



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RE-
CHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE TLEMCE
FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques
Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master en
Équations aux Dérivées Partielles et Applications

**Solutions non triviales pour un problème elliptique
non linéaire de type Choquard**

Présenté par :

Mr Mebarki Azzeddine

Soutenue le 20/06/2024 devant le jury

<i>PRÉSIDENT :</i>	Mr S. Bensid	Professeur,	Université de Tlemcen
<i>EXAMINATEUR :</i>	Mr M. Mamchaoui	Maître de Conférences A,	Université de Tlemcen
<i>ENCADRANT :</i>	Mr A. Rimouche	Maître de Conférences A,	Université de Tlemcen

Dédicaces

Je dédis ce travail à mes parents, pour votre amour et soutien
À mes frères et sœurs, pour votre complicité et encouragements.

À mes amis, pour votre amitié et présence constante.

Avec toute ma gratitude.

Remerciements

*Tout d'abord, **El Hamdoulillah**, c'est grâce à **ALLAH**, tout puissant de m'avoir donné la volonté et la patience pour accomplir ce travail.*

Ce mémoire m'a permis de voir un peu le monde de la recherche, comment ça se déroule en dehors des classes et des amphithéâtres, comment l'information nous arrive tellement simple et claire. C'est pour ça que tous nos professeurs méritent un grand respect et un grand remerciement pour l'effort qu'ils ont fait afin de nous simplifier tellement l'information.

La réalisation de cette thèse représente l'aboutissement de plusieurs années de travail, de recherche et de persévérance. Ce projet n'aurait pas pu être mené à bien sans le soutien et l'aide précieuse de nombreuses personnes, auxquelles je souhaite exprimer ma profonde gratitude.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrant, Monsieur Ali Rimouche. Son soutien indéfectible, ses conseils avisés et sa disponibilité constante ont été d'une importance cruciale tout au long de ce projet. Sa rigueur scientifique, sa capacité à poser les bonnes questions et son enthousiasme pour la recherche ont été des sources d'inspiration et de motivation. Ses nombreuses relectures, ses corrections et ses encouragements ont largement contribué à la qualité et à la cohérence de ce travail. Sans son accompagnement, cette thèse n'aurait certainement pas pu voir le jour.

Je voudrais également exprimer ma sincère reconnaissance à Monsieur Mohamed Mamchaoui, examinateur de cette thèse. Ses remarques pertinentes, ses critiques constructives et ses suggestions judicieuses ont été d'une grande aide pour améliorer et affiner ce travail. Sa rigueur scientifique et son regard critique ont grandement contribué à la qualité finale de cette recherche. Je le remercie également pour le temps qu'il a consacré à l'évaluation de mon travail et pour ses encouragements tout au long de ce processus.

Je remercie chaleureusement Monsieur Sabri Bensid, président du jury, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury de thèse. Son intérêt pour mon travail, ses encouragements et son soutien ont été très appréciés. Ses observations éclairées et

ses conseils avisés m'ont permis de mieux structurer et présenter mes résultats. Je le remercie également pour sa bienveillance et sa disponibilité.

Un remerciement particulier à ma famille pour son soutien indéfectible. À mes parents, pour leur amour, leur patience et leurs sacrifices, qui m'ont permis d'atteindre mes objectifs. Leur soutien constant et leur encouragement ont été des piliers sur lesquels j'ai pu m'appuyer tout au long de ce parcours doute et de fatigue.

Je tiens également à remercier mes amis proches pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants. Leur présence, leurs conseils et leur amitié ont été d'un grand réconfort et d'une aide précieuse tout au long de ce parcours. Je remercie

Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à cette thèse, qu'il s'agisse de soutien moral, de relecture, de discussions informelles mais précieuses, ou de toute autre forme d'aide. Votre soutien et votre aide ont été inestimables et je vous en suis profondément reconnaissant.

À tous, merci infiniment.

Sommaire

Introduction	vi
1 Notions Préliminaires	1
1.1 Espace de Sobolev	1
1.2 Méthodes de minimisation et points critiques :	7
1.3 Principe du maximum	10
1.4 Définition et propriétés du potentiel de Riesz	11
2 Modélisation Physique et Variantes des Équations de Choquard	15
2.1 Motivation	15
2.1.1 Modèles physiques	15
2.1.2 Equations connexes	17
2.2 Equation de choquard autonome	17
2.2.1 Cadre fonctionnel	18
2.2.2 Identitée de Pohozaev	19
2.2.3 Propriétés des solutions	21
2.2.4 Asymptotiques du terme non local	23
2.2.5 Cas superlinéaire	23
2.2.6 Cas linéaire	24
2.2.7 Cas sous-linéaire	24
2.2.8 Unicité et non-dégénérescence	25
2.3 Equation non autonome	25
2.3.1 Potentiel électrique	25
2.3.2 Perturbation singulières et limite semi classsique	31
2.3.3 Régime de champ electric fort	31
2.4 Potentiel magnetique	32
3 Résolution d'un problème de type Brézis-Nirenberg	33
3.1 Position du problème	33
3.2 Cas sous-critique	38
3.3 Cas critique	42
3.4 Conclusion	49
Bibliographie	51

Introduction générale

Les équations de type Choquard sont des équations aux dérivées partielles qui ont été utilisées dans la physique quantique et dans la mécanique des particules. Elles ont été introduites par le physicien et mathématicien français Augustin Choquard. Sur le plan physique, ces équations modélisent le comportement des systèmes quantiques, notamment pour décrire des particules ayant des interactions à longue portée. Elles sont utilisées pour comprendre des phénomènes tels que la théorie de la matière condensée, la théorie des champs quantiques et d'autres aspects de la physique quantique. Les équations de Choquard sont souvent représentées par une équation intégrale non linéaire qui relie la densité de probabilité quantique à un potentiel non local dépendant de cette densité. Dans ce mémoire, nous nous travaillons sur les solutions non triviales pour un problème elliptique non linéaire de type Choquard de la forme suivante :

$$-\Delta u + Vu = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u, \quad (0.1)$$

où :

- $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue,
- Δ : représente le laplacien, un opérateur différentiel qui joue un rôle crucial dans la diffusion et la dispersion des phénomènes,
- V est un potentiel qui peut varier spatialement
- $I_\alpha : x \mapsto I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha}{|x|^{N-\alpha}}$ est le potentiel de Riesz,
- $\alpha \in (0, N)$,
- $p \in [1, +\infty)$,

L'étude des solutions non triviales pour les problèmes elliptiques non linéaire de type Choquard occupe une place centrale dans la recherche en mathématique appliquées et surtout en physique mathématique. Ces problèmes présentent des défis uniques en raison de leur non-linéarité et de leur comportement complexe, nécessitant des approches innovantes pour caractériser et comprendre les solutions existantes. Dans cette étude nous explorons les aspects fondamentaux de ces problèmes et examinons les méthodes non triviales pour identifier et analyser les solutions qui ne peuvent pas être déduites simplement des solutions triviales. Notre objectif est aussi d'approfondir la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents et de proposer des outils mathématiques efficaces pour étudier ces systèmes complexes. Ce mémoire est décomposé en trois chapitres :

Chapitre 1 (Notions Préliminaires)

Nous avons jugé utile de rappeler brièvement quelques notions générales et certains résultats fondamentaux indispensables pour le reste de la thèse, en expliquant les termes clés comme le potentiel de Riesz, équation de Shrodinger-Newton, interaction non locale attractive...etc

Chapitre 2 (Modélisation Physique et Variantes des Équations de Choquard)

Ce chapitre est consacré à la modélisation physique des équations de Choquard ainsi qu'à l'étude des variantes autonomes et non autonomes de ces équations.

- **Modélisation Physique** : Explication des principes physiques sous-jacents aux équations de Choquard, illustrant comment ces équations modélisent les interactions à longue portée dans divers systèmes physiques.
- **Équations de Choquard Autonomes** : Introduction et analyse des équations autonomes, où le potentiel V est constant ou ne dépend pas explicitement du temps. Discussion des propriétés mathématiques et des solutions typiques de ces équations.
- **Équations de Choquard Non Autonomes** : Exploration des équations non autonomes, où le potentiel V varie spatialement et/ou temporellement. Présentation des défis supplémentaires posés par ces variations et des techniques mathématiques utilisées pour les aborder.

Chapitre 3 (Application à un problème)

Pour ce dernier Chapitre, on étudie l'existence des solutions faibles positives pour un problème de type Brézis-Nirenberg.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème de type Brézis-Nirenberg. La résolution de cette équation repose sur le théorème du Col. L'étude se divise en deux parties distinctes : la première partie examine le cas sous-critique, tandis que la deuxième partie se concentre sur le cas critique. Ces deux sections permettent d'analyser en profondeur les différentes conditions et implications des solutions obtenues dans chaque contexte..

Notations

$\mathbb{N}$	Entier naturel supérieur ou égal à 3
$f * g$	Produit de convolution
Ω	Ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\mathcal{C}(\Omega)$	L'ensemble des fonctions continues
$\mathcal{C}^2(\Omega)$	L'ensemble des fonctions qui sont deux fois continûment différentiables sur Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω
$L^1(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables pour lesquelles l'intégrale de la valeur absolue de la fonction est finie.
$L_{loc}^1(\Omega)$	L'espace des fonctions localement intégrables sur Ω
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables pour lesquelles l'intégrale de la valeur absolue au carré de la fonction est finie.
$W^{2,2}(\Omega)$	L'espace de Sobolev qui comprend les fonctions dont les deux premières dérivées faibles sont dans $L^2(\Omega)$.
$W_{loc}^{2,2}(\Omega)$	L'ensemble des fonctions dans $W^{2,2}(\Omega)$ sur chaque compact de leur domaine.
Γ	La fonction gamma définit par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ pour $\Re(z) > 0$.
$B(x_0, r)$	Une boule de rayon r centrée en x_0
$\hookrightarrow$	Inclusion continue
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Inclusion compacte
$x_n \rightarrow x$	Convergence forte
$x_n \rightharpoonup x$	Convergence faible
$ \cdot $	La norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$
C	Une constante réelle

Notions Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons les définitions de base nécessaires à la compréhension des problèmes elliptiques de type Choquard. On parlera également des notions et résultats utilisés comme le potentiel de Riesz, types de potentiels utilisés.

1.1 Espace de Sobolev

Définition 1.1.1 (Dérivée faible). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ une fonction localement intégrable. On dit que $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est la dérivée faible de u par rapport à la variable x_i (la i -ème variable) si pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (fonction infiniment différentiable à support compact dans Ω), l'intégration par parties donne :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \varphi dx.$$

Ici, $C_c^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions test, c'est-à-dire des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω .

Définition 1.1.2 (Espace $W^{1,p}(\Omega)$). On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$\left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \right. \\ \left. \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

En d'autres termes,

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \forall 1 \leq i \leq N \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p.$$

est un espace de Banach.

Remarque 1. Cette norme est équivalente à la norme

$$\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = 2$, on note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, muni du la produit scalaire :

$$(\varphi, \psi)_{H^1(\Omega)} = (\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.3 (Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$). Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ est définit par :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega); \quad \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla \varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, i.e, $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$.

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$, défini par

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx,$$

où ∇u et ∇v sont les gradients de u et v , respectivement.

Lemme 1.1.1 (Lemme de Brézis-Lieb). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n) \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si u_n est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ presque partout dans Ω , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p \right) = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Holder). *l'inégalité de Holder est une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont dit conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient Ω un ensemble mesurable, et $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (1.1.1)$$

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Poincaré). *[4] Soit Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante $C > 0$ (dépendant de Ω) telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

pour tout $1 \leq p < \infty$.

