République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Supérieure de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : EDP & Applications
présenté par

Belghida Meriem

Existence de solutions pour des problèmes elliptiques non locaux

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. A. Bensedik	M.C.B	Université de Tlemcen	Président
Mr. A. Attar	M.C.A	Université de Tlemcen	Examinateur
Mme. Y. Nasri	Professeur	Université de Tlemcen	Encadrante

Année Universitaire : 2022-2023

Dédicas

... Je dédie ce travail

Ã

la mémoire de mon très cher père (Allah yerahemou), qui est le plus bon père dans ce monde.

Ã

ma très chère mère source de ma vie, pour tous ses sacrifices sans limites, que Dieu la garde pour moi.

Ã

mes frères Sidi Mohemmad,Youcef et ma petite soeur Amina source de mon bonheur.

Ã

toute ma famille et mes amies Salima, Hanae, Feryel Amina.... pour leur encouragement et
mes collègues Abdelmalek, Imad et Mr Chatti.

Ã

Tous mes professeurs durant mon parcours académique. Et à tous ceux qui m'ont soutenu.

Remerciements

... Je remercie :

Tout d'abord "Allah" tout puissant de m'avoir aidé à faire ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à **"Mme Nasri Yasmina"** source d'espoir et pour son immense effort. Elle m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ce mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme,j'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Je tiens à remercier également ***Mr Bensedik*** *pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.*

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à ***Mr Attar*** *pour l'honneur d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury. .*

Aussi ma promos de master mathématique à l'université "Abou Bekr Belkaid.

Enfin,toutes les personnes qui m'ont apporté leur soutien et leur aide pour la finalisation de ma mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Ω	: Ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n\backslash\Omega$	: Le complémentaire de Ω .
E'	: Dual topologique de E .
$C^\alpha(E;\mathbb{R})$	: Espace des fonctions α-fois continûment dérivables sur E .
$B_R(x)$	: La boule de centre x et de rayon R.
$\langle .,.\rangle$	: Désigne un produit scalaire.
$p.p$	: Presque partout.
$p^*(s)$	: L'exposant de sobolev fractionnaire $p^*(s)=\frac{pn}{n-ps}$ avec $n>ps$.
2^*	: L'exposant critique de sobolev $2^*=\frac{2N}{N-2}$ avec $N>2$.
$W^{s,p}(\Omega)$	: Espace de sobolev fractionnaire avec $0<s<1$.
$W_0^{s,p}(\Omega)$	: La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.
$\mathbb{S}$	: Espace de Schwartz.
$(-\Delta)^s$	: L'opérateur Laplacien fractionnaire.
$\lvert\Omega\rvert$	: Mesure de Ω.
$\hookrightarrow$	: L'injection continu.
u^+	: $\max\{u(x),0\}$.
u^-	: $-\min\{u(x),0\}$.

Introduction

Ce mémoire concerne l'étude d'une classe de problèmes elliptiques non locaux.
Ces dernières années, une attention importante a été consacrée à l'étude de cette classe vu leur interet mathématique et leur applications dans différents domaines, nous citons à titre d'exemple : la géométrie différentielle, propagation des flammes la chimie, etc.
On s'intéresse en particulier à montrer l'existence de solutions non triviales du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_k u(x) = f(x,u) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, f est une fonction de Carathéodary satisfaisant certaines hypothèses, qui seront spécifiées dans la suite du mémoire.
$\mathcal{L}_k$ est un opérateur non local définit comme suit :

$$\mathcal{L}_k u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K(y) dy \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Où $K : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to (0, \infty)$, satisfaisant un nombre de propriétés qu'on verra ultérieurement.
Dans le cas où $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$, $\mathcal{L}_K$ n'est autre que le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ pour $0 < s < 1$, défini comme suit

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy,$$

avec (P.V) est la valeur principale de l'intégrale, $C(n,s)$ est une constante qui dépend de n et s définie par :

$$C(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{|\varphi|^{n+2s}} d\varphi \right)^{-1}.$$

Pour plus de détails concernant cet opérateur nous proposons les références ([7], [16]).
Ce mémoire se compose de trois chapitres :
Dans le chapitre 1, on rappelle les différentes notions utilisées dans ce travail : espaces de Sobolev fractionnaires, les différentes injections et les théorèmes utilisés.

Dans le chapitre 2, on détaille l'article de "Servadei- Valdinoci" ([16]) où le second membre satisfait la condition d'Ambrosetti Rabinouvitz.
Quant au chapitre 3, on traite une partie du travail de "Wei-Su "([19]) avec un terme asymptotiquement linéaire à l'infini.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappelons les principales notions utilisées dans ce mémoire. Les références de base de ce chapitre sont [5], [8], [9] et [11].

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Lebesgue L^p

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}$ où $1 \leq p < \infty$; on définit*

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ est mesurable avec } ||u||_{L^p(\Omega)} < \infty\right\},$$

où

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } \\ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.1. *$L^p(\Omega)$ est :*
$*$ Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$
$*$ séparable pour tout $1 \leq p < \infty$
$*$ réflexif pour tout $1 < p < \infty$

1.1.2 Quelques résultats importants

Dans cette partie on rappelle quelques résultats utilisés pour la démonstration des différents théorèmes et lemmes.

Définition 1.2. *On dit que*

$$\begin{aligned} f \ : \Omega \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,u) &\to f(x,u), \end{aligned}$$

est une fonction de Carathéodory si elle est continue par rapport à u et mesurable par rapport à x.

Définition 1.3. ***(la convergence faible)***
Soient X un espace vectoriel muni de la norme $||.||_X$, X' son dual, une suite (x_n) de X converge faiblement dans X s'il existe un élément $x \in X$ tel que

$$\langle g, x_n \rangle \to \langle g, x \rangle \qquad \text{pour tout } g \in X'.$$

Où $\langle , \rangle$ désigne le crochet de dualité et on notera $x_n \rightharpoonup x$ dans X.
Si x_n converge faiblement vers x. Alors, $||x_n||_X$ est bornée et $||x||_X \leq \liminf ||x_n||$.

Théorème 1.2. *Soit X un espace de Banach réflexif, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans X. Alors, il existe une sous suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers $x \in X$.*

Lemme 1.1. *[5]* ***(Lemme de Fatou)***
Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$, telle que
$*$ Pour tout n, $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω ;
$*$ $\sup \int f_n < \infty$.
On pose $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pour chaque $x \in \Omega$. Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_{\Omega} f_n(x)dx.$$

Théorème 1.3. ***(Théorème de convergence dominée)***
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que
$*f_n(x) \to f(x) \qquad p.p \;\; sur\ \Omega.$
$*$ *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$ on a $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.*
Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } ||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)dx = \int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx.$$

Théorème 1.4. ***(Théorème de Weistrass)***
Toute fonction continue sur un segment à valeur dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur ce segment autrement dit pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que :

$$\text{pour tout } x \in [a,b], \qquad |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

Théorème 1.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ telle que $||f_n - f||_{L^p} \to 0$. Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \qquad p.p \;\; sur\ \Omega.$$

$$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \qquad \forall \;\; k \text{ et p.p sur } \Omega, \text{ avec } h \in L^p(\Omega). \tag{1.1}$$

1.2 Les différentes dérivées

Définition 1.4. ***(Dérivée directionnelle)***
Soient X un espace de Banach, Ω une partie de X, $J : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à

valeurs réelles. Pour $u \in \Omega$, $v \in X$ tel que pour tout $t > 0$ on a $(u + tv) \in \Omega$. Alors, J admet au point u une dérivée dans la direction v si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

existe.

