

الجمهورية  
الجزائرية  
الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة

التعليم

العالي والبحث

العلمي

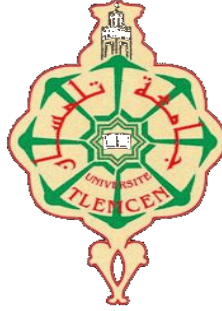
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد

تلمس - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



**THESE**

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : Génie Mécanique

Spécialité : Mécanique de Construction

Par : Fakiri Hicham

**Sujet**

**Analyse d'une conduite sous pression d'un fluide interne par  
la méthode des éléments finis hiérarchiques**

Soutenue publiquement, le 17 / 09 / 2023 , devant le jury composé de :

CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
OUISSI Mohamed Nabil	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
HADJOUI Abdelhamid	Professeur	Univ. Tlemcen	Co- Directeur de thèse
RAHOU Mohamed	Professeur	École-S.S.A. Tlemcen	Examineur 1
SAIMI Ahmed	MCA	ENSH Blida	Examineur 2
BELOUFA Amine	MCA	Univ. Ain Témouchent	Examineur 3
ALIANE Khaled	Professeur	Univ. Tlemcen	Invité

# المخلص

نقوم بدراسة تأثير السوائل تحت الضغط داخل انبوب عن طريق العناصر المحدودة الهرمية. طبيعة التدفق السائل هو صفحي وغير قابل للضغط. قوانين سلوك المادة الصلبة قد تم تحديد باستخدام قانون هوك المعمم، و تلك الخاصة بالسوائل بواسطة معادلة نافير ستيكس. تمت الدراسة في مجال البنية ميكروسكوبيا وذلك لمعرفة التأثير الناتج بين الصلب و السائل و التي تم تحقيقها عن طريقة قنون الإضافة ومن خلالها تم تحديد المعدلات الحركية لهذا النظام المستعمل بمبدأ هاملتن. تم تطوير برنامج لحساب الترددات الذاتية لهيكل مائع النظام تحت ماتلاب. بعد التحقق من صحة البرنامج ، يتم إجراء دراسات الخصائص والمعلومات لتحديد تأثير المعلومات الهندسية المختلفة مثل: نصف القطر/الطول، نصف القطر/ونسب السماكة ، وظروف الحدود المختلفة ، فضلاً عن تأثير المعلومات الميكانيكية المختلفة ، مثل معامل المرونة ، نسبة الكثافة.

**الكلمات المفتاحية:** الترددات، الاهتزاز الحر، طريقة العناصر المحدودة الهرمية، قناة الاهتزاز، تحليل الاهتزاز.

# *Abstract*

We are studying the influence of the interaction of a fluid under pressure in a pipe using the hierarchical finite element method. The flow is laminar and incompressible. The behavior laws of the solid are determined using the generalized Hooke's law and those of the fluid by the Navier-Stokes equation. The macrostructure study of the interface between the solid and the fluid is carried out by the penalty method. The equations of the fluid-structure system movement are determined by the principle of Hamilton. A program for calculating the natural frequencies of the fluid-structure system is developed using Matlab. After validation of the program, parametric studies are carried out to determine the influence of different geometric parameters such as radius/length ratios, radius/thickness, different boundary conditions, as well as the influence of different mechanical parameters such as the modulus of elasticity, the ratio of volumetric masses.

**Keyword:** frequencies, free vibration, hierarchical finite element method, vibration duct, vibration analysis.

# Résumé

Nous étudions l'influence de l'interaction d'un fluide sous pression dans une conduite par la méthode des éléments finis hiérarchiques. L'écoulement est de nature laminaire et incompressible. Les lois de comportement du solide sont déterminées à l'aide de la loi de Hooke généralisée, et celles du fluide par l'équation de Navier-Stokes. L'étude sous forme macrostructure de l'interface entre le solide et le fluide est réalisée par la méthode de pénalité. Les équations du mouvement de système fluide structure sont déterminées par le principe de Hamilton. Un programme pour le calcul des fréquences propres du système fluide structure est développé sous Matlab.

Après validation du programme, des études paramétriques sont réalisées pour la détermination de l'influences des différents paramètres géométriques tels que: les rapports rayon/longueur, rayon/épaisseur, différentes conditions aux limites, ainsi que l'influences des différents paramètres mécaniques, tels que le module d'élasticité, le rapport des masses volumiques, etc...

**Mot clé :** fréquences, vibration libre, la méthode des éléments finis hiérarchique, conduit en vibration, analyse vibratoire.

# **REMERCIEMENT**

***J'exprime mes gratitudes, mes reconnaissances et  
mes sincères  
remerciements à Monsieur HADJOUI ABDELHAMID et  
OUISSI MOHAMED NABIL MOHAMED pour m'avoir  
encadré tout  
le long de mon projet. La patience, le soutien  
et le temps trop précieux m'ayant été  
accordé, c'est avéré concluant,  
et m'a été finalement d'un  
grand apport.***

***Il y'a lieu de remercier également Monsieur CHEIKH  
Abdelmadjid pour avoir bien la bonté d'accepter de  
présider ce jury,  
et messieurs Saimi Ahmed et Belloufa Amine  
et Aliane Khaled pour avoir examiné  
ce mémoire.***

***Toutes mes considérations à mes dignes et  
respectables Professeurs qui méritent autant d'égard,  
pour m'avoir  
donné le meilleur d'eux-mêmes afin  
d'arriver à ce stade du savoir.***



## *Table des Matières*

I. Introduction Générale.....	10
II. Théorie des fluides .....	28
I.1. Dynamique du fluide.....	29
II.2. Equations de Navier-Stokes comme modèle pour les flux incompressibles : .....	29
II.3. Conservation de masse .....	30
II.4. Conservation du mouvement.....	32
II.4.1. Conservation du mouvement linéaire : .....	32
II.5. Tenseur de contrainte .....	36
II.6. Contrainte-déformation : .....	38
II.7. Equation Euler en forme vectorielle : .....	41
II.8. Équation de Navier-Stokes : .....	42
II.8.1. Vecteur de forme : .....	42
II.8.2. Discrétisation de l'équation du Navier-Stokes : .....	42
II.8.3. Exemples standard de méthodes d'éléments finis : .....	45
III. Théorie du solide.....	57
III.1. Introduction .....	58
III.2. Contraintes en coordonnées cylindriques:.....	58
III.3. Déformations en coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) : .....	60
III.4. Principe du travail virtuel : .....	69
III.5. Élément fini: .....	70
III.5.1 Prisme famille de Lagrange : .....	73
IV. Interaction Fluide Structure.....	80
IV.1. Interaction fluide-structure et conditions limites suivant l'interface : .....	81
IV.1.1 Introduction : .....	81
IV.2. Type de couplages : .....	83
IV.3. Conditions aux limites : .....	88
IV.4. Les équations d'ondes : .....	90
IV.6. Ondes unidimensionnelles 1D : .....	90
IV.6. Oscillations libres : .....	95
IV.6.1. Mouvement harmonique simple (MHS) : .....	95
IV.6.2 Equation du fluide : .....	97

V. Résultats et Interprétations .....	106
V.1. Introduction .....	107
V.2. Algorithme : .....	109
V.3. Validation : .....	111
V.4. Études de cas : .....	114
V.4.1. Variation de l'épaisseur du cylindrique : .....	114
V.4.2. Variation de la longueur du cylindre : .....	115
V.4.3. Variation de la longueur du tuyau avec et sans fluide.....	115
V.4.4. Variation du rayon du cylindre avec fluide .....	116
V.5. Interprétation : .....	116
VI. Conclusion générale : .....	119
VII. References : .....	123

## *Liste des Figures*

Figure I-1: POND de Takoma sous oscillation de torsion 1940. ....	15
Figure I-2: Deuxième tentative de l'aérodrome en 1903 .....	16
Figure I-3 : Dynamiques électroaérodynamiques en 1970. ....	17
Figure I-4 : Impact hydrodynamique. ....	18
Figure II-1 : Volume de contrôle pour le bilan de quantité de mouvement. ....	29
Figure II-2 : Conservation.....	32
Figure II-3 : vecteur contrainte de Cauchy sur la normale .....	34
Figure II-4: Système des coordonnées cylindriques avec vecteurs unitaires .....	35
Figure II-5: Vecteurs de vitesse en coordonnées cylindriques .....	36
Figure II-6: Contraintes dans un plan orthogonal aux directions $(r, \theta, z)$ .....	37
Figure II-7 : Quelques éléments finis à pression discontinue [79] .....	47
Figure II-8 : L'élément de base Q1/P0. Fonctions de maillage et d'interpolation pour la vitesse et la pression.....	47
Figure II-9 : Quelques éléments finis possibles pour une formulation mixte.....	49
Figure II-10 : Élément fini quadrilatère de Taylor-Hood .....	50
Figure III-1: Repère rectangulaire et cylindrique .....	62
Figure III-2 : Changement de longueur dans le sens radial .....	62
Figure III-3 : Déformation circonferentielle .....	63
Figure III-4 : Construction changement d'angle au déplacement radial et circonferentiel .....	63
Figure III-5 : Changement d'angles dans le plan $\{r, z\}$ .....	64
Figure III-6 : Composante de déformation $(\theta, z)$ .....	64
Figure III-7 : Contrainte en coordonnées cylindriques.....	65
Figure III-8 : Contraintes agissant sur un volume différentiel d'un solide axisymétrique sous chargement axisymétrique .....	68
Figure III-9 : Prisme droit. Géométries réelles et normalisées ( hexaèdre élément )	72
Figure IV-1: Mécanisme du couplage d'interaction fluide-structure .....	81
Figure IV-2 : Interface fluide-structure avec base locale et vecteur de contrainte [94]	83
Figure IV-3: Élément d'interface planaire entre deux éléments finis tridimensionnels	85
Figure IV-4 : Système de couplage entre fluide-structure .....	89
Figure IV-5 : déplacements dans un système de coordonnées cylindriques .....	95
Figure IV-6 : Oscillation suite MHS du système Masse-raideur .....	96
Figure IV-7 : Harmonique Simple mouvement SHM .....	96
Figure V-1: Simulation numérique du FSI : code couplé fluide-structure ou stratégie de couplage codes fluide-structure .....	108
Figure V-2 : Interaction fluide-structure en couplage par pénalité.....	109
Figure V-3 : Algorithme de calcul .....	111
Figure V-4 : Convergence du polynôme pour différents degrés de liberté solide.....	112
Figure V-5 : Convergence du polynôme pour différents degrés de liberté fluide.....	112
Figure V-6 : Ecart relatif $\varepsilon\%$ du Tableau 1 .....	114
Figure V-7 : Variation de la fréquence propre par rapport l'épaisseur avec différents modes circonferentiels du solide.....	114
Figure V-8 : Variation de la fréquence propre par rapport la longueur avec différents modes circonferentiels du solide. ....	115

