



UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCEEN



THÈSE LMD

Présentée à:

FACULTÉ DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques Appliquées Par :

Guezzen Cherifa

Sur le thème

**Analyse mathématique de modèles spatio-temporels
décrivant l'évolution de certaines épidémies.**

Soutenue publiquement le 14/07/2025 à Tlemcen devant le jury composé de :

M. Abdellaoui Boumediène	Pr.	Université de Tlemcen	Président
M. Touaoula Mohammed Tarik	Pr.	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
M. Djilali Salih	MCA	Université de Chlef	Co-Directeur de thèse
M. Miri Sofiane El-Hadi	Pr.	Université de Tlemcen	Examineur
M. Biroud Kheireddine	Pr.	Ecole supérieure de management Tlemcen	Examineur
M. Chekroun Abdennasser	MCA	université de Tlemcen	Examineur

Titre : Analyse mathématique de modèles spatio-temporels décrivant l'évolution de certaines épidémies

Résumé : L'objectif de cette thèse est d'analyser mathématiquement deux modèles spatio-temporels décrivant la propagation d'une maladie infectieuse. Le premier modèle est un modèle SIQR basé sur des équations de réaction-diffusion, tandis que le second est un modèle SIQR structuré en âge, intégrant des termes de diffusion. L'analyse porte sur l'existence, l'unicité, et la positivité des solutions, ainsi que sur leur comportement asymptotique. Enfin, des simulations numériques sont proposées pour illustrer les résultats théoriques obtenus.

Mots clés : Individus en quarantaine, incidence non linéaire, taux de reproduction de base, profils asymptotiques.

Title : The mathematical analysis of spatio-temporal models describing the evolution of certain epidemics.

The aim of this thesis is to mathematically analyze two spatio-temporal models describing the spread of an infectious disease. The first model is a SIQR model based on reaction-diffusion equations, while the second is an age-structured SIQR model, incorporating diffusion terms. The analysis focuses on the existence, uniqueness, and positivity of the solutions, as well as their asymptotic behavior. Finally, numerical simulations are provided to illustrate the theoretical results obtained.

Keywords : Quarantine individuals, nonlinear incidence, degenerate reaction diffusion system, basic reproduction number, asymptotic profiles

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, Algérie.

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées.

Table des matières

1	Préliminaires	1
1.1	Espaces fonctionnels	1
1.1.1	Espace de Banach	1
1.1.2	Espaces de Lebesgue	2
1.1.3	Espaces de Hölder	3
1.1.4	Espaces de Sobolev	4
1.2	Quelques notions sur les Matrices	6
1.3	Les opérateurs linéaires fermés	7
1.4	Notions fondamentales sur la théorie des semi-groupes et la théorie spectrale	8
1.5	Théorème de Krein Rutman	15
1.6	Théorie de Fredholm	17
1.7	Attracteur compact	17
1.8	Principe de comparaison parabolique	22
1.9	Quelques notions sur la stabilité	23
1.10	Persistance	25
1.11	Minimisation conditionnelle	27
1.11.1	Application I : Problème de valeur propre	28
2	Étude des dynamiques et des profils d'un modèle SIQR diffusif avec des taux de dispersion différenciés distincts	32
2.1	Introduction	32
2.2	Existence de la solution et de l'attracteur global	35
2.2.1	Attracteur compact	37
2.3	Taux de reproduction de base	47
2.4	L'équilibre sans maladie	57
2.5	La persistance uniforme de l'état endémique	64
2.6	Stabilité globale de l'état endémique stationnaire	68
2.6.1	Cas homogène	68
2.6.2	Attractivité globale de l'état d'équilibre endémique dans le cas spatialement hétérogène.	75
2.7	Le rôle de la quarantaine dans le contrôle de l'épidémie	78
2.7.1	Profil asymptotique de \mathcal{R}_0	78
2.7.2	Le rôle de la quarantaine	79
2.7.3	Profils asymptotiques de l'état endémique stationnaire	82

2.7.4	Effet du nombre de reproduction de base local et du taux de quarantaine sur le contrôle de l'épidémie	92
2.8	Simulations numériques	93
2.8.1	Cas homogène	93
2.8.2	Cas hétérogène	95
2.8.3	Effet de la quarantaine et le taux de rechute sur le contrôle de l'épidémie	95
3	Dynamiques de seuil d'un modèle épidémique SIQ à structure d'âge et diffusion spatiale avec quarantaine imparfaite	100
3.1	Introduction	100
3.2	Existence de la solution	102
3.2.1	Existence de l'attracteur global compact	110
3.3	La valeur propre principale	121
3.4	Le taux de reproduction de base	129
3.5	Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	135
3.6	Persistance et existence de l'état stationnaire endémique	140
3.7	Stabilité globale et unicité de l'état stationnaire strictement positif	148
3.8	Simulations numériques	165
	Bibliographie	168

Dédicace

Je dédie cette thèse de doctorat :

*À mes très chers parents, en reconnaissance
de leur amour inconditionnel et de leurs
sacrifices immenses.*

*À mes trois chères sœurs : Asma, Sara,
Siham et à mon frère Azzeddine. Chaque
étape de cette réalisation porte l’empreinte de
leurs soutien.*

À mes nièces et mes neveux.

*À ma chère amie Samira. Son amitié est une
bénédiction.*

À ma chère tante Zahra et à ma grand-mère.

*"En mathématiques, "évident"
est le mot le plus dangereux."
Eric Temple Bell*

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je remercie "Allah" tout puissant qui m'a prodigué aide, inspiration, patience et courage durant toutes ces années d'études .

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Monsieur Tarik Mohammed Touaoula qui est un encadrant formidable. Sa patience, sa rigueur scientifique ont été des sources d'inspiration continues. Je le remercie pour son aide, sa gentillesse et surtout ses judicieux conseils. Je lui suis également profondément reconnaissante pour sa disponibilité tout au long de ce parcours.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements et toute ma gratitude à Monsieur Djilali Salih pour sa gentillesse et son aide, ainsi que pour les remarques qu'il m'a adressées pour améliorer mon travail.

C'est un immense plaisir pour moi d'adresser mes sincères remerciements à mon enseignant, Abdellaoui Boumediène, pour l'expertise qu'il a partagée avec moi tout au long de mon parcours académique, ainsi que pour avoir accepté de présider ce jury.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Biroud Kheireddine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail. Mes remerciements s'étendent également à Monsieur Miri Sofiane et Monsieur Chekroun Abde-

nasser, qui ont accepté d'évaluer ce travail et consacré un temps précieux à son examen.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous les membres du laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées de l'Université de Tlemcen. Je remercie tout particulièrement mes collègues doctorants et amis : Ahlem, Siham, Manel, Abderahmane, Sofiane et Lucien, pour les moments précieux que nous avons partagés. Votre présence a été une source inestimable de soutien intellectuel tout au long de mon parcours.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse, que ce soit par leur accompagnement scientifique ou leur soutien moral.

Introduction

La quarantaine est un outil essentiel dans la lutte contre la propagation des maladies infectieuses. Elle consiste à isoler des personnes, des animaux ou des plantes pour une durée déterminée, afin de prévenir la transmission d'une maladie suspectée. Au cours des dernières années, de nombreux modèles mathématiques ont été développés pour analyser l'efficacité des mesures de quarantaine face aux épidémies. Une question cruciale qui émerge de ces recherches est de déterminer le taux optimal de la population placée en quarantaine ou la durée adéquate de cette isolation, afin de contenir l'épidémie.

Cependant, la mise en œuvre de la quarantaine parfaite est souvent entravée par le comportement des individus. Dans de nombreux cas, des personnes choisissent de ne pas respecter les consignes de quarantaine, ce qui peut avoir des conséquences désastreuses, surtout si elles sont porteuses de la maladie. Cette situation est désignée comme une « quarantaine imparfaite », et elle soulève des préoccupations majeures pour les décideurs en santé publique. Pour modéliser cette dynamique, souvent la population est divisée au moins en quatre catégories : susceptibles (S), infectés (I), en quarantaine (Q) et guéris (R).

Dans la littérature, plusieurs chercheurs ont abordé cette problématique à travers des modèles épidémiques ($SIQR$). Par exemple, Feng et Thieme [35] ont proposé un modèle ($SIQR$) qui met en évidence l'impact de l'isolement des enfants pour réduire la transmission des maladies, en supposant une isolation parfaite. Toutefois, d'autres études ont montré que cette hypothèse n'est

souvent pas réaliste. En effet, la mise en œuvre des mesures de quarantaine est influencée par divers facteurs socioculturels et contextuels qui déterminent l'adhésion des populations aux directives de santé publique.

D'autre part, des recherches plus récentes ont mis en évidence l'importance de prendre en compte les effets de la mobilité individuelle et des changements environnementaux sur la dynamique des épidémies. Les modèles de réaction-diffusion ont été proposés pour mieux comprendre les effets combinés de l'hétérogénéité spatiale de l'environnement et de la mobilité des individus sur la propagation des maladies infectieuses [3, 29, 58, 60, 101, 98]. Des études ont montré que, dans certaines configurations de l'environnement spatial, la maladie infectieuse peut être éliminée par des restrictions sur le mouvement des individus susceptibles [3], tandis que d'autres ont observé que des populations totales variables peuvent renforcer la persistance des maladies infectieuses [59]. Des recherches complémentaires dans ce domaine sont également disponibles dans les travaux de [19, 21, 22, 27, 105, 72, 73, 74, 83, 100, 101, 103, 104, 114, 115, 122].

Par ailleurs, l'âge joue un rôle essentiel dans l'élaboration des modèles épidémiologiques car il permet de mieux comprendre la dynamique de la transmission des maladies. Différents types d'âges, tels que l'âge chronologique, l'âge de l'infection ou encore la durée passée en quarantaine, peuvent influencer de manière significative le comportement épidémiologique. Par exemple, l'âge de l'infection permet de distinguer les individus en fonction de la durée pendant laquelle ils sont infectés, ce qui est crucial pour évaluer le risque de transmission. Dans les modèles épidémiques avec structure par âge, cette distinction permet de mieux comprendre la progression de la maladie et d'optimiser les interventions, comme le moment de la mise en quarantaine ou les stratégies de traitement.

En ajoutant une structure par âge, les modèles deviennent plus réalistes et offrent une vision plus fine de l'évolution de l'épidémie. Dans ce contexte,

Frioui et al. [55] ont analysé un modèle SIQ avec structure d'âge prenant en compte les rechutes, et Sari et al. [81] ont proposé un modèle $SIQRI$ avec une structure par âge de l'infection dans les classes des infectés et des individus en quarantaine.

Ainsi, l'étude de la quarantaine et de ses implications nécessite une approche globale qui intègre des modèles mathématiques sophistiqués, tenant compte des interactions complexes entre les différentes catégories de la population et leur environnement. À travers cette thèse, nous visons à répondre à la question suivante : quand la quarantaine est-elle réellement efficace pour stopper la propagation d'une épidémie ?

Pour explorer cette question, nous allons nous appuyer sur une analyse approfondie des modèles épidémiques existants et des nouvelles perspectives offertes par les recherches récentes.

L'objectif principal de cette thèse est d'analyser mathématiquement des modèles épidémiologiques. Notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à un rappel des outils mathématiques et des théorèmes utilisés tout au long de cette thèse. Le deuxième chapitre porte sur l'étude d'un modèle $SIQR$ de réaction-diffusion, tandis que le troisième chapitre se concentre sur un modèle $SIQR$ structuré en âge avec diffusion. Une difficulté commune aux deux modèles réside dans la justification du taux de reproduction de base, car le terme de rechute pose des défis pour justifier certaines étapes dans le calcul.

Les deux chapitres principaux de cette thèse sont organisés comme suit : dans la première section, nous démontrons l'existence globale de la solution associée au modèle ainsi que l'existence d'un attracteur compact global. Dans la deuxième section, en utilisant la procédure standard de l'opérateur de prochaine génération, nous calculons le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 . Dans la Section 3, nous abordons le scénario d'extinction de l'épidémie lorsque

$\mathcal{R}_0 \leq 1$. Dans la Section 4, nous examinons la persistance et la stabilité globale de l'état endémique lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$. Dans la Section 5, nous analysons le rôle de la quarantaine dans le contrôle de l'épidémie et proposons une comparaison avec le modèle épidémique SIR classique. Enfin, nous validons nos résultats théoriques par des simulations numériques.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, on rappelle quelques notions de base qui seront utilisées tout au long de cette thèse.

1.1 Espaces fonctionnels

L'analyse mathématique des modèles étudiés dans cette thèse repose sur un cadre fonctionnel rigoureux. Cette section est consacrée à la définition des espaces fonctionnels nécessaires à la formulation des systèmes étudiés, notamment les espaces de Sobolev et les espaces de Banach adéquats.

Ces espaces permettent de poser correctement les équations aux dérivées partielles en termes de solutions faibles ou classiques, et de garantir certaines propriétés essentielles telles que la compacité, la régularité ou l'existence de solutions. Nous rappelons ici les principales définitions et notations utilisées tout au long de ce travail.

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme.*

Définition 1.2. *(Un cône)[\[23\]](#)*

1. Soit X un espace de Banach. On appelle cône de X un ensemble fermé

K dans X possédant les propriétés suivantes :

i) $0 \in K$.

ii) $u, v \in K \implies \alpha u + \beta v \in K, \forall \alpha, \beta \geq 0$.

iii) $v \in K$ et $-v \in K \implies v = 0$.

2. Un cône ordonné i.e. ($x \geq y \Leftrightarrow x - y \in K$ et $x > y \Leftrightarrow x - y \in \text{Int}(K)$), où $\text{Int}(K)$ est l'intérieur de K) est dit normal si

$$u, v \in K, u \leq v \implies \|u\|_X \leq \|v\|_X.$$

3. Un cône $K \subset X$ est dit **reproducteur(engendrant)** si

$$X = K - K.$$

Autrement dit, tout élément de X peut être écrit comme la différence de deux éléments de K .

4. On dit que K est total si

$$X = \overline{K - K},$$

où $\overline{K - K}$ représente l'adhérence de l'ensemble $K - K$ dans X .

• Si $\text{Int}(K) \neq \emptyset$, alors K est total.

1.1.2 Espaces de Lebesgue

[13]

Définition 1.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

où

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

Définition 1.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et } \exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \text{ p.p dans } \Omega\}$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c, p.p \text{ sur } \Omega\}$$

Théorème 1.1. *L'espace $L^p(\Omega)$ est :*

- Un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.
- Un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.
- Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.

Proposition 1.1. (*d'injection des espaces de Lebesgue*)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de mesure finie, et soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Alors :

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

1.1.3 Espaces de Hölder

Définition 1.5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on note $C_b^m(\Omega)$ l'espace des fonctions bornées de classe C^m sur Ω , défini par :

$$C_b^m(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, \exists k > 0; \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k \right\},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

On le munit de la norme :

$$\|u\|_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Définition 1.6. Soit $0 < \lambda \leq 1$, on note $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ l'espace des fonctions höldériennes bornées sur Ω d'ordre λ , défini par :

$$C_b^{0,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in C_b(\Omega), \exists C > 0, \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega; |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\lambda \right\}$$

Si $\lambda = 1$, on l'appelle espace des fonctions Lipschitziennes bornées.

L'espace $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{0,\lambda} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,\lambda}},$$

avec

$$[u]_{C^{0,\lambda}} = \sup_{(x,y) \in \Omega^2 \setminus x=y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Plus généralement, on définit l'espace $C_b^{m,\lambda}$ par :

$$C_b^{m,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega); \quad D^\alpha u \in C_b^{0,\lambda}(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = m \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{m,\lambda} = \sum_{0 \leq j \leq m} \|D^j u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|D^m u\|_{0,\lambda}$$

1.1.4 Espaces de Sobolev

[13] Dans cette sous-section nous introduisons les espaces de Sobolev d'ordre entier et leurs propriétés fondamentales.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty)$.

Définition 1.7. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \setminus \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

Ici $D^\alpha u$ est la dérivée au sens des distributions de u sur Ω , c.à.d

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

- Pour $1 \leq p < +\infty$:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Pour $p = +\infty$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Si $p=2$:

On remplace la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Proposition 1.2. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est :*

- *Un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*
- *Un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.*
- *Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Définition 1.8. *L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.2. *Soit $p \in [1, +\infty[$ alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$; i.e*

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}}} = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

Théorème 1.3. (Injection continue des espaces de Sobolev)

Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

1. *Si $N > mp$ alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{pour } p \leq q \leq \frac{Np}{N - mp}$$

2. *Si $N = mp$ alors :*

- *Si $p > 1$ alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{pour } p \leq q < +\infty.$$

- *Si $p = 1$ alors :*

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$$

3. *Si $N < mp$ alors :*

- *Pour $\frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$ et j satisfait $(j-1)p < N < jp$, on a :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } 0 < \lambda < j - \frac{N}{p}$$

- Pour $\frac{N}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geq j = \frac{N}{p} + 1$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \text{ pour tout } 0 < \lambda < 1$$

Théorème 1.4. (Théorème de Rellich-Kondrachov)

Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien de \mathbb{R}^N avec $N > 1$.

- Si $N > mp$ alors :

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ pour } q \leq \frac{Np}{N - mp}.$$

- Si $N = mp$ alors :

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ pour } 1 \leq q < +\infty.$$

- Si $N < mp$ alors et $j = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + 1$ alors :

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-j,\lambda}(\bar{\Omega}) \text{ pour } \lambda < j - \frac{N}{p}.$$

Remarque 1.1. Nous utiliserons la notation \hookrightarrow pour désigner une injection continue, et $\hookrightarrow\hookrightarrow$ (double flèche) pour représenter une injection compacte.

Définition 1.9 (Inégalité d'interpolation). Soit u une fonction mesurable appartenant à $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p < q \leq \infty$, et soit r tel que $p \leq r \leq q$. Alors, il existe un réel $\theta \in [0, 1]$ tel que :

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta},$$

où θ vérifie la relation :

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

1.2 Quelques notions sur les Matrices

Définition 1.10. (Matrice coopérative) [105] Une matrice carrée est dite coopérative si ses éléments hors diagonale sont positifs.

Définition 1.11. (Matrice irréductible) [80]

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (l'espace des matrices carrées d'ordre n dont les éléments appartiennent à \mathbb{K}) est dite réductible s'il existe une matrice de passage P telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $1 \leq p \leq n - 1$.

Une matrice non réductible est dite irréductible.

Proposition 1.3. *Si une matrice carrée est strictement positive (ses éléments) alors elle est irréductible.*

Définition 1.12. [69] *On dit que A est une matrice stable si ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.*

Proposition 1.4. [80] *$A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice coopérative stable si et seulement si A est inversible et $-A$ admet une matrice inverse positive.*

1.3 Les opérateurs linéaires fermés

Définition 1.13. (Opérateur fermé) [116]

Soient X et Y deux espaces de Banach, on dit qu'un opérateur A de X dans Y est fermé si son graphe $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$.

Théorème 1.5. (Théorème du graphe fermé) [116]

Soient X et Y deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire de X dans Y . Si le graphe de A noté $G(A) = \{(x, Ax) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$, alors A est continu.

Définition 1.14. *On dit que l'opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$ est **borné** si*

$$\exists M \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Définition 1.15. (Opérateur compact) [13]

Un opérateur A linéaire borné de X dans Y est dit compact si et seulement

si l'une de ces deux propositions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. L'image par A de $B_X(0, 1)$ est d'adhérence compacte.
2. De toute suite $(u_n)_n$ bornée dans X , on peut extraire une sous-suite $(u'_n)_n$ telle que la suite (Au'_n) converge fortement dans Y .

Définition 1.16. [62] Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{U(a, s)\}_{0 \leq s \leq a < a_0}$ sur X est appelée une **famille d'évolution exponentiellement bornée** si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) $U(a, a) = Id_X$ pour tout $0 \leq a < a_0$ (où Id_X est l'application identité sur X);
- (b) $U(a, r)U(r, s) = U(a, s)$ pour tous $0 \leq s \leq r \leq a < a_0$;
- (c) Pour tout $x \in X$, l'application $(a, s) \mapsto U(a, s)x$ est continue de l'ensemble $\{(a, s) : 0 \leq s \leq a < a_0\}$ dans Y ;
- (d) Il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|U(a, s)\| \leq Me^{\omega(a-s)}$$

pour tout $0 \leq s \leq a < a_0$.

1.4 Notions fondamentales sur la théorie des semi-groupes et la théorie spectrale

Avant d'aborder les aspects analytiques des modèles étudiés dans cette thèse, il est nécessaire de rappeler certaines notions fondamentales issues de la théorie des semi-groupes et de la théorie spectrale. En effet, ces outils mathématiques jouent un rôle central dans l'étude de l'existence, de l'unicité et du comportement asymptotique des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles considérés.

Cette section présente donc les résultats de base relatifs aux semi-groupes fortement continus, aux opérateurs linéaires non bornés, ainsi qu'à la caractérisation spectrale des opérateurs, qui seront utilisés de manière répétée dans

les chapitres suivants.

Définition 1.17. [105]

Soit X un espace de Banach, un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur X est une application

$$S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $S(0) = I$.

(ii) Pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.

(iii) Pour tout $u \in X$, $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)u = u$.

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 semi-groupe. (Où $\mathcal{L}(X)$ représente l'espace des opérateurs linéaires continues dans X .)

Définition 1.18. [105] (**Générateur infinitésimal d'un semi-groupe**)

Soit S un semi-groupe fortement continu, le générateur infinitésimal de S est l'opérateur non borné défini de la manière suivante :

$$D(A) = \{u \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \text{ existe}\}.$$

$$\text{On pose alors, } Au = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h}.$$

Définition 1.19. [62] Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Nous disons que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré sur X si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $S(0) = 0$;

(ii) $t \mapsto S(t)x$ est continu de $[0, +\infty)$ dans X pour chaque $x \in X$;

(iii) $S(t)$ satisfait

$$S(t)S(s) = \int_0^t [S(r+s) - S(r)] dr, \quad \forall t, s \in [0, +\infty).$$

Définition 1.20. [62] Un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est non dégénéré si :

$$(S(t)x = 0, \forall t \geq 0) \implies x = 0.$$

Définition 1.21. [105] Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré non dégénéré sur un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est dit le **générateur** de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si

$$x \in D(A) \text{ et } y = Ax \quad \Leftrightarrow \quad S(t)x = tx + \int_0^t S(s)y \, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.22. [116] (**Spectre et ensemble résolvant**)

Soit X un espace de Banach et soit l'opérateur linéaire fermé $A : D(A) \subset X \rightarrow X$.

On appelle :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ est bijective}\}$$

l'ensemble résolvant de A et son complémentaire $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ le spectre de A .

Pour $\lambda \in \rho(A)$ l'inverse

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

est un opérateur borné dans X selon le théorème du graphe fermé et il est appelé la résolvante (de A au point λ).

Définition 1.23 (Résolvante positive). Soit X un espace de Banach ordonné par un cône positif $X_+ \subset X$, et soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé.

On dit que l'opérateur A admet une **résolvante positive** s'il existe un réel $\omega \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda > \omega$ appartenant à l'ensemble résolvant $\rho(A)$, l'opérateur résolvant

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

vérifie :

$$f \in X_+ \quad \Rightarrow \quad R(\lambda, A)f \in X_+.$$

Autrement dit, la résolvante de A est dite positive si elle préserve la positivité

sur le cône X_+ .

Théorème 1.6. [23] Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ dans l'espace de Banach X . Alors,

- i) l'ensemble $\rho(A)$ est un ensemble ouvert dans le plan complexe \mathbb{C} .
- ii) la fonction $\lambda \rightarrow R(\lambda, A)$ est une fonction holomorphe de λ dans chaque composante connexe de $\rho(A)$.

Définition 1.24. [86] Le diamètre d'un sous-ensemble B d'un espace métrique (X, d) est défini par

$$\text{diam}(B) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B\}. \quad (1.1)$$

Définition 1.25. [105]

- À tout opérateur linéaire A , on fait correspondre sa borne spectrale définie comme

$$s(A) = \sup\{\text{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$$

- Pour tout opérateur linéaire borné A défini sur l'espace de Banach X dont le spectre $\sigma(A)$ est compact et non vide, on définit son rayon spectral comme suit :

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

ce rayon spectral vérifie : $r(A) \leq \|A\|$.

- Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu T défini sur l'espace de Banach X , on définit le taux de croissance exponentielle de T par :

$$\omega(T) = \{\omega \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1 : \|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0\}$$

- La borne de croissance essentielle de T est définie par :

$$\omega_{\text{ess}}(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha(T(t))}{t}$$

, avec α la mesure de la non-compacité, c'est-à-dire pour tout opérateur linéaire borné A dans X , $\alpha(A) := \inf_{K \in \mathcal{K}} \|A - K\|$,

où \mathcal{K} est l'ensemble de tous les opérateurs linéaires compacts sur X .

- Le rayon essentiel de L est défini par

$$r_{ess}(L) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_{ess}(L)\},$$

où le spectre essentiel de L est défini comme $\sigma_{ess}(L) = \sigma(A - K)$.

- La mesure de non-compacité de Kuratowski est définie par

$$\kappa(B) := \inf\{r \geq 0 : B \text{ a une couverture finie de diamètre inférieur à } r\}.$$

où, $\kappa(B) = 0$ si et seulement si B est précompact.

Proposition 1.5. Soit $s(A)$ la borne spectrale d'un générateur infinitésimal A et soit $\omega(T)$ la borne de croissance du semi-groupe associé T , on a

$$s(A) \leq \omega(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|.$$

Plus précisément,

Proposition 1.6. Soit $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ un semi-groupe fortement continu généré par A dans l'espace de Banach X . Alors

$$\omega(T) = \max\{s(A), \omega_{ess}(T)\}.$$

Proposition 1.7. Si le semi-groupe fortement continu est compact alors on a,

1)

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

2) La borne spectrale est égale à la borne de croissance, i.e. $s(A) = \omega(T)$.

Proposition 1.8. Soit $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ un semi-groupe fortement continu généré par A dans l'espace de Banach X . Alors

$$r(T(t)) = e^{\omega t} \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (1.2)$$

et

$$r_{ess}(T(t)) = e^{\omega_{ess}t} \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (1.3)$$

Définition 1.26. [94] Soit X un espace de Banach. On appelle $A = B + C$ une perturbation positive si B est à résolvante positive et $C : D(B) \rightarrow X$ est un opérateur linéaire positif.

Théorème 1.7. [94] Soit B un opérateur linéaire à résolvante positive dans X avec $s(B) < 0$ et $A = B + C$ une perturbation positive de B . Si A est à résolvante positive alors $s(A)$ a le même signe que $r(-CB^{-1}) - 1$.

Théorème 1.8. [94] Soit A un opérateur linéaire à résolvante positive dans X . Alors $s(A) < \infty$ et $s(A) \in \sigma(A)$ quand $s(A) > -\infty$. De plus $(s(A), \infty) \subseteq \rho(A)$. Finalement, si $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$, alors $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur positif si et seulement si $\lambda > s(A)$.

Théorème 1.9. [94] Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur un espace de Banach ordonné X avec un cône X_+ normal et engendrant. Alors A est à résolvante positive si et seulement si S est un semi-groupe positif, i.e. $S(t)X_+ \subseteq X_+$ pour tout $t \geq 0$. De plus

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad \lambda > s(A), \quad x \in X, \quad (1.4)$$

Définition 1.27. [62] Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ sur un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ (défini densément ou non) est appelé un opérateur de Hille-Yosida s'il existe deux constantes, $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, telles que

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$$

et

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall \lambda > \omega, \forall n \geq 1.$$

Théorème 1.10. [62] Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si A est un opérateur de Hille-Yosida avec un domaine dense (c'est-à-dire, $\overline{D(A)} =$

X). De plus, si M et ω sont les constantes introduites dans la Définition [1.27](#), nous devons avoir :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.28. [\[62\]](#) On dit que A_0 est la restriction de A dans $X_0 := \overline{D(A)}$ (où $\overline{D(A)}$ est la fermeture de $D(A)$ dans X). Si,

$$A_0 u = Au, \quad \text{pour tout } u \in D(A_0), \quad \text{avec } D(A_0) := \left\{ u \in D(A); Au \in X_0 \right\}.$$

Lemme 1.1. [\[62\]](#) Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X . Supposons qu'il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M > 0$ telles que $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ et

$$\|\lambda(\lambda I - A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0)} = \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\overline{D(A)})} \leq M, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in \overline{D(A)}$;
2. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda I - A)^{-1}x = 0, \quad \forall x \in X$;
3. $\overline{D(A_0)} = \overline{D(A)}$.

Hypothèse 1. [\[62\]](#) Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) Il existe deux constantes, $\omega_A \in \mathbb{R}$ et $M_A \geq 1$, telles que $(\omega_A, +\infty) \subset \rho(A)$ et, pour tout $\lambda > \omega_A$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\|(\lambda I - A_0)^{-n}\|_{\mathcal{L}(\overline{D(A)})} = \|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(\overline{D(A)})} \leq \frac{M_A}{(\lambda - \omega_A)^n};$$

- (b) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda I - A)^{-1}x = 0, \quad \forall x \in X$.

Lemme 1.2. [\[62\]](#) L'hypothèse [1](#) est satisfaite si et seulement si $\rho(A) \neq \emptyset$, et A_0 est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T_{A_0}(t)$ pour $t \geq 0$ d'opérateurs linéaires bornés sur X_0 avec

$$\|T_{A_0}(t)\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq M_A e^{\omega_A t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.9. [62] Soit l'hypothèse [1] satisfaite. Alors, A génère un semi-groupe intégré non dégénéré, exponentiellement borné et uniquement déterminé noté $\{S_A(t)\}_{t \geq 0}$. De plus, pour chaque $x \in X$, chaque $t \geq 0$, et chaque $\mu > \omega_A$, $S_A(t)$ est donné par :

$$S_A(t) = (\mu I - A_0) \int_0^t T_{A_0}(s) ds (\mu I - A)^{-1}.$$

Lemme 1.3. [62] Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K (avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), et soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. Supposons que $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors,

$$\rho(A_0) = \rho(A).$$

Théorème 1.11. [5] Soit A un opérateur de Hille-Yosida sur X et soit $B \in C(\overline{D(A)}, X)$. Alors $A + B$ est un opérateur de Hille-Yosida.

1.5 Théorème de Krein Rutman

Le théorème de Krein-Rutman est une généralisation du théorème de Perron-Frobenius aux espaces de Banach de dimension infinie.

Théorème 1.12. [80] (*Perron-Frobenius*)

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Le rayon spectral d'une matrice positive $A \geq 0$ (les éléments de A sont positifs) est une valeur propre à laquelle correspond un vecteur propre du quadrant positif.

Si $A \geq 0$ est en plus irréductible alors le vecteur propre correspondant est dans l'intérieur du quadrant positif.

Définition 1.29. [23] Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, A est dit fortement positif si $\forall v \in K, v \neq 0, Av \in \text{Int}(K)$ où $\text{Int}(K)$ est l'intérieur de K et $\mathcal{L}(X)$ représente l'espace des opérateurs linéaires continus dans X .

Théorème 1.13. [23] (*théorème de Krein-Rutman, version faible*)

Soit B un opérateur linéaire positif sur un cône convexe reproducteur K dans l'espace de Banach X . Si B est compact et a un rayon spectral $r(B) \neq 0$,

alors il existe $\varphi \in K$ (avec $\varphi \neq 0$) tel que

$$B\varphi = r(B)\varphi.$$

Théorème 1.14. [23] (*Krein-Rutman, version forte*)

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, A un opérateur linéaire continu et compact de X vers X . On suppose que A est fortement positif sur un cône positif, i.e.,

$$x \in K \setminus \{0\} \implies A(x) > 0$$

Le rayon spectral de A , $r(A)$ est une valeur propre simple strictement positive de A associée à un vecteur propre strictement positif, i.e. $x^0 \in \text{Int}(K)$ et c'est le seul vecteur propre positif.

Théorème 1.15. [119] (*Théorème de Krein-Rutman généralisé, version faible*)

Soit X un espace de Banach, K un cône total dans X , et soit $L \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur positif tel que

$$r(L) > r_{\text{ess}}(L).$$

Alors, il existe un $x \in K \setminus \{0\}$ tel que

$$Lx = r(L)x.$$

Théorème 1.16. [119] (*Théorème de Krein-Rutman généralisé, version forte*).

Soit X un espace de Banach, K un cône dans X avec $\text{Int}(K) \neq \emptyset$, et soit $L \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur fortement positif tel que

$$r(L) > r_{\text{ess}}(L).$$

Alors, $r(L)$ est une valeur propre algébriquement simple de L , avec un vecteur propre $x \in \text{Int}(K)$, et pour toute autre valeur propre λ de L , on a :

$$|\lambda| < r(L).$$

1.6 Théorie de Fredholm

Définition 1.30. [105]

Soit (X, X_+) un espace de Banach ordonné (X_+ est muni d'une relation d'ordre \leq voir aussi [55]) et $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire.

1. L'opérateur fermé A est dit de Fredholm si $\mathcal{R}(A)$ est fermé, $\dim \mathcal{N}(A)$ et $\text{codim } \mathcal{R}(A)$ sont finies.
2. Un opérateur fermé A est dit semi-Fredholm si $\mathcal{R}(A)$ est fermé, et au moins un parmi $\dim \mathcal{N}(A)$ et $\text{codim } \mathcal{R}(A)$ est fini.
3. Si A est de Fredholm ou semi-Fredholm, alors l'indice de Fredholm de A est défini par
$$\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) - \text{codim } \mathcal{R}(A),$$

où $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ désignent respectivement l'espace nul et le range de A .

Lemme 1.4. Soit X_+ un cône positif normal et engendrant de l'espace de Banach X et soit $A : D(A) \rightarrow X$ un opérateur fermé à résolvante positive. S'il existe un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda I - A$ est semi-Fredholm pour tous les nombres réels $\lambda > \omega$, alors les deux énoncés suivants sont valides :

- i) $\lambda I - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro pour tout nombre réel $\lambda > \omega$.
- ii) Si $\lambda \in \sigma(A) \cap (\omega, \infty)$ alors λ est une valeur propre de A avec une multiplicité géométrique finie (i.e. la dimension du sous espace propre associé est de dimension finie.)

1.7 Attracteur compact

Définition 1.31. Soit X un espace de Banach. Un semi-flot sur X est une famille de transformations $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$, où chaque application $\Phi(t) : X \rightarrow X$ satisfait les propriétés suivantes :

1. **Condition initiale** : $\Phi(0) = Id_X$, où Id_X est l'application identité sur X .
2. **Propriété semi-groupe** : Pour tout $t, s \geq 0$, on a

$$\Phi(t + s) = \Phi(t) \circ \Phi(s).$$

3. **Continuité** : L'application $(t, u_0) \mapsto \Phi(t)u_0$ est continue de $[0, \infty) \times X$ dans X .

Définition 1.32. [86] Soit X un espace métrique muni de la métrique d . On dit qu'une application $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est **état-continue** si, pour tout $t \in J$, l'application $\Phi_t : X \rightarrow X$ définie par $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ est continue.

Définition 1.33. [86]

- La fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ est appelée une **trajectoire totale** de Φ , si $\phi(t + r) = \Phi(t, \phi(r))$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $r \in \mathbb{R}$.
- L'orbite associée à une trajectoire totale est définie par : $\{\Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$.
- Une fonction continue $\phi : (-\infty, \infty) \rightarrow X$ est appelée une **solution globalement définie** de Φ passant par x si

$$\phi(0) = x \quad \text{et} \quad \phi(t) = \Phi_t(x) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Une telle solution peut ne pas être unique. Un point d'un ensemble invariant admet toujours au moins une solution complète dont l'image est contenue dans l'ensemble invariant.

- Pour une solution complète ϕ , on définit son **ensemble α -limite** par

$$\alpha(\phi) = \bigcap_{t < 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} \phi(s)}.$$

Définition 1.34. [86] Soit M un sous-ensemble de X .

1. M est dit **positivement invariant** pour Φ si $\Phi_t(M) \subset M$ pour tout $t \geq 0$, et **invariant** si $\Phi_t(M) = M$ pour tout $t \geq 0$.

2. L'ensemble ω -limite de M , noté $\omega(M)$, est défini par

$$\omega(M) = \bigcap_{J \subset [t, \infty)} \overline{\bigcup_{t \in J} \Phi(t, M)},$$

où $\Phi(t, M)$ représente l'image de M sous l'action du semi-flot $\Phi(t)$ et J est une suite de temps allant vers l'infini.

Le cas particulier $M = \{x\}$ sera noté $\omega(x)$.

3. La variété stable de M , notée $W^S(M)$, est définie par :

$$W^S(M) := \{x \in X : \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t(x) - M\| = 0\}.$$

Définition 1.35. [86] Soit $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ une application, $M \subset X$. L'application Φ est dite asymptotiquement compacte sur M , si pour toute suite (t_i) dans \mathbb{R}_+ , $t_i \rightarrow \infty$ quand $i \rightarrow \infty$, et pour toute suite (x_i) dans M , $(\Phi(t_i, x_i))$ admet une sous-suite convergente.

Définition 1.36. [86] Soit $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu.

- Φ est appelé point dissipatif s'il existe un sous-ensemble B de X qui attire tous les points dans X .
- Φ est appelé asymptotiquement régulier si Φ est asymptotiquement compact sur chaque ensemble positivement invariant borné fermé.
- Φ est appelé éventuellement borné sur un ensemble $M \subset X$ si $\Phi(J_r \times M)$, $J_r = J \cap [r, \infty)$, est borné pour $r \in J_r$.

Définition 1.37. [87] On dit que le semi-flot $\Phi(t)$ est un κ -contraction, s'il existe une fonction continue $K(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $0 < K(t) < 1$ et pour tout $t > 0$ et chaque ensemble borné $B \subset X^+$ pour tout $\{\Phi(s)B, 0 < s < t\}$ est borné, on a $\kappa(\Phi(t)B) \leq K(t)\kappa(B)$.

Lemme 1.5. les κ -contraction sont asymptotiquement régulier.

Théorème 1.17. [86] Soit $u_0 \in X$, le semi-flot $\Phi_t : X \rightarrow X$ est dit asymptotiquement régulier s'il existe des applications $\hat{\Phi}_t$ et $\tilde{\Phi}_t$ telles que

$$\Phi_t(u_0) = \hat{\Phi}_t(u_0) + \tilde{\Phi}_t(u_0)$$

et les conditions suivantes sont vérifiées pour tout ensemble fermé et borné D qui est positivement invariant :

(i) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam}(\hat{\Phi}_t(D)) = 0.$

(ii) Il existe $r_D > 0$ tel que $\tilde{\Phi}_t$ ait une fermeture compacte dans X pour tout $t \geq r_D$.

Définition 1.38. [86]

— Soit A un ensemble non vide, compact et invariant. Si \mathcal{C} est la classe des ensembles singletons dans X et si A attire \mathcal{C} , alors A est appelé un attracteur compact de points.

— Soit \mathcal{C} une classe de sous-ensembles de X (par exemple, des ensembles singleton, des ensembles compacts, des ensembles bornés). Un ensemble non vide, compact et invariant $K \subseteq X$ est appelé un attracteur compact de \mathcal{C} si K attire tous les ensembles de \mathcal{C} .

Définition 1.39. [86] Un ensemble invariant compact non vide A dans X est appelé attracteur compact local d'ensembles compacts s'il attire tous les sous-ensembles compacts dans un voisinage de lui-même.

Théorème 1.18. [86] Soit A un attracteur compact de points dans X et un attracteur compact local d'ensembles compacts. Alors, A est l'attracteur compact d'ensembles compacts dans X .

Proposition 1.10. [86] Si Φ est asymptotiquement régulier et point dissipatif, alors il existe un attracteur compact de points.

Théorème 1.19. [86] Les affirmations suivantes sont équivalentes pour un semi-flot *état-continu* Φ :

1. Φ est un point dissipatif, asymptotiquement régulier et éventuellement borné sur tout sous-ensemble compact $K \subset X$.
2. Il existe un **attracteur compact** des voisinages des ensembles compacts de X ; de plus, cet attracteur A attire tout sous-ensemble de X sur lequel Φ est éventuellement borné.

Définition 1.40. [120] Soit X un espace métrique muni de la distance d , et

soit $f : X \rightarrow X$ une application continue.

Un point $x \in X$ est dit récurrent par chaînes si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie de points x_1, \dots, x_m dans X (avec $m > 1$) telle que $x_1 = x = x_m$ et que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq m - 1.$$

L'ensemble de tous les points récurrents par chaînes pour $f : X \rightarrow X$ est noté $R(X, f)$.

Soit $A \subset X$ un ensemble invariant non vide. Nous disons que A est récurrent par chaînes interne si $R(A, f) = A$.

De plus, A est transitif par chaînes internes si la condition plus forte suivante est satisfaite : Pour tout $a, b \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie x_1, \dots, x_m dans A avec $x_1 = a$, $x_m = b$ telle que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq m - 1.$$

La suite $\{x_1, \dots, x_m\}$ est appelée une ε -chaîne dans A connectant a et b .

Définition 1.41. [120]

— Soient A et B deux ensembles invariants isolés. On dit que A est **chaîné** à B , noté $A \rightarrow B$, s'il existe une solution ϕ globalement définie passant par un point $x \notin A \cup B$, dont l'image a une fermeture compacte et telle que

$$\omega(x) \subset B \quad \text{et} \quad \alpha(\phi) \subset A.$$

— Une suite finie $\{M_1, \dots, M_k\}$ d'ensembles invariants isolés est appelée une **chaîne** si

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_k.$$

La chaîne est appelée un **cycle** si $M_k = M_1$.

Lemme 1.6. [120] Soit $f : X \rightarrow X$ une application continue. Alors, l'ensemble ω -limite de toute orbite précompacte positive est internement chaîne-transitif.

Théorème 1.20. [120] Soit A un attracteur et C un ensemble compact, internement chaîne-transitif pour $f : X \rightarrow X$. Si $C \cap W^s(A) \neq \emptyset$, alors $C \subset A$.

1.8 Principe de comparaison parabolique

Les principes de comparaison sont parmi les résultats les plus utiles pour l'analyse des équations de réaction-diffusion ; ce principe permet notamment de comparer des solutions des problèmes paraboliques avec condition de Dirichlet ou de Neumann.

Théorème 1.21. [77] (*Principe de comparaison parabolique*)

Soit $T > 0$ (T peut éventuellement être infini) et soit Ω borné. Considérons une fonction $f = f(t, x, u)$ telle que $f, \frac{\partial f}{\partial u} \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$. Soient \bar{u} et \underline{u} dans $C_1^2([0, T] \times \Omega) \cap C([0, T] \times \Omega)$ (C_1^2 i.e. f est de classe C^2 par rapport à x et f de classe C^1 par rapport à t), vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq D\Delta \bar{u} + f(t, x, \bar{u}), t \in]0, T], x \in \Omega, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \leq D\Delta \underline{u} + f(t, x, \underline{u}), t \in]0, T], x \in \Omega, \\ \underline{u}(0, x) \leq \bar{u}(0, x), x \in \Omega, \end{cases}$$

on suppose également que soit :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}, x \in \partial\Omega,$$

ou :

$$\underline{u}(t, x) \leq 0 \leq \bar{u}(t, x), t \in]0, T], x \in \partial\Omega.$$

Alors $\underline{u} \leq \bar{u}$ dans $t \in]0, T] \times \Omega$. De plus, soit il existe $(t_0, x_0) \in]0, T] \times \Omega$ tel que $\bar{u}(t_0, x_0) = \underline{u}(t_0, x_0)$, et dans ce cas $\bar{u} \equiv \underline{u}$ dans $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$, soit $\bar{u} > \underline{u}$ dans $]0, T] \times \Omega$.

Nous rappelons à présent l'énoncé du principe du maximum, considéré comme une conséquence directe du théorème de comparaison dans le cas particulier où la fonction de comparaison est constante.

Théorème 1.22. (*Principe du maximum fort*) Soit Ω un domaine borné

de \mathbb{R}^n et $u \in L^2((0, T), W^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$, si

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq 0, (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) \geq 0, x \in \Omega \\ u(x, t) \geq 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (1.5)$$

Alors $u \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times (0, T)$ et si $u \neq 0$ alors $u > 0$ dans $\Omega \times (0, T)$.

1.9 Quelques notions sur la stabilité

L'étude de la stabilité est un outil central dans l'analyse qualitative des modèles dynamiques, en particulier dans le contexte des modèles épidémiologiques. Elle permet de déterminer si un état stationnaire (comme un état sans maladie ou un état endémique) est robuste face aux perturbations initiales.

Dans cette section, nous présentons quelques notions de base sur la stabilité des équilibres, ainsi que des résultats classiques qui seront utilisés dans l'analyse des modèles développés dans les chapitres suivants. Nous rappelons notamment les définitions de la stabilité.