Définition 1.5. ***(Dérivée au sens de Fréchet)***
Supposons que X est un espace de Banach, Ω un ouvert de X, $J : \Omega \to \mathbb{R}$ et $u \in \Omega$. J est est différentiable en u au sens de Fréchet ; s'il existe $l \in X'$, pour tout $v \in \Omega$

$$J(v) - J(u) = \langle l, v - u \rangle + o(v - u).$$

1.3 Espaces fractionnaires

Cette section concerne l'étude des espace $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$ et le cas particulier $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ pour $p = 2$. On va rappeler les injections continues. Pour plus de détails voir ([4], [7]).

1.3.1 Espace de Schwartz

Définition 1.6. *([2]) On note par $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, autrement dit*

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty\}.$$

Exemple 1.1. *on a*
• $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$
• *Les fonctions de la forme*

$$f(x) = P(x) e^{-a||x||^2},$$

avec $a > 0$ et P une fonction polynômiale, appartenant à la classe de Schwartz.

L'ensemble $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non trivial, muni de la topologie associée aux semi-normes

$$\mathcal{N}_P(f) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \qquad p \in \mathbb{N}.$$

1.3.2 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$

Définition 1.7. *([7]) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 < s < 1$ et $p \in [1, \infty[$; on définit*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ \ telle\ que \ \ \tfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Proposition 1.1. $W^{s,p}(\Omega)$ *est :*
$*$ *Un espace de Banach pout tout $1 \leq p \leq \infty$.*
$*$ *Un espace séparable pout tout $1 \leq p < \infty$.*
$*$ *Un espace réflexif pour tout $1 < p < \infty$.*

Muni par la norme :

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx \quad + \quad \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

équivalente à

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{1.3}$$

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

est une semi norme appelée norme de "Gagliardo".

Définition 1.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 < s < 1$ et $p \in [1, \infty[$, l'espace fractionnaire $W_0^{s,p}(\Omega)$ est donné par :*

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) : u = 0 \ \ p.p \ \ dans \ \ \mathbb{R}^n \backslash \Omega\}. \tag{1.5}$$

L'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport la norme $||.||_{W^{s,p}(\Omega)}$.
Si Ω est un espace borné on a

$$||u||_{W_0^{s,p}(\Omega)} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Théorème 1.6. *L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < s < 1$.*

1.3.3 Les injections fractionnaires

Proposition 1.2. *[3] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 < s < s' < 1$ et $p \in [1, \infty[$. L'injection de $W^{s',p}(\Omega)$ dans $W^{s,p}(\Omega)$ est continue. Il existe une constant $C = C(n, p, s)$ positive telle que :*

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{s',p}(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in W^{s,p}(\Omega). \tag{1.6}$$

Proposition 1.3. *([3]) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ à frontière bornée, $1 \leq p < \infty$, $0 < s < 1$. L'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{s,p}(\Omega)$ est continue. Il existe une constante $C = C(n, p, s)$ positive telle que*

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \quad ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Proposition 1.4. *Soient $s \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ avec $sp < n$, il existe une constante $C(n, p, s) > 0$ telle que on a*

$$||u||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dxdy. \tag{1.8}$$

Proposition 1.5. *Soient $s \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty[$, $sp < n$ et $q \in [1, p_s^*)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine d'extension borné pour $W^{s,p}(\Omega)$, F est un sous-ensemble bornée de $L^p(\Omega)$, supposons que*

$$\sup_{f \in F} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dxdy < \infty, \tag{1.9}$$

alors, F est un pré-compact de $L^q(\Omega)$.

1.3.4 Espace $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$

Dans cette sous-section on introduit l'espace H^s dont l'opérateur principal est le Laplacien fractionnaire pour plus détails consulter [6],[3].

Définition 1.9. *Soit* $0 < s < 1$ *; on définit :*

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < \infty \right\}.$$

$W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Hilbert noté par* $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *muni du produit scalaire suivant :*
pour tout $\quad p, h \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$

$$\langle p, h\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} p(x).h(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(p(x)-p(y))\,(h(x)-h(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy.$$

Pour Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *on a :*

$$\mathbf{H}_0^s(\Omega) := W_0^{s,2}(\Omega) = \{u \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n) : u = 0 \quad p.p \quad dans \quad \mathbb{R}^n \backslash \Omega\}.$$

1.4 Théorème du Col

Dans cette section on va présenter ”le théorème du Col” qui est le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de min-max. Pour plus d’information consulté [1], [14]

Définition 1.10. ***(Points critiques)***
Soient X *un espace de Banach,* Ω *un ouvert de* X*,* $J \in \mathbf{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$*. Alors,*
- $u_0 \in \Omega$ *est un point critique de* J *si on a* $J'(u_0) = 0$*.*
- m *est une valeur critique de* J*, s’il existe* $u \in \Omega$ *tel que* $J(u) = m$ *et* $J'(u) = 0$*.*

1.4.1 Condition de Palais-Smale

On a recours à la condition de ”Palais-Smale” pour exprimer la compacité des suites minimisantes.

Définition 1.11. *[18] Soit* E *un espace de Banach et* J *une fonctionnelle de classe* C^1*, on dit que la fonctionnelle* J *satisfait la condition de” Palais-Smale” au niveau* c *(*$c \in \mathbb{R}$*), notée* $(PS)_c$*, si de toute suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *telle que :*

$$\begin{aligned} J(w_n) &\quad \to c \qquad dans \quad \mathbb{R} \\ J'(w_n) &\quad \to 0 \qquad dans \quad E' \end{aligned}$$

contient une sous-suite $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergente.*

1.4.2 Théorème du Col

Théorème 1.7. *[15] Soient E un espace de Banach, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :*

1. *il existe $R > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si $||u|| = R$, alors $J(u) \geq \alpha$;*
2. *il existe $v_0 \in E$ tel que $||v_0|| > R$ et $J(v_0) < \alpha$.*

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$. De façon plus précise, si on pose

$$\mathcal{D} := \{\varphi([0,1]); \varphi \in C([0,1], E), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v_0\},$$

et

$$c := \inf_{B \in \mathcal{D}} \max_{v \in B} J(v)$$

Alors c est une valeur critique de J.

1.5 Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$

Dans cette section on va définir l'opérateur ;le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ pour $0 < s < 1$ et ses différentes propriétés. Plus de détails consulter [6] et [10].

Définition 1.12. *soient $s \in (0,1)$, $u \in S$; le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ est donné par :*

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \tag{1.10}$$

où $(P.V)$ est la valeur principale de l'intégrale, $C(n,s)$ est une constante dépendant de n et s définie par :

$$C(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\varphi_1)}{|\varphi|^{n+2s}} d\varphi \right)^{-1}, \tag{1.11}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi')$ avec $\varphi' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Remarque 1.1. *Si* $s \notin (0, \frac{1}{2})$, *(1.10) n'est pas bien défini en général à cause de la singularité de l'intégrale* $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy\right)$.

Pour $s \in (0, \frac{1}{2})$, *pour tout* $u \in \mathbb{S}$, $\; x \in \mathbb{R}^n$ *fixé on a :*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2s}} dy &\leq M \int_{B_R} \frac{|x-y|}{|x-y|^{n+2s}} dy + ||u||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\complement_{B_R}} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}} dy \\
&\leq M \left(\int_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{n+2s-1}} dy + \int_{\complement_{B_R}} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}} dy \right) \\
&\leq M \left(\int_o^R \frac{1}{|\tau|^{2s}} d\tau + \int_R^\infty \frac{1}{|\tau|^{(2s+1)}} d\tau \right),
\end{aligned}$$

M *est une constante positive qui dépend de la dimension* n *et de* $||u||_{L^\infty(\Omega)}$.

