$

Notre attention est portée sur la stabilité de la solution triviale $x(t) \equiv 0$ de l'équation (2.18). Cette stabilité est équivalente à celle de la valeur constante K de l'équation (2.17). En linéarisant l'équation autour de $x(t) \equiv 0$, nous obtenons

$$u'(t) = -ru(t - \tau) - \rho u'(t - \tau).$$

L'équation caractéristique associée est définie par,

$$\lambda + \lambda r \rho e^{-\lambda\tau} + r e^{-\lambda\tau} = 0.$$

Revenons à l'équation générale et on note

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad \text{et} \quad P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^k.$$

On suppose que $a_n = 1$ sans perte de généralité.

Théorème 2.7 [20] *Si $|b_n| > 1$, alors pour tout $\tau > 0$, il existe une infinité de solutions à l'équation,*

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda) e^{-\lambda\tau} = 0,$$

avec une partie réelle positive. Par conséquent, la solution triviale de (2.15) est instable.

Nous avons ce résultat général.

Théorème 2.8 [20] Soit $f(\lambda, \tau) = \lambda^n + h(\lambda, \tau)$, où $h(\lambda, \tau)$ est une fonction analytique. Supposons que

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} \lambda > 0 \\ |\lambda| \rightarrow \infty}} \sup \left| \frac{1}{\lambda^n} h(\lambda, \tau) \right| < 1.$$

Alors, quand τ varie, la somme des multiplicités des racines de $f(\lambda, \tau) = 0$ dans le demi-plan droit ne peut changer, sauf lorsque qu'une racine apparaît sur l'axe imaginaire ou le traverse.

Le théorème suivant connu sous le nom du théorème de Hayes qui est un résultat important qui concerne l'étude d'un cas particulier de l'équation caractéristique (2.16) dans le contexte des polynômes exponentiels de degré 1.

Théorème 2.9 [15] Toutes les racines de l'équation $(z + \alpha)e^z + \beta = 0$, où α et β sont des réelles, ont des parties réelles négatives si seulement si

$$\begin{aligned} \alpha &> -1, \\ \alpha + \beta &> 0, \\ \beta &< t \sin(t) - \alpha \cos(t), \end{aligned}$$

avec t est une solution de l'équation,

$$\begin{cases} t = -\alpha \tan(t), & \text{pour } 0 \leq t \leq \pi \text{ si } \alpha \neq 0, \\ t = \frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.9 On considère l'EDR linéaire suivante,

$$N'(t) = aN(t - \tau) - bN(t),$$

dont l'équation caractéristique associée est donnée par,

$$\lambda + b - ae^{-\lambda\tau} = 0.$$

Le Théorème 2.9 peut être appliqué avec a et b des constantes réelles quelconques. En effet, nous multiplions l'équation caractéristique précédente par $\tau e^{\lambda\tau}$, nous trouvons

$$(\lambda\tau + b\tau)e^{\lambda\tau} - a\tau = 0.$$

Par identification avec l'équation de Théorème 2.9, on trouve $\alpha = b\tau$ et $\beta = -a\tau$. Alors la solution triviale de l'EDR précédente est asymptotiquement stable si seulement si

$$\begin{aligned} b\tau &> -1, \\ b - a &> 0, \\ -a\tau &< t \sin(t) - b\tau \cos(t), \end{aligned}$$

avec t est une solution de l'équation,

$$\begin{cases} t = -b\tau \tan(t), & \text{pour } 0 \leq t \leq \pi \text{ si } b \neq 0, \\ t = \frac{\pi}{2}, & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

2.5.1 Équation du premier ordre à retard discret

Dans cette partie, nous analysons l'équation à retard linéaire neutre du premier ordre suivante (voir [20]),

$$\frac{dx(t)}{dt} + \alpha \frac{dx(t-\tau)}{dt} + \beta x(t) + \gamma x(t-\tau) = 0, \quad (2.19)$$

où $\tau, \alpha, \beta, \gamma$ sont des constantes réelles, dont l'équation caractéristique associée est donnée par,

$$\lambda + \alpha \lambda e^{-\lambda\tau} + \beta + \gamma e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.20)$$

Nous allons examiner la stabilité de la solution triviale $x^* = 0$ de l'EDR (2.19) en utilisant l'équation caractéristique associée.

Selon le Théorème 2.7, si $|\alpha| > 1$, la solution triviale $x^* = 0$ de (2.19) est toujours instable pour tout $\tau > 0$. Notre première étape consiste à examiner le cas où $|\alpha| < 1$.

D'après le Théorème 2.8, lorsque la stabilité de la solution triviale x^* change à la valeur $\tau = \tau^*$, cela implique que l'équation (2.20) possède une paire de racines conjuguées purement imaginaires pour $\tau = \tau^*$. En d'autres termes, le Théorème 2.8 nous permet de considérer les racines de l'équation comme des fonctions continues du retard τ , c'est à dire,

$$\lambda(\tau) + \alpha \lambda(\tau) e^{-\lambda(\tau)\tau} + \beta + \gamma e^{-\lambda(\tau)\tau} = 0. \quad (2.21)$$

Ainsi, l'objectif est de trouver la valeur de τ^* qui rend les racines de l'équation (2.20) purement imaginaires. Cela permettra de mieux comprendre comment la stabilité de l'équation (2.19) change.

Pour cette raison, on suppose que $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ est une racine purement imaginaire de (2.20) pour une valeur $\tau = \tau^*$, $\tau \geq 0$ à déterminer. On remplace cette valeur dans (2.20), on trouve

$$\begin{cases} \alpha\omega \sin \omega\tau + \beta + \gamma \cos \omega\tau = 0, \\ \omega + \alpha\omega \cos \omega\tau - \gamma \sin \omega\tau = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

En effectuant une manipulation algébrique consistant à déplacer les termes β et ω du membre de droite de l'équation (2.22), puis en élevant ces termes au carré et en les additionnant, nous obtenons

$$\alpha^2\omega^2 + \gamma^2 = \omega^2 + \beta^2 \quad (2.23)$$

Ce qui implique que,

$$\omega^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{1 - \alpha^2}.$$

Maintenant, on va dériver l'équation (2.21)

$$(1 + [\alpha - \tau(\alpha\lambda + \gamma)]e^{-\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(\alpha\lambda + \gamma)e^{-\lambda\tau}. \quad (2.24)$$

Supposons que $\gamma^2 > \beta^2$. Dans ce cas, il y a des racines qui sont purement imaginaires et simples. D'après l'équation (2.24), on trouve

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{e^{\lambda\tau} + \alpha}{\lambda(\alpha\lambda + \gamma)} - \frac{\tau}{\lambda}, \quad \text{avec} \quad e^{\lambda\tau} = -\frac{\alpha\lambda + \gamma}{\lambda + \beta}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\}_{\lambda=i\omega}, \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda(\alpha\lambda + \gamma)} \right) + \text{Re} \left(\frac{\alpha}{\lambda(\alpha\lambda + \gamma)} \right) \right\}_{\lambda=i\omega}, \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(-\frac{1}{\lambda(\lambda + \beta)} \right) + \text{Re} \left(\frac{\alpha}{\lambda(\alpha\lambda + \gamma)} \right) \right\}_{\lambda=i\omega}, \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{i(\beta - i\omega)}{\omega(\omega^2 + \beta^2)} \right) + \text{Re} \left(\frac{-i\alpha(\gamma - i\alpha\omega)}{\omega(\gamma^2 + \alpha^2\omega^2)} \right) \right\}, \\ &= \text{sign} \left\{ \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2\omega^2} \right\}, \\ &= \text{sign} \left\{ \frac{1 - \alpha^2}{\omega^2 + \beta^2} \right\}, \quad \text{car on a utilisé (2.23),} \\ &= \text{sign} \{1 - \alpha^2\} = 1, \quad \text{car } \omega > 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Donc, on conclut que si $|\alpha| < 1$, alors

$$\text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=i\omega} = 1 > 0. \tag{2.26}$$

Ceci signifie que toutes les racines qui coupent l'axe imaginaire en $i\omega$ se déplacent de gauche à droite lorsque τ augmente.

On va examiner deux cas :

1. Cas où $\beta + \gamma < 0$.

Pour $\tau = 0$, l'équation (2.21) devient

$$\lambda(0)(1 + \alpha) = -(\beta + \gamma),$$

donc

$$\lambda(0) = -\frac{(\beta + \gamma)}{(1 + \alpha)} > 0.$$

Autrement dit, la solution triviale $x^* = 0$ de (2.19) est instable en l'absence du retard, et selon (2.26), cette instabilité persiste pour toute valeur de $\tau > 0$.

2. Cas où $\beta + \gamma > 0$.

Dans ce cas,

$$\lambda(0) = -\frac{(\beta + \gamma)}{(1 + \alpha)} < 0,$$

alors, $x^* = 0$ est asymptotiquement stable lorsqu'il n'y a pas de retard. De (2.22), nous avons

$$\cos \omega\tau = \frac{-(\alpha\omega^2 + \beta\gamma)}{\gamma^2 + \alpha^2\omega^2},$$

et

$$\sin \omega\tau = \frac{\omega(\gamma - \beta\alpha)}{\gamma^2 + \alpha^2\omega^2}.$$

À partir de là, il n'y a qu'un seul angle v compris entre 0 et 2π tel que $\omega\tau = v$ vérifiant le système ci-dessus. Remarquons que $\gamma^2 > \beta^2$, $\beta + \gamma > 0$, et donc $\gamma - \beta > 0$. Par conséquent, $\gamma > |\beta| \geq 0$, ce qui signifie que $\sin v > 0$. Donc,

$$v = \operatorname{arccot} \left(-\frac{\alpha\omega^2 + \beta\gamma^2}{\omega(\gamma - \beta\alpha)} \right),$$

et $0 < v < \pi$. On note

$$\tau^* = \frac{v}{\omega}.$$

Donc, si $0 < \tau < \tau^*$, alors $x^* = 0$ est asymptotiquement stable et quand $\tau > \tau^*$ il est instable.

Remarque 2.3 *Il est évident que si $\gamma^2 < \beta^2$, alors l'équation (2.20) n'a pas de racines purement imaginaires, ce qui signifie qu'il n'y a pas de racines de (2.20) qui traversent l'axe imaginaire lorsque τ augmente. Par conséquent, le choix du retard discret τ n'affecte pas la stabilité. Dans le cas où $\beta = \gamma \neq 0$, on trouve que $\omega = 0$ mais d'après l'hypothèse $\beta + \gamma = 0$, $\lambda = 0$ n'est pas une racine de (2.20). Par conséquent, il n'y a pas de changement de stabilité.*

Le théorème ci-dessous résume l'analyse de la stabilité de l'équation (2.19), qui a été précédemment effectuée en utilisant l'équation (2.20). Le lecteur peut consulter le livre de Kuang [20] pour le traitement des cas critiques.

Théorème 2.10 *On suppose que $|\alpha| \neq 1$, alors on a les résultats suivants,*

1. *Si $|\alpha| > 1$, alors l'équilibre $x^* = 0$ est instable pour tout retard positif τ .*
2. *Si $|\alpha| < 1$, $\gamma^2 < \beta^2$ ou $\gamma = \beta \neq 0$, alors τ ne change pas la stabilité de l'équilibre $x^* = 0$.*
3. *Si $|\alpha| < 1$, $\gamma^2 > \beta^2$ et :*
 - a) *$\beta + \gamma < 0$, alors l'équilibre $x^* = 0$ est instable pour $\tau > 0$.*
 - b) *$\beta + \gamma > 0$, alors l'équilibre $x^* = 0$ est asymptotiquement stable pour $\tau < \tau^*$ et instable pour $\tau > \tau^*$ où $\tau^* = \frac{v}{\omega}$ et*

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma^2 - \beta^2}{1 - \alpha^2}}, \quad v = \operatorname{arccot} \left(-\frac{\alpha\omega^2 + \beta\gamma^2}{\omega(\gamma - \beta\alpha)} \right).$$

Chapitre 3

Modélisation mathématiques par les EDRs

Dans la modélisation mathématiques, les équations différentielles à retard sont utilisées pour décrire les phénomènes du monde réel lorsqu'il y a un délai (retard) entre les causes et les effets. Ce type d'équations est particulièrement utile dans la modélisation des systèmes biologiques, tels que la dynamique des populations et la propagation des maladies, lorsqu'il y a un décalage entre l'introduction d'un agent pathogène et l'apparition d'une maladie.

Dans la partie suivante, on va présenter quelques modèles connus dans la modélisation mathématiques par les EDRs.

3.1 Modèle logistique avec retard

Tout d'abord, nous rappelons le modèle logistique sans retard. Puis, nous introduisons le retard pour remarquer son effet sur ce modèle.

Le modèle logistique, également connu sous le nom du modèle de Verhulst, est un modèle mathématique qui décrit la croissance d'une population au cours du temps (voir [23]). L'équation du modèle logistique est donnée par, pour $t \geq 0$,

$$\frac{dN}{dt}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad (3.1)$$

où $r > 0$ est le taux de croissance intrinsèque de la population (supposé positif ici) et $K > 0$ est la capacité limite du milieu.

L'équation (3.1) est une équation de type Bernoulli. Sa solution est donnée par,

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.2)$$

où $N(0) = N_0$ est la densité initiale de la population. L'équation (3.1) admet deux points d'équilibre, l'origine 0 et K . Pour déterminer la stabilité des équilibres, on pose :

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

et on calcule la valeur de la dérivée de la fonction $f(x)$ en 0 et en K :

$$f'(x) = r \left(1 - \frac{2x}{K}\right).$$

On trouve que :

- $f'(0) = r > 0$, donc l'origine est instable.
- $f'(K) = -r < 0$, donc $x^* = K$ est asymptotiquement stable.

Pour toute condition initiale positive, nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K, \quad \text{indépendamment de } r.$$

C'est ce que l'on remarque dans la figure suivante.

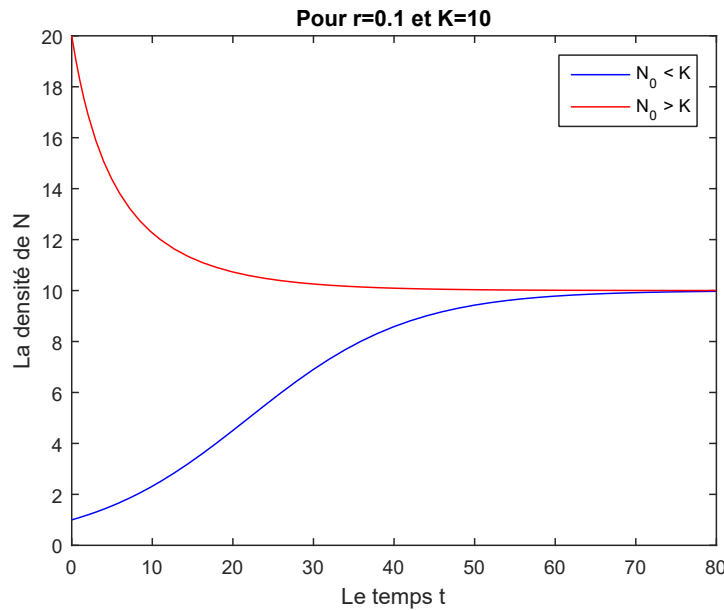


FIGURE 3.1 – Simulation numérique du modèle logistique sans retard.