Définition 1.42. [86] Soit J un ensemble de temps, $\hat{J} = J \cup (-J)$, et X un espace métrique. Soit $\varphi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot état-continu .

Si Y est un sous-ensemble positivement invariant de X , une fonction continue $L : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **fonction de Lyapunov** sur Y si :

$$L(\varphi(t, x)) < L(x), \quad \text{pour tout } x \in Y \text{ et pour tout } t \in J.$$

Définition 1.43. [86]

Un sous-ensemble M de X , positivement invariant, est dit **stable** si, pour tout voisinage U de M , il existe un voisinage V de M tel que :

$$(J \times V) \subset U.$$

Un sous-ensemble stable $M \subset X$ est dit **localement asymptotiquement stable** s'il existe un voisinage V de M tel que M attire tous les points de V .

Théorème 1.23. [86] Soit le semi-flot $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ état-continu, uniformément sur tout intervalle de temps fini. Soit A un sous-ensemble compact de X , positivement invariant, qui attire tous les sous-ensembles compacts d'un voisinage de lui-même (par exemple, un attracteur local compact pour les ensembles compacts). Alors, A est localement asymptotiquement stable.

Lemme 1.7. [86] Soit A un sous-ensemble invariant de X , et soit $L : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors L est une **fonction de Lyapunov** sur A si, pour toute trajectoire totale $\varphi : J \rightarrow A$ du semi-flot Φ , la fonction composée $L \circ \varphi$ est décroissante sur J .

Proposition 1.11. [86] Soit L une fonction de Lyapunov définie sur un sous-ensemble $Y \subset X$, positivement invariant.

— Si $x \in Y$, alors L est **constante sur** $\omega(x)$, et :

$$L(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} L(\Phi(t, x)) \leq L(x), \quad \text{pour tout } y \in \omega(x).$$

— Si $\varphi : J \rightarrow Y$ est une trajectoire totale, alors L est **constante sur** $\alpha(\varphi)$, et :

$$L(z) = \lim_{t \rightarrow -\infty} L(\varphi(t)) \geq L(\varphi(0)), \quad \text{pour tout } z \in \alpha(\varphi).$$

Le théorème suivant joue le rôle du principe d'invariance de LaSalle dans le contexte des attracteurs compacts.

Théorème 1.24. [86] Soit L une fonction de Lyapunov définie sur A , et soit $\tilde{A} \subset A$.

On suppose que L est **constante sur** \tilde{A} .

On suppose en outre que, si $\varphi : \hat{J} \rightarrow A$ est une trajectoire totale du semi-flot Φ , et si $L \circ \varphi$ est constante, alors $\varphi(\hat{J}) \subset \tilde{A}$.

Alors on a :

$$\mathcal{A} = \tilde{A}.$$

Proposition 1.12. *Tout ensemble invariant compact contient au moins un point non errant.*

Soit K un attracteur et soit Ω l'ensemble des points non errants. L'ensemble $\Omega \cap K$ est compact, invariant et non vide. Pour tout $z \in \Omega \cap K$, il existe des éléments maximaux et minimaux p, q de $\Omega \cap K$ tels que $p < z < q$.

Théorème 1.25. [45] *Soit $p \in \Omega \cap K$ un élément minimal quelconque. Alors, p est un équilibre et il existe $x \leq p$ tel que $x(t) \rightarrow p$.*

Théorème 1.26. [45] *Si K contient un seul équilibre p , alors chaque trajectoire attirée par K converge vers p .*

Théorème 1.27. *Inégalité de Gronwall Soit f, g et k des fonctions continues à valeurs positives telles que :*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\sigma) d\sigma, \quad \forall t \in [a, b],$$

alors

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(\sigma) k(\sigma) e^{(\int_s^t k(\tau) d\tau)} d\sigma, \quad \forall t \in [a, b].$$

1.10 Persistance

Le concept de persistance est fondamental dans l'analyse des modèles épidémiologiques. Il permet de caractériser les conditions sous lesquelles une maladie continue à se propager dans la population au lieu de disparaître. En particulier, la persistance uniforme ou la persistance faible sont des notions clés pour étudier le comportement asymptotique des solutions des systèmes dynamiques.

Dans cette section, nous rappelons les définitions classiques de la persistance dans le cadre des systèmes dynamiques, ainsi que quelques résultats théoriques utiles pour l'analyse qualitative des modèles présentés dans cette

thèse.

Soient X un espace métrique et Φ un semi-flot sur X . Soient $X_0 \subset X$ et $\partial X_0 = X \setminus X_0$ un ensemble ouvert. Soit $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et soit J un ensemble de temps.

Définition 1.44. [86] *On dit que ρ est une fonction de distance généralisée pour le semi-flot Φ si, pour tout $t > 0$,*

$$\rho(\Phi(t, x)) > 0 \quad \text{si} \quad \rho(x) > 0 \quad \text{ou} \quad \rho(x) = 0 \quad \text{et} \quad x \in X_0.$$

Définition 1.45. [86] *la persistance faible*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -faiblement persistant, si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.46. [86] *la persistance forte*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement persistant, si

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.47. [86] *ρ -uniformément faiblement persistant*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -uniformément faiblement persistant, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.48. [86] *ρ -uniformément fortement persistante*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement uniformément persistant, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Théorème 1.28. [64] *Soit ρ une fonction de distance généralisée pour le semi-flot Φ . Supposons que*

1. Φ admet un attracteur global de point.

2. il existe une suite finie $M = \{M_1, \dots, M_k\}$ d'ensembles invariants compacts, isolés et deux à deux disjoints, ayant les propriétés suivantes :

— $\cup_{x \in M_\partial} \subset \cup_{i=1}^k M_i$.

— Aucun sous ensemble de M ne forme un cycle dans ∂X_0 .

— M_i est isolé dans X

— $W^s(M_i) \cap \rho^{-1}(0, \infty) = \emptyset$ pour chaque $1 \leq i \leq k$.

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble transitif de chaîne compact L avec $L \not\subset M_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe $\min_{x \in L} \rho(x) > 0$

Théorème 1.29. Soit $\Phi(t)$ un semi-flot en temps continu sur X tel que $\Phi(t)(X_0) \subset X_0$ pour tout $t \geq 0$. Supposons que $\Phi(t)$ est κ -contractant convexe pour tout $t > 0$, et que $\Phi(t) : X_0 \rightarrow X_0$ admet un attracteur global A_0 . Alors, $\Phi(t)$ possède un équilibre $x_0 \in A_0$.

1.11 Minimisation conditionnelle

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.6)$$

Sa fonction d'énergie est donnée par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

où $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(t) dt$.

Supposons que F est homogène, c'est-à-dire

$$F(\lambda\sigma) = \lambda^q F(\sigma), \quad \lambda > 0, \quad q > 0.$$

Nous cherchons une solution de (1.6) en utilisant un problème de minimisation

conditionnelle.

Définissons l'ensemble contraint :

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} F(u) dx = 1\},$$

où K est non vide.

Posons

$$m = \inf_{u \in K} J_1(u), \quad \text{avec} \quad J_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Si m est atteint, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J_1'(u_0) = \lambda F'(u_0)$.

Pour cela, nous utilisons le théorème des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 1.30 (Multiplicateurs de Lagrange). *Soit X un espace de Banach, et $J_1, F_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On pose $K = \{u \in X : F_1(u) = 1\}$.*

Supposons que :

1. $K \neq \emptyset$,
2. K est non dégénéré, c'est-à-dire que pour tout $u \in K$, $F_1'(u) \neq 0$.

Si $m = \inf_{u \in K} J_1(u)$ est atteint en u_0 , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$J_1'(u_0) = \lambda F_1'(u_0).$$

1.11.1 Application I : Problème de valeur propre

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C(\Omega)$ (avec Ω borné) telle que :

$$C(\Omega) \int_{\Omega} u^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

On définit :

$$C(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Alors, il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx}{\int_{\Omega} u_0^2 dx} = C(\Omega) \quad \text{et} \quad u_0 \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J_1'(u_0) = \lambda F_1'(u_0).$$

Alors,

$$2(-\Delta u_0) = 2\lambda u_0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda u_0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.7)$$

En testant avec u_0 :

$$m = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} u_0^2 dx = \lambda \Rightarrow \lambda = m = C(\Omega).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = C(\Omega)u_0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_0 \geq 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Donc $C(\Omega) = m$ est une valeur propre du laplacien $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet.

C'est facile de voir que $K \neq \emptyset$. Montrons que K est non dégénéré : Soit $u_0 \in K$, $v \in H_0^1(\Omega)$, alors :

$$F_1'(u_0)(v) = 2 \int_{\Omega} u_0 v dx \neq 0.$$

Montrons que m est atteint. Soit $\{u_n\} \subset K$ une suite minimisante, c'est-à-

dire :

$$u_n \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} u_n^2 dx = 1, \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow m > 0.$$

Ainsi, $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par compacité (Rellich-Kondrachov), il existe une sous-suite (toujours notée u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n \rightarrow u_0 & \text{fortement dans } L^\alpha(\Omega) \quad \forall \alpha < 2^*, \\ u_n(x) \rightarrow u_0(x) & \text{presque partout dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

En particulier, pour $\alpha = 2$ (car $2 < 2^*$) :

$$\int_{\Omega} u_n^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} u_0^2 dx = 1.$$

Donc $u_0 \in K$.

De plus, par semi-continuité faible :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = m.$$

Or, comme $u_0 \in K$, on a aussi :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \geq m.$$

Donc finalement :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = m.$$

Ainsi, u_0 réalise m .

Remarquons que si $u_0 \in K$, alors $|u_0| \in K$. Donc nous pouvons choisir $u_0 \geq 0$.

Finalement, u_0 est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = C(\Omega)u_0, & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_0 > 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.10)$$

Démonstration. Définissons :

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} u^2 dx = 1\}.$$

Alors $K \neq \emptyset$.

Considérons :

$$F_1 : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_1(u) = \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Donc $K = \{u \in H_0^1(\Omega) : F_1(u) = 1\}$.

Définissons aussi :

$$J_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

On sait que $F_1, J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega))$. □

Chapitre 2

Étude des dynamiques et des profils d'un modèle SIQR diffusif avec des taux de dispersion différenciés distincts

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une classe générale de modèle épidémiologique SIQR de réaction-diffusion (susceptibles, infectés, en quarantaine, réfractaires) avec hétérogénéité spatiale et quarantaine imparfaite, en nous concentrant sur le rôle des individus mis en quarantaine dans le contrôle des maladies infectieuses. De plus, nous analysons l'impact des taux de diffusion faibles/élevés des individus susceptibles et infectés. Nous considérons le

modèle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S + \Lambda(x) - f(x, S, I) - \mu(x)S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + f(x, S, I) - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I + \gamma(x)Q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = d_R \Delta R + \kappa_1(x)I + \kappa_2(x)Q - \mu(x)R, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t > 0, x \in \Omega, \\ t > 0, x \in \Omega, \\ t > 0, x \in \Omega, \\ t > 0, x \in \Omega, \\ x \in \partial\Omega, \end{array} \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales,

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad I(x, 0) = I_0(x), \quad Q(x, 0) = Q_0(x), \quad R(x, 0) = R_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Où, $S(x, t)$, $I(x, t)$, $Q(x, t)$ et $R(x, t)$ représentent respectivement les densités des individus susceptibles, infectés, en quarantaine et réfractaires. Les paramètres d_S , d_I et d_R sont les taux de diffusion pour S , I et R , respectivement. Le domaine d'habitat Ω est un ensemble borné avec une frontière régulière. Les paramètres Λ et μ représentent respectivement les taux de naissance et de mortalité, θ est le taux de quarantaine, κ_1 et κ_2 sont respectivement les taux de guérison pour les individus infectés et en quarantaine, et γ est le taux de rechute pour quitter Q et revenir à I .

Tout d'abord, on remarque que la fonction R n'apparaît pas dans les trois premières équations du système (2.1), nous devons seulement étudier le système

suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S + \Lambda(x) - f(x, S, I) - \mu(x)S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + f(x, S, I) - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I + \gamma(x)Q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t > 0, x \in \Omega, \\ t > 0, x \in \Omega, \\ t > 0, x \in \Omega, \\ x \in \partial\Omega, \end{array} \quad (2.2)$$

avec,

$$S(x, 0) = S_0(x) \geq 0, \quad I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, \quad Q(x, 0) = Q_0(x) \geq 0, \quad \text{pour } x \in \Omega.$$

Désormais, pour une fonction continue g sur $\bar{\Omega}$, on note

$$\underline{g} = \min_{x \in \bar{\Omega}} g(x) \quad \text{et} \quad \bar{g} = \max_{x \in \bar{\Omega}} g(x).$$

Maintenant, nous supposons que les paramètres définis dans (2.1) sont des fonctions höldériennes et strictement positives.

Nous supposons également que la fonction f satisfait les hypothèses suivantes :

1. $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \cdot, 0) > 0 \quad \text{sur chaque compact de } \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^*. \quad (2.3)$$

Notons que cette hypothèse de régularité de f implique que

$$\begin{aligned} &\text{Pour tout } B > 0, \text{ il existe } L > 0 \text{ tel que} \\ &|f(x, S_1, I_1) - f(x, S_2, I_2)| \leq L(|S_1 - S_2| + |I_1 - I_2|) \\ &\text{pour chaque } |S_i| \leq B, |I_i| \leq B, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } x \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(H₁) Pour chaque $x \in \bar{\Omega}$ et $I > 0$, la fonction $f(x, \cdot, I)$ est croissante et pour chaque $x \in \bar{\Omega}$ et $S > 0$ la fonction $f(x, S, \cdot)$ est concave. De plus pour

tout $x \in \bar{\Omega}$, $f(x, S, I) = 0$ si seulement si $SI = 0$.

2.2 Existence de la solution et de l'attracteur global

Soient $(\mathbb{X} := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3), \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\mathbb{X}^+ := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^3)$ son cône positif.

Notons par $T_1(t)$, $T_2(t)$ les C_0 -semi-groupes compacts, analytiques et fortement positifs ([87], Corollaire 7.2.3) générés respectivement par $d_S\Delta - \mu(\cdot)$ et $d_I\Delta - (\mu(\cdot) + \kappa_1(\cdot) + \theta(\cdot))$, respectivement sous les conditions aux limites de type Neumann. Soit $T_3(t) = e^{-(\mu(\cdot) + \kappa_2(\cdot) + \gamma(\cdot))t}$ le semi-groupe compact, analytique et fortement positif induit par $-(\mu(\cdot) + \kappa_2(\cdot) + \gamma(\cdot))$ voir e.g [88]. D'après [70], $\mathcal{T}(t) = (T_1(t), T_2(t), T_3(t)) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est un C_0 -semi-groupe fortement positif, compact et analytique avec un générateur infinitésimal \mathbf{A} . De plus, il existe $\lambda > 0$ et $M \geq 1$ tels que $|T_i(t)| \leq Me^{-\lambda t}$, pour tout $t \geq 0$ et $i = 1, 2$.

Définissons $\mathbf{F} : \mathbb{X}^+ \rightarrow \mathbb{X}$ par

$$\mathbf{F}(\phi)(x) = \begin{pmatrix} \Lambda(x) - f(x, \phi_1(x), \phi_2(x)), \\ f(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) + \gamma(x)\phi_3(x) \\ \theta(x)\phi_2 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ par

$$\mathbf{A}(\phi)(x) = \begin{pmatrix} d_S\Delta\phi_1(x) - \mu(x)\phi_1(x), \\ d_I\Delta\phi_2(x) - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))\phi_2(x) \\ -(\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))\phi_3(x) \end{pmatrix}$$

avec,

$$D(\mathbf{A}) = \{(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{X}, \Delta\phi_i \in \mathbb{X}, \frac{d\phi_i}{d\eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, i = 1, 2\}.$$

Où $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{X}^+$. Le problème (2.2) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} u'(t) = \mathbf{A}u + \mathbf{F}(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Définition 2.1. La fonction $u \in C([0, T]; \mathbb{X})$ est appelée solution faible de (2.5) sur $[0, T]$ si elle vérifie

$$u(t) = \mathcal{T}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)\mathbf{F}(u(\cdot, s))ds,$$

avec $u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+$.

Cette dernière est une solution classique si u est une solution continûment différentiable, $u(t) \in D(\mathbf{A})$ quel que soit $t > 0$ et u vérifie (2.5).

Lemme 2.1. Soit $u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+$, le problème (2.2) admet une solution classique qui est positive, unique $u = (S, I, Q)$ définie sur $\bar{\Omega} \times [0, t_{max})$ avec $t_{max} \leq \infty$.

Démonstration. La preuve est une application directe du Théorème 7.3.1 et du Corollaire 7.3.2 dans [87] pour $\mathbf{F}(\phi) := (\mathbf{F}_1(\phi), \mathbf{F}_2(\phi), \mathbf{F}_3(\phi))$ qui est deux fois continûment différentiable. En effet, observons que $\mathbf{F}_i(\phi) \geq 0$ lorsque $\phi \in \mathbb{X}^+$ et $\phi_i = 0$, et donc, voir le Corollaire 7.3.2 dans [87],

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \text{dist}(\phi + h\mathbf{F}(\phi), \mathbb{X}^+) = 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{X}^+,$$

avec $\text{dist}(u, A) = \inf\{|u - a|_{\mathbb{X}}, a \in A\}$ En outre $\mathbf{T}(t)\mathbb{X}^+ \subset \mathbb{X}^+$. Voir aussi les Théorèmes 3.1 et 3.2 dans [70] pour \mathbf{F} qui satisfont (2.4). \square

2.2.1 Attracteur compact

Lemme 2.2. Soit $S_0 \in C(\bar{\Omega})$, pour toutes fonctions strictement positives et continues Λ et μ sur $\bar{\Omega}$ l'équation scalaire de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S + \Lambda(x) - \mu(x)S, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ S(x, 0) = S_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

a un équilibre strictement positif et unique $\hat{S}(\cdot)$, qui est globalement attractif dans $C(\bar{\Omega})$. Donc,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(\cdot, t) - \hat{S}\|_{C(\bar{\Omega})} = 0.$$

Démonstration. Il découle de la théorie standard des équations paraboliques que pour tout $\phi \in \mathbb{X}^+$ (2.6) admet une solution unique S sur $[0, \infty)$ avec $S(\cdot, 0) = S_0$. Soit $\hat{P}(t)$ le semi-flot de solutions induit par (2.6), il découle alors du Théorème de comparaison et du principe du maximum que pour tout $\phi \in \mathbb{X}^+$, l'ensemble ω -limite $\omega(\phi)$ satisfait $\omega(\phi) \subset \{\psi \in \mathbb{X}^+, \frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\mu}} \leq \psi \leq \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{\mu}}\} := \mathbf{W}$. Donc, $\hat{P}(t)$ admet un attracteur global et compact $\hat{\mathbf{W}}$ contenu dans \mathbf{W} . D'après le Théorème 1.25, on déduit que $\hat{\mathbf{W}}$ contient un équilibre strictement positif de (2.6). Supposons qu'on a deux équilibres, $\hat{S}_1(\cdot)$ et $\hat{S}_2(\cdot)$ de (2.6). Alors, $\xi(\cdot) = \hat{S}_1(\cdot) - \hat{S}_2(\cdot)$ vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} d_S \Delta \xi - \mu \xi = 0 & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0 & \partial x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.7)$$

Il découle du principe du maximum fort que $\xi(\cdot) = 0$. D'où, (2.6) admet un unique état d'équilibre strictement positif $\hat{S}(\cdot)$. D'après le Théorème 1.26 on conclut que $\hat{S}(\cdot)$ attire n'importe quelle solution de (2.6). \square

Ensuite, nous montrons que toutes les solutions de (2.2) sont globales

Lemme 2.3. *Pour tout $u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+$, le système (2.2) a une solution globale unique non négative définie sur $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$. De plus, il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|S(\cdot, t)\| + \|I(\cdot, t)\| + \|Q(\cdot, t)\|) \leq \hat{M}. \quad (2.8)$$

Démonstration. Soit $u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+$, définissons M_C sur \mathbb{R}_+ par

$$M_C(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \leq C, \\ C & \text{si } v > C, \end{cases} \quad (2.9)$$

où C est une valeur strictement positive à déterminer. Utilisons le fait que f est une fonction continue et lipschitzienne dans tout ensemble compact voir (2.4), il est clair que $\tilde{f}(\cdot, S, I) = f(\cdot, M_C(S), M_C(I))$ est globalement Lipschitzienne. Soient $L_{\tilde{f}}$ une constante de Lipschitz de \tilde{f} et $u = (S, I, Q)$ une solution de (2.2) avec une condition initiale u_0 quand f est remplacée par \tilde{f} . Puisque

$$\frac{\partial S}{\partial t} \leq d_S \Delta S + \Lambda(\cdot) - \mu(\cdot)S,$$

alors S est une sous-solution de (2.6). Par le critère de comparaison et le lemme 2.2, on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \leq \hat{S}(x) \quad \text{uniformément pour } x \in \bar{\Omega}, \quad (2.10)$$

où \hat{S} est l'unique équilibre strictement positif. Il existe une constante M_* dépendant des données initiales, telle que

$$\|S(\cdot, t)\| \leq M_*, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.11)$$

En résolvant la deuxième équation de (2.2), nous obtenons

$$I(\cdot, t) = T_2(t)I_0(\cdot) + \int_0^t T_2(t-s) \left(\tilde{f}(\cdot, S(\cdot, s), I(\cdot, s)) + \gamma(\cdot)Q(\cdot, s) \right) ds,$$

d'où,

$$\|I(\cdot, t)\| \leq M e^{-\lambda t} \|I_0\| + M \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} M^* \left(\|I(\cdot, s)\| + \|Q(\cdot, s)\| \right) ds, \quad (2.12)$$

où, $M^* = \max\{L_{\bar{f}}, \bar{\gamma}\}$. De plus, par (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} Q(\cdot, t) &= T_3(t)Q_0(\cdot) + \int_0^t \theta(\cdot)T_3(t-s)I(\cdot, s)ds, \\ &= e^{-(\mu(\cdot)+\kappa_2(\cdot)+\gamma(\cdot))t}Q_0(\cdot) + \int_0^t \theta(\cdot)e^{-(\mu(\cdot)+\kappa_2(\cdot)+\gamma(\cdot))(t-s)}I(\cdot, s)ds, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donc,

$$\|Q(\cdot, t)\| \leq e^{-\mu^*t}\|Q_0\| + \int_0^t \bar{\theta}e^{-\mu^*(t-s)}\|I(\cdot, s)\|ds, \quad (2.14)$$

avec $\mu^* = \min\{\lambda/2, \underline{\mu}\}$. Substituons (2.14) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} \|I(\cdot, t)\| &\leq M e^{-\lambda t} \|I_0\| + M \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left(M^* (\|I(\cdot, s)\| + e^{-\mu^*s} \|Q_0\| \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \bar{\theta} e^{-\mu^*(s-r)} \|I(\cdot, r)\| dr \right) ds \\ &\leq M \|I_0\| + M M^* \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|I(\cdot, s)\| ds + M M^* \int_0^t e^{-\mu^*s} \|Q_0\| ds \\ &\quad + M M^* e^{-\lambda t} \bar{\theta} \int_0^t e^{\lambda s} \int_0^s e^{-\mu^*(s-r)} \|I(\cdot, r)\| dr ds \\ &\leq M \|I_0\| + M M^* \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|I(\cdot, s)\| ds + M M^* \|Q_0\| \frac{1 - e^{-\mu^*t}}{\mu^*} \\ &\quad + \frac{M M^* \bar{\theta}}{\lambda - \mu^*} \int_0^t e^{\mu^*(t-s)} \|I(\cdot, s)\| ds \\ &\leq C_1 + C_2 \int_0^t \|I(\cdot, s)\| ds. \end{aligned}$$

avec $C_1 = M \|I_0\| + \frac{M M^* \|Q_0\|}{\mu^*}$ et $C_2 = M M^* \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{\lambda - \mu^*}\right)$.

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous trouvons

$$\|I(\cdot, t)\| \leq C_1 e^{C_2 t}, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

D'après (2.15) et (2.13), on a

$$\|Q(\cdot, t)\| \leq \|Q_0\| + \frac{\bar{\theta} C_1 e^{C_2 t}}{C_2}, \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

En combinant (2.15), (2.16), (2.11) et le Lemme 2.1, nous déduisons que la solution existe globalement.

Nous nous concentrons maintenant sur (2.8). En rappelant que (S, I, Q) est une solution de (2.2) en remplaçant f par \tilde{f} . D'après le principe de comparaison et le Lemme 2.2, nous avons.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|S(\cdot, t)\| \leq M_0,$$

avec $M_0 = \|\hat{S}\|$. En intégrant les trois équations de (2.2) sur Ω et en additionnant les équations obtenues, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (S + I + Q) dx &= \int_{\Omega} \Lambda dx - \int_{\Omega} \mu S - \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1) I dx - \int_{\Omega} (\mu + \kappa_2) Q dx, \\ &\leq |\Omega| \bar{\Lambda} - \underline{\mu} \int_{\Omega} (S + I + Q) dx, \end{aligned}$$

avec $|\Omega|$ la mesure de Ω . Par conséquent, il existe une constante strictement positive $M_1 = \frac{|\Omega| \bar{\Lambda}}{\underline{\mu}}$, telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|S(\cdot, t)\|_1 + \|I(\cdot, t)\|_1 + \|Q(\cdot, t)\|_1) \leq M_1. \quad (2.17)$$

Ensuite, nous affirons que $I(\cdot, t)$ et $Q(\cdot, t)$ satisfont à l'estimation bornée dans L^{2^k} i.e. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante strictement positive M_{2^k} indépendante des conditions initiales, telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|I(\cdot, t)\|_{2^k}^{2^k} + \|Q(\cdot, t)\|_{2^k}^{2^k}) \leq M_{2^k}. \quad (2.18)$$

Nous prouvons cette affirmation par récurrence. À partir de (2.17), l'assertion (2.18) est vraie pour $k = 0$. Supposons que (2.18) soit vraie pour $k - 1$, c'est-à-dire que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|I(\cdot, t)\|_{2^{k-1}}^{2^{k-1}} + \|Q(\cdot, t)\|_{2^{k-1}}^{2^{k-1}}) \leq M_{2^{k-1}}.$$

En multipliant les deux membres de la deuxième équation de (2.2) par I^{2^k-1}

et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} I^{2^k} dx &\leq -\frac{2^k - 1}{2^{2^k - 2}} d_I \int_{\Omega} |\nabla I^{2^k - 1}|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{f}(\cdot, S, I) I^{2^k - 1} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mu(\cdot) + \kappa_1(\cdot) + \theta(\cdot)) I^{2^k} dx + \int_{\Omega} \gamma Q I^{2^k - 1} dx. \end{aligned}$$

Il est facile de voir

$$\int_{\Omega} \tilde{f}(x, S, I) I^{2^k - 1} dx \leq L_{\tilde{f}} \int_{\Omega} I^{2^k} dx.$$

L'inégalité de Young implique

$$\int_{\Omega} \gamma Q I^{2^k - 1} dx \leq \bar{\gamma} \left(\epsilon_1 \int_{\Omega} Q^{2^k} dx + C_{\epsilon_1} \int_{\Omega} I^{2^k} dx \right),$$

où $\epsilon_1 = \frac{\mu}{4\bar{\gamma}}$, $C_{\epsilon_1} = (\epsilon_1 p)^{-q/p} q^{-1}$ et $1/p + 1/q = 1$. Donc

$$\frac{1}{2^k} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} I^{2^k} dx \leq -D_k \int_{\Omega} |\nabla I^{2^k - 1}|^2 dx + (L_{\tilde{f}} + \bar{\gamma} C_{\epsilon_1}) \int_{\Omega} I^{2^k} dx + \bar{\gamma} \epsilon_1 \int_{\Omega} Q^{2^k} dx. \quad (2.19)$$

Où $D_k = \frac{2^k - 1}{2^{2^k - 2}} d_I$.

En multipliant les deux membres de la 3ème équation de (2.2) par $Q^{2^k - 1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q^{2^k} dx &= \int_{\Omega} \theta(\cdot) Q^{2^k - 1} I dx - \int_{\Omega} (\mu(\cdot) + \kappa_2(\cdot) + \gamma(\cdot)) Q^{2^k} dx \\ &\leq \bar{\theta} \int_{\Omega} Q^{2^k - 1} I dx - \underline{\mu} \int_{\Omega} Q^{2^k} dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, nous avons

$$\int_{\Omega} Q^{2^k - 1} I dx \leq \epsilon_2 \int_{\Omega} Q^{2^k} dx + C_{\epsilon_2} \int_{\Omega} I^{2^k} dx,$$

où $\epsilon_2 = \frac{\mu}{4\bar{\theta}}$, $C_{\epsilon_2} = (\epsilon_2 p)^{-q/p} q^{-1}$ et $1/p + 1/q = 1$.

Alors,

$$\frac{1}{2^k} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q^{2^k} dx \leq -\frac{3}{4} \mu \int_{\Omega} Q^{2^k} dx + \bar{\theta} C_{\epsilon_2} \int_{\Omega} I^{2^k} dx. \quad (2.20)$$

En combinant (2.19) et (2.20), on obtient

$$\frac{1}{2^k} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I^{2^k} + Q^{2^k}) dx \leq -D_k \int_{\Omega} |\nabla I^{2^{k-1}}|^2 dx - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} Q^{2^k} dx + \tilde{C}_k \int_{\Omega} I^{2^k} dx, \quad (2.21)$$

avec $\tilde{C}_k = (L_{\tilde{f}} + \bar{\gamma} C_{\epsilon_1}) + \bar{\theta} C_{\epsilon_2}$. Rappelons l'inégalité d'interpolation : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_{\epsilon} > 0$ telle que

$$\|\xi\|_2^2 \leq \epsilon \|\nabla \xi\|_2^2 + C_{\epsilon} \|\xi\|_1^2.$$

Posons $\epsilon = \frac{D_k}{2\tilde{C}_k}$ et $\xi = I^{2^k}$, alors

$$-D_k \int_{\Omega} |\nabla I^{2^{k-1}}|^2 dx \leq -2\tilde{C}_k \int_{\Omega} I^{2^k} dx + 2\tilde{C}_k C_{\epsilon} \left(\int_{\Omega} I^{2^{k-1}} dx \right)^2.$$

D'où, (2.21) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I^{2^k} + Q^{2^k}) dx &\leq -2\tilde{C}_k \int_{\Omega} I^{2^k} dx - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} Q^{2^k} dx + 2\tilde{C}_k C_{\epsilon} \left(\int_{\Omega} I^{2^{k-1}} dx \right)^2, \\ &\leq -\hat{C}_1 \int_{\Omega} I^{2^k} dx + 2\tilde{C}_k C_{\epsilon} \left(\int_{\Omega} I^{2^{k-1}} dx \right)^2, \end{aligned}$$

où $\hat{C}_1 = \min\{\tilde{C}_k, \frac{\mu}{2}\}$. Par des calculs directs, il s'ensuit que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|I(\cdot, t)\|_{2^k}^{2^k} + \|Q(\cdot, t)\|_{2^k}^{2^k}) \leq M_{2^k}$$

et $M_{2^k} = \sqrt[2^k]{\frac{2\tilde{C}_k C_{\epsilon}}{\hat{C}_1}} M_{2^{k-1}}$. À l'aide de l'injection continue $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, avec $q \geq p \geq 1$, nous avons que, pour tout $p > 1$, il existe une constante strictement positive M_p indépendante de la condition initiale, telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|I(\cdot, t)\|_p^p + \|Q(\cdot, t)\|_p^p) \leq M_p. \quad (2.22)$$

Puis, nous démontrons qu'il existe une constante strictement positive M_{∞} ,

indépendante des conditions initiales, telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|I(\cdot, t)\| \leq M_\infty. \quad (2.21)$$

Nous utilisons des résultats bien connus sur les espaces de puissance fractionnaire pour démontrer cette proposition. À cette fin, nous notons $T_2(t)$ le semi-groupe analytique engendré par A dans $Y = L^p(\Omega)$, où

$$A = d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta), \quad D(A) = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Soit Y^a , pour $0 \leq a \leq 1$, l'espace de puissance fractionnaire muni de la norme de graphe. Choisissons $p > n/2$ et $a \geq n/(2p)$ de sorte que $Y^a \subset \overline{C(\Omega)}$. Il est bien connu qu'il existe une constante $M_a > 0$ telle que

$$\|A^a T_2(t)\| \leq \frac{M_a}{t^a}, \quad \forall t > 0.$$

D'après [2.22](#), il existe $t_\infty > 1$ tel que

$$\|I(\cdot, t)\|_p \leq (M_p + 1)^{1/p}, \quad \|Q(\cdot, t)\|_p \leq (M_p + 1)^{1/p},$$

pour tout $t \geq t_\infty - 1$.

D'après la seconde équation du système [2.2](#), pour tout $t \geq t_\infty - 1$, nous avons

$$I(\cdot, t) = T_2(1)I(t-1) + \int_{t-1}^t T_2(t-s)(\tilde{f}(\cdot, S(\cdot, s), I(\cdot, s)) + \gamma Q(\cdot, s))ds.$$

Il en résulte que pour tout $t \geq t_\infty - 1$,

$$\|A^a I(\cdot, t)\|_p \leq \|A^a T_2(1)I(t-1)\|_p + \int_{t-1}^t \|A^a T_2(t-s)(\tilde{f}(\cdot, S(\cdot, s), I(\cdot, s)) + \gamma Q(\cdot, s))\|_p ds.$$

En utilisant l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\|A^a I(\cdot, t)\|_p \leq M_a \|I(\cdot, t-1)\|_p + (L_{\tilde{f}} + \bar{\gamma}(M_p + 1)^{1/p}) \int_{t-1}^t M_a (t-s)^{-a} ds.$$

Or, nous avons

$$\int_{t-1}^t (t-s)^{-a} ds = \frac{1}{1-a},$$

ce qui implique

$$\|A^a I(\cdot, t)\|_p \leq M_a(M_p + 1)^{1/p} + (L_{\bar{f}} + \bar{\gamma}(M_p + 1)^{1/p}) \frac{M_a}{1 - a}.$$

L'inégalité (2.21) en découle alors par l'inclusion $Y^a \subset \overline{C(\Omega)}$.

Ensuite, nous prouvons qu'il existe une constante strictement positive M , indépendante des conditions initiales, telle que l'inégalité (2.8) soit vérifiée.

Pour cela, nous remarquons que l'équation

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q,$$

et (2.21) donnent

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|Q(\cdot, t)\| \leq \frac{\bar{\theta}M_\infty}{\underline{\mu}}.$$

Ainsi, l'inégalité (2.8) est valable pour $\hat{M} = M_0 + M_\infty + \frac{\bar{\theta}M_\infty}{\underline{\mu}}$. Par conséquent, il existe $T > 0$ tel que

$$|S(x, t)| + |I(x, t)| + |Q(x, t)| \leq 2M, \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega} \text{ and } t > T.$$

Finalement, choisissons une constante strictement positive

$$C \geq \max \left\{ \max_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]} |S(x, t)|, \max_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]} |I(x, t)|, 2M \right\}$$

avec C introduite dans (2.9). En combinant (2.8) et (2.9), on a $\tilde{f}(\cdot, S, I) = f(\cdot, S, I)$. \square

L'objectif du lemme suivant est de prouver la régularité asymptotique du semi-flot $\Phi(t) : \mathbb{X}^+ \rightarrow \mathbb{X}^+$ induit par la solution du problème (2.2). Cela peut être montré en prouvant la condition de contraction κ -contraction, (voir Lemme 1.5).

Lemme 2.4. *Pour tout ensemble borné $B \subset \mathbb{X}^+$ et pour tout $t > 0$, l'ensemble*

suivant est précompact dans $C(\bar{\Omega})$:

$$S := \left\{ \int_0^t e^{-(\mu(\cdot)+\kappa_2(\cdot)+\gamma(\cdot))(t-s)} \theta(\cdot) I(\cdot, s; u_0) ds : u_0 := (S_0, I_0, Q_0) \in B \right\}.$$

Démonstration. Nous affirmons tout d'abord que pour tout $l \in (0, t)$, l'ensemble suivant est précompact dans $C(\bar{\Omega})$:

$$S_l := \left\{ \int_l^t e^{-(\mu(\cdot)+\kappa_2(\cdot)+\gamma(\cdot))(t-s)} \theta(\cdot) I(\cdot, s; u_0) ds : u_0 \in B \right\}.$$

Pour le voir, de manière similaire à la preuve du Lemme [2.3](#), nous choisissons $a > \frac{n}{2p}$ de sorte que les injections $Y_a \subset C_b(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$ soient compactes.

En utilisant la deuxième équation de [\(2.2\)](#), pour tout $\tilde{t} \in [l, t]$, nous avons

$$\|A_a I(\cdot, \tilde{t})\|_p \leq \|A_a T_2(\tilde{t}) I_0\|_p + \int_0^{\tilde{t}} \|A_a T_2(\tilde{t} - s) f(\cdot, S(\cdot, s), I(\cdot, s))\|_p ds.$$

Ainsi, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|A_a I(\cdot, \tilde{t})\|_p \leq \frac{M_a \|I_0\|_p}{l^a} + L_{\tilde{f}} |\bar{\Omega}|^{\frac{1}{p}} M_a \frac{t^{1-a}}{1-a}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{I(\cdot, t; u_0) : u_0 \in B, \tilde{t} \in [l, t]\}$ est borné dans Y_a . Puisque $(\mu(\cdot) + \kappa_2(\cdot) + \gamma(\cdot)) \in C_b(\bar{\Omega})$ et $Y_a \subset C_b(\bar{\Omega})$, il en résulte que S_l est borné dans $C_b(\bar{\Omega})$. Par la compacité de l'injection $C_b(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$, on conclut que S_l est précompact dans $C(\bar{\Omega})$.

Pour prouver que S est précompact dans $C(\bar{\Omega})$, il suffit, d'utiliser le Théorème d'Ascoli-Arzelà, pour démontrer que S est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. Nous pouvons choisir $l > 0$ tel que

$$\int_0^l e^{-(\mu(\cdot)+\kappa_2(\cdot)+\gamma(\cdot))(t-s)} \theta(x) I(x, s; u_0) ds \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega} \text{ et } u_0 \in B.$$

Puisque S_l est précompact dans $C(\bar{\Omega})$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\left| \int_l^t e^{-(\mu(x)+\kappa_2(x)+\gamma(x))(t-s)} \theta(x) I(x, s; u_0) ds - \int_l^t e^{-(\mu(y)+\kappa_2(y)+\gamma(y))(t-s)} \theta(y) I(y, s; u_0) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $u_0 \in B$ et $x, y \in \bar{\Omega}$ avec $|x - y| \leq \varepsilon'$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t e^{-(\mu(x)+\kappa_2(x)+\gamma(x))(t-s)} \theta(x) I(x, s; u_0) ds - \int_0^t e^{-(\mu(y)+\kappa_2(y)+\gamma(y))(t-s)} \theta(y) I(y, s; u_0) ds \right| \\ & \leq \left| \int_0^l e^{-(\mu(x)+\kappa_2(x)+\gamma(x))(t-s)} \theta(x) I(x, s; u_0) ds \right| + \left| \int_0^l e^{-(\mu(y)+\kappa_2(y)+\gamma(y))(t-s)} \theta(y) I(y, s; u_0) ds \right| \\ & \quad + \left| \int_l^t e^{-(\mu(x)+\kappa_2(x)+\gamma(x))(t-s)} \theta(x) I(x, s; u_0) ds - \int_l^t e^{-(\mu(y)+\kappa_2(y)+\gamma(y))(t-s)} \theta(y) I(y, s; u_0) ds \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

pour tout $u_0 \in B$ et $x, y \in \bar{\Omega}$ avec $|x - y| \leq \varepsilon'$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que S est équicontinue. Par conséquent, S est précompact dans $C(\bar{\Omega})$. \square

Lemme 2.5. *Le semi-flot $\Phi(t)$ induit par la solution de (2.2) est une κ -contraction.*

Démonstration. Soit B un ensemble borné de \mathbb{X}^+ , pour tout $(S_0, I_0, Q_0) \in B$ nous posons

$$\Phi(t)(S_0, I_0, Q_0) = \Phi_1(t)(S_0, I_0, Q_0) + \Phi_2(t)(S_0, I_0, Q_0), \quad t \geq 0,$$

où,

$$\Phi_1(t)(S_0, I_0, Q_0) = (S(\cdot, t), I(\cdot, t), \int_0^t \theta(\cdot) T_3(t-s) Ids), \quad t \geq 0,$$

et

$$\Phi_2(t)(S_0, I_0, Q_0) = (0, 0, T_3(t)Q_0(\cdot)), \quad t \geq 0.$$

Rappelons que $T_3(t) := e^{-(\mu(\cdot)+\kappa_2(\cdot)+\gamma(\cdot))t}$. D'après le Théorème d'Ascoli-Arezela nous pouvons démontrer que $\Phi_1(t)B$ est pré-compacte car la solution de S (resp. I) est la somme d'une partie compacte et d'une partie précompacte, et donc $\kappa(\Phi_1(t)B) = 0$. De plus,

$$\kappa(\Phi_2(t)B) \leq e^{-\mu t} \kappa(B).$$

En combinant ces deux résultats ci-dessus, nous obtenons

$$\kappa(\Phi(t)B) \leq e^{-\mu t} \kappa(B).$$

Par conséquent, le semi-flot Φ est une κ -contraction sur \mathbb{X}^+ . \square

Théorème 2.1. $\Phi(t)$ admet un attracteur global compact et connecté sur \mathbb{X}^+ .

Démonstration. D'après Lemme 2.3, il en résulte que $\Phi(t)$ est un point dissipatif. De plus, le Lemme 3.9 et le Lemme 2.31 impliquent que le semi-flot $\Phi(t)$ est un κ -contraction et d'où asymptotiquement régulier. Finalement, d'après la Proposition 1.10, $\Phi(t)$ admet un attracteur global compact connecté qui attire tous les points de \mathbb{X}^+ . \square

2.3 Taux de reproduction de base

Un état stationnaire de (2.2) est la solution du système elliptique suivant

$$\begin{cases} d_S \Delta S + \Lambda(x) - f(x, S, I) - \mu(x)S = 0, & x \in \Omega, \\ d_I \Delta I + f(x, S, I) - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I + \gamma(x)Q = 0, & x \in \Omega, \\ \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.23)$$

avec des conditions aux limites de Neumann homogènes. Selon l'hypothèse (\mathbf{H}_1) , nous déduisons que (2.23) admet un unique équilibre sans maladie $E_0 := \{(\hat{S}, 0, 0)\}$. En linéarisant le système (2.2) autour de E_0 , nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0)I - \mu(x)S, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0)I - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I + \gamma(x)Q, & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q, & t > 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

Soit $T(t)$ le semi-groupe associé à la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0)I - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I + \gamma(x)Q, & t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q, & t > 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.25)$$

Observons que $T(t)$ admet le générateur

$$A = \begin{pmatrix} d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta) + \frac{\partial f}{\partial I}(., \hat{S}, 0) & \gamma \\ \theta & -(\mu + \kappa_2 + \gamma) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

On peut réécrire A comme $A = B + F$ avec

$$B = \begin{pmatrix} d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta) & \gamma \\ \theta & -(\mu + \kappa_2 + \gamma) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

et

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial I}(., \hat{S}, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Notons par $\hat{T}(t)$ le semi-groupe généré par B . D'après [94] la distribution totale des nouvelles infections est donnée par

$$\mathcal{L}\phi(x) = F(x) \int_0^\infty \hat{T}(t)\phi(x)dt, \quad \phi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2),$$

et le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 est défini par

$$\mathcal{R}_0 := r(\mathcal{L}),$$

où $r(\mathcal{L})$ est le rayon spectral de l'opérateur \mathcal{L} . Nous pouvons facilement vérifier que les semi-groupes $T(t)$ et $\hat{T}(t)$ sont strictement positifs. Il résulte du Théorème 1.9 que A et B sont des opérateurs à résolvante positives.

Lemme 2.6. *La borne spectrale de B , $s(B)$ est négative.*

Démonstration. On peut écrire B comme suit,

$$B = \begin{pmatrix} d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta) & \gamma \\ \theta & -(\mu + \kappa_2 + \gamma) \end{pmatrix} = C + D,$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta) & 0 \\ \theta & -(\mu + \kappa_2 + \gamma) \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\tilde{S}(t)$ le semi-groupe associé au système de réaction-diffusion linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I, & t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q, & t > 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.29)$$

D'après le principe du maximum fort nous obtenons que la solution I est strictement positive puis nous déduisons que la solution Q est aussi strictement positive. D'où $\tilde{S}(t)$ est un semi-groupe positif et donc C est un opérateur à résolvante positive. D'autre part, on peut voir que $s(C) < 0$. De plus, B est une perturbation positive de C . Selon le Théorème [1.7](#), la borne spectrale de $s(B)$ a le même signe que $r(-DC^{-1}) - 1$. Maintenant, calculons le rayon spectral de $-DC^{-1}$.

Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$, posons $\psi = -C^{-1}D\phi$ avec $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, alors $-D\phi = C\psi$ et on obtient

$$\begin{cases} -d_I \Delta \psi_1 + (\mu + \kappa_1 + \theta)\psi_1 = \gamma \phi_2, \\ \theta \psi_1 - (\mu + \kappa_2 + \gamma)\psi_2 = 0, \end{cases}$$

ceci conduit à

$$\begin{cases} \psi_1 = (-d_I \Delta + (\mu + \kappa_1 + \theta))^{-1} \gamma \phi_2 := A_1 \phi_2, \\ \psi_2 = \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} ((-d_I \Delta + (\mu + \kappa_1 + \theta))^{-1}) \phi_2 := A_2 \phi_2. \end{cases}$$

Ensuite, on pose $L\phi := -DC^{-1}\phi = (A_1\phi_2, A_2\phi_2)$ pour $\phi \in \mathbb{X}^+$. Par récurrence, on a $L^n\phi = (A_1A_2^{n-1}\phi_2, A_2^n\phi_2)$. Il s'ensuit que

$$\|A_2^n\| \leq \|L^n\| \leq (\|A_2^n\|^2 + \|A_1\|^2 \|A_2^{n-1}\|^2)^{\frac{1}{2}}, \forall n \geq 2$$

d'où,

$$\|A_2^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|A_2^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}} (\|A_2\|^2 + \|A_1\|^2)^{\frac{1}{2n}}.$$

En utilisant la formule du rayon spectral, on obtient $r(-DC^{-1}) := r(L) = r(A_2)$. Cela donne

$$r(-DC^{-1}) = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^2 dx}{\int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^2) dx}.$$

Pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{r(-DC^{-1})} := \inf_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^2) dx}{\int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^2 dx} > 1. \quad (2.30)$$

Premièrement, supposons que l'infimum dans (2.30) soit atteint. Il en résulte qu'il existe $\phi^* \in H^1(\Omega)$ et $\phi^* \neq 0$ tels que

$$\frac{1}{r(-DC^{-1})} = \frac{\int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi^*|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^{*2}) dx}{\int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^{*2} dx}.$$

Évidemment $\frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} < \mu + \kappa_1 + \theta$ ce qui donne

$$\int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^2 dx < \int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^2) dx, \text{ pour tout } \phi \in H^1(\Omega) \text{ et } \phi \neq 0.$$

Donc,

$$\frac{\int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^2) dx}{\int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^2 dx} > 1, \quad \text{pour tout } \phi \in H^1(\Omega) \text{ et } \phi \neq 0, \quad (2.31)$$

En particulier $r(-DC^{-1}) < 1$.

Ensuite on suppose que l'infimum n'est pas atteint. Pour démontrer (2.30) on utilise le raisonnement par l'absurde. Supposons que

$$\frac{1}{r(-DC^{-1})} \leq 1, \quad (2.32)$$

alors il existe une suite $\{\phi_n\}_n$ dans $H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi_n^2 dx = 1, \\ \int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi_n|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi_n^2) dx \rightarrow \frac{1}{r(-DC^{-1})}, \end{cases} \quad (2.33)$$

quand n tend vers l'infini. D'après (2.33) nous obtenons que $\|\phi_n\|_{H^1(\Omega)}$ est uniformément bornée. Par la réflexivité de $H^1(\Omega)$ et l'injection compacte de Rellich- Kondrachov, il existe une sous suite notée par $\{\phi_n\}_n$ et $\phi^* \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \nabla \phi_n \rightharpoonup \nabla \phi^* \text{ in } L^2(\Omega), \text{ faiblement} \\ \phi_n \rightarrow \phi^* \text{ in } L^2(\Omega), \text{ fortement,} \end{cases}$$

quand n tend vers l'infini. Il s'ensuit que,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla \phi^*|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi_n^2 dx = \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^{*2} dx, \\ \int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^{*2} dx = 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

D'où,

$$d_I \int_{\Omega} |\nabla \phi^*|^2 dx + \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^{*2} dx \leq d_I \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla \phi_n|^2 dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi_n^2 dx.$$

Cela, avec (2.32) et (2.33), conduit à

$$d_I \int_{\Omega} |\nabla \phi^*|^2 dx + \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^{*2} dx \leq 1. \quad (2.35)$$

D'autre part, comme $\phi^* \in H^1(\Omega)$, par (2.31) nous avons

$$\int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi^*|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta) \phi^{*2}) dx > \int_{\Omega} \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \phi^{*2} dx. \quad (2.36)$$

En combinant (2.36) avec la 3^{ème} équation de (2.34), nous arrivons à une contradiction avec (2.35). Par conséquent, $r(DC^{-1}) < 1$ et donc $s(B) < 0$. \square

Le lemme suivant donne la relation entre le signe de la borne spectrale du générateur A défini dans (2.26) et le signe de $\mathcal{R}_0 - 1$.

Lemme 2.7.

(i) $(\mathcal{R}_0 - 1)$ a le même signe que $s(A)$.

(ii) \mathcal{R}_0 est défini par

$$\mathcal{R}_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \phi^2 dx}{\int_{\Omega} \left(d_I |\nabla \phi|^2 + (\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}) \phi^2 \right) dx} \quad (2.37)$$

(iii) $(\mathcal{R}_0 - 1)$ et $s(A)$ ont le même signe que η^0 , où η^0 est la valeur propre principale de

$$\begin{cases} d_I \Delta \phi - (\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}) \phi + \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \phi = \eta^0 \phi & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial \Omega, \end{cases} \quad (2.38)$$

Démonstration. (i) Puisque B qui est défini dans (2.27), est un opérateur

à résolvante positive, on a

$$(\lambda I - B)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{T}(t)\phi dt, \quad \forall \lambda > s(B), \quad (2.39)$$

avec $\hat{T}(t)$ est le semi-groupe associé au problème de B . D'après le Lemme [2.6](#), $s(B) < 0$, d'où on peut remplacer $\lambda = 0$ dans [\(2.39\)](#) et donc,

$$-B^{-1}\phi = \int_0^\infty \hat{T}(t)\phi dt, \quad \forall \phi \in \mathbb{X}^+.$$

Il s'en résulte que $\mathcal{L} = -FB^{-1}$ où F est défini dans [\(2.28\)](#). D'autre part, A est une perturbation positive de B et qui est un opérateur à résolvante-positive. En utilisant le Théorème [1.7](#), pour conclure que $(\mathcal{R}_0 - 1)$ a le même signe que $s(A)$.

(ii) Définissons

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + \kappa_1 + \theta) & -\gamma \\ -\theta & (\mu + \kappa_2 + \gamma) \end{pmatrix}$$

et réécrivons F comme

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $F_{12} = 0$, $F_{22} = 0$, d'après [\[94, Théorème 3.3\]](#), on obtient

$$\mathcal{R}_0 = r(-FB^{-1}) = r(-F_1 B_1^{-1}),$$

où

$$B_1 = d_I \Delta - V_{11} + V_{12} V_{22}^{-1} V_{21} = d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta) + \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma},$$

$$F_1 = F_{11} - V_{12} V_{22}^{-1} F_{21} = \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0).$$

il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} (-F_1 B_1^{-1})\phi &= -\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0)(d_I \Delta - (\mu + \kappa_1 + \theta) + \frac{\gamma \theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma})^{-1} \phi, \\ &= \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0)(-d_I \Delta + \mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma})^{-1} \phi. \end{aligned}$$

Finalement, nous concluons que

$$\mathcal{R}_0 = r \left(\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0)(-d_I \Delta + \mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma})^{-1} \right).$$

nous pouvons facilement voir que l'opérateur $\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0)(-d_I \Delta + \mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma})^{-1}$ est fortement positive et compact. Alors, D'après le Théorème Krein- Rutman , \mathcal{R}_0 est une valeur propre simple associée à une fonction propre strictement positive $\hat{\phi}$. Celui-ci satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} d_I \Delta \hat{\phi} - \left(\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x) \frac{\mu(x) + \kappa_2(x)}{\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \hat{\phi} = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.40)$$

Enfin, par une formule variationnelle standard, nous obtenons (2.37).

(iii) Le problème (2.38) admet une valeur propre principale η^0 associée à une fonction propre strictement positive ϕ^* sur Ω , c'est-à-dire

$$\begin{cases} d_I \Delta \phi^* - \left(\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x) \frac{\mu(x) + \kappa_2(x)}{\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)} \right) \phi^* + \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \phi^* = \eta^0 \phi^*, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.41)$$

En multipliant les équations (2.41) et (2.38) par $\hat{\phi}$ et ϕ^* respectivement, et en intégrant par parties sur Ω . En soustrayant les deux équations obtenues, nous obtenons

$$\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \hat{\phi} \phi^* dx = \eta^0 \int_{\Omega} \hat{\phi} \phi^* dx.$$

En raison de la positivité de $\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \hat{\phi} \phi^* dx$ et $\int_{\Omega} \phi \phi^* dx$, les expressions $\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$ et η^0 ont le même signe. □

Dans le lemme suivant, nous allons montrer que la borne spectrale $s(A)$ de A , définie en (2.26), est en réalité une valeur propre principale, à condition que $\mathcal{R}_0 \geq 1$.

Lemme 2.8. *Si $\mathcal{R}_0 \geq 1$, alors la borne spectrale $s(A)$ est une valeur propre principale de A .*

Démonstration. Soit $T(t)$ le semi-groupe associé à (2.25). Alors pour tout $(I_0, Q_0) \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_+^2)$, nous posons $T(t)(I_0, Q_0) = (I(\cdot, t), Q(\cdot, t))$ avec

$$\begin{cases} I(\cdot, t) = T_2(t)I_0(\cdot) + \int_0^t T_2(t-s) \left(\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) I(\cdot, s) + \gamma(\cdot) Q(\cdot, s) \right) ds \\ Q(\cdot, t) = T_3(t)Q_0(\cdot) + \int_0^t T_3(t-s) \theta(\cdot) I(\cdot, s) ds. \end{cases}$$

Réécrivons T comme suit $T(t) = \Psi_2(t) + \Psi_3(t)$ avec,

$$\Psi_2(t)(I_0, Q_0) = \left\{ I(\cdot, t), \int_0^t T_3(t-s) \theta(\cdot) I(\cdot, s) ds \right\}, \quad t \geq 0,$$

et

$$\Psi_3(t)(I_0, Q_0) = \left\{ 0, T_3(t)Q_0 \right\}, \quad t \geq 0. \quad (2.42)$$

De manière analogue à la démonstration du lemme 2.4, on peut observer que

$\Psi_2(t)$ est compact. Nous avons

$$\alpha(T(t)) = \alpha(\Psi_2(t) + \Psi_3(t)) = \alpha(\Psi_3(t)).$$

D'après (2.42) et $T_3(t) = e^{-(\mu(\cdot) + \kappa_2(\cdot) + \gamma(\cdot))t}$, nous obtenons

$$\alpha(\Psi_3(t)) \leq \|\Psi_3(t)\| \leq e^{-\underline{\mu}t}.$$

Par conséquent, en utilisant la définition de la borne de croissance essentielle, nous obtenons

$$\omega_{ess}(T(t)) \leq -\underline{\mu}. \quad (2.43)$$

Comme $r_{ess}(T(t)) = e^{\omega_{ess}t}$ pour tout $t \geq 0$. Alors,

$$r_{ess}(T(t)) \leq e^{-\underline{\mu}t} < 1, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.7, (i), nous avons $s(A) \geq 0$. D'où

$$r(T(t)) \geq e^{s(A)t} \geq 1, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors, $r_{ess}(T(t)) < r(T(t))$ pour tout $t \geq 0$. Selon le Théorème de Krein-Rutman généralisé, la borne spectrale $s(A)$ est la valeur propre principale de A . C'est-à-dire, il existe une fonction propre strictement positive. (ϕ_2, ϕ_3) telle que

$$\begin{cases} d_I \Delta \phi_2 + \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \phi_2 - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x)) \phi_2 + \gamma(x) \phi_3 = s(A) \phi_2, & x \in \Omega, \\ \theta(x) \phi_2 - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)) \phi_3 = s(A) \phi_3, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.44)$$

□

En combinant le Lemme 2.7 avec la définition de la borne exponentielle et du rayon essentiel, nous obtenons

Corollaire 2.1. $(\mathcal{R}_0 - 1)$ et $\omega(T(t))$ ont le même signe.

2.4 L'équilibre sans maladie

Dans cette section, nous étudions la dynamique globale du système (2.2) quand $\mathcal{R}_0 \leq 1$. Tout d'abord, nous prouvons la stabilité asymptotique de l'état stationnaire sans maladie E_0 à travers les théorèmes suivants.

Théorème 2.2. *Supposons que $\mathcal{R}_0 < 1$. L'état d'équilibre sans maladie E_0 est localement asymptotiquement stable sur \mathbb{X}^+ .*

Démonstration. Soit $T_S(t)$ le semi-groupe induit par la solution du problème (2.24). Selon le Corollaire 2.1, $\omega(T(t)) < 0$ lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$. Ensuite, il est évident que la borne spectrale de $d_S\Delta - \mu$ vérifie $s(d_S\Delta - \mu) < 0$. De plus, nous observons que la première équation de (2.24) est découplée des deux dernières équations. Ainsi, $\omega(T_S(t)) < 0$. CQFD . \square

Théorème 2.3. *Si $\mathcal{R}_0 = 1$, alors E_0 est localement asymptotiquement stable sur \mathbb{X}^+ .*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ et $u_0 = (S_0, I_0, Q_0)$ tels que

$$\|u_0 - (\hat{S}(\cdot), 0, 0)\| \leq \delta. \quad (2.45)$$

Notons,

$$H(\cdot, t) = \frac{S(\cdot, t)}{\hat{S}(\cdot)} - 1 \text{ et } b(t) := \max_{x \in \bar{\Omega}} \{H(x, t), 0\}$$

Selon la première équation de (2.2) et en utilisant l'égalité $d_S\Delta\hat{S}(\cdot) + \Lambda(\cdot) - \mu(\cdot)\hat{S}(\cdot) = 0$, nous avons,

$$\frac{\partial H}{\partial t} - d_S\Delta H - 2d_S \frac{\nabla\hat{S} \cdot \nabla H}{\hat{S}} + \frac{\Lambda}{\hat{S}}H = -\frac{f(\cdot, S, I)}{\hat{S}}, \quad (2.46)$$

La résolution de (2.46) donne,

$$H(\cdot, t) = \hat{T}(t)H(\cdot, 0) - \int_0^t \hat{T}(t - \sigma) \frac{f(\cdot, S(\cdot, \sigma), I(\cdot, \sigma))}{\hat{S}(\cdot)} d\sigma, \quad (2.47)$$

où $\hat{T}(t)$ est le semi-groupe positif généré par l'opérateur $d_S \Delta + 2d_S \frac{\nabla \hat{S} \cdot \nabla}{\hat{S}} - \frac{\Lambda}{\hat{S}}$. De plus, il existe des constantes strictement positives α et N telles que $\|\hat{T}(t)\| \leq N e^{-\alpha t}$. Maintenant, il découle de (2.47) que

$$b(t) \leq \max\{\hat{T}(t)H(\cdot, 0), 0\} \leq \|\hat{T}(t)H(\cdot, 0)\| \leq N e^{-\alpha t} \left\| \frac{S_0}{\hat{S}} - 1 \right\| \leq N \delta \frac{e^{-\alpha t}}{\hat{S}}, \quad (2.48)$$

où $\hat{S} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \hat{S}(x)$.

Soit $T(t)$ le semi-groupe induit par la solution de (2.25). Alors, la paire (I, Q) solution de (2.2) peut être réécrite comme

$$\begin{pmatrix} I(\cdot, t) \\ Q(\cdot, t) \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} I_0(\cdot) \\ Q_0(\cdot) \end{pmatrix} + \int_0^t T(t-\sigma) \begin{pmatrix} f(\cdot, S(\cdot, \sigma), I(\cdot, \sigma)) - \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}(\cdot), 0)I(\cdot, \sigma) \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma.$$

D'après (\mathbf{H}_1) (f est concave par rapport à I) nous avons,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I(\cdot, t) \\ Q(\cdot, t) \end{pmatrix} &\leq T(t) \begin{pmatrix} I_0(\cdot) \\ Q_0(\cdot) \end{pmatrix} + \int_0^t T(t-\sigma) \begin{pmatrix} \left(f(\cdot, S(\cdot, \sigma), I(\cdot, \sigma)) - f(\cdot, \hat{S}(\cdot), I(\cdot, \sigma)) \right) \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma, \\ &\leq T(t) \begin{pmatrix} I_0(\cdot) \\ Q_0(\cdot) \end{pmatrix} + \int_0^t T(t-\sigma) \begin{pmatrix} \hat{S}(\cdot) \left(\frac{S(\cdot, \sigma)}{\hat{S}(\cdot)} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial S}(\cdot, \theta(\cdot, \sigma), I(\cdot, \sigma)) \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma, \end{aligned} \quad (2.49)$$

avec θ est entre S et \hat{S} . En combinant le fait que $\mathcal{R}_0 = 1$, le lemme 2.7 (i) et la corollaire 2.1, nous avons $\omega(T) = s(A) = 0$ et donc $\|T(t)\| \leq N^*$, $\forall t \geq 0$.

D'après (2.48)-(2.49) et le fait que $\|I_0\| + \|Q_0\| \leq \delta$, nous avons,

$$\begin{aligned} \max\{\|I(\cdot, t)\|, \|Q(\cdot, t)\|\} &\leq N^* \delta + N^* \|\hat{S}(\cdot)\| \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial I} \right\| \int_0^t b(s) \|I(\cdot, s)\| ds, \\ &\leq N^* \delta + N^* \|\hat{S}(\cdot)\| \frac{N \delta}{\hat{S}} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial I} \right\| \int_0^t e^{-\alpha s} \|I(\cdot, s)\| ds, \\ &= N^* \delta + \hat{N} \delta \int_0^t e^{-\alpha s} \|I(\cdot, s)\| ds, \end{aligned} \quad (2.50)$$

où $\hat{N} = N^* \|\hat{S}(\cdot)\| \frac{N}{\hat{S}} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial I} \right\|$. L'inégalité de Gronwall implique

$$\|I(\cdot, t)\| \leq N^* \delta e^{\frac{\hat{N}\delta}{\alpha}}. \quad (2.51)$$

Par (2.50) et (2.51), nous obtenons

$$\|Q(\cdot, t)\| \leq N^* \delta + \hat{N} \delta N^* \delta e^{\frac{\hat{N}\delta}{\alpha}} \int_0^t e^{-\alpha s} ds \leq N^* \delta \left(1 + \hat{N} \delta \frac{e^{\frac{\hat{N}\delta}{\alpha}}}{\alpha} \right). \quad (2.52)$$

Comme f est concave par rapport à I , il s'ensuit que

$$f(\cdot, S, I) \leq I \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, S, 0),$$

et d'après l'équation de S de (2.2), à partir de (2.3) et (2.51), nous obtenons

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq d_S \Delta S + \Lambda(\cdot) - \mu(\cdot) S - N^* \delta e^{\frac{\hat{N}\delta}{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, S, 0).$$

Notons par \hat{u} la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = d_S \Delta \hat{u} + \Lambda(x) - \mu(x) \hat{u} - N^* \delta e^{\frac{\hat{N}\delta}{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{u}, 0), & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}(x, t) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \hat{u}(x, 0) = S_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.53)$$

D'après le principe de comparaison, nous avons $S(x, t) \geq \hat{u}(x, t)$ pour $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty)$. Posons $\tilde{S}(\cdot, t) = \hat{u}(\cdot, t) - \hat{S}_\delta$ où \hat{S}_δ est l'unique équilibre strictement positif de (2.53). La fonction \tilde{S} est la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_S \Delta \tilde{S} - \mu(x) \tilde{S} - N^* \delta e^{\frac{\hat{N}\delta}{\alpha}} \frac{\partial^2 f}{\partial I \partial S}(x, \hat{u}_1(x, t), 0) \tilde{S}, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta}(x, t) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \tilde{S}(x, 0) = S_0(x) - \hat{S}_\delta(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.54)$$

où \hat{u}_1 est une valeur entre \hat{u} et \hat{S}_δ . La résolution de (2.54) donne,

$$\tilde{S}(\cdot, t) = T_1(t)(S_0(\cdot) - \hat{S}_\delta(\cdot)) - \int_0^t T_1(t-\sigma) N^* \delta e^{\frac{N\delta}{\alpha}} \frac{\partial^2 f}{\partial I \partial S}(\cdot, \hat{u}_1(\cdot, \sigma), 0) \tilde{S}(\cdot, \sigma) d\sigma,$$

avec T_1 est le semi-groupe généré par $d_S \Delta - \mu$ associé à la condition de Neumann. Remarquons que $\|T_1(t)\| \leq \tilde{M} e^{-\mu t}$ pour tout $t > 0$ et pour un certain $\tilde{M} > 0$. Ainsi, nous obtenons,

$$\|\tilde{S}(\cdot, t)\| \leq \tilde{M} e^{-\mu t} \|S_0(\cdot) - \hat{S}_\delta(\cdot)\| + N^* \delta e^{\frac{N\delta}{\alpha}} \tilde{M} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial I \partial S} \right\| \int_0^t e^{-\mu(t-\sigma)} \|\tilde{S}(\cdot, \sigma)\| d\sigma,$$

En appliquant l'inégalité de Grönwall, nous obtenons

$$\|\tilde{S}(\cdot, t)\| := \|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{S}_\delta(\cdot)\| \leq \tilde{M} \|S_0(\cdot) - \hat{S}_\delta(\cdot)\| e^{(K-\mu)t},$$

avec $K = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial I \partial S} \right\| N^* \delta e^{\frac{N\delta}{\alpha}} \tilde{M}$. Choisissons un $\delta > 0$ très petit de telle sorte $K < \mu/2$, nous trouvons,

$$\|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{S}_\delta(\cdot)\| \leq \tilde{M} \|S_0(\cdot) - \hat{S}_\delta(\cdot)\| e^{-\frac{\mu}{2}t}.$$

Maintenant, rappelons que l'équilibre trivial $E_0 := (\hat{S}, 0, 0)$ satisfait (2.45), il s'ensuit que $\|S_0 - \hat{S}\| \leq \delta$ et donc

$$\begin{aligned} S(\cdot, t) - \hat{S}(\cdot) &\geq \hat{u}(\cdot, t) - \hat{S}(\cdot) = \hat{u}(\cdot, t) - \hat{S}_\delta(\cdot) + \hat{S}_\delta(\cdot) - \hat{S}(\cdot), \\ &\geq -\tilde{M} \|S_0 - \hat{S}_\delta(\cdot)\| e^{-\frac{\mu}{2}t} + \hat{S}_\delta(\cdot) - \hat{S}(\cdot), \\ &\geq -\tilde{M} (\|S_0(\cdot) - \hat{S}(\cdot)\| + \|\hat{S}(\cdot) - \hat{S}_\delta(\cdot)\|) - \|\hat{S}_\delta(\cdot) - \hat{S}(\cdot)\|, \end{aligned}$$

d'où,

$$S(\cdot, t) - \hat{S}(\cdot) \geq -\tilde{M}\delta - (\tilde{M} + 1) \|\hat{S}_\delta(\cdot) - \hat{S}(\cdot)\|. \quad (2.55)$$

D'autre part, (2.48) donne

$$S(\cdot, t) - \hat{S}(\cdot) \leq \frac{N\delta \|\hat{S}(\cdot)\|}{\underline{\hat{S}}}. \quad (2.56)$$

D'après (2.55) et (2.56), nous avons

$$\|S(\cdot, t) - \hat{S}(\cdot)\| \leq \max \left\{ \tilde{M}\delta + (\tilde{M} + 1)\|\hat{S}_\delta(\cdot) - \hat{S}(\cdot)\|, \frac{N\delta\|\hat{S}(\cdot)\|}{\underline{\hat{S}}} \right\}.$$

Ceci avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{S}_\delta(\cdot) = \hat{S}(\cdot)$ et (2.51)-(2.52), donne

$$(\|S(\cdot, t) - \hat{S}(\cdot)\|, \|I(\cdot, t)\|, \|Q(\cdot, t)\|) \leq \delta.$$

Par conséquent, E_0 est localement asymptotiquement stable sur \mathbb{X}^+ . \square

Théorème 2.4. *Supposons que $\mathcal{R}_0 \leq 1$. L'équilibre sans maladie E_0 de (2.2) est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{X}^+ .*

Démonstration. Nous définissons d'abord un sous-ensemble

$$D = \{(S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+, S_0(x) \leq \hat{S}(x), \text{ pour tout } x \in \Omega\},$$

où \hat{S} est l'état stationnaire strictement positif de (2.6). Nous commençons par montrer que pour toute condition initiale $(S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+$, nous avons $\omega(S_0, I_0, Q_0) \subseteq D$, où $\omega(S_0, I_0, Q_0)$ est l'ensemble des ω -limites de (S_0, I_0, Q_0) .

En utilisant le principe de comparaison standard, nous obtenons $S(x, t) \leq \tilde{S}(x, t)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $t \geq 0$, où \tilde{S} satisfait le problème (2.6). De plus, en utilisant la même idée que ci-dessus, nous prouvons que, si $S(x, t_0) \leq \hat{S}(x)$ pour un certain $t_0 \geq 0$, nous avons $S(x, t) \leq \tilde{S}(x, t) \leq \hat{S}(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $t \geq t_0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $t_0 = 0$. Cela implique que D est invariant.

Supposons que $S(x, t) > \hat{S}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \geq 0$. Ainsi, de manière similaire à ce qui précède, nous obtenons

$$\hat{S}(x) < S(x, t) \leq \tilde{S}(x, t) \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et } t \geq 0.$$

Selon le Lemme 2.2, nous avons $S(x, t) \rightarrow \hat{S}(x)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ pour tout $x \in \Omega$. Cela montre que $\omega(S_0, I_0, Q_0) \subseteq D$. De plus, si l'état sans infection

E_0 attire tous les profils initiaux dans D , alors $\omega(S_0, I_0, Q_0) \cap W^s(E_0) \neq \emptyset$, où $W^s(E_0)$ désigne la variété stable de E_0 . Par conséquent, nous pouvons appliquer le Lemme [1.6](#) et le Théorème [1.20](#) pour montrer que $\omega(S_0, I_0, Q_0) \subseteq E_0$ et ainsi E_0 est globalement attractif dans \mathbb{X}^+ . Nous nous concentrons sur la démonstration que l'équilibre sans la maladie E_0 est globalement attractif restreint au domaine invariant D .

Nous considérons le semi-flot Φ induit par [\(2.2\)](#) restreint au domaine invariant D et montrons que E_0 attire toutes les solutions dont les données initiales appartiennent à D . Pour cela, nous définissons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(I^2(x, t) + \frac{\gamma(x)}{\theta(x)} Q^2(x, t) \right) dx.$$

En prenant la dérivée le long de la solution de [\(2.2\)](#), nous obtenons

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\Omega} \left(I[d_I \Delta I + f(\cdot, S, I) - (\mu + \kappa_1 + \theta)I + \gamma Q] + \frac{\gamma}{\theta} Q[\theta I - (\mu + \kappa_2 + \gamma)Q] \right) dx.$$

Selon l'hypothèse (\mathbf{H}_1) et le fait que $S \leq \hat{S}$ nous avons,

$$f(\cdot, S, I) \leq \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0)I.$$

Ceci mène à,

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &\leq \int_{\Omega} \left(-d_I |\nabla I|^2 + \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) I^2 \right. \\
&\quad \left. - (\mu + \kappa_1 + \theta) I^2 + 2\gamma Q I - \frac{\gamma(\mu + \kappa_2 + \gamma)}{\theta} Q^2 \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(-d_I |\nabla I|^2 + \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) I^2 \right. \\
&\quad \left. - (\mu + \kappa_1 + \theta) I^2 \right) dx - \gamma \int_{\Omega} \left(\left(\sqrt{\frac{\mu + \kappa_2 + \gamma}{\theta}} Q - \sqrt{\frac{\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma}} I \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} I^2 \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(-d_I |\nabla I|^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) - \left(\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_1}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \right) \right) I^2 \right. \\
&\quad \left. - \gamma \left(\sqrt{\frac{\mu + \kappa_2 + \gamma}{\theta}} Q - \sqrt{\frac{\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma}} I \right)^2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Puisque $\mathcal{R}_0 \leq 1$, nous avons

$$\int_{\Omega} \left(-d_I |\nabla \phi|^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) - \left(\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_1}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \right) \right) \phi^2 \right) dx \leq 0,$$

pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$ et $\phi \neq 0$.

Par conséquent, $\frac{dV}{dt} \leq 0$. De plus, soit M le plus grand ensemble invariant de D pour lequel $\frac{dV}{dt} = 0$. Nous affirmons que $M = E_0 := \{(\hat{S}, 0, 0)\}$. En effet, pour $\mathcal{R}_0 < 1$ et à partir de (2.57), nous obtenons facilement $(I, Q) = (0, 0)$. De plus, en utilisant la première équation de (2.2), nous obtenons $S = \hat{S}$. Pour $\mathcal{R}_0 = 1$, l'expression (2.57) donne $Q = \frac{\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} I$. En remplaçant ce résultat dans la deuxième équation de (2.2), nous obtenons que $I \leq \bar{I}$ où \bar{I}

satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} = d_I \Delta \bar{I} + \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \bar{I} - \left(\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x) \frac{\mu(x) + \kappa_2(x)}{\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)} \right) \bar{I}, \\ \qquad \qquad \qquad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.58)$$

En multipliant la première équation de (2.58) par \bar{I} et en intégrant sur Ω nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{I}^2(x, t) dx &= \int_{\Omega} \left[-d_I |\nabla \bar{I}|^2 + \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \bar{I}^2 - \left(\mu(x) + \kappa_1(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(x) \frac{\mu(x) + \kappa_2(x)}{\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)} \right) \bar{I}^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (2.59)$$

En utilisant le fait que $\mathcal{R}_0 = 1$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{I}^2(x, t) dx \leq 0. \quad (2.60)$$

Enfin, si l'on prend deux solutions de (2.58) avec la même condition initiale, on obtient $\bar{I} = 0$ par (2.60). Ainsi, la seule solution de (2.58) appartenant à l'ensemble invariant M est $\bar{I} = 0$. Par conséquent, $I = 0$. En raisonnant de manière similaire à celle pour $\mathcal{R}_0 < 1$, on obtient que $M = E_0$. Par le principe d'invariance de LaSalle, E_0 est globalement attractif dans D . En combinant ce résultat avec les Théorèmes 2.2 et 2.3, nous déduisons que E_0 est globalement asymptotiquement stable pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$. \square

2.5 La persistance uniforme de l'état endémique

Dans cette section, nous prouvons principalement la persistance uniforme des solutions de (2.2).

Pour prouver le théorème de persistance uniforme, nous devons définir

$$\mathbb{X}_0 = \{u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+ : I_0 \neq 0 \text{ et } Q_0 \neq 0\},$$

$$\partial\mathbb{X}_0 := \mathbb{X}^+ \setminus \mathbb{X}_0 = \{u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+ : I_0 \equiv 0 \text{ ou } Q_0 \equiv 0\}.$$

il est évident que $\mathbb{X}^+ = \mathbb{X}_0 \cup \partial\mathbb{X}_0$, $\mathbb{X}_0 \cap \partial\mathbb{X}_0 = \emptyset$ et \mathbb{X}_0 est un ensemble ouvert.

Théorème 2.5. *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$, alors pour toute condition initiale $u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}_0$, il existe $\delta > 0$ tel que la solution $u = (S, I, Q)$ de (2.2) satisfaisant*

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} S(., t), \liminf_{t \rightarrow \infty} I(., t), \liminf_{t \rightarrow \infty} Q(., t) \right\} \geq \delta, \quad \text{uniformément sur } \bar{\Omega}. \quad (2.61)$$

De plus, (2.2) admet au moins un équilibre strictement positif.

Démonstration. Pour prouver la persistance uniforme des solutions de (2.2), nous devons vérifier toutes les conditions de Théorème 1.28.

Nous montrons d'abord que

$\Phi(t)\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}_0$ pour tout $t \geq 0$. Soit $u_0 \in \mathbb{X}_0$, alors $I_0 \not\equiv 0$ et $Q_0 \not\equiv 0$. Pour tout $I_0 \not\equiv 0$, l'équation de I dans (2.2) est satisfaite,

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} \geq d_I \Delta I - (\mu + \kappa_1 + \theta)I, \\ I(., 0) = I_0, \end{cases}$$

avec des conditions aux limites de Neumann. D'après le principe du maximum et $I_0 \not\equiv 0$, on a $I(x, t) > 0$. Ensuite, pour tout $Q_0 \not\equiv 0$ il en résulte de l'équation de Q du problème (2.2) que

$$Q(., t) = e^{-(\mu + \kappa_2 + \gamma)t} Q_0 + \int_0^t e^{-(\mu + \kappa_2 + \gamma)(t-s)} \theta I(., s) ds \quad (2.62)$$

ceci implique $Q(x, t) \not\equiv 0$ quel que soit $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$.

Soit $\omega(u_0)$ l'ensemble ω -limite de u_0 . Nous affirmons que $\omega(u_0) = \{E_0\}$ pour tout $u_0 \in M_\partial := \{u_0 \in \partial\mathbb{X}_0 : \Phi(t)u_0 \in \partial\mathbb{X}_0, \forall t \geq 0\}$.

Pour $u_0 \in M_\partial$, nous avons soit $I(., t) \equiv 0$ ou $Q(., t) \equiv 0$ pour tout $t \geq 0$. Si

la première est vraie, le Lemme 2.2 et (2.62) affirment que $S(., t) \rightarrow \hat{S}(.)$ et $Q(., t) \rightarrow 0$ quand t tend vers l'infini, uniformément sur $\bar{\Omega}$. Pour $Q(., t) \equiv 0$ pour tout $t \geq 0$, encore une fois, le résultat est obtenu à partir de (2.62) et le lemme 2.2. Par conséquent, l'ensemble ω -limite de u_0 est le singleton E_0 .

Soit $u_0 = (S_0, I_0, Q_0) \in \mathbb{X}^+$ et définissons $\rho : \mathbb{X}^+ \rightarrow [0, \infty)$ comme

$$\rho(u_0) = \min \left\{ \min_{x \in \bar{\Omega}} I_0(x), \min_{x \in \bar{\Omega}} Q_0(x) \right\}.$$

Notons que $\rho(\Phi(t)u_0) > 0$ pour tout $u_0 \in \rho^{-1}(0, \infty) \cup (\mathbb{X}_0 \cap \rho^{-1}(0))$. Donc ρ est une fonction de distance généralisée pour le semi-flot $\Phi(t)$.

Nous affirmons que $W^s(E_0) \cap \rho^{-1}(0, \infty) = \emptyset$, où $W^s(E_0)$ est la variété stable de E_0 .

En effet, nous devons montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)u_0 - E_0\| \geq \eta \quad \text{pour tout } u_0 \in \rho^{-1}(0, \infty).$$

Supposons par l'absurde que pour tout $\eta > 0$ il existe $u_0 \in \rho^{-1}(0, \infty)$ tel que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)u_0 - E_0\| < \eta$. Soit $(S(t, .), I(t, .), Q(t, .))$ la solution correspondante. Alors, il existe $t_1 > 0$ tel que

$$S(., t) > \hat{S}(.) - \eta, \quad I(., t) < \eta \quad \text{et} \quad Q(., t) < \eta \quad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Selon (\mathbf{H}_1) , quel que soient $x \in \Omega$ et $S > 0$ la fonction $f(x, S, .)$ est concave. Ceci implique que la fonction $\frac{f(x, S, I)}{I}$ est décroissante respectivement à I pour tout $x \in \Omega$ et $S > 0$. Donc,

$$f(., ., I) \geq \frac{f(., ., \eta)}{\eta} I \quad \text{pour tout } I < \eta.$$

Maintenant, pour $t > t_1$ les équations (I, Q) de (2.2) vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} \geq d_I \Delta I + \frac{f(x, \hat{S} - \eta, \eta)}{\eta} I - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))I + \gamma(x)Q, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} \geq \theta(x)I - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))Q, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Donc (I, Q) est une sur-solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial t} = d_I \Delta w_2 + \frac{f(x, \hat{S} - \eta, \eta)}{\eta} w_2 - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))w_2 + \gamma(x)w_3, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} = \theta(x)w_2 - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))w_3, & x \in \Omega, \end{cases}$$

avec des condition de Neumann. Notons par λ_η la valeur principale de

$$\begin{cases} \lambda \phi_2 = d_I \Delta \phi_2 + \frac{f(x, \hat{S} - \eta, \eta)}{\eta} \phi_2 - (\mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x))\phi_2 + \gamma(x)\phi_3, & x \in \Omega, \\ \lambda \phi_3 = \theta(x)\phi_2 - (\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x))\phi_3, & x \in \Omega, \end{cases}$$

avec une fonction propre strictement positive $(\phi_2^\eta, \phi_3^\eta)$, dont l'existence peut être prouvée en raisonnant de manière similaire à la démonstration du Lemme 2.8. Vu la continuité de λ_η par rapport à η , nous pouvons voir que λ_η tend vers $s(A)$ (défini dans (2.44)) lorsque η tend vers 0. Ainsi, en utilisant le fait que $\mathcal{R}_0 > 1$ et d'après le Lemme 2.7, (i), la valeur spectrale $s(A)$ est strictement positive et donc, nous pouvons choisir $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $\lambda_\eta > 0$. Ensuite, en considérant la positivité des solutions de (2.2), nous pouvons supposer que $(I(\cdot, t_1), Q(\cdot, t_1)) \geq \xi(\phi_2^\eta, \phi_3^\eta)$ pour un certain $\xi > 0$ et, par le principe de comparaison, nous avons

$$(I(\cdot, t), Q(\cdot, t)) \geq (\xi \phi_2^\eta e^{\lambda_\eta(t-t_1)}, \xi \phi_3^\eta e^{\lambda_\eta(t-t_1)}), \quad \forall t \geq t_1.$$

Ce résultat conduit à une contradiction lorsque $t \rightarrow \infty$ et à la bornitude de I et Q .

En combinant ce résultat avec le Théorème [1.28](#), nous obtenons

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} I(\cdot, t), \liminf_{t \rightarrow \infty} Q(\cdot, t) \right\} \geq \eta.$$

De plus, selon l'hypothèse (\mathbf{H}_1) et le fait que S, I sont bornées, nous avons $|f(\cdot, S, I)| \leq L|S|$, il en résulte

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq d_S \Delta S + \underline{\Lambda} - (\bar{\mu} + L)S.$$

Alors, il existe une constante η_1 telle que $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t) \geq \eta_1$. L'assertion [\(2.61\)](#) est vérifiée $\delta = \min\{\eta, \eta_1\}$.

Pour l'existence d'un état stationnaire endémique, nous appliquons le Théorème [1.29](#). En effet, les Lemme [2.3](#) et [3.9](#) impliquent que $\Phi(t)$ est un point dissipatif et un κ -contraction. De plus, M_∂ est un ensemble convexe, par conséquent toutes les conditions du Théorème [1.28](#) sont vérifiées, et nous obtenons ainsi l'existence d'un état stationnaire endémique noté par $E^* = (S^*(x), I^*(x), Q^*(x))$. \square

2.6 Stabilité globale de l'état endémique stationnaire

Comme l'étude de la stabilité de l'état d'équilibre endémique pour un modèle avec deux taux de diffusion est un problème ouvert. Nous proposons, dans cette section, d'étudier la stabilité dans le cas homogène et dans le cas hétérogène avec un seul taux de diffusion.

2.6.1 Cas homogène

Dans cette sous-section, nous montrons la stabilité asymptotique globale de l'état endémique stationnaire E^* pour [\(2.2\)](#) dans le cas homogène, où E^*

satisfait

$$\begin{cases} \Lambda - f(S, I) - \mu S = 0, \\ f(S, I) - (\mu + \kappa_1 + \theta)I + \gamma Q = 0, \\ \theta I - (\mu + \kappa_2 + \gamma)Q = 0. \end{cases} \quad (2.63)$$

Donc le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 devient

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial I}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)(\mu + \kappa_2 + \gamma)}{(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta}.$$

Théorème 2.6. *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$, alors (2.63) admet un unique équilibre endémique E^* .*

Démonstration. D'après la 3^{ème} équation de (2.63), nous avons $Q = \frac{\theta I}{\mu + \kappa_2 + \gamma}$.

En additionnant les deux premières équations de (2.63), nous obtenons que

$$S = \frac{\Lambda(\mu + \kappa_2 + \gamma) - ((\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta)I}{\mu(\mu + \kappa_2 + \gamma)}.$$

De plus $S > 0$ quand $I \in \left[0, \frac{\Lambda(\mu + \kappa_2 + \gamma)}{(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta}\right]$.

En substituant S et Q dans l'équation de I de (2.63), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Sigma(I) &:= f\left(\frac{\Lambda(\mu + \kappa_2 + \gamma) - [(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta]I}{\mu(\mu + \kappa_2 + \gamma)}, I\right) \\ &- (\mu + \kappa_1 + \theta)I + \frac{\gamma\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma}I = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Évidemment, $\Sigma(0) = 0$ et $\Sigma\left(\frac{\Lambda(\mu + \kappa_2 + \gamma)}{(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta}\right) = -\Lambda < 0$. De plus,

$$\Sigma'(0) = \left(\frac{(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma}\right)(\mathcal{R}_0 - 1).$$

Donc, lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, $\Sigma(I)$ est strictement positif pour des valeurs suffisamment petites pour I . Alors il existe au moins un $I^* > 0$. Maintenant, pour

démontrer l'unicité de I^* , il suffit de prouver que $\Sigma'(I^*) < 0$. Ainsi, par des calculs simples, nous avons

$$\begin{aligned}\Sigma'(I^*) &= -\frac{(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta}{\mu(\mu + \kappa_2 + \gamma)} \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) - \frac{f(S^*, I^*)}{I^*}, \\ &= -\frac{(\mu + \kappa_1 + \theta)(\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta}{\mu(\mu + \kappa_2 + \gamma)} \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + \frac{1}{I^*} (I^* \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) - f(S^*, I^*)).\end{aligned}$$

Par (\mathbf{H}_1) , on peut voir que $\Sigma'(I^*) < 0$. De plus, $\Sigma(\cdot)$ est strictement décroissante dans le voisinage de I^* . Enfin, la continuité de Σ implique l'unicité de l'état endémique stationnaire E^* . \square

Maintenant, nous pouvons montrer la stabilité locale de l'équilibre strictement positif du système.

Théorème 2.7. *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$ et $\frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \geq 0$. Alors E^* est localement asymptotiquement stable dans \mathbb{X}_0 .*

Démonstration. Le système linéarisé de (2.2) à E^* est

$$\frac{dU}{dt} = D\Delta U + J(E^*)U, \quad (2.65)$$

où $D = \text{diag}(d_S, d_I, 0)$ et,

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) & -\frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) & \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) - (\mu + \kappa_1 + \theta) & \gamma \\ 0 & \theta & -(\mu + \kappa_2 + \gamma) \end{pmatrix}.$$

comme dans [89], soient $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ les valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec une condition au bord de Neumann et $E(\lambda_i)$ l'espace des fonctions propres associées à λ_i , où $(i = 1, 2, \dots)$. Soit $\{\phi_{ij} | j = 1, 2, \dots, \dim(E(\lambda_i))\}$ la base orthogonale de $E(\lambda_i)$ et $X_{ij} = \{c\phi_{ij}, c \in \mathbb{R}^3\}$. L'équation caractéristique de (2.65) est formulée comme suit

$$P(\mu_*) = \mu_*^3 + a_3\mu_*^2 + a_2\mu_* + a_1 = 0,$$

où,

$$\begin{aligned}
a_3 &:= \lambda_i d_S + \mu + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + \lambda_i d_I + \mu + \kappa_1 + \theta - \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) + \mu + \kappa_2 + \gamma, \\
a_2 &:= \left(\lambda_i d_I + \mu + \kappa_1 + \theta - \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \right) (\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*), \\
&\quad + \left(\lambda_i d_S + \mu + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) \right) \times \left(\lambda_i d_I + \mu + \kappa_1 + \theta - \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) + \mu + \kappa_2 + \gamma \right) \\
a_1 &:= \left(\lambda_i d_S + \mu + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) \right) \\
&\quad \times \left[\left(\left(\lambda_i d_I + \mu + \kappa_1 + \theta - \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \right) (\mu + \kappa_2 + \gamma) - \gamma\theta \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) (\mu + \kappa_2 + \gamma).
\end{aligned}$$

En utilisant la concavité de f par rapport à I énoncée dans (\mathbf{H}_1) , nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \leq \frac{f(S^*, I^*)}{I^*} = (\mu + \kappa_1 + \theta) - \frac{\gamma\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma}.$$

ceci donne $\mu + \kappa_1 + \theta - \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \geq \frac{\gamma\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} > 0$. Donc, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_3 > 0$. De plus, il est facile de voir que $a_3 a_2 - a_1 > 0$. En appliquant le critère de Routh-Hurwitz, nous déduisons que E^* est localement asymptotiquement stable. \square

Pour prouver l'attractivité globale de l'état stationnaire strictement positif, nous devons ajouter l'hypothèse suivante

$$\left(\frac{I}{I^*} - \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)} \right) \left(\frac{f(S, I^*)}{f(S, I)} - 1 \right) \leq 0, \quad \text{pour tout } S > 0. \quad (2.66)$$

Remarque 2.1. L'hypothèse (2.66) est valable si f est une fonction concave croissante par rapport à I .