Figure V-9: Variation de la fréquence propre par rapport la longueur avec différents modes longitudinaux du solide. .... 115  
 Figure V-10: Variation de la fréquence propre par rapport la longueur avec différents modes longitudinaux du solide avec fluide..... 116  
 Figure V-11: Variation du rayon en fonction des fréquences propres du solide..... 116

## Liste des Tableaux

Tableau IV-1: différents modèles d'interface rhéologique possibles..... 84  
 Tableau IV-2 : Nombre d'ondes et conditions aux limites ..... 92  
 Tableau V-1 : référence de validation..... 111  
 Tableau V-2 : Comparaison entre les fréquences propre..... 113

## Acronymes

IFS	Interaction Fluide Structure
MEFH	Méthode des Eléments Finis Hiérarchiques
MHS	Mouvement harmonique simple

## Liste des Symboles

Symboles	Notation	Unite
$\{\epsilon\}$	Vecteur de déformation	1
$[d]$	Matrice de forme de déformation	m
$\{U\}$	Vecteur déplacement	m
$\{\sigma\}$	vecteur de contrainte	N/m <sup>2</sup>
$[D]$	Matrice Comportement	1
$E$	Module d'élasticité	N/m <sup>2</sup>
$u_r$	Déplacement le long du rayon	m
$u_z$	Déplacement le long de la longueur	m
$u_\theta$	Mouvement de rotation	m
$r$	Rayon	m
$z$	Axe	1
$\theta$	Thêta	1
$\nu$	Coefficient de Poisson	1
$T_{ij}$	Tenseur	1
$n_j$	Normale	1
$\tau_{ij}$	Tension	1
$p$	Pression	N/m <sup>2</sup>
$\rho$	Densité	Kg/m <sup>3</sup>
$g_r$	Gravité	N m <sup>2</sup> kg <sup>-2</sup>
$\mu$	Viscosité dynamique	kg/(m s)

$[K_{SYS}]$	Matrice de rigidité du système l'interaction fluide-structure	N/m
$M_{SYS}$	Matrice de masse du système l'interaction fluide-structure	Kg
$[M_{sf}]$	Matrice massique de la structure fluide	Kg
$\{\ddot{u}\}$	vecteur d'accélération	m/s <sup>2</sup>
$[K_{sf}]$	Matrice de rigidité de la structure fluide	N/m
$\delta_n$	Symbole de Kronecker	1 ou 0
$F_{r(m \rightarrow s)}$	Force de pénétration radiale du nœud maître vers le nœud esclave	N
$F_{z(m \rightarrow s)}$	Force de pénétration axiale du nœud maître vers le nœud esclave	N
$S_s$	surfaces solides	m <sup>2</sup>
$S_f$	surfaces fluides	m <sup>2</sup>
$[\sigma_s]$	Matrice des contraintes solides	N/m <sup>2</sup>
$[\sigma_f]$	Matrice des contraintes du fluide	N/m <sup>2</sup>
$\{f_s\}$	Somme vectorielles des forces appliques au solide ou à la structure	N
$\alpha_p$	Facteur de pénalité	1
$[g_s]$	Matrice de couplage de solide	1, 0, -1
$\{f_f\}$	Somme vectorielle des forces fluides appliquées au fluide	N
$[g_f]$	Matrice de couplage de fluide	1, 0, -1
$[G]$	Matrice de couplage	1, 0, -1
$[G_{sf}]$	Matrice de rigidité pour couplage fluide-solide	N/m
$m$	Nombre de modes longitudinaux	1
$n$	Nombre de modes circonférentiels	1
$\dot{u}_r$	la vitesse radiale du fluide	m/s

$\dot{\mathbf{u}}_{\theta}$	la vitesse tangentielle du fluide	m/s
$\dot{\mathbf{u}}_z$	la vitesse axiale du fluide	m/s
$p_r$	pression radiale	N/m <sup>2</sup>
$p_z$	pression axiale	N/m <sup>2</sup>
$p_{\theta}$	pression tangentielle	N/m <sup>2</sup>

## *Introduction Générale*

---

### **I. Introduction Générale**

L'interaction fluide-structure (IFS) est un domaine d'étude qui concerne l'interaction entre un fluide et une structure solide. Lorsque ces deux éléments interagissent, les forces contenues par le fluide peuvent affecter le comportement de la structure et vice versa. L'IFS est une discipline multidisciplinaire qui combine les principes de la mécanique des fluides, de la mécanique des structures. Elle est utilisée dans de nombreux domaines, tels que l'aéronautique, l'ingénierie civil, l'ingénierie océanique et la biomécanique. L'interaction fluide-structure dans les conduites est un phénomène courant dans de nombreuses applications industrielles impliquant le transport de fluides à travers des conduites ou des tuyaux. Elle se produit lorsque le fluide en mouvement exerce des forces et des contraintes sur les parois du tuyau, ce qui peut avoir un impact significatif sur la performance et la durabilité du système. L'interaction fluide-tuyau est étudiée dans des domaines tels que l'ingénierie pétrolière, l'industrie chimique, l'approvisionnement en eau et les systèmes de distribution de fluides. Comprendre ce phénomène est essentiel pour concevoir des tuyaux résistants, prévenir les défaillances, minimiser les pertes de pression et optimiser l'efficacité du transport des fluides. Lorsqu'un fluide circule à travers un tuyau, il génère des forces hydrodynamiques résultant de la pression et de la vitesse du fluide. Ces forces peuvent induire des vibrations, des déformations et des contraintes dans le tuyau, ce qui peut entraîner des problèmes tels que la fatigue, la corrosion, ou même la rupture de la conduite. Des équations basées sur les lois de la mécanique des fluides et de la mécanique des structures sont utilisées pour analyser le comportement du fluide et du tuyau, en prenant en compte des facteurs tels que la viscosité, la pression, la vitesse, la flexibilité du tuyau et les conditions aux limites.

La méthode des éléments finis hiérarchiques est une méthode qui permet une modélisation plus réaliste des déformations et des contraintes, ce qui peut conduire à une meilleure conception et à une meilleure gestion de ces structures.

L'interaction fluide-tuyau est un phénomène important dans de nombreuses applications industrielles. Comprendre et modéliser ces interactions est essentiel pour garantir la sécurité, la fiabilité et l'efficacité des systèmes de transport de fluides à travers les conduites.

Dans notre travail, nous avons étudié l'interaction de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique.

La thèse est structurée en 6 chapitres. Après une introduction générale le chapitre I est consacré à la recherche bibliographique concernant l'analyse des conduites sous pression d'un fluide interne, ainsi que les analyses par la méthode des éléments finis hiérarchiques. Le chapitre II est consacré à la théorie du fluide mathématique et numérique pour l'équation du mouvement et les équations de conservation massique

avec le développement en l'élément fini hiérarchique. Les équations de Navier-Stokes sont utilisées pour modéliser les écoulements de fluides complexes afin de déterminer l'équation du mouvement globale du fluide avec différentes conditions aux limites. Le chapitre III est consacré à la théorie du solide. Dans le domaine des pipelines, la théorie du solide est utilisée pour analyser et comprendre le comportement de pipes utilisées dans la construction des conduites par la méthode des éléments finis hiérarchiques. Le chapitre IV s'intéresse au comportement de l'interface solide fluide. Le chapitre V est consacré à la validation du programme de calcul suivi d'une étude paramétrique pour la détermination de l'influence des différents paramètres géométriques et mécaniques.

On termine par une conclusion et des perspectives.

---

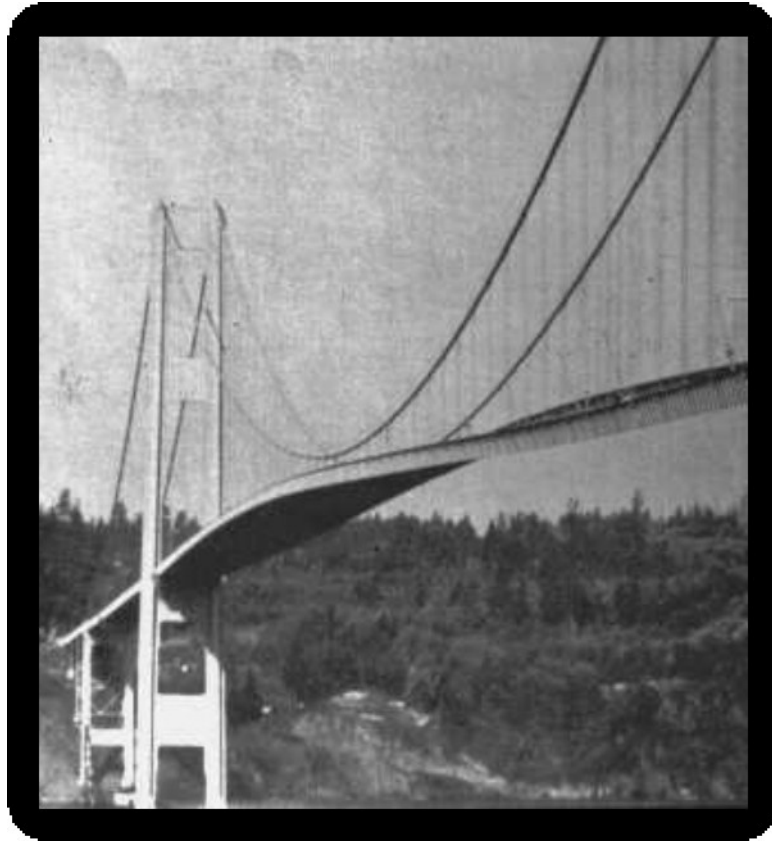
# *Recherche Bibliographique*

---

Les interactions fluide-structure concernent la mécanique des fluides et mécanique des solides. On se concentre en général sur la description des mouvements de la structure en contact avec un fluide, par une analyse fréquentielle, ou vibratoire. Nous étudions la dynamique de la structure lors de sa déformation sous l'effet du liquide sur la structure et vice-versa. La forme géométrique de la structure influe aussi sur le mouvement du fluide dirigé.