Maintenant, nous allons introduire le modèle logistique avec retard, appelé équation de Hutchinson (1948), voir [20],

$$\frac{dN}{dt}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right), \quad (3.3)$$

où τ est un retard discret positif. En pratique, le processus de reproduction qui fait croître une population n'est pas instantané. Dans les populations animales, le processus de reproduction implique souvent une période de gestation ou d'incubation pendant laquelle les œufs se développent avant de donner naissance à une nouvelle génération. De même, dans les populations végétales, le temps de germination des graines peut varier en fonction des conditions environnementales.

L'écologue britannique G.E. Hutchinson a proposé d'intégrer la durée de formation des œufs dans les modèles de dynamique des populations. Cette approche permet de prendre en compte le temps nécessaire à la reproduction et à la croissance de la population, et donc de mieux comprendre les mécanismes qui régulent les fluctuations de la taille des populations (voir la figure suivante).

Il est observé que lorsque les valeurs de τ sont petites, par exemple $\tau = 0.5$, la solution de l'équation (3.3) ressemble à celle d'une EDO, sans fluctuations visibles. Toutefois, en augmentant la valeur de τ , des oscillations apparaissent.

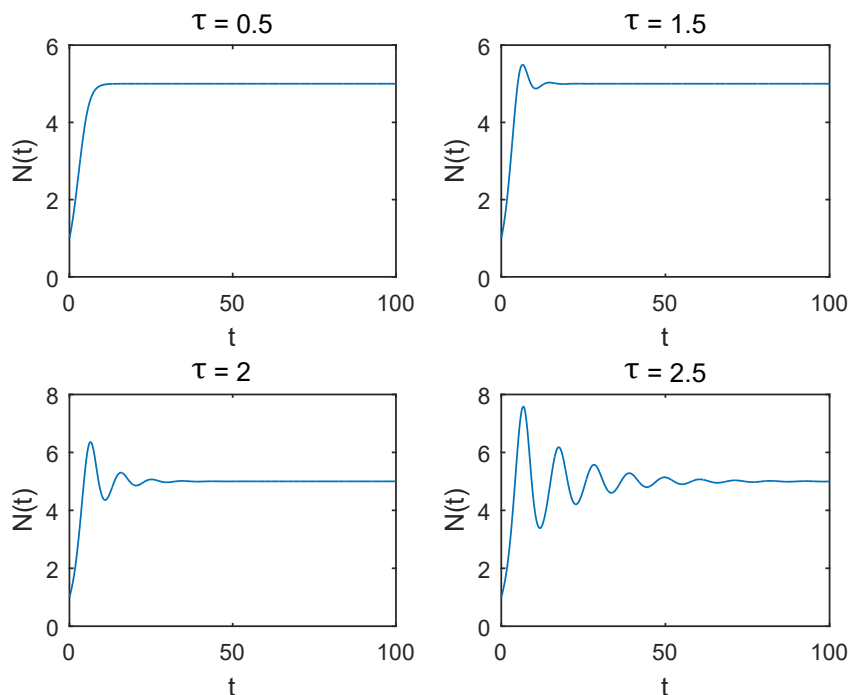


FIGURE 3.2 – Simulation numérique de la solution de l'équation (3.3) avec $r = 0.5$ et $K = 5$ pour différentes valeurs de τ et la condition initiale $N(t) = 1$ sur $[-\tau, 0]$.

On peut démontrer en utilisant des résultats du Chapitre 2 que l'équilibre $y^* = K$ est asymptotiquement stable si $r\tau < \frac{\pi}{2}$ et instable si $r\tau > \frac{\pi}{2}$ (voir Figure 3.3).

3.2 Modèle de Mackey-Glass

Il existe un nombre énorme de systèmes physiologiques qui impliquent ou dépendent du comportement périodique de certains sous-composants du système. Par exemple, de nombreux processus homéostatiques dépendent de la rétroaction négative pour contrôler la concentration de substances dans le sang ; la respiration, par exemple, est stimulée par la détection, par le cerveau, d'une concentration élevée de CO_2 dans le sang. Une façon de modéliser de tels systèmes mathématiquement est donnée par l'équation différentielle ordinaire suivante,

$$y'(t) = \beta - \gamma y(t), \quad (3.4)$$

où β représente le taux de production d'une "substance", tandis que γ détermine dans quelle mesure le niveau actuel de cette substance décourage la poursuite de sa production. Les solutions de cette équation peuvent être obtenues grâce à un facteur d'intégration, et ont la forme suivante,

$$y(t) = \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + y_0 e^{-\gamma t},$$

avec y_0 est la condition initiale du problème.

Cependant, le modèle ci-dessus suppose que les variations de concentration de la substance sont détectées immédiatement, ce qui n'est souvent pas le cas dans les systèmes

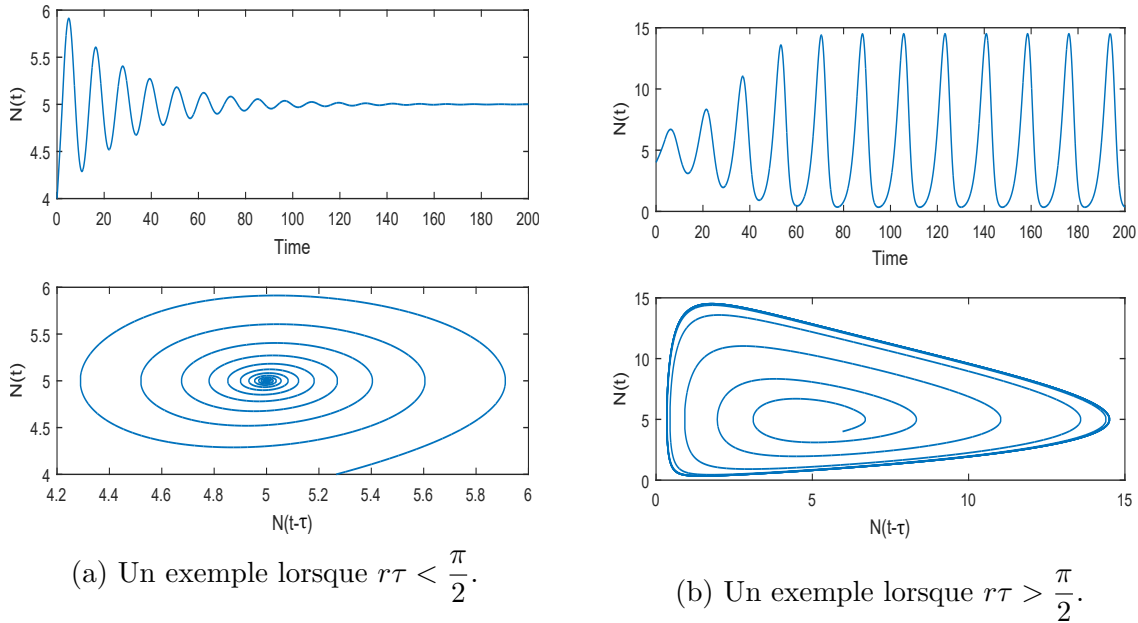


FIGURE 3.3 – Simulation numérique de la solution de l'équation (3.3) avec $r = 0.5$ et $K = 5$ et la condition initiale $N(t) = 4$ sur $[-\tau, 0]$.

physiologiques. Afin de résoudre ce problème, Mackey, M.C. et Glass, L. (1977) [22] ont proposé de changer le taux de production en une fonction $k(y(t-\tau))$ de la concentration à un point antérieur $t - \tau$ dans le temps, dans l'espoir que cela refléterait mieux le fait qu'il y a un délai significatif avant que la moelle osseuse ne produise et ne libère des cellules matures dans le sang, après avoir détecté une faible concentration de cellules dans le sang, on obtient

$$\frac{dx}{dt}(t) = \beta(x(t-\tau)) - \gamma x(t), \quad (3.5)$$

où :

- $x(t)$ est le nombre de cellules sanguines circulant à l'instant t .
- γ est le taux de dégradation de ces cellules.
- β est le taux de production des cellules sanguines, supposé dépendant de la quantité de cellules à l'instant $x(t-\tau)$.

On ne s'intéressera, dans cette section, qu'à une version spécifique de l'équation (3.5), qui est exprimée comme suit, voir [22],

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tau)}{\theta^n + x(t-\tau)^n} - \gamma x(t). \quad (3.6)$$

En posant $x(t) = \theta y(t)$, on peut normaliser l'équation (3.6), on trouve

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{\beta_0 y(t-\tau)}{1 + y(t-\tau)^n} - \gamma y(t). \quad (3.7)$$

Selon les valeurs des paramètres, cette équation peut présenter différentes dynamiques périodiques et chaotiques.

L'étude du comportement des solutions d'une équation en fonction de la variation du retard τ est intéressante, car cela reflète le temps nécessaire pour que le système

physiologique réagisse à une variation de concentration de substance. Si le délai augmente en raison d'une pathologie, cela peut causer des solutions chaotiques pour l'équation de Mackey-Glass. Plus spécifiquement, lorsque $\tau = 10$, la solution est régulière et périodique, ce qui peut être considéré comme un comportement "sain". En revanche, lorsque $\tau = 25$, la solution devient plus erratique (voir la figure suivante).

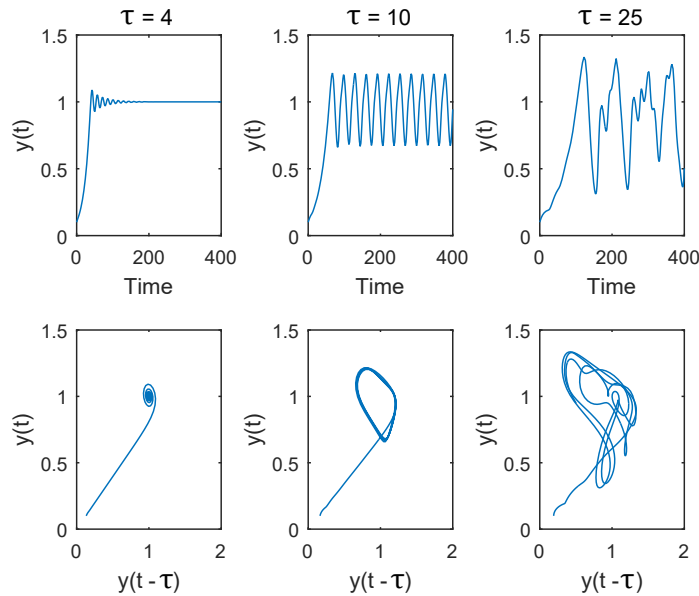


FIGURE 3.4 – Simulation numérique de la solution de l'équation (3.7) et sa portait du phase avec $\beta_0 = 0.2$, $\gamma = 0.1$ et $n = 10$ pour différentes valeurs de τ et la condition initiale $y(t) = 0.2$ sur $[-\tau, 0]$.

Voici quelques exemples concrets où l'équation de Mackey-Glass a trouvé des applications dans la pratique :

1. **Sciences biomédicales** : L'équation de Mackey-Glass a été utilisée dans le domaine de la physiologie pour modéliser les rythmes circadiens de certains processus biologiques. En ajustant les paramètres de l'équation, les chercheurs ont pu simuler et étudier la dynamique des systèmes physiologiques, tels que les schémas sommeil-éveil et la sécrétion d'hormones.
2. **Théorie du Chaos** : L'équation de Mackey-Glass est souvent utilisée comme exemple prototypique d'un système chaotique. Elle présente un comportement complexe et imprévisible qui est sensible aux conditions initiales. En tant que telle, elle a été largement étudiée dans le domaine de la théorie du chaos, qui a des applications dans des domaines tels que la physique, la météorologie et la cryptographie.
3. **Réseaux neuronaux** : L'équation de Mackey-Glass a été utilisée dans l'étude des réseaux neuronaux et de leur dynamique. Elle peut être utilisée comme modèle simplifié pour explorer le comportement et les propriétés des réseaux de neurones inter-connectés, contribuant ainsi à la compréhension du fonctionnement du cerveau et au développement de réseaux neuronaux artificiels.

3.3 Modèle de Nicholson

En 1950, Alexander J. Nicholson, un entomologiste australien bien connu, a effectué une série d'expériences pour étudier les populations de mouches carnivores responsables de 90 % des cas de myiase¹ ovine dans des pays tels que l'Australie, la Nouvelle-Zélande et l'Afrique du Sud. La mouche spécifique en question appartient à la famille des "Calliphoridae" et est appelée "mouche du mouton australien" ou "Lucilia cuprina" en latin [7].



FIGURE 3.5 – La lucilie cuivrée.

Le développement de cette mouche suit un cycle comprenant quatre étapes de croissance : l'œuf, la larve, la nymphe et l'adulte. La femelle de la mouche, lorsqu'elle est grasse, est attirée par les plis malodorants et humides de la laine ou les blessures sur la peau du mouton et pond en moyenne environ 250 œufs. Ces œufs éclosent et se transforment en larves carnivores en moins de 24 heures. Les asticots se nourrissent des sécrétions de la blessure et des tissus de la peau du mouton pendant 4 à 5 jours au cours des trois stades larvaires. Après la phase larvaire, les larves matures tombent au sol et s'enfoncent dans le sol pour se nymphoser, donnant ainsi naissance à de nouvelles jeunes mouches.

En 1980, Gurney, Blythe et Nisbet [13] ont été inspirés par les résultats expérimentaux de Nicholson et ont formulé l'équation à retard présentée ci-dessous. Cette équation permet de décrire comment la dynamique d'une population évolue au fil du temps,

$$P'(t) = \beta e^{-\mu\tau} P(t - \tau) \exp\left(-\frac{P(t - \tau)}{K}\right) - \mu P(t),$$

où :

- $P(t)$ désigne l'effectif de la population des lucilies cuivrées adultes à l'instant t .
- β est le maximum de la croissance quotidienne d'œufs par individu.
- K est la capacité limite du milieu.

1. Le terme "myiase" fait référence à toute forme de parasitisme d'un organisme vivant par les larves de diptères parasites.

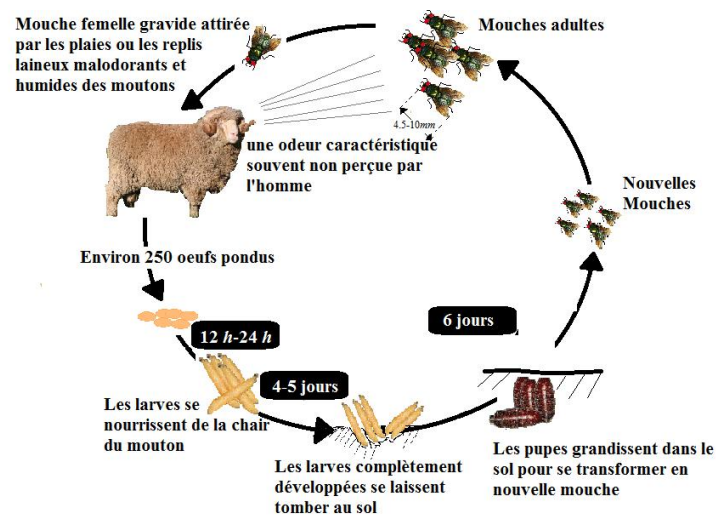
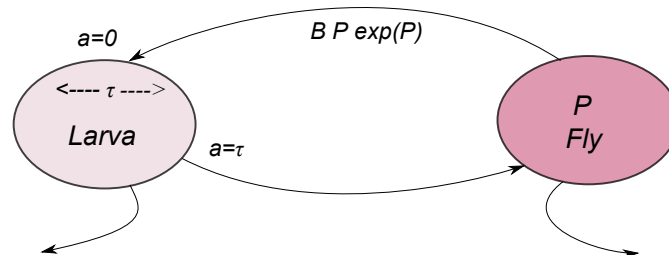


FIGURE 3.6 – Cycle de développement de la lucilie cuivrée [7].