Théorème 2.8. Supposons que (2.66) est vérifiée. Supposons aussi que $\mathcal{R}_0 > 1$ et $\frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) \geq 0$. Alors, l'état endémique E^* est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{X}_0 .

Démonstration. Pour $y > 0$, posons $h(y) = y - 1 - \log y$. Notons que

$h(y) \geq 0$ et $h(1) = 0$. Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$W(t) = \int_{\Omega} (W_1(x, t) + W_2(x, t) + W_3(x, t)) dx,$$

où,

$$W_1(x, t) = S(x, t) - S^* - \int_{S^*}^{S(x, t)} \frac{f(S^*, I^*)}{f(z, I^*)} dz,$$

$$W_2(x, t) = I^* h\left(\frac{I(x, t)}{I^*}\right),$$

$$W_3(x, t) = \frac{\gamma Q^*}{\mu + \gamma + \kappa_2} h\left(\frac{Q(x, t)}{Q^*}\right).$$

En prenant la dérivée de $W_1(\cdot, t)$ le long de la solution de (2.2), et en utilisant le fait que l'état stationnaire satisfait

$$\Lambda = f(S^*, I^*) + \mu S^*,$$

nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(\cdot, t)}{\partial t} &= \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \left(d_S \Delta S + \Lambda - \mu S - f(S, I)\right) \\ &= \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) d_S \Delta S + \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \\ &\quad + f(S^*, I^*) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) - f(S, I) + f(S, I) \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ensuite, puisque

$$f(S^*, I^*) + \gamma Q^* = (\mu + \kappa_1 + \theta) I^*,$$

la dérivée de $W_2(., t)$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2(., t)}{\partial t} &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (d_I \Delta I + f(S, I) - (\mu + \kappa_1 + \theta)I + \gamma Q) \\
&= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) d_I \Delta I + f(S, I) - f(S, I) \frac{I^*}{I} - (\mu + \theta + \kappa_1)I + \gamma Q \\
&\quad + (\mu + \theta + \kappa_1)I^* - \gamma Q \frac{I^*}{I} \\
&= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) d_I \Delta I + f(S, I) - f(S, I) \frac{I^*}{I} - f(S^*, I^*) \frac{I}{I^*} - \gamma Q^* \frac{I}{I^*} + \gamma Q \\
&\quad + f(S^*, I^*) + \gamma Q^* - \gamma Q \frac{I^*}{I}.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous calculons la dérivée de $W_3(., t)$. En utilisant le fait que

$$\theta I^* = (\mu + \kappa_2 + \gamma)Q^*,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_3(., t)}{\partial t} &= \frac{\gamma}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \left(1 - \frac{Q^*}{Q}\right) (\theta I - (\mu + \kappa_2 + \gamma)Q) \\
&= \frac{\gamma}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \left(\theta I - \frac{\gamma Q^* \theta I}{Q}\right) - \gamma Q \\
&= \frac{\gamma \theta I}{\mu + \kappa_2 + \gamma} - \frac{\gamma \theta I Q^*}{(\mu + \kappa_2 + \gamma)Q} - \gamma Q \\
&= \gamma \frac{I}{I^*} Q^* - \gamma Q - \gamma \frac{Q^*}{I^*} \frac{I}{Q} + \gamma Q^*.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

En additionnant tous les termes ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{dW(t)}{dt} &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) d_S \Delta S \, dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) d_I \Delta I \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} f(S^*, I^*) \left(3 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} - \frac{I^* f(S, I)}{I f(S^*, I^*)} - \frac{I f(S, I^*)}{I^* f(S, I)}\right) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} f(S^*, I^*) \left(\frac{I f(S, I^*)}{I^* f(S, I)} - \frac{I}{I^*} - 1 + \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)}\right) \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \gamma Q^* \left(\frac{I^* Q}{I Q^*} + \frac{Q^* I}{Q I^*} - 2\right) \, dx.
\end{aligned}$$

En ajoutant et en soustrayant le terme suivant

$$f(S^*, I^*) \left(\ln\left(\frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) + \ln\left(\frac{I^* f(S, I)}{I f(S^*, I^*)}\right) + \ln\left(\frac{I f(S, I^*)}{I^* f(S, I)}\right) \right),$$

nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) d_S \Delta S dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) d_I \Delta I dx \\ &+ \int_{\Omega} \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) dx - \int_{\Omega} f(S^*, I^*) \left(h\left(\frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \right. \\ &+ h\left(\frac{I^* f(S, I)}{I f(S^*, I^*)}\right) + h\left(\frac{I f(S, I^*)}{I^* f(S, I)}\right) \left. \right) dx \\ &+ f(S^*, I^*) \int_{\Omega} \left(\frac{I}{I^*} - \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)}\right) \left(\frac{f(S, I^*)}{f(S, I)} - 1\right) dx \\ &- \int_{\Omega} \gamma Q^* \left(\sqrt{\frac{I^* Q}{I Q^*}} - \sqrt{\frac{Q^* I}{Q I^*}} \right)^2 dx. \end{aligned} \tag{2.69}$$

En appliquant l'intégration par parties aux premier et deuxième termes, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &\leq -d_S f(S^*, I^*) \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial S}(S, I^*) \frac{|\nabla S|^2}{(f(S, I^*))^2} dx - d_I I^* \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx \\ &+ \int_{\Omega} \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) dx \\ &+ f(S^*, I^*) \int_{\Omega} \left(\frac{I}{I^*} - \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)}\right) \left(\frac{f(S, I^*)}{f(S, I)} - 1\right) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de (2.66) et (\mathbf{H}_1) , nous obtenons $\frac{dW(t)}{dt} \leq 0$. Donc, le plus grand ensemble invariant pour lequel $\{\frac{dV}{dt} = 0\}$ est le singleton E^* . En appliquant le principe d'invariance de LaSalle, nous concluons que E^* est globalement asymptotiquement stable. \square

2.6.2 Attractivité globale de l'état d'équilibre endémique dans le cas spatialement hétérogène.

Nous obtenons l'attractivité globale de l'état stationnaire strictement positif dans le cas particulier hétérogène où $d_S = 0$, c'est-à-dire lorsque seuls les individus infectés diffusent. De plus nous posons l'extension de (2.66) comme suit

$$\left(\frac{I}{I^*} - \frac{f(x, S, I)}{f(x, S, I^*)} \right) \left(\frac{f(x, S, I^*)}{f(x, S, I)} - 1 \right) \leq 0, \quad \text{pour tout } S > 0 \text{ et } x \in \Omega. \quad (2.70)$$

Théorème 2.9. *Supposons que (2.70) soit satisfait et que le taux de diffusion $d_S = 0$. Supposons également que $\mathcal{R}_0 > 1$. L'état endémique stationnaire $(S^*(x), I^*(x), Q^*(x))$ pour (2.2) est globalement attractif dans \mathbb{X}_0 . De plus, $(S^*(x), I^*(x), Q^*(x))$ est l'unique état endémique stationnaire pour (2.2).*

Démonstration. D'après le Théorème 2.5, un état endémique stationnaire existe si $\mathcal{R}_0 > 1$. Pour en démontrer la stabilité, nous construisons une fonctionnelle de Lyapunov comme suit :

$$W(t) = \int_{\Omega} I^* \left(W_1(x, t) + W_2(x, t) + W_3(x, t) \right) dx,$$

avec

$$W_1(x, t) = S(x, t) - S^*(x) - \int_{S^*(x)}^{S(x, t)} \frac{f(x, S^*(x), I^*(x))}{f(x, z, I^*(x))} dz,$$

$$W_2(x, t) = I^* h \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right),$$

$$W_3(x, t) = \frac{\gamma Q^*}{\mu + \gamma + \kappa_2} h \left(\frac{Q(x, t)}{Q^*(x)} \right).$$

Remarquons que l'état endémique stationnaire $(S^*(.), I^*(.), Q^*(.))$ satisfait

$$\begin{cases} \Lambda = f(., S^*, I^*) + \mu S^*, \\ d_I \Delta I^* + f(., S^*, I^*) + \gamma Q^* = (\mu + \kappa_1 + \theta) I^*, \\ \theta I^* = (\mu + \kappa_2 + \gamma) Q^*. \end{cases} \quad (2.71)$$

En calculant la dérivée de $W_1(., t)$ le long de la solution de (2.2), en utilisant (2.71), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(., t)}{\partial t} &= \left(1 - \frac{f(., S^*, I^*)}{f(., S, I^*)}\right) \left(\Lambda - \mu S - f(., S, I)\right) \\ &= \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{f(., S^*, I^*)}{f(., S, I^*)}\right) + f(., S^*, I^*) \left(1 - \frac{f(., S^*, I^*)}{f(., S, I^*)}\right) \\ &\quad - f(., S, I) + f(., S, I) \frac{f(., S^*, I^*)}{f(., S, I^*)}. \end{aligned}$$

La dérivée de $W_2(., t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2(., t)}{\partial t} &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (d_I \Delta I + f(., S, I) - (\mu + \kappa_1 + \theta)I + \gamma Q), \\ &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) d_I \Delta I + f(., S, I) - f(., S, I) \frac{I^*}{I} - (\mu + \theta + \kappa_1)I + \gamma Q \\ &\quad + (\mu + \theta + \kappa_1)I^* - \gamma Q \frac{I^*}{I}, \\ &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) d_I \Delta I + f(., S, I) - f(., S, I) \frac{I^*}{I} - \frac{I}{I^*} d_I \Delta I^* \\ &\quad - f(., S^*, I^*) \frac{I}{I^*} - \gamma Q^* \frac{I}{I^*} + \gamma Q \\ &\quad + d_I \Delta I^* + f(., S^*, I^*) + \gamma Q^* - \gamma Q \frac{I^*}{I}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

En prenant la dérivée de $W_3(., t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3(., t)}{\partial t} &= \frac{\gamma}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \left(1 - \frac{Q^*}{Q}\right) \left(\theta I - (\mu + \kappa_2 + \gamma)Q\right) \\ &= \gamma \frac{I}{I^*} Q^* - \gamma Q - \gamma Q^* \frac{I}{I^*} \frac{Q^*}{Q} + \gamma Q^*. \end{aligned}$$

D'où, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{dW(t)}{dt} &= \int_{\Omega} \mu I^* (S^* - S) \left(1 - \frac{f(x, S^*, I^*)}{f(x, S, I^*)} \right) dx \\
&+ \int_{\Omega} I^* f(x, S^*, I^*) \left(3 - \frac{f(x, S^*, I^*)}{f(x, S, I^*)} - \frac{I^* f(x, S, I)}{I f(x, S^*, I^*)} - \frac{I f(x, S, I^*)}{I^* f(x, S, I)} \right) dx \\
&+ \int_{\Omega} I^* f(x, S^*, I^*) \left(\frac{I f(x, S, I^*)}{I^* f(x, S, I)} - \frac{I}{I^*} - 1 + \frac{f(x, S, I)}{f(x, S, I^*)} \right) dx \\
&- \int_{\Omega} \gamma I^* Q^* \left(\sqrt{\frac{I^* Q}{I Q^*}} - \sqrt{\frac{Q^* I}{Q I^*}} \right)^2 dx \\
&+ d_I \int_{\Omega} I^* \left(\left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \Delta I + \left(1 - \frac{I}{I^*} \right) \Delta I^* \right) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant la première identité de Green et les conditions aux limites de Neumann, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&d_I \int_{\Omega} \left[\left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \Delta I + \left(1 - \frac{I}{I^*} \right) \Delta I^* \right] dx \\
&= d_I \int_{\Omega} \left[-\nabla \left(I^* \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) \right) \cdot \nabla I + \nabla \left(I^* \left(1 - \frac{I}{I^*} \right) \right) \cdot \nabla I^* \right] dx \\
&= -d_I \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I^*}{\partial x_i} - \frac{I^*}{I} \frac{\partial I}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq 0.
\end{aligned}$$

En procédant de manière similaire à l'argument menant à (2.69), en combinant cela avec (2.70), nous obtenons

$$\frac{dW}{dt} \leq 0.$$

De plus, le plus grand sous-ensemble invariant

$$\mathcal{M} := \left\{ (S, I, Q) : \frac{dW}{dt} = 0 \right\}$$

est le singleton $\{(S^*, I^*, Q^*)\}$. D'après le principe d'invariance de LaSalle, on déduit que (S^*, I^*, Q^*) est globalement attractif dans \mathbb{X}_0 quand $\mathcal{R}_0 > 1$. L'unicité de l'état endémique stationnaire est une conséquence directe de l'attractivité. \square

2.7 Le rôle de la quarantaine dans le contrôle de l'épidémie

Dans cette section, nous nous intéressons au profil asymptotique de \mathcal{R}_0 et de l'état endémique stationnaire lorsque les taux de diffusion des infectés et des susceptibles sont soit faibles, soit élevés. Nous faisons également appel à la notion de taux de reproduction local pour déterminer les intervalles appropriés du taux de quarantaine permettant de réduire ou d'éliminer la maladie.

Nous introduisons les ensembles

$$H^+ = \left\{ x \in \Omega, \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}(x), 0) > \mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x) \frac{\mu(x) + \kappa_2(x)}{\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)} \right\}$$

et

$$H^- = \left\{ x \in \Omega, \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}(x), 0) < \mu(x) + \kappa_1(x) + \theta(x) \frac{\mu(x) + \kappa_2(x)}{\mu(x) + \kappa_2(x) + \gamma(x)} \right\}.$$

Comme indiqué dans [3], nous disons que H^+ et H^- sont respectivement les ensembles de sites à haut risque et à bas risque. De plus, nous disons que Ω est un domaine à bas risque si

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) dx < \int_{\Omega} \left(\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \right) dx$$

et un domaine à haut risque si le contraire se produit.

2.7.1 Profile asymptotique de \mathcal{R}_0

Le lemme suivant décrit la sensibilité de \mathcal{R}_0 au coefficient de diffusion des infectés d_I . La preuve est presque similaire à celle du [3, Théorème 2], et nous omettons les détails.

Lemme 2.9. *Supposons que H^- et H^+ sont des ensembles non vides. Soit \mathcal{R}_0 défini dans (2.37). Les affirmations suivantes sont vérifiées.*

1. \mathcal{R}_0 est décroissant en d_I avec

$$\lim_{d_I \rightarrow 0} \mathcal{R}_0 = \max \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0)}{(\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma})} : x \in \bar{\Omega} \right\},$$

et

$$\lim_{d_I \rightarrow \infty} \mathcal{R}_0 = \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) dx}{\int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}) dx}.$$

2. Si

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) dx > \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}) dx,$$

alors $\mathcal{R}_0 > 1$ pour tout $d_I > 0$.

3. Si

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) dx < \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}) dx,$$

alors il existe d_I^* tel que $\mathcal{R}_0 > 1$ quand $d_I < d_I^*$ et $\mathcal{R}_0 < 1$ quand $d_I > d_I^*$.

Remarque 2.2. À la lumière du troisième point du Lemme [2.9](#) et pour une valeur appropriée du taux de diffusion d_I , le choix d'une valeur adéquate du taux de quarantaine θ permettra de modifier l'environnement spatial pour inclure un domaine à faible risque, ce qui rendra possible l'éradication de la maladie infectieuse. En d'autres termes, si, par exemple, θ satisfait

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) dx < \int_{\Omega} (\mu + \kappa_1) dx + \underline{\theta} \int_{\Omega} \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma} dx,$$

avec $\underline{\theta} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \theta(x)$, alors l'épidémie peut être contrôlée pour un choix approprié de d_I .

2.7.2 Le rôle de la quarantaine

Contrairement au Lemme [2.9](#), voir également la Remarque [2.2](#), nous discuterons du rôle de la quarantaine dans la maîtrise de l'épidémie sans aucune restriction sur d_I . En d'autres termes, pour chaque $d_I > 0$, nous nous demandons s'il est possible de contenir la maladie infectieuse. Nous voulons

également savoir si le contrôle de l'épidémie est applicable lorsque certains de ces individus en quarantaine rechutent en redevenant infectieux.

Pour surmonter ce problème, nous supposons que l'épidémie se propage en l'absence de la classe de quarantaine et que le système (2.1) devient un modèle SIR classique, à savoir

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S + \Lambda(x) - f(x, S, I) - \mu(x)S, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + f(x, S, I) - (\mu(x) + \kappa_1(x))I, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = d_R \Delta R + \kappa_1(x)I - \mu(x)R, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.73)$$

Soit \mathcal{R}_0^{SIR} le taux de reproduction de base de (2.73) qui est défini comme

$$\mathcal{R}_0^{SIR} = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0) \phi^2 dx}{\int_{\Omega} \left(d_I |\nabla \phi|^2 + (\mu(x) + \kappa_1(x)) \phi^2 \right) dx},$$

avec \hat{S} la solution de

$$\begin{cases} -d_S \Delta S = \Lambda(x) - \mu(x)S, & x \in \Omega \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.74)$$

Soit $\hat{\psi} \in C(\bar{\Omega})$ la fonction propre associée à \mathcal{R}_0^{SIR} . Cette fonction $\hat{\psi}$ satisfait

$$\begin{cases} d_I \Delta \hat{\psi} - (\mu(x) + \kappa_1(x)) \hat{\psi} + \frac{\frac{\partial f}{\partial I}(x, \hat{S}, 0)}{\mathcal{R}_0^{SIR}} \hat{\psi} = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.75)$$

Nous supposons que l'épidémie se propage en l'absence de quarantaine, ce qui signifie que $\mathcal{R}_0^{SIR} > 1$. Ensuite, nous déterminons une relation entre \mathcal{R}_0^{SIR} et

θ et discutons de la possibilité d'obtenir $\mathcal{R}_0 \leq 1$ pour certaines valeurs de θ . Lorsque cela se produit, la quarantaine peut contenir l'épidémie.

Selon (2.40), $\hat{\phi}$ est la fonction propre associée à \mathcal{R}_0 . En multiplions l'équation de (2.40) et (2.75) par $\hat{\psi}$ et $\hat{\phi}$, respectivement. En intégrant les équations résultantes sur Ω et en les soustrayant, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \frac{(\mu + \kappa_2)\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \hat{\psi}\hat{\phi} dx + \frac{1}{\mathcal{R}_0^{SIR}} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \hat{\psi}\hat{\phi} dx = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \hat{\psi}\hat{\phi} dx.$$

Donc,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\mathcal{R}_0^{SIR} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \hat{\psi}\hat{\phi} dx}{\int_{\Omega} \left(\mathcal{R}_0^{SIR} \frac{(\mu + \kappa_2)\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} dx + \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \right) \hat{\psi}\hat{\phi} dx}. \quad (2.76)$$

évidemment, à partir de (2.76), nous avons que $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^{SIR}$. De plus, observons que $\mathcal{R}_0 < 1$, si seulement, si

$$\int_{\Omega} \frac{(\mu + \kappa_2)\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \hat{\psi}\hat{\phi} dx > \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{SIR}}\right) \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \hat{\psi}\hat{\phi} dx. \quad (2.77)$$

L'inégalité (2.77) donne une relation entre la quarantaine et le taux de rechute ainsi bien que \mathcal{R}_0^{SIR} . Si (2.77) est vérifiée, la quarantaine aide à contenir l'épidémie. Par conséquent, une condition suffisante pour (2.77) est

$$\underline{\theta} > \frac{(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{SIR}}) \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial I}(\cdot, \hat{S}, 0) \hat{\psi}\hat{\phi} dx}{\int_{\Omega} \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma} \hat{\psi}\hat{\phi} dx}, \quad (2.78)$$

avec $\underline{\theta} := \min_{x \in \Omega} \theta(x)$.

Remarque 2.3. Notons que $\hat{\phi}$ dépend de θ et \mathcal{R}_0 . Ainsi (2.78) n'est pas toujours vérifiée. Cependant, le membre de droite de (2.78) est une quantité bornée en $\underline{\theta}$. Ainsi, on peut toujours choisir θ vérifiant (2.78). De plus, si nous considérons l'espace homogène, c'est-à-dire que toutes les données sont

constantes, alors par des calculs simples, (2.78) devient

$$\theta > \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{SIR}}\right) \frac{\frac{\partial f}{\partial I}(\hat{S}, 0)}{\frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}}.$$

2.7.3 Profils asymptotiques de l'état endémique stationnaire

Dans la suite de cette section, nous supposons que

(H₂) $f(x, S, I) = f_1(S)f_2(x, I)$, $x \in \Omega$, $S > 0$, $I > 0$, avec $f_1 \in C^1(\mathbb{R}_+)$
et $f_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$

(H₃) f_1 est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f_1(s)}{s} < \infty$ avec $f_1(0) = 0$

(H₄) f_2 est une fonction concave, strictement croissante par rapport à I
sur $\bar{\Omega}$ et $f_2(\cdot, 0) = 0$ sur $\bar{\Omega}$.

Posons $g_{\Lambda, \mu} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$g_{\Lambda, \mu}(s) := \frac{\Lambda - \mu s}{f_1(s)}, \quad (2.79)$$

et notons

$$K_\theta := \left(\mu + \kappa_1 + \theta \frac{\mu + \kappa_2}{\mu + \kappa_2 + \gamma}\right). \quad (2.80)$$

(H₅) La fonction $g_{\Lambda, \mu}$ est strictement décroissante et notons par $g_{\Lambda, \mu}^{-1}(s)$ son inverse.

Notons aussi,

$$F_g(\cdot, s) = f_1(g_{\Lambda, \mu}^{-1}(f_2(\cdot, s))).$$

(H₆) Il existe une constante strictement positive B telle que $F_g(\cdot, M)f_2(\cdot, M) < K_\theta M$ pour tout $M > B$ sur $\bar{\Omega}$.

Remarque 2.4.

(i) Selon (H₄), $f_2(\cdot, s)$ est une fonction concave par rapport à s sur $\bar{\Omega}$, il en résulte que $\frac{f_2(\cdot, s)}{s}$ est une fonction décroissante sur $\bar{\Omega}$ et $s > 0$.

(ii) D'après (\mathbf{H}_3) - (\mathbf{H}_5) nous observons que $F_g(\cdot, s)$ et $F_g(\cdot, s) \frac{f_2(\cdot, s)}{s}$ sont des fonctions strictement décroissantes sur $\bar{\Omega}$ et $s > 0$.

Remarque 2.5.

(i) Si f_1 est une fonction concave, l'assertion (\mathbf{H}_5) est satisfaite.

(ii) Si $f_1(s) = s$, (\mathbf{H}_6) est vérifiée. En effet, dans ce cas, $g_{\Lambda, \mu}^{-1}(s) = \frac{\Lambda}{\mu + s}$

et $F_g(\cdot, s) f_2(\cdot, s) = \frac{\Lambda f_2(s)}{\mu + f_2(s)}$. En conséquence, la fonction $F_g(\cdot, s) f_2(\cdot, s)$ est bornée sur $\bar{\Omega}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(iii) Si $f_1(\frac{\Lambda}{\mu}) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_2(x, s)}{s} < \min_{x \in \bar{\Omega}} K_\theta(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$, (\mathbf{H}_6) est vérifiée.

En fait, observons que $g_{\Lambda, \mu}^{-1}(0) = \frac{\Lambda}{\mu}$ et $F_g(\cdot, s)$ est une fonction strictement décroissante par rapport à s , il s'ensuit que $F_g(\cdot, s) \frac{f_2(\cdot, s)}{s} \leq$

$$f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{f_2(\cdot, s)}{s}.$$

D'après (2.23) (S, I, Q) est un équilibre endémique de (2.2) si et seulement si (S, I) est une solution strictement positive du système

$$\begin{cases} d_S \Delta S + \Lambda(x) - f_1(S) f_2(x, I) - \mu(x) S = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ d_I \Delta I + f_1(S) f_2(x, I) - K_\theta(x) I = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial \Omega, \end{cases} \quad (2.81)$$

et $Q = \frac{\theta}{\mu + \kappa_2 + \gamma} I$. Dans la suite, nous nous concentrerons sur (2.81) au lieu de (2.23) .

Soit $\lambda_0(d, g)$ la valeur propre principale du problème

$$\begin{cases} d \Delta \phi + g \phi = \lambda \phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial \Omega, \end{cases} \quad (2.82)$$

où $d > 0$ et $g \in C(\bar{\Omega})$. Il est bien connu que $\lambda_0(d, g)$ dépend continuellement

de d, g . Avec,

$$\lambda_0(d, g) = - \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} (d|\nabla\phi|^2 - g\phi^2) dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}, \phi \in H^1(\Omega), \text{ with } \int_{\Omega} \phi^2 dx \neq 0 \right\}. \quad (2.83)$$

De plus, $\lambda_0(d, g)$ est décroissante en d avec $\lim_{d \rightarrow \infty} \lambda_0(d, g) = \max\{g(x), x \in \bar{\Omega}\}$ voir e.g. [3], et elle est décroissante en g . De plus, pour $g_1, g_2 \in C(\bar{\Omega})$, nous avons $\lambda_0(d, g_1) > \lambda_0(d, g_2)$ si $g_1 \geq g_2$ et $g_1(x) > g_2(x)$ pour certains $x \in \bar{\Omega}$.

Profile quand $d_S \rightarrow 0$

Dans cette sous-section, nous étudions le profil asymptotique de l'état d'équilibre endémique lorsque le taux de diffusion des susceptibles s'approche de zéro. Pour y parvenir, définissons

$$\lambda^* = \lambda_0 \left(d_I, f_1 \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_{\theta} \right). \quad (2.84)$$

Nous énonçons le résultat suivant.

Lemme 2.10. *Supposons que (\mathbf{H}_2) - (\mathbf{H}_6) sont vérifiées. Soit λ^* défini par (2.84). Alors, le problème non linéaire*

$$\begin{cases} d_I \Delta U + F_g(x, U) f_2(x, U) - K_{\theta}(x) U = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.85)$$

satisfait les énoncés suivants :

- (i) Le problème (2.85) n'a pas de solution strictement positive si $\lambda^* \leq 0$.
- (ii) Le problème (2.85) admet une unique solution strictement positive lorsque $\lambda^* > 0$.

Démonstration. L'assertion (i) sera prouvée par l'absurde. En effet, supposons que (2.85) ait une solution strictement positive U . En multipliant les

deux membres de (2.85) par U et en intégrant sur Ω , nous obtenons

$$-d_I \int_{\Omega} |\nabla U|^2 + \int_{\Omega} F_g(\cdot, U) \frac{f_2(\cdot, U)}{U} U^2 dx - \int_{\Omega} K_{\theta}(\cdot) U^2 dx = 0. \quad (2.86)$$

D'après (\mathbf{H}_4), la fonction f_2 est concave. Il en résulte que $\frac{f_2(\cdot, U)}{U}$ est une fonction décroissante. De plus, la fonction $F_g(\cdot, U)$ est strictement décroissante voir la Remarque 2.4, ce qui implique que $F_g(\cdot, U) \frac{f_2(\cdot, U)}{U} < f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial U}(\cdot, 0)$ pour tout $U > 0$. Cela, combiné avec (2.86), donne

$$-d_I \int_{\Omega} |\nabla U|^2 + \int_{\Omega} f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial U}(\cdot, 0) U^2 dx - \int_{\Omega} K_{\theta}(\cdot) U^2 dx > 0.$$

Compte tenu de la formule variationnelle (2.83), nous avons

$$\lambda^* \geq \left(-d_I \int_{\Omega} |\nabla U|^2 + \int_{\Omega} f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial U}(\cdot, 0) U^2 dx - \int_{\Omega} K_{\theta}(\cdot) U^2 dx \right) / \int_{\Omega} U^2 dx > 0,$$

Ce qui est une contradiction avec $\lambda^* \leq 0$. L'assertion (i) est démontrée.

Pour démontrer (ii), posons

$$H(U) = d_I \Delta U + F_g(\cdot, U) f_2(\cdot, U) - K_{\theta}(\cdot) U,$$

et considérons ϕ la fonction propre strictement positive de (2.82) associée à λ^* . Pour $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} H(\epsilon\phi) &= \epsilon \left(d_I \Delta \phi + F_g(\cdot, \epsilon\phi) \frac{f_2(\cdot, \epsilon\phi)}{\epsilon\phi} \phi - K_{\theta}(\cdot) \phi \right), \\ &= \epsilon \left(d_I \Delta \phi + f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) \phi - K_{\theta} \phi \right. \\ &\quad \left. + F_g(\cdot, \epsilon\phi) \frac{f_2(\cdot, \epsilon\phi)}{\epsilon\phi} \phi - f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) \phi \right), \\ &= \epsilon \left(\lambda^* + F_g(\cdot, \epsilon\phi) \frac{f_2(\cdot, \epsilon\phi)}{\epsilon\phi} - f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) \right) \phi. \end{aligned}$$

Notons que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_g(\cdot, \epsilon\phi) \frac{f_2(\cdot, \epsilon\phi)}{\epsilon\phi} = f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0)$. Cela, combiné avec $\lambda^* > 0$, conduit à $H(\epsilon\phi) > 0$ pour ϵ petit. Donc $\epsilon\phi$ est une sous-solution de (2.85).

De plus, d'après (\mathbf{H}_6) , $H(M) < 0$ pour tout $M > B$, c'est à dire que M est une sur-solution de (2.85). L'unicité de la solution strictement positive est déduite car $F_g(\cdot, U) \frac{f_2(\cdot, U)}{U}$ est une fonction décroissante. \square

Nous présentons maintenant le résultat principal sur le profil asymptotique de l'état d'équilibre endémique lorsque le taux de diffusion d_S tend vers zéro.

Théorème 2.10. *Supposons que (\mathbf{H}_2) - (\mathbf{H}_6) sont vérifiées. Alors, il existe deux seuils \bar{d}_S et \tilde{d}_S avec les propriétés suivantes*

- (i) *Pour chaque $d_S < \bar{d}_S$, le problème (2.81) n'a pas de solution strictement positive lorsque $\lambda^* < 0$.*
- (ii) *Pour chaque $d_S < \tilde{d}_S$, le problème (2.81) admet une solution strictement positive (S, I) quand $\lambda^* > 0$. En outre, $(S, I) \rightarrow (S^*, I^*)$ quand $d_S \rightarrow 0$ uniformément sur Ω où I^* est l'unique solution strictement positive de (2.85) et $S^* = g_{\Lambda, \mu}^{-1}(f_2(I^*))$.*

Démonstration. Notons que \hat{S} est l'unique solution strictement positive de (2.74). Nous savons que $\hat{S} \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ quand $d_S \rightarrow 0$, voir e.g. [105]. Rappelons que

$$\eta^0 := \lambda_0(d_I, f_1(\hat{S}) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_\theta)$$

est définie dans (2.38). D'après la continuité de f_1 , nous avons

$$\eta^0 \rightarrow \lambda^* := \lambda_0(d_I, f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_\theta), \quad d_S \rightarrow 0. \quad (2.87)$$

Selon le lemme 2.7 (iii), $(\mathcal{R}_0 - 1)$ et η^0 ont le même signe. Maintenant, $\lambda^* < 0$ garantit qu'il existe $\bar{d}_S > 0$ tel que $\eta^0 < 0$ et ainsi $\mathcal{R}_0 < 1$ si $d_S < \bar{d}_S$. d'après le Théorème 2.4, nous savons que l'équilibre trivial E_0 est globalement asymptotiquement stable pour (2.2). Donc, il n'existe pas d'états d'équilibre endémiques de (2.81) prouvant (i).

De la même manière que ci-dessus, $\lambda^* > 0$ implique qu'il existe $\tilde{d}_S > 0$ tel que $\mathcal{R}_0 > 1$ si $d_S < \tilde{d}_S$. Selon le Théorème 2.5, le système (2.23) admet un

équilibre endémique et donc (2.81) a une solution strictement positive (S, I) lorsque $d_S < \tilde{d}_S$. Nous nous concentrons maintenant sur la convergence de (S, I) à (S^*, I^*) quand $d_S \rightarrow 0$. Pour atteindre cet objectif, nous donnons d'abord une estimation a priori de (S, I) . Évidemment, l'équation de S dans (2.81) satisfait

$$-d_S \Delta S \geq \Lambda - \mu S. \quad (2.88)$$

K_1 est une sur-solution de (2.88) si

$$K_1 = \frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\mu}} := \frac{\max_{x \in \bar{\Omega}} \Lambda(x)}{\min_{x \in \bar{\Omega}} \mu(x)}.$$

Donc, le principe de comparaison implique

$$\|S\|_{C(\bar{\Omega})} \leq K_1, \text{ pour tout } d_S > 0.$$

Ensuite, après avoir intégré les deux membres des deux premières équations de (2.81) et les avoir additionnés, nous obtenons

$$\int_{\Omega} K_{\theta} I dx = \int_{\Omega} (\Lambda - \mu S) dx \leq \bar{\Lambda} |\Omega|.$$

Ainsi,

$$\|I\|_1 \leq \frac{\bar{\Lambda} |\Omega|}{\min_{x \in \bar{\Omega}} K_{\theta}(x)},$$

où $|\Omega|$ représente la mesure de Ω . Maintenant, d'après (\mathbf{H}_4) , f_2 est une fonction concave par rapport à I , ce qui implique que $f_2(\cdot, I) \leq \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0)I$. Après avoir intégré les deux membres des deux premières équations de (2.81) et les avoir additionnés, nous obtenons

$$\|I\|_{2,p} \leq K_2, \text{ pour tout } d_S > 0 \text{ et } p > 0.$$

Pour p suffisamment grand, en prenant une sous-suite de d_S , notée $(d_{S_n})_n$, avec $d_{S_n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et en combinant avec le Théorème d'injection

de Sobolev, la solution correspondante (S_n, I_n) de (2.81) satisfait

$$S_n \rightarrow S^* \quad \text{faiblement dans } L^p(\Omega),$$

et

$$I_n \rightarrow I^* \quad \text{faiblement dans } W^{2,p}(\Omega) \quad \text{et fortement dans } C(\bar{\Omega})$$

quand $n \rightarrow \infty$ pour une fonction S^* positive dans $L^p(\Omega)$ et I^* positive dans $W^{2,p}(\Omega)$. D'après la première équation de (2.81) et (2.79), le couple (S^*, I^*) satisfait

$$S^* = g_{\Lambda, \mu}^{-1}(f_2(\cdot, I^*)). \quad (2.89)$$

De plus, en combinant (2.89) et la seconde équation de (2.81), nous montrons que I^* est une solution positive de (2.85). Il résulte du Lemme 2.10 que soit $I^* = 0$, soit I^* est l'unique solution strictement positive de (2.85). Nous prouvons maintenant que le second cas se produit. Par l'absurde, supposons que $I^* = 0$. Alors, par (2.89), nous avons $S^* = \frac{\Lambda}{\mu}$. Considérons maintenant J_n avec $\|J_n\| = 1$, qui est une solution de

$$\begin{cases} d_I \Delta J_n + f_1(S_n) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) J_n - K_\theta J_n = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial J_n}{\partial \eta} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant le fait que $f_2(\cdot, I) \leq \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0)I$, nous obtenons $I_n \leq J_n$. Ainsi, J_n est une solution strictement positive. En outre, observons que J_n est une fonction propre strictement positive associée à la valeur propre principale

$$\lambda_0 \left(d_I, f_1(S_n) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_\theta \right) = 0 \quad \text{pour tout } n > 0.$$

Enfin, en passant à la limite lorsque $d_{S_n} \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\lambda^* := \lambda_0 \left(d_I, f_1\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_\theta \right) = 0,$$

ce qui est une contradiction avec $\lambda^* > 0$. Donc I^* est l'unique solution strictement positive de (2.85). \square

Profile quand $d_S \rightarrow +\infty$

Pour tout $F \in L^1(\Omega)$, désignons par \tilde{F} la moyenne spatiale de $F(x)$, i.e $\tilde{F} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} F(x) dx$.

Nous étudions maintenant le profil asymptotique de l'état d'équilibre endémique à mesure que le taux de diffusion d_S tend vers l'infini. À cette fin, soit

$$\lambda^{**} = \lambda_0 \left(d_I, f_1 \left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{\mu}} \right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_{\theta} \right), \quad (2.90)$$

et

$$\tilde{F}_g(y) := f_1(g_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu}}^{-1}(y)),$$

où $g_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu}}(s)$ est définie dans (2.79). Alors, nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 2.11. *Supposons que (\mathbf{H}_2) - (\mathbf{H}_6) sont vérifiées. Soit λ^{**} définie dans (2.90). Alors, le problème non linéaire*

$$\begin{cases} d_I \Delta U + \tilde{F}_g \left(\int_{\Omega} f_2(x, U) dx \right) f_2(x, U) - K_{\theta}(x) U = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.91)$$

satisfait les assertions suivantes :

- (i) Le problème (2.91) n'admet aucune solution strictement positive quand $\lambda^{**} \leq 0$.
- (ii) Le problème (2.91) a une unique solution strictement positive quand $\lambda^{**} > 0$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe une solution strictement positive U de (2.91). Rappelons que \tilde{F}_g est une fonction décroissante et

$f_2(\cdot, U) \leq \frac{\partial f_2}{\partial U}(\cdot, 0)U$. En utilisant le fait que $\tilde{F}_g(0) = f_1\left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{\mu}}\right)$, nous avons

$$d_I \Delta U + f_1\left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{\mu}}\right) \frac{\partial f_2}{\partial U}(\cdot, 0)U - K_\theta U > 0. \quad (2.92)$$

En multipliant (2.92) par la fonction propre associée à la valeur propre λ^{**} , $\phi^* > 0$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons

$$\lambda^{**} \int_{\Omega} U \phi^* dx > 0.$$

Donc, $\lambda^{**} > 0$, est une contradiction avec $\lambda^{**} \leq 0$, prouvant (i).

Pour (ii), en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 2.10, on peut montrer que $\epsilon \phi^*$ est une sous-solution de (2.91). De plus, toute constante $M > B$, avec B défini dans (H₆), est une sur-solution de (2.91). En utilisant le fait que \tilde{F}_g et $\frac{f_2(\cdot, U)}{U}$ sont des fonctions décroissantes, nous prouvons en déduire que le problème (2.91) admet une unique solution strictement positive. \square

Ensuite, nous énonçons le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 2.11. *Supposons que les hypothèses (H₂)-(H₆) soient vérifiées. Alors, il existe deux seuils \hat{d}_S et \tilde{d}_S avec les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour chaque $d_S > \hat{d}_S$, le problème (2.81) n'admet pas une solution strictement positive lorsque $\lambda^{**} < 0$.*
- (ii) *Pour chaque $d_S > \tilde{d}_S$, le problème (2.81) a une solution strictement positive (S, I) lorsque $\lambda^{**} > 0$.*

En outre $(S, I) \rightarrow (S^, I^*)$ quand $d_S \rightarrow \infty$ uniformément sur Ω où I^* est l'unique solution strictement positive de (2.91) et $S^* = g_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu}}^{-1} \left(\int_{\Omega} f_2(x, I^*(x)) dx \right)$.*

Démonstration. Tout d'abord, notons que \hat{S} , est l'unique solution de (2.74), qui converge vers $\frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{\mu}}$ dans $C(\bar{\Omega})$ quand $d_S \rightarrow \infty$. Il s'ensuit, de la continuité

de f_1 , que

$$\eta^0 := \lambda_0(d_I, f_1(\hat{S}) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_\theta) \rightarrow \lambda^{**} := \lambda_0(d_I, f_1(\frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{\mu}}) \frac{\partial f_2}{\partial I}(\cdot, 0) - K_\theta), \quad d_S \rightarrow \infty.$$

Grâce au Lemme [2.7](#) (iii), $(\mathcal{R}_0 - 1)$ et η^0 ont le même signe. Par conséquent, il existe un $\hat{d}_S > 0$ tel que pour chaque $d_S > \hat{d}_S$, nous avons $\eta^0 < 0$. Ainsi, $\mathcal{R}_0 < 1$. Selon le Théorème [2.4](#), l'état sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable pour [\(2.2\)](#) et il n'existe donc pas d'états d'équilibre endémiques pour [\(2.81\)](#), ce qui prouve **(i)**.

En utilisant la même idée que ci-dessus, nous pouvons montrer qu'il existe un $\hat{d}_S > 0$ tel que [\(2.81\)](#) a une solution strictement positive (S^*, I^*) pour $d_S > \hat{d}_S$. Ensuite, en suivant les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème [2.10](#), on peut prouver qu'il existe une suite (d_{S_n}) telle que $d_{S_n} \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et la solution correspondante (S_n, I_n) de [\(2.81\)](#) satisfait

$$S_n \rightarrow S^*, \quad \text{faiblement dans } L^p(\Omega)$$

et

$$I_n \rightarrow I^*, \quad \text{faiblement dans } W^{2,p}(\Omega) \quad \text{et fortement dans } C(\bar{\Omega})$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, pour un certain S^* non négatif dans $L^p(\Omega)$ et un certain I^* non négatif dans $W^{2,p}(\Omega)$. À partir de [\(2.81\)](#), S_n satisfait

$$\begin{cases} \Delta S_n + \frac{\Lambda(x) - f_1(S_n) f_2(x, I_n) - \mu(x) S_n}{d_{S_n}} = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S_n}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.93)$$

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini et en utilisant la bornitude uniforme de S_n et I_n , S^* satisfait

$$\begin{cases} \Delta S^* = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial S^*}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

En conséquence, S^* est une constante. En intégrant les deux membres de (2.93) et en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient

$$\frac{1}{|\Omega|} f_1(S^*) \int_{\Omega} f_2(x, I^*(x)) dx = \tilde{\Lambda} - \tilde{\mu} S^*.$$

Ainsi,

$$S^* = g_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu}}^{-1} \left(\int_{\Omega} f_2(x, I^*(x)) dx \right). \quad (2.94)$$

En combinant (2.94) et la deuxième équation de (2.81), nous montrons que I^* est une solution non négative de (2.91). De manière similaire à la démonstration du Théorème 2.10, nous pouvons montrer que I^* est la seule solution strictement positive de (2.91). \square

2.7.4 Effet du nombre de reproduction de base local et du taux de quarantaine sur le contrôle de l'épidémie

Cette sous-section est dédiée à mettre en évidence le fait que les épidémies peuvent être contrôlées en choisissant des valeurs appropriées du taux de quarantaine et en limitant le taux de diffusion d_S . Inspiré par [101], nous introduisons le taux de reproduction local de base comme

$$\mathcal{R}_0^{loc}(x) := \frac{f_1\left(\frac{\Lambda(x)}{\mu(x)}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(x, 0)}{K_{\theta}(x)},$$

où K_{θ} est défini dans (2.80). Observons que λ^* (voir (2.84)) peut être réécrit comme

$$\lambda^* = - \inf \left\{ \int_{\Omega} \left(d_I |\nabla \phi|^2 - K_{\theta}(\mathcal{R}_0^{loc}(\cdot) - 1) \phi^2 dx \right) / \int_{\Omega} \phi^2 dx; \phi \in H^1(\Omega) \text{ with } \phi \neq 0 \right\}.$$

Notons que nous pouvons choisir des valeurs appropriées du taux de quarantaine θ pour avoir $\mathcal{R}_0^{loc}(\cdot) < 1$. Cela conduit à $\lambda^* < 0$. Dans ce cas, en utilisant le Théorème 2.10 (i), il n'existe pas de solutions strictement positives de (2.81). D'après (2.87), $\eta^0 < 0$ pour d_s suffisamment petit. Ainsi, $\Omega = H^-$. Selon le lemme 2.7 (iii), $(\mathcal{R}_0 - 1)$ et η^0 ont le même signe. Par conséquent,

d'après le Théorème [2.4](#), l'épidémie peut être contenue en restreignant les déplacements des individus susceptibles. Supposons maintenant qu'il existe un certain $x \in \Omega$ tel que $\mathcal{R}_0^{loc}(x) > 1$. Il en découle que $x \in H^+$, les sites à haut risque. Encore une fois, choisissons des valeurs θ telles que

$$\int_{\Omega} f_1\left(\frac{\Lambda(x)}{\mu(x)}\right) \frac{\partial f_2}{\partial I}(x, 0) dx < \int_{\Omega} K_{\theta}(x) dx,$$

C'est-à-dire que Ω devient une zone à faible risque même s'il existe des sites à haut risque. En combinant le lemme [2.9](#) et le Théorème [2.4](#), nous pouvons contrôler l'épidémie en limitant les déplacements des individus susceptibles dans une certaine plage.