D'une autre manière on peut écrire (1.10) comme un quotient différentiel du second ordre pondéré comme suite :

Lemme 1.2. *[7] Soit* $s \in (0,1)$, *alors pour tout* $u \in \mathbb{S}$ *on a :*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy, \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

Preuve

On utilise le changement de variable suivant : $z = y - x, \; dz = dy$, donc

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u(x) &= C(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\
&= C(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(z+x)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz.
\end{aligned}$$

On pose $z' = -z$, alors

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz = P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z')-u(x)}{|z'|^{n+2s}} dz'. \tag{1.13}$$

0n remplace z' par z, on obtient

$$\begin{aligned}2 \quad P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &\quad + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z)-u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)+u(x-z)-2u(x)}{|z|^{n+2s}} dz.\end{aligned}$$

Un développement de Taylor d'ordre 2, nous donne

$$\frac{u(x+z)+u(x-z)-2u(x)}{|z|^{n+2s}} \leq \frac{||D^2u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|y|^{n+2s-2}},$$

ce dernier appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in (0,1)$.
Pour tout $u \in \mathbb{S}$ on a (1.12).

CHAPITRE 2

MULTIPLICITÉ DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME NON LOCAL

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier l'existence de solutions du problème elliptique non local suivant :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_k u(x) = f(x,u) & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

$\mathcal{L}_K$ est un opérateur non local défini comme suit :

$$\mathcal{L}_k u(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Le problème (2.1) devient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy = f(x,u) & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n > 2$) à frontière lipschitzienne, $n > 2s$,
$0 < s < 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant les hypothèses suivantes :

1-Il existe $a_1, a_2 > 0,\ q \in (2, 2_s^*)$, avec $2_s^* = \frac{2n}{n-2s}$:

$$|f(x,t)| \leq a_1 + a_2|t|^{q-1} \qquad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

et

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{f(x,t)}{|t|} = 0. \tag{2.4}$$

3- Il existe $\mu > 2,\ r > 0,\ \forall\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}\ \ |t| \geq r$:

$$0 < \mu F(x,t) \leq tf(x,t). \tag{2.5}$$

avec $\qquad F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau.$

$K : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to]0, \infty[$ une fonction vérifiant :

- pour $\eta(x) = \min\{|x|^2, 1\}$, on a

$$\eta K \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

- Il existe $\lambda > 0$ tel que

$$K(x) \geq \lambda |x|^{-(n+2s)} \qquad \textit{pour tout} \ \ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}. \tag{2.7}$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

$$K(x) = K(-x). \tag{2.8}$$

Le cadre fonctionnel dans lequel on cherche à établir l'existence de solutions est définit comme suit :
On note

$$\mathbb{X} = \left\{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ fonction\ de\ Lebesgue\ mesurable\ telle\ que\ u_{|\Omega} \in L^2(\Omega)\right\}$$

$$||u||_{\mathbb{X}} = ||u||_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\mathbf{Q}} |u(x) - u(y)|^2 K(x-y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $\mathbb{X}_0$ défini par

$$\mathbb{X}_0 := \{u \in \mathbb{X} : u = 0 \ \ p.p \ \ dans \ \ \mathbb{R}^n \backslash \Omega\}, \tag{2.9}$$

la norme associée

$$||u||_{\mathbb{X}_0} = \left(\int_{\mathbf{Q}} |u(x) - u(y)|^2 K(x-y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.10}$$

où

$$\mathbf{Q} = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\backslash\mathcal{O}.$$

$$\mathcal{O} = (\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \times (\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Définition 2.1. *On dit que $u \in \mathbb{X}_0$ est solution faible du problème (2.2) si :*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{2n}} ((u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y)))\, K(x-y)dxdy = \int_\Omega f(x, u(x))\varphi(x)dx \; . \\ u \in \mathbb{X}_0 \qquad \textit{pour tout } \varphi \in \mathbb{X}_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.2) est définie comme suit :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x) - u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_\Omega F(x, u(x))\; dx.$$

Le principal résultat est le suivant :

Théorème 2.1. *Supposons que f est une fonction de Carathéodory satisfaisant (2.3),(2.4) et (2.5). Alors, le problème (2.1) admet une solution $u \in \mathbb{X}_0$.*

On peut avoir un résultat de multiplicité.

Théorème 2.2. *Supposons que f est une fonction de Carathéodory satisfaisant (2.3),(2.4) et (2.5). Alors, le problème (2.1) admet deux solutions une positive u_+ et une autre négative u_-.*

2.2 Résultats préliminaires

La preuve du théorème (2.1) nécessite les lemmes suivants :

Lemme 2.1. *Soient $2 < q < 2_s^*$ avec $2_s^* = \frac{2n}{n-2s}$, f satisfaisant (2.3), (2.4). Alors :*
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ *telle que* $\forall x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}$ *:*

$$|f(x,t)| \leq 2\varepsilon|t| + q\delta(\varepsilon)|t|^{q-1}, \tag{2.12}$$

il s'ensuit que :

$$|F(x,t)| \leq \varepsilon|t|^2 + \delta(\varepsilon)|t|^q. \tag{2.13}$$

Preuve Comme la fonction f satisfait (2.4), donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0\ \ telle\ \ que\ \ si\ \ |t| < \sigma\ \ alors\ \ \frac{|f(x,t)|}{|t|} < 2\varepsilon,$$

ainsi :

$$|f(x,t)| \leq 2\varepsilon|t|. \tag{2.14}$$

D'après l'hypothèse (2.4)

$$\exists\ \delta = \delta(\sigma) > 0,\ \forall x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}, \text{ avec } |t| \geq \sigma$$

on a,

$$|f(x,t)| \leq q\ \delta(\sigma)\ |t|^{q-1}, \tag{2.15}$$

en combinant (2.14) et (2.15) on obtient (2.12).
Comme

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau.$$

(2.12) nous donne,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t f(x,\tau)d\tau\right| &\leq \int_0^t 2\varepsilon|\tau|d\tau \quad + \int_0^t q\delta(\varepsilon)|\tau|^{q-1}d\tau \\ &\leq 2\varepsilon\int_0^t |\tau|d\tau \quad + \ q\delta(\varepsilon)\int_0^t |\tau|^{q-1}d\tau, \end{aligned}$$

en intégrant on obtient :

$$\leq 2\varepsilon\left(\frac{1}{2}|\tau|^2\right)_0^t \ + \ q\delta(\varepsilon)\left(\frac{1}{q}|\tau|^q\right)_0^t,$$

donc

$$|F(x,t)| \leq \varepsilon|t|^2 + \delta(\varepsilon)|t|^q.$$

Lemme 2.2. *Supposons que f satisfait (2.5). Alors, il existe deux fonctions mesurables positives $m(x)$ et $M(x)$, telle que*

$$F(x,t) \geq m(x)\ |t|^{\mu}\ -\ M(x) \qquad \forall\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

De plus $m, M \in L^{\infty}(\Omega)$ si f vérifie (2.3) et (2.4).

Preuve D'après l'hypothèse (2.5) pour $|t| \geq r > 0$, $\forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\mu \leq \frac{tf(x,t)}{F(x,t)},$$

par conséquent

$$\frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x;t)},$$

en intégrant sur $[r,t]$, on trouve

$$\int_r^t \frac{\mu}{\tau} d\tau \leq \int_r^t \frac{f(x,\tau)}{F(x;\tau)} d\tau$$
$$\ln\left(\frac{t^\mu}{r^\mu}\right) \leq \ln\left(\frac{F(x,t)}{F(x,r)}\right),$$

en passant à la fonction exponentielle, on obtient

$$\exp\left(ln\left(\frac{t^\mu}{r^\mu}\right)\right) \leq \exp\left(\ln\left(\frac{F(x,t)}{F(x,r)}\right)\right)$$
$$\frac{t^\mu}{r^\mu} \leq \frac{F(x,t)}{F(x,r)},$$

par conséquent

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,r)}{r^\mu} t^\mu. \tag{2.17}$$

Pour $t < -r$ on obtient

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,-r)}{r^\mu} t^\mu. \tag{2.18}$$