- μ le taux de mortalité.
- τ est la durée de la phase de maturation (le cycle de développement). Ce cycle peut être expliqué dans cette figure.



Le modèle de Nicholson pour *Lucilia cuprina* a été développé pour aider à prédire la manière dont les stratégies de lutte antiparasitaire - comme l'utilisation de pesticides - peuvent affecter la croissance de la population de ces mouches, ainsi que pour identifier les conditions environnementales qui favorisent la croissance de la population. En comprenant mieux les facteurs qui influencent la dynamique de la population de *Lucilia cuprina*, les chercheurs peuvent développer des stratégies plus efficaces pour contrôler cette espèce de mouche et limiter son impact sur les animaux d'élevage.

Chapitre 4

Modèle SQIR à retard distribué

4.1 Introduction

De nombreux pays, comme l'Algérie, ont connu des vagues épidémiques récurrentes lors de l'épidémie de Coronavirus 2019 (COVID-19) (voir Figure 4.1). L'un des objectifs de ce chapitre est d'explorer les mécanismes derrière ces vagues épidémiques récurrentes d'un point de vue mathématique.

Pendant la pandémie de COVID-19, de nombreux pays ont imposé une quarantaine (confinement) pour limiter la propagation de l'épidémie. Cependant, il a été remarqué que le nombre d'infections a de nouveau augmenté après la levée de la quarantaine. Les vagues épidémiques récurrentes font référence à un schéma d'épidémies répétées d'une maladie infectieuse, malgré la mise en œuvre de mesures de quarantaine. Cela peut se produire lorsque les mesures de quarantaine ne sont pas suffisamment strictes pour arrêter complètement la propagation de la maladie, ou lorsque des individus rompent la quarantaine. Afin d'étudier ces vagues épidémiques, nous traitons un modèle avec quarantaine et à retard. Le retard décrit le temps nécessaire pour recueillir une quantité suffisante d'informations valides sur l'histoire d'une population infectieuse, ce qui peut influencer le comportement des gens (voir le modèle ci-dessous). Cela pourrait être plus réaliste car cela nous permet de considérer l'effet de l'histoire de l'épidémie dans un intervalle de temps fixe passé.

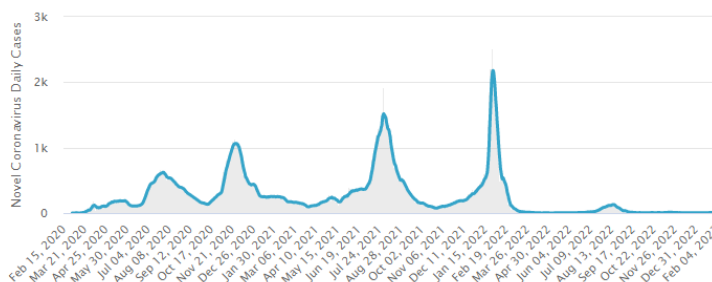


FIGURE 4.1 – Nouveaux cas quotidiens de Covid-19 en Algérie [8]

Dans la littérature, plusieurs articles considèrent des modèles à retard constant, dans lesquels le retard lui-même agit comme un paramètre de bifurcation pour une bifurcation

de Hopf. On peut cependant considérer l'effet de l'historique des solutions sur un intervalle de temps fixe en utilisant le retard distribué qui rend le modèle plus réaliste.

Pour cette perspective, nous considérons un modèle épidémique à retard distribué [21], et obtenons des conditions suffisantes pour une bifurcation de Hopf qui induit des solutions périodiques non triviales qui représentent les vagues épidémiques récurrentes.

4.2 Modèle et préliminaires

Tout d'abord, nous définissons les symboles pour les variables et les paramètres de ce modèle :

Symboles	Définitions
$S(t)$	La population susceptible à l'instant t .
$Q(t)$	La population mise en quarantaine à l'instant t .
$I(t)$	La population infectieuse à l'instant t .
$R(t)$	La population retirée (guérie et immunisée) à instant t .
b	Le taux de natalité.
μ	Le taux de mortalité.
β	Le taux d'infection.
γ	Le taux de guérissant dans le compartiment des infectés.
g	Le taux de transition du compartiment S vers le compartiment Q .
h	Le taux de transition du compartiment Q vers le compartiment S .

On suppose que g et h dépendent de l'historique de la population infectieuse, c'est-à-dire, $g = g(I)$ et $h = h(I)$, qui sont supposées donner par, pour $t \geq 0$,

$$g(I)(t) = q \int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau, \quad h(I)(t) = \frac{\delta}{1 + \alpha \int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau},$$

avec q et α représentent la sensibilité de la mise en quarantaine et de la levée de la quarantaine par rapport à l'historique de la population infectieuse. On note que $h(I)(t) = \delta$ si $\int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau = 0$.

La fonction $f(\tau)$ représente l'intensité, sur une durée τ passée, de la façon dont la population infectieuse affecte les taux de quarantaine et de levée à l'heure actuelle. Dans ce cas, nous définissons

$$U(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau,$$

comme étant la quantité d'informations valides sur l'historique de la population infectieuse au moment t . Nous supposons que le taux de quarantaine g et le taux de levée h sont proportionnels et inversement proportionnels à U , respectivement.

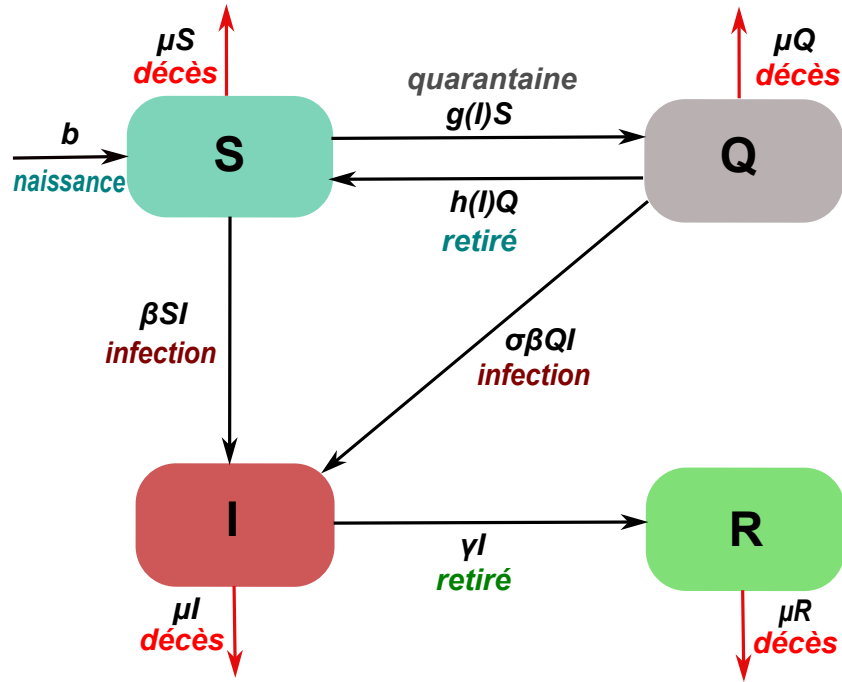


FIGURE 4.2 – Diagramme du modèle SQIR avec retard distribué.

Le modèle est donné par le système suivant d'équations différentielles à retard (voir Figure 4.2),

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - \mu S - g(I)S + h(I)Q, \\ Q' &= g(I)S - \sigma\beta QI - \mu Q - h(I)Q, \\ I' &= \beta(S + \sigma Q)I - (\mu + \gamma)I, \\ R' &= \gamma I - \mu R. \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes sur chaque paramètre :

- (H1) $b, \mu, \beta, \gamma, q, \delta$ et α sont des constantes strictement positives.
- (H2) σ : un coefficient indiquant que la quarantaine n'est pas stricte, avec $0 < \sigma < 1$.
- (H3) f est une fonction positive à support compact sur \mathbb{R}_+ et satisfait

$$\int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau = 1.$$

D'après (H3), il existe une constante $\tau^* > 0$ tel que

$$\int_0^{+\infty} f(\tau) I(t - \tau) d\tau = \int_0^{\tau^*} f(\tau) I(t - \tau) d\tau,$$

car $f(\tau) = 0$ pour $\tau > \tau^*$. Comme les équations de S, Q et I dans le système (4.1) sont indépendantes de R , on peut éliminer l'équation de R pour obtenir le système réduit suivant,

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - \mu S - g(I)S + h(I)Q, \\ Q' &= g(I)S - \sigma\beta QI - \mu Q - h(I)Q, \\ I' &= \beta(S + \sigma Q)I - (\mu + \gamma)I. \end{cases} \quad (4.2)$$

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-\tau^*, 0]$ dans \mathbb{R}^3 , avec la norme,

$$\|\varphi\|_E := \sup_{\theta \in [-\tau^*, 0]} \|\varphi(\theta)\|_\infty, \quad \varphi \in E.$$

où $\|\cdot\|_\infty$ représente la norme infinie dans \mathbb{R}^3 définie par,

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3.$$

On définit le cône positif de E par $E_+ := C([- \tau^*, 0], \mathbb{R}_+^3)$, et l'espace des solutions pour le système (4.2) par,

$$\Omega := \left\{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in E_+ \mid 0 \leq \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\theta) \leq N = \frac{b}{\mu}, \text{ pour tout } -\tau^* \leq \theta \leq 0 \right\}.$$

4.2.1 L'existence et l'unicité

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $u(t) := (S(t), Q(t), I(t))^T$. Pour tout $t \geq 0$ et $-\tau^* \leq \theta \leq 0$, on note $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, donc on peut réécrire le système (4.2) comme étant $u'(t) = F(u_t)$, où F est une fonction sur E définie par,

$$F(\varphi) = \begin{pmatrix} b - \beta\varphi_1(0)\varphi_3(0) - \mu\varphi_1(0) - g(\varphi_3)\varphi_1(0) + h(\varphi_3)\varphi_2(0) \\ g(\varphi_3)\varphi_1(0) - \sigma\beta\varphi_2(0)\varphi_3(0) - \mu\varphi_2(0) - h(\varphi_3)\varphi_2(0) \\ \beta(\varphi_1(0) + \sigma\varphi_2(0))\varphi_3(0) - (\mu + \gamma)\varphi_3(0) \end{pmatrix},$$

où

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \in E.$$

Soit $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ la condition initiale du système (4.2),

$$S(\theta) = \phi_1(\theta), \quad Q(\theta) = \phi_2(\theta), \quad I(\theta) = \phi_3(\theta), \quad \text{pour tout } -\tau^* \leq \theta \leq 0. \quad (4.3)$$

Tout d'abord, il faut montrer que le problème de Cauchy (4.2)-(4.3) admet bien une solution unique sur Ω . On remarque bien que $F = (F_1, F_2, F_3)^T$ est continue sur Ω . Donc, le résultat d'existence est bien vérifié (voir Chapitre 2).

Maintenant, afin de garantir l'unicité, nous allons démontrer que F est lipschitzienne sur Ω . Soient $u, v \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
|F_1(u) - F_1(v)| &= \left| [b - \beta u_1(0)u_3(0) - \mu u_1(0) - g(u_3)u_1(0) + h(u_3)u_2(0)], \right. \\
&\quad \left. - [b - \beta v_1(0)v_3(0) - \mu v_1(0) - g(v_3)v_1(0) + h(v_3)v_2(0)] \right|, \\
&\leq \beta |u_1(0)u_3(0) - v_1(0)v_3(0)| + \mu |u_1(0) - v_1(0)|, \\
&\quad + |g(u_3)u_1(0) - g(v_3)v_1(0)| + |h(u_3)u_2(0) - h(v_3)v_2(0)|, \\
&\leq \beta u_3(0) |u_1(0) - v_1(0)| + \beta v_1(0) |u_3(0) - v_3(0)| + \mu |u_1(0) - v_1(0)|, \\
&\quad + g(u_3) |u_1(0) - v_1(0)| + v_1(0) |g(u_3) - g(v_3)|, \\
&\quad + h(u_3) |u_2(0) - v_2(0)| + v_2(0) |h(u_3) - h(v_3)|.
\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes et en utilisant le fait que $\int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau = 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
|F_1(u) - F_1(v)| &\leq [(\beta + q)N + \mu] |u_1(0) - v_1(0)| + \delta |u_2(0) - v_2(0)| + \beta N |u_3(0) - v_3(0)|, \\
&\quad + qN \int_0^{+\infty} f(\tau) |u_3(-\tau) - v_3(-\tau)| d\tau, \\
&\quad + N \left| \frac{\delta}{1 + \alpha \int_0^{+\infty} f(\tau) u_3(-\tau) d\tau} - \frac{\delta}{1 + \alpha \int_0^{+\infty} f(\tau) v_3(-\tau) d\tau} \right|.
\end{aligned}$$

Après avoir unifié les dénominateurs du dernier terme, on trouve

$$\begin{aligned}
|F_1(u) - F_1(v)| &\leq [(2\beta + q)N + \mu + \delta] \|u - v\|_E + (q + \alpha\delta)N \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \|u - v\|_E, \\
&= K_1 \|u - v\|_E.
\end{aligned}$$

Où $K_1 = (2\beta + 2q + \alpha\delta)N + \mu + \delta$. D'une manière similaire, on trouve que,

$$|F_i(u) - F_i(v)| \leq K_i \|u - v\|_E, \quad \text{pour } i = 2, 3.$$

Avec $K_2 = [2q + \delta(1 + \alpha) + 2\sigma\beta]N$ et $K_3 = \beta N(1 + \sigma) + \mu + \gamma$.

Donc, d'après le théorème 2.3, le système (4.2) admet une solution unique locale u pour $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T \in \Omega$.

4.2.2 La positivité

Premièrement, la positivité de I est évidente, de l'équation de I dans le système (4.2). En effet,

$$\forall t > 0, \quad I(t) = \phi_3(0) e^{\int_0^t [\beta(S(a) + \sigma Q(a)) - (\mu + \gamma)] da} \geq 0, \quad \text{car } \phi_3(0) \geq 0.$$

On suppose qu'il existe $t_1 > 0$ tel que,

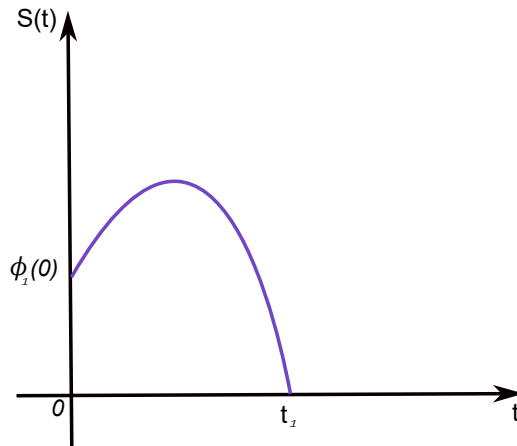
$$S(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \in (0, t_1) \quad \text{et} \quad S(t_1) = 0,$$

et $S'(t_1) < 0$ (voir la figure ci-dessous) De l'équation de S , on a,

$$S'(t_1) = b + h(I)(t_1)Q(t_1) \geq b > 0.$$

C'est absurde, donc $S(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$.