De plus, la meilleure constante C pour cette inégalité est $\frac{1}{\lambda_1(\Omega)}$ (où $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre du laplacien définie par $\lambda_1 = \inf \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} u^2 \, dx}$)

Théorème 1.1.3 (Valeur propre du Laplacien). *[4] Soit le problème aux valeurs propres*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les valeurs propres du Laplacien sur Ω forment une suite croissante $\lambda_k > 0$ qui tend vers l'infini. De plus, les vecteurs propres correspondants sont des fonctions continues et forment une suite orthonormée complète dans $L^2(\Omega)$.

En particulier, la première valeur propre λ_1 est simple et le premier vecteur propre φ_1 peut être choisi positif dans Ω , tandis que tous les autres changent de signe.

Théorème 1.1.4 (Inégalité de Sobolev). [4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'inégalité de Sobolev stipule que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, où $1 \leq p < N$, il existe une constante $C_S > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_S \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est l'exposant conjugué critique. La meilleure constante de Sobolev C_S est la plus petite constante pour laquelle l'inégalité de Sobolev est vérifiée. Plus précisément, on définit

$$S = \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}}{\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}} : u \in W^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

Théorème 1.1.5 (Immersion de Sobolev). Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$. On a les injections suivantes :

i) Si $1 \leq p < N$ alors

a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

b) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < p^*$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{N-p}{Np}$.

ii) Si $p = N$ alors $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \infty$.

iii) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, où

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Théorème 1.1.6 (Rellich-Kondrachov). Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

- Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ où $p^* = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{N}}$.
- Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$.
- Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$,
avec injections compactes.

Remarque 2. Les injections précédentes sont vraies pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ seulement si Ω est borné.

Théorème 1.1.7 (Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev). [13] Soient $t, r > 1$ et $0 < \mu < N$ avec $\frac{1}{t} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2$, $f \in L^t(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Il existe une constante $C(t, N, \mu, r)$, indépendante de f, h , telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)h(y)}{|x-y|^\mu} dx dy \leq C(t, N, \mu, r) \|f\|_t \|h\|_r.$$

Si $t = r = \frac{2N}{2N-\mu}$, alors

$$C(t, N, \mu, r) = C(N, \mu) = \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} - \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(N - \frac{\mu}{2}\right) \left(\frac{\Gamma(\frac{N}{2})\Gamma(N)}{N}\right)^{-1+\frac{\mu}{N}}},$$

à noter que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \right),$$

avec $\alpha = N - \mu$.

D'après l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, pour tout $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, nous avons

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}} \leq C(N, \mu) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*},$$

où $2_\mu^* = \frac{2N-\mu}{N-2}$.

La meilleure constante de pour l'injection de $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{2_\mu^*}(\mathbb{R}^N)$ notée $S_{H,L}$, et est donnée par :

$$S_{H,L} \triangleq \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}}. \quad (1.1.2)$$

D'après les commentaires précédents, on peut facilement déduire les conclusions suivantes :

Lemme 1.1.2 ([13]). *La constante $S_{H,L}$ définie dans (1.1.2) est atteinte si et seulement si*

$$u = C \left(\frac{\beta}{\beta^2 + |x - \alpha|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}},$$

où $C > 0$ est une constante, $\alpha \in \mathbb{R}^N$ et $\beta \in (0, \infty)$ sont des paramètres. Ainsi,

$$S_{H,L} = \frac{S}{C(N, \mu)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}},$$

où S le meilleur constant de Sobolev.

Théorème 1.1.8. *Soit $N \geq 3$. Alors, pour tout domaine Ω de $\mathbb{R}^N$,*

$$S_{H,L}(\Omega) \triangleq \inf_{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2^*} |u(y)|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}} = S_{H,L},$$

et la constante $S_{H,L}(\Omega)$ n'est jamais atteinte sauf si $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Lemme 1.1.3.

- L'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ s'inclut continûment dans l'espace $L^{\frac{2Nq}{2N-\mu}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q > 1$ tel que $\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \leq \frac{2N-\mu}{2Nq} \leq \frac{1}{2}$ et $\mu \in (0, N)$. Plus précisément, on a :

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2Nq}{2N-\mu}}(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in \left[\frac{2N-\mu}{N}; \frac{2N-\mu}{N-2} \right] \text{ et } \forall \mu \in (0, N).$$

- Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ s'inclut continûment dans l'espace $L^{\frac{2Nq}{2N-\mu}}(\Omega)$ pour tout $q > 1$ tel que $\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \leq \frac{2N-\mu}{2Nq} \leq 1$ et $\mu \in (0, N)$. Plus précisément, on a :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2Nq}{2N-\mu}}(\Omega), \quad \forall q \in \left[\frac{2N-\mu}{2N}; \frac{2N-\mu}{N-2} \right] \text{ et } \forall \mu \in (0, N).$$

Théorème 1.1.9. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $p \geq 1$ et $\mu \in (0, N)$. On a les injections suivantes :*

- $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.
- $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $\frac{2N-\mu}{2N} \leq q < 2_{\mu}^*$ où $\frac{1}{2_{\mu}^*} = \frac{N-2}{2N-\mu}$.

1.2 Méthodes de minimisation et points critiques :

Définition 1.2.1 (Dérivée directionnelle). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. La dérivée directionnelle de f en un point $\mathbf{a} \in U$ dans la direction d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h},$$

pour autant que cette limite existe.

Définition 1.2.2 (Fonction Fréchet différentiable). Soit X et Y deux espaces vectoriels normés (espaces de Banach) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit U un ouvert de X . Une fonction $f : U \rightarrow Y$ est dite Fréchet différentiable en un point $\mathbf{a} \in U$ s'il existe une application linéaire continue $L : X \rightarrow Y$ telle que :

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X} = 0.$$

Dans ce cas, l'application linéaire L est unique et est appelée la dérivée de Fréchet de f en $\mathbf{a}$, notée $Df(\mathbf{a})$ ou $f'(\mathbf{a})$.

Définition 1.2.3 (Fonction de Carathéodory). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie :

1. L'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue p.p. $x \in \Omega$.
2. L'application $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.1. [18] Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$. Supposons qu'il existe une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable en $x \in \Omega$, continûment différentiable en $u \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^N$, avec $F_u := \frac{\partial F}{\partial u}$ et $F_p := \frac{\partial F}{\partial p}$, et les conditions suivantes sont vérifiées :

- a) $|F(x, u, p)| \leq C(1 + |u|^{s_1} + |p|^2)$, où $s_1 \leq \frac{2N}{N-2}$.
- b) $|F_u(x, u, p)| \leq C(1 + |u|^{s_2} + |p|^{t_2})$, où $s_2 \leq \frac{N+2}{N-2}$ et $t_2 \leq \frac{N+2}{N}$.
- c) $|F_p(x, u, p)| \leq C(1 + |u|^{s_3} + |p|)$, où $s_3 \leq \frac{N}{N-2}$.

Alors, la fonctionnelle J définie par

$$J(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx,$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et $J'(u)$ est donnée par :

$$\langle J'(u), v \rangle := \int_{\Omega} (F_u(x, u, \nabla u)v + F_p(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v) \, dx.$$

Définition 1.2.4 (Condition de Palais-Smale). Soient X un espace de Banach, et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c), si toute suite (u_n) de X telle que $J(u_n) \rightarrow c$ dans $\mathbb{R}$ et $J'(u_n) \rightarrow 0$ dans X contient une sous-suite (u_{n_k}) convergente.

Définition 1.2.5 (Fonction faiblement semi continue inférieurement (faib.s.c.i)). Soit J une fonction définie sur un espace de Banach E , à valeurs dans $\mathbb{R}$. J est dite faiblement semi-continue inférieurement (faib.s.c.i.) en x , si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers x , on a :

$$J(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n).$$

Notons que J est (faib.s.c.i) si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $B = \{x \in E \mid |J(x)| \leq \lambda\}$ est faiblement fermé dans E . Notons aussi que si J est convexe et semi-continue inférieurement, alors J est (faib.s.c.i).

Définition 1.2.6 (Fonction coercive). Une fonctionnelle A définie sur un espace de Banach E est dite coercive s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que :

$$A(x) \geq \alpha \|x\|_{\mathbb{E}} + \beta.$$

il est évident de voir que si A est coercive, elle est bornée inférieurement et chaque suite minimisante est bornée.

Définition 1.2.7 (Point critique). Soient E un espace de banach et $V \subseteq E$ un ouvert. On suppose que

$$A : V \rightarrow \mathbb{R}$$

est de classe C^1 sur V . On dit que $u_0 \in V$ est un point critique de A , si $A'(u_0) = 0$. dans ce cas $c_0 = A(u_0)$ est dite valeur critique de A . si u_0 n'est pas un point critique, on dit que u_0 est un point régulier de A et c_0 une valeur régulière de A

Théorème 1.2.2. [18] Soient E un espace de Banach réflexif, et $J : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive faiblement semi-continue inférieurement sur E . Alors

$$\inf_{u \in E} J(u) < \infty$$

et il existe $u_0 \in E$, tel que $J(u_0) = \min_{u \in E} J(u)$. De plus, si J est strictement convexe, u_0 est unique. Si J est différentiable au sens de Gâteaux, alors $J'(u_0) = 0$.

Lemme 1.2.1 (Principe variationnel d'Ekeland). Soient (E, d) un espace métrique complet et J une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inférieurement avec $c = \inf_{x \in E} J(x)$.

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe u_ϵ tel que :

$$\begin{cases} c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon \\ \forall x \in E, x \neq u_\epsilon, J(x) - J(u_\epsilon) + \epsilon d(x, u_\epsilon) > 0 \end{cases}$$

Théorème 1.2.3 (Théorème du Col ([13])). Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :

1. Il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) > a$.
2. Il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.

Alors J possède une valeur critique c telle que $c > a$. De façon plus précise, si on pose

$$B = \{\varphi([0, 1]); \varphi \in C([0, 1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_0\},$$

et

$$c := \inf_{A \in B} \max_{v \in A} J(v),$$

alors c est une valeur critique de J , et $c > a$.

1.3 Principe du maximum

Théorème 1.3.1 (Principe du maximum faible). [15] Soient Ω un ouvert borné connexe, $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice, $b(\cdot) := (b_i(\cdot))_{1 \leq i \leq N}$ et $\beta(\cdot) := (\beta_i(\cdot))_{1 \leq i \leq N}$ deux vecteurs, et c une fonction. On considère A et L deux opérateurs du second ordre définis par :

$$Au = - \sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij} \partial_j u) + \sum_{j=1}^N \partial_j(\beta_j u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{ij} u + b \cdot \nabla u + cu,$$

avec $a_{ij}, \beta_i, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. On suppose que la condition suivante est satisfaite

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. sur } \Omega, \quad a(x) \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \alpha |\xi|^2,$$

et que

$$c + \nabla \cdot \beta = c + \sum_{i=1}^N \partial_i \beta_i \geq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $Au \leq 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors :

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Théorème 1.3.2 (Principe du maximum fort). [18] Soient Ω un domaine borné, et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$.

1. Si $-\Delta u \leq 0$ et si u atteint un maximum positif à l'intérieur de Ω , alors u est constante sur Ω .
2. Si $-\Delta u \geq 0$ et si u atteint un minimum positif à l'intérieur de Ω , alors u est constante sur Ω .

Théorème 1.3.3 (Principe du maximum classique). [18] Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$.