(2.17) et (2.18) nous donne

$$F(x,t) \geq m(x)\ |t|^\mu, \tag{2.19}$$

où

$$m(x) = r^{-\mu}\ \min\left\{F(x,r), F(x,-r)\right\}.$$

Comme la fonction $t \to F(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Weistrass implique que la fonction est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que pour $|t| \leq r$, on a

$$|F(x,t)| \leq \tilde{M}(x) \qquad dans\ \ \{|t| \leq r\}, \tag{2.20}$$

où

$$\tilde{M}(x) = \max\left\{|F(x,t)|\ \ |t| \leq r\right\}.$$

De (2.19) et (2.20) on arrive à (2.16) avec $M(x) = \tilde{M}(x) + m(x)r^{\mu}$. $\tilde{M}, m$ sont des fonctions mesurables car F l'est.
Notons que si F vérifie (2.13), pour $\varepsilon = 1$ on a

$$|F(x,t)| \leq |t|^2 + \delta(1)|t|^q,$$

on trouve que

$$\begin{aligned} m(x) &= r^{-\mu}\ \min\left\{F(x,r), F(x,-r)\right\} \\ &\leq r^{-\mu}\ (|r|^2 + \delta(1)|r|^q) \in L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x) &= \max\left\{|F(x,t)| :\ \ |t| \leq r\right\} \\ &\leq |r|^2 + \delta(1)|r|^q) \in L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

La positivité de M, m vient du fait que F satisfait (2.5).

On établit les injections suivantes

Lemme 2.3. *Supposons que K satisfait (2.6),(2.7) et (2.8). Alors, on a :*

1. *L'injection de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{H}^s(\Omega)$ est continue, il existe une constante $C(\lambda) > 0$ telle que*

$$||u||_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq C(\lambda)||u||_{\mathbb{X}}.$$

2. L'injection de $\mathbb{X}_0$ dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{R})$ est continue, $\exists\ C(\lambda) > 0$ telle que

$$||u||_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq ||u||_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda)||u||_{\mathbb{X}}, \tag{2.21}$$

où $C(\lambda) = \max\{1, \lambda^{-\frac{1}{2}}\}$ pour les deux cas, λ est définie dans (2.7).

Preuve Démontrons le premier point.
On sait que

$$||u||_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = ||u||_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'aprés (2.7) on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy,\end{aligned}$$

par conséquent

$$||u||_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq C(\lambda)\ ||u||_{\mathbb{X}}.$$

Pour le deuxième point.
Soit $u \in \mathbb{X}$ alors $||u||_{L^2(\Omega)} = ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$, car $u = 0$ *p.p sur* $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$
on a

$$||u||_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq ||u||_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy = \int_{\mathbf{Q}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy.$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy < +\infty.$$

Par la suite, on obtient

$$||u||_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda)\ ||u||_{\mathbb{X}}.$$

Lemme 2.4. *Si la fonction K vérifie (2.6), (2.7) et (2.8). Alors,*

1. *Il existe une constante $C = C(n, s) > 0$ vérifiant*

$$\text{Pour tout } u \in \mathbb{X}_0, \qquad ||u||^2_{L^{2^*_s}(\Omega)} = ||u||^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy. \tag{2.22}$$

2. *Il existe $C(n, s, \lambda, \Omega) > 1$ telle que pour tout $u \in \mathbb{X}_0$ on dit que la norme $||.||_{\mathbb{X}}$ et $||.||_{\mathbb{X}_0}$ sont équivalentes.*

$$\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy \leq ||u||^2_{\mathbb{X}} \leq C \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy. \tag{2.23}$$

Preuve : La première assertion découle de la proposition (1.4) pour $p = 2$ et le fait que $u = 0$ p.p sur $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$

$$||u||^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy.$$

Démontrons la deuxième assertion.
On sait que

$$\begin{aligned} ||u||^2_{\mathbb{X}} &= \left(||u||_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\geq \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy. \end{aligned} \tag{2.24}$$

En utilisant le fait que l'injection de $L^{2^*_s}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est continue, alors

$$\begin{aligned} ||u||^2_{\mathbb{X}} &\leq 2||u||^2_{L^2(\Omega)} + 2 \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy \\ &\leq 2\ |\Omega|^{\frac{(2^*_s-2)}{2^*_s}} ||u||^2_{L^{2^*_s}(\Omega)} + 2 \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy. \end{aligned}$$

De (2.22)

$$\leq 2\ c\ |\Omega|^{\frac{(2^*_s-2)}{2^*_s}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + 2 \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y) dxdy,$$

en utilisant (2.7), on trouve

$$||u||^2_{\mathbb{X}} \leq 2\ C \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy, \tag{2.25}$$

avec $C = (\frac{c\ |\Omega|^{\frac{(2^*_s-2)}{2^*_s}}}{\lambda} + 1)$.

De (2.24) et (2.25) on obtient finalement (2.23) .

Lemme 2.5. *L'espace $\mathbb{X}_0$ muni de la norme $||.||_{\mathbb{X}_0}$ est un espace de Hilbert.*

Preuve : On définit,

$$(v,w) \in \mathbb{X}_0 \times \mathbb{X}_0 \to \langle v,w \rangle \ := \ \int_{\mathbf{Q}} (v(x)-v(y))(w(x)-w(y))K(x-y)dxdy. \tag{2.26}$$

En utilisant les propriétés des intégrales et la positivité de la fonction K on a, pour tout $v, w, m \in \mathbb{X}_0$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\langle v+w, m\rangle &= \int_{\mathbf{Q}} ((v+w)(x)-(v+w)(y))(m(x)-m(y))K(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbf{Q}} (v(x)-v(y))(m(x)-m(y))K(x-y)dxdy \\
&\qquad + \int_{\mathbf{Q}} (w(x)-w(y))(m(x)-m(y))K(x-y)dxdy \\
&= \langle v,m\rangle + \langle w,m\rangle. \\
\langle \lambda v, w\rangle &= \int_{\mathbf{Q}} \lambda(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))K(x-y)dxdy \\
&= \lambda\langle v,w\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle w,v\rangle &= \int_{\mathbf{Q}} (w(x)-w(y))(v(x)-v(y))K(x-y)dxdy \\
&= \langle v,w\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v,v\rangle &= \int_{\mathbf{Q}} (v(x)-v(y))(v(x)-v(y))K(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbf{Q}} (v(x)-v(y))^2 K(x-y)dxdy \\
&= ||v||^2_{\mathbb{X}_0}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\langle v, v\rangle \geq 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\langle v, v\rangle = 0 \iff & \int_{\mathbf{Q}} (v(x)-v(y))^2 K(x-y)dxdy = 0 \\
& (v(x)-v(y))^2 K(x-y) = 0, \\
d'autre\ part\ K\ v\acute{e}rifie\ (2.7) & \\
& (v(x)-v(y))^2 = 0 \\
& v(x) = v(y) \qquad pour\ tout\ x, y,
\end{aligned}$$

donc v est une constante. Par le fait que $v = 0$ p.p sur $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, $v = 0$ donc (2.26) définit un produit scalaire sur $\mathbb{X}_0 \times \mathbb{X}_0$. Ce dernier défini la norme (2.10).