D'une manière similaire, on montre que $Q(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$.



Notre objectif maintenant est de garantir que la solution est bornée.

4.2.3 La solution bornée

On somme les trois équations du système (4.2) et on trouve que

$$(S + Q + I)' = b - \mu(S + Q + I) - \gamma I \leq b - \mu(S + Q + I),$$

alors,

$$((S + Q + I)e^{\mu t})' \leq b e^{\mu t},$$

donc,

$$S(t) + Q(t) + I(t) \leq \frac{b}{\mu} - \left(\frac{b}{\mu} - \sum_{i=1}^3 \phi_i(0) \right) e^{-\mu t} \leq \frac{b}{\mu}.$$

Ce qui donne

$$S(t) + Q(t) + I(t) \leq \frac{b}{\mu} = N.$$

Pour récapituler, nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.1 Ω est positivement invariant pour le système (4.2), c'est à dire, si $\phi \in \Omega$, alors $u_t \in \Omega$ pour tout $t > 0$.

4.2.4 Les points d'équilibre

Deux types d'équilibres sont possibles pour le système (4.2) :

- "L'équilibre sans maladie" : $E^0 : (S, Q, I) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0 \right)$.
- "L'équilibre endémique" : $E^* : (S, Q, I) = (S^*, Q^*, I^*)$, $I^* > 0$.

Il est clair que $E^0 \in \Omega$, on linéarise l'équation d'infection I' autour de E^0 ,

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta N I(t) - (\mu + \gamma) I(t), \\ &= [\beta N - (\mu + \gamma)] I(t). \end{aligned}$$

On va calculer le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 pour le système (4.2) en utilisant une méthode appelée "la matrice de la prochaine génération". Comme l'équation d'infection I' est indépendante du retard τ , on peut appliquer cette méthode (voir [10]). Ainsi, nous obtenons

$$F = \beta N \quad \text{et} \quad V = \mu + \gamma,$$

comme $\mu + \gamma \neq 0$, alors V est inversible et $V^{-1} = \frac{1}{\mu + \gamma}$. Donc,

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta N}{\mu + \gamma}.$$

Par conséquent, on peut réécrire l'équation d'infection I' de la manière suivante,

$$I'(t) = (\mu + \gamma)[\mathcal{R}_0 - 1]I(t).$$

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors $I' > 0$ c'est à dire I est croissante "localement" autour de l'équilibre E^0 . D'après l'équation linéarisé de I , on obtient

$$I(t) = \phi_3(0) e^{(\mu + \gamma)[\mathcal{R}_0 - 1]t}.$$

Nous allons voir que :

- Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors E^0 est globalement asymptotiquement stable.
- Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors E^0 est instable.

La proposition suivante énonce que \mathcal{R}_0 détermine aussi l'existence d'un équilibre unique endémique E^* dans Ω .

Proposition 4.2 *Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le système (4.2) admet un équilibre unique endémique E^* dans Ω . Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors le système (4.2) n'admet aucun équilibre endémique E^* dans Ω .*

PREUVE. A partir du système (4.2) et en utilisant (H3), $E^* : (S, Q, I) = (S^*, Q^*, I^*)$ est solution strictement positive du système algébrique suivant,

$$\begin{cases} 0 = b - \beta S^* I^* - \mu S^* - q S^* I^* + \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*}, \\ 0 = q S^* I^* - \sigma \beta Q^* I^* - \mu Q^* - \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*}, \\ 0 = \beta(S^* + \sigma Q^*) I^* - (\mu + \gamma) I^*. \end{cases} \quad (4.4)$$

De la troisième équation du système (4.4), on trouve que

$$\beta(S^* + \sigma Q^*) = \mu + \gamma \iff S^* = \frac{\mu + \gamma}{\beta} - \sigma Q^*. \quad (4.5)$$

En sommant les trois équations du système (4.4), on trouve que

$$b - \mu(S^* + Q^* + I^*) - \gamma I^* = 0 \iff I^* = \frac{b}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\mu + \gamma}(S^* + Q^*). \quad (4.6)$$

En substituant (4.5) dans (4.6), on obtient

$$I^* = \frac{b}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} - (1 - \sigma) \frac{\mu}{\mu + \gamma} Q^*. \quad (4.7)$$

D'autre part, on substitue (4.5) dans la deuxième équation de (4.4) et on trouve que

$$q \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta} - \sigma Q^* \right) I^* - \sigma(q + \beta) Q^* I^* - \mu Q^* - \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*} = 0,$$

donc,

$$Q^* = \frac{q(\mu + \gamma)(1 + \alpha I^*) I^*}{\beta(1 + \alpha I^*)[\sigma(q + \beta)I^* + \mu] + \beta\delta}. \quad (4.8)$$

En substituant (4.8) dans (4.7), on trouve

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{b}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} - (1 - \sigma) \frac{\mu}{\beta} \frac{q(1 + \alpha I^*) I^*}{(1 + \alpha I^*)[\sigma(q + \beta)I^* + \mu] + \delta}, \\ \implies I^* &= \frac{\mu}{\beta} \left[\mathcal{R}_0 - 1 - \frac{(1 - \sigma)q(1 + \alpha I^*) I^*}{(1 + \alpha I^*)[\sigma(q + \beta)I^* + \mu] + \delta} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En réarrangeant (4.9) en $G(I^*) = 0$ telle que,

$$\begin{aligned} G(x) &= \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \\ \alpha_3 &= \alpha\beta\sigma(q + \beta), \\ \alpha_2 &= \alpha\beta\mu + \beta\sigma(q + \beta) - \alpha\mu(\mathcal{R}_0 - 1)\sigma(q + \beta) + \alpha\mu(1 - \sigma)q, \\ \alpha_1 &= \beta(\mu + \delta) - \mu(\mathcal{R}_0 - 1)[\alpha\mu + \sigma(q + \beta)] + \mu(1 - \sigma)q, \\ \alpha_0 &= -\mu(\mu + \delta)(\mathcal{R}_0 - 1). \end{aligned}$$

On suppose que $\mathcal{R}_0 > 1$, comme $\alpha_3 > 0$ et $G(0) = \alpha_0 < 0$, $G(x) = 0$ possède au moins une racine positive $I^* > 0$. De (4.9), on conclut que $I^* < \frac{b}{\mu + \gamma} < N$. De plus, comme $Q^* > 0$ on trouve que,

$$S^* = \frac{1}{(\beta + q)I^* + \mu} \left(b + \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*} \right) > 0 \quad \text{et} \quad S^* + Q^* + I^* = \frac{b}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu} I^* < \frac{b}{\mu} = N.$$

Par conséquent, $E^* \in \Omega$. Et comme le second membre de (4.9) est strictement décroissant par rapport à I^* , donc (4.9) admet un point fixe unique $I^* > 0$.

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ et $G(0) = \alpha_0 \geq 0$. Ce qui implique que G est strictement croissante sur $(0, \infty)$, donc $G(x) = 0$ n'admet aucune racine positive $I^* > 0$. Cette preuve est maintenant complète. ■

La prochaine étape consiste à analyser la stabilité locale des équilibres en procédant à une linéarisation autour d'un équilibre afin de construire l'équation caractéristique.

4.3 La stabilité des équilibres

On pose $X = S - \tilde{S}$, $Y = Q - \tilde{Q}$ et $Z = I - \tilde{I}$ des perturbations d'équilibre sans maladie ou d'équilibre endémique $(\tilde{S}, \tilde{Q}, \tilde{I})^T \in \Omega$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
g(I)S &= qS \int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau, \\
&= q(X + \tilde{S}) \int_0^{+\infty} f(\tau)(Z(t-\tau) + \tilde{I})d\tau, \\
&= q\tilde{S}\tilde{I} + q\tilde{I}X + q\tilde{S} \int_0^{+\infty} f(\tau)Y(t-\tau)d\tau + qX \int_0^{+\infty} f(\tau)Y(t-\tau)d\tau. \\
h(I)Q &= \frac{\delta Q}{1 + \alpha \int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau}, \\
&= \frac{\delta(Y + \tilde{Q})}{1 + \alpha \int_0^{+\infty} f(\tau)(Z(t-\tau) + \tilde{I})d\tau}, \\
&= \frac{\delta(Y + \tilde{Q})}{1 + \alpha\tilde{I}} \frac{1}{1 + \frac{\alpha \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t-\tau)d\tau}{1 + \alpha\tilde{I}}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$. Pour notre cas, on a

$$u = \frac{\alpha \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t-\tau)d\tau}{1 + \alpha\tilde{I}},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
h(I)Q &= \frac{\delta(Y + \tilde{Q})}{1 + \alpha\tilde{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{\alpha \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t-\tau)d\tau}{1 + \alpha\tilde{I}} \right]^n, \\
&= \frac{\delta(Y + \tilde{Q})}{1 + \alpha\tilde{I}} - \frac{\sigma\delta\tilde{Q}}{(1 + \alpha\tilde{I})^2} \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t-\tau)d\tau + (\text{des termes d'ordre supérieure}).
\end{aligned}$$

Donc, le système (4.2) est linéarisé autour l'équilibre $(\tilde{S}, \tilde{Q}, \tilde{I})^T$ comme suit,

$$\begin{cases}
X'(t) = -[(\beta + q)\tilde{I} + \mu]X + \frac{\delta}{1 + \alpha\tilde{I}}Y - \beta\tilde{S}Z - \left[q\tilde{S} + \frac{\alpha\delta\tilde{Q}}{(1 + \alpha\tilde{I})^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t-\tau)d\tau, \\
Y'(t) = q\tilde{I}X - \left(\sigma\beta\tilde{I} + \mu + \frac{\delta}{1 + \alpha\tilde{I}} \right) Y - \sigma\beta\tilde{Q}Z + \left[q\tilde{S} + \frac{\alpha\delta\tilde{Q}}{(1 + \alpha\tilde{I})^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t-\tau)d\tau, \\
Z'(t) = \beta\tilde{I}X + \sigma\beta\tilde{I}Y + [\beta(\tilde{S} + \sigma\tilde{Q}) - (\mu + \gamma)]Z.
\end{cases} \tag{4.10}$$

Selon la proposition ci-dessous, le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 détermine la stabilité locale de l'équilibre sans maladie E^0 .

Proposition 4.3 *Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie $E^0 := (N, 0, 0)$ du système (4.2) est localement asymptotiquement stable. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors E^0 est instable.*

PREUVE.

En se servant de (4.10), on construit l'équation caractéristique pour l'état d'équilibre E^0 , qui prend la forme suivante,

$$P(\lambda) := \begin{vmatrix} \lambda + \mu & -\delta & \beta N + qN \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ 0 & \lambda + \mu + \delta & -qN \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ 0 & 0 & \lambda - \beta N + \mu + \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Il est clair que l'équation caractéristique ci-dessus possède trois racines $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(\mu + \delta)$ et $\lambda_3 = \beta N - (\mu + \delta) = (\mu + \delta)(\mathcal{R}_0 - 1)$. Elles sont toutes négatives si $\mathcal{R}_0 < 1$ ce qui implique que E^0 est localement asymptotiquement stable.

D'autre part, si $\mathcal{R}_0 > 1$ alors E^0 est instable car $\lambda_3 > 0$. ■

Il est possible d'énoncer un résultat sur la stabilité globale de l'équilibre sans maladie E^0 à l'aide d'une fonction de Lyapunov. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.4 *Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans maladie E^0 du système (4.2) est globalement asymptotiquement stable dans Ω .*

PREUVE. On considère la fonction $V : E_+ \rightarrow \mathbb{R}$ défini par,

$$V(u_t) = \frac{1}{2}[(S(t) - N) + Q(t) + I(t)]^2 + \frac{2\mu + \gamma}{\beta}I(t).$$

On calcule la dérivée de V le long de la trajectoire de la solution du système (4.2). On trouve

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\partial V}{\partial S}S' + \frac{\partial V}{\partial Q}Q' + \frac{\partial V}{\partial I}I', \\ &= [(S - N) + Q + I][b - \mu S - \mu Q - (\mu + \gamma)I] + \frac{2\mu + \gamma}{\beta}I'. \end{aligned}$$

Comme $b = \mu N$, alors nous avons

$$\begin{aligned} V' &= [(S - N) + Q + I][\mu N - \mu S - \mu Q - (\mu + \gamma)I] + \frac{2\mu + \gamma}{\beta}I', \\ &= -\mu[(S - N) + Q]^2 - (2\mu + \gamma)[(S - N) + Q]I - (\mu + \gamma)I^2 + \frac{2\mu + \gamma}{\beta}[\beta(S + \sigma Q) - (\mu + \gamma)]I, \\ &= -\mu[(S - N) + Q]^2 - (\mu + \gamma)I^2 + \frac{2\mu + \gamma}{\beta}[\beta N - (\mu + \gamma) - \beta(1 - \sigma)Q]I, \\ &= -\mu[(S - N) + Q]^2 - (\mu + \gamma)I^2 + \frac{2\mu + \gamma}{\beta(\mu + \gamma)}(\mathcal{R}_0 - 1)I - (2\mu + \gamma)(1 - \sigma)QI. \end{aligned}$$

$\implies V' \leq 0$ lorsque $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

Nous allons maintenant introduire un lemme appelé lemme de Barbalat, qui est extrêmement utile dans notre contexte pour garantir l'attractivité globale de l'équilibre sans maladie E^0 , afin de compléter la preuve.

Lemme 4.1 [4] *Supposons que $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ soit uniformément continue et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ existe. Alors, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$.*

PREUVE. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f ,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Pour un tel δ , puisque l'intégrale de f sur \mathbb{R} converge,

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x| \geq A \implies \left| \int_x^{x+\delta} f(t) dt \right| \leq \varepsilon \delta \right).$$

On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x| \geq A \implies \delta |f(x)| = \left| \int_x^{x+\delta} f(x) dt \right| \leq \int_x^{x+\delta} |f(x) - f(t)| dt + \left| \int_x^{x+\delta} f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon \delta \right),$$

donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x| \geq A \implies |f(x)| \leq 2\varepsilon).$$

■

Revenons maintenant à notre cas. Comme $\mathcal{R}_0 \leq 1$ alors,

$$V' \leq -(\mu + \gamma)I^2 \leq 0. \tag{4.11}$$

Ce qui implique que V est décroissante. De plus, on a $V \geq 0$ donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(u_t) = V^*.$$

En intégrant l'inégalité (4.11) sur $(0, t)$, on trouve

$$(\mu + \gamma) \int_0^t I^2(s) ds \leq V(u_0) - V(u_t),$$

comme I est continue et bornée sur $[0, +\infty)$ alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t I^2(s) ds \leq \frac{1}{\mu + \gamma} (V(u_0) - V^*).$$

De l'équation (4.2) et de la sous-section 4.2.3, on déduit que I' est bornée. Par conséquent, I est uniformément continue. En utilisant le lemme de Barbalat appliqué à la fonction $t \mapsto \int_0^t I^2(s) ds$, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I^2(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0.$$

Ce qui implique que,

$$(S(t), Q(t), I(t))^T \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (N, 0, 0).$$

Par conséquent, on a garanti l'attractivité globale de l'équilibre sans maladie $E^0 = (N, 0, 0)$. Et comme nous l'avons précédemment démontré que E^0 est localement asymptotiquement stable, nous pouvons en déduire que E^0 est également globalement asymptotiquement stable. ■

Donc, la Proposition 4.4 suggère qu'il est bénéfique de rendre le taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 \leq 1$ pour ralentir la propagation de l'épidémie dans notre modèle.