2.8 Simulations numériques

Dans cette section, nous examinons, via une simulation numérique, l'effet des coefficients de diffusion et de la quarantaine sur le comportement spatio-temporel de la solution du modèle (2.1), à l'aide d'exemples simples. Nous utilisons une fonction d'incidence standard, c'est-à-dire $f(x, S, I) = \beta(x)SI$, et nous considérons l'ensemble de paramètres suivant :

$$\begin{aligned} \Lambda(\cdot) &= 0.5, & \mu(\cdot) &= 0.2, & \theta(\cdot) &= 0.14, \\ \kappa_1(\cdot) &= 0.01, & \kappa_2(\cdot) &= 0.01, & \gamma(\cdot) &= 0.02, \\ d_S &= 0.02, & d_I &= 0.04. \end{aligned}$$

2.8.1 Cas homogène

Ici, nous supposons que β est indépendant de l'espace. En considérant que $\beta(x) = 0.1$, nous obtenons $\mathcal{R}_0 \approx 0.74$, et l'état d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable (voir Fig. [2.1](#)). Ensuite, en prenant $\beta(x) = 0.3$, nous obtenons $\mathcal{R}_0 \approx 2.22$, et par conséquent, l'état d'équilibre strictement positif est globalement asymptotiquement stable (voir Fig. [2.2](#)).

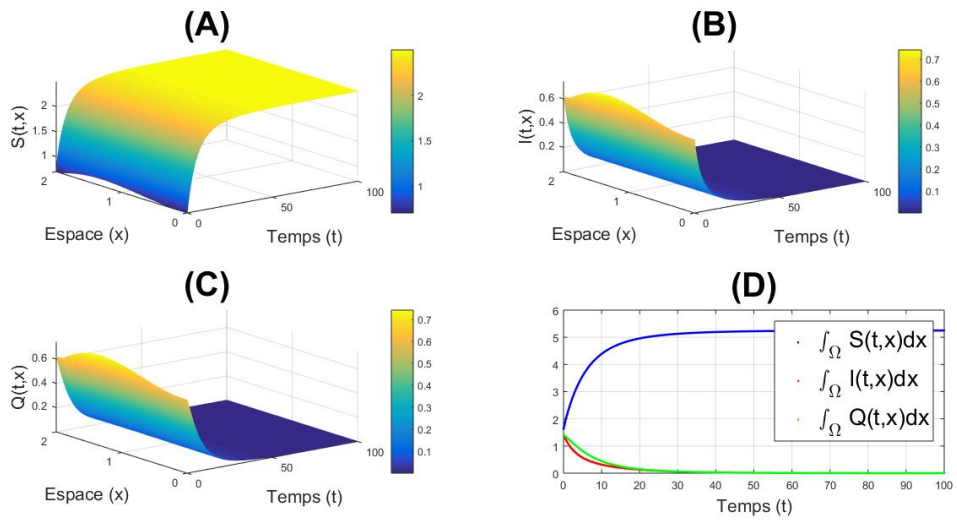


Figure 2.1 – La stabilité globale de l'état d'équilibre sans maladie pour $\beta = 0.1$.

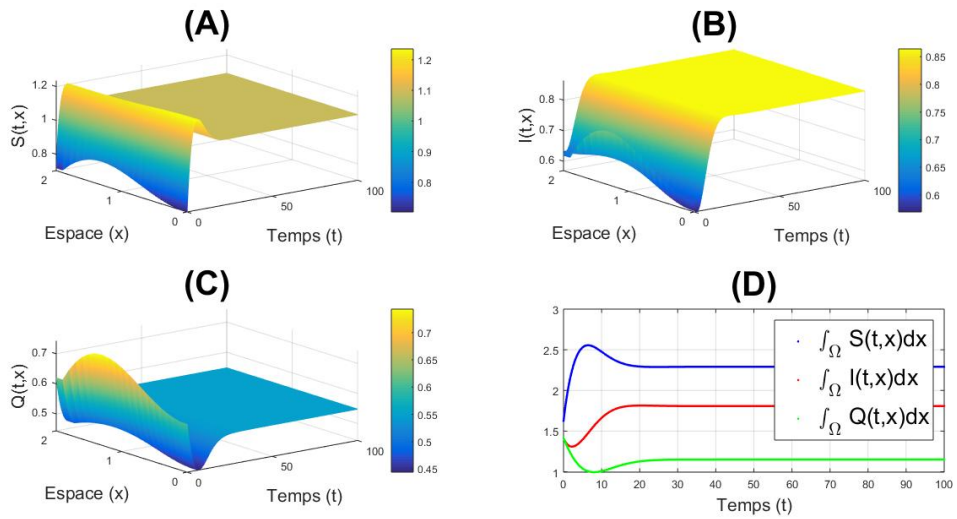


Figure 2.2 – La stabilité globale de l'état d'équilibre endémique $\beta = 0.3$.

2.8.2 Cas hétérogène

Dans ce cas, nous supposons que β dépend de l'espace et prend la forme $\beta(x) = \beta_0(1 + x)^2$, et nous faisons varier β_0 . Pour $\beta_0 = 0.01$, nous obtenons $\mathcal{R}_0 \approx 0.6875 < 1$, et d'après le Théorème 2.4, l'état d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable (voir Fig. 2.3). Pour $\beta_0 = 0.1$, nous avons $\mathcal{R}_0 \approx 6.875 > 1$ et le Théorème 2.5 montre que le système (2.2) possède au moins un état d'équilibre. Dans certains cas particuliers, nous pouvons prouver l'unicité de l'état d'équilibre strictement positif, voir Théorème 2.10. La Figure 2.4 illustre la convergence vers l'état d'équilibre strictement positif.

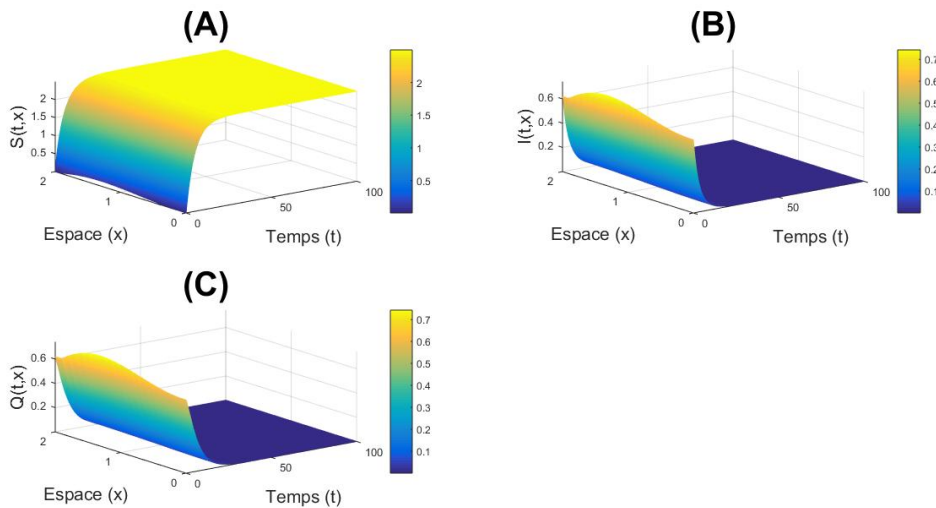


Figure 2.3 – La stabilité globale de l'état d'équilibre sans maladie $\beta_0 = 0.01$.

2.8.3 Effet de la quarantaine et le taux de rechute sur le contrôle de l'épidémie

Dans cette sous-section, nous déterminons l'effet du taux de rechute et de quarantaine sur le contrôle de l'épidémie. En effet, le taux de rechute γ peut fortement influencer la population infectée. Pour nous en convaincre, nous commençons par faire varier γ et observons l'effet du taux de rechute sur l'évolution de la maladie. Nous considérons l'ensemble des paramètres sui-

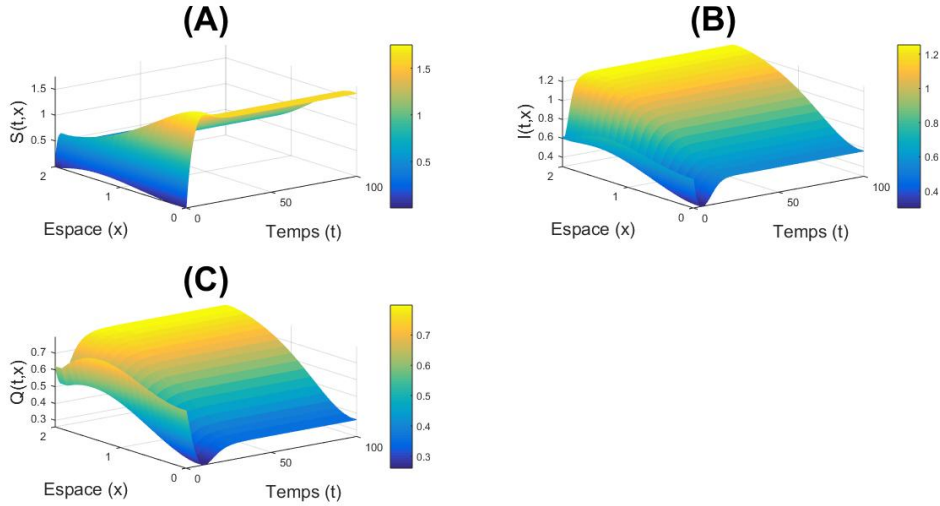


Figure 2.4 – La stabilité globale de l'état d'équilibre endémique $\beta = 0.1$.

vants :

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0.5, & \mu &= 0.2, \\ \beta(x) &= 0.04(1+x)^2, & \kappa_1 &= 0.01, \\ \kappa_2 &= 0.01, & d_S &= 0.02, \\ d_I &= 0.04. \end{aligned}$$

Nous posons $\theta(x) = 0.14$ et nous faisons varier $\gamma(x) = \gamma_0$ avec γ_0 constante. D'après la Fig. [2.5](#), nous en déduisons que la population infectée augmente lorsque γ croît. Par conséquent, réduire le taux de rechute peut aider à diminuer le nombre d'infectés.

Ensuite, nous fixons $\gamma(x) = 0.2$. En faisant varier le taux de quarantaine $\theta(x) = \theta_0$ avec θ_0 constant, nous obtenons la Fig. [2.6](#). On observe que lorsque le taux de quarantaine augmente, la population infectée diminue, ce qui montre que ce taux affecte la progression de l'épidémie. Pour espérer contenir l'épidémie, il semble judicieux de contrôler les deux taux, à savoir les taux de rechute et de quarantaine.

Nous étudions maintenant l'effet des taux de rechute et de quarantaine sur le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 .

Nous commençons par fixer le taux de quarantaine à $\theta(x) = 0.4$ et en

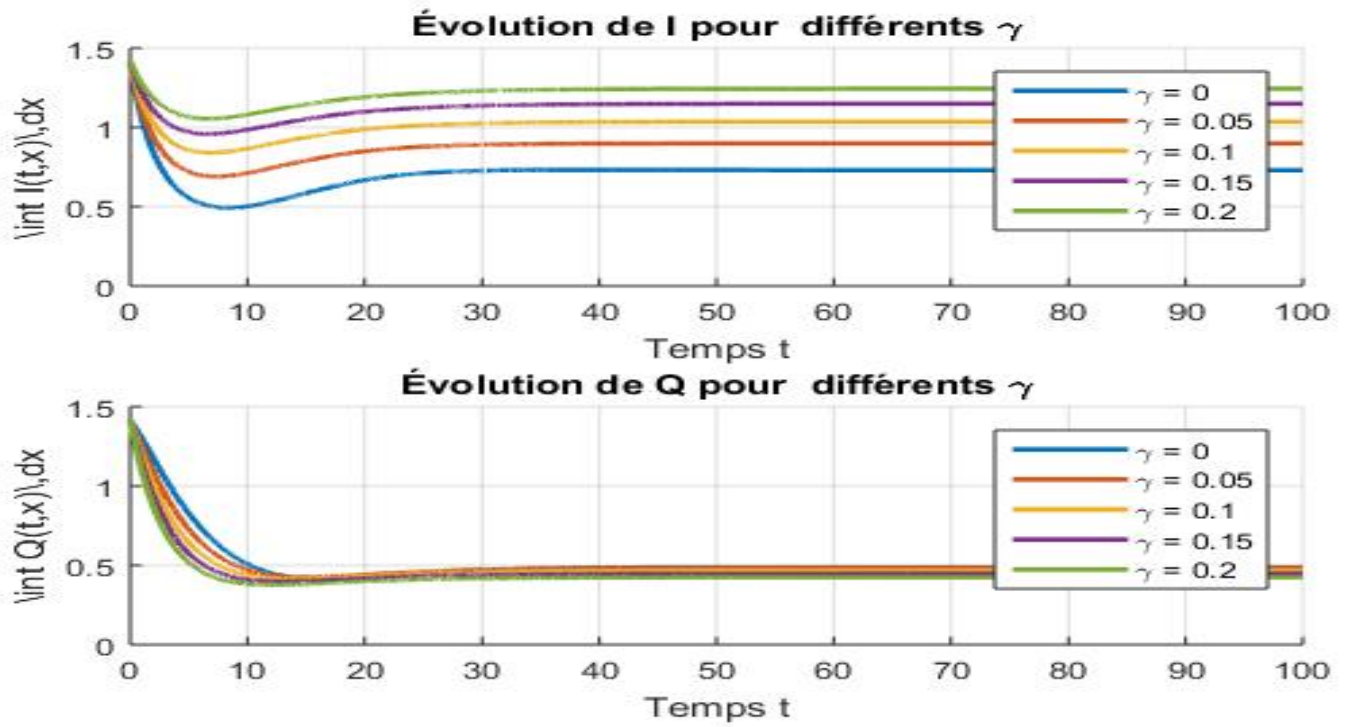


Figure 2.5 – L'effet du taux de rechute γ sur la population des infectés.

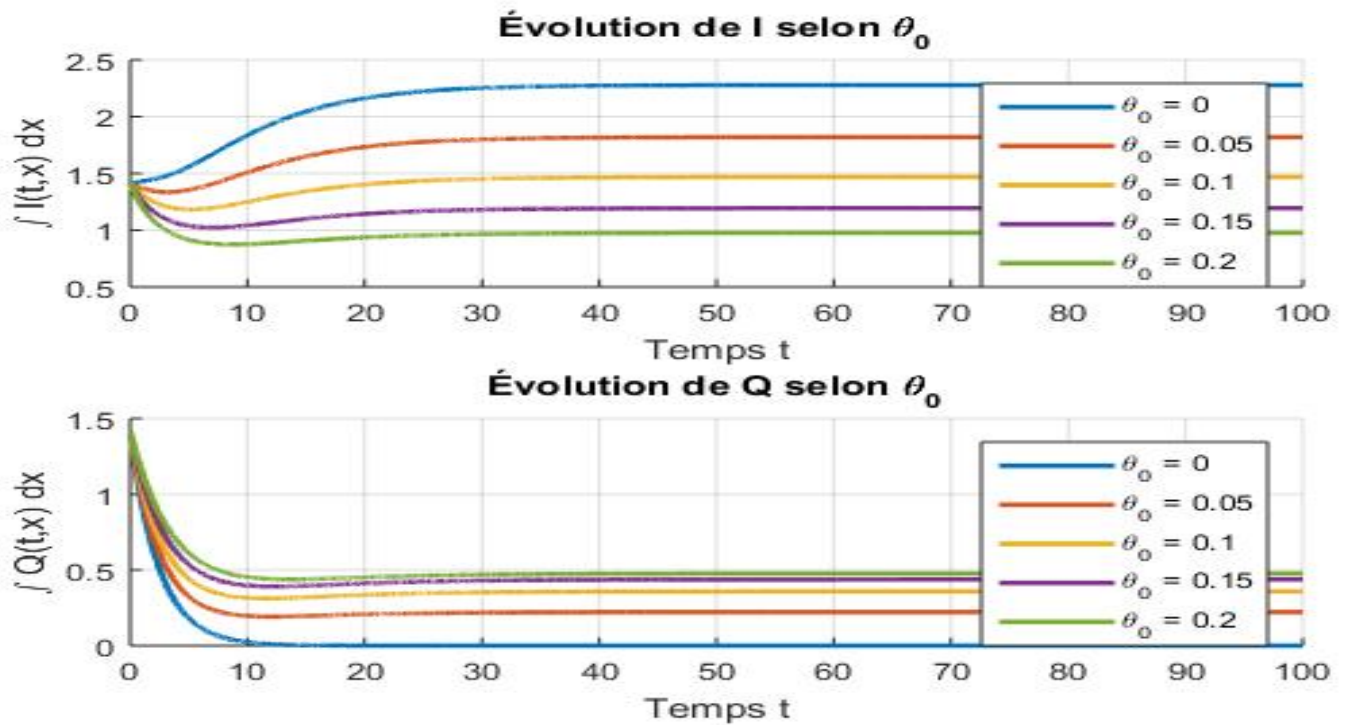


Figure 2.6 – L'effet du taux de quarantaine θ sur la population des infectés.

faire varier le taux de rechute γ . D'après la Figure 2.7, nous observons que lorsque γ augmente, \mathcal{R}_0 devient plus grand. Ensuite, si nous fixons le taux de rechute à $\gamma(x) = 0.2$ et faisons varier θ (qui est supposé constant), d'après la Fig. 2.6, nous pouvons déduire que la quarantaine est primordiale pour contenir l'épidémie. Clairement, pour $\theta_0 = 0$, la population en quarantaine tend vers zéro. Ce cas est lié à l'absence de cette catégorie. À mesure que θ_0 augmente, la taille finale de la population infectée devient plus petite, et nous concluons que la quarantaine aide à contenir l'épidémie. Cela peut également être confirmé par les résultats de la Fig. 2.8, où \mathcal{R}_0 diminue en fonction de θ_0 . Par conséquent, nous déduisons que la meilleure stratégie que les décideurs peuvent adopter est d'augmenter le taux de quarantaine (en isolant les personnes infectées) et de réduire le taux de rechute.

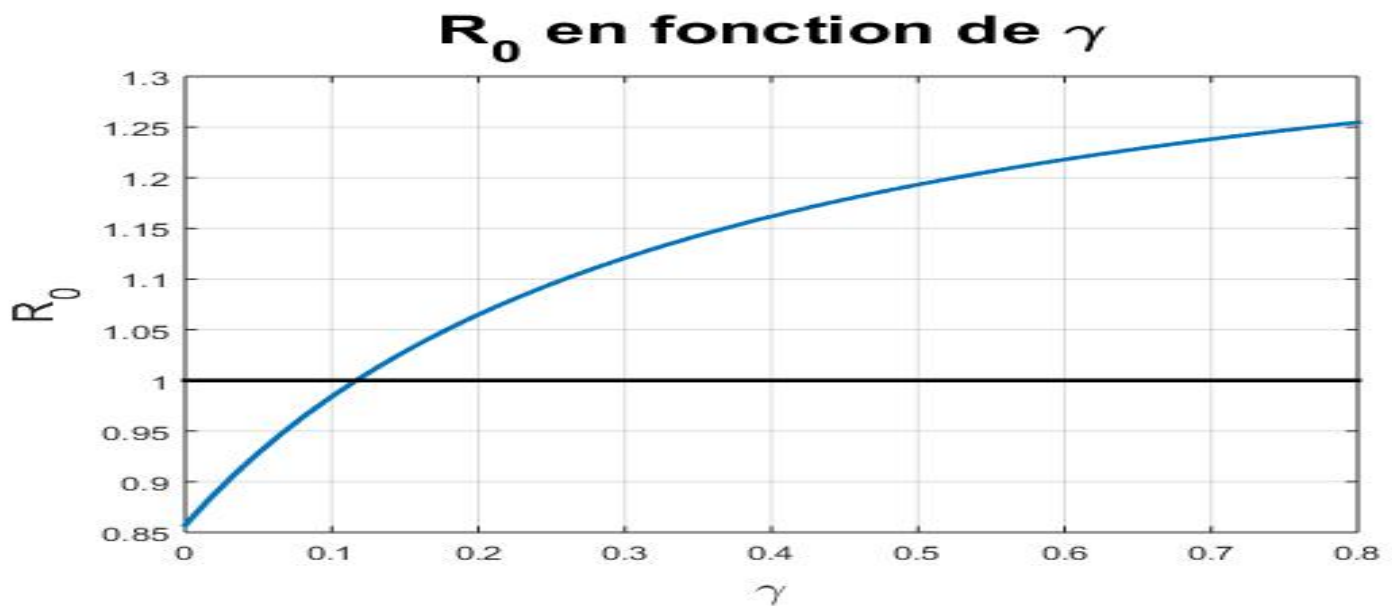


Figure 2.7 – L'effet du taux de rechute γ sur le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 .

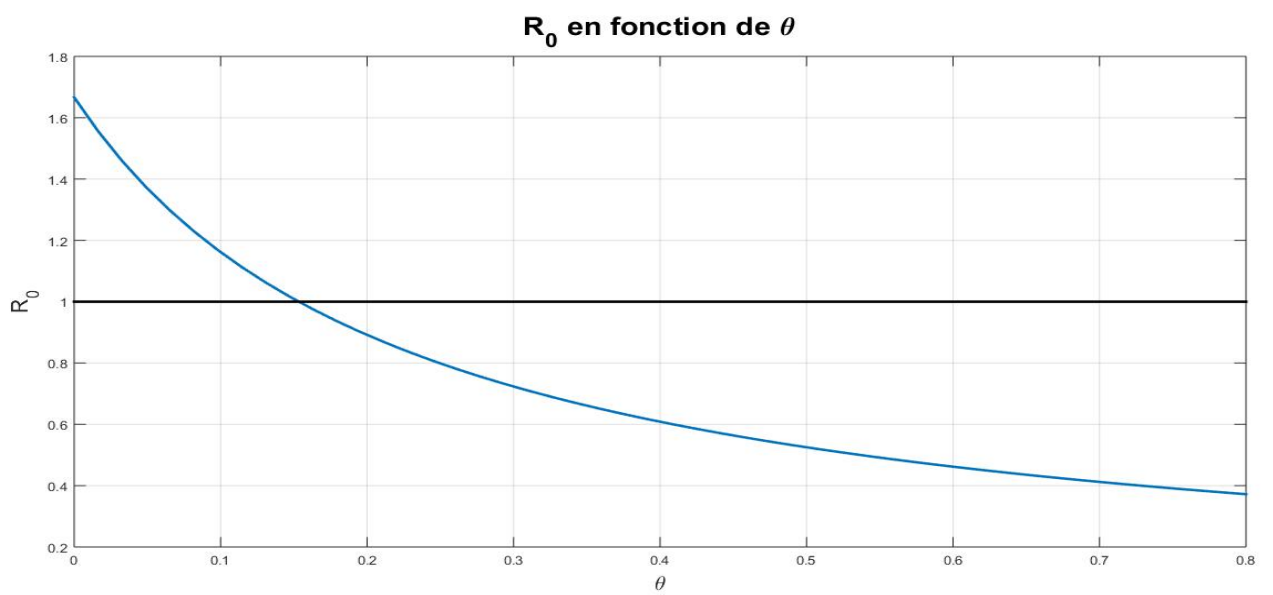


Figure 2.8 – L'effet du taux de quarantaine θ sur le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0

Chapitre 3

Dynamiques de seuil d'un modèle épidémique SIQ à structure d'âge et diffusion spatiale avec quarantaine imparfaite

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la durée de la quarantaine pour mieux comprendre comment cette dernière affecte la dynamique de la transmission de la maladie. C'est pour cela que nous proposons d'étudier un modèle SIQ structuré par âge de quarantaine avec diffusion spatiale et quarantaine imparfaite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = \delta_1 \Delta S(x, t) + \Lambda(x) - \mu(x)S(x, t) - \beta(x)H(S(x, t), I(x, t)) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \delta_2 \Delta I(x, t) + \beta(x)H(S(x, t), I(x, t)) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) I(x, t) \\ \quad + \int_0^\infty k(x, a)Q(x, a, t)da \\ \frac{\partial Q(x, a, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, a, t)}{\partial a} = -(\mu(x) + f_2(x) + k(x, a)) Q(x, a, t), \\ Q(x, 0, t) = \alpha(x)I(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

pour $t > 0$, $x \in \Omega$, avec les conditions aux limites et les conditions initiales

$$\begin{cases} S(x, 0) = S^0(x), & I(x, 0) = I^0(x), & Q(x, a, 0) = Q^0(x, a), & x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, & t > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $S(x, t)$ et $I(x, t)$ représentent respectivement la densité des individus susceptibles et infectés au temps t et à la position x . De plus, $Q(x, a, t)$ représente la densité des individus en quarantaine au temps t , d'âge a et à la position x . Les paramètres δ_1 et δ_2 sont les taux de diffusion respectifs de S et I . $\mu(x)$ représente le taux de mortalité naturelle. $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement les taux de mortalité dus à la maladie à la position x . La fonction $k(x, a)$ représente le taux de rechute des individus d'âge a et à la position x . $\alpha(x)$ est le taux de mise en quarantaine à la position x . Ω est un ensemble borné de \mathbb{R}^N à frontière régulière. Définissons

$$g_1(x) = \mu(x) + f_1(x) \quad \text{et} \quad g_2(x, a) = \mu(x) + f_2(x) + k(x, a).$$

Nous fournissons des notations et des hypothèses sur les paramètres du modèle (3.1),

$$\bar{\mu} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \mu(x), \quad \bar{\Lambda} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \Lambda(x), \quad \bar{\beta} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \beta(x), \quad \bar{\alpha} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x), \quad \bar{k}(a) = \max_{x \in \bar{\Omega}} k(x, a),$$

$$0 < \underline{\mu} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \mu(x), \quad 0 < \underline{\Lambda} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \Lambda(x), \quad 0 < \underline{\alpha} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x),$$

et

$$\underline{k}(a) = \min_{x \in \bar{\Omega}} k(x, a), \quad \underline{g}_1 = \min_{x \in \bar{\Omega}} g_1(x), \quad \underline{g}_2(a) = \min_{x \in \bar{\Omega}} g_2(x, a),$$

$$\bar{g}_1 = \max_{x \in \bar{\Omega}} g_1(x), \quad \bar{g}_2(a) = \max_{x \in \bar{\Omega}} g_2(x, a),$$

Maintenant, nous supposons toujours que

- Tous les paramètres du modèle (3.1) sont des fonctions höldériennes et strictement positives par rapport à x .

— La fonction $k \in C(\bar{\Omega}; L^\infty((0, \infty); \mathbb{R}_+))$. De plus, il existe $\underline{k} \in L^\infty((0, \infty); \mathbb{R}_+) \setminus 0$ telle que

$$\underline{k}(a) \leq k(x, a); \text{ pour tout; } x \in \bar{\Omega} \text{ et p.p.; } a \in \mathbb{R}_+. \quad (3.3)$$

Remarquons qu'il existe une constante $\bar{k} > 0$ telle que $k(x, a) \leq \bar{k}$ pour tout $x \in \Omega$ et p.p. $a \in (0, \infty)$.

Supposons également que l'incidence générale $H(S, I)$ satisfasse

- **(H1)** $H \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$.
- **(H2)** $H(0, y) = H(x, 0) = 0$ Pour tout $x, y \geq 0$.
- **(H3)** $H(\cdot, y)$ est croissante pour chaque $y > 0$.
- **(H4)** $\frac{\partial H}{\partial y}(\cdot, 0)$ est strictement positive sur chaque intervalle compact de \mathbb{R}_+ .
- **(H5)** $H(x, \cdot)$ est une fonction concave pour chaque $x > 0$.

3.2 Existence de la solution

Définissons $C := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ avec $\|\phi\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\phi(x)|$ et son cône positif $C_+ := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+)$. Notons

$$\mathbb{X} := C \times C \times L^1((0, \infty), C) \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} := C \times C \times C \times L^1((0, \infty), C)$$

et

$$\mathbb{X}^0 := C \times \{0_C\} \times L^1((0, \infty), C) \quad \text{et} \quad \mathbb{Y}^0 := C \times C \times \{0_C\} \times L^1((0, \infty), C)$$

et

$$\mathbb{Z} := C \times L^1((0, \infty), C) \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}^0 := \{0_C\} \times L^1((0, \infty), C)$$

avec

$$\begin{aligned} \|(\phi_1, \phi_2, \phi_3(\cdot))\|_{\mathbb{X}} &= \|\phi_1\| + \|\phi_2\| + \int_0^\infty \|\phi_3(\cdot, a)\| da \\ &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\phi_1(x)| + \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\phi_2(x)| + \int_0^\infty \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\phi_3(x, a)| da \\ \|(\phi_1, \phi_2)\|_{\mathbb{Z}} &= \|\phi_1\| + \int_0^\infty \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\phi_2(x, a)| da, \end{aligned}$$

et

$$\|\phi\|_{\mathbb{Z}^0} = \int_0^\infty \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\phi(x, a)| da.$$

Leurs cônes positifs sont donnés par

$$\mathbb{X}_+ := C_+ \times C_+ \times L_+^1((0, \infty), C_+), \quad \mathbb{Y}_+ = C_+ \times C_+ \times C_+ \times L_+^1((0, \infty), C_+)$$

et

$$\mathbb{X}_+^0 := C_+ \times \{0_C\} \times L_+^1((0, \infty), C_+), \quad \mathbb{Y}_+^0 = C_+ \times C_+ \times \{0_C\} \times L_+^1((0, \infty), C_+).$$

Considérons le problème suivant posé dans C

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial a} = -(\mu(\cdot) + f_2(\cdot) + k(\cdot, a)) \phi(a), & \tau < a < \infty, \\ \phi(\tau) = \eta \in C. \end{cases}$$

Ce problème génère une famille d'évolutions sur C , notée par Π . Elle est donnée explicitement par $0 \leq \tau \leq a < \infty$ et $\eta \in C$ par

$$\Pi(a, \tau)\eta = \gamma(\cdot, a, \tau)\eta,$$

avec $\gamma(x, a, \tau) = e^{-\int_\tau^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x, s)) ds}$ pour $0 \leq \tau \leq a < \infty$ et $x \in \bar{\Omega}$.

Notons,

$$\gamma(x, a) := \gamma(x, a, 0) := e^{-\int_0^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x, s)) ds}.$$

Observons que

$$\|\Pi(a, \tau)\| \leq e^{-\int_\tau^a \mu(x) ds} \leq e^{-\mu(a-\tau)} \leq 1, \quad \text{pour } 0 \leq \tau \leq a < \infty.$$

Ensuite, nous définissons la famille d'opérateurs linéaires bornés $\{R_\lambda\}$ qui associe \mathbb{Z} à \mathbb{Z}^0 pour $\lambda > -\underline{\mu}$ par $R_\lambda(\eta, g) = (0, h)$ avec

$$h(a) = \Pi(a, 0)e^{-\lambda a}\eta + \int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\Pi(a, s)g(s)ds, \quad (3.4)$$

D'abord, nous rappelons la définition d'une pseudo-résolvante

Définition 3.1. Soit X un espace de Banach sur \mathbb{K} , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $\Delta \subset \mathbb{K}$. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ sur X est appelée une **pseudo-résolvante** si la propriété suivante est satisfaite :

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda)J_\lambda J_\mu, \quad \forall \lambda, \mu \in \Delta.$$

Montrons que $\{R_\lambda\}_{\lambda > -\underline{\mu}}$ fournit une famille de pseudo-résolvantes. En effet, pour $\nu \neq \lambda$, nous avons

$$\begin{aligned} R_\nu R_\lambda(\eta, g) &= \left(0, \int_0^a e^{-\nu(a-s)}\Pi(a, s)h(s) ds\right) \\ &= \left(0, \int_0^a e^{-\nu(a-s)}\Pi(a, s)\Pi(s, 0)\eta ds\right) \\ &\quad + \left(0, \int_0^a e^{-\nu(a-s)}\Pi(a, s) \int_0^s e^{-\lambda(s-\sigma)}\Pi(s, \sigma)g(\sigma) d\sigma ds\right). \end{aligned}$$

Par un calcul direct, nous obtenons

$$R_\nu R_\lambda(\eta, g) = \frac{1}{\nu - \lambda}(R_\nu - R_\lambda)(\eta, g).$$

De plus, nous pouvons également voir que pour tout $\lambda > -\underline{\mu}$

$$R_\lambda(\eta, g) = 0 \text{ si seulement si } \eta = 0 \text{ et } g = 0.$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda(0, g) = (0, g), \text{ pour tout } (0, g) \in \mathbb{Z}^0.$$

En utilisant la proposition suivante,

Proposition 3.1. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et soit $\{J_\lambda\}_{\lambda \in (\omega, +\infty)}$ une pseudo-résolvante sur un espace de Banach X . Alors, J_λ est la résolvante d'un opérateur linéaire fermé unique $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ si et seulement si $\mathcal{N}(J_\lambda) = \{0\}$.

Nous concluons qu'il existe un unique opérateur fermé $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ avec $\overline{D(\mathcal{B})} = \mathbb{Z}^0$ tel que

$$(\lambda I - \mathcal{B})^{-1} = R_\lambda \text{ pour tout } \lambda > -\underline{\mu}. \quad (3.5)$$

Maintenant, il reste à démontrer que \mathcal{B} est un opérateur de Hille-Yoshida. Nous considérons la résolvante de R_λ ,

$$(\lambda I - \mathcal{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

nous avons,

$$\psi(a) = e^{-\lambda a} e^{-\int_0^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x,s)) ds} \phi_1 + \int_0^a e^{-\lambda(a-s)} e^{-\int_s^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x,s)) ds} \phi_2(s) ds, \quad (3.7)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda I - \mathcal{B})^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{Z}^k} &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda a} e^{-\int_0^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x,s)) ds} \|\phi_1\| da \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_0^a e^{-\lambda(a-s)} e^{-\int_s^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x,s)) ds} \|\phi_2(s)\| ds da \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda a} e^{-\underline{\mu} a} \|\phi_1\| da + \int_0^{+\infty} \int_0^a e^{-\lambda(a-s)} e^{-\underline{\mu}(a-s)} \|\phi_2(s)\| ds da \\ &\leq \frac{1}{\underline{\mu} + \lambda} \left\| \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Alors, \mathcal{B} vérifie la condition de Hille-Yosida.

$$\|R_\lambda(\phi)\|_{\mathbb{Z}^0} \leq \frac{1}{\underline{\mu} + \lambda} \|\phi\|_{\mathbb{Z}} \text{ pour tout } \lambda > -\underline{\mu}. \quad (3.8)$$

Par conséquent, \mathcal{B} est un opérateur de Hille-Yosida. De plus, d'après la Proposition [1.9](#), \mathcal{B} est le générateur d'un semi-groupe intégré exponentiellement borné et non dégénéré. $(T_{\mathcal{B}}(t))_{t \geq 0}$, c'est-à-dire, il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\|T_{\mathcal{B}}(t)\| \leq M e^{\omega t}$ pour $t \geq 0$.

D'autre part, pour tout $i = 1, 2$, notons par \mathcal{A}_i l'opérateur linéaire sur C qui

est donné par

$$\mathcal{A}_i\phi = \delta_i\Delta\phi, \quad D(\mathcal{A}_i) = \{\phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad \delta_i\Delta\phi \in C, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (3.9)$$

où δ_i , $i = 1, 2$, sont des constantes strictement positives. Les opérateurs \mathcal{A}_i , $i = 1, 2$, sont les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus sur C .

Ensuite, pour $\phi = (\phi_1, \phi_2, (0, \phi_3))^T \in \mathbb{Y}^0$, nous définissons l'opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ par

$$\mathcal{A}\phi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1\phi_1 \\ \mathcal{A}_2\phi_2 \\ \mathcal{B}(0, \phi_3)^T \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

avec $D(\mathcal{A}) := D(\mathcal{A}_1) \times D(\mathcal{A}_2) \times D(\mathcal{B})$. \mathcal{A} est composé de générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe fortement continu sur C et d'un générateur d'un semi-groupe intégré sur \mathbb{Z} qui sont exponentiellement bornés ; pour plus de détails (voir la Proposition [1.9](#)). Ainsi, \mathcal{A} est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné $(\mathcal{S}(t))_{t \geq 0}$.

Considérons l'opérateur non linéaire $\mathcal{F} : \mathbb{Y}^0 \rightarrow \mathbb{Y}$ qui est défini par

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = \begin{pmatrix} \Lambda(x) - \beta(x)H(\phi_1(x), \phi_2(x)) - \mu\phi_1(x), \\ \beta(x)H(\phi_1(x), \phi_2(x)) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))\phi_2(x) + \int_0^\infty k(x, a)\phi_3(x, a)da \\ \begin{pmatrix} \alpha(x)\phi_2(x) \\ 0_C \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Le problème [\(3.1\)](#)-[\(3.2\)](#) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{U}(t) + \mathcal{F}(\mathbf{U}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{U}(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

avec $\mathbf{U} = (S, I, (0, Q))^T$.

Définissons la partie de \mathcal{A} dans \mathbb{Y}^0 notée par \mathcal{A}_0 . C'est à dire,

$$\mathcal{A}_0 u = \mathcal{A} u, \text{ pour tout } u \in D(\mathcal{A}_0), \text{ avec } D(\mathcal{A}_0) := \left\{ u \in D(\mathcal{A}); \mathcal{A} u \in \mathbb{Y}^0 \right\}.$$

Théorème 3.1. *Quel que soit $U_0 \in \mathbb{Y}_+^0$, il existe un intervalle maximal d'existence $[0, T_0)$ et une fonction continue, non négative et unique U de $[0, T_0)$ vers \mathbb{Y}_+^0 solution de (3.11), telle que*

$$U(t) = T_{\mathcal{A}_0}(t)U_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\mathcal{F}(U(s))ds. \quad (3.12)$$

Démonstration. D'après ce qui précède, \mathcal{A} est un opérateur de Hille-Yosida sur \mathbb{Y} . De plus, nous pouvons vérifier les hypothèses des Théorèmes 3.8 et 5.1 dans [62]. Pour la positivité de la solution, nous appliquons la Proposition 5.1 dans [62]. \square

Remarque 3.1. U est appelée solution faible de (3.11) dans $C([0, T_0), \mathbb{Y}_0)$.

Théorème 3.2. *Pour tout $(S^0, I^0, Q^0) \in \mathbb{X}_+$ il existe une solution unique, positive et globale de (3.1)-(3.2).*

Démonstration. Puisque $H(x, y)$ est strictement positive pour chaque (x, y) positif, le principe de comparaison implique que $0 \leq S(x, t) \leq \tilde{s}(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$, où \tilde{s} est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = \delta_1 \Delta \tilde{s}(x, t) + \Lambda(x) - \mu(x)\tilde{s}(x, t) \\ \tilde{s}(x, 0) = S^0(x) \\ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{n}} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Clairement, (3.13) a une unique solution globale et S est également définie globalement sur $\Omega \times (0, \infty)$. De plus, \tilde{s} converge vers l'état stationnaire noté $\tilde{S}(x)$. Cela conduit à

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{s}(x, t) = \tilde{S}(x), \text{ uniformément pour } x \in \bar{\Omega}. \quad (3.14)$$

D'où, il existe une constante K qui dépend de la condition initiale telle que

$\|S(\cdot, t)\| \leq K$ pour tout $t \geq 0$.