Maintenant on va montrer que $\mathbb{X}_0$ est complet pour la norme $||.||_{\mathbb{X}_0}$.
Soit (u_k) une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_0$ i.e $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ k_\varepsilon > 0$ telle que $\forall\ i, j > k_\varepsilon$ on a $||u_i - u_j||_{\mathbb{X}_0} \leq \varepsilon$.
D'après (2.23) on a

$$||u_i - u_j||^2_{\mathbb{X}} \leq C\ ||u_i - u_j||^2_{\mathbb{X}_0},$$

d'après la définition de $||.||_{\mathbb{X}}$ et $||.||_{L^2(\Omega)}$ on obtient

$$||u_i - u_j||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\ ||u_i - u_j||^2_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

On a $||u_i - u_j||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$ et on sait que $L^2(\Omega)$ est complet c'est à dire toute suite de Cauchy converge, donc il existe $u \in L^2(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $k \to \infty$ comme $u_k = 0$ p.p dans $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ par conséquent $u_k \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $k \to \infty$. D'après le Théorème 1.5 il existe une sous suite noté (u_{k_j}) de $\mathbb{X}_0$ telle que $u_{k_j} \to u$ p.p sur $\mathbb{R}^n$.
On applique le lemme de Fatou avec $\varepsilon = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{Q}} (u(x)-u(y))^2 K(x-y)dxdy &\leq \lim_{j\to\infty} \inf \int_{\mathbf{Q}} (u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y))^2 K(x-y)dxdy \\
&= \lim_{j\to\infty} \inf ||u_{k_j}||^2_{\mathbb{X}_0}, \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \inf(||u_{k_j} - u_{k_1}||_{\mathbb{X}_0} + ||u_{k_1}||_{\mathbb{X}_0})^2 \\
&\leq (1 + ||u_{k_1}||_{\mathbb{X}_0})^2 < \infty,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$u \in \mathbb{X}_0.$$

Reste à montrer que $u_k \to u$ dans $\mathbb{X}_0$. Pour cela, prenons $i \geq k_\varepsilon$, de (2.23), le Lemme 2.4 et le lemme de Fatou on a

$$\begin{aligned}
||u_i - u||^2_{\mathbb{X}_0} &\leq ||u_i - u||^2_{\mathbb{X}} \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\left(\int_{\mathbf{Q}} (u_i(x) - u_{k_j}(x) - u_i(y) - u_{k_j}(y))^2 K(x-y) dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\qquad \left. + ||u_i - u_{k_j}||_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \quad C||u_i - u_{k_j}||^2_{\mathbb{X}_0} \\
&\leq C\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{X}_0, ||.||_{\mathbb{X}_0})$ est un espace de Hilbert.

Lemme 2.6. *Supposons que K satisfait (2.6), (2.7) et (2.8), (u_j) une suite bornée de $\mathbb{X}_0$. Alors, il existe $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$||u - u_j||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \qquad \textit{quand } j \to \infty \qquad \textit{pour tout } p \in [1, 2^*_s[\tag{2.27}$$

Preuve : Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ d'après (2.21) on a $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H^s(\Omega)$.
les lemmes 2.3 et 2.4 nous donne

$$||u_j||_{H^s(\Omega)} \leq ||u_j||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda)||u_j||_{\mathbb{X}}$$

De (2.23) :

$$\leq C||u_j||_{\mathbb{X}_0},$$

avec C une constante positive qui dépend de Ω, n, s, λ.
Finalement par (1.9), il existe $u \in L^q(\Omega)$, $u_j \to u$ quand $j \to \infty$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q \in [1, 2^*_s)$ et comme $u = 0$ p.p sur $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ alors on aura la convergence dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

2.3 Démonstration des Théorèmes

2.3.1 Preuve du Théorème 2.1

La démonstration du théorème (2.1) est basée sur le théorème du Col . Vérifions les conditions géométriques.

Proposition 2.1. *Soit f une fonction de Carathéodory vérifiant les hypothèses (2.3),(2.4) ,(2.5). Alors :*

1. *Il existe $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{X}_0$ avec $||u||_{\mathbb{X}_0} = \sigma$, on a $J(u) \geq \alpha$.*

2. *Il existe $w \in \mathbb{X}_0$ telle que $w \geq 0$ p.p dans $\mathbb{R}^n$, $||w||_{\mathbb{X}_0} > \sigma$ et $J(w) < \alpha$.*

Preuve : On remarque que $J(0) = 0$.
On va démontrer le premier point.
De (2.13) on a

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \varepsilon||u||^2_{L^2(\Omega)} + \delta(\varepsilon)||u||^q_{L^q(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \varepsilon\int_{\Omega}|u(x)|^2dx - \delta(\varepsilon)\int_{\Omega}|u(x)|^q dx,
\end{aligned}$$

puisque l'injection $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est continue alors il existe $C > 0$ vérifie

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C\ ||u||_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.28}$$

De plus $L^{2^*}(\Omega)$ s'injecte de manière continue dans $L^q(\Omega)$ pour tout $2 \leq q < 2^*$, il existe $C > 0$ telle que :

$$||u||_{L^q\Omega)} \leq C\ ||u||_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{2.29}$$

Alors,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy -\ \varepsilon\ |\Omega|^{\frac{(2^*_s-2)}{2^*_s}}\ ||u||^2_{L^{2^*_s}(\Omega)} -\ \delta(\varepsilon)\ |\Omega|^{\frac{(2^*_s-q)}{2^*_s}}\ ||u||^q_{L^{2^*_s}(\Omega)},$$

D'après(2.22), on obtient :

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \varepsilon\ c\ |\Omega|^{\frac{(2_s^*-2)}{2_s^*}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$$
$$-\ \delta(\varepsilon)\ c^{\frac{q}{2}}\ |\Omega|^{\frac{(2_s^*-q)}{2_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy\right)^{\frac{q}{2}}.$$

De (2.7), on obtient :

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon\ c\ |\Omega|^{\frac{(2_s^*-2)}{2_s^*}}}{\lambda}\right) \int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \frac{\delta(\varepsilon)\ c^{\frac{q}{2}}\ |\Omega|^{\frac{(2_s^*-q)}{2_s^*}}}{\lambda}$$
$$\left(\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy\right)^{\frac{q}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon\ c\ |\Omega|^{\frac{(2_s^*-2)}{2_s^*}}}{\lambda}\right) ||u||_{\mathbb{X}_0}^2 - \frac{\delta(\varepsilon)\ c^{\frac{q}{2}}\ |\Omega|^{\frac{(2_s^*-q)}{2_s^*}}}{\lambda} ||u||_{\mathbb{X}_0}^q,$$

prenons $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon c|\Omega|^{\frac{(2_s^*-2)}{2_s^*}} < \lambda$ et (2.23), on obtient

$$J(u) \geq \beta\ ||u||_{\mathbb{X}_0}^2 \left(1 - \tau ||u||_{\mathbb{X}_0}^{q-2}\right).$$

β, τ sont des constants positives.
Pour $u \in \mathbb{X}_0$ tel que $||u||_{\mathbb{X}_0} = \sigma$, on choisit σ suffisamment petit vérifiant $(\ 1 - \tau\sigma^{q-2}) > 0$. Alors,

$$J(u) \geq \beta\sigma^2(1 - \tau\sigma^{q-2}) = \alpha > 0.$$

Pour le deuxième point. Fixons $u \in \mathbb{X}_0$

$$J(tu) = \int_{\mathbf{Q}} |tu(x) - tu(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_{\Omega} F(x, tu(x))dx,$$

En utilisent (2.16) avec $\mu > 2,\ m(x),\ M(x)$ des fonctions mesurables on obtient

$$
\begin{aligned}
J(tu) &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_\Omega \left(m(x)|tu(x)|^\mu - M(x)\right)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}||u||^2_{\mathbb{X}_0} - t^\mu \int_\Omega m(x)|u(x)|^\mu dx + \int_\Omega M(x)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} - t^\mu \int_\Omega m(x)|u(x)|^\mu dx + \int_\Omega M(x)dx.
\end{aligned}
$$

Comme $\mu > 2$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} J(tu) = -\infty$, en prenant $w = tu$ pour t assez grand on aura le deuxième point.