Le début des études de l'interaction fluide-structuré a commencé en 1940, après l'effondrement du pont de Tacoma, en anglais Tacoma Narrows Bridge à la vitesse du vent était d'environ 65 km/h sur l'Hudson (États-Unis), avec une grande amplitude d'oscillations de torsion, Cet événement du pont a déclenché une nouvelle visualisation des études pour l'industrie, d'oscillations de torsion, de toutes les recherches scientifiques, technologiques en analyse fréquentielles, ou vibratoire de la structure (pont, bâtiment, centrale électrique, avion, voiture, fusée, conduite, stations pétroliers sur la mer, ...etc.).

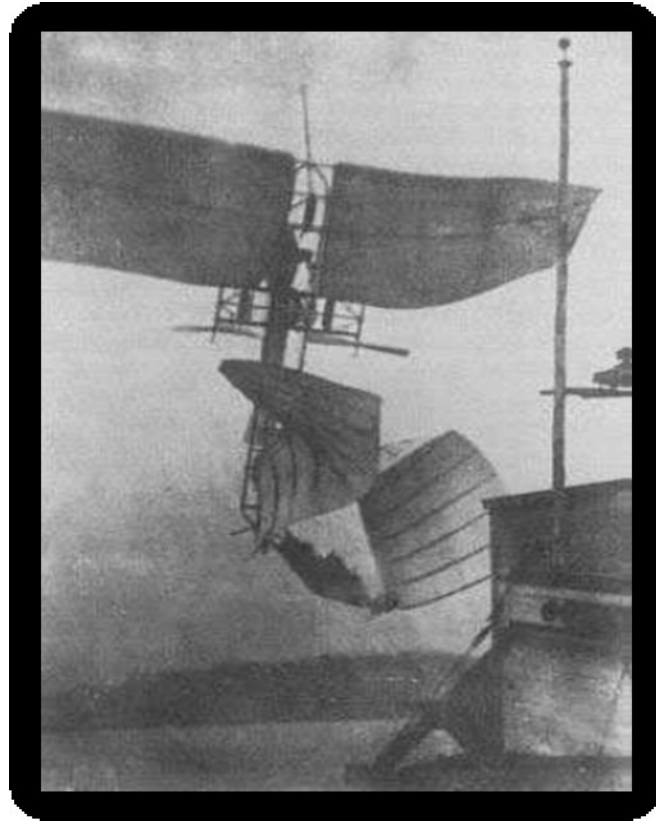
Le pont de Tacoma Narrows en 1940, le premier pont Tacoma Narrows, est probablement l'un des exemples les plus tristement célèbres de défaillance à grande échelle. Les ailes d'avion et les aubes de turbine peuvent se briser en raison des oscillations de l'IFS [1] Les interactions fluide-structure peuvent être stables ou oscillatoires.



**Figure I-1:** Pont de Takoma sous oscillation de torsion 1940.

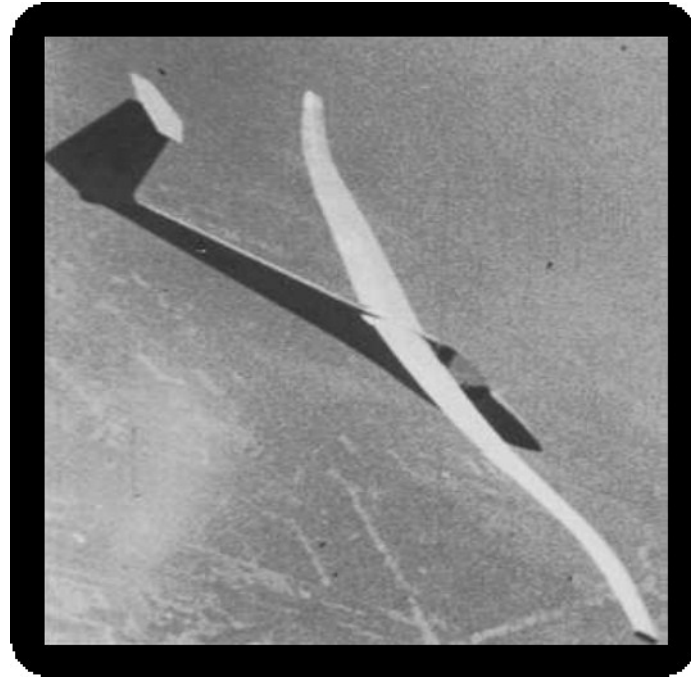
Dans les interactions oscillatoires, la contrainte induite dans la structure solide fait bouger la structure de telle sorte que la source des contraintes est réduite et la structure ne revient à son état antérieur que pour que le processus se répète. En mécanique des solides, les fluides sont considérés comme ayant une influence négligeable ou modélisée très grossièrement, alors qu'en mécanique des fluides, les solides ne sont vus que comme des frontières d'analyse. L'expérience a montré que ces approximations sont parfaitement valables dans de nombreux cas, mais elle a également montré que dans certaines situations cette vision n'est plus suffisante : les interactions entre solides et fluides, doivent être prises en compte. Il a permis à la mécanique des interactions fluide-structure (IFS) d'intégrer un nouveau domaine scientifique, celui du calcul numérique. En effet, les dernières années, les outils numériques et informatiques n'ont pas cessé de progresser. Avec la révolution des ordinateurs. En génie aéronautique, les instabilités aéroélastiques qui peuvent induire des vibrations indésirables, souvent destructrices, ont influencé l'évolution des avions depuis les premiers jours du vol.

Le premier avion à mettre ces problèmes en évidence fut l'aérodrome n°5 du professeur Samuel Langley en 1903. Les premières études de flottement documentées sont apparues plus tard pendant la première guerre mondiale.



**Figure I-2:** Deuxième tentative de l'aérodrome en 1903

En plus de l'aérodrome de Langley, la figure.4 montre une autre image classique de l'instabilité de flottement d'une aile d'avion, en fibre de verre SB-9 conçu par l'Akademische Fliegergruppe Braunschweig et la photo a été prise lors d'essais dynamiques-aéroélastiques en vol effectués en 1970. Des exemples plus récents d'effets IFS peuvent être trouvés dans nombre de nouveaux projets d'ingénierie, en sciences naturelles, en médecine. Avec le développement de la simulation numérique, des simulations IFS ont été réalisées sur le flux sanguin dans les vaisseaux, les maladies vasculaires, mais aussi les troubles valvulaires cardiaques et les prothèses.



**Figure I-3** : Dynamiques aéroélectriques en 1970.

D'un point de vue technique, la prise en compte de l'IFS est souvent importance majeure puisque la réponse structurelle au chargement des fluides entre en considération pour des questions de sécurité, de fiabilité ou de durabilité des systèmes mécaniques – par exemple, dans la construction navale, l'impact dit hydrodynamique est une illustration assez spectaculaire de l'IFS; voir Figure I-2. La modélisation IFS suppose généralement que la structure et les parties fluides d'un système couplé sont étudiées dans le cadre théorique de la mécanique du continuum. En conséquence, leur mouvement est régi par un ensemble d'équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites appropriées. Cependant, dans certaines circonstances, précisées plus tard en cas de besoin, il peut être avantageux de formuler les équations différentielles du mouvement du fluide sous une forme intégrale.

Parmi de nombreux phénomènes impliquant des mouvements de fluides et de structures dans des conditions extrêmes, le claquement est l'un des exemples les plus spectaculaires d'interaction fluide-structure. En navigation à grande vitesse et/ou dans des conditions de mer agitées, l'impact d'un navire sur l'eau induit des charges importantes sur la structure : le claquement est, entre autres, une préoccupation majeure lors de la conception des navires (Marine Nationale américain).



**Figure I-4 :** Impact hydrodynamique.

Les chercheurs ont maintenant des moyens d'analyse graphique et visuelle des problèmes complexes. Il est nécessaire de lier la mécanique des solides et la mécanique des fluides pour obtenir une modélisation correcte du phénomène naturel. On parle alors du couplage entre deux entités fluide et solide, car l'évolution de chacun de ces deux éléments, dépend l'autre. Cette rencontre de plusieurs domaines de la mécanique n'a été possible que grâce au boom technologique des dernières décennies. La méthode de Newton-Raphson ou une autre itération à virgule fixe peut être utilisée pour résoudre les problèmes de l'IFS. Les méthodes basées sur l'itération de Newton-Raphson sont utilisées à la fois dans l'approche monolithique [2] [3] [4] et [5] [6]. Ces méthodes résolvent les équations d'écoulement non linéaires et les équations structurelles dans l'ensemble du domaine fluide et solide avec la méthode de Newton-Raphson. Alors que les méthodes de Newton-Raphson résolvent le problème d'écoulement et de structure pour l'état dans l'ensemble du domaine fluide et solide, il est également possible de reformuler un problème IFS en tant que système avec uniquement les degrés de liberté dans la position de l'interface comme inconnues.