Soit $\{\mathcal{S}_2(t)\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe positif généré par l'opérateur $\delta_2 \Delta - (\mu(\cdot) + f_1(\cdot) + \alpha(\cdot))$ dans $C(\bar{\Omega})$ avec des conditions aux limites de Neumann. D'après (3.1) et (H3), nous avons

$$\begin{aligned} I(\cdot, t) &= \mathcal{S}_2(t)I^0(\cdot) + \int_0^t \mathcal{S}_2(t-s) \left(\beta(\cdot)H(S(\cdot, s), I(\cdot, s)) + \int_0^\infty k(\cdot, a)Q(\cdot, a, s)dad s \right), \\ &\leq \mathcal{S}_2(t)I^0(\cdot) + \int_0^t \mathcal{S}_2(t-s) \left(\beta(\cdot)H(K, I(\cdot, s)) + \int_0^\infty k(\cdot, a)Q(\cdot, a, s)dad s \right) \end{aligned}$$

Selon (H2), (H5) nous avons

$$H(K, I) \leq I \frac{\partial H}{\partial I}(K, 0).$$

Cela, conduit à

$$\begin{aligned} I(\cdot, t) &\leq \mathcal{S}_2(t)I^0(\cdot) + \int_0^t \mathcal{S}_2(t-s) \left(\beta(\cdot)I(\cdot, t) \frac{\partial H}{\partial I}(K, 0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s k(\cdot, a)\alpha(\cdot)\gamma(\cdot, a)I(\cdot, s-a) da ds + \int_s^\infty k(\cdot, a) \frac{\gamma(\cdot, a)}{\gamma(\cdot, a-s)} Q^0(\cdot, a-s) da ds \right). \end{aligned}$$

Il en découle alors, en utilisant (H4),

$$\begin{aligned} \|I(t)\| &\leq e^{-\lambda t} \|I^0\| + \bar{\beta} \left| \frac{\partial H}{\partial I}(K, 0) \right| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|I(s)\| ds + \bar{\alpha} \bar{k} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \int_0^s \|I(\sigma)\| d\sigma ds \\ &\quad + \bar{k} \|Q^0\|_{L^1((0, \infty), C)} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds, \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ est la valeur propre principale de l'opérateur $-\delta_2 \Delta + \mu(\cdot) + f_1(\cdot) + \alpha(\cdot)$ avec des conditions aux limites de Neumann. D'après le Théorème de Fubini, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|I(t)\| &\leq e^{-\lambda t} \|I^0\| + \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \bar{k} \|Q^0\|_{L^1((0, \infty), C)} + \bar{\beta} \left| \frac{\partial H}{\partial I}(K, 0) \right| \int_0^t \|I(s)\| ds \\ &\quad + \bar{\alpha} \bar{k} e^{-\lambda t} \int_0^t \int_\sigma^t e^{\lambda s} \|I(\sigma)\| ds d\sigma, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|I(t)\| &\leq e^{-\lambda t} \|I^0\| + \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \bar{k} \|Q^0\|_{L^1((0,\infty),C)} + \bar{\beta} \left| \frac{\partial H}{\partial I}(K, 0) \right| \int_0^t \|I(s)\| ds \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \bar{\alpha} \bar{k} \int_0^t \|I(\sigma)\| d\sigma, \\
&\leq C_1 + C_2 \int_0^t \|I(s)\| ds,
\end{aligned}$$

où $C_1 = \|I^0\| + \frac{1}{\lambda} \bar{k} \|Q^0\|_{L^1((0,\infty),C)}$ et $C_2 = \bar{\beta} \left| \frac{\partial H}{\partial I}(K, 0) \right| + \frac{1}{\lambda} \bar{\alpha} \bar{k}$. Alors en appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\|I(t)\| \leq C_1 e^{C_2 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.15)$$

De plus, d'après (3.16), nous observons que Q est également défini globalement. En outre, par la méthode des caractéristiques, nous obtenons la solution de Q qui est donnée par

$$Q(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x) \gamma(x, a) I(x, t - a), & \text{si } t > a, \\ \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)} Q^0(x, a - t), & \text{si } t < a. \end{cases} \quad (3.16)$$

D'où,

$$|Q(x, a, t)| \leq |\alpha(x) \gamma(x, a) I(x, t - a)| \chi_{\{a \in (0, t]\}} + |k(x, a) \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)} Q^0(x, a - t)| \chi_{\{a \in [t, \infty)\}},$$

alors,

$$\|Q(\cdot, a, t)\| \leq \bar{\alpha} \|\gamma(\cdot, a) I(\cdot, t - a)\| \chi_{\{a \in (0, t]\}} + \|k(\cdot, a) \frac{\gamma(\cdot, a)}{\gamma(\cdot, a - t)} Q^0(\cdot, a - t)\| \chi_{\{a \in [t, \infty)\}}, \quad (3.17)$$

En utilisant (3.15), il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} \|Q(\cdot, a, t)\|_{L^1((0, \infty), C)} &= \int_0^\infty \|Q(\cdot, a, t)\| da \leq \bar{\alpha} \int_0^\infty C_1 e^{C_2(t-a)} da + \bar{k} \|Q^0\|_{L^1((0, \infty), C)}, \\ &\leq \frac{\bar{\alpha} C_1}{C_2} e^{C_2 t} + \bar{k} \|Q^0\|_{L^1((0, \infty), C)}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. \square

3.2.1 Existence de l'attracteur global compact

Lemme 3.1. *L'égalité suivante est vérifiée.*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty Q(x, a, t) da = \alpha(x) I(x, t) - \int_0^\infty (\mu(x) + f_2(x) + k(x, a)) Q(x, a, t) da, \quad (3.18)$$

Démonstration. D'après (3.16) nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q(x, a, t) da &= \int_0^t Q(x, a, t) da + \int_t^\infty Q(x, a, t) da, \\ &= \alpha(x) \int_0^t I(x, t-a) \gamma(x, a) da + \int_t^\infty Q^0(x, a-t) \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a-t)} da. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $\tilde{a} = t - a$ pour la première intégrale et $\tilde{a} = a - t$ pour la seconde, on obtient

$$\int_0^\infty Q(x, a, t) da = \alpha(x) \int_0^t I(x, \tilde{a}) \gamma(x, t - \tilde{a}) d\tilde{a} + \int_0^\infty Q^0(x, \tilde{a}) \frac{\gamma(x, t + \tilde{a})}{\gamma(x, \tilde{a})} d\tilde{a}.$$

Cela donne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty Q(x, a, t) da &= \alpha(x) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t I(x, \tilde{a}) \gamma(x, t - \tilde{a}) d\tilde{a} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty Q^0(x, \tilde{a}) \frac{\gamma(x, t + \tilde{a})}{\gamma(x, \tilde{a})} d\tilde{a} \\ &= \alpha(x) I(x, t) + \alpha(x) \int_0^t I(x, \tilde{a}) \frac{\partial}{\partial t} \gamma(x, t - \tilde{a}) d\tilde{a} \\ &\quad + \int_0^\infty Q^0(x, \tilde{a}) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\gamma(x, t + \tilde{a})}{\gamma(x, \tilde{a})} d\tilde{a}. \end{aligned}$$

Un simple calcul donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\gamma(x, t + \tilde{a})}{\gamma(x, \tilde{a})} = -(\mu(x) + f_2(x) + k(x, \tilde{a} + t)) \frac{\gamma(x, t + \tilde{a})}{\gamma(x, \tilde{a})},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(x, t - \tilde{a}) = -(\mu(x) + f_2(x) + k(x, t - \tilde{a})) \gamma(x, t - \tilde{a}).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty Q(x, a, t) da &= \alpha(x) I(x, t) - \alpha(x) \int_0^t I(x, \tilde{a}) (\mu(x) + f_2(x) + k(x, t - \tilde{a})) \gamma(x, t - \tilde{a}) \\ &\quad - \int_0^\infty Q^0(x, \tilde{a}) (\mu(x) + f_2(x) + k(x, \tilde{a} + t)) \frac{\gamma(x, t + \tilde{a})}{\gamma(x, \tilde{a})} d\tilde{a}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $a = t - \tilde{a}$ pour la première intégrale et $a = \tilde{a} + t$ pour la seconde, nous obtenons [\(3.18\)](#). \square

Lemme 3.2. *Le semi-flot Φ_t est éventuellement borné et un point dissipatif dans \mathbb{X}_+ .*

Démonstration. Soit M un ensemble borné quelconque dans \mathbb{X}_+ . Nous allons démontrer que $\Phi_t(M)$ est borné pour tout $t \geq 0$, et qu'il existe une constante strictement positive \hat{k} indépendante des conditions initiales vérifiant

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\|S(\cdot, t)\| + \|I(\cdot, t)\| + \int_0^\infty \|Q(\cdot, a, t)\| \right) da \leq \hat{k},$$

à travers les affirmations suivantes :

Affirmation 1 : Nous observons que la constante strictement positive

$$\hat{S} := \max \left\{ \max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{\Lambda(x)}{\mu(x)}, \max_{x \in \bar{\Omega}} S^0(x) \right\}$$

est une sur-solution de [\(3.13\)](#). Ainsi d'après le principe de comparaison standard, nous obtenons

$$S(x, t) \leq \tilde{s}(x, t) \leq \hat{S}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq 0. \quad (3.19)$$

De plus, il est déjà prouvé dans [\(3.14\)](#) qu'il existe une constante stricte-

ment positive k_0 indépendante de ϕ telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|S(\cdot, t)\| \leq k_0.$$

Affirmation 2 : Il existe $L > 0$ pour tout $r > 0$ vérifiant $\phi = \|S^0\| + \|I^0\| + \|Q^0\|_{L^1((0, \infty), C)} \leq r$, telle que $\|S(\cdot, t)\|_1 + \|I(\cdot, t)\|_1 + \left\| \int_0^\infty Q(\cdot, a, t) da \right\|_1 \leq L$ pour tout $t \geq t_0(r)$. De plus, il existe une constante strictement positive k_1 indépendante de ϕ telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\|S(\cdot, t)\|_1 + \|I(\cdot, t)\|_1 + \left\| \int_0^\infty Q(\cdot, a, t) da \right\|_1 \right) \leq k_1.$$

En posant

$$N(x, t) = S(x, t) + I(x, t) + \int_0^\infty Q(x, a, t) da,$$

et

$$\hat{N}(t) = \int_\Omega N(x, t) dx.$$

En intégrant les deux premières équations de (3.1) et (3.18) sur Ω , en utilisant le lemme 3.1, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{N}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(S(x, t) + I(x, t) + \int_0^\infty Q(x, a, t) da \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty Q(x, a, t) da \right) dx \\ &= \int_\Omega (\delta_1 \Delta S(x, t) + \delta_2 \Delta I(x, t)) dx \\ &\quad + \int_\Omega \left(\Lambda(x) - \underline{\mu}(x) \left(S(x, t) + I(x, t) + \int_0^\infty Q(x, a, t) da \right) \right) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(f_1(x) I(x, t) + f_2(x) \int_0^\infty Q(x, a, t) da \right) dx \\ &\leq \int_\Omega (\delta_1 \Delta S + \delta_2 \Delta I) dx + \int_\Omega (\bar{\Lambda} - \underline{\mu} N(x, t)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\delta_1 S(x, t) + \delta_2 I(x, t)) dx + \bar{\Lambda} |\Omega| - \underline{\mu} \hat{N}(t) \\ &= \bar{\Lambda} |\Omega| - \underline{\mu} \hat{N}(t). \end{aligned}$$

d'où,

$$\hat{N}(t) \leq (\hat{N}(0) - \frac{\bar{\Lambda}|\Omega|}{\underline{\mu}})e^{-\mu t} + \frac{\bar{\Lambda}|\Omega|}{\underline{\mu}} \leq L.$$

et ainsi

$$(r - \frac{\bar{\Lambda}|\Omega|}{\underline{\mu}})e^{-\mu t} < L.$$

D'où,

$$t > \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{r + \frac{\bar{\Lambda}|\Omega|}{\underline{\mu}}}{L - \frac{\bar{\Lambda}|\Omega|}{\underline{\mu}}}\right) := t_0(r).$$

Par suite,

$\exists L > 0, \forall \phi < r, \exists t_0(r)$ tel que $\forall t > t_0(r)$ on a $\hat{N}(t) \leq L$.

De plus,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \hat{N}(t) \leq \frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\mu}}|\Omega|. \quad (3.20)$$

L'affirmation est prouvée en prenant $k_1 = \frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\mu}}|\Omega|$.

Affirmation 3 : Pour tout $n \geq 0$, il existe une constante strictement positive $L(n)$ et pour tout $r > 0$ et $\exists t_0(n, r)$ vérifiant $\phi = \|S^0\|_{2^n} + \|I^0\|_{2^n} + \|\int_0^\infty Q^0(a, \cdot) da\|_{2^n} \leq r$, telle que

$$\|I(\cdot, t)\|_{2^n} + \|\int_0^\infty Q(\cdot, a, t) da\|_{2^n} \leq L(n),$$

pour tout $t \geq t_0(n, r)$. De plus, il existe une constante strictement positive k_{2^n} indépendante de ϕ vérifiant

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|I(\cdot, t)\|_{2^n} + \|\int_0^\infty Q(x, a, t) da\|_{2^n} \leq k_{2^n}.$$

Ce résultat sera démontré par récurrence. De l'affirmation 1 nous déduisons que le cas $n = 0$ est vrai. Supposons que l'énoncé soit vrai pour $n - 1$. Cela signifie qu'il existe des constantes strictement positives

$L(n-1)$ et $k_{2^{n-1}}$, $\forall r > 0$, $\exists t_0(n-1, r)$ vérifiant

$$\|I(\cdot, t)\|_{2^{n-1}}^{2^{n-1}} + \left\| \int_0^\infty Q(x, a, t) da \right\|_{2^{n-1}}^{2^{n-1}} \leq L(n-1), \quad \forall t > t_0(n-1, r) \quad (3.21)$$

$$\|\phi\| = \|S^0\|_{2^{n-1}} + \|I^0\|_{2^{n-1}} + \left\| \int_0^\infty Q^0(a, \cdot) da \right\|_{2^{n-1}} \leq r \text{ et}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|I(\cdot, t)\|_{2^{n-1}}^{2^{n-1}} + \left\| \int_0^\infty Q(x, a, t) \right\|_{2^{n-1}}^{2^{n-1}} \leq k_{2^{n-1}}.$$

En multipliant la deuxième équation de (3.1) par $(I(x, t))^{2^n-1}$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx &= \delta_2 \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} \Delta I(x, t) dx \\ &+ \int_{\Omega} \beta(x) (I(x, t))^{2^n-1} H(S(x, t), I(x, t)) dx \\ &- \int_{\Omega} (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) (I(x, t))^{2^n} dx \\ &+ \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} \int_0^\infty k(a, x) Q(x, a, t) da dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Notons que

$$\begin{aligned} \delta_2 \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} \Delta I(x, t) dx &= -\delta_2 \int_{\Omega} \nabla I(x, t) \nabla (I(x, t))^{2^n-1} dx \\ &= -(2^n - 1) \delta_2 \int_{\Omega} (\nabla I(x, t) \cdot \nabla I(x, t)) (I(x, t))^{2^n-2} dx \\ &= -\frac{2^n-1}{2^{2n-2}} \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla (I(x, t))^{2^n-1}|^2 dx. \end{aligned}$$

D'où, (3.22) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx &= -\frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla(I(x, t))^{2^{n-1}}|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \beta(x) (I(x, t))^{2^{n-1}} H(S(x, t), I(x, t)) dx \\ &- \int_{\Omega} (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) (I(x, t))^{2^n} dx \\ &+ \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^{n-1}} \int_0^{\infty} \kappa(x, a) Q(x, a, t) da dx. \end{aligned}$$

Selon (3.19), $S(x, t) \leq \hat{S}$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $t \geq 0$. Ceci, avec (H1) et (H5), conduit à, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx &= -\frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla(I(x, t))^{2^{n-1}}|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \beta(x) (I(x, t))^{2^{n-1}} H(S(x, t), I(x, t)) dx \\ &- \int_{\Omega} (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) (I(x, t))^{2^n} dx \\ &+ \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^{n-1}} \int_0^{\infty} \kappa(x, a) Q(x, a, t) da dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx &\leq -\frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla(I(x, t))^{2^{n-1}}|^2 dx + (M_1 - \underline{\mu}) \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx \\ &+ \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^{n-1}} \int_0^{\infty} \kappa(x, a) Q(x, a, t) da dx \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec $M_1 \geq \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial I} H(\hat{S}, 0)$ (on observe que d'après (H3), on peut choisir une constante strictement positive M_1 dépendant uniquement du compact auquel appartiennent les données initiales. Nous fournissons maintenant quelques estimations sur le terme non local

$$\int_{\Omega} (I(x, t))^{2^{n-1}} \int_0^{\infty} \kappa(x, a) Q(x, a, t) da.$$

Rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \varepsilon' a^p + C_{\varepsilon'} b^q,$$

avec $C_{\varepsilon'} = (\varepsilon' p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Posons $p = 2^n$, et $q = \frac{2^n}{2^n - 1}$. Le terme

non local peut être exprimé comme

$$\begin{aligned}
L(t) &= \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} \int_0^{\infty} \kappa(x, a) Q(x, a, t) da dx, \\
&\leq \bar{k} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} \int_0^{\infty} Q(x, a, t) da dx, \\
&\leq C_{\varepsilon'} \bar{k} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx + \varepsilon' \bar{k} \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} Q(x, a, t) da \right)^{2^n} dx.
\end{aligned}$$

Donc, (3.23) devient pour $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx &\leq -D_n \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla (I(x, t))^{2^n-1}|^2 dx \\
&\quad + (M_1 - \underline{\mu} + \bar{k} C_{\varepsilon'}) \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx \quad (3.24) \\
&\quad + \bar{k} \varepsilon' \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} Q(x, a, t) da \right)^{2^n} dx,
\end{aligned}$$

avec $D_n = \frac{2^n-1}{2^{2n-2}}$. D'autre part, en posant $\bar{Q}(x, t) = \int_0^{\infty} Q(x, a, t) da$ et en utilisant l'équation (3.18), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{Q}(x, t) \leq \bar{\alpha} I(x, t) - \underline{\mu} \bar{Q}(x, t). \quad (3.25)$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité (3.25) par $(\bar{Q}(x, t))^{2^n-1}$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons

$$\frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx \leq \bar{\alpha} \int_{\Omega} I(x, t) (\bar{Q}(x, t))^{2^n-1} dx - \underline{\mu} \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx.$$

En appliquant l'inégalité de Young avec $p = 2^n$, et $q = \frac{2^n}{2^n-1}$, nous obtenons

$$\int_{\Omega} I(x, t) (\bar{Q}(x, t))^{2^n-1} dx \leq \varepsilon'_1 \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx + C_{\varepsilon'_1} \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx.$$

D'où,

$$\frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx \leq \bar{\alpha} \epsilon'_1 \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx + (\bar{\alpha} C_{\epsilon'_1} - \underline{\mu}) \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx \quad (3.26)$$

En additionnant (3.24) et (3.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left[(I(x, t))^{2^n} + (\bar{Q}(x, t))^{2^n} \right] dx &\leq -D_n \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla(I(x, t))^{2^n-1}|^2 dx \\ &+ (M_1 - \underline{\mu} + \bar{k} C_{\epsilon'} + \bar{\alpha} \epsilon'_1) \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx \\ &+ (\bar{k} \epsilon' + \bar{\alpha} C_{\epsilon'_1} - \underline{\mu}) \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx, \end{aligned} \quad (3.27)$$

en utilisant l'inégalité d'interpolation qui est : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_{ε} vérifiant

$$\|f\|_2^2 \leq \varepsilon \|\nabla f\|_2^2 + C_{\varepsilon} \|f\|_1^2, \quad f \in W^{1,2}(\Omega).$$

Posons $f = (I(x, t))^{2^n-1}$, ainsi

$$-D_n \delta_2 \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla(I(x, t))^{2^n-1}|^2 dx \leq -D_n \delta_2 \varepsilon \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} dx + D_n \delta_2 C_{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} dx \right)^2. \quad (3.28)$$

En combinant (3.28) et (3.27), ça donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left[(I(x, t))^{2^n} + (\bar{Q}(x, t))^{2^n} \right] dx &\leq \left(M_1 - \underline{\mu} + \bar{k} C_{\epsilon'} + \bar{\alpha} \epsilon'_1 - \frac{D_n \delta_2}{\varepsilon} \right) \int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n} \\ &dx + \left(\bar{k} \epsilon' + \bar{\alpha} C_{\epsilon'_1} - \underline{\mu} \right) \int_{\Omega} (\bar{Q}(x, t))^{2^n} dx \\ &+ \frac{D_n \delta_2 C_{\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} (I(x, t))^{2^n-1} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Maintenant, choisissons ϵ' , $C_{\epsilon'_1}$ telles que $0 < \epsilon' < \frac{\underline{\mu}}{\bar{k}}$ et $0 < C_{\epsilon'_1} < \frac{\underline{\mu} - \bar{k} \epsilon'}{\bar{\alpha}}$. Finalement nous choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $M_1 - \underline{\mu} + \bar{k} C_{\epsilon'} + \bar{\alpha} \epsilon'_1, 0 < \frac{D_n \delta_2}{\varepsilon}$. Maintenant, en combinant l'hypothèse de récurrence et (3.29),

nous montrons l'existence de constantes $L(n) > 0$ et $k_{2^n} > 0$ telles que

$$\|I(\cdot, t)\|_{2^n} + \left\| \int_0^\infty Q(\cdot, a, t) da \right\|_{2^n} \leq L(n), \quad \forall t \geq t_0(n, r)$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|I(\cdot, t)\|_{2^n}^{2^n} + \|\bar{Q}(\cdot, t)\|_{2^n}^{2^n} \leq k_{2^n}.$$

L'affirmation est prouvée.

Affirmation 4 : Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $L(p)$ et pour tout $r > 0$, il existe $t_0(p, r)$ tel que $\phi = \|S^0\| + \|I^0\| + \int_0^\infty \|Q^0(a, \cdot)\| da \leq r$ et

$$\|I(\cdot, t)\|_p + \int_0^\infty \|Q(\cdot, a, t)\|_p da \leq L(p)$$

pour tout $t \geq t_0(p, r)$. De plus il existe une constante strictement positive k_p , indépendante de la condition initiale vérifiant

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|I(\cdot, t)\|_p^p + \|\bar{Q}(\cdot, t)\|_p^p da \leq k_p.$$

Cette affirmation est prouvée en combinant l'affirmation 3 et l'injection continue $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq q$.

Par un argument similaire à celui de la preuve du Lemme [2.3](#), nous pouvons déduire qu'il existe des constantes strictement positives k_∞ et k_2 telles que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|I(\cdot, t)\| \leq k_\infty$ et $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|Q(\cdot, \cdot, t)\|_{L^1((0, \infty), C)} \leq k_2$.

Donc, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\|S(\cdot, t)\| + \|I(\cdot, t)\| + \|Q(\cdot, \cdot, t)\|_{L^1((0, \infty), C)} \right) \leq \hat{k}$ dé-
tient avec $\hat{k} = k_0 + k_\infty + k_2$. Ceci implique que le semi-flot Φ_t est éventuellement borné et point dissipatif dans \mathbb{X}_+ . La preuve est terminée. \square

Proposition 3.2. *Le semi-flot $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ est asymptotiquement régulier.*

Démonstration. Le semi-flot Φ_t est dit asymptotiquement régulier si, pour tout ensemble fermé borné D invariant par Φ_t et pour tout $u_n^0 := (S_n^0, I_n^0, Q_n^0) \in$

D , le semi-flot $\Phi_t(u_n^0)$ admet une sous-suite convergente dans \mathbb{X} .

Soient $\{\mathcal{S}_1(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{\mathcal{S}_2(t)\}_{t \geq 0}$ les semi-groupes compacts générés, respectivement, par les opérateurs $\delta_1 \Delta - \mu(\cdot)$ et $\delta_2 \Delta - (\mu(\cdot) + f_1(\cdot) + \alpha(\cdot))$ dans $C(\bar{\Omega})$ avec des conditions aux bords de Neumann. D'après (3.1) on a

$$S(\cdot, t) = \mathcal{S}_1(t)S^0 + \int_0^t \mathcal{S}_1(t-s)F_1(S(\cdot, s), I(\cdot, s))ds,$$

et

$$I(\cdot, t) = \mathcal{S}_2(t)I^0 + \int_0^t \mathcal{S}_2(t-s)F_2(S(\cdot, s), I(\cdot, s), Q(\cdot, \cdot, s))ds,$$

avec

$$F_1(S(\cdot, t), I(\cdot, t)) = \Lambda(\cdot) - \beta(\cdot)H(S(\cdot, t), I(\cdot, t)),$$

et

$$F_2(S(\cdot, t), I(\cdot, t), Q(\cdot, \cdot, t)) = \beta(\cdot)H(S(\cdot, t), I(\cdot, t)) + \int_0^\infty k(\cdot, a)Q(\cdot, a, t)da.$$

Soient $u_n^0 \in \mathbb{X}_+$ et

$$\Phi_t(u_n^0) := (S_n(\cdot, t), I_n(\cdot, t), Q_n(\cdot, \cdot, t)), \quad t \geq 0.$$

Pour prouver que Φ_t est asymptotiquement régulier, nous utilisons le Théorème 1.17. Pour cela, notons

$$\hat{Q}_n(x, a, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \geq a \\ Q_n^0(x, a-t) \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a-t)}, & \text{si } a \geq t, \end{cases}$$

et

$$\tilde{Q}_n(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x)I_n(x, t-a)\gamma(x, a), & \text{si } t > a \\ 0, & \text{si } a \geq t. \end{cases} \quad (3.30)$$

avec

$$\gamma(x, a) = e^{-\int_0^a (\mu(x) + f_2(x) + k(x, \tau))d\tau}.$$

Posons $\hat{\Phi}_t(u_n^0) = (0, 0, \hat{Q}_n)$ et $\tilde{\Phi}_t(u_n^0) = (S_n, I_n, \tilde{Q}_n)$. Observons que $\Phi_t(u_n^0) =$

$\hat{\Phi}_t(u_n^0) + \tilde{\Phi}_t(u_n^0)$. D'abord, nous avons

$$\|\hat{Q}_n(\cdot, a, t)\| \leq \|\hat{Q}_0^n(\cdot, a - t)\| e^{-\mu t} \chi_{\{a \in (t, \infty)\}},$$

ainsi

$$\|\hat{Q}_n(t)\|_{L^1((0, \infty), C)} \leq \|\hat{Q}_0^n\|_{L^1((0, \infty), C)} e^{-\mu t}$$

ce qui donne,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam} \hat{\Phi}_t(D) = 0,$$

pour tout ensemble D fermé borné et invariant dans \mathbb{X} . Ensuite, nous prouvons que $\tilde{\Phi}_t$ a une fermeture compacte dans \mathbb{X} .

En utilisant **(H1)** et le Lemme 3.2, on peut démontrer que $\{F_1(S_n(\cdot, s), I_n(\cdot, s)); s \in [0, t], u_n^0 \in D\}$ et $\{F_2(S_n(\cdot, s), I_n(\cdot, s), Q_n(\cdot, \cdot, s)); s \in [0, t], u_n^0 \in D\}$ sont uniformément bornés. Par conséquent, $\{S_n(\cdot, t), u_n^0 \in D\}$ et $\{I_n(\cdot, t), u_n^0 \in D\}$ sont précompacts dans $C(\bar{\Omega})$. Il s'ensuit que pour tout $u_n^0 \in D$, $S_n(\cdot)$ et $I_n(\cdot)$ admettent des sous suites convergentes dans $C(\bar{\Omega})$. On en déduit qu'il existe $I^* \in C(\bar{\Omega})$ tel que pour tout $t > 0$, la sous suite, $I_n(\cdot, t)$ converge uniformément vers $I^*(\cdot, t)$ lorsque n tend vers l'infini. Il reste à démontrer que $\tilde{Q}_n(\cdot, \cdot)$ a également une sous-suite convergente dans $L^1((0, \infty); C(\bar{\Omega}))$. À fin, nous posons

$$\tilde{Q}^*(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x) I^*(x, t - a) \gamma(x, a), & \text{if } t > a \\ 0 & \text{if } a \geq t \end{cases} \quad (3.31)$$

et nous prouvons

$$I_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \|\tilde{Q}_n(\cdot, a, t) - \tilde{Q}^*(\cdot, a, t)\| da = 0.$$

En effet, nous avons

$$I_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha} \int_0^t \|\gamma(\cdot, t - a)\| \|I_n(\cdot, a) - I^*(\cdot, a)\| da,$$

Le résultat est atteint en utilisant le Théorème de Lebesgue. Par conséquent, $\tilde{\Phi}_t$ a une fermeture compacte dans \mathbb{X} . □

Théorème 3.3. *Le semi-flot $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ admet un attracteur compact des ensembles bornés.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2, le semi-flot Φ_t est un point dissipatif et éventuellement borné. D'autre part, la Proposition 3.2 implique que le semi-flot est asymptotiquement régulier. D'où, Φ_t admet un attracteur compact des ensembles bornés. \square

3.3 La valeur propre principale

Considérons un opérateur linéaire $B : D(B) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, et soit $s(B)$ sa borne spectrale. Pour $\xi = 0, 1$, nous considérons les problèmes de valeurs propres

$$\begin{cases} \delta_2 \Delta \phi_2 - \left(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x) - \xi \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0) \right) \phi_2 + \int_0^\infty k(x, a) \phi_3(x, a) da = \lambda \phi_2, \\ \phi_3(0) = \alpha(x) \phi_2, \quad x \in \Omega, \\ -\frac{\partial \phi_3}{\partial a} - (\mu(x) + f_2(x) + k(x, a)) \phi_3 = \lambda \phi_3, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (Pe^\xi)$$

Pour $\phi = (\phi_2, 0, \phi_3) \in D(B^\xi) \subset \mathbb{X}^0$, nous pouvons réécrire (Pe^ξ) comme $B^\xi \phi = \lambda \phi$, avec

$$B^\xi \phi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 \phi_2 - \left(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x) - \xi \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \right) \phi_2 + \int_0^\infty k(x, a) \phi_3(x, a) da \\ \mathcal{B}(0, \phi_3) + \begin{pmatrix} \alpha(x) \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où \mathcal{B} et \mathcal{A}_2 sont définis dans (3.5), (3.9) respectivement.

Lemme 3.3. *B^ξ est un opérateur de Hille-Yosida sur \mathbb{X} .*

Démonstration. Réécrivons B^ξ comme suit, pour tout $\phi := (\phi_2, 0, \phi_3) \in$

\mathbb{X}^0 ,

$$B^\xi \phi = \tilde{B}\phi + C^\xi \phi,$$

avec

$$\tilde{B}\phi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2\phi_2 \\ \mathcal{B}(0, \phi_3) \end{pmatrix}$$

et

$$C^\xi \phi = \begin{pmatrix} \xi \frac{\beta \partial H(\tilde{S}, 0)}{\partial w} \phi_2 - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))\phi_2 + \int_0^\infty k(x, a)\phi_3(x, a)da \\ \alpha(x)\phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que C^ξ est un opérateur linéaire borné sur \mathbb{X} . De plus, nous prouvons que \tilde{B} est un opérateur de Hille-Yosida sur \mathbb{X} de manière similaire à \mathcal{A} défini dans (3.10). Ensuite, en utilisant le Théorème 1.11, nous concluons que B^ξ est également de Hille-Yosida sur \mathbb{X} . \square

Dans ce qui suit, nous établissons des conditions suffisantes sous lesquelles le problème (Pe^ξ) a une valeur propre principale. Pour cela, nous énonçons notre hypothèse principale :

il existe $\hat{\lambda}_\xi > -\underline{\mu}$ tel que

$$\bar{\alpha} \left(\int_0^\infty \underline{k}(a) e^{-\int_0^a \bar{g}_2(s) ds} e^{-\hat{\lambda}_\xi a} da - 1 \right) > \bar{g}_1 - \xi \underline{\beta} \min_{x \in \bar{\Omega}} \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0), \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (PH^\xi)$$

Soit v^* une solution strictement positive du problème

$$\begin{cases} \delta_2 \Delta v^* = 0 & x \in \Omega, \\ \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.33)$$

où v^* représente la fonction propre strictement positive associée à la valeur propre principale $\lambda = 0$.

Nous définissons également la famille d'opérateurs linéaires.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda^\xi F(x) = & \delta_2 \Delta F(x) + \left[-(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) \right. \\ & \left. + \alpha(x) \int_0^\infty k(x, a) e^{-\lambda a} \gamma(x, a) da + \xi \beta(x) \frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}(x), 0) \right] F(x), \quad \forall \lambda > -\underline{\mu}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Soit $\lambda > -\underline{\mu}$, notons par $(T_\lambda^\xi(t))_{t \geq 0}$ le C_0 -semi-groupe généré par \mathcal{L}_λ^ξ .

Nous rappelons que la valeur propre principale de B^ξ est une valeur propre géométriquement simple de B^ξ avec un vecteur propre strictement positif.

La preuve du lemme suivant s'inspire de celle du Théorème 2.3 dans [98].

Lemme 3.4. *Supposons que (PH^ξ) est vérifiée. Alors nous obtenons que*

- (i) B^ξ est à résolvante positive sur \mathbb{X} .
- (ii) $s(B^\xi)$ est une valeur propre principale de B^ξ .
- (iii) $s(B^\xi)$ est l'unique $\lambda \in [\hat{\lambda}_\xi, \infty)$ avec $s(\mathcal{L}_\lambda^\xi) = \lambda$.
- (iv) $s(B^\xi)$ a le même signe que $s(\mathcal{L}_0^\xi)$.

Démonstration. Soit $\rho(B^\xi)$ l'ensemble résolvant de B^ξ . Rappelons que B^ξ est à résolvante-positive s'il existe une constante w telle que $(w, \infty) \subset \rho(B^\xi)$ et que $(\lambda I - B^\xi)^{-1}$ envoie \mathbb{X}_+ dans \mathbb{X}_+ pour tout $\lambda > w$. Pour chaque $(\psi_2, \eta, g) \in \mathbb{X}$, nous posons

$$(\lambda I - B^\xi)(\phi_2, 0, \phi_3) = (\psi_2, \eta, g).$$

Cela donne

$$\begin{cases} \left(\lambda + \mu(x) + f_1(x) + \alpha(x) - \xi \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0) \right) \phi_2 - \delta_2 \Delta \phi_2 - \int_0^\infty k(x, a) \phi_3(x, a) da = \psi_2, \\ \phi_3(0) = \eta + \alpha(x) \phi_2, \quad x \in \Omega, \\ \left(\lambda + \mu(x) + f_2(x) + k(x, a) \right) \phi_3 + \frac{\partial \phi_3}{\partial a} = g, \quad x \in \Omega, a > 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

avec des conditions aux limites homogènes pour ϕ_2 . À partir des deuxième et troisième équations de (3.35), et après un calcul simple, nous obtenons

$$\phi_3(\cdot, a) = \Pi(a, 0)e^{-\lambda a}(\eta + \alpha(\cdot)\phi_2) + \int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\Pi(a, s)g(s)ds. \quad (3.36)$$

En substituant ce résultat dans la première équation de (3.35), nous obtenons

$$\left(\lambda + \mu(\cdot) + f_1(\cdot) + \alpha(\cdot) - \alpha(\cdot) \int_0^\infty k(\cdot, a)e^{-\lambda a}\Pi(a, 0)da - \xi\beta(\cdot) \frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}(\cdot), 0) \right) \phi_2 - \delta_2 \Delta \phi_2 = F_\lambda(\psi_2, \eta, g).$$

avec

$$F_\lambda(\psi_2, \eta, g) = \psi_2 + \eta \int_0^\infty k(\cdot, a)e^{-\lambda a}\Pi(a, 0)da + \int_0^\infty k(\cdot, a) \int_0^a g(s)e^{-\lambda(a-s)}\Pi(a, s)dsda.$$

D'où

$$(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi)\phi_2 = F_\lambda(\psi_2, \eta, g). \quad (3.37)$$

Maintenant, comme le terme $-(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) + \alpha(x) \int_0^\infty k(x, a)e^{-\lambda a}\Pi(a, 0)da + \xi\beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0)$ est borné et en utilisant le principe du maximum, nous pouvons voir que $T_\lambda^\xi(t)$ est compact et fortement positif pour tout $\lambda > -\underline{\mu}$, selon le Théorème de Krein Rutman, $z(\lambda) := s(\mathcal{L}_\lambda^\xi)$ est une valeur propre principale de \mathcal{L}_λ^ξ . De plus, d'après le Théorème 1.9, \mathcal{L}_λ^ξ est à résolvante positive et

$$(zI - \mathcal{L}_\lambda^\xi)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-zt}T_\lambda^\xi(t)xdt, \quad \text{pour tout } z > z(\lambda), x \in \mathbb{X}. \quad (3.38)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\hat{\lambda}_\xi}^\xi v^* &= \left(-(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) + \xi\beta(x) \frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}(x), 0) \right. \\
&\quad \left. + \alpha(x) \int_0^\infty k(x, a) e^{-\hat{\lambda}_\xi a} \gamma(x, a) da \right) v^* \\
&\geq \left(-\bar{g}_1 + \xi\beta \min_{x \in \Omega} \frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}(x), 0) \right) v^* \\
&\quad + \bar{\alpha} \left(\int_0^\infty \underline{k}(a) e^{-\int_0^a \bar{g}_2(s) ds} e^{-\hat{\lambda}_\xi a} da - 1 \right) v^*.
\end{aligned}$$

avec v^* la solution strictement positive de (3.33). selon l'hypothèse (PH^ξ) nous déduisons que $\mathcal{L}_{\hat{\lambda}_\xi}^\xi v^* \geq 0$. Puisque $\mathcal{L}_{\hat{\lambda}_\xi}^\xi \phi_0 \geq \hat{\lambda}_\xi v^*$, il est facile de vérifier que $e^{\hat{\lambda}_\xi t} v^*$ est une sous-solution de $u_t = \mathcal{L}_{\hat{\lambda}_\xi}^\xi u$. Par le principe de comparaison, nous avons $T_{\hat{\lambda}_\xi}^\xi(t) v^* \geq e^{\hat{\lambda}_\xi t} v^*$ pour tout $t \geq 0$ la Proposition 1.7 donne

$$e^{z(\hat{\lambda}_\xi)t} = r(T_{\hat{\lambda}_\xi}^\xi(t)) \geq e^{\hat{\lambda}_\xi t}, \quad \forall t > 0,$$

Soit $G(\lambda) := z(\lambda) - \lambda$, nous obtenons

$$G(\hat{\lambda}_\xi) = z(\hat{\lambda}_\xi) - \hat{\lambda}_\xi \geq 0.$$

De plus, puisque $z(\lambda)$ est une fonction sur $(-\underline{\mu}, \infty)$, alors $G(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda > z(\hat{\lambda}_\xi)$. Par conséquent, il existe un unique $\lambda_\xi^* \in [\hat{\lambda}_\xi, \infty)$ tel que $G(\lambda_\xi^*) = 0$. Ensuite, pour $\lambda > \lambda_\xi^*$, nous avons

$$z(\lambda) \leq z(\lambda_\xi^*) = \lambda_\xi^* < \lambda, \quad \text{donc } \lambda \in \rho(\mathcal{L}_\lambda^\xi) \quad (3.39)$$

En combinant (3.39) avec (3.38), nous obtenons

$$(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda^\xi(t) x dt, \quad \text{quel que soit } \lambda > \lambda_\xi^*, x \in \mathbb{X}.$$

Par conséquent, pour tout $\lambda > \lambda_\xi^*$, (3.37) donne

$$\begin{aligned}\phi_2 &= (\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi)^{-1} F_\lambda(\psi_2, \eta, g), \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda^\xi(t) F_\lambda(\psi_2, \eta, g) dt.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Observons que F_λ dans (3.37) applique \mathbb{X}_+ sur C_+ . Par conséquent, (3.40) et (3.36) donnent $(\lambda_\xi^*, \infty) \in \rho(B^\xi)$ et $(\lambda I - B^\xi)^{-1} \mathbb{X}_+ \subset \mathbb{X}_+$ pour tout $\lambda > \lambda_\xi^*$. Par conséquent, B^ξ est à résolvante positive et (i) est prouvé. Nous nous concentrons maintenant sur (ii). Pour $\lambda < \lambda_\xi^*$, nous avons

$$z(\lambda) > z(\lambda_\xi^*) = \lambda_\xi^* > \lambda.$$

Cela, avec (3.39), implique que λ_ξ^* est la valeur propre principale de $\mathcal{L}_{\lambda_\xi^*}^\xi$ et qu'il existe une ϕ_2^* fortement positive dans C telle que $\mathcal{L}_{\lambda_\xi^*}^\xi \phi_2^* = \lambda_\xi^* \phi_2^*$.

Soit $\phi_3^*(x, a) = \alpha(x) \gamma(x, a) e^{-\lambda_\xi^* a} \phi_2^*(x)$ et $\phi^* = (\phi_2^*, 0, \phi_3^*)$ alors $B^\xi \phi^* = \lambda_\xi^* \phi^*$, Cela signifie que λ_ξ^* est une valeur propre de B^ξ avec un vecteur propre strictement positif, cela implique que $s(B^\xi) \geq \lambda_\xi^*$. D'après (i) on sait que B^ξ est à résolvante positive dans \mathbb{X} , selon le Théorème 1.8, $s(B^\xi) \in \sigma(B^\xi)$ et $s(B^\xi) < \infty$.

Quel que soit $\lambda \geq \lambda_\xi^* > -\underline{\mu}$, si $\phi = (\phi_2, 0, \phi_3) \in \mathcal{N}(\lambda I - B^\xi)$, alors $\phi_3(x, a) = \alpha(x) \gamma(x, a) e^{-\lambda a} \phi_2(x)$ et $\phi_2 \in \ker(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi)$. Définissons l'opérateur $T : \ker(\lambda I - B^\xi) \rightarrow T(\ker(\lambda I - B^\xi))$ par $T(\phi) = \phi_2$. Remarquons que T est un isomorphisme et que $T(\ker(\lambda I - B^\xi)) \subset \ker(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi)$. Puisque \mathcal{L}_λ^ξ engendre un semi-groupe fortement positif et compact sur C , il résulte de l'alternative de Fredholm que

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - B^\xi) \leq \dim \mathcal{N}(\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi) < \infty, \quad \forall \lambda \geq \lambda_\xi^*.$$

En particulier, nous avons $1 \leq \dim \mathcal{N}(\lambda_\xi^* I - B^\xi) \leq \dim \mathcal{N}(\lambda_\xi^* I - \mathcal{L}_{\lambda_\xi^*}^\xi) = 1$. Cela implique que λ_ξ^* est une valeur propre géométriquement simple de B^ξ . Ensuite, nous prouvons que pour tout $\lambda > \lambda_\xi^*$ donné, l'image de $\lambda I - B^\xi$, notée

$\mathcal{R}(\lambda I - B^\xi)$, est fermée. Soit $\psi^n \in \mathcal{R}(\lambda I - B^\xi)$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \psi$ dans \mathbb{X}^0 . Il existe alors une suite $\phi^n \in \mathbb{X}^0$ telle que $(\lambda I - B^\xi)\phi^n = \psi^n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$\begin{cases} \lambda \phi_2^n - \delta_2 \Delta \phi_2^n + \left(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x) - \xi \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \right) \phi_2^n - \int_0^\infty k(x, a) \phi_3^n(x, a) da \\ \phi_3^n(x, 0) = \alpha(x) \phi_2^n, \quad x \in \Omega, \\ \lambda \phi_3^n + \frac{\partial \phi_3^n}{\partial a} + (\mu + f_2 + k) \phi_3^n = \psi_3^n, \\ \frac{\partial \phi_2^n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial \Omega, \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{cases} \lambda \phi_2^n - \delta_2 \Delta \phi_2^n + \left(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x) - \xi \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \right) \phi_2^n - \int_0^\infty k(x, a) \phi_3^n(x, a) da \\ \phi_3^n(x, a) = \alpha(x) e^{-\lambda a} \gamma(x, a) \phi_2^n(x) + \int_0^a \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, \sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} \psi_3^n(x, \sigma) d\sigma. \end{cases}$$

Ce dernier système peut être réécrit comme

$$\begin{cases} (\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi) \phi_2^n = \psi_2^n(x) + \int_0^\infty k(x, a) \int_0^a \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, \sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} \psi_3^n(x, \sigma) d\sigma da, \\ \phi_3^n(x, a) = \alpha(x) e^{-\lambda a} \gamma(x, a) \phi_2^n(x) + \int_0^a \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, \sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} \psi_3^n(x, \sigma) d\sigma. \end{cases}$$

Puisque $\lambda > \lambda_\xi^*$, nous avons $\lambda > z(\lambda) := s(\mathcal{L}_\lambda^\xi)$ et donc

$$\phi_2^n(x) = (\lambda I - \mathcal{L}_\lambda^\xi)^{-1} \left(\psi_2^n(x) + \int_0^\infty k(x, a) \int_0^a \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, \sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} \psi_3^n(x, \sigma) d\sigma da \right).$$

On constate alors facilement que $\phi^n = (\phi_2^n, 0, \phi_3^n)$ converge vers un certain $\phi \in \mathbb{X}^0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque $(\lambda I - B^\xi)$ est un opérateur fermé, nous obtenons $(\lambda I - B^\xi)\phi = \psi$ et donc $\psi \in \mathcal{R}(\lambda I - B^\xi)$. Cela prouve la fermeture de $\mathcal{R}(\lambda I - B^\xi)$ et par conséquent, $\lambda I - B^\xi$ est semi-Fredholm pour tout $\lambda > \lambda_\xi^*$. Maintenant, nous prouvons que $s(B^\xi) = \lambda_\xi^*$. Supposons, par l'absurde, que $s(B^\xi) > \lambda_\xi^*$. Puisque $s(B^\xi) \in \sigma(B^\xi)$, le lemme [1.4](#) (ii) implique que $s(B^\xi)$ est une valeur propre de B^ξ avec une multiplicité géométrique finie. Soit $\bar{\phi} = (\bar{\phi}_2, 0, \bar{\phi}_3)$ le vecteur propre associé à $s(B^\xi)$. Donc, il s'ensuit que

$\mathcal{L}_{s(B^\xi)}^\xi \bar{\phi}_2 = s(B^\xi) \bar{\phi}_2$ et $\bar{\phi}_3(x, a) = \alpha(x) \gamma(x, a) e^{-s(B^\xi)a} \bar{\phi}_2(x)$. Cela implique que $\bar{\phi}_2 \neq 0$ et $s(B^\xi)$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_{s(B^\xi)}^\xi$. Notons que $z(s(B^\xi))$ est la valeur propre principale de $\mathcal{L}_{s(B^\xi)}^\xi$. Alors, nous devons avoir $s(B^\xi) \leq z(s(B^\xi))$. Puisque $s(B^\xi) > \lambda_\xi^*$ il s'ensuit que,

$$z(s(B^\xi)) \leq z(\lambda_\xi^*) = \lambda_\xi^* < s(B^\xi),$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, $s(B^\xi) = \lambda_\xi^*$ et (ii), (iii) sont démontrés. Notons que $z(\lambda)$ est continue et strictement décroissante sur $(-\underline{\mu}, \infty)$ et $s(B^\xi)$ est l'unique $\lambda \in (-\underline{\mu}, \infty)$ avec $z(\lambda) = \lambda$. Nous pouvons voir que $s(B^\xi)$ a le même signe que $z(0) := s(\mathcal{L}_0^\xi)$. Cela prouve (iv). \square

Lorsque $\xi = 0$, nous avons également le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Supposons que (PH^0) soit vérifiée. Alors, la valeur propre principale $s(B^0)$ de B^0 est négative.*

Démonstration. D'après le lemme 3.4, nous savons déjà que $s(B^0)$ est la valeur propre principale de B^0 . Il suffit de prouver que $s(B^0)$ est négative. En effet, pour $G(\lambda) := z(\lambda) - \lambda$ et $z(\lambda) := s(\mathcal{L}_\lambda^0)$ étant la valeur propre principale de \mathcal{L}_λ^0 , nous obtenons $G(0) < 0$ puisque $\int_0^\infty k(x, a) \gamma(x, a) da < 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$. De plus, en utilisant (PH_0) et en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3.4 (i), nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\hat{\lambda}_0}^0 \phi_1^* &= \left(-(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) + \alpha(x) \int_0^\infty k(x, a) e^{-\hat{\lambda}_0 a} \gamma(x, a) da \right) \phi_1^* \\ &\geq -\bar{g}_1 \phi_1^* + \bar{\alpha} \left(\int_0^\infty \underline{k}(a) e^{-\int_0^a \bar{g}_2(s) ds} e^{-\hat{\lambda}_0 a} da - 1 \right) \phi_1^* \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$G(\hat{\lambda}_0) = z(\hat{\lambda}_0) - \hat{\lambda}_0 \geq 0.$$

Il en découle qu'il existe $\lambda^* \in [\hat{\lambda}_0, 0)$ tel que $G(\lambda^*) = 0$. D'après la démonstration du lemme 3.4, nous avons $s(B_0) = \lambda^*$. \square

Remarque 3.2. *Si $a \in (0, \hat{a})$ avec $\hat{a} < \infty$, (PH^ξ) est toujours vérifiée. Cela*

signifie que, cette hypothèse est liée au fait que $a \in (0, \infty)$.