1. Si $-\Delta u \leq 0$ dans Ω , alors

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

2. Si $-\Delta u \geq 0$ dans Ω , alors

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.4 Définition et propriétés du potentiel de Riesz

Le potentiel de Riesz a été introduit par M. Riesz dans les années 1930 et a été systématiquement étudié dans son article fondamental [36]. Une exposition sur les propriétés fonctionnelles-analytiques de base des potentiels de Riesz peut être trouvée dans la monographie d'E. Stein [41]

Définition 1.4.1 (Potentiel de Riesz). Le potentiel de Riesz I_α d'ordre $\alpha \in (0, N)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ de dimension $N \geq 1$ est défini pour chaque $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ par

$$I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha}{|x|^{N-\alpha}},$$

où

$$A_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{N/2} 2^\alpha}.$$

On va annoncer quelques propriétés du potentiel de Riesz qui vont nous aider à mieux comprendre comment ce potentiel agit sur notre problème.

Le choix de la constante de normalisation A_α assure la propriété du semi-groupe

$$I_\alpha * I_\beta = I_{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha, \beta > 0 \text{ tels que } \alpha + \beta < N,$$

et, pour $N \geq 3$, la propriété

$$-\Delta I_\alpha = I_{\alpha-2}, \quad \forall \alpha \in (2, N).$$

En outre, $-\Delta I_2 = \delta$, où δ est la fonction delta de Dirac, c'est-à-dire que I_2 est la fonction de Green du Laplacien $-\Delta$ sur $\mathbb{R}^N$. Plus généralement, I_α peut être interprété comme l'inverse de l'opérateur de Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Voir par exemple [19], [36], [41] pour l'étude de ces propriétés fondamentales des potentiels de Riesz.

Quand $\alpha \rightarrow 0$, $I_\alpha \rightarrow \delta$, au sens vague [19]. Quand $\alpha \rightarrow N$, $I_\alpha * f \rightarrow A_N \log \frac{1}{|x|} * f$ pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0$, où

$$A_N = \lim_{\alpha \rightarrow N} (N - \alpha) A_\alpha = \frac{1}{\Gamma(N/2) \pi^{N/2} 2^{N-1}}.$$

La définition des potentiels de Riesz ainsi que la propriété de semi-groupe peuvent être étendues de $\alpha \in (0, N)$ à un α complexe arbitraire avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et $\alpha - N/2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, mais dans ce cas, la convolution $I_\alpha * f$ doit être interprétée au sens distributionnel. Voir par exemple [19] pour une exposition plus récente. Dans cette enquête, nous supposons toujours que $\alpha \in (0, N)$ et la convolution $I_\alpha * f$ est comprise au sens de l'intégrale de Lebesgue. Le potentiel de Riesz d'ordre $\alpha \in (0, N)$ d'une fonction $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ est défini comme

$$I_\alpha * f(x) := A_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x - y|^{N-\alpha}} dy.$$

Cette intégrale converge dans le sens classique de Lebesgue pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ si et seulement si

$$f \in L^1\left(\mathbb{R}^N, (1 + |x|)^{-(N-\alpha)} dx\right), \quad (1)$$

De plus, si (1) n'est pas satisfait, alors $I_\alpha * |f| = +\infty$ partout dans $\mathbb{R}^N$ [19].

Le potentiel de Riesz I_α est bien défini comme opérateur sur l'espace entier $L^q(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $q \in [1, \frac{N}{\alpha})$. L'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev [39] (voir aussi [22, 41]), qui stipule que si $q \in (1, \infty)$ et si $\alpha < \frac{N}{q}$, alors pour chaque $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$, nous avons $I_\alpha * f \in L^{\frac{Nq}{N-\alpha q}}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |I_\alpha * f|^{\frac{Nq}{N-\alpha q}} dx \right)^{\frac{N-\alpha q}{Nq}} \leq C_{N,\alpha,q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $q = \frac{2N}{N+\alpha}$, alors la constante optimale est donnée par

$$C_{N,\alpha,q} = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\alpha/2} \Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma(N)} \right)^{\frac{\alpha}{N}}. \quad (2)$$

L'inégalité (2) implique que si $q \in (1, \infty)$, $\alpha < \frac{N}{q}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{N}$, alors

$$I_\alpha : L^q(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$$

est un opérateur linéaire borné. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors en général $I_\alpha * f \notin L^{\frac{N}{N-\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ (voir par exemple [?, §V.1.2]).

Si $q = \frac{2N}{N+\alpha}$, alors la constante optimale est donnée par [9], [22].

$$C_{N,\alpha,q} = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\alpha/2} \Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma(N)} \right)^{\frac{\alpha}{N}}. \quad (3)$$

L'inégalité (2) implique que si $q \in (1, \infty)$, $\alpha < \frac{N}{q}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{N}$, alors

$$I_\alpha : L^q(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$$

est un opérateur linéaire borné. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors en général $I_\alpha * f \notin L^{\frac{N}{N-\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ (voir par exemple [41]).

Ces propriétés de mappage des potentiels de Riesz sont importantes non seulement comme outil pour contrôler le domaine de définition du fonctionnel d'action de l'équation de Choquard, mais aussi dans l'étude des propriétés de régularité des solutions par des procédures de type bootstrap

La version pondérée de l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev due à E. Stein et G. Weiss [40] stipule que si $q \in (1, \infty)$, $s < N\left(1 - \frac{1}{q}\right)$, $t < \frac{N}{r}$, $s + t \geq 0$, $q \leq r < \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{s+t-\alpha}{N}$, alors pour tout $f \in L^q(\mathbb{R}^N, |x|^s dx)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |I_\alpha * f(x)|^r |x|^{-rt} dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^q |x|^s dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4)$$

où $\mathbb{R}^N$ (souvent écrit $\mathbb{R}^n$) fait référence à l'espace Euclidien de dimension N . Lorsque $r = q$, l'inégalité est également connue sous le nom d'inégalité de Hardy–Rellich. Les constantes optimales pour (4) sont connues dans certains cas particuliers. Lorsque la fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ est non négative, une estimation élémentaire montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$I_\alpha * f(x) \geq \frac{A_\alpha}{|\mathbb{R}^N|} \int_{B_R(x)} f(y) dy.$$

où $|\mathbb{R}^N|$ est la mesure de l'espace $|\mathbb{R}^N|$. En particulier, si la fonction f est positive sur un ensemble de mesure positive de $\mathbb{R}^N$, alors $I_\alpha * f$ est strictement positif partout dans

$\mathbb{R}^N$. De manière similaire, pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, on peut estimer

$$I_\alpha * f(x) \geq \frac{A_\alpha}{(2|x|)^{N-\alpha}} \int_{B_{2|x|}(x)} f(y) dy \geq \frac{c}{|x|^{N-\alpha}},$$

ce qui signifie que $I_\alpha * f$ ne peut pas décroître plus vite que I_α à l'infini, même si la fonction f est à support compact.

Ces propriétés de décroissance du potentiel de Riesz sont essentielles pour l'étude de la décroissance asymptotique des états fondamentaux des équations de Choquard et des théorèmes de Liouville.

Modélisation Physique et Variantes des Équations de Choquard

2.1 Motivation

2.1.1 Modèles physiques

Prenons $p \in [1, +\infty)$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in (0, N)$, on considère le problème

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u \quad (2.1.1)$$

$u(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$

Pour $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ou $I_\alpha : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel de riesz défini par

$$I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha}{|x|^{N-\alpha}}$$

où

$$A_\alpha = \frac{\Gamma(\frac{N-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})2^\alpha},$$

et Γ est la fonction gamma.

Equation (2.1.1) s'appelle généralement l'équation non-lineaire de Choquard ou l'équation de Choquard-Pekar non lineaire. Elle a plusieurs origines, dans le cas physique ($N = 3, p = 2, \alpha = 2$), L'équation de Choquard

$$-\Delta u + u = (I_2 * |u|^2)u \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.1.2)$$

est apparu au moins dès 1954, dans un ouvrage de S.I.Pekar décrivant le mécanique quantique d'un polaron au repos.

En 1976 P.Choquard utilisa (2.1.2) pour décrire un électron piégé dans son propre trou Voir [10, 11], dans une certaine approximation de la théorie de Hartree-Fock du plasma à un composant où des électrons libres dans un réseau ionique interagissent avec des phonons associées au déformations du réseau ou avec la polarisation qu'il crée sur le milieu (interaction d'un electron avec son propre trou).

En 1996, R.Penrose a proposé (2.1.2) comme modèle de matière autogravitante, dans un programme en laquelle réduction d'état quantique est comprise comme un phénomène gravitationnel.

Dans ce contexte, l'équation de Choquard de type (2.1.3) est généralement appelée équation non-linéaire de Shrodinger-Newton, si u résout (2.1.3) alors la fonction ψ définit par $\psi(t, x) = e^{it}u(x)$ est une onde solitaire de l'équation de Hartree dépendant du temps de focalisation .

$$i\psi_t = -\Delta\psi - (I_\alpha * |\psi|^p)|\psi|^{p-2}\psi \quad (2.1.3)$$

Dans ce contexte, (2.1.3) est également connu sous le nom d'équation de Hartree non-linéaire stationnaire. En général, l'équation d'évolution de type Shrodinger associée

$$i\psi_t = \Delta\psi + (W * |\psi|^2)\psi \quad (2.1.4)$$

est un modèle pour un grand système de bosons atomique et moléculaires non relativistes avec une interaction attractive qui est plus faible et a une portée plus longue que celle de l'équation de Shrodinger non lineaire (où le potentiel d'interaction W est formellement le delta de dirac à l'origine).

L'équation (2.1.4) se présente comme une limite de champ moyen d'un systeme bosonique avec des interactions à deux corps attractives; cette limite peut etre prise rigoureusement dans de nombreux cas. Enfin, l'équation de Choquard est également connu sous le nom d'équation de Shrodinger de la physique quantique avec la gravité newtonienne non relativiste.

L'équation peut etre aussi dérivée du système Einstein-Klein-Gordon et Einstein-Dirac. Un tel modèle a été proposé pour les étoiles de bosons et pour l'affrondement des fluctuations de galaxies de matière noire de champ scalaire. Voir [16, 17].

D'autres modèles ont été développés, y compris un potentiel gravitomagnétique et un couplage auto-champ.

2.1.2 Equations connexes

L'équation de Choquard est liée à plusieurs autres équations aux dérivées partielles avec des interactions non locales.

Les solutions d'ondes stationnaires à l'équation de Hartree de focalisation

$$i\psi_t = \Delta\psi + (I_\alpha * |\psi|^2)\psi \quad (2.1.5)$$

sont des solutions de l'équation de Choquard.

De retour au cadre stationnaire, le potentiel d'interaction, au lieu d'être attractif comme dans l'équation de Choquard, peut être pris comme répulsif. En présence d'un potentiel comme

$$V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

L'équation de Hartree stationnaire avec un potentiel coulombien

$$-\Delta u + Vu + (I_2 * |u|^2)u = \lambda u \quad (2.1.6)$$

a été étudiée par de nombreux auteurs. Au lieu d'imposer un potentiel externe, une interaction non linéaire locale peut être ajoutée, cela conduit à l'équation de Shrodinger-poisson de la forme

$$-\Delta u + Vu + (I_2 * |u|^2)u = |u|^{q-2}u \quad (2.1.7)$$

qui a été l'objet de plusieurs travaux.

2.2 Equation de choquard autonome

Dans cette section, on va explorer les solutions de l'équation de Choquard dans le cas où le problème est invariant par translation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ ensuite étudier

l'existence des solutions pour ce problème de type general, puis donner l'identité de Pohozaev et terminer avec les propriétés des solutions, à savoir la régularité, la positivité, la symetrie et enfin les asymptotes des solutions. Pour la suite de cette section, on va considerer le problème de type Choquard suivant :

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \quad (2.2.1)$$

les solutions du problème (2.2.1) sont, au moins formellement, les points critiques de la fonction d'action A définit pour une fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ par :

$$A(u) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right) - \frac{1}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx \right) \quad (2.2.2)$$

Il existe plusieurs façons de construire de manière variationnelle un état fondamentale de (2.2.1), une façon de construire des solutions consiste à minimiser la quantité (2.2.2)

2.2.1 Cadre fonctionnel

Le premier terme dans la définition de la fonctionnelle d'action A par (2.2.2) suggère naturellement de prendre comme domaine l'espace de Sobolev classique $H^1(\mathbb{R}^N)$ des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ dont la dérivée faible est carrée intégrable.