Les méthodes d'interface Newton-Raphson résolvent ce problème de recherche de racines avec des itérations de Newton-Raphson, comme par exemple, avec une approximation du Jacobien à partir d'un modèle linéaire de physiques réduites. [7] [8] La méthode quasi-Newton (relation de quasi-Newton) d'interface avec une approximation de l'inverse du modèle Jacobien à partir d'un modèle des moindres

carrés couple un solveur de flux et un solveur structurel comme boîte noire [9] à partir des informations recueillies lors des itérations du couplage.

Cette technique est basée sur la technique quasi-Newton (relation de quasi-Newton) du bloc d'interface avec une approximation de Jacobien à partir des modèles des moindres carrés qui reformule le problème de l'IFS comme un système d'équations avec à la fois la position de l'interface et la distribution des contraintes sur l'interface comme inconnues. Ce système est résolu avec des itérations par quasi-Newton du type Gauss-Seidel et les Jacobiens du solveur d'écoulement et du solveur structurel sont approchés à l'aide de modèles des moindres carrés. [10] Des itérations à virgule fixe, également appelées itérations de Gauss-Seidel, [13] ce qui signifie que le problème d'écoulement et le problème structurel sont résolus successivement jusqu'à ce que le changement soit inférieur au critère de convergence.

Cependant, les itérations convergent lentement, en particulier lorsque l'interaction entre le fluide et la structure est forte en raison d'un rapport de densité fluide/structure, élevé ou d'incompressibilité du fluide. [11] La convergence des itérations à point fixe peut être stabilisée et accélérée par la relaxation d'Aitken et la relaxation de descente la plus raide, qui adaptent le facteur de relaxation à chaque itération en fonction des itérations précédentes. [12], [13] Si le couplage entre fluide et structure faible, une seule itération par point fixe nécessaire pour chaque pas du temps, conviennent à la simulation de la structure lourde et plutôt rigide. Plusieurs études ont analysé la stabilité des algorithmes partitionnés pour la simulation de l'interaction fluide-structure [14] [15] [16] [18] [19] [20] [21].

Ainsi le calcul numérique suit le développement ou les limites sont repoussées très loin possible. On trouve actuellement IFS dans le domaine industriel, en Génie civil, en industrie maritime et navale, dans le domaine biomédical (écoulements sanguins dans les artères)...etc. L'interaction fluide-structure (IFS) est une discipline scientifique couvrant la physique et l'ingénierie, qui traite de l'étude de l'interaction des structures solides ou flexibles avec les écoulements fluides internes ou environnants.

Dans ce domaine on trouve quelques travaux expérimentaux, théoriques ou de simulation comme [22] Long, qui a fait des études analytiques et expérimentales sur les vibrations libres pour le mode fondamental d'un tube contenant un fluide en

écoulement avec différentes conditions aux limites. En 1950 [23] Ashley et autre, ont fait une étude vibratoire forcée d'un pipeline en flexibilité avec la présence du fluide à l'intérieur avec l'interaction d'un troisième paramètre qui intervient comme mouvement forcé dû aux vents à l'intérieur de la conduite supportée au-dessus du sol. Le même travail a été fait par [24] Housner a trouvé que les modes normaux de vibration avec composants déphasés à 90 degrés pour les vibrations libres et pour les vibrations forcées que les grandes amplitudes se développent si la quantité d'amortissement est trop faible.

À faible vitesse du fluide la vibration est négligeable pour la canalisation mais à certaine vitesse critique l'écoulement du fluide provoque l'instabilité dynamique. Dans son travail [25] Niordson a étudié la vibration d'un tube cylindrique à l'écoulement interne, analytique et expérimentale par les approches des équations différentielles du mouvement pour différentes conditions aux limites à l'extrémité du cylindre. Il obtient des faibles fréquences avec augmentation du débit et ne donne pas la décroissance. Par contre, pour les extrémités libres encastrées on a une décroissance vibratoire. On trouve aussi la notion hydro-vibratoire ou la vibration hydraulique qui s'intéresse aux vibrations des conduits forcés remplis d'eau dans les centrales hydroélectriques au Japon, il y a beaucoup des travaux sur ce sujet comme Fumiki [26] en 1962 qui détermine une méthode structurale qui empêche la vibration de la conduite en travaillant dans le transport d'eau.

En 1965 Dodds et al [27], ont trouvé que les caractéristiques statiques et dynamiques d'un tuyau avec simple support se déstabilise si on a une grande vitesse d'écoulement du fluide, ceci résulte de la solution d'équation de mouvement d'un tuyau uniforme par la théorie élémentaire des faisceaux à écoulement interne en dérivation le système des coordonnées suivant une vérification entre l'expérimental et la théorie avec de bonne corrélation. On trouve plusieurs théories sur les évolutions de la structure cylindrique ; nous exposons quelques articles qui font les comparaisons entre ces théories, comme [28] Warburton et [29]. Rinehart et al, ont appliqué différents théories (Flügge, Vlasov, Donnell) avec la comparaison expérimentale, malgré cela, la plupart des études ont eu tendance à étudier la structure, notamment les conduits cylindriques, par approximation numérique (Rayleigh-Riz, série de Fourier) ou les

déplacements considérés de façon sinusoïdale, suivant les directions axiale, radiale et tangentielle pour lesquels obtient les fréquences numériques des déformations modales calculées, en vibration longitudinale et circonférentielle.

Le même travail a été fait [30] en 1974 par Sharma pour trouver les fréquences naturelles des coques cylindriques circulaires aux extrémités encastree-libres, où il devient clair pour nous que la relation entre la longueur sur le rayon est exactement dans les résultats si elle est petite avec un faible nombre d'onde circonférentiel car, elle augmente les fréquences propres. Tous ces travaux, sont basés sur les vibrations forcées de façon que l'équation de mouvement soit égale à une force inconnu sous forme de pression sinusoïdale du fluide, mais par contre, l'article [31] en 1979, Hughes et al met en évidence la notion du couplage entre la structure et le fluide. Les méthodes de résolution actuellement dans les solveurs de Navier-Stokes utilisent généralement, trois principes : différences finies (discrétiser les équations du fluide en utilisant les molécules classiques aux différences finies avec la discrétisation sur la frontière en éléments de frontières, dans la difficulté de décrire les conditions aux limites en termes de surfaces courbes et la perte de précision implicite dans leur discrétisation), éléments finis (certains chercheurs ont récemment suggéré d'utiliser plutôt des éléments finis. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de modéliser des géométries complexes en faisant varier la taille de la grille ou des éléments), volume fini (méthode qui discrétise le volume en une série de cellules de forme arbitraire, les variables sont considérées au centre de gravité de l'élément, sur chaque volume fini sont obtenues par interpolation entre les centrales, l'inconvénient est que la précision de l'approximation nécessite un maillage très fin).

Nous présentons dans un bref aperçu où nous expliquons les différentes méthodes utilisées pour résoudre les équations de Navier-Stokes, sans faire intervenir la notion du couplage ou l'interface entre fluide et la structure parce que la première idée du couplage c'est de définir les conditions limites clastiques sur l'élément fluide pour trouver les caractéristiques physiques (Champ de vitesses, flux, débit massique, pression...etc.), depuis 1980 Combescurre et al [32] présentant une méthode générale pour le calcul le comportement dynamique du système couplage fluide-structure par la méthode des éléments finis pour une conduite cylindrique axisymétrique, comparée

parfois avec des résultats analytiques où des résultats expérimentaux, pour l'interaction fluide-structure dans les systèmes de tuyauterie. Dans un autre travail [33] 1986 Belytschko et al ont trouvé dans l'analyse des systèmes de tuyauterie. Dans un autre travail [33] Belytschko et al ont trouvé dans l'analyse au marteau d'eau des systèmes de tuyauterie, des représentations incompressibles (ou de masse ajoutée) qui sont généralement utilisés pour calculer la réponse de la tuyauterie. Il est démontré que cette procédure n'est pas nécessairement conservatrice, en particulier pour les systèmes de tuyauterie flexibles à paroi mince et que les solutions de structure-fluide entièrement couplées peuvent prédire des charges et des contraintes plus élevées. Une procédure de récupération modale permettant d'inclure facilement la représentation des effets acoustiques du fluide dans un modèle structurel est également présentée. Les résultats sont donnés à la fois pour des modèles simples et un système de tuyauterie.