Remarque 3.3. Remarquons que $\hat{\lambda}_0 < 0$ car $\int_0^\infty \underline{k}(a)e^{-\int_0^a \bar{g}_2(s)ds} da < 1$.

3.4 Le taux de reproduction de base

Notons que le problème elliptique

$$\begin{cases} -\delta_1 \Delta S = \Lambda(x) - \mu(x)S, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.41)$$

possède toujours une solution unique $\tilde{S}(x)$. Par hypothèse $H(0, y) = H(x, 0) = 0$, pour tout $x, y \geq 0$, le modèle (3.1)-(3.2) possède toujours un état d'équilibre $E_0 = (\tilde{S}(x), 0, 0)$.

Le système linéarisé en E_0 est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = \delta_1 \Delta s(x, t) - \mu(x)s(x, t) - \beta(x)w(x, t) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0), \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \delta_2 \Delta w(x, t) + \beta(x)w(x, t) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))w(x, t) \\ \quad + \int_0^\infty k(x, a)v(x, a, t) da, \\ \frac{\partial v(x, a, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, a, t)}{\partial a} = -(\mu(x) + f_2(x) + k(x, a))v(x, a, t), \quad a > 0, \\ v(x, 0, t) = \alpha(x)w(x, t), \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

avec $s(x, t) = S(x, t) - \tilde{S}(x)$, $w(x, t) = I(x, t)$ et $v(x, a, t) = Q(x, a, t)$.

De manière similaire à la première section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.42). Soit $A^s : D(A^s) \subset \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$,

$\overline{D(A^s)} = \mathbb{Y}^0$, défini par

$$\begin{aligned}
A^s \phi &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \phi_1 \\ \mathcal{A}_2 \phi_2 \\ \mathcal{B}(0, \phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -\mu(x)\phi_1 - \beta(x)\phi_2 \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \\ \frac{\beta \partial H(\tilde{S}, 0)}{\partial w} \phi_2 - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))\phi_2 + \int_0^\infty k(x, a)\phi_3(x, a) da \\ \alpha(x)\phi_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{A}\phi + L\phi
\end{aligned} \tag{3.43}$$

avec $\phi := (\phi_1, \phi_2, 0, \phi_3)$ et \mathcal{A} défini dans (3.10). Pour tout $U_0 \in \mathbb{Y}^0$, le problème (3.42) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = A^s U(t), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Il est clair que L est un opérateur linéaire borné sur \mathbb{Y} . Comme nous l'avons vu précédemment, \mathcal{A} est un opérateur de Hille-Yosida sur \mathbb{Y} . En utilisant alors le Théorème 1.11, nous concluons que A^s est également de Hille-Yosida sur \mathbb{Y} . Par conséquent, la Proposition 1.9 implique que A^s est le générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré et exponentiellement borné $(T_{A^s}(t))_{t \geq 0}$. Ainsi, pour chaque $T > 0$, le problème (3.44) admet une unique solution faible dans $C([0, T]; \mathbb{Y}^0)$; voir, par exemple, le Corollaire 3.4.10. dans [62].

Pour calculer \mathcal{R}_0 , nous n'avons besoin de travailler qu'avec les compartiments infectieux, c'est-à-dire que nous négligeons l'équation de s et nous

nous concentrons sur le modèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \delta_2 \Delta w(x, t) + \beta(x)w(x, t) \frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}(x), 0) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))w(x, t) \\ \quad + \int_0^\infty k(x, a)v(x, a, t) da, \\ \frac{\partial v(x, a, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, a, t)}{\partial a} = -(\mu(x) + f_2(x) + k(x, a))v(x, a, t), \quad a > 0, \\ v(x, 0, t) = \alpha(x)w(x, t), \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

En raisonnant comme ci-dessus, nous pouvons reformuler le problème (3.45) comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU(t)}{dt} = B^1 U(t), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{array} \right. \quad (3.46)$$

avec $U = (w, (0, v))^T$ et B^1 défini dans (3.32) avec $\xi = 1$. En raisonnant de manière analogue à ce qui précède, nous pouvons également montrer que B^1 est de Hille-Yosida sur \mathbb{X} . Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution de (3.46) découlent de la Proposition 1.9 et du Corollaire 3.4.10. dans [62].

Pour déterminer \mathcal{R}_0 explicitement, nous réécrivons B^1 comme suit, pour $\phi := (\phi_2, 0, \phi_3) \in \mathbb{X}^0$,

$$B^1 \phi = B^0 \phi + C \phi,$$

avec

$$B^0 \phi = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 \phi_2 - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))\phi_2 + \int_0^\infty k(x, a)\phi_3(x, a)da \\ \mathcal{B}(0, \phi_3) + \begin{pmatrix} \alpha(x)\phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

et

$$C \phi = \begin{pmatrix} \frac{\beta \partial H(\tilde{S}, 0)}{\partial w} \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observons que B^0 est déjà défini dans (3.32) pour $\xi = 0$.

Remarque 3.4. *En fait, B^0 représente la transition entre les classes infectées et C contient les nouveaux individus infectés.*

Définissons la partie de B^0 dans \mathbb{X}^0 , notée B_0^0 . C'est-à-dire,

$$B_0^0 u = B^0 u, \text{ pour tout } u \in D(B_0^0), \text{ avec } D(B_0^0) := \left\{ u \in D(B^0); B^0 u \in \mathbb{X}^0 \right\}.$$

Ensuite, par le Lemme 3.3, B^0 est de Hille-Yosida sur \mathbb{X} avec $\overline{D(B^0)} = \mathbb{X}^0$.

D'après le Lemme 1.2, nous en déduisons que B_0^0 est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur \mathbb{X}^0 , noté $T_{B_0^0}(t)$. Maintenant, pour $B^0 : D(B^0) \subset \mathbb{X}^0 \rightarrow \mathbb{X}$, nous considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = B^0 U, \\ U(0) = U_0 \in \mathbb{X}_0. \end{cases} \quad (3.47)$$

La solution de (3.47) est, voir par exemple le Corollaire 3.4.10. dans [62],

$$U(t) = T_{B_0^0}(t)U_0.$$

Remarque 3.5. *Remarquons que, pour chaque valeur initiale infectieuse ϕ , $T_{B_0^0}(t)\phi$ représente la distribution des membres infectieux au temps t . Ainsi, la distribution des nouvelles infections au temps t est donnée par $C(x)T_{B_0^0}(t)\phi(x)$. Il s'ensuit que la distribution totale des nouvelles infections est $C(x) \int_0^\infty T_{B_0^0}(t)\phi(x)dt$, avec*

$$C(x) = \begin{pmatrix} \frac{\beta \partial H(\tilde{S}(x), 0)}{\partial w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.6. *Supposons que (PH^1) soit vérifiée. Soit $\tilde{\lambda}_1$ la valeur propre*

principale du problème

$$\begin{cases} \delta_2 \Delta \phi - (\mu(x) + f_1(x))\phi - \alpha(1 - K_\gamma(x))\phi = -\lambda\beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0)\phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.48)$$

Alors $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\lambda_1}$. De plus, \mathcal{R}_0 peut être exprimé par la formule variationnelle suivante

$$R_0 = \sup_{0 \neq \phi \in H^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \phi(x)^2 \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) dx}{\int_{\Omega} \phi^2(x) (\mu(x) + f_1(x) + (1 - K_\gamma(x))\alpha(x)) dx + \int_{\Omega} \delta_2 |\nabla \phi(x)|^2 dx}, \quad (3.49)$$

où

$$K_\gamma(x) = \int_0^\infty k(x, a) \gamma(x, a) da. \quad (3.50)$$

Démonstration. Soient $\phi \in \mathbb{X}^0$, $L\phi := C(x) \int_0^\infty T_{B_0^0}(t)\phi(x)dt$, nous définissons le taux de reproduction de base comme

$$\mathcal{R}_0 = r(L),$$

avec $r(L)$ le rayon spectral de L . Puisque B_0^0 est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe noté $T_{B_0^0}(t)$ et comme $T_{B_0^0}(t)\mathbb{X}_+^0 \subset \mathbb{X}_+^0$, alors, d'après le Théorème [1.9](#), B_0^0 est à résolvante positive et

$$(\lambda I - B_0^0)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{B_0^0}(t)\phi dt, \quad \text{pour tout } \lambda > s(B_0^0).$$

De plus, d'après le Lemme [1.3](#), nous avons, pour tout $\phi \in \mathbb{X}^0$,

$$(\lambda I - B^0)^{-1}\phi = (\lambda I - B_0^0)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{B_0^0}(t)\phi dt, \quad \text{pour tout } \lambda > s(B_0^0) = s(B^0).$$

D'après les Lemmes [3.5](#) et [1.3](#), nous avons, $s(B^0) = s(B_0^0) < 0$, il s'ensuit que

$$(B^0)^{-1}\phi = (B_0^0)^{-1}\phi = \int_0^\infty T_{B_0^0}\phi dt, \quad \text{pour tout } \phi \in \mathbb{X}^0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{R}_0 := r(L) = r(-C(B_0^0)^{-1}) = r(-(B_0^0)^{-1}C) = r(-C(B^0)^{-1}).$$

Ensuite, Posons $(B_0^0)^{-1}C\phi = \psi$, donc $C\phi = -B_0^0\psi$ où $\phi = (\phi_2, 0, \phi_3)$ et $\psi = (\psi_2, 0, \psi_3)$. Alors

$$\begin{cases} -\delta_2\Delta\psi_2 + (\mu(x) + \alpha(x) + f_1(x))\psi_2 - \int_0^\infty k(x, a)\psi_3(x, a)da = \beta(x)\frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0)\phi_2, \\ \psi_3(0) = \alpha(x)\psi_2, \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial a} + (\mu(x) + f_2(x) + k(x, a))\psi_3 = 0. \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$\psi_3(x, a) = \alpha(x)\gamma(x, a)\psi_2(x).$$

D'où,

$$\begin{cases} -\delta_2\Delta\psi_2(x) + (\mu(x) + \alpha(x) + f_1(x))\psi_2(x) - \alpha(x)\int_0^\infty k(x, a)\gamma(x, a)da\psi_2(x) \\ \quad = \beta(x)\frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}, 0)\phi_2(x), \\ \psi_3(x, a) = \alpha(x)\gamma(x, a)\psi_2(x). \end{cases}$$

Cela donne

$$\begin{cases} \psi_2(x) = \left(-\delta_2\Delta + (\mu(x) + f_1(x)) + \alpha(x)(1 - K_\gamma(x)) \right)^{-1} \beta(x)\frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0)\phi_2(x), \\ \psi_3(x, a) = \alpha(x)\gamma(x, a)\psi_2(x), \end{cases}$$

avec $K_\gamma(x) = \int_0^\infty k(x, a)\gamma(x, a)da$.

Notons A_2 et A_3 sur C par

$$A_2\phi_2 = \left(-\delta_2\Delta + (\mu(x) + \alpha(x) + f_1(x)) - \alpha(x)\int_0^\infty k(x, a)\gamma(x, a)da \right)^{-1} \beta(x)\frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0)\phi_2(x)$$

et

$$A_3\phi_2 = \alpha(x)\gamma(x, a)\psi_2(x).$$

Soit $\tilde{L}\phi = (A_2\phi_2, 0, A_3\phi_2)$ et par un calcul simple, nous obtenons $\tilde{L}^n\phi = (A_2^n\phi_2, 0, A_3A_2^{n-1}\phi_2)$. Cela conduit à

$$\|A_2^n\| \leq \|\tilde{L}^n\| = \|L^n\| \leq \left(\|A_2^n\|^2 + \|A_3\|^2 \|A_2^{n-1}\|^2 \right)^{1/2}$$

et donc $\mathcal{R}_0 = r(L) = r(A_2)$.

De plus, comme A_2 est compact et fortement positif, d'après le Théorème de Krein-Rutman, il existe $\phi^* > 0$ tel que $A_2\phi^* = \mathcal{R}_0\phi^*$ et par conséquent $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\lambda_1}$. Enfin, d'après la définition de $\tilde{\lambda}$, la formule variationnelle donne immédiatement (3.49). \square

Lemme 3.7. *Supposons que (PH^1) soit vérifiée et que B^1 soit défini dans (3.32) pour $\xi = 1$. Alors $s(B^1)$ a le même signe que $\mathcal{R}_0 - 1$.*

Démonstration. Rappelons que $B^1 = B^0 + C$. D'après les Lemmes 3.4 et 3.5, nous avons que B^ξ , $\xi = 0, 1$, sont des résolvantes positives, avec $s(B^0) < 0$. De plus, B^1 est une perturbation positive de B^0 , alors, selon le Théorème 1.7, $s(B^1)$ a le même signe que $r(-C(B^0)^{-1}) - 1$. \square

D'après le Lemme 3.4 (iv) et le Lemme 2.7, nous avons

Corollaire 3.1. *Soit (PH^1) vérifiée. $(\mathcal{R}_0 - 1)$ a le même signe que $s(\mathcal{L}_0^1)$.*

3.5 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

L'objectif de cette section est de déterminer la stabilité de l'équilibre sans maladie.

Théorème 3.4. *Soit (PH^1) vérifiée. Supposons que $R_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie $(\tilde{S}(x), 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Soit l'opérateur de Hille-Yosida A^s sur \mathbb{Y} défini dans (3.43). On note A_0^s , la partie de A^s sur \mathbb{Y}^0 et $(T_{A_0^s}(t))_{t \geq 0}$ son C_0 -semi-groupe exponentiellement borné et non dégénéré, voir le Lemme 1.2. Soit aussi $\omega(T_{A_0^s}(t))$

la borne de croissance exponentielle de $T_{A_0^s}(t)$. Rappelons que, pour chaque $U_0 \in \mathbb{Y}^0$, la solution de (3.44) est donnée par, voir e.g. le Corollaire 3.4.10. dans [62],

$$U(t) = T_{A_0^s}(t)U_0 \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.51)$$

À partir de (3.42), (3.44) et (3.51), pour prouver la stabilité locale de $(\tilde{S}, 0, 0)$, il suffit d'établir que $\omega(T_{A_0^s}(t)) < 0$, où $\omega(T_{A_0^s}(t)) := \max\{\omega_{ess}(T_{A_0^s}(t)), s(A_0^s)\}$. Maintenant, étant donné que la deuxième et la troisième équations dans (3.42) sont indépendantes de la première, nous avons

$$s(A_0^s) = \max\{s(B_0^1), s(\delta_1\Delta - \mu)\}.$$

Puisque $\mathcal{R}_0 < 1$, d'après le Lemme 2.7, nous avons $s(B^1) = s(B_0^1) < 0$. De plus, il est clair que $s(\delta_1\Delta - \mu) < 0$. Par conséquent,

$$s(A^s) = s(A_0^s) < 0.$$

Ensuite, définissons les opérateurs linéaires $U_1(t)$ et $U_2(t)$ sur \mathbb{Y}^0 comme suit

$$U_1(t)(s^0, w^0, 0, v^0) = (s(\cdot, t), w(\cdot, t), 0, v_1(\cdot, t)) \quad \text{et} \quad U_2(t)(s^0, w^0, 0, v^0) = (0, 0, 0, v_2(\cdot, t))$$

avec,

$$v_1(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x)\gamma(x, a)w(x, t - a), & \text{si } t > a \\ 0, & \text{si } t < a, \end{cases}$$

et

$$v_2(x, a, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a, \\ \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)}v^0(x, a - t), & \text{si } a > t. \end{cases}$$

Observons que $T_{A_0^s}(t)(s^0, w^0, 0, v^0) = U_1(t)(s^0, w^0, 0, v^0) + U_2(t)(s^0, w^0, 0, v^0)$.

Notons également que $U_1(t)$ est compact pour tout $t > 0$. Soit B un ensemble borné dans \mathbb{X}^0 . Alors, $\kappa(U_1(t)B) = 0$, avec

$$\kappa(B) := \inf \{r : B \text{ possède un recouvrement fini de diamètre inférieur à } r\}$$

représentant la mesure de non-compacité de Kuratowski pour B un ensemble borné. Il s'ensuit que,

$$\kappa(T_{A_0^s}(t)B) \leq \kappa(U_1(t)B) + \kappa(U_2(t)B) \leq \|U_2(t)\| \kappa(B).$$

Pour tout $t > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \|U_2(t)\|_{\mathbb{X}^0} &\leq \int_t^\infty \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v^0(x, a-t)| \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a-t)} da, \\ &\leq \int_0^\infty \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v^0(x, a)| \frac{\gamma(x, a+t)}{\gamma(x, a)} da, \\ &\leq e^{-\underline{\mu}t} \|v^0\|_{L^1((0, \infty), C(\bar{\Omega}))}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\kappa(T_{A_0^s}(t)) \leq e^{-\underline{\mu}t}, \quad \forall t > 0, \quad (3.52)$$

et

$$\omega_{ess}(T_{A_0^s}(t)) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \kappa(T_{A_0^s}(t))}{t} \leq -\underline{\mu} < 0.$$

Par conséquent, $\omega(T_{A_0^s}(t)) := \max\{\omega_{ess}(T_{A_0^s}(t)), s(A_0^s)\} < 0$ et l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable. \square

Théorème 3.5. *Soit (PH^1) vérifiée. Pour $\mathcal{R}_0 < 1$, l'équilibre sans maladie $(\tilde{S}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{X}_+ .*

Démonstration. Nous considérons les sous-ensembles Ω_+ et Ω_- , tels que

$$\begin{aligned} \Omega_+ &:= \{x \in \Omega; \tilde{S}(x) < S(x, t) \text{ pour tout } t \geq 0\}, \\ \Omega_- &:= \{x \in \Omega; S(x, t) \leq \tilde{S}(x) \text{ pour certains } t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Nous définissons également un sous-ensemble

$$D = \{(S^0, I^0, Q^0) \in \mathbb{X}_+; S^0(x) \leq \tilde{S}(x)\}.$$

Tout d'abord, supposons que $S(x, t) > \tilde{S}(x)$ pour tout $t \geq 0$ et $x \in \Omega^+$.

Alors, d'après le principe de comparaison, nous avons

$$\tilde{S}(x) < S(x, t) \leq \tilde{s}(x, t), \quad (3.53)$$

où \tilde{s} est une solution de (3.13). De plus, nous pouvons également montrer que \tilde{s} converge vers l'état stationnaire \tilde{S} , solution de (3.41). Par conséquent, en passant à la limite dans (3.53), nous obtenons que $s(x, t) \rightarrow \tilde{S}(x)$ quand $t \rightarrow \infty$. Cela implique que $\omega(S^0, I^0, Q^0) \subseteq D$ pour $x \in \Omega_+$. Maintenant, si $x \in \Omega_-$, il existe $t_0 \geq 0$ tel que $S(x, t_0) \leq \tilde{S}(x)$. Encore une fois, par le principe de comparaison, nous obtenons $S(x, t) \leq \tilde{S}(x)$ pour tout $t \geq t_0$. Sans perte de généralité, nous supposons $t_0 = 0$. Nous concluons que $\omega(S^0, I^0, Q^0) \subseteq D$ pour tout $x \in \Omega$. Ensuite, nous nous concentrons sur la preuve de l'attractivité de $\{(\tilde{S}, 0, 0)\}$ restreinte au domaine invariant D . En effet, les équations (I, Q) de (3.1) peuvent être réécrites comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \delta_2 \Delta I(x, t) + \beta(x)H(S(x, t), I(x, t)) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))I(x, t) \\ &+ \int_0^t k(x, a)\alpha(x)\gamma(x, a)I(x, t-a)da + \int_t^\infty k(x, a)\frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a-t)}Q^0(x, a-t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

et

$$Q(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x)\gamma(x, a)I(x, t-a), & \text{si } t > a, \\ \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a-t)}Q^0(x, a-t), & \text{si } t < a. \end{cases} \quad (3.55)$$

D'après (H5), on a

$$H(\tilde{S}, I(x, t)) \leq I(x, t) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0) \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}. \quad (3.56)$$

En utilisant le fait que H est croissante par rapport à S et en combinant (3.56) avec $S \leq \tilde{S}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &\leq \delta_2 \Delta I(x, t) + \left(\beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0) - \mu(x) - f_1(x) - \alpha(x) \right) I(x, t) \\ &+ \alpha(x) \int_0^t k(x, t-\sigma)\gamma(x, t-\sigma)I(x, \sigma)d\sigma + \int_t^\infty k(x, a)\frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a-t)}Q^0(x, a-t). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ensuite, nous considérons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} &= \delta_2 \Delta \bar{I}(x, t) + \left(\beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}, 0) - \mu(x) - f_1(x) - \alpha(x) \right) \bar{I}(x, t) \\ &+ \alpha(x) \int_0^t k(x, t - \sigma) \gamma(x, t - \sigma) \bar{I}(x, \sigma) d\sigma + \int_t^\infty k(x, a) \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)} Q^0(x, a - t), \end{aligned} \quad (3.58)$$

et

$$\bar{Q}(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x) \gamma(x, a) \bar{I}(x, t - a), & \text{if } t > a, \\ \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)} Q^0(x, a - t), & \text{if } t < a. \end{cases} \quad (3.59)$$

En utilisant le Théorème de comparaison, nous obtenons facilement que $I \leq \bar{I}$ sur $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$. D'après cela et (3.55), (3.59), nous obtenons également $Q \leq \bar{Q}$. Il en résulte que le comportement asymptotique de la solution de (3.54)-(3.55) est gouverné par celui de (3.58)-(3.59). Maintenant, en observant que ce dernier peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = B^1 U(t), & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec $U = (\bar{I}, (0, \bar{Q}))^T$ et B^1 défini dans (3.32) avec $\xi = 1$. La solution de ce dernier problème est donnée par $U = T_{B_0^1}(t)U_0$, avec $T_{B_0^1}(t)$ le semi-groupe généré par la partie B_0^1 de B^1 . Enfin, nous savons que

$$\omega(T_{B_0^1}(t)) = \max\{s(B_0^1), \omega_{ess}(T_{B_0^1}(t))\}.$$

En utilisant le Lemme 2.7 et le fait que $\mathcal{R}_0 < 1$, nous savons que $s(B_0^1) = s(B^1) < 0$. De plus, en arguant de manière similaire à la preuve du Théorème 2.1, nous montrons que $\omega_{ess}(T_{B_0^1}(t)) < 0$. Il s'ensuit que $\omega(T_{B_0^1}(t)) < 0$ et ainsi $(I, Q) \rightarrow (0, 0)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ sur $C(\bar{\Omega}) \times L^1((0, \infty); C(\bar{\Omega}))$. Maintenant, nous prouvons que $S(x, t)$ tend vers \tilde{S} lorsque $t \rightarrow \infty$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$. D'après $I(t, \cdot) \rightarrow 0$ et la continuité de H , nous avons $H(S(\cdot, t), I(\cdot, t)) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et S appartient à un intervalle compact. Donc, pour tout

$\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que

$$H(S, I) \leq \epsilon \quad \text{sur} \quad \bar{\Omega} \times (T, \infty).$$

Considérons maintenant le problème suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \delta_1 \Delta W(x, t) + \Lambda(x) - \epsilon - \mu(x)W(x, t), & x \in \Omega, \quad t > T, \\ W(x, T) = S(x, T), & x \in \Omega. \\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > T, \end{cases}$$

D'après le principe de comparaison classique, la solution W_ϵ du problème ci-dessus satisfait

$$W_\epsilon(x, t) \leq S(x, t) \quad \text{pour tout} \quad t \geq T \quad \text{et} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_\epsilon(x, t) \rightarrow \tilde{S}(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$, voir par exemple le Lemme 2.2. En combinant cela avec $\limsup_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \leq \tilde{S}(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$, nous arrivons à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(x, t) = \tilde{S}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3.60)$$

Par conséquent, nous avons $\omega(S^0, I^0, Q^0) \cap W^s(\{(\tilde{S}, 0, 0)\}) \neq \emptyset$. D'après le Lemme 1.6 et le Théorème 1.20, nous obtenons $\omega(S^0, I^0, Q^0) \subset \{(\tilde{S}, 0, 0)\}$. La preuve est obtenue en combinant cela avec le résultat de stabilité locale dans le Théorème 2.1. \square

3.6 Persistance et existence de l'état stationnaire endémique

Dans cette section, nous établissons la persistance et la stabilité globale du modèle (3.1) dans le cas de $\mathcal{R}_0 > 1$. Pour cela, nous avons besoin de l'hypothèse suivante sur l'incidence H . Supposons que les conditions suivantes sur la fonction d'incidence soient satisfaites. Pour tout $S > 0$, nous avons

$$\left(\frac{I}{I^*} - \frac{H(S, I)}{H(S, I^*)} \right) \left(\frac{H(S, I)}{H(S, I^*)} - 1 \right) > 0 \quad \text{pour} \quad I \neq I^*. \quad (3.61)$$

Posons

$$\Gamma_k(\cdot, a) = \int_0^\infty k(\cdot, a+s)\gamma(\cdot, a+s, a)ds \quad \text{on } \bar{\Omega},$$

Nous définissons,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \{(S^0, I^0, Q^0(\cdot)) \in \mathbb{X}_+ \mid I^0(\cdot) \not\equiv 0\}, \\ \partial\mathcal{X}_0 &= \{(S^0, I^0, Q^0(\cdot)) \in \mathbb{X}_+ \mid I^0(\cdot) \equiv 0\}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Avec, $\mathbb{X}_+ = \mathcal{X}_0 \cup \partial\mathcal{X}_0$

Commençons par établir la positivité de la solution du modèle (3.1)-(3.2), à l'aide de la proposition suivante

Proposition 3.3. *Considérons $u^0 = (S^0, I^0, Q^0) \in \mathbb{X}_+$ et*

$\Phi_t(u^0) := (S(\cdot, t), I(\cdot, t), Q(\cdot, a, t))$ la solution correspondante du système (3.1)-(3.2). Alors, $S(x, t) > 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $t > 0$. De plus, s'il existe $t_0 \geq 0$ tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée

(i) $I(\cdot, t_0) \not\equiv 0$ sur Ω ,

(ii) $\int_0^\infty Q(\cdot, a, t_0) \int_{t_0}^\infty k(\cdot, a+t-2t_0) \frac{\gamma(\cdot, a+t-2t_0)}{\gamma(\cdot, a-2t_0)} dt da \not\equiv 0$ sur Ω .

Alors $I > 0$ on $\bar{\Omega} \times (t_0, \infty)$ et $\int_0^\infty Q(\cdot, a, \cdot) da > 0$ sur $\bar{\Omega} \times (t_0, \infty)$. De plus, il existe une constante strictement positive L

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \geq \frac{\Lambda}{\bar{\mu} + L\bar{\beta}}, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Démonstration. D'après l'équation de S , nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \geq \Lambda(x) + \delta_1 \Delta S(x, t) - (\bar{\mu} + L\bar{\beta})S(x, t), & x \in \Omega, \quad t > t_0 \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > t_0. \end{cases}$$

où L est une borne supérieure de $\frac{\partial H}{\partial S}(S, I)$ pour tout (S, I) appartenant à un ensemble compact.

Soit W la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \delta_1 \Delta W(x, t) + \Lambda(x) - (\bar{\mu} + L\bar{\beta})W(x, t), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ W(x, t_0) = S^0(x), \end{cases} \quad (3.63)$$

D'après le principe de comparaison, nous avons

$$W(x, t) \leq S(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t) \in \Omega \times (t_0, \infty).$$

Par ailleurs, nous savons que la solution de (3.63) peut s'écrire :

$$W(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y, t) e^{-(\bar{\mu} + L\bar{\beta})t} S^0(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y, s) \Lambda(y) e^{-(\bar{\mu} + L\bar{\beta})(t-s)} dy ds,$$

et donc,

$$\begin{aligned} W(x, t) &\geq \underline{\Lambda} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y, s) e^{-(\bar{\mu} + L\bar{\beta})(t-s)} dy ds, \\ &\geq \frac{\underline{\Lambda}}{\bar{\mu} + L\bar{\beta}} (1 - e^{-(\bar{\mu} + L\bar{\beta})t}), \end{aligned}$$

où $G(x, y, t)$ est le noyau de la chaleur associé à $\frac{\partial}{\partial t} - \delta_1 \Delta$ avec condition de Neumann.

En passant à la limite, nous obtenons :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \geq \frac{\underline{\Lambda}}{\bar{\mu} + L\bar{\beta}}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

De plus, en utilisant (3.55) et l'équation en I dans (3.1), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} &\geq \delta_2 \Delta I(x, t) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))I(x, t) + \alpha(x) \int_0^t k(x, a) \gamma(x, a) I(x, t - a) \\ &\quad + \int_0^\infty k(x, a + t) \gamma(x, a + t, a) Q^0(x, a) da, \end{aligned} \quad (3.64)$$

Nous pouvons établir que $I(x, t) > 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $t > 0$, à condition que $I^0 \not\equiv 0$ ou bien que $\int_0^\infty \Gamma_k(\cdot, a) Q^0(\cdot, a) da \not\equiv 0$ sur $\bar{\Omega}$. En effet, dans le

premier cas et à partir de (3.64), nous obtenons

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - d_I \Delta I(x, t) + (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))I(x, t) \geq 0.$$

Comme $I^0 \not\equiv 0$, le résultat découle directement d'un principe de comparaison standard. Le second cas garantit que

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - d_I \Delta I(x, t) + (\mu(x) + f_1(x)\alpha(x))I(x, t) \gneq 0,$$

et ainsi, le résultat s'en déduit de manière similaire. De plus, à partir de (3.55), on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q(., a, t) da &= \alpha(.) \int_0^t \gamma(., a)I(., t - a) da + \int_0^\infty \gamma(., s + t, s)Q^0(., s) ds, \\ &> 0 \quad \text{pour tout; } t > 0. \end{aligned}$$

Enfin, à partir de (3.3), on déduit également qu'il existe $T > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k(., a)Q(., a, t) da &= \alpha(.) \int_0^t k(., a)\gamma(., a)I(., t - a) da \\ &+ \int_0^\infty k(., s + t)\gamma(., s + t, s)Q^0(., s) ds, > 0 \quad \text{pour tout; } t > T. \end{aligned}$$

□

Afin d'établir le résultat de persistance, nous supposons l'hypothèse suivante :

il existe $r^* > 0$ tel que

$$r^* \alpha(x) \int_0^\infty k(x, s+t)\gamma(x, s+t) ds \leq \int_0^\infty k(x, s+t)\gamma(x, s+t, s)Q^0(x, s) ds \quad \text{pour tout; } t > 0. \quad (3.65)$$

En utilisant la Proposition 3.3, nous pouvons facilement voir que $\Phi_t \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_0$ pour tout $t \geq 0$. Définissons,

$$M_\partial = \{(S^0, I^0, Q^0(.)) \in \partial \mathcal{X}_0 \text{ et } \Phi_t(S^0, I^0, Q^0(.)) \in \partial \mathcal{X}_0\}.$$

Lemme 3.8. *Quelque soit $(S^0, I^0, Q^0(.)) \in M_\partial$ nous avons $\omega(S^0, I^0, Q^0(.)) =$*

$\{(\tilde{S}, 0, 0)\}$.

Démonstration. Pour tout $(S^0, I^0, Q^0(\cdot)) \in M_\partial$, l'équation de Q dans (3.55) donne

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q(x, a, t) da &= \int_t^\infty \gamma(x, a, a-t) Q^0(x, a-t) da, \\ &= \int_0^\infty \gamma(x, s+t, s) Q^0(x, s) ds, \\ &\leq e^{-\mu_2 t} \int_0^\infty Q^0(x, s) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty Q(x, a, t) da = 0.$$

Ensuite, comme $I \equiv 0$, l'équation de S devient

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) = \delta_1 \Delta S(x, t) + \Lambda(x) - \mu(x) S(x, t).$$

Enfin, par exemple par le Lemme 1 dans [60], nous avons $S(x, t) \rightarrow \tilde{S}(x)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et uniformément pour $x \in \Omega$. \square

Définissons une fonction continue,

$$\rho : \mathbb{X}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

par

$$\rho(u^0) = \min \{I^0(x), x \in \bar{\Omega}\},$$

où $u^0 = (S^0, I^0, Q^0(\cdot))$.

Lemme 3.9. *Supposons que (PH^1) est vérifiée. Pour $\mathcal{R}_0 > 1$ nous avons $W^s(\tilde{S}, 0, 0) \cap \rho^{-1}(0, \infty) = \emptyset$, où $W^s(\tilde{S}, 0, 0)$ représente la variété stable de $(\tilde{S}, 0, 0)$.*

Démonstration. Tout d'abord, nous voyons facilement que $\rho(\Phi_t(u^0)) > 0$, $t > 0$ pour tout $u^0 \in (\mathcal{X}_0 \cap \rho^{-1}(0)) \cup \rho^{-1}(0, \infty)$. Ainsi, ρ est une fonction de distance généralisée pour le semi-flot Φ_t . Soit $u^0 \in \rho^{-1}(0, \infty)$, alors $\rho(u^0) > 0$ et $S^0(x) \geq 0$, $I^0(x) > 0$ et $Q^0(x, \cdot) \geq 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$. Notons par $(S, I, Q(\cdot))$ la solution correspondante. Nous devons montrer que

$\|(S, I, Q(\cdot)) - (\tilde{S}, 0, 0)\|_{\mathbb{X}} > \epsilon$. Supposons par l'absurde qu'il existe $T > 0$ tel que $S(\cdot, t) \geq \tilde{S} - \epsilon$, $I(\cdot, t) < \epsilon$ et $\|Q(\cdot, t)\|_1 < \epsilon$ pour tout $t \geq T$. Sans perte de généralité, supposons que $T = 0$. D'autre part, nous savons que $H(S, \cdot)$ est une fonction concave, quelque soit $S > 0$, $\frac{H(S, I)}{I}$ est une fonction décroissante. D'où,

$$\frac{H(\tilde{S} - \epsilon, I)}{I} \geq \frac{H(\tilde{S} - \epsilon, \epsilon)}{\epsilon} \text{ pour tout } I < \epsilon.$$

Maintenant, en observant que $(I, Q(\cdot))$ est une sur-solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underline{I}(x, t) &= \delta_2 \Delta \underline{I} + \beta(x) \frac{H(\tilde{S} - \epsilon, \epsilon)}{\epsilon} \underline{I}(x, t) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) \underline{I}(x, t) \\ &+ \int_0^t k(x, a) \gamma(x, a) \underline{I}(x, t - a) da + \int_t^\infty k(x, a) \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)} Q^0(x, a - t) da, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

et

$$\underline{Q}(x, a, t) = \begin{cases} \alpha(x) \gamma(x, a) \underline{I}(x, t - a), & \text{if } t > a, \\ \frac{\gamma(x, a)}{\gamma(x, a - t)} Q^0(x, a - t), & \text{if } t < a, \end{cases} \quad (3.67)$$

avec les mêmes conditions initiales et aux limites que pour l'équation (I, Q) . Par le principe de comparaison, nous avons $I \geq \underline{I}$ et $Q \geq \underline{Q}$. Ensuite, nous posons,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\lambda^{\varepsilon_n} \psi(x) &= \delta_2 \Delta \psi(x) + \left[-(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) \right. \\ &\quad \left. + \alpha(x) \int_0^\infty k(x, a) e^{-\lambda a} \gamma(x, a) da + \beta(x) \frac{\partial H}{\partial w}(\tilde{S}(x) - \varepsilon_n, \varepsilon_n) \right] \psi(x), \quad \forall \lambda > -\underline{\mu}. \end{aligned}$$

Par (PH^1) , il existe une suite décroissante et strictement positive $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et

$$\bar{\alpha} \left(\int_0^\infty \underline{k}(a) e^{-\int_0^a \bar{g}_2(s) ds} e^{-\hat{\lambda}_1 a} da - 1 \right) > \bar{g}_1 - \underline{\beta} \min_{x \in \bar{\Omega}} \frac{H(\tilde{S}(x) - \varepsilon_n, \varepsilon_n)}{\varepsilon_n}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (3.68)$$

En remplaçant (\mathbf{PH}^1) par (3.68) et en suivant un raisonnement similaire à

celui de la démonstration du Lemme [3.4](#), nous obtenons

$$\mathbb{L}_{\lambda_1}^{\varepsilon_n} v^* \geq 0,$$

où v^* est la fonction propre strictement positive de [\(3.33\)](#) associée à la valeur propre principale 0.

En remplaçant (PH^1) par [\(3.68\)](#) et en argumentant de manière similaire à la preuve du Lemme [3.4](#), nous montrons l'existence et l'unicité de $\lambda_{\varepsilon_n}^* > -\underline{\mu}$ tel que

$$\lambda_{\varepsilon_n}^* = s(\mathbb{L}_{\lambda_{\varepsilon_n}^*}^{\varepsilon_n}),$$

et $\lambda_{\varepsilon_n}^*$ a le même signe que $s(\mathbb{L}_0^{\varepsilon_n})$. Par la continuité de $s(\mathbb{L}_0^{\varepsilon_n})$ par rapport à ε_n , nous avons

$$s(\mathbb{L}_0^{\varepsilon_n}) \rightarrow s(\mathcal{L}_0^1) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Maintenant, puisque $\mathcal{R}_0 > 1$, selon le corollaire [3.1](#), nous avons $s(\mathcal{L}_0^1) > 0$. Il en résulte qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\lambda_{\varepsilon_n}^* = s(\mathbb{L}_{\lambda_{\varepsilon_n}^*}^{\varepsilon_n}) > 0, \text{ pour tout } n > N.$$

Nous fixons de telles valeurs propres principales et, pour simplifier, nous posons $\lambda_\varepsilon^* := \lambda_{\varepsilon_n}^*$. Soit $\phi^* > 0$ la fonction propre qui lui est associée. Ensuite, définissons \underline{v} comme suit :

$$\underline{v}(x, t) = r e^{\lambda_\varepsilon^* t} \phi_\varepsilon^*(x), \tag{3.69}$$

avec $r > 0$ vérifie

$$r \phi_\varepsilon^*(x) \leq \min\{r^*, I^0(x)\}, \tag{3.70}$$

où r^* est défini dans [\(3.65\)](#). À partir de cela et $\lambda_\varepsilon^* > 0$, nous avons

$$r \phi_\varepsilon^*(x) \alpha(x) \int_0^\infty e^{-\lambda_\varepsilon^* s} k(x, s+t) \gamma(x, s+t) ds \leq r^* \alpha(x) \int_0^\infty k(x, s+t) \gamma(x, s+t) ds.$$

En utilisant (3.65), nous obtenons

$$r\phi_\varepsilon^*(x)\alpha(x) \int_0^\infty e^{-\lambda_\varepsilon^* s} k(x, s+t)\gamma(x, s+t)ds \leq \int_0^\infty k(x, s+t)\gamma(x, s+t, s)Q^0(x, s)ds, \quad \forall t > 0. \quad (3.71)$$

D'après (3.70) et (3.71), on peut démontrer que \underline{v} , défini dans (3.69), est une sous-solution de (3.66). Par conséquent, en appliquant le principe de comparaison, on en déduit que

$$\underline{v}(x, t) \leq \underline{I}(x, t) \leq I(x, t).$$

Puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{v}(x, t) = \infty \quad \text{for all } x \in \bar{\Omega},$$

nous aboutissons à une contradiction avec le caractère borné de I , tel qu'énoncé dans le Lemme 3.2. \square

Théorème 3.6. *Soit (PH^1) vérifiée. Pour $\mathcal{R}_0 > 1$ et $u^0 = (S^0, I^0, Q^0) \in \mathcal{X}_0$, la solution de (3.1) est uniformément persistante. C'est-à-dire, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(x, t) > \epsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} I(x, t) > \epsilon, \quad (3.72)$$

et

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty Q(x, a, t)da \geq \epsilon\alpha \int_0^\infty \gamma(x, a)da$$

uniformément pour tout $x \in \bar{\Omega}$. De plus, le système (3.1) a au moins une solution d'état stationnaire strictement positive dans \mathbb{X}_+ .

Démonstration. Il est clair qu'il n'y a pas de cycle dans M_∂ de $(\tilde{S}, 0, 0)$ à $(\tilde{S}, 0, 0)$. Maintenant, en combinant le Lemme 3.8, le Lemme 3.9 et le Théorème 3.3, nous concluons en appliquant le Théorème 1.28, qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi_t(S^0, I^0, Q^0)) \geq \epsilon \quad \text{pour chaque } (S^0, I^0, Q^0) \in \mathcal{X}_0.$$

Il s'ensuit, d'après la définition de ρ , que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} I(x, t) \geq \epsilon \quad \text{uniformément pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Cela, avec (3.55), donne

$$\int_0^\infty Q(x, a, t) da \geq \int_0^t \alpha(x) \gamma(x, a) I(x, t - a) da.$$

Le lemme de Fatou conduit à

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty Q(x, a, t) da \geq \epsilon \alpha \int_0^\infty \gamma(x, a) da \quad \text{uniformément pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Enfin, d'après la proposition 3.3,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \geq \epsilon \quad \text{uniformément pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Par le Théorème 3.3 et le lemme 3.9, le semi-flot $\Phi_t|_{\mathcal{X}_0} : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}_0$ a un attracteur compact noté par M_0 . Cela, avec le Théorème 1.29, implique que Φ_t a un état stationnaire dans \mathcal{X}_0 . L'existence d'un état stationnaire strictement positif dans \mathbb{X}_+ est obtenue par la proposition 3.3. \square

3.7 Stabilité globale et unicité de l'état stationnaire strictement positif

Cette section est consacrée à démontrer la stabilité globale de l'équilibre endémique. Nous commençons par décrire les trajectoires totales du modèle (3.1)-(3.2). Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ les Φ -trajectoires totales, $\phi(t) = (S(t, x), I(t, x), Q(t, \cdot, x))$. Alors,

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \delta_1 \Delta S(x, t) + \Lambda(x) - \mu(x) S(x, t) - \beta(x) H(S(x, t), I(x, t)) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \delta_2 \Delta I(x, t) + \beta(x) H(S(x, t), I(x, t)) - (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x)) I(x, t) \\ \quad + \int_0^\infty k(x, a) Q(x, a, t) da \\ Q(x, a, t) = \alpha(x) I(x, t - a) \gamma(x, a) \end{cases} \quad (3.73)$$

D'autre part, d'après le Théorème [2.61](#), il existe un état stationnaire endémique $E^* = (S^*, I^*, Q^*)$ qui est solution du problème

$$\begin{cases} \Lambda(x) = -\delta_1 \Delta S^*(x) + \mu(x)S^*(x) + \beta(x)H(S^*, I^*), \\ \beta(x)H(S^*, I^*) = -\delta_2 \Delta I^* + (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))I^* - \int_0^\infty k(x, a)Q^*(x, a)da, \\ Q^*(x, a) = \alpha(x)\gamma(x, a)I^*(x). \end{cases} \quad (3.74)$$

Nous devons imposer l'une des hypothèses suivantes

(A) $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 \neq 0$.

(B) $\delta_2 \neq 0$ et $\delta_1 \neq 0$ et tous les paramètres de [\(3.1\)](#) sont indépendants de l'espace.

Théorème 3.7. *Soit l'hypothèse (PH^1) vérifiée. Supposons que $R_0 > 1$ ainsi que l'hypothèse [\(3.61\)](#), et que l'une des conditions (A) ou (B) soit satisfaite. Alors l'état stationnaire strictement positif $E^* = (S^*(x), I^*(x), Q^*(x, a))$ est globalement asymptotiquement stable dans \mathcal{X}_0*

Démonstration. D'abord, rappelons que M_0 est un attracteur compact dans \mathcal{X}_0 mentionné dans la démonstration du Théorème [2.61](#).

Pour $(S(0), I(0), Q(\cdot, 0)) = (S^0, I^0, Q^0(\cdot))$ soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow M_0$, avec $\Psi(t) = (S(t), I(t), Q(t, \cdot))$ est la trajectoire totale de Φ à travers $(S^0, I^0, Q^0(\cdot))$. Ainsi, $\Psi(t)$ est la solution de [\(3.73\)](#).