Le paragraphe suivant se concentrera sur le cas où $\mathcal{R}_0 > 1$. Selon la Proposition 4.2, un seul équilibre endémique E^* peut exister dans le système (4.2). En se basant sur les équations (4.5) et (4.10), l'équation caractéristique qui correspond à E^* peut être exprimée comme suit :

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\beta + q)I^* + \mu & -\frac{\delta}{1 + \alpha I^*} & \beta S^* + \left[qS^* + \frac{\alpha \delta Q^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ -qI^* & \lambda + \sigma \beta I^* + \mu + \frac{\delta}{1 + \alpha I^*} & \sigma \beta Q^* - \left[qS^* + \frac{\alpha \delta Q^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ -\beta I^* & -\sigma \beta I^* & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Nous allons maintenant étudier les deux situations suivantes :

- i) q est suffisamment petit.
- ii) δ est suffisamment grand.

Ces cas représentent la situation où la quarantaine est moins restrictive. La proposition suivante indique que E^* est asymptotiquement stable dans ces cas.

Proposition 4.5 *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. Alors, l'équilibre endémique E^* du système (4.2) est localement asymptotiquement stable si une des conditions suivantes est satisfaite :*

- i) q est suffisamment petit.
- ii) δ est suffisamment grand.

PREUVE. Soit $\mathcal{R}_0 > 1$.

- i) Par la continuité, il suffit de considérer le cas où $q \rightarrow 0$. on peut voir que

$$(S^*, Q^*, I^*)^T \xrightarrow{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, 0, \frac{\mu(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta} \right).$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} P(\lambda) &\xrightarrow{q \rightarrow 0^+} \begin{vmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu & -\frac{\delta}{1 + \alpha I^*} & \beta S^* \\ 0 & \lambda + \sigma \beta I^* + \mu + \frac{\delta}{1 + \alpha I^*} & 0 \\ -\beta I^* & -\sigma \beta I^* & \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \left(\lambda + \sigma \beta I^* + \mu + \frac{\delta}{1 + \alpha I^*} \right) [\lambda^2 + (\beta I^* + \mu)\lambda + \beta^2 S^* I^*], \\ &= \left[\lambda + \sigma \mu \mathcal{R}_0 + (1 - \sigma)\mu + \frac{\beta \delta}{\beta + \alpha \mu (\mathcal{R}_0 - 1)} \right] [\lambda^2 + \mu \mathcal{R}_0 \lambda + (\mu + \gamma)\mu(\mathcal{R}_0 - 1)], \\ &= 0. \end{aligned}$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz, il apparaît que l'équation cubique du côté droit possède uniquement des racines avec des parties réelles négatives. Par conséquent, si q est suffisamment petit, on peut en déduire que E^* est asymptotiquement stable.

ii) Par la continuité, il suffit de considérer le cas où $\delta \rightarrow +\infty$. Comme le premier cas, on trouve que

$$(S^*, Q^*, I^*)^T \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, 0, \frac{\mu(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta} \right).$$

De plus, d'après (4.8), on obtient

$$\delta Q^* \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} \frac{q(\mu + \gamma)(1 + \alpha I^*) I^*}{\beta}.$$

On multiplie $P(\lambda)$ par $\frac{1}{\delta}$, on obtient

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\beta + q)I^* + \mu & -\frac{1}{1 + \alpha I^*} & \beta S^* + \left[qS^* + \frac{\alpha \delta Q^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ -qI^* & \frac{\lambda + \sigma \beta I^* + \mu}{\delta} + \frac{1}{1 + \alpha I^*} & \sigma \beta Q^* - \left[qS^* + \frac{\alpha \delta Q^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ -\beta I^* & -\frac{\sigma \beta I^*}{\delta} & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque $\delta \rightarrow +\infty$, et de (4.8) on trouve que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda + (\beta + q)I^* + \mu & -\frac{1}{1 + \alpha I^*} & \beta S^* + \left[qS^* + \frac{\alpha q(\mu + \gamma)I^*}{\beta(1 + \alpha I^*)} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ -qI^* & \frac{1}{1 + \alpha I^*} & - \left[qS^* + \frac{\alpha q(\mu + \gamma)I^*}{\beta(1 + \alpha I^*)} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ -\beta I^* & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + (\beta + q)I^* + \mu & -\frac{1}{1 + \alpha I^*} & \beta S^* + \left[qS^* + \frac{\alpha q(\mu + \gamma)I^*}{\beta(1 + \alpha I^*)} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ \lambda + \beta I^* + \mu & 0 & \beta S^* \\ -\beta I^* & 0 & \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{1}{1 + \alpha I^*} \begin{vmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu & \beta S^* \\ -\beta I^* & \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{1 + \alpha I^*} [\lambda^2 + (\beta I^* + \mu)\lambda + \beta^2 S^* I^*]. \\ &= \frac{\beta}{\beta + \alpha \mu(\mathcal{R}_0 - 1)} [\lambda^2 + \mu \mathcal{R}_0 \lambda + (\mu + \gamma)\mu(\mathcal{R}_0 - 1)] = 0. \end{aligned}$$

Il est clair que l'équation quadratique du côté droit n'admet que des racines avec des parties réelles négatives. Cela indique que E^* est asymptotiquement stable pour une valeur suffisamment grande de δ . Ainsi, la preuve est complète. \blacksquare

En d'autres termes, la Proposition 4.5 affirme que si la quarantaine est moins restrictive, il n'y aura pas de vagues épidémiques récurrentes, car l'équilibre endémique est asymptotiquement stable.

4.4 Bifurcation de Hopf de l'équilibre endémique

Nous étudions dans cette section la possibilité d'une bifurcation de Hopf de l'état d'équilibre endémique E^* lorsque la valeur de $\mathcal{R}_0 > 1$. Afin de faciliter les calculs, nous adoptons les notations suivantes :

$$\bar{\delta} := \frac{\delta}{1 + \alpha I^*}, \quad \bar{\alpha} := \frac{\alpha}{1 + \alpha I^*} \quad p := qS^* + \bar{\alpha}\bar{\delta}Q^*.$$

L'équation caractéristique de E^* devient

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + \mu & \lambda + \beta S^* + \sigma\beta Q^* \\ -qI^* & \lambda + \sigma\beta I^* + \mu + \bar{\delta} & \sigma\beta Q^* - p \int_0^\infty f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ -\beta I^* & -\sigma\beta I^* & \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + \mu & 0 & \lambda + \mu + \gamma \\ -qI^* & \lambda + (q + \sigma\beta)I^* + \mu + \bar{\delta} & \sigma\beta Q^* - p \int_0^\infty f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ -\beta I^* & (1 - \sigma)\beta I^* & \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + \mu & 0 & \lambda + \mu + \gamma \\ 0 & \lambda + \sigma(q + \beta)I^* + \mu + \bar{\delta} & -\frac{q}{\beta}\lambda + \sigma\beta Q^* - p \int_0^\infty f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ -\beta I^* & (1 - \sigma)\beta I^* & \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + \mu & 0 & \gamma \\ 0 & \lambda + \sigma(q + \beta)I^* + \mu + \bar{\delta} & -\frac{q}{\beta}\lambda + \mu + \gamma - \beta S^* - p \int_0^\infty f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ -\beta I^* & (1 - \sigma)\beta I^* & \lambda + \beta I^* \end{vmatrix}, \\ &= (\lambda + \mu) \left[\lambda + \sigma(q + \beta)I^* + \mu + \bar{\delta} \right] (\lambda + \beta I^*) \\ &\quad + (1 - \sigma)I^*(\lambda + \mu) \left[q\lambda - \beta(\mu + \gamma - \beta S^*) + \beta p \int_0^\infty f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \right] \\ &\quad + \gamma\beta I^* \left[\lambda + \sigma(q + \beta)I^* + \mu + \bar{\delta} \right], \\ &= \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_1\lambda + b_0) \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau = 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

où :

$$\begin{aligned} a_2 &= [q + (1 + \sigma)\beta] I^* + 2\mu + \bar{\delta}, \\ a_1 &= \beta I^* [\sigma(q + \beta)I^* + \bar{\delta} + \sigma(\mu + \gamma + (1 - \sigma)\beta S^*)] + \mu \{ [q + (1 + \sigma)\beta] I^* + \mu + \bar{\delta} \}, \\ a_0 &= (\mu + \gamma)\beta I^* [\sigma(q + \beta)I^* + \sigma\mu + \bar{\delta}] + (1 - \sigma)\mu\beta^2 S^* I^*, \\ b_1 &= (1 - \sigma)\beta p I^*, \\ b_0 &= \mu b_1. \end{aligned}$$

On suppose que la fonction f est définie à l'aide d'une distribution uniforme comme suit,

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{si } T < \tau < T + L, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.13)$$

où T représente la durée du temps du retard jusqu'à ce que les individus infectés soient officiellement signalés, et L représente la durée pendant laquelle le comportement actuel des individus est influencé par l'information provenant des cas signalés précédemment. Alors, l'équation caractéristique (4.12) devient

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_1\lambda + b_0) \frac{1 - e^{-\lambda L}}{\lambda L} e^{-\lambda T} = 0. \quad (4.14)$$

Comme $P(0) = a_0 + b_0 > 0$, alors $\lambda \neq 0$. La proposition suivante affirme que l'équilibre endémique E^* est asymptotiquement stable si T et L sont suffisamment petits. En d'autres termes, le retard qui influence le comportement des individus est petit.

Proposition 4.6 *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$ et que f est donnée par (4.13). Si à la fois T et L sont suffisamment petits, alors l'équilibre endémique E^* du système (4.2) est localement asymptotiquement stable.*

PREUVE. On fait tendre T et L vers 0^+ dans (4.14), on trouve

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + (a_1 + b_1)\lambda + a_0 + b_0 = 0.$$

Remarquez que tous les coefficients du côté gauche de l'équation sont strictement positifs. Ainsi, d'après le critère de Routh-Hurwitz, il est seulement nécessaire de démontrer que l'expression $a_2(a_1 + b_1) > (a_0 + b_0)$. En fait, il est facile de voir que

$$a_2b_1 > \mu b_1 = b_0. \quad (4.15)$$

Nous montrons que $a_2a_1 > a_0$. En utilisant (4.5) et (4.8), nous avons :

$$\beta S^* = (\mu + \gamma) \frac{(1 + \alpha I^*) (\sigma \beta I^* + \mu) + \delta}{(1 + \alpha I^*) [\sigma(q + \beta) I^* + \mu] + \delta} > \frac{(\mu + \gamma) \delta}{(1 + \alpha I^*) [\sigma(q + \beta) I^* + \mu] + \delta}.$$

En utilisant cette dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} a_2a_1 &> [(q + \beta) I^* + \mu + \bar{\delta}] \beta I^* [\sigma(\mu + \gamma) + (1 - \sigma)\beta S^*] + (1 - \sigma)\mu\beta^2 S^* I^*, \\ &> (\mu + \gamma)\beta I^* [\sigma(q + \beta) I^* + \sigma\mu + \sigma\bar{\delta}] \\ &\quad + (1 - \sigma)\beta I^* [\sigma(q + \beta) I^* + \mu + \bar{\delta}] \frac{(\mu + \gamma)\delta}{(1 + \alpha I^*) [\sigma(q + \beta) I^* + \mu] + \delta} \\ &\quad + (1 - \sigma)\mu\beta^2 S^* I^*, \\ &= (\mu + \gamma)\beta I^* [\sigma(q + \beta) I^* + \sigma\mu + \sigma\bar{\delta} + (1 - \sigma)\bar{\delta}] + (1 - \sigma)\mu\beta^2 S^* I^*, \\ &= (\mu + \gamma)\beta I^* [\sigma(q + \beta) I^* + \sigma\mu + \bar{\delta}] + (1 - \sigma)\mu\beta^2 S^* I^*, \\ &= a_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En utilisant les équations (4.15) et (4.16), on obtient $a_2(a_1 + b_1) > a_0 + b_0$. La preuve est complète. ■

La Proposition 4.6 implique que la l'apparition d'une vague épidémique est impossible si l'information sur la population infectieuse est partagée rapidement, c'est-à-dire si le retard est petit.

Nous cherchons à identifier une paire de racines conjuguées purement imaginaires $\lambda = \pm i\omega$, ($\omega > 0$) de l'équation caractéristique (4.14) pour l'analyse de la bifurcation de Hopf de l'équilibre endémique. Pour ce faire, nous réarrangeons l'équation caractéristique et calculons ses modules. On obtient

$$|\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0| = |b_1\lambda + b_0| \left| \frac{1 - e^{-\lambda L}}{\lambda L} \right| |e^{-\lambda T}|.$$

On substitue $\lambda = \pm i\omega$ et on trouve

$$(\omega^3 - a_1\omega)^2 + (a_2\omega^2 - a_0)^2 = (b_1^2\omega^2 + b_0^2) \frac{2(1 - \cos(\omega L))}{\omega^2 L^2}. \quad (4.17)$$

Alors, nous obtenons

$$\omega^8 + (a_1^2 - 2a_2a_1)\omega^6 + (a_2^2 - 2a_2a_0)\omega^4 + a_0^2\omega^2 - \frac{2}{L^2}(b_1^2\omega^2 + b_0^2)(1 - \cos(\omega L)) = 0.$$

On pose $x = \omega^2$, on réécrit cette équation sous la forme $k(x) = 0$ où

$$k(x) := x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + (d_1x + d_0)(1 - \cos(\sqrt{x}L)), \quad (4.18)$$

avec

$$c_3 = a_1^2 - 2a_2a_1, \quad c_2 = a_2^2 - 2a_2a_0, \quad c_1 = a_0^2, \quad d_1 = -\frac{2b_1^2}{L^2}, \quad d_0 = -\frac{2b_0^2}{L^2}.$$

On peut observer que si $k(x) = 0$ a une racine positive $x^* > 0$, alors $\lambda = \pm i\sqrt{x^*}$ est une paire de racines purement imaginaires conjuguées de l'équation caractéristique (4.14). En effet, la proposition suivante affirme que la direction du croisement de l'axe imaginaire est déterminée par le signe de $k'(x^*)$.