Une revue [34] a été faite sur domaine de développement par Singh et al en 1988 sur problème d'interaction fluide-structure, où les vibrations induites par les impulsions dans les systèmes couplés appliquent l'analyse de la calandre remplie d'un réacteur à eau lourde sous pression pour l'analyse de la calandre remplie de modérateur d'un réacteur à eau lourde sous pression avec une formulation bidimensionnelle axisymétrique basée sur la méthode des éléments finis utilisant le champ de pression dans le fluide et le champ de déplacement dans la structure. Arrivé à l'équation du mouvement asymétrique du système couplé en vitesse et déplacements et même pour pression dans un différent temps de résolution de la solution à trouver et pour rendre le système symétrique on utilise la méthode de Newmark qui permet d'équilibrer l'équation de mouvement à l'intégrale directe, Car Rendo et al [35] montre que la fréquence propre d'une coque cylindrique sous mouvement du fluide externe et interne couplés basés sur la théorie de la flexion est résolue analytiquement. Nitikitpuoon et al [36] utilise la formulation Lagrangien-Eulérienne arbitraire qui est basé sur les déplacements et sur les potentiels des vitesses à densité du fluide irrotationnelle variables en appliquant la compressibilité et l'incompressibilité, Néanmoins la plupart des applications de ces méthodes sont encore limitées à des cas avec des mouvements relativement faibles, par Mazuch et al [37] utilisant la méthode des éléments finis (FEM) avec l'analyse modale expérimentale dans le temps où les fréquences naturelles

et les modes de vibration sont étudiés pour l'augmentation progressive du niveau d'eau dans une coque cylindrique en acier à paroi mince verticale de la mesure est excellent dans la plupart des cas étudiés de vibration plus compliquées, la théorie d'élastique tridimensionnelle, trois composantes du déplacement sont étendues par des séries orthotropes. [38] Chen et al ont obtenu un ensemble d'équations différentielles ordinaires du second ordre résolu par la méthode de Frobenius, en équation de fréquence a obtenus de la vibration libre non axiale de la coquille forme cylindrique remplie de fluide orthotrope avec une épaisseur constante, pour comparer les résultats basés sur la théorie de la coquille. La description du problème est obtenue par la méthode des éléments finis appliquée aux fonctionnelles d'un solide, d'un fluide et d'une interface par [39] en 1999 Pedroso et al pour le calcul de problèmes, dynamiques suivi d'une le travail une comparaison entre les comportements dynamiques couplés et non couplés pour un test donné et sa vérification par des solutions analytiques. Zhang et al [40] ont utilisé le principe de Lagrange avec l'approche eulérienne appliquée au couplage entre la conduite et le fluide par la méthode de Ritz sous forme matricielle des équations en équilibre dynamique pour étudier le comportement vibratoire géométriquement non linéaires de la conduite transportant le fluide, obtenus expérimentalement d'un modèle de vibration linéaire.

En utilisant la théorie non linéaire de la coque peu profonde de Donnell et al [41] ont montré que la méthode de couplage entre les éléments structuraux et fluides pour la précision des fréquences propres, aux modes de vibratoire de la coque sous pression du réacteur de type VVER-1000, d'une baisse de fréquences du mode de flexion qui présentent un déplacement relatif entre la cuve sous pression. L'analyse des vibrations des coquilles cylindriques à l'aide de la méthode de propagation des ondes est présentée, par [42] Zhang et al à l'aide de la méthode numérique par éléments finis, elle est également effectuée facilement pour des conditions aux limites complexes de coque chargées en fluide.

Zhang et Gorman [43],[44] ont développé un travail, suivant la théorie tridimensionnelle de l'élasticité et les équations eulériennes linéarisées en couplage de l'équation d'Euler par des conditions de couplage interface dynamique, pour déterminer, les fréquences naturelles du système dynamique fluide-coques

cylindriques minces conditionnées par le rapport rayon-épaisseur de  $R/h=38,96-1624$  pour les comparer aux résultats expérimentaux à l'effet de la variation des vitesses d'écoulement du fluide et des pressions hydrostatiques pour différentes modes vibratoires circonférentiels et longitudinaux pour des différentes propriétés géométriques, basé sur la méthode des éléments fini (FEM) version-h. Le même problème a été calculé par la méthode des éléments spectraux (SEM) (la méthode des éléments spectraux (MES) est une formulation de la méthode des éléments finis (FEM) qui utilise des polynômes de haut degré par morceaux comme fonctions de base) en 2003 [45] Lee et autre pour étudier l'avantage du modèle d'élément spectral actuel par rapport au modèle conventionnel d'éléments finis.

En analysant les vibrations des éléments spectraux, effectuée sur un pipeline droit simplement soutenu transportant un flux stable interne. Ganesan et al [46] ont étudié l'influence de différents degrés de température constante sur la conduite du fluide qui s'écoule à travers la coque cylindrique par le principe de Bernoulli, en utilisant par la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre, qui fournit les informations de stabilité du système périodique, la température (Température Critique) du fluide, l'influence sur le comportement du système dynamique par l'instabilité avec des valeurs différentes des vitesses comme on le trouve dans l'article [47] de Jeune-soo et al en 2005 où est analysée l'influence de la vitesse du fluide en fonction de la réponse en fréquence.

Une analyse de vibration par le comportement dynamique d'une coque à paroi mince, basée sur la théorie de Sandres, le fluide dans une coque cylindrique considéré comme non visqueux et incompressible de sorte qu'il satisfait l'équation de Laplace est illustrée et discutée. Les résultats de cette méthode sont comparés aux résultats d'un article de la même année [48] Sigrist, en appliquant l'interface entre le fluide et la structure par couplage élément fini/élément fini. Ils ont calculé la matrice de couplage en déplacements et pressions avec des forces normales entre les deux systèmes dynamiques. À partir de tous ces travaux on remarque que la majorité des recherches, sont basés sur la stabilité par les réponses des fréquences propres, quel que soit l'orientation de l'étude effectuée.

Pendant ces années passées, les méthodes théorique appliquées ont donné une richesse de calculs qui ont été utilisé dans la résolution des problèmes industriels, avec

l'utilisation de logiciels comme le travail de [49] Wang et al qui ont utilisé la simulation numérique pour déterminer les fréquences naturelles d'une conduite transportant du fluide incompressible en 3D avec l'interface qui est conditionnée par le glissement et le déplacement par le code ADINA-IFS (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis, Fluid Structure Interaction). Les fréquences sont généralement inférieures à celles prédites par les méthodes analytiques. L'utilisation des coques cylindres circulaires pour le transport de fluide dans les applications industrielles modernes en a fait un domaine de recherche important en mécanique appliquée.

DelPrado et al [50] 2015 utilisent un matériau orthotrope des coques avec la présence du fluide intérieur et extérieur de la coque cylindrique circulaire orthotrope simplement supportée soumise à des charges axiales et latérales dépendant du temps est étudiée. La méthode de Galerkin est appliquée, pour dériver l'ensemble des équations différentielles ordinaires non linéaires couplées du mouvement qui sont, à leurs tours, résolues par la méthode de Runge-Kutta. Les résultats obtenus montrent que la présence du fluide interne et les propriétés du matériau ont une grande influence sur les caractéristiques vibratoires de la coque, les vibrations linéaires d'un tuyau de transport de fluide avec support intermédiaire ont été discutées. [51] en 2015 Kesimli et al utilisent le principe de Hamilton pour les équations de mouvement avec les conditions limites du système interaction fluide-structure, pour obtenir les fréquences propres par la méthode de perturbation comme la solution du problème linéaire, pour différents paramètres comme le taux de remplissage ( $\beta$ ) et la vitesse du fluide ( $v_f$ ). La même année Sutar et al [52] utilisent la théorie des faisceaux d'Euler-Bernoulli par le principe de Hamilton en forme énergétique pour avoir les fréquences naturelles par rapport à la vitesse par un programme de FORTRAN qui se base sur la méthode numérique de bi-section de Muller. Modélisées sur logiciel commercial I-DEAS avec le logiciel ABAQUS par la comparaison de validation. Cherif et al [53] ont développé une méthode pour l'analyse des vibrations libres de l'interaction fluide-structure, en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchique, qui donne la possibilité d'augmenter les degrés de liberté des éléments. Dans cette méthode, le comportement du liquide est décrit par les seuls déplacements. La vibration induite par l'écoulement

des tuyaux due à l'écoulement interne du fluide est étudiée. Des équations ont été développées pour exprimer l'influence de l'écoulement interne du fluide sur la fréquence propre et l'amplitude de déplacement des conduites vibrantes, en 2018 par [54] Udoetok. L'approche impliquait une mécanique complexe et une analyse géométrique pour arriver à de nouvelles équations simples qui se comparent favorablement aux résultats expérimentaux. Les nouvelles équations proposées peuvent être largement utilisées pour vérifier et limiter le niveau de vibration induit par l'écoulement. Plus de lumière est apportée sur les phénomènes d'écoulement de fluide interne constant exacerbant la vibration des pipelines et des systèmes de tuyauterie. La méthode de rigidité dynamique et la méthode de transfert sont appliquées par Liet al [55] pour étudier les caractéristiques de vibration d'un tuyau Euler-Bernoulli transportant le fluide, ont appliquant cette méthode, la fréquence propre et la vitesse critique des deux types de conduites multi-travées. La méthode de rigidité dynamique et la matrice de transfert montre l'efficacité de traiter les problèmes de vibration des conduites transportant des fluides. Dahmane et al [56], [57] ont développé un programme, sous langage Matlab, pour analyser le problème de vibration libre des conduites bridées-bridées transportant un écoulement de fluide avec plusieurs paramètres en utilisant le couplage par masse ajoutée et la pression du fluide comme une force sur la longueur de la conduite. Cherchant la stabilité de la fréquence naturelle par rapport à la vitesse critique du fluide, pour des premiers modes propres de l'interaction. [58] Hamza a effectué une étude sur la stabilité vibratoire non linéaire d'un cylindre en rotation à différentes vitesses émergé dans un milieu du fluide incompressible et délimité par un cylindre externe rigide. Les hypothèses cinématiques de Sanders–Koiter sont utilisées pour déterminer les équations structurelles géométriquement non linéaires du mouvement. Les équations du fluide sont déterminées en utilisant les équations linéarisées de Navier-Stokes. Les résultats montrent qu'il y a un échange d'énergie d'onde progressive. Cette étude vise à étudier les caractéristiques dynamiques non linéaires de cylindres annulaires couplés à un milieu fluide pour identifier les paramètres effectifs sur les marges de stabilité à différentes vitesses de rotation. Pour cela, la stabilité et les vibrations non linéaires des coques cylindriques en rotation contenant un fluide annulaire incompressible sont

prises en compte. Ces équations sont ensuite utilisées pour étudier les vibrations d'amplitude finie de diverses coques chargées de fluide à différents états. Une approche de pénalité est introduite en utilisant des ressorts aux limites avec une rigidité arbitraire pour simuler n'importe quel ensemble souhaité de conditions finales. Les modes vibratoires sont inclus dans l'algorithme pour contrôler la réponse de l'onde progressive. Les équations fluides sont déterminées en utilisant les équations linéarisées de Navier-Stokes. Les deux ensembles d'équations gouvernantes sont couplés par la condition d'imperméabilité à l'écoulement sur l'interface de la coque interne et la condition de vitesse nulle des particules de fluide sur la limite externe. Les solutions numériques non linéaires aux coques en rotation avec une charge de fluide extrême sont réalisées par la technique d'intégration directe de Runge – Kutta. Le nombre minimum de modes pilotés/accompagnés est déterminé et les résultats sont vérifiés avec la littérature disponible. Les résultats montrent que l'échange d'énergie significatif qu'il y a un échange entre les modes circonférentiel et longitudinale qui, donne une réponse d'onde progressive dans les configurations de coque en rotation.