Posons $g(s) = s - \ln(s) - 1$ et introduisons

$$\begin{aligned} W_1(x, t) &= S(x, t) - S^* - \int_{S(x, t)}^{S^*(x)} \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(\eta, I^*(x))} d\eta, \\ W_2(x, t) &= I^*(x)g\left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)}\right), \\ W_3(x, t) &= \int_0^\infty g\left(\frac{Q(x, a, t)}{Q^*(x, a)}\right) \phi(x, a) da. \end{aligned}$$

et

$$\phi(x, a) = \alpha(x)I^*(x) \int_a^\infty k(x, \sigma)\gamma(x, \sigma)d\sigma,$$

Remarquons que ϕ est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, a)}{\partial a} = -\alpha(x)I^*(x)k(x, a)\gamma(x, a), \\ \phi(x, 0) = \alpha(x)I^*(x)K_\gamma(x) \end{cases}$$

où K_γ est définie en (3.50). En utilisant la première équation de (3.74), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial t} &= \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))}\right) (\delta_1 \Delta S(x, t) - \delta_1 \Delta S^*(x)) \\ &+ \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))}\right) (S^*(x) - S(x, t)) \\ &+ \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))}\right) (\beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\ &- \beta(x)H(S(x, t), I(x, t))). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial t} &= \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)}\right) \left(\delta_2 \Delta I + \beta(x)H(S(x, t), I(x, t))\right. \\ &- \left.(\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))I(x, t)\right) \\ &+ \alpha(x) \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)}\right) \int_0^\infty k(a, x) \gamma(x, a) I(t - a, x) da. \end{aligned} \tag{3.75}$$

À partir de la deuxième et de la troisième équations de (3.74), nous avons

$$\begin{aligned} (\mu(x) + f_1(x) + \alpha(x))I^*(x) &= \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\ &+ \alpha(x)K_\gamma(x)I^*(x) + \delta_2 \Delta I^*(x) \end{aligned}$$

En substituant cette équation dans (3.75), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2}{\partial t} &= \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \delta_2 \Delta I + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \beta(x) H(S(x,t), I(x,t)) \\
&\quad - \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \frac{I(x,t)}{I^*(x)} \left(\delta_2 \Delta I^*(x) \right. \\
&\quad \left. + \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) + \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \right) \\
&\quad + \alpha(x) \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \int_0^\infty k(a,x) \gamma(x,a) I(t-a,x) da, \\
&= \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \delta_2 \Delta I + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \beta(x) H(S(x,t), I(x,t)) \\
&\quad - \left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)} - 1\right) \left(\delta_2 \Delta I^*(x) + \beta(x) H(S^*, I^*) + \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \right) \\
&\quad + \alpha(x) \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \int_0^\infty k(a,x) \gamma(x,a) I(x,t-a) da.
\end{aligned}$$

Maintenant, revenons à la dérivée de W_3 ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_3}{\partial t} &= g \left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)} \right) \phi(x,0) + \int_0^\infty g \left(\frac{I(x,t-a)}{I^*(x)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial a}(x,a) da, \\
&= g \left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)} \right) \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \\
&\quad - \alpha(x) I^*(x) \int_0^\infty g \left(\frac{I(x,t-a)}{I^*(x)} \right) k(x,a) \gamma(x,a) da.
\end{aligned}$$

Ensuite, posons $\overline{W} = W_2 + W_3$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} &= g \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \\
&- \alpha(x) I^*(x) \int_0^\infty g \left(\frac{I(x, t-a)}{I^*(x)} \right) k(x, a) \gamma(x, a) da \\
&+ \alpha(x) I^*(x) \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \int_0^\infty \frac{I(x, t-a)}{I^*(x)} k(x, a) \gamma(x, a) da \\
&+ \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \beta(x) H(S(x, t), I(x, t)) + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I \\
&- \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} - 1 \right) \left(\delta_2 \Delta I^*(x) \right. \\
&+ \left. \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) + \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \right), \\
&= g \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \\
&- \alpha(x) I^*(x) \int_0^\infty g \left(\frac{I(x, t-a)}{I^*(x)} \right) k(x, a) \gamma(x, a) da, \\
&+ \alpha(x) I^*(x) \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \\
&\quad \int_0^\infty \left(\frac{I(x, t-a)}{I^*(x)} - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) k(x, a) \gamma(x, a) da \\
&+ \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \alpha(x) K_\gamma(x) I(x, t) \\
&+ \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \beta(x) H(S(x, t), I(x, t)) + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I \\
&- \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} - 1 \right) \left(\delta_2 \Delta I^*(x) \right. \\
&+ \left. \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) + \alpha(x) K_\gamma(x) I^*(x) \right).
\end{aligned}$$

En réorganisant tous ces termes ci-dessus, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} &= \alpha(x)I^*(x) \int_0^\infty \left[g\left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) - g\left(\frac{I(x,t-a)}{I^*(x)}\right) \right. \\
&\quad \left. + g'\left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) \left(\frac{I(x,t-a)}{I^*(x)} - \frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) \right] k(x,a)\gamma(x,a) da \\
&\quad + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \alpha(x)K_\gamma(x)I(x,t) \\
&\quad + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \beta(x)H(S(x,t), I(x,t)) \\
&\quad - \left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)} - 1\right) \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\quad - \left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)} - 1\right) \alpha(x)k_\gamma(x)I^*(x) \\
&\quad + \left(1 - \frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) \delta_2 \Delta I^*(x) + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \delta_2 \Delta I(x,t).
\end{aligned}$$

Pour des raisons de simplicité, nous notons

$$\begin{aligned}
L(x,t) &= \alpha(x)I^*(x) \int_0^\infty \left\{ g\left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) - g\left(\frac{I(x,t-a)}{I^*(x)}\right) \right. \\
&\quad \left. + g'\left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) \left(\frac{I(x,t-a)}{I^*(x)} - \frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) \right\} k(x,a)\gamma(x,a) da.
\end{aligned}$$

Puisque g est une fonction convexe, il s'ensuit que $g(b) - g(a) + g'(b)(a-b) \leq 0$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, alors $L(x,t) \leq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0$. Maintenant, nous

calculons la dérivée de $W := W_1 + \overline{W}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\
&\quad + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (\beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\quad - \beta(x)H(S(x, t), I(x, t))) \\
&\quad + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) (\beta(x)H(S(x, t), I(x, t)) + \alpha(x)K_\gamma(x)I(x, t)) \\
&\quad - \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} - 1 \right) (\beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) + \alpha(x)K_\gamma(x)I^*(x)) \\
&\quad + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \\
&\quad + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) + \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x) \\
&\quad - \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x).
\end{aligned}$$

Par réarrangements, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} = & L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\
& + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
& + \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
& - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \beta(x) H(S(x, t), I(x, t)) + \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
& - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
& + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \\
& - \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x) \\
& + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) \\
& + \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x).
\end{aligned}$$

En ajoutant et en soustrayant le terme suivant

$$\beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \left(\ln \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} + \ln \frac{I^*(x) H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t) H(S^*(x), I^*(x))} \right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \left[1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} + \ln \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right] \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\left[\ln \frac{I^*(x) H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t) H(S^*(x), I^*(x))} - \frac{I^*(x) H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t) H(S^*(x), I^*(x))} + 1 \right] \\
&- \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \ln \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} \\
&- \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \ln \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \\
&- \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \ln \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S^*(x), I^*(x))} \\
&- \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \\
&- \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x) \\
&+ \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) + \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \left[1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} + \ln \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right] \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\left[\ln \frac{I^*(x) H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t) H(S^*(x), I^*(x))} - \frac{I^*(x) H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t) H(S^*(x), I^*(x))} + 1 \right] \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \left[\ln \frac{I(x, t)}{I^*(x)} - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} + 1 \right] \\
&+ \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} \\
&- \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \ln \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S^*(x), I^*(x))} - \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \\
&- \beta(x) H(S^*(x), I^*(x)) \ln \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \\
&+ \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \\
&- \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x) + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) \\
&+ \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x).
\end{aligned}$$

Vu la définition de g , il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\
&\quad - \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\quad \left[g \left(\frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) + g \left(\frac{I^*(x)H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t)H(S^*(x), I^*(x))} \right) \right] \\
&\quad - g \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\quad + \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \left[\frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} - \ln \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right. \\
&\quad \left. - \ln \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S^*(x), I^*(x))} - 1 \right] + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \\
&\quad - \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x) \\
&\quad + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) + \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x).
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le fait que

$$\ln \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S^*(x), I^*(x))} = \ln \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} + \ln \frac{H(S(x, t), I^*(x))}{H(S^*(x), I^*(x))},$$

Nous trouvons,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\
&\quad - \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\
&\quad \left[g \left(\frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) + g \left(\frac{I^*(x)H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t)H(S^*(x), I^*(x))} \right) \right] \\
&\quad + \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \left[g \left(\frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) - g \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \\
&\quad - \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x) \\
&\quad + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) - \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x).
\end{aligned}$$

Maintenant, nous posons

$$Y(x, t) = g \left(\frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) - g \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right),$$

pour chaque $x \in \Omega$, pour les valeurs t telles que $\frac{I(x, t)}{I^*(x)} < 1$, l'hypothèse [\(3.61\)](#) implique que

$$\frac{I(x, t)}{I^*(x)} < \frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} < 1.$$

Puisque la fonction H est décroissante sur $(0, 1)$, alors

$$g \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) > g \left(\frac{H(S(x, t), I(x, t))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right),$$

Nous procédons de manière similaire pour les valeurs t telles que $\frac{I(x, t)}{I^*(x)} > 1$,

pour montrer que $Y(x, t)$ est négative. Notons

$$\begin{aligned}\Pi(x, t) &= L(x, t) + \mu(x) \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) (S^*(x) - S(x, t)) \\ &\quad - \beta(x)H(S^*(x), I^*(x)) \\ &\quad \left[g \left(\frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) + g \left(\frac{I^*(x)H(S(x, t), I(x, t))}{I(x, t)H(S^*(x), I^*(x))} \right) \right] \\ &\quad + \beta(x)H(S^*(x), I^*(x))Y(x, t).\end{aligned}$$

Remarquons $\Pi(x, t) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \geq 0$.

Puis, nous définissons $W_0(\Psi(t)) := \int_{\Omega} C(x)W(x, t)dx$ où C est une fonction strictement positive à préciser plus tard. Alors

$$\begin{aligned}\frac{dW_0(\Psi(t))}{dt} &= \int_{\Omega} C(x) \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} dx, \\ &= \int_{\Omega} C(x)\Pi(x, t)dx + \mathfrak{K}(t),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(t) &= \int_{\Omega} C(x) \left[\left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S(x, t) \right. \\ &\quad - \left(1 - \frac{H(S^*(x), I^*(x))}{H(S(x, t), I^*(x))} \right) \delta_1 \Delta S^*(x) + \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)} \right) \delta_2 \Delta I(x, t) \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) \delta_2 \Delta I^*(x) \right] dx\end{aligned}$$

Remarquons que $\int_{\Omega} C(x)\Pi(x, t)dx \leq 0$ pour toute fonction strictement positive C .

Maintenant, nous traitons le dernier terme à travers les deux cas suivants :

Case 1 : (A) est satisfait.

$\mathfrak{K}(t)$ s'exprime alors comme

$$\mathfrak{K}(t) = \int_{\Omega} C(x) \left[\left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x,t)}\right) \delta_2 \Delta I(x,t) + \left(1 - \frac{I(x,t)}{I^*(x)}\right) \delta_2 \Delta I^*(x) \right] dx.$$

Choisissons $C(x) = I^*(x)$. Alors, la première identité de Green avec une condition aux limites de Neumann donne (voir par exemple [51])

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(t) &= -\delta_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I^*(x)}{\partial x_i} - \frac{I^*(x)}{I(x,t)} \frac{\partial I^*(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Case 2 : (B) est satisfait .

Dans ce cas, nous avons $\Delta S^*(x) = \Delta I^*(x) = 0$. Choisissons $C(x) = 1$, nous obtenons

$$\mathfrak{K}(t) = - \int_{\Omega} \delta_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial H(S(x,t), I^*)}{\partial S} - \delta_2 \frac{I^*}{(I(x,t))^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I(x,t)}{\partial x_j} \right)^2 dx.$$

En utilisant le fait que H est croissante par rapport à la première variable, nous déduisons que $\mathfrak{K}(t) \leq 0$ et, par conséquent,

$$\frac{dW_0(\Psi(t))}{dt} \leq 0.$$

De plus, $\frac{dW_0(\Psi(t))}{dt} = 0$ implique $S(x,t) = S^*(x)$. En utilisant l'équation de S dans (3.1) et la première équation de (3.74), nous obtenons

$$H(S^*(x), I(x,t)) = H(S^*(x), I^*(x)).$$

Cela, avec (3.61), donne

$$I(., t) = I^*(.), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Enfin, en combinant ce dernier résultat avec (3.73), nous trouvons

$$Q(t, ..) = Q^*(.,.), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant l'invariance de LaSalle, nous obtenons que $M_0 = \{E^*\}$. Rappelons que M_0 est un attracteur global compact qui attire tout ensemble invariant borné dans \mathcal{X}_0 . Cela implique que M_0 est un attracteur local compact des ensembles compacts. Cela, associé à $M_0 = \{E^*\}$, le Théorème [1.23](#) implique que E^* soit localement asymptotiquement stable. L'unicité est une conséquence directe de l'attractivité de E^* . \square

le rôle du taux de quarantaine pour contenir l'épidémie

Dans cette section, nous allons déterminer le taux de quarantaine requis pour contenir l'épidémie. À cette fin, nous supposons qu'en l'absence de quarantaine, l'épidémie persiste, et nous fournissons une condition sur la fonction de quarantaine α de manière à ce que \mathcal{R}_0 devienne inférieur à un, ce qui constitue le résultat recherché.

L'objectif principal est de supposer que le taux de reproduction de base correspondant à l'absence de quarantaine (c'est-à-dire $\alpha \equiv 0$, noté \mathcal{R}_0^S) est supérieur à un, et nous cherchons une fonction optimale α de sorte que \mathcal{R}_0 devienne inférieur à un. Cette fonction optimale est le taux de quarantaine requis pour aider à contenir l'épidémie.

Nous considérons le taux de reproduction de base correspondant à l'absence du taux de quarantaine (ce qui signifie que nous remplaçons $\alpha(x) = 0$, $x \in \bar{\Omega}$ dans [\(3.49\)](#)) :

$$\mathcal{R}_0^S = \sup_{\phi \in H^2(\Omega)} \left\{ \frac{\int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) (\phi(x))^2 dx}{\delta_2 \int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\mu(x) + f_1(x)) (\phi(x))^2 dx} \right\}. \quad (3.76)$$

Où $\tilde{S}(x)$ est la solution du problème suivant :

$$\delta_1 \Delta \tilde{S}(x) + \Lambda(x) - \mu(x) \tilde{S}(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \tilde{S}(x) = 0, \quad x \in \partial \Omega.$$

En posant $\psi \in C(\bar{\Omega})$ comme la fonction propre correspondant à \mathcal{R}_0^S , l'équation (3.76) peut ainsi s'écrire :

$$\delta_2 \Delta \psi(x) + (\mu(x) + f_1(x)) \psi(x) - \frac{\beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0)}{\mathcal{R}_0^S} \psi(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi(x) = 0, \quad x \in \partial \Omega.$$

Il est bien connu que $F_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ est la fonction propre correspondant à \mathcal{R}_0 , qui vérifie :

$$-\delta_2 \Delta F_0(x) - (\mu(x) + f_1(x) - (1 - K_\gamma(x)) \alpha(x)) F_0(x) + \frac{\beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0)}{\mathcal{R}_0} F_0(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} F_0(x) = 0, \quad x \in \partial \Omega. \quad (3.79)$$

En multipliant (3.78) par F_0 et (3.79) par ψ , puis en les additionnant et en intégrant l'équation obtenue sur Ω , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}_0} \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx &= \int_{\Omega} (1 - K_\gamma(x)) \alpha(x) \psi(x) F_0(x) dx \\ &+ \frac{1}{\mathcal{R}_0^S} \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Alors,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\mathcal{R}_0^S \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx}{\mathcal{R}_0^S \int_{\Omega} (1 - K_\gamma(x)) \alpha(x) \psi(x) F_0(x) dx + \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx}. \quad (3.81)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx &< \mathcal{R}_0^S \int_{\Omega} (1 - K_{\gamma}(x)) \alpha(x) \psi(x) F_0(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nous concluons que $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^S$. Par conséquent, la fonction de quarantaine α réduit l'épidémie dans la population. Maintenant, nous allons vérifier si elle peut contenir l'épidémie ou non. À noter que (3.81) représente la relation entre \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_0^S . En posant $\mathcal{R}_0 < 1$ (et en utilisant le fait que $\mathcal{R}_0^S > 1$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1 - K_{\gamma}(x)) \alpha(x) \psi(x) F_0(x) dx &> \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx \\ &- \frac{1}{\mathcal{R}_0^S} \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.83)$$

qui peut être réécrit

$$\int_{\Omega} (1 - K_{\gamma}(x)) \alpha(x) \psi(x) F_0(x) dx > \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^S}\right) \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx. \quad (3.84)$$

Par conséquent, si $\alpha(x)$ vérifie l'inégalité (3.84), nous obtenons $\mathcal{R}_0 < 1$.

Cela signifie que nous pouvons toujours extraire une fonction de quarantaine α qui vérifie l'inégalité (3.84). Ainsi, nous pouvons toujours obtenir $\mathcal{R}_0 < 1$ si $\mathcal{R}_0^S > 1$.

Pour simplifier, si nous considérons que $\alpha(x) = \alpha_0$, alors l'inégalité (3.84) peut être exprimée comme suit :

$$\alpha_0 > \alpha_{\min} := \frac{\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^S}\right) \int_{\Omega} \beta(x) \frac{\partial H}{\partial I}(\tilde{S}(x), 0) \psi(x) F_0(x) dx}{\int_{\Omega} (1 - K_{\gamma}(x)) \psi(x) F_0(x) dx}.$$

Dans ce cas, si $\alpha_0 > \alpha_{\min}$, alors nous avons $\mathcal{R}_0 < 1$ (l'épidémie est conte-

nue) et l'état d'équilibre sans maladie est globalement stable. Si $\alpha_0 < \alpha_{\min}$, l'épidémie persiste et le taux de quarantaine n'est pas suffisant pour contenir l'épidémie.

Remarque 3.6. À noter que $\hat{\phi}$ dépend de α et de \mathcal{R}_0 , et donc la résolution de l'inégalité (3.84) n'est pas directe. Cependant, si nous considérons l'espace homogène, c'est-à-dire que toutes les données sont constantes, alors par des calculs directs, (3.84) devient :

$$\alpha > \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{SIR}}\right) \frac{\beta \frac{\partial H}{\partial I}(\hat{S}, 0)}{(1 - K_\gamma)}.$$

3.8 Simulations numériques

Dans cette section, nous validons nos résultats théoriques. Dans un premier temps, nous considérons $\Omega = (0, 8)$, puis nous considérons l'ensemble de paramètres suivant

$$\Lambda(x) = 1, \quad \mu(x) = 0.2, \quad f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 2, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0.01,$$

les conditions initiales.

$$S(x, 0) = 0.5\cos(3x) + 0.5, \quad I(x, 0) = 0.5\cos(3x) + 0.5$$

et

$$Q(x, a, 0) = (0.001\cos(3x) + 0.02)e^{-0.01a}.$$

nous considérons la fonctionnelle d'incidence bilinéaire f c'est-à-dire

$$H(S, I) = SI$$

Pour garantir ces résultats, nous considérons, en plus de l'ensemble des paramètres, la valeur $\beta(x) = 0.01$, utilisée pour le cas de la stabilité de l'équilibre sans maladie, où nous obtenons $\mathcal{R}_0 \approx 0.7$. Pour $\beta(x) = 0.5$, nous obtenons

$\mathcal{R}_0 \approx 2.1 > 1$, ce qui montre la stabilité globale de l'équilibre endémique (S^*, I^*, Q^*) . (voir Figures [3.2](#) et [3.1](#))

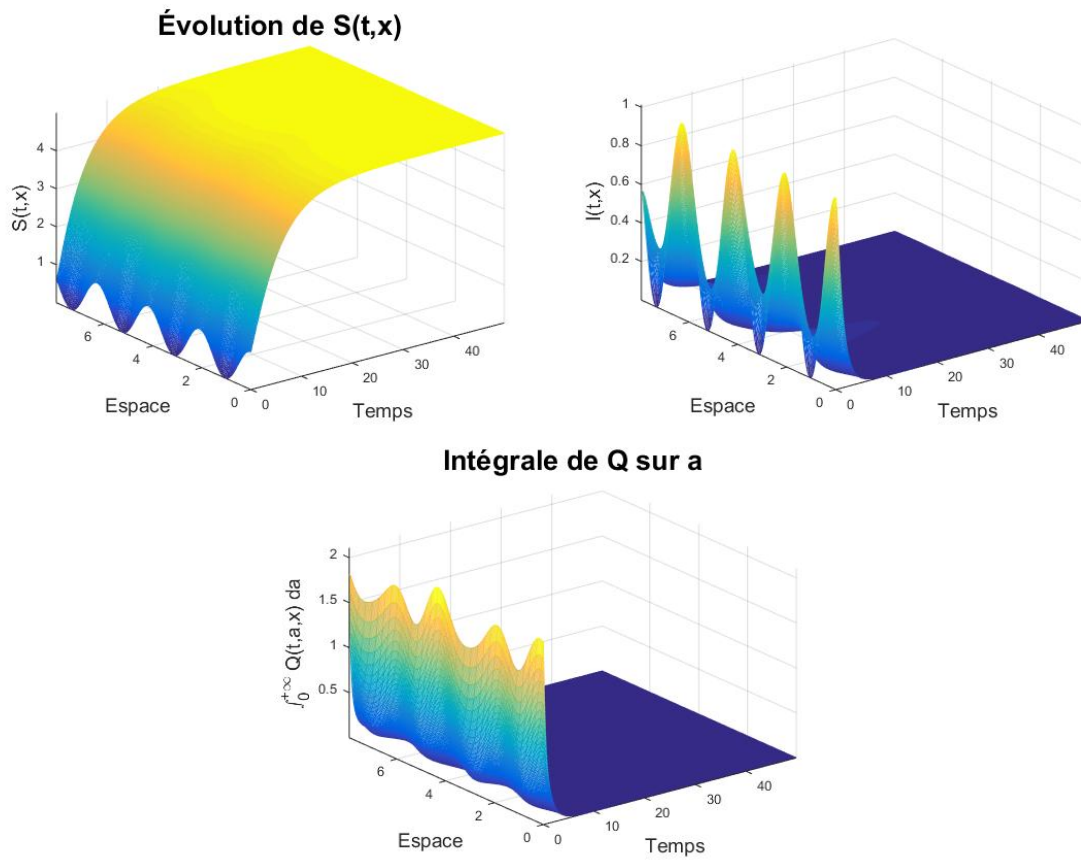


Figure 3.1 – Évolution spatio-temporelle de l'épidémie lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$

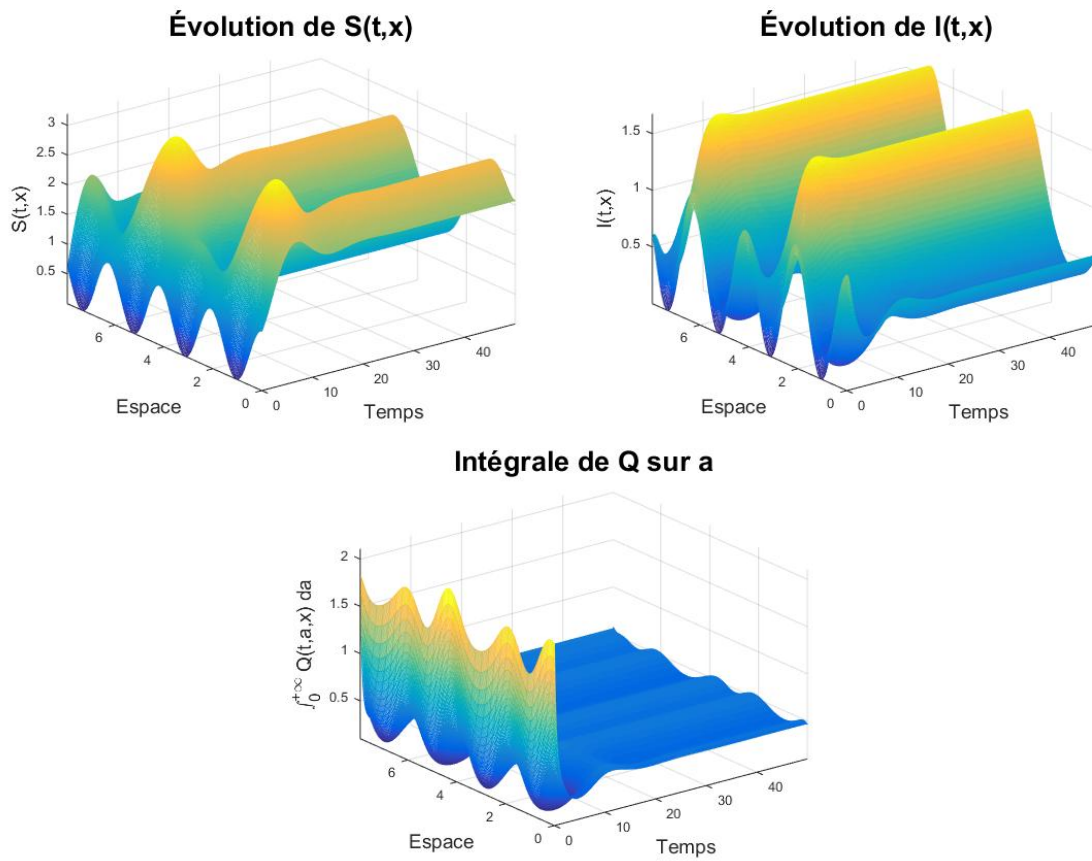


Figure 3.2 – Évolution spatio-temporelle de l'épidémie lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$

Bibliographie

- [1] O. Adebimpe, L. M. Erinle-Ibrahim, A. F. Adebisi, Stability Analysis of SIQS Epidemic Model with Saturated Incidence Rate, DOI : 10.4236/am.2016.710096, (2016).
- [2] N. D. Alikakos, An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations, *J. Differ. Equ.*, 33 (1979) 201-225.
- [3] L. J. S. Allen, B. M. Bolker, Y. Lou, A. L. Nevai, Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 21 (2008) 1-20.
- [4] W. Arendt, positive operators and integrated semi-group, *Proc. London Math. Soc.*, 3, 54, (1987), 321-349.
- [5] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. *Vector-Valued Laplace Transform and Cauchy Problems*. Springer Basel AG, (2001).
- [6] J. Arino, A. Ducrot, and P. Zongo, A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts, *J. Math. Biol.*, 64 (2012), pp. 423–448.
- [7] N. Bailey *The Mathematical Theory of Infectious Diseases*, Charles Griffin (1975).
- [8] S. Bentout, T. M. Touaoula. Global analysis of an infection age model with a class of nonlinear incidence rates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 434.2 (2016) : 1211-1239.
- [9] S. Bentout, S. Djilali, Asymptotic profiles of a nonlocal dispersal SIR epidemic model with treat-age in a heterogeneous environment, *Mathematics*

- in computer in simulation, 203, (2023) 926-956.
- [10] J. Blakely Richard, Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge university press, 1996.
- [11] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer, New York (2000).
- [12] F. Brauer, P. van den Driessche, J. Wu (Eds.), Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Math., vol. 1945, Springer, Berlin (2008).
- [13] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris, 1983.
- [14] C.J. Browne, S.S. Pilyugin, Global analysis of age-structured within-host virus model, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 18 (8) (2013) 1999-2017.
- [15] L.M. Cai, M. Martcheva, X.Z. Li Epidemic models with age of infection, indirect transmission and incomplete treatment. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 18 (9) (2013), pp. 2239-2265.
- [16] V. Capasso, G. Sergio A generalisation of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model. Math. Biosci., 42 (1978), pp. 43-61
- [17] C. Castillo-Chavez, H.W. Hethcote, V. Andreasen, S.A. Levin, W.M. Liu. Epidemiological models with age structure, proportionate mixing and cross-immunity. J. Math. Biol., 27 (1989), pp. 240-260.
- [18] A. Chekroun, T. Kuniya, Global threshold dynamics of an infection age-structured SIR epidemic model with diffusion under the Dirichlet boundary condition. J. Differ. Equ. 269, 117–148 (2020).
- [19] Chen, M., Wu, R. Dynamics of diffusive nutrient-microorganism model with spatially heterogeneous environment. J. Math. Anal. and Appl., 511(1), (2022) 126078.
- [20] C. Cosner, J. C. Beier, R. S. Cantrell, D. Impoinvil, L. Kapitanski, M. D. Potts, A. Troyo, and S. Ruan, The effects of human movement on the persistence of vector borne diseases, J. Theoret. Biol., 258 (2009), pp. 550-560.

- [21] R. Cui, Asymptotic profiles of the endemic equilibrium of a reaction-diffusion-advection SIS epidemic model with saturated incidence rate, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 26 (2021) 2997-3022.
- [22] R. Cui, K.-Y. Lam, Y. Lou, Dynamics and asymptotic profiles of steady states of an epidemic model in advective environments, *J. Differ. Equ.*, 263 (2017) 2343-2373.
- [23] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 3 Spectral Theory and Applications*, 1999.
- [24] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and J. A. J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio \mathcal{R}_0 in the models for infectious disease in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.*, 28 (1990), pp. 365–382.
- [25] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*. Wiley, Chichester, UK (2000).
- [26] S. Djilali, T.M. Touaoula, S. Miri, A Heroin Epidemic Model : Very General Non Linear Incidence, Treat-Age and Global Stability, *Acta Applicandae Mathematicae*, (2017) 152(2).
- [27] S. Djilali, Y. Chen, S. Bentout. Asymptotic analysis of SIR epidemic model with nonlocal diffusion and generalized nonlinear incidence functional, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(5), (2022) 6279-6301.
- [28] X.C. Duan, X.L. Li, M. Martcheva, Qualitative analysis on a diffusive age-structured heroin transmission model, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 54, 103105, (2020).
- [29] L. Duan, L. Huang, C. Huang. Spatial dynamics of a diffusive SIRI model with distinct dispersal rates and heterogeneous environment. *Communications on Pure & Applied Analysis* 20.10 (2021) 3539.

- [30] S.A.A. El-marouf, S.M. Alihaby, Global Analysis of an Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate. *Journal of Mathematics and Statistics*, 7, 319-325, (2011).
- [31] K.J. Engel, R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer-Verlag, New York, (2000).
- [32] M. Erdem, M. Safan, C. Castillo-Chavez, Mathematical Analysis of an SIQR Influenza Model with Imperfect Quarantine, DOI 10.1007/s11538-017-0301-6
- [33] K. Ezzinbi, The basic theory for partial functional Differential equations and applications, cel.archives.ouvertes, 2004.
- [34] B. Fang, X. Z. Li, M. Martcheva, L. M. Cai (2015). Global asymptotic properties of a heroin epidemic model with treat-age. *Applied Mathematics and Computation*, 263, 315-331.
- [35] Z. Feng, H.R. Thieme, Recurrent outbreaks of childhood diseases revisited : the impact of isolation. *Mathematical biosciences* 128.1-2 (1995) 93-130.
- [36] Z. Feng, H.R. Thieme, Endemic models with arbitrarily distributed periods of infection I : fundamental properties of the model. *SIAM J. Appl. Math.*, 61 (3) (2000), pp. 803-833
- [37] M. Frioui and T. M. Touaoula, B.Ainseba. Global dynamics of an age-structured model with relapse. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 25.6 (2020) 2245.
- [38] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*. Springer, Berlin (2001).
- [39] C. Guezzen, T. M. Touaoula, Effectiveness of imperfect quarantine in controlling infectious diseases : A mathematical analysis of a general diffusive epidemic model. *Communications on Pure and Applied Analysis*, (2024), 23(12) : 1797-1837. doi : 10.3934/cpaa.2024067

- [40] Z. Guo, F. Wang, and X. Zou, Threshold dynamics of an infective disease model with a fixed latent period and non-local infections, *J. Math. Biol.*, 65, (6-7) 1387-1410, (2012).
- [41] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, American Mathematical Society, Providence, (1988).
- [42] P. Hess, On the eigenvalue problem for weakly coupled elliptic systems, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 81 (1983), pp. 151-159.
- [43] P. Hess. Periodic-Parabolic boundary value problems and positivity. Pitman Res. Notes in Math, 247, Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, (1991).
- [44] H.Hethcote, M.Zhien, L.Shengbing, Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases, *Mathematical Biosciences* 180 (2002) 141–160.
- [45] M. W. Hirsch, The dynamical systems approach to differential equations. *Bull Am Math Soc* 11 (1984) 1-64.
- [46] S.B. Hsu, J. Jiang, F.B. Wang, On a system of reaction-diffusion equations arising from competition with internal storage in an unstirred chemostat, *Journal Differential Equations* 248 (2010) 2470–2496.
- [47] M. Iannelli, *Mathematical theory of age-structured population dynamics*. Applied Mathematics Monographs CNRvol. 7, Giadini Editorie Stampatori, Pisa (1994).
- [48] J. Jiang, X. Liang and X.Q. Zhao Saddle-point behavior for monotone semiflows and reaction–diffusion models, *Journal Differential Equations* 203 (2004) 313–330.
- [49] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1976).
- [50] H. Kellermann, M. Hieber, Integrated semi-group, *J. Func. Anal.* , 15, (1989), 160-180.

- [51] T. Kuniya, J. Wang, Lyapunov functions and global stability for a spatially diffusive SIR epidemic model. *Applicable Analysis* 96(11) (2017) pp. 1935-1960.
- [52] A. Korobeinikov, A. Global, Properties of infectious disease models with nonlinear incidence. *Bull. Math. Biol.*, 69 (2007), pp. 1871-1886.
- [53] A. Korobeinikov, P.K. Maini, Nonlinear incidence and stability of infectious disease models. *Math. Med. Biol.*, 22 (2005), pp. 113-128.
- [54] W. Kersner, R. Nagel, Asymptotic behavior of one-parameter semigroups of positive operators. *Acta. Appl. Math.*, 2, 1984, 297-309.
- [55] S. Koshi, S. Dimiev and R. Lazov, Partially ordered normed linear spaces with weak Fatou property, *taiwane journal of mathematics* Vol. 1, No. 1, pp. 1-9, March (1997).
- [56] D.Lassoued, Fonctions presque-périodiques et équations différentielles model via environmental driven infection in heterogenous space, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00942969/document>.
- [57] J.Li and X. Zou, Dynamics of an epidemic model with non-local infections for diseases with latency over a patchy environment, *J. Math. Biol.*, 60 (2010), pp. 645-686.
- [58] W. Li, Y. Zhang, J. Ji, L. Huang, Dynamics of a diffusion epidemic SIRI system in heterogeneous environment. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 74(3), (2023) 104.
- [59] H. Li, R. Peng, F-B. Wang, Varying total population enhances disease persistence : Qualitative analysis on a diffusive SIS epidemic 0model, *J. Differ. Equ.*, 262, (2017) 885-913.
- [60] Y. Lou, X-Q. Zhao (2011) A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population. *J Math Biol* 62 :543–568.
- [61] P. Magal, C.C. McCluskey, G.F. Webb, Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model. *Appl. Anal.*, 89 (7) (2010), pp. 1109-1140.

- [62] P. Magal, S.Ruan, Theory and Applications of Abstract Semilinear Cauchy Problems. Vol 201, New York Springer, (2018).
- [63] P. Magal, H.R. Thieme, Eventual compactness for a semiflow generated by an age-structured models. Commun Pure Appl. Anal., 3 (2003), pp. 695-727
- [64] P. Magal, X-Q. Zhao, Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems, SIAM J. Math. Anal., 37 (2005) 251-275.
- [65] C.C. McCluskey, Global stability for an SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay. Math. Biosci. Eng., 6 (2009), pp. 603-610
- [66] C.C. McCluskey, Global stability for an SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence. Math. Biosci. Eng., 7 (2010), pp. 837-850.
- [67] H. W. Mckenzie, Y. Jin, J. Jacobsen, and M. A. Lewis, \mathcal{R}_0 analysis of a spatiotemporal model for a stream population, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 11 (2012), pp. 567-596.
- [68] R. D. Nussbaum, Eigenvectors of nonlinear positive operator and the linear Krein-Rutman theorem, in : E. Fadell, G. Fournier (Eds.), Fixed Point Theory, in : Lecture Notes in Mathematics, vol.886, Springer, New York/Berlin, (1981) 309-331.
- [69] H.ouedrago Modélisation mathématique de la dengue :stratégies de contrôle, [http ://www.beep.ird.fr/collect/upb/index/assoc/UFRST-2017-OUE-MOD/UFRST-2017-OUE-MOD.pdf](http://www.beep.ird.fr/collect/upb/index/assoc/UFRST-2017-OUE-MOD/UFRST-2017-OUE-MOD.pdf).
- [70] A. Pazy, Semigroups of linear operators and application to partial differential equations, Springer, Berlin, (1983).
- [71] C.V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York and London, (1992).
- [72] R. Peng, Asymptotic profiles of the positive steady state for an SIS epidemic reaction-diffusion model. Part I, J. differ. equ. 247, (2009) 1096-1119.

- [73] R. Peng, F. Yi, Asymptotic profile of the positive steady state for an SIS epidemic reaction-diffusion model : effects of epidemic risk and population movement, *Phys. D* 259, (2013) 8-25.
- [74] R. Peng, X; Zhao, A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time periodic environment. *Nonlinearity*, 25, (2012) 1451-1471.
- [75] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1984).
- [76] R. Peng, X.Q. Zhao, A reaction–diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment, *Nonlinearity*, (2012), 25 1451.
- [77] L. Roques, *Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale : Avec exercices dirigés*, (2013).
- [78] H.L. Royden *Real Analysis*, second edition. The Macmillan Company, London, (1988).
- [79] S. Ruan, J. Wu, Reaction-diffusion equations with infinite delay *Canadian appl. Math. quarterly*, 2, n 4, Fall (1994).
- [80] G. Sallet, cours, INRIA, IRD EPICASA09, avril (2010).
- [81] Z. Sari, T. M. Touaoula, B. Ainseba, Mathematical analysis of an age structured epidemic model with a quarantine class *Math. Model. Nat. Phenom.* 16 (2021) 57.
- [82] C. Settapat, C. Wirawan, (2007) Global Stability of an SIQ Epidemic Model. *Kasetsart Journal : Natural Science*, 41, 225-228.
- [83] H.Shu, Z.Ma, X.Wang, L.Wang, Viral diffusion and cell-to-cell transmission : Mathematical analysis and simulation study,*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*,Volume 137, May (2020), Pages 290-313.
- [84] J. Simon Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146 (1) (1986) 65-96.
- [85] H. L. Smith, X,-Q, Zhao, Robust persistence for semidynamical systems. *Nonlinear Anal.* 17, (2001), 6169-6179.

- [86] Hal L. Smith, Horst R. Thieme *Dynamical Systems and Population Persistence*. Grad. Stud. Math., vol. 118 AMS (2011).
- [87] H. L. Smith, *Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, American Mathematical Society. Providence (1995).
- [88] H. L. Smith, R. H. Martin, Abstract functional-differential equations and reaction-diffusion systems. *Transactions of the American Mathematical Society* 321.1 (1990) 1-44.
- [89] Y. Song, T. Zhang, Global stability of the positive equilibrium of a mathematical model for unstirred membrane reactors, *Bull. Korean Math. Soc.* 54 (2017) 383-389.
- [90] Y. Takeuchi, W. Ma, E. Beretta Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times. *Nonlinear Anal.*, 42 (2000), pp. 931-947
- [91] T. M. Touaoula, global dynamics for a class of reaction-diffusion equations with distributed delay and Neumann condition, *Communication on Pure & Appl. Anal.* 19, 5, (2020), 2473-2490.
- [92] H.R. Thieme *Integrated Semigroups and Integrated Solutions to Abstract Cauchy Problems*. *Journal of mathematical analysis and applications*, 152, 416-447 (1990).
- [93] H.R. Thieme *Mathematics in Population Biology*. Princeton University Press, Princeton (2003).
- [94] H. R. Thieme, Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity, *SIAM J. Appl. Math.* 70 (2009) 188-211.
- [95] H. R. Thieme and C. Castillo-Chavez, How may infection-age-dependent infectivity affect the dynamics of HIV/AIDS, *SIAM. J. Appl. Math.*, 53 (1993), 1447-1479.

- [96] W. Wang and G. Mulone, Threshold of disease transmission on a patch environment, *J. Math. Anal. Appl.*, 285 (2003), pp. 321-335.
- [97] N.Wang, L.Zhang and Z.Teng Dynamics in a reaction-diffusion epidemic model via environmental driven infection in heterogenous space, *Journal of Biological Dynamics*, DOI : 10.1080/17513758.2021.1900428
- [98] W. Wang, X.-Q. Zhao, Basic reproduction number for reaction-diffusion epidemic models, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11 (2012) 1652-1673.
- [99] C. Wang, J. Wang. Analysis of a malaria epidemic model with age structure and spatial diffusion. *Z. Angew. Math. Phys.* (2021) 72 :74.
- [100] M. Wang, Y. Hu, L. Wu. Dynamic analysis of a SIQR epidemic model considering the interaction of environmental differences. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 68.4 (2022) 2533-2549.
- [101] J. Wang, X. Wu, Dynamics and profiles of a diffusive cholera model with bacterial hyperinfectivity and distinct Dispersal Rates, *J. Dyn. Diff. equ.* (2021) 1-37.
- [102] G.F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*. Marcel Dekker, New York (1985).
- [103] X. Wen, J. Ji, B. Li, Asymptotic profiles of the endemic equilibrium to a diffusive SIS epidemic model with mass action infection mechanism, *J. Math. Anal. Appl.*, 458 (2018), 715-729.
- [104] Y. Wu, X. Zou, Asymptotic profiles of steady states for a diffusive SIS epidemic model with mass action infection mechanism, *J. Differ. Equ.*, 261, (2016) 4424-4447.
- [105] Y.Wu, X.Zou, Dynamics and profiles of a diffusive host–pathogen system with distinct dispersal rates, *J. Differential Equations* 264 (2018) 4989–5024.
- [106] P. Wu, H. Zhao, Mathematical analysis of an age-structured HIV/AIDS epidemic model with HAART and spatial diffusion. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*.

- [107] J. Wu, Theory and applications of partial Functional differential equations. Springer-Verlag New-York, (1996).
- [108] L. Wu, Z. Feng, Homoclinic bifurcation in an SIQR model for childhood diseases. *J. Differential Equations*. 168 (2000) 150-167.
- [109] J. Yang, W. Wang, Dynamics and asymptotical profiles of an age-structured viral infection model with spatial diffusion, *Applied Mathematics and Computation*, 360, (2019), 236-254.
- [110] J.Y. Yang, X.Z. Li, M. Martcheva, Global stability of a DS-DI epidemic model with age of infection. *J. Math. Anal. Appl.*, 385 (2012), pp. 655-671.
- [111] X. Yang, F. Li, and Cheng, Y. Global Stability Analysis on the Dynamics of an SIQ Model with Nonlinear Incidence Rate. In : *Advances in Future Computer and Control Systems*, 2, Volume 160 of the series *Advances in Intelligent and Soft Computing*, (2012) 561-565.
- [112] J. Yang, X. Shi, X. Song, Z. Zhao. Threshold dynamics of a stochastic SIQR epidemic model with imperfect quarantine. *Applied Mathematics Letters*, 136 (2023) 108459.
- [113] Y. Yang, J. Zhoua, C. Hsu, Threshold dynamics of a diffusive SIRI model with nonlinear incidence rate, *J. Math. Anal. Appl.* 478 (2019) 874-896.
- [114] Y. Yang, L. Zou, T. Zhang, dynamical analysis of a diffusive SIRS model with general incidence rate, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 25.7 (2020) 2433.
- [115] P. Yifei, S. Zhu, J. Wang. Asymptotic profiles of a diffusive SIRS epidemic model with standard incidence mechanism and a logistic source. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 73, 1 (2022) 36.
- [116] A. Younes, La théorie de semi-groupes et les équations aux dérivées partielles, mémoire de master, Univ Tlemcen 2019, <http://dspace.univ-tlemcen.dz/bitstream/112/14478/1/La-theorie-de-semi-groupes-et-les-equations.pdf>.

- [117] G. Zhang, Z. Li, A. Din. A stochastic SIQR epidemic model with Lévy jumps and three-time delays. *Applied Mathematics and Computation*, 431 (2022) 127329.
- [118] X.B. Zhang, X.H. Zhang, The threshold of a deterministic and a stochastic SIQS epidemic model with varying total population size, *Applied Mathematical Modelling* 91 (2021) 749–767.
- [119] L. Zhang, (2016). A generalized Krein-Rutman theorem. arXiv preprint arXiv :1606.04377.
- [120] X-Q. Zhao, *Dynamical systems in population biology*, Canadian Mathematical Society, (2017).
- [121] Y. Zhou, D. Jiang. Dynamical behavior of a stochastic SIQR epidemic model with Ornstein-Uhlenbeck process and standard incidence rate after dimensionality reduction. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 116 (2023) 106878.
- [122] S. Zhu, J. Wang, Asymptotic Profiles of steady states for a diffusive SIS epidemic model with spontaneous infection and a logistic source, *Communication on Pure & Appl. Anal.* 19, 6, (2020) 3323-3340.