Lemme 2.7. *Soit $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{X}_0$ telle que :*

$$
\begin{aligned}
&J(w_i) \to c \\
&J'(w_i) \to 0 \qquad \text{dans } (\mathbb{X}_0)'
\end{aligned}
$$

Alors la suite $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{X}_0$

Preuve : Montrons la bornitude de la suite (w_i). (w_i) est une suite de Palais-Smale, alors
On a :

$$
\begin{aligned}
J(w_i) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |w_i(x)-w_i(y)|^2 K(x-y)dxdy \\
&\qquad - \int_\Omega F(x,w_i(x))dx = c + o(1). \\
\frac{1}{\mu}\langle J'(w_i), w_i\rangle &= \frac{1}{\mu}\int_{\mathbf{Q}} (w_i(x)-w_i(y))(w_i(x)-w_i(y))K(x-y)dxdy \\
&\qquad - \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,w_i(x))w_i(x)dx, \\
c + o(1) = J(w_i) - \frac{1}{\mu}\langle J'(w_i), w_i\rangle &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)||w_i||^2_{\mathbb{X}_0} - \int_\Omega \left(F(x,w_i(x)) - \frac{1}{\mu}f(x,w_i(x))\right. \\
&\qquad \left. w_i(x)\right)dx, \\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)||w_i||^2_{\mathbb{X}_0} - \int_{\Omega\cap\{|w_i|\leq r\}} \left(F(x,w_i(x)) - \frac{1}{\mu}\right. \\
&\qquad \left. f(x,w_i(x))w_i(x)\right)dx,
\end{aligned}
$$

en utilisant (2.12), (2.13) avec $\varepsilon = 1$, on obtient

$$\int_{\Omega\cap\{|w_i|\leq r\}} \left(F(x, w_i(x)) - \frac{1}{\mu} f(x, w_i(x)) w_i(x)\right) dx \leq \left(r^2 + \delta(1) r^q + \frac{2}{\mu} r + \frac{q}{\mu}\delta(1) r^{q-1}\right) |\Omega|$$
$$= \delta \ > 0.$$

Par conséquent

$$J(w_i) - \frac{1}{\mu}\langle J'(w_i), w_i\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) ||w_i||^2_{\mathbb{X}_0} - \delta.$$

D'une autre coté on a :

$$J(w_i) - \frac{1}{\mu}\langle J'(w_i), w_i\rangle \leq C(1 + ||w_i||_{\mathbb{X}_0}),$$

on déduit que

$$||w_i||^2_{\mathbb{X}_0} \leq C^*(1 + ||w_i||_{\mathbb{X}_0}).$$

Donc (w_i) est bornée.

Proposition 2.2. *Soit f est une fonction de Carathéodoy vérifiant (2.3), (2.4) et (2.5). Alors, J vérifie la condition de Palais-Smale.*

Preuve : D'après le lemme 2.7, la suite (w_i) est bornée dans $\mathbb{X}_0$. Comme $\mathbb{X}_0$ est un espace réflexif alors on peut extraire une sous suite notée (w_i) telle que $w_i \to w'$ faiblement dans $\mathbb{X}_0$, c'est à dire

$$\int_{\mathbf{Q}} (w_i(x) - w_i(y))(\varphi(x) - \varphi(y)) K(x-y) dxdy \ \to \int_{\mathbf{Q}} (w'(x) - w'(y))(\varphi(x) - \varphi(y))$$
$$K(x-y) dxdy.$$

Pour tout $\varphi \in \mathbb{X}_0$ quand $i \to \infty$.

D'après le lemme 2.6 la sous suite (w_i) vérifie $w_i \to w'$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $q \in [1, 2_s^*)$ et $w_i \to w'$ p.p dans $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème (1.5) il existe $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$|w_i(x)| \leq h(x) \qquad p.p\ dans\ \mathbb{R}^n, pour\ tout\ i \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

En utilisant (2.4) et le fait que la fonction f est continue pour $t \in \mathbb{R}$. En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f(x, w_i(x))w_i(x)dx = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f(x, w_i(x))w_i(x)dx = \int_\Omega f(x, w'(x))w'(x)dx \tag{2.31}$$

Puisque

$$\langle J'(w_i), w_i\rangle = \int_{\mathbf{Q}} |w_i(x) - w_i(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_\Omega f(x, w_i(x))w_i(x)dx \to 0$$
$$quand\ i \to \infty,$$

en utilisant (2.31), on a

$$\int_{\mathbf{Q}} |w_i(x) - w_i(y)|^2 K(x-y)dxdy \to \int_\Omega f(x, w'(x))w'(x)dx, \tag{2.32}$$

quand $i \to \infty$.
De plus $\langle J'(w_i), w'\rangle \to 0$ quand $i \to \infty$.
Donc

$$\int_{\mathbf{Q}} |w'(x) - w'(y)|^2 K(x-y)dxdy \to \int_\Omega f(x, w'(x))w'(x)dx. \tag{2.33}$$

On obtient

$$\int_{\mathbf{Q}} |w_i(x) - w_i(y)|^2 K(x-y)dxdy \to \int_{\mathbf{Q}} |w'(x) - w'(y)|^2 K(x-y)dxdy,$$

c'est à dire

$$||w_i||_{\mathbb{X}_0} \to ||w'||_{\mathbb{X}_0} \qquad quand\ i \to \infty.$$

D'une autre coté, on a :

$$
\begin{aligned}
||w_i - w'||^2_{\mathbb{X}_0} &= \int_{\mathbf{Q}}((w_i - w')(x) - (w_i - w')(y))^2 K(x-y)dxdy, \\
&= \int_{\mathbf{Q}} \big((w_i - w')^2(x) - (w_i - w')^2(y) - 2((w_i - w'(x))((w_i - w'(y))\big) \\
&\qquad\qquad K(x-y)dxdy, \\
&= \int_{\mathbf{Q}} w_i^2(x) + w'^2(x) - 2w_i(x)w'(x) + w_i^2(y) + w'^2(y) - 2w_i(y)w'(y) \\
&\qquad - 2(w_i(x) - w'(x)(w_i(y) - -w'(y))K(x-y)dxdy, \\
&= \int_{\mathbf{Q}}(w_i(x) - w_i(y))^2 K(x-y)dxdy + \int_{\mathbf{Q}}(w'(x) - w'(y))^2 \\
&\qquad K(x-y)dxdy - 2\int_{\mathbf{Q}}(w_i(x) - w_i(y))(w'(x) - w'(y)) \\
&\qquad\qquad K(x-y)dxdy, \\
&= ||w_i||^2_{\mathbb{X}_0} + ||w'||^2_{\mathbb{X}_0} - 2\int_{\mathbf{Q}}(w_i(x) - w_i(y))(w'(x) - w'(y)) \\
&\qquad\qquad\qquad K(x-y)dxdy, \\
\lim_{i\to\infty} ||w_i - w'||^2_{\mathbb{X}_0} &= 2||w'||^2_{\mathbb{X}_0} - 2\int_{\mathbf{Q}}(w'(x) - w'(y))^2 K(x-y)dxdy, \\
&= 2||w'||^2_{\mathbb{X}_0} - 2||w'||^2_{\mathbb{X}_0} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Donc il existe $w' \in \mathbb{X}_0$ telle que $||w_i - w'||_{\mathbb{X}_0} \to 0$ quand $i \to \infty$. D'après les proportions 2.1 et 2.2 J satisfait les conditions du théorème du Col, il existe un point $u_0 \in \mathbb{X}_0$ telle que $J(u_0) > \alpha > 0 = J(0)$. Ainsi $u_0 \neq 0$.

On peut montrer que le problème (2.11) admet une solution positive u^+ et une autre négative u^-.