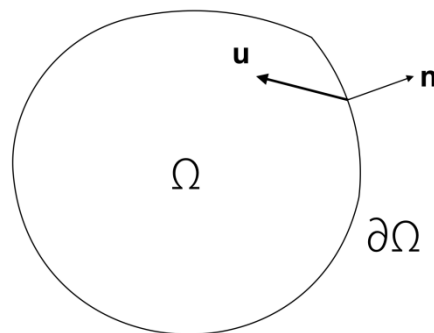
La méthode des éléments finis est aujourd'hui l'outil de calcul le plus utilisé, dans les applications scientifiques et d'ingénierie. La méthode des éléments finis trouve son origine vers l'année 1950, avec les ouvrages de référence de Courant [59], Argyris [60] et Clough [61]. De nombreux livres sur les éléments finis sont disponibles, tels que les livres de Reddy [62], Onate [63], Zienkiewicz [64], Hughes [65], Hinton [66], pour n'en citer que quelques-uns. Certains ouvrages récents traitent de l'analyse par éléments finis avec des codes MATLAB [67], [68]. L'utilisation de ces fonctions pour effectuer des opérations symboliques, pour développer des expressions de forme fermée pour les solutions aux équations algébriques, aux équations différentielles ordinaires de Matlab Basics et aux systèmes d'équations a été présentée. Les mathématiques symboliques peuvent également être utilisées pour déterminer des expressions analytiques pour la dérivée et l'intégrale d'une expression.

*CHAPITRE II*

---

### I.1. Dynamique du fluide.

Le mouvement du fluide dans le domaine physique est entraîné par divers paramètres. Dans le but de mettre en lumière le comportement dynamique d'un écoulement et de développer un modèle mathématique, ses propriétés doivent être définies précisément de manière à assurer une transition entre le domaine physique et le domaine numérique. Bilan de quantité de mouvement dans un milieu continu La variation temporelle de la quantité d'un mouvement d'un élément de fluide de volume  $\Omega$  bornée par une surface  $\partial\Omega$  (Figure II-1) est donnée par la somme de trois termes :



**Figure II-1** : Volume de contrôle pour le bilan de quantité de mouvement.

- le flux net de quantité de mouvement traversant la surface  $\partial\Omega$ .
- la somme des forces en volume agissant sur  $\Omega$ .
- la somme des forces de surface agissant sur  $\partial\Omega$ .

La vitesse, la pression, la température, la densité et la viscosité sont les propriétés principales qui doivent être prises en compte simultanément lors d'écoulement de fluide. Conformément aux phénomènes physiques tels que la combustion, l'écoulement multi- phase, la turbulence, le transport de masse, etc., ces propriétés se diversifient énormément et peuvent être classées en propriétés cinématiques, de transport, thermodynamiques et autres propriétés diverses.

### II.2. Equations de Navier-Stokes comme modèle pour les flux incompressibles :

Les équations de base de la dynamique des fluides sont appelées équations de Navier-Stokes. Dans le cas d'un écoulement isotherme, c'est-à-dire un écoulement à température constante, ils représentent deux lois physiques de conservation ; la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement linéaire. Il existe différentes manières de dériver ces équations. Le flux est décrit avec les

variables qui sont supposées être des fonctions suffisamment lisses dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  et le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

- $\rho(t, x)$ : Masse volumique [ $kg/m^3$ ],
- $v(t, x)$ : vitesse [m/s],
- $P(t, x)$ : pression [ $Pa=N/m^2$ ],

Les équations de Navier-Stokes (N-S) [68] sont le modèle mathématique largement appliqué pour examiner les changements sur ces propriétés au cours des interactions dynamiques et/ou thermiques. Les équations sont ajustables en fonction des problèmes à simuler et sont exprimées sur la base des principes de conservation de la masse, quantité de mouvement et l'énergie:

- Conservation de la masse : équation de continuité.
- Conservation de la quantité de mouvement : deuxième loi de Newton.
- Conservation de l'énergie : première loi de la thermodynamique ou équation de l'énergie.

Bien que certaines sources spécifient l'expression des équations de Navier-Stokes uniquement pour la conservation de la quantité de mouvement, certaines d'entre elles utilisent également toutes les équations de conservation des propriétés physiques. Ce qui concerne les conditions limite d'un écoulement, les équations N-S sont réarrangées pour fournir des solutions optimales.

### II.3. Conservation de masse

La quantité de mouvement dans un volume de contrôle est maintenue constante, ce qui implique la conservation de la quantité de mouvement que nous appelons « Equations de Navier-Stokes ». La description est établie conformément à l'expression de la deuxième loi du mouvement de Newton :

#### Remarque :

Chaque fluide que nous considérons est doté d'une densité non négative, généralement notée  $\rho$ , qui est dans le cadre eulérien une fonction scalaire de  $(x, t)$ .

Loi générale de la conservation : Soit  $V$  un volume arbitraire ouvert dans  $\Omega$  dans surface définie comme  $\partial V$ , qui est constant dans le temps, et la masse. L'eau a une densité d'environ 1 gramme par centimètre cube. Pour l'air, la densité est d'environ

$10^{-3}$  grammes par centimètre cube, mais bien sûr la pression et la température affectent de manière significative la densité de l'air. L'air d'une pièce de mille mètres cubes =  $10^9$  centimètres cubes pèse environ mille kilogrammes, soit plus d'une tonne !

$$m(t) = \int_V \rho(t, X) dV, [Kg] \quad (\text{II-1})$$

Si la masse en  $V$  est conservée, le taux de variation de la masse en  $V$  doit être égal au flux de masse  $v(t, x)$  [ $kg/(m^2s)$ ] à travers la frontière  $\partial V$  de  $V$ .

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, X) dV = - \int_{\partial V} (\rho V)(t, s) \cdot n(s) ds \quad (\text{II-2})$$

Où  $n(s)$  est l'unité de pointage vers l'extérieur normale sur  $S \in \partial V$ . Puisque toutes les fonctions sont supposées suffisamment lisses, le théorème de divergence peut être appliqué (intégration par parties), ce qui donne.

$$\int_V \nabla \cdot (\rho V)(t, X) dX = \int_{\partial V} (\rho V)(t, s) \cdot n(s) ds \quad (\text{II-3})$$

L'insertion de cette identité dans (II-2) conduit, que  $V$  est un volume arbitraire, il s'ensuit :

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) \right) (t, X) = 0 \quad \forall t \in (0, T), X \in \Omega \quad (\text{II-4})$$

C'est la première équation mathématique de la dynamique des fluides, appelée équation de continuité.

### Remarque

Si le fluide est incompressible et homogène, c'est-à-dire composé d'un seul fluide, alors  $\rho(t, X) = \rho_0 > 0$  et (II.4) devienne :

$$(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) = \nabla \cdot V(t, X) = 0 \quad \forall t \in [0, T], x \in \Omega \quad (\text{II-5})$$

Avec

$$V(t, X) = \begin{pmatrix} v_1(t, X) \\ v_2(t, X) \\ v_3(t, X) \end{pmatrix}$$

Ainsi, la conservation de la masse pour un fluide homogène incompressible impose une contrainte sur la vitesse uniquement.

## II.4. Conservation du mouvement

Loi générale de conservation du mouvement : La conservation du mouvement est la loi fondamentale de la mécanique. Cette loi de conservation résulte de l'homogénéité de l'espace par rapport à la fonction lagrangienne en mécanique newtonienne. Cependant, nous écrivons d'abord l'équation du mouvement d'une particule fluide de masse  $\rho \delta V$  sous la forme,  $(\rho \delta V) (\text{Accélération}) = (\text{force})$ .

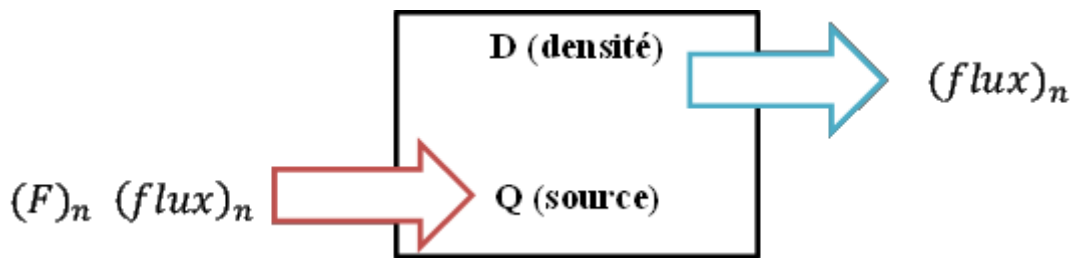


Figure II-2 : Conservation.

### II.4.1. Conservation du mouvement linéaire :

La conservation de la quantité de mouvement est une loi générale de la physique selon laquelle la quantité appelée quantité de mouvement qui caractérise le mouvement ne change jamais dans une collection isolée d'objets ; c'est-à-dire que la quantité de mouvement totale d'un système reste constante. La quantité de mouvement est égale à la masse d'un objet multipliée par sa vitesse et équivaut à la force nécessaire pour arrêter l'objet en une unité de temps. Pour tout tableau de plusieurs objets, la quantité de mouvement totale est la somme des quantités de mouvement individuelles. Il y a une particularité, cependant, dans le fait que la quantité de mouvement est un vecteur, impliquant à la fois la direction et l'amplitude du mouvement, de sorte que les quantités de mouvement des objets allant dans des directions opposées peuvent s'annuler pour donner une somme globale de zéro.