Proposition 4.7 *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$ et que f est donnée par (4.13). Si $x^* > 0$ existe tel que $k(x^*) = 0$, alors l'équation caractéristique (4.14) possède une paire conjuguée $\lambda = \pm i\sqrt{x^*}$ de racines purement imaginaires. De plus, si $k'(x^*) > 0$ (resp. $k'(x^*) < 0$), alors la paire $\lambda = \pm i\sqrt{x^*}$ traverse l'axe imaginaire de gauche à droite (resp. de droite à gauche) lorsque T augmente.*

PREUVE. La première partie est la conséquence de l'argument précédent. Afin de démontrer la dernière partie, nous avons l'équation caractéristique (4.14),

$$\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_0\lambda + (b_1\lambda + b_0) \frac{1 - e^{-\lambda L}}{L} e^{-\lambda T} = 0. \quad (4.19)$$

Soit $\lambda = \lambda(T)$ et on dérive (4.19) par rapport à T , on obtient

$$\begin{aligned} & (4\lambda^3 + 3a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0) \lambda' \\ & + \left[b_1 \frac{1 - e^{-\lambda L}}{L} + (b_1\lambda + b_0) e^{-\lambda L} - T(b_1\lambda + b_0) \frac{1 - e^{-\lambda L}}{L} \right] e^{-\lambda T} \lambda' \\ & - \lambda(b_1\lambda + b_0) \frac{1 - e^{-\lambda L}}{L} e^{-\lambda T} = 0. \end{aligned}$$

En réarrangeant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda'} &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{4\lambda^3 + 3a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0}{(b_1\lambda + b_0) \frac{1-e^{-\lambda L}}{L} e^{-\lambda T}} + \frac{b_1}{b_1\lambda + b_0} + \frac{Le^{-\lambda L}}{1-e^{-\lambda L}} - T \right], \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{4\lambda^3 + 3a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0}{\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_0\lambda} + \frac{b_1}{b_1\lambda + b_0} + \frac{L}{1-e^{-\lambda L}} - (T+L) \right]. \end{aligned}$$

Pour déterminer la direction dans laquelle $\lambda = \pm i\omega$ traverse l'axe imaginaire, il suffit d'examiner le signe de $\text{Re}(1/\lambda')$ qui est égal à celui de $\text{Re}(\lambda')$, où λ' est la dérivée de λ , évaluée à $\lambda = i\omega$. Plus précisément, si $\text{Re}(1/\lambda') > 0$ (ou < 0) en $\lambda = i\omega$, alors la paire conjuguée traverse l'axe imaginaire de gauche à droite (ou de droite à gauche, respectivement). En évaluant à $\lambda = i\omega$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda'} &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{3a_2\omega^2 - a_0 + i(4\omega^3 - 2a_1\omega)}{a_2\omega^3 - a_0\omega + i(\omega^4 - a_1\omega^2)} - \frac{b_1}{b_1\omega - ib_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{L}{\sin \omega L - i(1 - \cos \omega L)} + i(T+L) \right], \end{aligned}$$

en utilisant (4.17), on trouve

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\frac{1}{\lambda'} \right) &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{(3a_2\omega^2 - a_0)(a_2\omega^3 - a_0\omega) + (4\omega^3 - 2a_1\omega)(\omega^4 - a_1\omega^2)}{(a_2\omega^3 - a_0\omega)^2 + (\omega^4 - a_1\omega^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_1^2\omega}{b_1^2\omega^2 + b_0^2} - \frac{L \sin \omega L}{2(1 - \cos \omega L)} \right], \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{4\omega^7 + (3a_2^2 - 6a_1)\omega^5 + (2a_1^2 - 4a_2a_0)\omega^3 + a_0^2\omega}{\omega^2 [(\omega^3 - a_1\omega)^2 + (a_2\omega^2 - a_0)^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2b_1^2\omega(1 - \cos \omega L) + (b_1^2\omega^2 + b_0^2)L \sin \omega L}{(b_1^2\omega^2 + b_0^2)2(1 - \cos \omega L)} \right], \\ &= \frac{4\omega^6 + 3c_3\omega^4 + 2c_2\omega^2 + c_1}{\omega^2 [(\omega^3 - a_1\omega)^2 + (a_2\omega^2 - a_0)^2]} \\ &\quad + \frac{d_1(1 - \cos \omega L) + (d_1\omega^2 + d_0) \frac{L \sin \omega L}{2\omega}}{(b_1^2\omega^2 + b_0^2) \frac{2(1 - \cos \omega L)}{L^2}}, \\ &= \frac{k'(\omega^2)}{\omega^2 [(\omega^3 - a_1\omega)^2 + (a_2\omega^2 - a_0)^2]}. \end{aligned}$$

Puisque $x^* = \omega^2$, on peut conclure que le signe de $\text{Re}(1/\lambda')$ est identique à celui de $k'(x^*)$. La preuve est complète. \blacksquare

La Proposition 4.7 implique que l'équilibre endémique E^* peut subir une bifurcation de Hopf par rapport à T considéré comme le paramètre de bifurcation. Une valeur critique T^* existe telle que $\lambda(T^*) = i\omega = i\sqrt{x^*}$ satisfait l'équation (4.14), c'est-à-dire :

$$-i\omega^3 - a_2\omega^2 + ia_1\omega + a_0 + [ib_1\omega + b_0] \frac{1 - e^{-i\omega L}}{i\omega L} e^{-i\omega T^*} = 0.$$

En utilisant la formule d'Euler, on peut écrire $e^{-i\omega T} = \cos(\omega T) - i \sin(\omega T)$, ce qui implique

que

$$\begin{aligned}\cos \omega T^* &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega L [a_2\omega^2 - a_0 + i(\omega^3 - a_1\omega)]}{(ib_1\omega + b_0)(1 - e^{-i\omega L})} \right\} =: \xi_1(\omega), \\ \sin \omega T^* &= -\operatorname{Im} \left\{ \frac{i\omega L [a_2\omega^2 - a_0 + i(\omega^3 - a_1\omega)]}{(ib_1\omega + b_0)(1 - e^{-i\omega L})} \right\} =: \xi_2(\omega).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\xi_1(\omega) &= \frac{\omega L \{ (a_2\omega^2 - a_0) [b_0 \sin \omega L + b_1\omega(1 - \cos \omega L)] - (\omega^3 - a_1\omega) [b_0(1 - \cos \omega L) - b_1\omega \sin \omega L] \}}{2(b_1^2\omega^2 + b_0^2)(1 - \cos \omega L)}, \\ \xi_2(\omega) &= -\frac{\omega L \{ (a_2\omega^2 - a_0) [b_0(1 - \cos \omega L) - b_1\omega \sin \omega L] + (\omega^3 - a_1\omega) [b_0 \sin \omega L + b_1\omega(1 - \cos \omega L)] \}}{2(b_1^2\omega^2 + b_0^2)(1 - \cos \omega L)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut calculer T^* de la manière suivante :

$$T^* = T_0(\omega) + \frac{2n\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où T_0 est donnée par,

$$T_0(\omega) := \begin{cases} \frac{\arccos \xi_1(\omega)}{\omega}, & \xi_1(\omega) \geq 0, \\ \frac{2\pi - \arccos \xi_1(\omega)}{\omega}, & \xi_1(\omega) < 0. \end{cases}$$

Dans la section suivante, nous utiliserons les résultats obtenus pour présenter des exemples numériques où la bifurcation de Hopf se produit.

4.5 Simulations numériques

L'objectif de cette section est de développer un code permettant de simuler le système à retard distribué. Ensuite, nous avons reproduit les simulations faites dans l'article [21]. On note que les paramètres utilisés n'ont pas été estimés à partir de données réelles. Le raisonnement derrière la sélection repose sur des considérations épidémiologiques, notamment, l'unité de temps est fixée à un an.

- La population totale $N = \frac{b}{\mu} = 1$ lorsqu'on utilise les valeurs $b = \mu = \frac{1}{80}$.
- La période de vie moyenne est de $\frac{1}{\mu} = 80$ ans.
- La période d'infection moyenne est de $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{24}$ ans = $\frac{1}{2}$ mois.
- Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est de 2.5.
- L'efficacité de la mise en quarantaine est $(1 - \sigma) \times 100\% = 70\%$.
- La durée moyenne de la mise en quarantaine lorsque $\alpha = 0$ est de $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{12}$ années = 1 mois.

- La durée de validité des informations est de $L = \frac{1}{4}$ années = 3 mois.
- La sensibilité de la mise en quarantaine et de la levée de la quarantaine $q = 75$ et $\alpha = 1$ respectivement.

Dans ce cas, on peut calculer numériquement I^* et on trouve que $I^* \approx 3.121 \times 10^{-4}$ (voir la figure suivante).

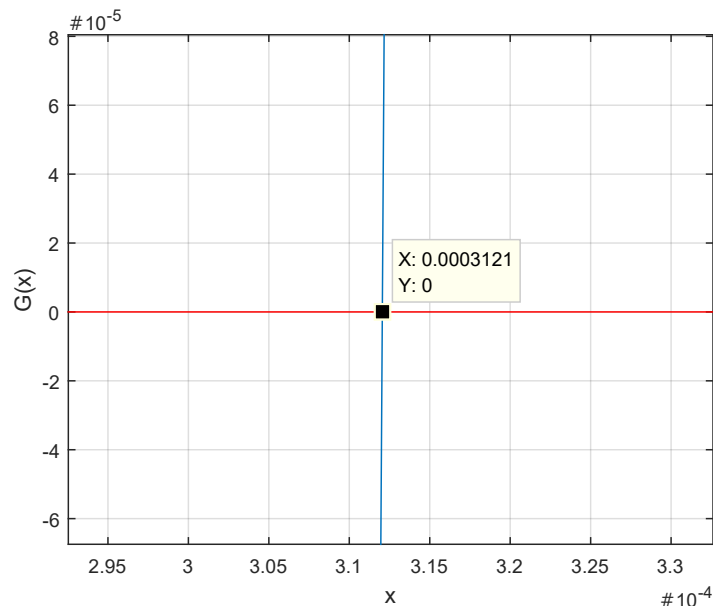


FIGURE 4.3 – Le graphe de la fonction $G(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ et son intersection avec l'axe des abscisses.

On peut maintenant calculer les coefficients de la fonction k définie par (4.18) et on trouve

$$a_2 \approx 12.069, \quad a_1 \approx 0.8254, \quad a_0 \approx 5.4083, \quad b_1 \approx 0.3933, \quad b_0 \approx 0.0049,$$

$$c_3 \approx 144.0104, \quad c_2 \approx -129,8652, \quad c_1 \approx 29,2501, \quad d_1 \approx -4,951, \quad d_0 \approx -7.736 \times 10^{-4}.$$

Par conséquent, on calcule numériquement les racines positives de l'équation $k(x) = 0$, $x_+^* = 0.4555$ et $x_-^* = 0.4431$ tel que $k'(x_+^*) > 0$ et $k'(x_-^*) < 0$ (voir Figure 4.4). On pose $\omega_+ := \sqrt{x_+^*}$, $\omega_- := \sqrt{x_-^*}$ et

$$T_n^+ := T_0(\omega_+) + \frac{2n\pi}{\omega_+}, \quad T_n^- := T_0(\omega_-) + \frac{2n\pi}{\omega_-}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

D'après la Proposition 4.7, l'équation caractéristique (4.14) possède une paire de racines conjuguées purement imaginaires, notées $\lambda = \pm i\omega_+$ (ou $\pm i\omega_-$). Ces racines traversent l'axe imaginaire dans des directions opposées. Plus précisément, lorsque le paramètre T varie et atteint la valeur T_n^+ (ou T_n^-), l'équilibre endémique E^* peut subir une déstabilisation (ou une stabilisation) et donner lieu à l'apparition (ou la disparition) d'une solution périodique non triviale. Ce phénomène se produit par une bifurcation de Hopf à

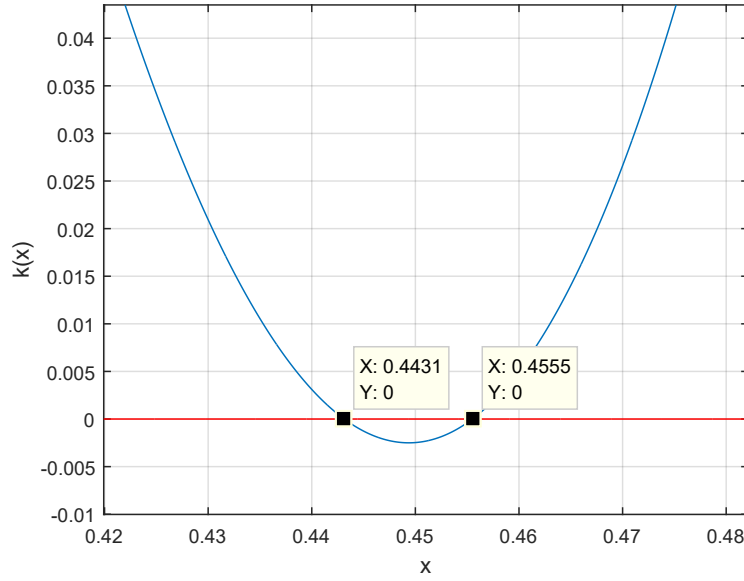


FIGURE 4.4 – Les racines de l'équation $k(x) = x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + (d_1x + d_0)(1 - \cos(\sqrt{x}L)) = 0$

$T = T_n^+$ (ou T_n^-). Pour $n = 0, 1, 2$, on peut calculer T_n^+ et T_n^-

$$\begin{aligned} T_0^+ &\approx 3.9919, & T_1^+ &\approx 13.3012, & T_2^+ &\approx 22.6105, \\ T_0^- &\approx 4.9173, & T_1^- &\approx 14.3563, & T_2^- &\approx 23.7952. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons dire que E^* est stable si $T \in \mathcal{T}_s := (0, T_0^+) \cup (T_0^-, T_1^+) \cup (T_1^-, T_2^+)$, alors que E^* est instable si $T \in \mathcal{T}_i := (T_0^+, T_0^-) \cup (T_1^+, T_1^-) \cup (T_2^+, T_2^-)$.

Pour simuler les solutions du système (4.2), nous effectuons une discrétisation uniforme de l'intervalle de temps $[0, \bar{T}]$ comme suit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = \bar{T}.$$

Nous avons donc,

$$\Delta t = \frac{\bar{T}}{N}, \quad \text{et} \quad t_i = i\Delta t,$$

où Δt représente le pas de la subdivision et les points t_i , pour $i = 0 \dots N$, sont les nœuds de la discrétisation.

L'intervalle $[0, T + L]$ est aussi découpée en N_τ sous intervalles tel que,

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{j-1} < \tau_j < \tau_{j+1} < \dots < \tau_{N_\tau} = T + L.$$

Pour $j = 0 \dots N_\tau$, nous avons

$$N_\tau = \frac{T + L}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \tau_j = j\Delta t.$$

On pose

$$S_i := S(t_i), \quad Q_i := Q(t_i), \quad I_i := I(t_i), \quad I_{i-j} := I(t_i - \tau_j).$$

Pour approcher la dérivée dans le système (4.2), nous utilisons le schéma d'Euler explicite,

$$\begin{cases} S'(t_i) \approx \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ Q'(t_i) \approx \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ I'(t_i) \approx \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta t} + O(\Delta t). \end{cases}$$

Nous estimons le terme $\int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau$ en utilisant la méthode des rectangles. Cette méthode consiste à construire une somme, appelée somme de Riemann, en utilisant N_τ rectangles ayant une base $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ et une hauteur $f(j\Delta t)I(t_i - \tau_j)$. L'approximation correspondante est donnée par,

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)I(t-\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^{N_\tau-1} f(j\Delta t)I(t_i - \tau_j), \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Maintenant, nous choisissons une valeur de T appartenant à l'ensemble \mathcal{T}_s pour représenter graphiquement la stabilité asymptotique de l'équilibre endémique.

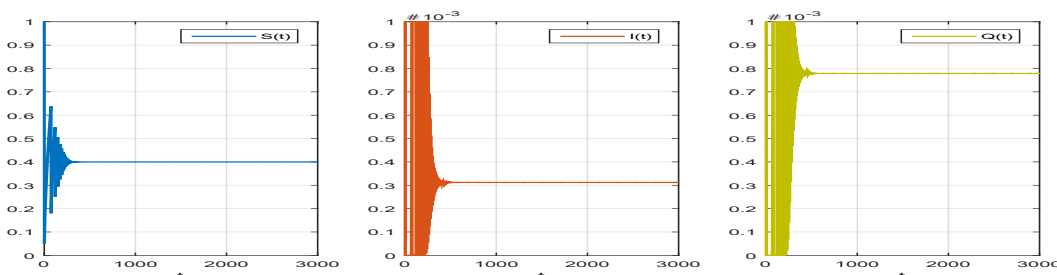


FIGURE 4.5 – Les variations des populations S , Q et I au cours du temps pour $T = 0.5$.