2.3.2 Preuve du Théorème 2.2

On pose

$$
f_+(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}
$$

$$
f_-(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t \leq 0 \\ 0, & t > 0, \end{cases}
$$

et

$$F_{\pm}(x,t) = \int_0^t f_{\pm}(x,\tau)d\tau.$$

On définit la fonctionnelle d'énergie $J_{\pm}$comme suite :

$$J_{\pm}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_{\Omega} F_{\pm}(x,u(x))\ dx. \tag{2.34}$$

$J_{\pm}$ est dérivable au sens de Fréchet pour tout $u \in \mathbb{X}_0$, et pour tout $\varphi \in \mathbb{X}_0$ on a

$$\langle (J_{\pm})'(u),\varphi\rangle = \int_{\mathbf{Q}} (u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))K(x-y)dxdy - \int_{\Omega} f_{\pm}(x,u(x))\varphi(x)dx.$$

On remarque que $J_{\pm}(0) = 0$. De plus J_+, J_- satisfont les propositions 2.1 et 2.2 on déduit l'existence de deux points critiques $u_+, u_- \in \mathbb{X}_0$ de $J_+,\ J_-$ respectivement. Montrons que u_+ est positive dans $\mathbb{R}^n$. On prend $\varphi = (u_+)^- = -\min\{-(u^+(x), 0\}$ on sait que si $u_+ \in \mathbb{X}_0$ ce résultat résulte $(u_+)^- \in \mathbb{X}_0$ on peut choisir $\varphi \in \mathbb{X}_0$

$$\begin{aligned}
\langle J'_{\pm}(u_+),\varphi\rangle &= \langle J'_{\pm}(u_+),(u_+)^-\rangle \\
&= \int_{\mathbf{Q}} ((u_+)(x)-(u_+)(y))((u_+)^-(x)-(u_+)^-(y))K(x-y)dxdy \\
&\qquad\qquad - \int_{\Omega} f_+(x,(u_+))(u_+)^- dx \\
&= \int_{\mathbf{Q}} ((u_+)(x)-(u_+)(y))((u_+)^-(x)-(u_+)^-(y))K(x-y)dxdy \\
&= ||(u_+)^-||^2_{\mathbb{X}_0} = 0,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$(u_+)^- = 0 \implies u_+ \geq 0 \qquad p.p\ \ sur\ \mathbb{R}^n.$$

En raisonnant de la même façon on arrive à montrer que $u_- \leq 0$ p.p sur $\mathbb{R}^n$.

2.4 Application au laplacien fractionnaire

Si $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$, $\mathcal{L}_K$ devient l'opérateur Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$, où le problème (2.1) devient :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = f(x,u) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.35}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Carathéodory vérifiant (2.3),(2.4) et (2.5).
La fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.35) est

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 |x-y|^{-(n+2s)} dxdy - \int_{\Omega} F(x,u(x))\ dx.$$

D'après les résultats précédents on déduit que le problème (2.35) admet au moins une solution $u \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .Même plus,le problème (2.35) admet deux solutions une positive et une autre négative .Ceci est du fait que $\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)$ d'aprés le lemme 2.3.

CHAPITRE 3

SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME NON LOCAL AVEC UN TERME ASYMPTOTIQUEMENT LINÉAIRE

3.1 Introduction

Dans cette partie, on établit la multiplicité de solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_k u(x) = f(x,u) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \backslash \Omega \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière, K satisfaisant (2.6),(2.7) et (2.8),
f est une fonction de Carathéodory satisfaisant les hypothèses suivantes
(F_1) :$f(x,0) = 0$.
(F_2) : $\lim\limits_{|s|\to 0} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu$, $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = l$ uniformément pour tout $x \in \Omega$.
avec

$$0 \leq \mu < \lambda_1 < l < +\infty,$$

où λ_1 désigne la première valeur propre de l'opérateur $-\mathcal{L}_k$ avec la condition au bord de Dirichlet.
Elle est définie comme suit :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathbb{X}_0 \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^{2n}} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy}{\int_\Omega u^2 dx},$$

la fonction propre correspondante est notée φ_1. Il est connu que $\lambda_1 > 0$ et simple et φ_1 est une fonction positive. Quand f satisfait l'hypothèse : $\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = l$, on dira que f est asymptotiquement linéaire à l'infini.

Définition 3.1. *On dit que $u \in \mathbb{X}_0$ est une solution faible du problème (3.1) si, pour tout $\varphi \in \mathbb{X}_0$*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{2n}} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y)) K(x-y)dxdy = \int_\Omega F(x, u(x))\varphi(x)dx \\ u \in \mathbb{X}_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1) est définie comme suit :

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{Q}} |u(x) - u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_\Omega F(x, u(x))\ dx. \tag{3.3}$$

Où

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Supposons que f est une fonction de Carathéodory vérifiant les hypothéses (F_1) et (F_2). Alors, le problème (3.1) admet deux solutions non triviales une est positive et l'autre est négative.*

Pour la démonstration de ce résultat on fait appel au théorème du Col .

3.2 Résultats auxiliaires

Pour la démonstration du théorème on procédera de la même façon que le chapitre 2.
On pose

$$\mathcal{F}_+(u) = \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{X}_0} - \int_\Omega F_+(x,u)dx \qquad \forall x \in \mathbb{X}_0, \tag{3.4}$$

où :

$$f_+(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

Et

$$\mathcal{F}_-(u) = \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{X}_0} - \int_\Omega F_-(x,u)dx \qquad \forall x \in \mathbb{X}_0, \tag{3.5}$$

où :

$$f_-(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t \leq 0 \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$

Proposition 3.1. *Supposons que f satisfait les hypothèses $(F_1), (F_2)$. Alors :*

1. *Il existe $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telle que $\forall\ u \in \mathbb{X}_0$ avec $||u||_{\mathbb{X}_0} = \sigma$ on a $\mathcal{F}_{\pm}(u) \geq \alpha$.*

2. *$\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-$ ne sont pas bornées inferieurement.*

Preuve : D'après l'hypothèse (F_1) et (F_2) on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ C_\varepsilon \ \ tel\ que$$

$$|f(x,s)| \leq (\varepsilon + \mu)\ |s| + q\ C_\varepsilon\ |s|^{q-1} \qquad pour\ 2 < q < 2^*_s. \tag{3.6}$$

Comme $F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau$, de (3.6) on a

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t f(x,\tau)d\tau\right| &\leq \int_0^t (\varepsilon+\mu)|\tau|d\tau \ + \ \int_0^t q\ C_\varepsilon|\tau|^{q-1}d\tau \\ &\leq (\varepsilon+\mu)\int_0^t |\tau|d\tau \ + \ q\ C_\varepsilon \int_0^t |\tau|^{q-1}d\tau \\ &\leq (\varepsilon+\mu)\left(\frac{1}{2}|\tau|^2\right)_0^t \ + \ q\ \ C_\varepsilon \left(\frac{1}{q}|\tau|^q\right)_0^t, \end{aligned}$$

alors

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon+\mu)|t|^2 + C_\varepsilon|t|^q. \tag{3.7}$$

De (3.7) on obtient :

$$\mathcal{F}_{\pm}(u) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy - \left(\frac{\varepsilon+\mu}{2}\right)\int_\Omega |u|^2dx - C_\varepsilon\int_\Omega |u|^q dx,$$

En utilisant le lemme 2.3 et la définition de λ_1 on trouve

$$\mathcal{F}_{\pm}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu+\varepsilon}{2\lambda_1}\right) ||u||^2_{\mathbb{X}_0} - \tilde{C}_\varepsilon ||u||^q_{\mathbb{X}_0},$$

où $\tilde{C}_\varepsilon$ est une constante positive.En prenant $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\mu + \varepsilon < \lambda_1$ et en choisissant $||u||_{\mathbb{X}_0} = \sigma > 0$ assez petit on arrive à montrer que $\mathcal{F}_{\pm}(u) \geq \alpha$ si $||u||_{\mathbb{X}_0} = \sigma$.