Cela soulève alors la question de savoir si le deuxième terme, qui implique la convolution, est bien définie et suffisamment régulier.

Si nous supposons que $u \in L^{\frac{2Np}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ et si nous appliquons l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev à la fonction $|u|^p \in L^{\frac{2Np}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ nous obtenons, en utilisant l'inégalité de Holder :

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_\alpha * |u|^p |u|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |I_\alpha * |u|^p|^{2N/(N-2)} \right)^{1/2 - \alpha/2N} \leq C_{N,\alpha,2N/(N+\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2N/(N+\alpha)} \right)^{1+\alpha/N} \quad (2.2.3)$$

Il reste à déterminer quand la condition $u \in L^{2Np/(N+\alpha)}$ est satisfaite.

D'après le théorème classique de prolongement de Sobolev, il existe un prolongement continu $H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2Np}(\mathbb{R}^N)$ avec $r \in [1, \infty)$ si et seulement si $\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \leq \frac{N+\alpha}{2Np} \leq \frac{1}{2}$, ou, de manière équivalente,

$\frac{N-2}{N+\alpha} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{N}{N+\alpha}$. De plus, nous avons alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|)^p \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

pour une certaine constante C dépendant de N, α et p . Les propriétés de différentiabilité de base de la fonctionnelle A découlent de ces estimations par des arguments classiques d'analyse fonctionnelle non linéaire.

Proposition 2.2.1 ([30]). *Si $p \in (1, \infty)$ satisfait*

$$\frac{N-2}{N+\alpha} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{N}{N+\alpha},$$

alors la fonctionnelle A est bien définie et continûment différentiable de Fréchet dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, si $p \geq 2$, alors la fonctionnelle A est deux fois continûment différentiable de Fréchet.

Théorème 2.2.1 ([30]). *Si $\frac{N-2}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N}{N+\alpha}$, alors (2.2.1) a une solution d'état fondamental $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.*

2.2.2 Identité de Pohozaev

Proposition 2.2.2. *Si $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, N)$ et $p > 1$, toute solution $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{2Np}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ de l'équation de Choquard (2.2.1) telle que $u \in W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1, \frac{2N}{N+\alpha}p}(\mathbb{R}^N)$ satisfait l'identité de Pohožaev*

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = \frac{N+\alpha}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|)^p |u|^p \quad (2.2.4)$$

On va maintenant donner la démonstration de cette proposition

Démonstration. La preuve de la Proposition (2.2.2) suit une stratégie classique consistant à tester l'équation contre $x \cdot \nabla u(x)$, ce qui est rendu rigoureux en multipliant par des fonctions de découpage appropriées. Nous prenons $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\phi = 1$ sur

B_1 . En testant l'équation contre la fonction $v_\lambda \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^{2Np/(N+\alpha)}(\mathbb{R}^N)$ définie pour $\lambda \in (0, \infty)$ et $x \in \mathbb{R}^N$ par $v_\lambda(x) = \phi(\lambda x) x \cdot \nabla u(x)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v_\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} u v_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|)^p |u|^{p-1} u v_\lambda. \quad (2.2.5)$$

Nous calculons pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u v_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \phi(\lambda x) x \cdot \nabla u(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\lambda x) x \cdot \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) (x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} (N \phi(\lambda x) + \lambda x \cdot \nabla \phi(\lambda x)) \frac{|u|^2}{2} dx. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u v_\lambda = - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2.$$

Ensuite, puisque $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\lambda x) |\nabla u|^2 + x \cdot \nabla |\nabla u|^2 \phi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} ((N-2)\phi(\lambda x) + \lambda x \cdot \nabla \phi(\lambda x)) \frac{|\nabla u|^2}{2} dx. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v_\lambda = - \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2.$$

Enfin, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha^* |u|)^p |u|^{p-2} uv_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p I_\alpha(x-y) \phi(\lambda x) x \cdot \nabla |u|^p(x) dx dy \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} I_\alpha(x-y) |u(y)|^p \phi(\lambda x) x \cdot \nabla |u|^p(x) dy dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \phi(\lambda y) y \cdot \nabla |u|^p(y) dx dy \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p I_\alpha(x-y) \left((N\phi(\lambda x) + x \cdot \nabla \phi(\lambda x)) |u(x)|^p + \right. \\ &\quad \left. \frac{N-\alpha}{2p} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^2} (x\phi(\lambda x) - y\phi(\lambda y)) \cdot (x-y) \right) dx dy \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour conclure que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha^* |u|)^p |u|^{p-1} uv_\lambda = - \frac{N-\alpha}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha^* |u|)^p |u|^p. \quad (2.2.10)$$

□

2.2.3 Propriétés des solutions

Les résultats de cette section sont basés sur les références [30] et [26]

a. Régularité :

Proposition 2.2.3. *Soit $\alpha \in (0, N)$ et $p \in (1, \infty)$ tels que $\frac{N-2}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N}{N+\alpha}$. Soit $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ une solution de l'équation*

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * |u|^{\frac{p}{2}}) |u|^{\frac{p-2}{2}} u. \quad (2.2.11)$$

Alors $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$, $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s > 1$, et $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

b. Positivité :

Proposition 2.2.4. *Soit $\alpha \in (0, N)$ et $p \in (1, \infty)$ tel que $\frac{N-2}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N}{N+\alpha}$. Si $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ est un état fondamental de*

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * |u|^{\frac{p}{2}})|u|^{\frac{p-2}{2}}u, \quad (2.2.12)$$

alors soit $u > 0$ soit $u < 0$.

Démonstration. : Si u est un état fondamental, notons que $|u|$ est également un état fondamental. Par conséquent, par la proposition (2.2.3), on a $|u| \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$-\Delta |u| + |u| = (I_\alpha * |u|^{\frac{p}{2}})|u|^{\frac{p-2}{2}}|u|^{p-1}. \quad (2.2.13)$$

Par le principe du maximum fort, soit $|u| > 0$ soit $|u| = 0$. Puisque $u \neq 0$, on en déduit que soit $u > 0$ soit $u < 0$. $\square$

c. Symétrie :

Dans cette section, nous prouvons que tout état fondamental est une solution radiale et radialement décroissante.

Proposition 2.2.5. *Soit $\alpha \in (0, N)$, $\mu = n - \alpha$ et $p \in (1, \infty)$ tels que $\frac{N-2}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N}{N+\alpha}$. Si $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ est un état fondamental positif de*

$$-\Delta u + u = (\mu I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u,$$

alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $v : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non négative et non croissante telle que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$u(x) = v(|x - x_0|).$$

D'après la Proposition précédente, tout état fondamental est positif. Par conséquent, lorsque $p \geq 2$.

Notre preuve suivra la stratégie de T. Bartsch, M. Willem et T. Weth [2], qui consiste à utiliser la propriété de minimalité de l'état fondamental pour déduire une relation entre la fonction et sa polarisation.

2.2.4 Asymptotiques du terme non local

Nous commençons par étudier les asymptotiques du terme non local. Nous donnons des bornes explicites sur les taux de convergence dont nous aurons besoin par la suite.

Proposition 2.2.6. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in (0, N)$ et $p \in (1, \infty)$. Si $\frac{N-2}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N}{N+\alpha}$ et que u est un état fondamental de*

$$-\Delta u + u = (\mu I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\left| I_\alpha * |u|^p(x) - I_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \right| \leq C \frac{|x|^{N-\alpha}}{(1+|x|)(1+|x|^{N(p-1)})^{1/\eta}}.$$

La preuve de cette proposition suivra à partir des estimations de régularité.

2.2.5 Cas superlinéaire

Dans le cas où $p > 2$, nous allons montrer que les états fondamentaux présentent une décroissance exponentielle classique.

Proposition 2.2.7. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, N)$ et $p \in (2, \infty)$. Si $\frac{1}{p} < \frac{N-2}{N+\alpha}$ et que u est un état fondamental positif de*

$$-\Delta u + u = (\mu I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{|x|^{(N-1)/2} e^{|x|}} \in (0, \infty).$$

Notez que si $\alpha \geq N - 4$, alors les hypothèses de la proposition ne peuvent pas être satisfaites. S. Cingolani, M. Clapp et S. Secchi ont prouvé que la limite est finie.

2.2.6 Cas linéaire

L'analyse du cas $p > 2$ est basée sur le fait que $|u|^{p-2}$ décroît exponentiellement à l'infini.

Lorsque $p = 2$, nous devons prendre en compte le potentiel de Riesz $I_\alpha * |u|^2$.

Proposition 2.2.8. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, N)$ et $\alpha > N - 4$. Si u est un état fondamental positif de*

$$-\Delta u + u = (\mu I_\alpha * |u|^2)u \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) |x|^{(N-1)/2} e^{\left(\int_0^{|x|} (1 - \nu N^{-\alpha} s^{N-\alpha}) ds\right)} \in (0, \infty),$$

où

$$\nu N^{-\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx.$$

2.2.7 Cas sous-linéaire

Alors que dans le cas $p > 2$, le terme non linéaire ne jouait aucun rôle dans les asymptotiques et pour $p = 2$ tous les termes jouaient un rôle, dans le cas $p < 2$, les asymptotiques sont gouvernées par les termes sans dérivées dans l'équation.

Proposition 2.2.9. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, N)$ et $p \in (1, 2)$. Si $\frac{N}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N-2}{N+\alpha}$ et que u est un état fondamental positif de*

$$-\Delta u + u = (\mu I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u \text{ dans } \mathbb{R}^N, \quad (2.2.14)$$

alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\|u(x)\|^{2-p}}{|x|^{N-\alpha}} = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p.$$

2.2.8 Unicité et non-dégénérescence

Lorsque $\alpha = 2$ et $p = 2$, il existe au plus une solution radiale positive aux équations de Choquard [?]

En général, l'ensemble des états fondamentaux est connu pour être compact à translations près

Lorsque $N = 3$, $\alpha = 2$ et $p = 2$, cet état fondamental est non-dégénéré à translations près. [?]

2.3 Équation non autonome

Les resultats de cette section sont basées sur [?].

Dans cette section, nous explorons les équations de Choquard qui ne sont pas invariantes sous les translations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, en raison de la présence d'un potentiel électrique variable ou d'un potentiel magnétique dans la partie linéaire de l'équation. Cela peut également se produire par des modifications non invariantes par translation du terme non linéaire.