En outre, afin d'illustrer graphiquement l'émergence des vagues épidémiques récurrentes, nous sélectionnons une valeur de T qui fait partie de l'ensemble \mathcal{T}_i (voir la figure suivante). La Figure 4.7 représente l'amplitude des solutions périodiques stables pour $T \in [0, 30]$. On observe que la bifurcation à $T = T_n^+$, avec $n = 0, 1, 2$, est de nature super-critique, tandis que la bifurcation à $T = T_n^-$, avec $n = 0, 1, 2$, est de nature sous-critique.

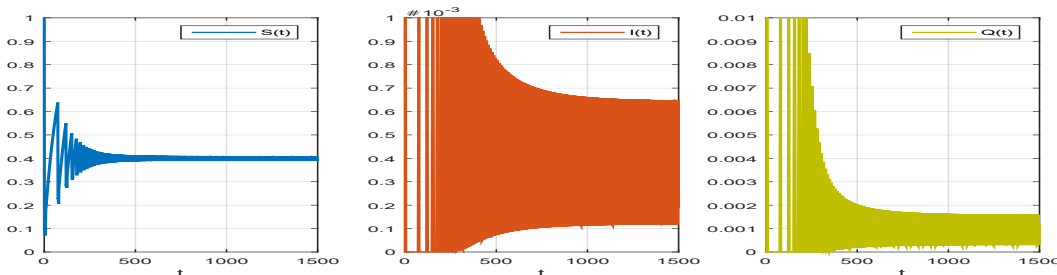


FIGURE 4.6 – Les variations des populations S , Q et I au cours du temps pour $T = 4$.

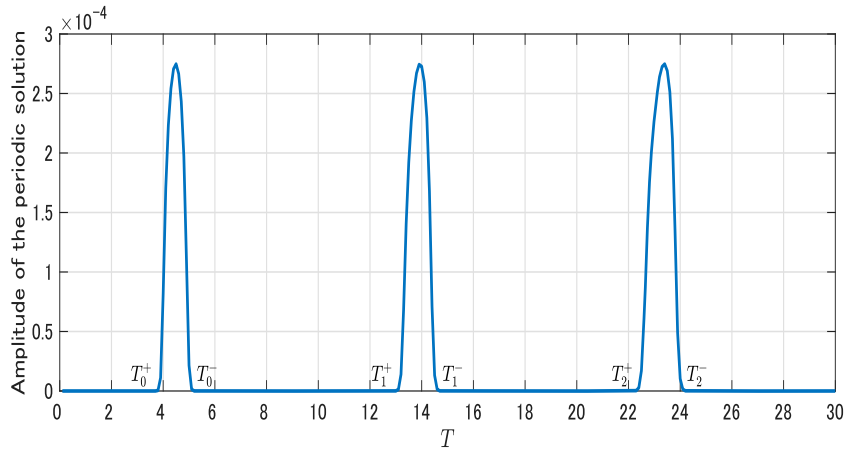


FIGURE 4.7 – L’amplitude des solutions périodiques stables pour $T \in [0, 30]$. Cette figure est récupérée directement de [21].

4.6 Conclusion et perspective

Dans ce chapitre, nous avons étudié un modèle épidémique qui intègre des mesures de quarantaine et un retard distribué. Cette étude se concentre sur l’analyse de l’impact de ces facteurs sur la dynamique de l’épidémie.

Tout d’abord, nous introduisons le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et établissons que si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, l’équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable. En revanche, si $\mathcal{R}_0 > 1$, E_0 devient instable et un équilibre endémique unique E^* émerge. Dans ce cas, On a trouvé que E^* peut être localement asymptotiquement stable si la sensibilité de la mise en quarantaine q est suffisamment petit ou si le taux de levée δ est suffisamment grand. Ces conditions indiquent qu’un scénario de quarantaine moins restrictif est caractérisé par la stabilité de l’équilibre endémique. Notamment, les Propositions 4.5 et 4.6 garantissent que des solutions périodiques n’apparaissent pas lorsqu’il y a moins d’importance accordée aux mesures de quarantaine et aux effets de retard.

De plus, nous avons établi des conditions suffisantes pour avoir une bifurcation de Hopf. A travers des simulations numériques, on remarque que les solutions périodiques peuvent émerger dans certaines intervalle de paramètres (voir Figure 4.7).

En résumé, ces résultats mettent en évidence les rôles significatifs que peuvent jouer les mesures de quarantaine et le retard distribué dans l’apparition de vagues épidémiques récurrentes. On peut améliorer le modèle en introduisant un compartiment pour les individus exposés. En effet, les symptômes associés à une infection par le Covid-19 ne se manifestent pas immédiatement, mais nécessitent plutôt une durée spécifique connue sous le nom de période d’incubation du virus. C’est ce que nous verrons dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Nouveau modèle SQEIR à retard distribué

5.1 Modèle et préliminaire

Les personnes atteintes d'une maladie telle que le Covid-19 ne sont pas immédiatement contagieuses dans de nombreux cas. Au lieu de cela, elles passent par une période d'incubation ou de latence, qui est la période entre la contamination par le virus et l'apparition des premiers symptômes. Afin de prendre en compte cette variation, le modèle "SQIR à retard distribué", voir le chapitre précédent, peut être ajusté en ajoutant un cinquième compartiment appelé "exposé" (E), qui a une période d'incubation moyenne de $1/\eta$. Pour cette raison, le taux de transition du compartiment exposé vers le compartiment infectieux se produit avec un taux de η . Les individus du compartiment E sont infectés mais pas infectieux. On suppose que les individus susceptibles sont divisés en deux groupes : ceux qui respectent les mesures de quarantaine et ceux qui ne les respectent pas.

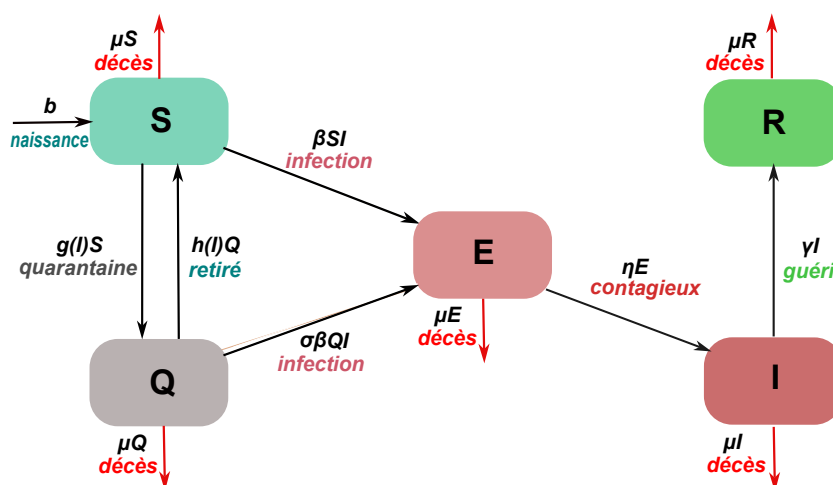


FIGURE 5.1 – Diagramme du modèle SQEIR avec retard distribué.

Nous construisons ce modèle en préservant les mêmes hypothèses que celles du chapitre

précédent (voir Figure 5.1),

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - \mu S - g(I)S + h(I)Q, \\ Q' &= g(I)S - \sigma\beta QI - \mu Q - h(I)Q, \\ E' &= \beta(S + \sigma Q)I - (\mu + \eta)E, \\ I' &= \eta E - (\mu + \gamma)I, \\ R' &= \gamma I - \mu R. \end{cases} \quad (5.1)$$

On peut réduire le système (5.1) en éliminant l'équation de R et on obtient

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - \mu S - g(I)S + h(I)Q, \\ Q' &= g(I)S - \sigma\beta QI - \mu Q - h(I)Q, \\ E' &= \beta(S + \sigma Q)I - (\mu + \eta)E, \\ I' &= \eta E - (\mu + \gamma)I. \end{cases} \quad (5.2)$$

Rappelons de l'hypothèse (H3) du chapitre précédent, qu'il existe une constante $\tau^* > 0$ tel que

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)I(t - \tau)d\tau = \int_0^{\tau^*} f(\tau)I(t - \tau)d\tau,$$

car $f(\tau) = 0$ pour $\tau > \tau^*$. Soit C l'ensemble des fonctions continues de $[-\tau^*, 0]$ dans \mathbb{R}^4 , avec la norme,

$$\|\varphi\|_C := \sup_{\theta \in [-\tau^*, 0]} \|\varphi(\theta)\|_\infty, \quad \varphi \in C.$$

où $\|\cdot\|_\infty$ représente la norme infinie dans \mathbb{R}^4 définie par,

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4.$$

On définit le cône positif de C_+ par $C_+ := C([- \tau^*, 0], \mathbb{R}_+^4)$, et l'espace des solutions pour le système (5.2) par,

$$\Omega := \left\{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T \in C_+ \mid 0 \leq \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\theta) \leq N = \frac{b}{\mu}, \text{ pour tout } -\tau^* \leq \theta \leq 0 \right\}.$$

Nous définissons $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ comme suit : $u(t) := (S(t), Q(t), E(t), I(t))^T$. Pour tout $t \geq 0$ et $-\tau^* \leq \theta \leq 0$, nous notons $u_t(\theta) = u(t + \theta)$. Par conséquent, nous pouvons reformuler le système (5.2) comme suit, $u'(t) = F(u_t)$, où F est une fonction sur C_+ définie comme suit,

$$F(\varphi) = \begin{pmatrix} b - \beta\varphi_1(0)\varphi_4(0) - \mu\varphi_1(0) - g(\varphi_4)\varphi_1(0) + h(\varphi_4)\varphi_2(0) \\ g(\varphi_4)\varphi_1(0) - \sigma\beta\varphi_2(0)\varphi_4(0) - \mu\varphi_2(0) - h(\varphi_4)\varphi_2(0) \\ \beta(\varphi_1(0) + \sigma\varphi_2(0))\varphi_4(0) - (\mu + \eta)\varphi_3(0) \\ \eta\varphi_3(0) - (\mu + \gamma)\varphi_4(0) \end{pmatrix},$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T \in C_+$. La condition initiale du système (5.2), dénotée par $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$, est donnée par,

$$S(\theta) = \phi_1(\theta), \quad Q(\theta) = \phi_2(\theta), \quad E(\theta) = \phi_3(\theta), \quad I(\theta) = \phi_4(\theta), \quad \text{pour tout } -\tau^* \leq \theta \leq 0. \quad (5.3)$$

Pour commencer, il est nécessaire de démontrer l'existence d'une solution unique au problème de Cauchy (5.2)-(5.3) dans Ω . Nous notons que $F = (F_1, F_2, F_3)^T$ est une fonction continue sur Ω . Ainsi, nous pouvons confirmer l'existence de la solution (voir Chapitre 2).

On peut facilement garantir l'unicité de la solution en démontrant que F est lipschitzienne sur Ω c'est à dire on obtient

$$|F_i(u) - F_i(v)| \leq K_i \|u - v\|_C, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

avec K_i sont des constantes indépendantes de u et v . La positivité s'obtient en reprenant les mêmes arguments du chapitre précédent.

Maintenant, on va montrer que la solution du problème (5.2)-(5.3) est bornée. En effet, on somme les quatre équations de (5.2), on obtient

$$(S + Q + E + I)' = b - \mu(S + Q + E + I) - \gamma I \leq b - \mu(S + Q + E + I).$$

Ce qui implique que,

$$S(t) + Q(t) + E(t) + I(t) \leq \frac{b}{\mu} - \left(\frac{b}{\mu} - \sum_{i=1}^4 \phi_i(0) \right) e^{-\mu t} \leq \frac{b}{\mu} =: N.$$

Pour récapituler, nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.1 Ω est positivement invariant pour le système (5.2), c'est à dire, si $\phi \in \Omega$, alors $u_t \in \Omega$ pour tout $t > 0$.

Deux types d'équilibres sont possibles pour le système (5.2) :

- "L'équilibre sans maladie" : $ESM : (S, Q, E, I) = (N, 0, 0, 0)$.
- "L'équilibre endémique" : $EE : (S, Q, E, I) = (S^*, Q^*, E^*, I^*)$, $I^* > 0$.

Tout d'abord, on va calculer le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 pour le système (5.2). On linéarise le système d'infection I' et E' autour de ESM ,

$$\begin{cases} E'(t) &= \beta NI(t) - (\mu + \eta) E(t), \\ I'(t) &= \eta E(t) - (\mu + \gamma) I(t). \end{cases} \quad (5.4)$$

Comme le système linéaire d'infection (5.4) est indépendante du retard τ , on peut appliquer la méthode "la matrice de la prochaine génération" (voir [10]). On pose $X = (E, I) = (x_1, x_2)$ alors,

$$\frac{dX}{dt} = F(x_1, x_2) - V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \beta(S + \sigma Q)x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu + \eta)x_1 \\ (\mu + \gamma)x_2 - \eta x_1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on trouve

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(N,0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(N,0,0,0)} = \begin{pmatrix} \mu + \eta & 0 \\ -\eta & \mu + \gamma \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(V) = (\mu + \eta)(\mu + \gamma) \neq 0$ alors V est inversible et,

$$V^{-1} = \frac{1}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)} \begin{pmatrix} \mu + \gamma & 0 \\ \eta & \mu + \eta \end{pmatrix}.$$

Donc, on obtient

$$FV^{-1} = \frac{1}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)} \begin{pmatrix} \beta\eta N & \beta N(\mu + \eta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que,

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta\eta N}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)}.$$

La proposition suivante établit que \mathcal{R}_0 est le seuil pour donner l'existence d'un équilibre endémique unique EE dans Ω .