Maintenant on va vérifier la deuxième condition.
D'après (F_2), en utilisant la définition de la limite, on trouve
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(l-\varepsilon)s^2 - C_\varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega, s \neq 0$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > \lambda_1$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_+(t\varphi_1) &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbf{Q}} |\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|^2 K(x-y)dxdy - \int_\Omega \frac{1}{2}(l-\varepsilon)t^2\varphi_1^2 - C_\varepsilon dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}||\varphi_1||^2_{\mathbb{X}_0} - \frac{1}{2}(l-\varepsilon)\int_\Omega t^2\varphi_1^2 dx - C_\varepsilon|\Omega| \\
&= \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{l-\varepsilon}{\lambda_1}\right)||\varphi_1||^2_{\mathbb{X}_0} + C_\varepsilon|\Omega|,
\end{aligned}$$

quand $t \to +\infty$ on a $\mathcal{F}_+(t\varphi_1) \to -\infty$. Par conséquent $\mathcal{F}_+$ n'est pas bornée inferieurement.
Pour montrer que $\mathcal{F}_-$ n'est pas bornée inferieurement on prend $u = -\varphi_1$ dans la formule de $\mathcal{F}_-$.

Lemme 3.1. *Supposons que f satisfait (F_1) et (F_2).Alors toute suite de "Palais-Smale"converge dans $\mathbb{X}_0$.*

Preuve : Soit $(w_n) \in \mathbb{X}_0$ une suite de "Palais-Smale"c'est à dire :

$$\mathcal{F}_{-}^{+}(w_n) \to c \qquad dans\ \mathbb{R}.$$
$$\left(\mathcal{F}_{-}^{+}\right)'(w_n) \to 0 \qquad dans\ (\mathbb{X}_0)',$$

où c est une constante réelle.
On sait que

$$\begin{aligned}\langle(\mathcal{F}^{+})'(w_n), w_n\rangle &= \int_{\mathbf{Q}}(w_n(x)-w_n(y))^2K(x-y)dxdy - \int_\Omega f_+(x,w_n(x))w_n(x)dx \\ &= o(1).\end{aligned}$$

De l'hypothèse (F_2) on a :

$$|f_+(x,w_n)w_n| \leq C(1+|w_n|^2), \tag{3.8}$$

de (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}||w_n||^2_{\mathbb{X}_0} &= \int_\Omega f^+(x,w_n(x))w_n(x)dx + \langle(\mathcal{F}^{+})'(w_n), w_n\rangle \\ &\leq \int_\Omega C(1+|w_n|^2)dx,\end{aligned}$$

alors

$$\leq C|\Omega| + ||w_n||^2_{L^2(\Omega)} + o(1)||w_n||_{\mathbb{X}_0}. \tag{3.9}$$

Montrons que $||w_n||_{L^2(\Omega)}$ est bornée. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe une sous suite notée (w_n) telle que $||w_n||^2_{L^2(\Omega)} \to +\infty$ quand $n \to \infty$.
On pose

$$u_n = \tfrac{w_n}{||w_n||_{L^2(\Omega)}} \ \ alors \ \ ||u_n||_{L^2} = 1.$$

Par (3.9) on obtient

$$||u_n||^2_{\mathbb{X}_0} \leq o(1) + C + o(1)||u_n||_{\mathbb{X}_0}. \tag{3.10}$$

Ainsi, $||u_n||_{\mathbb{X}_0}$ est bornée, alors :
Il existe $u \in \mathbb{X}_0$ tel que

$$u_n \to u \qquad converge\ faiblement\ dans\ \mathbb{X}_0\ quand\ n \to \infty.$$
$$u_n \to u \qquad fortement\ dans\ L^\alpha(\Omega)\ pour\ 1 \leq \alpha < 2_s^*.$$

On trouve

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))K(x-y)dxdy-\int_{\Omega}lu^{+}\phi dx=0 \tag{3.11}$$

Ce qui implique que $u \in \mathbb{X}_0$ est une solution faible du problème

$$-\mathcal{L}_k u = lu^{+}\ ,$$

Le principe du maximum faible implique $u = u^{+} > 0$.
D'autre part pour $\phi = \varphi_1$ dans (3.11) et par la définition de λ_1 on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}(u(x)-u(y))(\varphi_1(x)-\varphi_1(y))K(x-y)dxdy-l\int_{\Omega}u\ \varphi_1 dx=0. \tag{3.12}$$

En utilisant le fait que $\varphi_1(x) > 0$ et $u(x) > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}(u(x)-u(y))(\varphi_1(x)-\varphi_1(y))K(x-y)dxdy-\lambda_1\int_{\Omega}u\ \varphi_1 dx=0, \tag{3.13}$$

alors $u \equiv 0$ puisque $\lambda_1 < l$ contradiction avec $||u||_{L^2} = 1$, alors $||w_n||_{L^2}$ est bornée, et par (3.10) On déduit que la suite (w_n) est bornée dans $\mathbb{X}_0$, comme la croissance de f est sous critique on conclut que $w_n \to w$ fortement dans $\mathbb{X}_0$.

3.3 Preuve du Théorème 3.1

Les conditions de théorème du Col sont satisfaites pour les fonctionnelles $\mathcal{F}_+$ et $\mathcal{F}_-$, on conclut l'existence deux points critiques c_+ et c_- avec $\mathcal{F}_+(u_+) = c_+$ et $\mathcal{F}_-(u_-) = c_-$.
En procèdant de la même manière que le théorème 2.2, on montre que $u_+ \geq 0$ et $u_- \geq 0$ sur Ω.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ambrosetti ; P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

[2] S. Ayad. Transformation de Fourier et distributions tempérées, Département de Mathématiques Université Oran 1 Ahmed Ben Bella, Algérie.

[3] G. M. Bisci ; V. D. Radulescu ; R. Servadei. Variational methods for nonlocal fractional problems.Cambridge University Press.2016.

[4] J. Bourgain ; H. Brezis ; P. Mironescu. Another look at Sobolev spaces.J.L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (Eds.), Optimal Control and Partial Differential Equations, IOS Press, Amsterdam,2001.

[5] H.Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et application, Paris, Masson 1983.

[6] F. Demengel ; G. Demengel ; R. Erné. Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations. London,2012.

[7] E. Di Nezza ; G. Palatucci ; E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci. Math. 136 (2012), no. 5, 521–573.

[8] C. Evans. Partial differential equations, American Math. Society. 2010.

[9] D. Gilbarg ; N. S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order , Springer, 2001.

[10] M. Kwasnicki. Ten equivalent definition of the fractional Laplace operator, Fract. Calc.1 Appl. Anal. 20(1) (2015), 7-51.

[11] D. Li. Cours d'analyse fonctionelle. Ellipses, 2013.

[12] N. S. Landkof. Fonndations of modern potential theory.1972.

[13] T. Leonori ; I. Peral ; A. Primo ; F. Soria. Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations. Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015), no. 12, 6031–6068.

[14] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Mathématiques & Applications (Berlin). Springer-Verlag, Paris, 1993.

[15] P. H. Rabinowitz. Minimax methods in critical point theory with applications to differntial equations .CBMS regional conferece series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence .1986.

[16] R. Servadei ; E. Valdinoci. Mountain pass solutions for non-local elliptic operators. J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), no. 2, 887–898.

[17] R. Servadei ; E. Valdinoci. Lewy-Stampacchia type estimates for variational inequalities driven by non local operators. Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), no. 3, 1091–1126.

[18] M. Willem. Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[19] Y. Wei ; X. Su. On a class of non-local elliptic equations with asymptotically linear term. Discrete Contin. Dyn. Syst. 38 (2018), no. 12, 6287–6304.

Absract :
This Master's disertation examines the study of nonlocal elliptic problems. We are interested to establish the existence and multiplicity results about a class of elliptic non local problems.

keywords : Fractional Sobolev space, fractional Laplacian, Col theorem .

Résumé :
Ce mémoire de Master concerne l'étude de problèmes elliptiques non locaux. On commence par introduire les espaces de Sobolev fractionnaires, les différentes injections nécessaires pour ce travail. On s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes elliptiques non locaux. On établit l'existence et la multiplicité des solutions.

Mots clé : Espace de Sobolev fractionnaire, Laplacien fractionnaire, le théorème du Col.