2.3.1 Potentiel électrique

Les modèles physiques dans lesquels les particules sont sous l'influence d'un champ électrique externe conduisent à étudier les équations de Choquard sous la forme suivante :

$$-\Delta u + Vu = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

où $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ est un potentiel électrique non constant.

a. Perturbation d'un potentiel constant

P.-L. Lions [23] a étudié l'existence de solutions de ce type de problème avec $p = 2$ lorsque le potentiel externe V est une perturbation d'un potentiel constant, c'est-à-dire que pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, V peut être écrit comme $V(x) = 1 + V_0(x)$, où V_0 décroît à l'infini et satisfait certaines conditions de régularité légères, par exemple $V_0 \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N) + L^t(\mathbb{R}^N)$ avec $N/2 \leq t < \infty$ si $N \geq 3$. Pour construire des solutions à l'équation précédente, Lions a considéré un problème de maximisation défini par

$$I_V := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^2) |u|^2 : u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V|u|^2) = 1 \right\}.$$

Les maximiseurs de I , à multiplication par une constante près, sont des solutions de l'équation de Choquard. Le problème limite associé à l'infini

$$I_\infty := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^2) |u|^2 : u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) = 1 \right\},$$

est simplement une reformulation de la minimisation du quotient de Sobolev associé à l'équation de Choquard, qui admet un minimiseur si et seulement si $(N-4)^+ < \alpha < N$. En application de sa méthode de concentration-compacité, Lions a prouvé que si $V_0 \not\equiv 0$ et s'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V|u|^2) \geq \nu \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \quad \text{pour chaque } u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

alors toute suite maximisante pour I est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $I_V < I_\infty$.

b. Exposants critiques inférieurs et supérieurs

Nous avons vu précédemment que pour un potentiel constant $V(x) \equiv 1$, le fonctionnel d'action A est bien défini et différentiable sur l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si p appartient à l'intervalle $(\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{(N-2)^+})$. Cependant, l'équation de Choquard autonome avec les exposants critiques $p = \frac{N+\alpha}{N-2}$ et $p = \frac{N+\alpha}{N}$ n'a pas de solution non triviale dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dans ces cas, étudier l'équation non autonome comme une perturbation de l'équation autonome serait sans intérêt.

L'équation de Choquard avec l'exposant critique inférieur,

$$-\Delta u + Vu = (I_\alpha * |u|^{\frac{N+\alpha}{N}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N}-2}u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

a été étudiée par les auteurs. Cet exposant est critique par rapport à l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev, reformulée de manière variationnelle par un infimum J_∞ qui est atteint si et seulement si

$$u(x) = C \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - a|^2} \right)^{N/2},$$

où $C > 0$ est une constante fixée, $a \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in (0, \infty)$ sont des paramètres.

L'équation de Choquard avec l'exposant critique supérieur est

$$-\Delta u + Vu = (I_\alpha * |u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}-4}u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

Cet exposant $\frac{N+\alpha}{N-2}$ est critique par rapport à l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev. L'infimum J_∞ est défini par

$$J_\infty = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 : u \in D^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}})|u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}} = 1 \right\} > 0.$$

Les minimiseurs de J_∞ sont connus explicitement. La substitution directe des minimiseurs de J_∞ dans J_V montre que $J_V = J_\infty$, à condition que le potentiel V soit positif sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent, la condition $J_V < J_\infty$ n'est plus significative, et le problème avec exposant critique supérieur est un problème de type Brezis–Nirenberg. [\[13\]](#)

c. Potentiels confinants

Le fonctionnel d'action A_V pour l'équation non-autonome est défini par

$$A_V(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V|u|^2) - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} ((I_\alpha * |u|^p)|u|^p).$$

Si V est un potentiel externe confinant et non négatif, c'est-à-dire si

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty,$$

alors le domaine naturel pour le fonctionnel A_V est l'espace de Sobolev pondéré $H_V^1(\mathbb{R}^N)$, qui est la complétion de la classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme $\|u\|_V := (\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V|u|^2))^{1/2}$. Dans le cas d'un potentiel confinant V , l'espace $H_V^1(\mathbb{R}^N)$ est compactement inclus dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, ce qui simplifie considérablement l'analyse des suites de Palais–Smale pour A_V . L'existence d'une solution fondamentale radiale positive avec un potentiel confinant radial V a été étudiée pour $p = 2$. Le cas spécifique du potentiel harmonique $V(x) = |x|^2$ et $p \in \left(\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}\right)$ a également été étudié.

d. Potentiels périodiques

La compacité locale des suites de Palais–Smale peut également être obtenue relativement facilement lorsque le potentiel V est périodique. L'existence d'une solution faible non triviale pour les équations de Choquard

$$-\Delta u + Vu = (W * F(u))F'(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

avec un potentiel électrique périodique positif V et sous des hypothèses générales sur le noyau de convolution pair $W \geq 0$ et la non-linéarité F , a été prouvée par un argument de type Mountain Pass. Si, de plus, la fonction F est paire, alors il existe une infinité de solutions géométriquement distinctes.

Dans les dimensions basses, l'existence de solutions pour l'équation de Choquard logarithmique planaire

$$-\Delta u + Vu + (\log |x| * |u|^2)u = c|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \mathbb{R}^2,$$

sous un potentiel périodique positif V et avec $c \geq 0$ a été obtenue. Dans le cas unidimensionnel, des solutions périodiques ont été construites pour le problème périodique dans $\mathbb{R}$.

e. Potentiels décroissants

Si $V \equiv 0$ ou si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$, alors 0 appartient au spectre essentiel pour $-\Delta + V$. L'espace $H_V^1(\mathbb{R}^N)$ peut être défini formellement comme avant, bien que certaines précautions soient nécessaires dans les basses dimensions : si $V \equiv 0$ et $N = 1$ ou 2 , alors $H_V^1(\mathbb{R}^N)$ n'est pas continûment inclus dans l'espace des distributions $D^0(\mathbb{R}^N)$. Une inégalité de type Hardy assure que l'espace $H_V^1(\mathbb{R}^N)$ est bien défini et continûment inclus dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ en dimensions $N = 1$ et 2 , à condition que $V(x) > 0$ sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Cependant, si $V \equiv 0$ ou si V est supporté de manière compacte, le fonctionnel d'action A_V n'est généralement pas bien défini ni différentiable au sens de Fréchet sur $H_V^1(\mathbb{R}^N)$. Des théorèmes de type Liouville montrent que les équations de Choquard avec des potentiels décroissants rapides n'ont effectivement pas de solutions positives, ni même de super-solutions positives pour certaines plages de paramètres.

f. Théorèmes de Liouville

Les théorèmes de Liouville non linéaires stipulent la non-existence de solutions positives pour des équations ou inégalités elliptiques. Un théorème de Liouville typique dans le cas local dit que l'inégalité $-\Delta u \geq u^p$ dans $\mathbb{R}^N \setminus B_\rho$ admet une solution classique positive si et seulement si $p > \frac{N}{N-2}$. Ce résultat, qui remonte à J. Serrin dans les années 1970, est robuste et reste valable même si on perturbe $-\Delta$ par un potentiel suffisamment faible. Les théorèmes de type Liouville pour les inégalités de Choquard $-\Delta u + Vu \geq (I_\alpha * u^p)u^q$ dans $\mathbb{R}^N \setminus B_\rho$ ont été obtenus. L'équation n'a pas de structure variationnelle, sauf si $q = p - 1$. Le concept de solution est non local. En particulier, si $u \geq 0$ est une solution de l'équation de Choquard $-\Delta u + Vu = (I_\alpha * u^p)u^q$ dans $\mathbb{R}^N$, alors u n'est qu'une super-solution de la même équation dans un sous-domaine propre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Pour illustrer les techniques de démonstration de non-existence, considérons le cas de l'inégalité autonome de Choquard

$$-\Delta u \geq (I_\alpha * u^p)u^q \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_\rho.$$

Supposons que $u \geq 0$ soit une solution de cette inégalité. Alors, u est une fonction superharmonique, c'est-à-dire $-\Delta u \geq 0$ dans $\mathbb{R}^N \setminus B_\rho$. En comparant avec la fonction harmonique $|x|^{-(N-2)}$, nous obtenons une borne inférieure

$$u(x) \geq c|x|^{-(N-2)}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}.$$

Si $p \leq \frac{\alpha}{N-2}$, cela implique que $u \notin L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-(N-\alpha)} dx)$. On en conclut que $u \equiv 0$, sinon $I_\alpha * u^p \equiv +\infty$, ce qui établit le premier régime de non-existence. Quand $p > \frac{\alpha}{N-2}$, on utilise une famille de fonctions tests $\varphi_R(|x|) = \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)$, où $\varphi \in C_c^\infty(B_4 \setminus \{0\})$ et $\varphi|_{[1,2]} = 1$. Pour tout $R \geq \rho$, cela mène à une inégalité maîtresse

$$CR^{N-2} \geq R^{-(N-\alpha)} \left(\int_{B_{2R} \setminus B_\rho} u^p \right) \left(\int_{B_{2R} \setminus B_R} u^{q-1} \right).$$

Combinée avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la borne inférieure précédente, pour $p + q \geq 1$ et tout $R \geq \rho$, cela donne l'estimation

$$CR^{2N-2-\alpha} \geq \left(\int_{B_{2R} \setminus B_R} u^{\frac{p+q-1}{2}} \right)^2 \geq cR^{2N-(N-2)(p+q-1)}.$$

En comparant les deux côtés, on conclut que $u \equiv 0$ si $1 \leq p + q < \frac{N+\alpha}{N-2}$. Des considérations supplémentaires permettent de conclure que la ligne critique $p + q = \frac{N+\alpha}{N-2}$ appartient également au même régime de non-existence.

Pour les potentiels de type Hardy $V(x) = \frac{\mu}{|x|^2}$ avec $\mu > -\frac{(N-2)^2}{4}$, les propriétés de Liouville restent qualitativement les mêmes, mais les valeurs des exposants critiques dépendent explicitement de μ .

Dans le cas des potentiels à décroissance lente $V(x) = \frac{c}{|x|^\gamma}$, avec $\gamma < 2$, qui incluent le potentiel constant $V(x) = c$, les résultats sont différents. La principale raison est que la fonction de Green de l'opérateur $-\Delta + V$ décroît de manière exponentielle, ce qui affecte significativement tous les arguments précédents. Pour $p \geq 2$, la décroissance admissible des supersolutions de l'équation de Choquard avec des potentiels à décroissance lente est exponentielle, tandis que pour $p < 2$, le taux de décroissance est polynomial comme dans la section précédente.

2.3.2 Perturbation singulières et limite semi classique

Dans une perspective physique, il est important d'étudier les équations de Choquard sous la forme

$$-\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = \epsilon^{-\alpha} (I_\alpha * u^p) u^{p-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

où $\epsilon > 0$ est un petit paramètre, souvent lié à la constante de Planck. Les solutions de cette équation lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ sont appelées semi-classiques. Physiquement, on s'attend à ce qu'il y ait une correspondance entre les solutions de l'équation et les points critiques du potentiel V dans la limite semi-classique $\epsilon \rightarrow 0$. Mathématiquement, cela se justifie par l'observation que si u_ϵ est une solution de cette équation et $a \in \mathbb{R}^N$, alors la fonction $v_\epsilon(y) = u_\epsilon(a + \epsilon y)$ résout l'équation rescalée

$$-\Delta v_\epsilon + V(a + \epsilon y)v_\epsilon = (I_\alpha * v_\epsilon^p) v_\epsilon^{p-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Si $a \in \mathbb{R}^N$ est un point critique du potentiel V et $V(a) > 0$, on s'attend à ce que v_ϵ converge vers une solution v_0 de l'équation limite autonome

$$-\Delta v_0 + V(a)v_0 = (I_\alpha * v_0^p) v_0^{p-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Les premiers résultats sur l'existence de solutions semi-classiques pour les équations de Choquard de ce type sont apparus dans le cas $N = 3$, $\alpha = 2$ et $p = 2$, sous l'hypothèse que $V \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et $\inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) > 0$. En utilisant une méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, étant donné des points critiques non dégénérés $a_1, \dots, a_m$ du potentiel V , il existe une famille v_ϵ de solutions positives à plusieurs bosses qui se concentrent sur ces points. Des résultats similaires avec un potentiel externe périodique V ont également été publiés. L'existence de solutions semi-classiques a été prouvée dans le cas $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x)|x|^\gamma > 0$ avec $\gamma \in [0, 1)$.