Proposition 5.2 *Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le système (5.2) admet un équilibre endémique unique E^* dans Ω . Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors le système (5.2) n'admet aucun équilibre endémique EE dans Ω .*

PREUVE. A partir du système (5.2) et en utilisant que $\int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau = 1$, $EE : (S, Q, E, I) = (S^*, Q^*, E^*, I^*)$ est solution strictement positive du système algébrique suivant,

$$\begin{cases} 0 = b - \beta S^* I^* - \mu S^* - q S^* I^* + \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*}, \\ 0 = q S^* I^* - \sigma \beta Q^* I^* - \mu Q^* - \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*}, \\ 0 = \beta(S^* + \sigma Q^*) I^* - (\mu + \eta) E^*, \\ 0 = \eta E^* - (\mu + \gamma) I^*. \end{cases} \quad (5.5)$$

De la quatrième équation du système (5.5), on trouve que,

$$E^* = \frac{\mu + \gamma}{\eta} I^*. \quad (5.6)$$

On remplace (5.6) dans la troisième équation du système (5.5) et on obtient,

$$\beta(S^* + \sigma Q^*) = \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right) (\mu + \gamma) \iff S^* = \frac{\left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right) (\mu + \gamma)}{\beta} - \sigma Q^*. \quad (5.7)$$

En sommant les quatre équations du système (5.5) et en substituant (5.6), on trouve que

$$b - \mu(S^* + Q^* + I^*) - \gamma I^* = 0 \iff \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right) I^* = \frac{b}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\mu + \gamma}(S^* + Q^*). \quad (5.8)$$

On remplace (5.7) dans (5.8) pour obtenir,

$$I^* = \frac{b}{(\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right)} - \frac{\mu}{\beta} - \frac{\mu(1 - \sigma)}{(\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right)} Q^*. \quad (5.9)$$

On substitue (5.7) dans la deuxième équation du système (5.5) et on obtient,

$$q \left(\frac{(\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right)}{\beta} \right) I^* - \sigma(q + \beta) Q^* I^* - \mu Q^* - \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*} = 0,$$

donc,

$$Q^* = \frac{q \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right) (\mu + \gamma) (1 + \alpha I^*) I^*}{\beta (1 + \alpha I^*) [\sigma(q + \beta) I^* + \mu] + \beta \delta}. \quad (5.10)$$

En substituant (5.10) dans (5.9), on trouve

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{b}{(\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right)} - \frac{\mu}{\beta} - (1 - \sigma) \frac{\mu}{\beta} \frac{q (1 + \alpha I^*) I^*}{(1 + \alpha I^*) [\sigma(q + \beta) I^* + \mu] + \delta}, \\ \implies I^* &= \frac{\mu}{\beta} \left[\mathcal{R}_0 - 1 - \frac{(1 - \sigma) q (1 + \alpha I^*) I^*}{(1 + \alpha I^*) [\sigma(q + \beta) I^* + \mu] + \delta} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En réarrangeant (5.11), on trouve $G(I^*) = 0$ avec

$$\begin{aligned} G(x) &= \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \\ \alpha_3 &= \alpha \beta \sigma (q + \beta), \\ \alpha_2 &= \alpha \beta \mu + \beta \sigma (q + \beta) - \alpha \mu (\mathcal{R}_0 - 1) \sigma (q + \beta) + \alpha \mu (1 - \sigma) q, \\ \alpha_1 &= \beta (\mu + \delta) - \mu (\mathcal{R}_0 - 1) [\alpha \mu + \sigma (q + \beta)] + \mu (1 - \sigma) q, \\ \alpha_0 &= -\mu (\mu + \delta) (\mathcal{R}_0 - 1). \end{aligned}$$

On suppose que $\mathcal{R}_0 > 1$, comme $\alpha_3 > 0$ et $G(0) = \alpha_0 < 0$, $G(x) = 0$ possède au moins une racine positive $I^* > 0$. De (5.11) et puisque $\sigma < 1$, on conclut que $I^* < \frac{b}{\left(\frac{\mu}{\eta} + 1\right)(\mu + \gamma)} < N$. Ce qui implique que $0 < E^* < \frac{b}{\mu + \eta} < N$. De plus, comme $Q^* > 0$ on trouve que

$$S^* = \frac{1}{(\beta + q) I^* + \mu} \left(b + \frac{\delta Q^*}{1 + \alpha I^*} \right) > 0 \quad \text{et} \quad S^* + Q^* + E^* + I^* = \frac{b}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu} I^* < \frac{b}{\mu} = N.$$

Par conséquent, $E^* \in \Omega$. Le second membre de (5.11) est strictement décroissant par rapport à I^* sur \mathbb{R}_+ . En effet, on pose

$$H(x) = \frac{q(1 + \alpha x)x}{(1 + \alpha x)[\sigma(q + \beta)x + \mu] + \delta},$$

et on calcule sa dérivée, alors on obtient

$$H'(x) = -\frac{\alpha^2 q \mu x^2 + 2\alpha q(\mu + \delta)x + q(\mu + \delta)}{[(1 + \alpha x)(\sigma(q + \beta)x + \mu) + \delta]^2} < 0, \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Donc l'équation (5.11) admet un point fixe unique $I^* > 0$.

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ et $G(0) = \alpha_0 \geq 0$ et G est strictement croissante sur $(0, \infty)$, donc $G(x) = 0$ n'admet aucune racine positive $I^* > 0$. Cette preuve est maintenant complète. \blacksquare

5.2 Stabilité des équilibres

Pour analyser la stabilité locale des équilibres, nous allons d'abord linéariser le système (5.2) autour d'un point d'équilibre (notamment, "ESM" ou "EE"). Pour cela, nous posons les variables suivantes : $W = S - \bar{S}$, $X = Q - \bar{Q}$, $Y = E - \bar{E}$ et $Z = I - \bar{I}$, qui représentent les perturbations par rapport à l'équilibre sans maladie ou à l'équilibre endémique $(\bar{S}, \bar{Q}, \bar{E}, \bar{I})^T \in \Omega$. Nous obtenons le système linéarisé suivant,

$$\begin{cases} W'(t) = -[(\beta + q)\bar{I} + \mu]W + \frac{\delta}{1 + \alpha\bar{I}}X - \beta\bar{S}Z - \left[q\bar{S} + \frac{\alpha\delta\bar{Q}}{(1 + \alpha\bar{I})^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t - \tau)d\tau, \\ X'(t) = q\bar{I}W - \left(\sigma\beta\bar{I} + \mu + \frac{\delta}{1 + \alpha\bar{I}} \right) X - \sigma\beta\bar{Q}Z + \left[q\bar{S} + \frac{\alpha\delta\bar{Q}}{(1 + \alpha\bar{I})^2} \right] \int_0^{+\infty} f(\tau)Z(t - \tau)d\tau, \\ Y'(t) = \beta\bar{I}W + \sigma\beta\bar{I}X - (\mu + \eta)Y + \beta(\bar{S} + \sigma\bar{Q})Z, \\ Z'(t) = \eta Y - (\mu + \gamma)Z. \end{cases} \quad (5.12)$$

La proposition suivante énonce que le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 détermine la stabilité locale de l'équilibre sans maladie *ESM*.

Proposition 5.3 *Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie $ESM := (N, 0, 0, 0)$ du système (5.2) est localement asymptotiquement stable. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors ESM est instable.*

PREUVE. D'après le système (5.12), l'équation caractéristique pour *ESM* est donnée par,

$$P(\lambda) := \begin{vmatrix} \lambda + \mu & -\delta & 0 & \beta N + qN \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ 0 & \lambda + \mu + \delta & 0 & -qN \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau \\ 0 & 0 & \lambda + \mu + \eta & -\beta N \\ 0 & 0 & -\eta & \lambda + \mu + \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Alors,

$$P(\lambda) := (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \delta) \begin{vmatrix} \lambda + \mu + \eta & -\beta N \\ -\eta & \lambda + \mu + \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} P(\lambda) &:= (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \delta) [(\lambda + \mu + \eta)(\lambda + \mu + \gamma) - \beta\eta N], \\ &= (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \delta) [\lambda^2 + (2\mu + \gamma + \eta)\lambda - \beta\eta N + (\mu + \gamma)(\mu + \eta)], \\ &= (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \delta) [\lambda^2 + (2\mu + \gamma + \eta)\lambda - (\mu + \gamma)(\mu + \eta)(\mathcal{R}_0 - 1)] = 0. \end{aligned}$$

On trouve quatre racines pour cette l'équation caractéristique :

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = -(\mu + \delta),$$

$$\lambda_{3,4} = -\left(\mu + \frac{\gamma + \eta}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\mu + \frac{\gamma + \eta}{2}\right)^2 + (\mu + \gamma)(\mu + \eta)(\mathcal{R}_0 - 1)}.$$

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont négatives. Le critère de Routh-Hurwitz permet de prouver que λ_3 et λ_4 ont des parties réelles négatives. Dans le cas $\mathcal{R}_0 > 1$, il n'est pas difficile d'observer qu'une valeur propre positive existe. Par conséquent, *ESM* est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 < 1$ et instable si $\mathcal{R}_0 > 1$. ■

Il est possible d'énoncer un résultat sur la stabilité globale de l'équilibre sans maladie à l'aide d'une fonction de Lyapunov. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.4 *Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans maladie *ESM* du système (5.2) est globalement asymptotiquement stable dans Ω .*

PREUVE. On considère la fonction $V : C_+ \rightarrow \mathbb{R}$ défini par,

$$V(u_t) = \frac{1}{2}[(S(t) - N) + Q(t) + E(t) + I(t)]^2 + \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) I(t) + E(t) \right].$$

On calcule la dérivée de V le long de la trajectoire de la solution du système (5.2). On obtient

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\partial V}{\partial S} S' + \frac{\partial V}{\partial Q} Q' + \frac{\partial V}{\partial E} E' + \frac{\partial V}{\partial I} I', \\ &= [(S - N) + Q + E + I](S' + Q' + E' + I') + \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) I' + E' \right]. \end{aligned}$$

Comme $b = \mu N$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
 V' &= [(S - N) + Q + E + I][\mu N - \mu S - \mu Q - \mu E - (\mu + \gamma)I], \\
 &+ \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\beta(S + \sigma Q) - \left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) (\mu + \gamma) \right] I, \\
 &= -\mu[(S - N) + Q + E]^2 - \mu[(S - N) + Q + E]I, \\
 &- (\mu + \gamma)[(S - N) + Q + E]I - (\mu + \gamma)I^2, \\
 &+ \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\beta(S + \sigma Q) - \left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) (\mu + \gamma) \right] I, \\
 &= -\mu[(S - N) + Q + E]^2 - (2\mu + \gamma)[(S - N) + Q + E]I - (\mu + \gamma)I^2, \\
 &+ \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\beta(S + \sigma Q) - \left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) (\mu + \gamma) \right] I, \\
 &= -\mu[(S - N) + Q + E]^2 - (\mu + \gamma)I^2 - (2\mu + \gamma)EI - \frac{2\mu + \gamma}{\beta} [\beta(S - N) + \beta Q]I, \\
 &+ \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\beta(S + \sigma Q) - \left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) (\mu + \gamma) \right] I, \\
 &= -\mu[(S - N) + Q + E]^2 - (\mu + \gamma)I^2 - (2\mu + \gamma)EI, \\
 &+ \frac{2\mu + \gamma}{\beta} \left[\beta N - \left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) (\mu + \gamma) - \beta(1 - \sigma)Q \right] I, \\
 &= -\mu[(S - N) + Q + E]^2 - (\mu + \gamma)I^2 - (2\mu + \gamma)[E + (1 - \sigma)Q]I, \\
 &+ \frac{(2\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{\eta} + 1 \right) (\mu + \gamma)}{\beta} [\mathcal{R}_0 - 1]I.
 \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors

$$V' \leq -(\mu + \gamma)I^2 \leq 0. \quad (5.13)$$

Ce qui implique que V est décroissante. De plus, on a $V \geq 0$ donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(u_t) = V^*.$$

En intégrant l'inégalité (5.13) sur $(0, t)$, on trouve

$$(\mu + \gamma) \int_0^t I^2(s) ds \leq V(u_0) - V(u_t),$$

comme I est continue et bornée sur $[0, +\infty)$, alors (la limite existe)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t I^2(s) ds \leq \frac{1}{\mu + \gamma} (V(u_0) - V^*).$$

Depuis le système (5.2), on peut déduire que I' est bornée. Par conséquent, I est uniformément continue. En utilisant le lemme de Barbalat appliqué à la fonction $t \mapsto \int_0^t I^2(s) ds$, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I^2(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0.$$

Ce qui implique que,

$$(S(t), Q(t), E(t), I(t))^T \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (N, 0, 0, 0).$$

Par conséquent, on a garanti l'attractivité globale de l'équilibre sans maladie $ESM = (N, 0, 0, 0)$. Et comme nous avons précédemment démontré que ESM est localement

asymptotiquement stable, nous pouvons en déduire que ESM est également globalement asymptotiquement stable. ■

Il serait intéressant de continuer l'étude de ce modèle et d'essayer d'analyser l'existence d'une bifurcation de Hopf permettant d'obtenir des solutions oscillantes pour ce système. Cette partie est envisagée pour la suite de ce mémoire.

Bibliographie

- [1] O. Arino, M. L. Hbid et E. Ait Dads, *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, 2002.
- [2] O. Arino, M.L. Hbid et R. Bravo de la Parra, *A mathematic model of growth of population of fish in the larval stage : density-dependence effects*, Math. Biosci., vol. 150, no. 1, pp. 1–120, 1998.
- [3] P. Auger, C. Lett, et J.-C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie : Cours et exercices corrigés*. Editions Tec & Doc, 2010.
- [4] I. Barbălat, *Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., vol. 4, pp. 267-270, 1959.
- [5] R. Bellman et Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- [6] J. Bernoulli. *Meditationes. De chordis vibrantibus*. Comm. Acad. Sci. Imp.Petropolitanae 3 : 13–28, (Ges.Werke III, p.198), 1728.
- [7] A. Bouakkaz, *Technique de points fixes et applications aux équations différentielles fonctionnelles non linéaires à retard*, Thèse Doctorat, 2018.
- [8] Daily New Cases in Algeria, "<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/algeria/#graph-cases-daily>", La page est consultée le : 04 Février 2023.
- [9] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S.M. Verduyn Lunel, et H. O. Walther, *Delay Equations : Functional, Complex, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] Van den Driessche, P. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*. Mathematical Biosciences, 180 (1–2) : 29–48, 2002.
- [11] L.E. El'sgol'ts et S.B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 105, Academic Press, 1973.
- [12] I. R. Epstein et J. A. Pojman, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [13] W.S.C. Gurney, S.P. Blathe, R.M. Nishbt, *Nicholson's blowflies revisited*, Nature, vol. 287, pp. 17-21, 1980.
- [14] A. Halanay, *Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags*. Academic Press, 1966.

- [15] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [16] J. K. Hale et S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [17] V. Kolmanovski et A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [18] N. Krasovskii, *Stability of Motion*. Stanford Univ. Press, 1963. Translation with additions of the 1959 (Russian edition).
- [19] N. Krasovskii, *Theory of A.M. Lyapunov's second method for investigating stability*, 1956.
- [20] Y. Kuang, *Delay Differential Equations : With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, 1993.
- [21] T. Kuniya, *Recurrent epidemic waves in a delayed epidemic model with quarantine*, Journal Of Biological Dynamics, Vol. 16, NO. 1, 619–639, 2022.
- [22] Mackey–Glass equations, "https://en.wikipedia.org/wiki/Mackey%E2%80%93Glass_equations", La page est consultée le : 28 Avril 2023.
- [23] J. D. Murray, *Mathematical Biology : I. An Introduction*, Springer, New York, third edition, 2002.
- [24] A.D. Myshkis, *Lineare Differential gleichungen mit nacheilenden Argumentom*. Deutscher Verlag. Wiss. Berlin, 1955. Traduction du 1951 Russian edition.
- [25] O. Polossuchin, *Über eine Besondere Klasse von Differentialen Funktionalgleichungen*, Inaugural Dissertation, Zürich, German, 1910.
- [26] E. Schmidt, *Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen*, Math. Ann. 70, 499-524 1911.
- [27] H. Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer, New York, 2011.
- [28] H.L. Smith, P.Waltman, *The theory of the chemostat dynamics of microbial competition*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1995.
- [29] C. Sparrow, *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Applied Mathematical Sciences. Springer New York (1982).
- [30] C. Vargas-De-León, *Constructions of Lyapunov functions for classic SIS, SIR and SIRS epidemic models with variable population size*, Rev. Electrón. Foro Red Mat. 26 (2009), pp. 1-12.
- [31] V. Volterra, *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, Journal de Mathématiques, vol. 7, pp. 249-298, 1928.