2.3.3 Régime de champ electric fort

Lorsque $\frac{N-2}{N+\alpha} < \frac{1}{p} < \frac{N}{N+\alpha}$, le problème

$$-\Delta u + (1 + \mu V_0)u = (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u,$$

admet des solutions pour $\mu > 0$ suffisamment grand si la fonction V_0 est non négative, s'annule sur un ensemble ouvert et possède un sous-ensemble de niveau positif de mesure finie ; les solutions convergent lorsque $\mu \rightarrow \infty$ vers des solutions d'un problème de Choquard sur l'ensemble nul de la fonction V_0 . Lorsque l'ensemble nul de la fonction V_0 a k composantes connexes, alors le problème a au moins $2^k - 1$ solutions distinctes non triviales lorsque μ est suffisamment grand.

2.4 Potentiel magnétique

L'équation de Choquard avec un champ électromagnétique variable exige que la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ satisfait une certaine équation impliquant le potentiel magnétique $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le potentiel électrique $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

L'existence des états fondamentaux a été prouvée pour $N = 3$, $p = 2$ et $\alpha = 2$ sous des conditions de confinement, c'est-à-dire lorsque V est une perturbation raisonnablement bornée et localisée d'une constante, et que le niveau de l'état fondamental satisfait une inégalité stricte par rapport à un problème à l'infini.

Lorsque les potentiels V et A sont compatibles avec l'action d'un groupe d'isométries sur $\mathbb{R}^N$, une infinité de solutions ont été construites lorsque toutes les orbites des points dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ sont infinies. De plus, l'existence de plusieurs solutions a été prouvée sous des hypothèses plus faibles sur les orbites mais plus strictes sur le potentiel magnétique A , impliquant sa décroissance à l'infini.

Résolution d'un problème de type Brézis-Nirenberg

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions faibles positives pour l'équation non-linéaire de type Choquard suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, ($N \geq 4$), $\lambda \geq 0$ et $\alpha \in (0; N)$ sont des paramètres réels, ($p \leq 2_\mu^* \triangleq \frac{2N-\mu}{N-2}$) avec $\mu = N - \alpha$ et I_α est le potentiel de Riesz défini par :

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{N-\alpha}}.$$

L'opérateur de convolution $I_\alpha * |u|^p$ est défini par :

$$(I_\alpha * |u|^p)(x) = \int_{\Omega} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{N-\alpha}} dy.$$

Théorème 3.1.1. *Supposons que Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, ($N \geq 4$). Alors, le problème (3.1.1) admet au moins une solution faible positive pour tout $\lambda \in (0; \lambda_1)$.*

Pour prouver l'existence des solutions pour le problème (3.1.1), nous utilisons le théorème du col (mountain pass theorem). Les solutions du problème (3.1.1) sont les points

critiques de la fonctionnelle J (définie ce-dessous) associée à ce problème. Nous allons considérer deux cas distincts : le cas sous-critique $p < 2_\mu^*$ et le cas critique $p = 2_\mu^*$ ce dernier étant marqué par une perte de compacité.

Une solution faible du problème (3.1.1) est définie par : $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle J'(u), \phi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-1} \phi \, dx - \int_{\Omega} \lambda u \phi \, dx = 0.$$

qu'en d'autres termes est un point critique de la fonctionnelle d'énergie :

$$J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 \, dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p \, dx$$

on a besoin de la proposition suivante pour montrer que le problème est bien posé.

Proposition 3.1.1. *Si p satisfait*

$$\frac{N-2}{N+\alpha} \leq \frac{1}{p} \leq 1,$$

(c'est à dire $p \in (\frac{2N-\mu}{2N}, 2_\mu^*)$ avec $\mu = N - \alpha$) alors la fonctionnelle J est bien définie et continûment différentiable au sens de Fréchet sur l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. On doit montrer que tous les termes de la fonctionnelle J sont bien définis.

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$J(u) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}_{\mathcal{I}_1(u)} - \underbrace{\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 \, dx}_{\mathcal{I}_3(u)} - \underbrace{\frac{1}{2p} \int_{\Omega} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p \, dx}_{\mathcal{I}_2(u)}$$

- $\mathcal{I}_1(u)$:

Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $\|\nabla u\|_{H_0^1(\Omega)} \triangleq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ est finie. Donc, l'intégrale de $|\nabla u|^2$ sur Ω est bien définie. Par conséquent,

$$\mathcal{I}_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

est bien défini.

- $\mathcal{I}_3(u)$:

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

et comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$\mathcal{I}_3(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

est bien défini.

- $\mathcal{I}_2(u)$:

D'après l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev et le théorème des immersions de Sobolev, on obtient :

$$\|I_{\alpha} * |u|^p\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

pour tout $q \leq \frac{2Np}{N-2\alpha}$.

Donc pour tout $u \in L^{\frac{2Np}{N-2\alpha}}(\Omega)$, en utilisant l'inégalité de hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^p dx &\leq \left(\int_{\Omega} |I_{\alpha} * |u|^p|^{2N/(N-\alpha)} dx \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2N}} \left(\int_{\Omega} |u|^{2Np/(N+\alpha)} dx \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2N}} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |u|^{2Np/(N+\alpha)} dx \right)^{1 + \frac{\alpha}{N}} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathcal{I}_2(u) = \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^p dx$$

est bien défini si et seulement si $\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \leq \frac{N+\alpha}{2Np} \leq 1$, i.e., $\frac{N-2}{N+\alpha} \leq \frac{1}{p} \leq 1$.

En conclusion, tous les termes de la fonctionnelle J sont bien définis dans $H_0^1(\Omega)$.

Posons $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, s, t) \mapsto F(x, s, t) = \frac{1}{2}|t|^2 dx - \frac{\lambda}{2}s^2 - \frac{1}{2p}(I_\alpha * |s|^p)|s|^p$.
Alors

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx.$$

Comme F est continûment différentiable en s et en t , et, F est mesurable en x et comme J est bien définie, alors J est de classe $\mathcal{C}^1$ au sens de Fréchet sur $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Lemme 3.1.1. *Si $N \geq 3$ et $\lambda \in (0, \lambda_1)$, alors pour tout $\frac{2N-\mu}{N} \leq p \leq 2_\mu^*$ la fonctionnelle J_λ satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) $J(0) = 0$ pour $\|u\| = 0$
- (ii) Il existe $\tau, \rho > 0$ tels que $J(u) \geq \tau$ pour $\|u\| = \rho$.
- (iii) Il existe $e \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|e\| > \rho$ tel que $J(e) < 0$.

Démonstration. Pour démontrer (i), Choisissons $u_0 = 0$. Il est évident de trouver donc que $J(0) = 0$.

Considérons la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx$$

Condition géométrique (ii)

Objectif : Montrer qu'il existe $\tau, \rho > 0$ tels que $J(u) \geq \tau$ pour $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho$.

Pour $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho$, nous avons :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \rho^2$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev, nous avons :

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

où $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

D'après l'inégalité de Poincaré, on sait que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

En utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, nous avons :

$$\left(\int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^p dx \right) \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En écrivant $J(u)$ pour $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho$, nous avons :

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1} \rho^2 - \frac{C\rho^p}{p}$$

Pour ρ suffisamment petit, le terme quadratique domine :

$$J(u) \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1} \right) - \frac{C\rho^p}{p}$$

Il est clair de voir que le coefficient de ρ est positive parceque on a la condition que $\lambda < \lambda_1$ Ainsi, il existe ρ suffisamment petit tel que :

$$J(u) \geq \alpha > 0$$

a. Condition géométrique (iii)

Objectif : Trouver une fonction $e \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|e\| > \rho$ telle que $J(e) < 0$.

Analyse :

Choisissons $e = t\phi$, où ϕ est une fonction propre associée à la première valeur propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω et t un scalaire. Pour t grand, nous avons :

$$J(t\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(t\phi)|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (t\phi)^2 dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |t\phi|^p) |t\phi|^p dx$$

Simplifions :

$$J(t\phi) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \frac{\lambda t^2}{2} \int_{\Omega} \phi^2 dx - \frac{t^p}{2p} \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |\phi|^p) |\phi|^p dx$$

Pour t grand, le terme $\frac{t^p}{p} \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |\phi|^p) |\phi|^p dx$ domine :

Ainsi, pour t suffisamment grand, $J(t\phi) < 0$.

Nous avons montré que :

- Il existe $\tau, \rho > 0$ tels que $J(u) \geq \tau$ pour $\|u\| = \rho$.
- Il existe une fonction $e \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|e\|_{H_0^1(\Omega)} > \rho$ telle que $J(e) < 0$.

Ainsi, les conditions géométriques du théorème du Col sont satisfaites pour la fonctionnelle J . □

3.2 Cas sous-critique

À ce niveau nous sommes prêts pour traiter la condition de compacité.

Lemme 3.2.1. *Soient X un espace de Banach et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) $(P.S)_c$, si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que*

$$\begin{cases} J(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X', \end{cases}$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Démonstration. **Étape 1 : Bornétude dans $H_0^1(\Omega)$**

Supposons que u_n est une suite de Palais Smale, c'est à dire que $|J(u_n)| < C$ et $J'(u_n) \rightarrow 0$. Puisque $J(u_n)$ est bornée, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^p dx \right| \leq C.$$

Puisque $J'(u_n) \rightarrow 0$, nous avons pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx - \lambda \int_{\Omega} u_n v \, dx - \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^{p-1} v \, dx \right| \leq \epsilon_n \|v\|_{H_0^1},$$

où $\epsilon_n \rightarrow 0$. En prenant $v = u_n$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + \lambda \int_{\Omega} u_n^2 \, dx = \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^p \, dx + \epsilon_n \|u_n\|_{H_0^1}.$$

Les termes à gauche représentent la norme de u_n dans $H_0^1(\Omega)$, tandis que le terme à droite peut être contrôlé par des inégalités de Sobolev et les propriétés du potentiel de Riesz. Cela nous permet de conclure que $\|u_n\|_{H_0^1}$ est bornée.

Étape 2 : Convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$

Puisque $\|u_n\|_{H_0^1}$ est bornée, il existe une sous-suite (que nous notons encore u_n) et une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telles que :

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Ici on utilise le fait que H_0^1 est un espace réflexif.

Étape 3 : Convergence forte dans $L^2(\Omega)$

Pour montrer la convergence forte, nous utiliserons $u_n - u$ comme fonction test. D'abord, considérons la différence entre u_n et u :

$$\int_{\Omega} \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \, dx + \lambda \int_{\Omega} (u_n - u)^2 \, dx.$$

Utilisons l'équation faible pour u_n et u :

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) \, dx + \lambda \int_{\Omega} u_n(u_n - u) \, dx = \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^{p-1}(u_n - u) \, dx,$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u_n - u) \, dx + \lambda \int_{\Omega} u(u_n - u) \, dx = \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^{p-1}(u_n - u) \, dx.$$

En soustrayant ces deux équations, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) dx + \lambda \int_{\Omega} (u_n - u)^2 dx = \int_{\Omega} \left[(I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^{p-1} - (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^{p-1} \right] (u_n - u) dx.$$

Étape 4 : Contrôle du terme non linéaire

Nous devons montrer que :

$$\left| \int_{\Omega} \left[(I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^{p-1} - (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^{p-1} \right] (u_n - u) dx \right| \rightarrow 0.$$

Décomposition et Estimations des Termes Non Linéaires :

Commençons par la décomposition du terme :

$$(I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^p - (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^p = [(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)] |u_n|^p + (I_{\alpha} * |u|^p) (|u_n|^p - |u|^p).$$

L'intégrale devient donc :

$$\int_{\Omega} \left[(I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^{p-1} - (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^{p-1} \right] (u_n - u) dx.$$

On sépare en deux termes :

$$\int_{\Omega} [(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)] |u_n|^{p-1} (u_n - u) dx + \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u|^p) (|u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}) (u_n - u) dx.$$

Estimation du Premier Terme :

Utilisons l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_{\Omega} [(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)] |u_n|^{p-1} (u_n - u) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{2p} |u_n - u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Pour le terme $\int_{\Omega} |(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)|^2 dx$, nous utilisons les propriétés du potentiel de Riesz et la compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2p}(\Omega)$. Comme $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, on a :

$$(I_{\alpha} * |u_n|^p) \rightarrow (I_{\alpha} * |u|^p) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Cela implique que :

$$\int_{\Omega} |(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Pour le second facteur, en utilisant l'inégalité de Hölder et la borne sur $\|u_n\|_{H_0^1}$, on obtient :

$$\left(\int_{\Omega} |u_n|^{2p} |u_n - u|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|u_n - u\|_{L^{2p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ car } u_n \rightarrow u \text{ dans } L^{2p}(\Omega).$$

D'où :

$$\left| \int_{\Omega} [(I_{\alpha} * |u_n|^p) - (I_{\alpha} * |u|^p)] |u_n|^{p-1} (u_n - u) dx \right| \rightarrow 0.$$

Estimation du Deuxième Terme :

Pour le deuxième terme :

$$\left| \int_{\Omega} (I_{\alpha} * |u|^p) (|u_n|^p - |u|^p) (u_n - u) dx \right|.$$

Par continuité et propriétés de I_{α} , nous avons $I_{\alpha} * |u|^p \in L^2(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Hölder et la convergence $u_n \rightarrow u$ dans $L^{2p}(\Omega)$, nous obtenons :

$$\left(\int_{\Omega} ||u_n|^p - |u|^p|^{2p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/2p} \left(\int_{\Omega} |I_{\alpha} * |u|^p|^2 |u_n - u|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Conclusion, en combinant ces estimations :

$$\left| \int_{\Omega} [(I_{\alpha} * |u_n|^p) |u_n|^{p-1} - (I_{\alpha} * |u|^p) |u|^{p-1}] (u_n - u) dx \right| \rightarrow 0.$$

Cela prouve que le terme non linéaire tend vers zéro, complétant ainsi l'argument de la convergence forte de $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Étape 5 : Convergence forte dans $H_0^1(\Omega)$

Finalement, nous avons :

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} (u_n - u)^2 dx \rightarrow 0.$$

Cela implique que $u_n \rightarrow u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, la suite u_n possède une sous-suite convergente dans H_0^1 , par conséquent la

condition de compacité est vérifiée pour la fonctionnelle $J_\lambda(u)$ en utilisant une suite de Palais-Smale. $\square$

Conclusion On conclut d'après le théorème du col que notre fonctionnelle admet une valeur critique $c \leq a$ d'où l'existence de solution pour notre problème.

Positivité Pour montrer que la solution u est positive, utilisons le principe du maximum. Si u n'est pas positive, alors il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) < 0$. Considérons la fonction test $u^- = \max\{-u, 0\}$. Alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- dx + \lambda \int_{\Omega} uu^- dx = \int_{\Omega} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-1} u^- dx.$$

Le côté gauche est positif tandis que le côté droit est négatif, ce qui conduit à une contradiction. Ainsi, $u \geq 0$ presque partout.

Par le principe de maximum, la solution du problème (3.1.1) est une solution positive

3.3 Cas critique

Dans ce chapitre, on étudie toujours le meme problème mais à présent $p = 2_\mu^*$, ce qui pose un problème de perte de compacité.

Donc le problème devient :

$$\begin{cases} -\Delta u = (I_\alpha * |u|^{2_\mu^*}) |u|^{2_\mu^*-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

pour traiter ce cas, on utilise le lemme de Brezis-Lieb, mais d'abord on lance les lemmes suivantes :

Lemme 3.3.1. Soient $N \geq 3$, $0 < \mu < N$ et $\lambda \in (0; \lambda_1)$. Si $\{u_n\}$ est une suite $(PS)_c$ de J_λ , alors $\{u_n\}$ est bornée. Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ la limite faible de $\{u_n\}$, alors u_0 est une solution faible du problème (3.3.1).

Démonstration. Il existe $C_1 > 0$ tel que

$$|J(u_n)| \leq C_1, \quad |\langle J'(u_n), u_n \rangle| \leq C_1.$$

Pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned} C_1(1 + \|u_n\|) &\geq J(u_n) - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \langle J'(u_n), u_n \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \right) (\|u_n\|^2 - \lambda \|u_n\|_2^2) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \right) C \|u_n\|^2 \end{aligned}$$

for some $C > 0$. Thus $\{u_n\}$ is bounded in $H_0^1(\Omega)$.

Puisque $H_0^1(\Omega)$ est réflexif, en passant à une sous-suite, encore notée $\{u_n\}$, il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors

$$|u_n|^{2_\mu^*} \rightharpoonup |u_0|^{2_\mu^*} \quad \text{dans } L^{\frac{2N}{2N-\mu}}(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, le potentiel de Riesz définit une application linéaire continue de $L^{\frac{2N}{2N-\mu}}(\Omega)$ à $L^{\frac{2N}{\mu}}(\Omega)$, nous savons que

$$|x|^{-\mu} * |u_n|^{2_\mu^*} \rightharpoonup |x|^{-\mu} * |u_0|^{2_\mu^*} \quad \text{dans } L^{\frac{2N}{\mu}}(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

En combinant avec le fait que

$$|u_n|^{2_\mu^*-2} u_n \rightharpoonup |u_0|^{2_\mu^*-2} u_0 \quad \text{dans } L^{\frac{2N}{N-\mu+2}}(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

nous avons

$$(|x|^{-\mu} * |u_n|^{2_\mu^*}) |u_n|^{2_\mu^*-2} u_n \rightharpoonup (|x|^{-\mu} * |u_0|^{2_\mu^*}) |u_0|^{2_\mu^*-2} u_0 \quad \text{dans } L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Puisque, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$0 \leftarrow \langle J'_\lambda(u_n), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx - \lambda \int_\Omega u_n \varphi \, dx - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x)|^{2_\mu^*} |u_n(y)|^{2_\mu^*-2} u_n(y) \varphi(y)}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \varphi \, dx - \lambda \int_{\Omega} u_0 \varphi \, dx - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_0(x)|^{2^*} |u_0(y)|^{2^*-2} u_0(y) \varphi(y)}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy = 0$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, ce qui signifie que u_0 est une solution faible du problème (1*).

Enfin, en prenant $\varphi = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans (1*), nous avons

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx = \lambda \int_{\Omega} u_0^2 \, dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_0(x)|^{2^*} |u_0(y)|^{2^*}}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy,$$

et ainsi

$$J_\lambda(u_0) = \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_0(x)|^{2^*} |u_0(y)|^{2^*}}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy \geq 0.$$

□

Lemme 3.3.2. Soient $N \geq 3$, $0 < \mu < N$ et $\lambda > 0$. Si $\{u_n\}$ est une suite $(PS)_c$ de J_λ avec

$$c < \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}},$$

alors $\{u_n\}$ a une sous-suite convergente.

Démonstration. : Soit u_0 la limite faible de $\{u_n\}$ obtenue dans le Lemme précédente et définissons $v_n := u_n - u_0$. Alors, nous savons que $v_n \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $v_n \rightarrow 0$ p.p. dans Ω . De plus, par le Lemme de Brézis-Lieb, nous savons

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx + o(1),$$

$$\int_{\Omega} |u_n|^2 \, dx = \int_{\Omega} |v_n|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u_0|^2 \, dx + o_n(1),$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^{2^*} |u_n(y)|^{2^*}}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v_n(x)|^{2^*} |v_n(y)|^{2^*}}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy + \\ &\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_0(x)|^{2^*} |u_0(y)|^{2^*}}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy + o_n(1). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
 c \leftarrow J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega u_n^2 dx - \frac{1}{2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x)|^{2_\mu^*} |u_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega v_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega u_0^2 dx \\
 &\quad - \frac{1}{2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy - \frac{1}{2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_0(x)|^{2_\mu^*} |u_0(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy + o_n(1) \\
 &= J_\lambda(u_0) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega v_n^2 dx - \frac{1}{2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy + o_n(1) \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy + o_n(1),
 \end{aligned}$$

puisque $J_\lambda(u_0) \geq 0$ et $\int_\Omega v_n^2 dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. De même, puisque $\langle J'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
 o_n(1) &= \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega u_n^2 dx - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x)|^{2_\mu^*} |u_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \\
 &= \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega v_n^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_\Omega u_0^2 dx \\
 &\quad - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_0(x)|^{2_\mu^*} |u_0(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy + o_n(1) \quad (1^{**}) \\
 &= \langle J'_\lambda(u_0), u_0 \rangle + \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega v_n^2 dx - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy + o_n(1) \\
 &= \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy + o_n(1). \quad (2^{**})
 \end{aligned}$$

À partir de (1**), nous savons qu'il existe une constante non négative b telle que

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \rightarrow b,$$

et

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|v_n(x)|^{2_\mu^*} |v_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \rightarrow b,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. À partir de (2**) et (1**), nous obtenons

$$c \geq \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} b. \quad (3^{**})$$

Par la définition de la meilleure constante $S_{H,L}$, nous avons

$$S_{H,L} \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v_n(x)|^{2^*} |v_n(y)|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}} \leq \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx,$$

ce qui donne $b \geq S_{H,L} b^{\frac{N-2}{2N-\mu}}$. Ainsi, nous avons soit $b = 0$ soit $b \geq S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$. Si $b = 0$, la preuve est complète. Sinon, $b \geq S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$, alors nous obtenons de (3**),

$$\frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}} \leq \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} b \leq c,$$

ce qui contredit le fait que $c < \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}$. Ainsi, $b = 0$, et

$$\|u_n - u_0\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci termine la preuve du Lemme. □

À ce stade, on a prouvé qu'il existe un niveau de compacité c^* . Il nous reste à montrer que notre fonctionnelle $J_{\lambda}(u) < c^*$ pour cela, on étudie les estimations suivantes.

D'abord, on définit la fonction suivante : Soit $U(x) = \left[\frac{N(N-2)}{N-2} \right]^{\frac{N-2}{4}} (1 + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}$ un minimiseur pour S et $S_{H,L}$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \psi(x) = 1 & \text{si } x \in B_{\delta}, \\ \psi(x) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \\ 0 \leq \psi(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R}^N, \\ |D\psi(x)| \leq C = \text{const} & \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On définit, pour $\epsilon > 0$,

$$U_{\epsilon}(x) := \epsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad u_{\epsilon}(x) := \psi(x) U_{\epsilon}(x).$$

D'après le Lemme 1.46 de [43], on sait que

$$\int_{\Omega} |\nabla U_{\epsilon}|^2 dx = \int_{\Omega} |U_{\epsilon}|^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}},$$

et lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) = C(N, \mu) \left(\frac{N-2}{2N-\mu} \cdot \frac{N}{2} \right) S_{H,L}^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}),$$

$$\int_{\Omega} |u_{\epsilon}|^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N),$$

et

$$\int_{\Omega} |u_{\epsilon}|^2 dx \geq \begin{cases} \sigma \epsilon^2 |\ln \epsilon| + O(\epsilon^2) & \text{si } N = 4, \\ \sigma \epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2}) & \text{si } N \geq 5, \end{cases}$$

où σ est une constante positive. En utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, d'une part, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\epsilon}(x)|^{2^*} |u_{\epsilon}(y)|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy \leq C(N, \mu)^{\frac{N-2}{2N-\mu}} \left(\frac{N}{2} S_{H,L}^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N) \right)^{\frac{N-2}{N}},$$

tandis que d'autre part,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\epsilon}(x)|^{2^*} |u_{\epsilon}(y)|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy \geq \int_{B_{\delta}} \int_{B_{\delta}} \frac{|U_{\epsilon}(x)|^{2^*} |U_{\epsilon}(y)|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy.$$

Il découle des résultats ci-dessus que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\epsilon}(x)|^{2^*} |u_{\epsilon}(y)|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy \geq C(N, \mu) \left(\frac{N}{2} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{2}} - O(\epsilon^{2N-\mu}) \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}.$$

Lemme 3.3.3. *Si $N \geq 4$ et $\lambda > 0$, alors il existe $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que*

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |v|^2 dx}{\|v\|_{NL}^2} < S_{H,L}.$$

Démonstration. Si $N = 4$, à partir des résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_{\epsilon}|^2 dx}{\|u_{\epsilon}\|_{NL}^2} &\leq \frac{C(4, \mu) \left(\frac{4}{8-\mu} \right) S_{H,L}^2 - \lambda \sigma \epsilon^2 |\ln \epsilon| + O(\epsilon^2)}{C(4, \mu) \left(\frac{2S_{H,L}^{\frac{8-\mu}{2}} - O(\epsilon^{4-\mu/2})}{2^{8-\mu}} \right) + O(\epsilon^2)} \\ &\leq S_{H,L} - \frac{\lambda \sigma \epsilon^2}{|\ln \epsilon|} + O(\epsilon^2) \\ &< S_{H,L}. \end{aligned}$$

Si $N \geq 5$, en utilisant les résultats précédents, on a

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_{\epsilon}|^2 dx}{\|u_{\epsilon}\|_{NL}^2} &\leq \frac{C(N, \mu) \left(\frac{N-2}{2N-\mu} \cdot \frac{N}{2} \right) S_{H,L}^{\frac{N}{2}} - \lambda \sigma \epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2})}{C(N, \mu) \left(\frac{N}{2} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{2}} - O(\epsilon^{N-\mu/2}) \right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}} + O(\epsilon^{N/2})} \\ &\leq S_{H,L} - \frac{\lambda \sigma \epsilon^2}{O(\epsilon^{N/2})} + O(\epsilon^{N/2}) \\ &< S_{H,L}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.1. [32] *D'après le théorème du col, il existe une suite (PS) $\{u_n\}$ telle que $J_{\lambda}(u_n) \rightarrow c$ et $J'_{\lambda}(u_n) \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)'$ au niveau minimax*

$$c^* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_{\lambda}(\gamma(t)) > 0, \quad (3.12)$$

où

$$\Lambda \triangleq \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, J_{\lambda}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Maintenant on a tous les outils pour pouvoir démontrer notre théorème d'existence.

Preuve du Théorème d'existence. Cas $N \geq 4$, $0 < \lambda < \lambda_1$. D'après le Lemme (3.3.3), il existe $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que

$$\frac{\|\nabla v\|_2^2 - \lambda \|v\|_2^2}{\|v\|_{NL}^2} < S_{H,L}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 0 < \max_{t \geq 0} J_\lambda(tv) &= \max_{t \geq 0} \left(\frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda t^2}{2} \int_{\Omega} v^2 dx - \frac{t^{2^*_\mu}}{2^{2^*_\mu}} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^{2^*_\mu} |v(y)|^{2^*_\mu}}{|x-y|^\mu} dx dy \right) \\
 &= \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} \left(\frac{\|\nabla v\|_2^2 - \lambda \|v\|_2^2}{\|v\|_{NL}^2} \right)^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}} \\
 &< \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}.
 \end{aligned}$$

Par la définition de c^* , on a

$$c^* < \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}}.$$

Soit $\{u_n\}$ la suite (PS) obtenue dans la Proposition précédente. On sait que $\{u_n\}$ contient une sous-suite convergente. Ainsi, J_λ a une valeur critique

$$c^* \in \left(0, \frac{N+2-\mu}{4N-2\mu} S_{H,L}^{\frac{2N-\mu}{N+2-\mu}} \right)$$

et le problème possède une solution non triviale. $\square$

3.4 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence de solutions positives faibles pour le problème de type Choquard non-linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ avec $N > 3$.

Initialement, nous avons considéré que l'exposant p est inférieur à 2^*_μ où on a utilisé le théorème du col pour trouver des solutions.

Pour la deuxième discussion, on a considéré le cas où l'exposant p touche le 2^*_μ et

on aura un niveau de compacité. pour ce problème, nous avons utilisé le lemme de Brezis-Lieb principalement pour traiter le problème du perte de compacité

Bibliographie

- [1] B. Abdellaoui, O. Boukarabila, and S. E.-H. Miri. Introduction aux méthodes variationnelles et applications à la résolution des edp elliptiques. Université de Tlemcen, 2018.
- [2] T. Bartsch, T. Weth, and M. Willem. Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems. *Journal d'Analyse Mathématique*, 96(1) :1–18, 2005.
- [3] R. Benguria, H. Brézis, and E. H. Lieb. The thomas-fermi-von weizsäcker theory of atoms and molecules. *Communications in Mathematical Physics*, 79(2) :167–180, 1981.
- [4] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. *Théorie et applications*, 1983.
- [5] S. Cingolani, M. Clapp, and S. Secchi. Multiple solutions to a magnetic nonlinear choquard equation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 63(2) :233–248, 2012.
- [6] S. Cingolani, S. Secchi, and M. Squassina. Semi-classical limit for schrödinger equations with magnetic field and hartree-type nonlinearities. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 140(5) :973–1009, 2010.
- [7] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [8] B. Feng. Sharp threshold of global existence and instability of standing wave for the schrödinger–hartree equation with a harmonic potential. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 31 :132–145, 2016.
- [9] R. L. Frank and E. H. Lieb. Inversion positivity and the sharp hardy–littlewood–sobolev inequality. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 39 :85–99, 2010.
- [10] H. Fröhlich. Theory of electrical breakdown in ionic crystals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 160(901) :230–241, 1937.
- [11] H. Fröhlich. Electrons in lattice fields. *Advances in Physics*, 3(11) :325–361, 1954.
- [12] J. Fröhlich and E. Lenzmann. Mean-field limit of quantum bose gases and nonlinear hartree equation. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi "Séminaire Goulaouic-Schwartz"*, pages 1–26, 2004.

- [13] F. Gao and M. Yang. On the brezis-nirenberg type critical problem for nonlinear choquard equation. *arXiv preprint arXiv :1604.00826*, 2016.
- [14] J. Ginibre and G. Velo. On a class of non linear schrödinger equations with non local interaction. *Mathematische Zeitschrift*, 170 :109–136, 1980.
- [15] K. Gustafson and D. Sather. A branching analysis of the hartree equation. *Rend. Mat.(6)*, 4 :723–734, 1971.
- [16] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López. Newtonian collapse of scalar field dark matter. *Physical Review D*, 68(2) :024023, 2003.
- [17] F. S. Guzman and L. A. Urena-López. Evolution of the schrödinger-newton system for a self-gravitating scalar field. *Physical Review D*, 69(12) :124033, 2004.
- [18] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques : et applications aux problèmes elliptiques. (*No Title*), 1993.
- [19] N. S. Landkof. *Foundations of modern potential theory*, volume 180. Springer, 1972.
- [20] C. Le Bris and P.-L. Lions. From atoms to crystals : a mathematical journey. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(3) :291–363, 2005.
- [21] Y. Lei. On the regularity of positive solutions of a class of choquard type equations. *Mathematische Zeitschrift*, 273(3) :883–905, 2013.
- [22] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*, volume 14. American Mathematical Soc., 2001.
- [23] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, volume 1, pages 109–145. Elsevier, 1984.
- [24] P.-L. Lions. Solutions of hartree-fock equations for coulomb systems. 1987.
- [25] M. Macrì and M. Nolasco. Stationary solutions for the non-linear hartree equation with a slowly varying potential. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 16(6) :681, 2009.
- [26] V. Moroz and J. Van Schaftingen. Groundstates of nonlinear choquard equations : existence, qualitative properties and decay asymptotics. *Journal of Functional Analysis*, 265(2) :153–184, 2013.
- [27] V. Moroz and J. Van Schaftingen. Nonexistence and optimal decay of supersolutions to choquard equations in exterior domains. *Journal of Differential Equations*, 254(8) :3089–3145, 2013.
- [28] V. Moroz and J. Van Schaftingen. Existence of groundstates for a class of non-linear choquard equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(9) :6557–6579, 2015.
- [29] V. Moroz and J. Van Schaftingen. Groundstates of nonlinear choquard equations : Hardy–littlewood–sobolev critical exponent. *Communications in Contemporary Mathematics*, 17(05) :1550005, 2015.
- [30] V. Moroz and J. Van Schaftingen. A guide to the choquard equation. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19 :773–813, 2017.

- [31] M. Nolasco. Breathing modes for the schrödinger-poisson system with a multiple-well external potential. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 9(5) :1411–1419, 2010.
- [32] S. I. Pekar. *Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle*. De Gruyter, 1954.
- [33] P. Quittner and P. Souplet. *Superlinear parabolic problems*. Springer, 2019.
- [34] F. Riesz. Sur une inegalite integarale. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(3) :162–168, 1930.
- [35] M. Riesz. L’intégrale de riemann-liouville et le problème de cauchy pour l’équation des ondes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 67 :153–170, 1939.
- [36] M. Riesz. L’intégrale de riemann-liouville et le problème de cauchy. 1949.
- [37] S. Samko. *Hypersingular integrals and their applications*. CRC Press, 2001.
- [38] S. Secchi. A note on schrödinger–newton systems with decaying electric potential. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 72(9-10) :3842–3856, 2010.
- [39] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. *Mat. Sbornik*, 4 :471–497, 1938.
- [40] E. M. Stein. *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean spaces*. United States Air Force, Office of Scientific Research, 1957.
- [41] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton university press, 1970.
- [42] J. Wei and M. Winter. Strongly interacting bumps for the schrödinger–newton equations. *Journal of Mathematical Physics*, 50(1), 2009.
- [43] M. Willem. Mountain pass theorem. In *Minimax Theorems*, pages 7–36. Springer, 1996.

Résumé

Cette thèse, intitulée "Solutions non triviales pour un problème elliptique non linéaire de type Choquard", explore les équations de Choquard, leurs variations, et les propriétés des solutions.

Nous posons d'abord les bases théoriques, puis analysons les équations autonomes et non autonomes, ainsi que leurs modèles physiques.

Enfin, nous proposons un modèle basé sur l'équation de Brezis-Nirenberg, en examinant les solutions dans les cas critique et non critique.

Ce travail améliore la compréhension des équations de Choquard et ouvre de nouvelles voies de recherche.

Abstract

This thesis, titled "Non-trivial Solutions for a Nonlinear Elliptic Problem of Choquard Type," explores Choquard equations, their variations, and the properties of solutions. We first establish the theoretical foundations, then analyze both autonomous and non-autonomous equations and their physical models.

Finally, we propose a model based on the Brezis-Nirenberg equation, examining solutions in both critical and non-critical cases.

This work enhances the understanding of Choquard equations and opens new avenues for research in nonlinear elliptic problems.

المخلص

هذه الأطروحة، بعنوان آ حلول غير بديهية لمشكلة غير خطية من نوع شوكار آ، تستكشف معادلات شوكار، وتنوعاتها، وخصائص الحلول. نبدأ أولاً بوضع الأسس النظرية، ثم نحلل المعادلات الذاتية وغير الذاتية، وكذلك نماذجها الفيزيائية. أخيراً، نقترح نموذجاً يستند إلى معادلة بريزيسنيرنبرغ، حيث ندرس الحلول في الحالتين الحرجة وغير الحرجة. هذا العمل يحسن فهم معادلات شوكار ويفتح آفاقاً جديدة للبحث.