#### Remarque

La deuxième loi du mouvement de Newton. La conservation de la quantité de mouvement linéaire est formulée par la deuxième loi du mouvement de Newton pour les écoulements du fluide ou chaque force liée aux masses et accélération comme suit :

$$\text{Force} = \text{masse} \times \text{accélération}$$

Il indique que le taux de changement de la quantité de mouvement linéaire doit être égal à la force nette agissant sur une collection de particules fluides. Si  $f(x, t)$  est la

force agissant sur le fluide, par unité de volume, alors on a immédiatement la conservation de la masse avec  $q = 0$ .

$$\rho \frac{Du}{Dt} = F \quad (\text{II-6})$$

Puisque nous avons vu que  $Du/Dt$  est l'accélération du fluide, (II-5) la loi de Newton à laquelle la masse multipliée par l'accélération égale la force, on obtient la forme lagrangienne (II-6), et peut être écrite sous la forme :

$$\rho \left. \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right|_a = F \quad (\text{II-7})$$

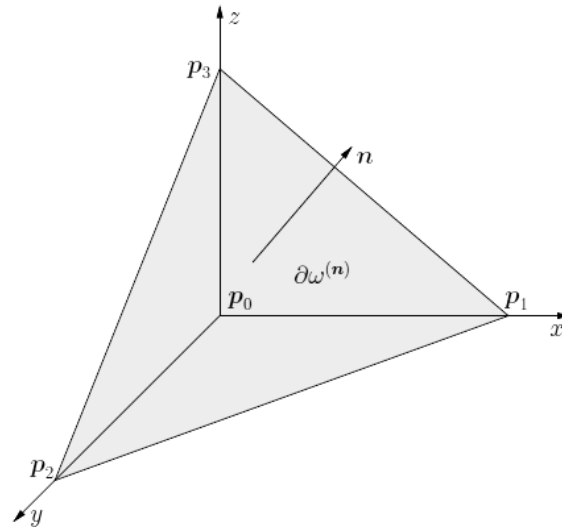
Les principaux problèmes liés à la conservation de la quantité de mouvement sont ceux liés aux forces qui s'exercent sur un volume  $v$  du fluide. Il existe de nombreuses forces possibles à considérer : pression, gravité, viscosité, tension superficielle, électromotrice, etc. Chacune a une origine physique et un modèle mathématique avec un ensemble d'observations et d'analyses à l'appui. Dans le présent chapitre, nous ne considérons qu'un fluide idéal. La seule nouvelle variable de fluide que nous devons introduire est la pression, une fonction scalaire  $p(x, t)$ .

En général, la force  $F$  apparaissant en (II-5) on suppose prendre la forme suivante :

$$F_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-8})$$

Les forces agissant sur un volume  $V$  sont composées de forces externes (corps) et de forces internes. Les forces externes comprennent, par exemple, la gravité, la flottabilité et les forces électromagnétiques (dans les métaux liquides). Ces forces sont rassemblées dans un terme de force corporelle.

Le fondement de la mécanique des milieux continus est le principe de contrainte de Cauchy. L'idée de Cauchy sur les forces de contact internes est que sur tout plan (imaginaire) sur  $dV^n = dw^n$ , il y a une force qui ne dépend (géométriquement) que de l'orientation du plan. Ainsi, c'est  $t=t(n)$ , où  $n$  est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur du plan imaginaire.



**Figure II-3 :** vecteur contrainte de Cauchy sur la normale

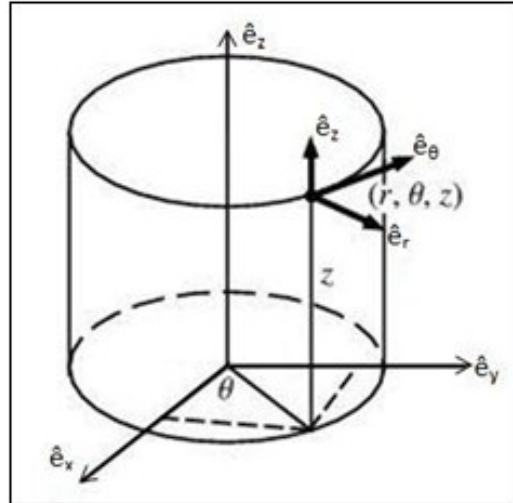
Les forces internes d'un fluide sont des forces de contact, c'est-à-dire qu'elles agissent sur la surface d'un élément fluide  $U$ . Soit  $t$  [N/m<sup>2</sup>] ce vecteur d'effort interne, qui est appelé vecteur de contrainte de Cauchy ou vecteur de torsion, alors la contribution des efforts internes sur  $U$  est

$$\frac{DU}{Dt}(t, x) = \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) + (U(t, x) \cdot \nabla)U(t, x) \quad (\text{II-9})$$

L'équation de la quantité de mouvement de Cauchy est une équation aux dérivées partielles vectorielle proposée par Cauchy qui décrit le transport de quantité de mouvement non relativiste dans tout continuum. Elle exprime la deuxième loi de Newton et sous forme convective (ou Lagrangienne) elle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma + g \quad (\text{II-10})$$

Où  $\rho$  est la densité au point considéré dans le continuum (pour lequel l'équation de continuité est vraie),  $\sigma$  est le tenseur des contraintes, et  $g$  contient toutes les forces corporelles par unité de masse (souvent simplement l'accélération gravitationnelle). Dans l'équation de Cauchy,  $u$  est le champ vecteur vitesse d'écoulement, qui dépend du temps et de l'espace. On veut écrire les termes de l'équation (II-9)) en coordonnées cylindriques.



**Figure II-4:** Système des coordonnées cylindriques avec vecteurs unitaires

Tout d'abord, nous écrivons le vecteur de vitesse d'un écoulement en coordonnées cylindriques : Figure II-4:

$$v(r, \theta, z, t) = v_r(r, \theta, z, t)e_r + v_\theta(r, \theta, z, t)e_\theta + v_z(r, \theta, z, t)e_z \quad (\text{II-11})$$

Où  $\{e_r, e_\theta, e_z\}$  les trois vecteurs unitaires droits, la dérivée matérielle s'écrit avec le symbole D en dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} e_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial t} e_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial t} e_z \quad (\text{II-12})$$

En utilisant la définition des vitesses  $v_r = dr/dt$ ,  $v_\theta/r = d\theta/dt$  et  $v_z = dz/dt$ , nous pouvons évaluer les termes restants de l'équation. (II-11) Comme suit :

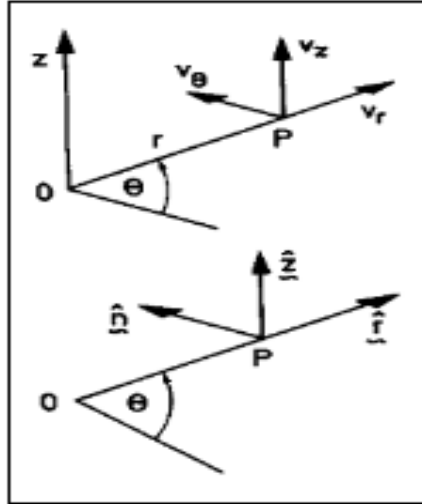
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{II-13})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{\partial v}{\partial r} &= v_r \frac{\partial v}{\partial r} = v_r \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} e_r + v_r \frac{\partial e_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} e_\theta + v_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v_z}{\partial r} e_z + v_z \frac{\partial e_z}{\partial r} \right] = v_r \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} e_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} e_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r} e_z \right] \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{v_\theta}{r} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \theta} e_r + v_r \frac{\partial e_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} e_\theta + v_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} e_z + v_z \frac{\partial e_z}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{v_\theta}{r} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \theta} e_r + v_r e_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} e_\theta + v_\theta (-e_r) + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} e_z \right] \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= v_z \frac{\partial v}{\partial \theta} = v_z \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} e_r + v_z \frac{\partial e_r}{\partial z} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} e_\theta + v_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} e_z + v_z \frac{\partial e_z}{\partial z} \right] \quad (\text{II-16}) \\ &= v_z \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} e_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} e_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} e_z \right] \end{aligned}$$



**Figure II-5:** Vecteurs de vitesse en coordonnées cylindriques

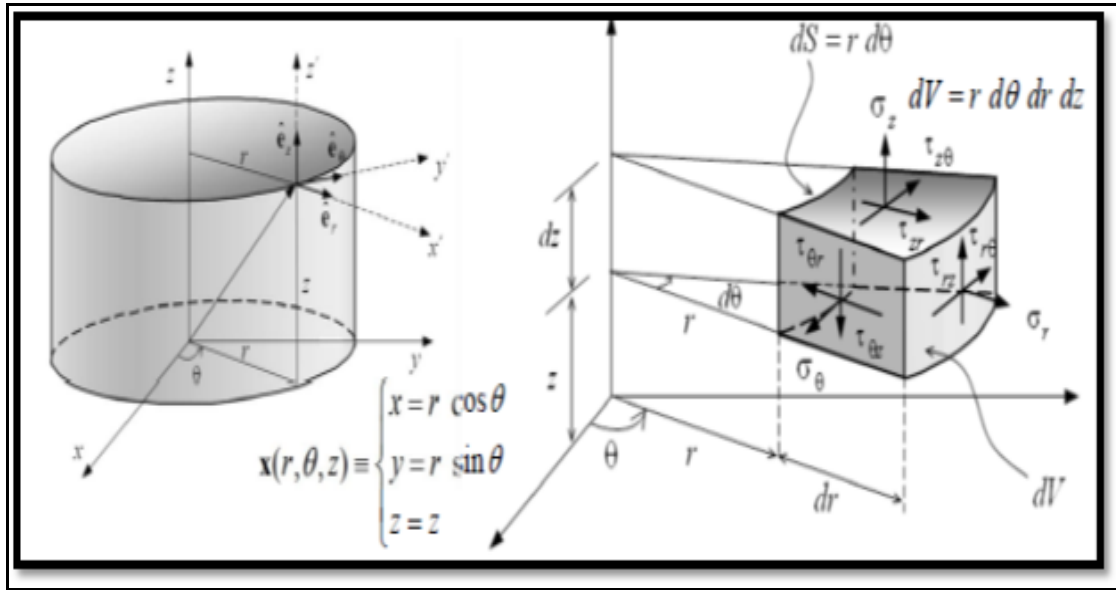
En rassemblant tous les termes qui sont multipliés par le même vecteur unitaire, nous pouvons écrire la dérivée matérielle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &= \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] e_r \\ &\quad + \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] e_\theta \\ &\quad + \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] e_z \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

L'approximation linéaire consiste à approximer une fonction générale à l'aide d'une fonction linéaire. Étant donné une fonction scalaire dérivable  $f(x)$  de la variable réelle  $x$ , l'approximation linéaire de la fonction au point  $a$ , par  $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ .

## II.5. Tenseur de contrainte

On veut évaluer ici le terme  $\nabla \cdot \sigma$  apparaissant dans l'équation du moment de Cauchy en coordonnées cylindriques. À cette fin, nous calculons le terme pour un volume infinitésimal, représenté sur (II-6).



**Figure II-6:** Contraintes dans un plan orthogonal aux directions  $(r, \theta, z)$

En sommant toutes les contributions dans la direction  $r$  données par les contraintes aux faces du volume de contrôle on a :

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \delta r \right) (r + \delta r) \delta \theta \delta z - \sigma_{rr} r \delta \theta \delta z + \left( \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \delta \theta \right) \delta r \delta z \cos \frac{\delta \theta}{2} - \sigma_{r\theta} \delta r \delta z \cos \frac{\delta \theta}{2} \\ & + \left( \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \delta z \right) \left( r + \frac{\delta r}{2} \right) \delta r \delta \theta - \sigma_{rz} \left( r + \frac{\delta r}{2} \right) \delta r \delta \theta \\ & - \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \delta \theta \right) \delta r \delta z \sin \frac{\delta \theta}{2} - \sigma_{r\theta} \delta r \delta z \sin \frac{\delta \theta}{2} \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

En annulant certains termes, en divisant par le volume  $r \delta r \delta \theta \delta z$  et en laissant  $\delta r, \delta \theta$  et  $\delta z$  atteindre zéro, cela donne :

$$\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (\text{II-19})$$

On trouve de la même façon pour la direction  $\theta$  :

$$\frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \quad (\text{II-20})$$

On trouve de la même façon pour la direction  $z$  :

$$\frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (\text{II-21})$$

On peut ainsi écrire le terme de contrainte dans l'équation. (II-9) de la manière suivante Figure II-6:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma = & \left( \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) e_r + \left( \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) e_\theta \\ & + \left( \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) e_z \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

## II.6. Contrainte-déformation :

Notre définition d'un fluide est que s'il est soumis à des forces, ou à des contraintes qui n'entraîneront pas de changement de volume, il doit se déformer et ainsi il ne peut rester au repos. Il s'ensuit que dans un fluide au repos le tenseur des contraintes ne doit pas avoir que des termes diagonaux. De plus, le tenseur des contraintes devrait être diagonal dans n'importe quel système de coordonnées. Comme nous l'avons vu dans le dernier chapitre, le seul tenseur des contraintes du second ordre qui est diagonal dans tous les référentiels est celui dans lequel chaque élément diagonal est le même. Nous définissons cette valeur comme pression statique et dans ce cas le tenseur des contraintes est juste.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (\text{II-23})$$

Cela découle également du fait que  $\delta_{ij}$  est le seul tenseur isotrope du second ordre, c'est-à-dire le seul tenseur dont les éléments sont les mêmes dans tous les référentiels de coordonnées.

Pour un fluide au repos, la pression est aussi la pression thermodynamique, c'est-à-dire une variable d'état déterminée, disons, par la température et la densité. Lorsque le fluide se déplace, la pression, définie comme la force normale moyenne sur un élément fluide, n'a pas besoin d'être la pression thermodynamique et nous devons considérer cela plus en détail ci-dessous. La contrainte normale moyenne est :

$$\sigma_{ij}/3 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (\text{II-24})$$

L'effet des contraintes dans un écoulement continu peut être représenté par les termes suivant :  $\nabla P$  et  $\nabla \tau$  ; ce sont des gradients de forces sur la surface, analogues aux contraintes dans un solide. Ici,  $\nabla P$  est appelé gradient de pression et provient de la partie isotrope du tenseur des contraintes de Cauchy, qui est d'ordre deux. Cette partie est donnée par des contraintes normales qui se présentent dans presque toutes les situations, dynamiques ou statiques. La partie anisotrope du tenseur des contraintes

donne lieu à  $\nabla\tau$ , qui d'écrit classiquement les forces visqueuses ; pour un écoulement incompressible, il ne s'agit que d'un effet de cisaillement. Ainsi, est le tenseur des contraintes asymétrique, et le tenseur des contraintes est égal à :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{II-25})$$

Où  $\tau_{ij}$  est appelée la contrainte déviatorique. Il est simplement défini comme la différence entre la pression et le tenseur de contrainte totale et notre tâche suivante consiste à le relier au mouvement du fluide. Notez que si nous définissons la pression comme une contrainte normale moyenne alors la trace du tenseur de contrainte déviatorique,  $\tau_{ij}$  est nulle.

Si la pression est ainsi définie, nous ne pouvons pas alors garantir qu'elle est égale à la pression thermodynamique et nous devons représenter la différence des deux également en termes de mouvement du fluide. Si, par contre, on définit la pression comme la pression thermodynamique alors la trace de  $\tau_{ij}$  n'est pas nulle. Bien sûr, puisque c'est une question de choix que nous faisons, les équations finales seront les mêmes. Les tenseurs de cisaillement d'un fluide incompressible à viscosité constante, le tenseur de cisaillement peut s'écrire :

$$\tau = \mu(\nabla v + \nabla v^T) \quad (\text{II-26})$$

Le gradient du vecteur  $u$  est un tenseur, qui peut être représenté comme un produit dyadique du vecteur avec l'opérateur gradient, [69] le résultat final, exprimé en tenseur, est

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{II-27})$$

Adoptons le repère cylindrique,  $r, \theta, z$ . En utilisant, les composantes du tenseur des contraintes [70] sont :

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{II-28})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (\text{II-29})$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (\text{II-30})$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) \quad (\text{II-31})$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{II-32})$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-33})$$

On considère un écoulement Newtonien [71] isotherme incompressible suivant des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (densité  $\rho = \text{constante}$ , viscosité  $\mu = \text{constante}$ ), avec un champ de vitesse  $\vec{V} = (v_r, v_{\theta}, v_z)$  ou l'équation de continuité incompressible :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-34})$$

Pour un fluide incompressible le terme entre les crochets est égal zéro (équation de continuité) et donc, en combinant le résultat précédent avec l'Eq. (II-9) nous pouvons écrire l'équation de quantité de mouvement suivante pour la composante radiale de la vitesse [72], [73] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}^2}{r} + u_r \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ -\frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) \right\} + g_r \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

De la même manière, nous pouvons dériver les équations de quantité de mouvement pour la composante  $\theta$  de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + u_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r v_{\theta}}{r} + v_z \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ -\frac{v_{\theta}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \\ + g_{\theta} \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

Et pour la composante  $z$  :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} + g_z \quad (\text{II-37})$$

L'équation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes peut être dérivée comme une forme particulière de l'équation de la quantité de mouvement de Cauchy, dont la forme convective en coordonnée cylindrique générale est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + F + \nu \nabla^2 v$$

Accélération locale	Accélération advection	Force gradient de pression	Force corps	Force de viscosité
------------------------	---------------------------	-------------------------------	----------------	-----------------------

### II.7. Equation Euler en forme vectorielle :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (\text{II-38})$$

Avec :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{II-39})$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II-40})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{II-41})$$

On considère un écoulement Newtonien [74] isotherme incompressible (densité  $\rho = \text{constante}$ , viscosité  $\mu = \text{constante}$ ), avec un champ de vitesse  $\vec{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$ .

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \quad (\text{II-42})$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \quad (\text{II-43})$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (\text{II-44})$$

## II.8. Équation de Navier-Stokes :

### II.8.1. Vecteur de forme :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[ -\frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-45})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[ -\frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-46})$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-47})$$

### II.8.2. Discrétisation de l'équation du Navier-Stokes :

Un autre grand avantage de la FEM est offert [75] par sa capacité à traiter naturellement les conditions aux limites. De plus, les domaines multi-connectés sont traités facilement. Par rapport aux algorithmes basés sur FDM, les algorithmes basés sur FEM sont plus complexes et donc plus coûteux en calcul lorsqu'ils sont utilisés pour résoudre le même problème avec la même résolution uniformément élevée, par exemple. Pourtant, Le temps de calcul FEM peut être considérablement réduit en diminuant la résolution dans les zones où elle est inutilement élevée, c'est pour cette raison nous utilisons la méthode des éléments finis hiérarchique (HFEM) qui n'est pas applicable sur la dynamique du fluide comme méthode numérique en résolution.

Le mouvement du fluide à faible et moyenne vitesse dans un domaine de calcul connexe  $\Omega \subset R^d$  (dimension spatiale  $d=2,3$ ) est donné par les équations incompressibles de Navier–Stokes

$$\rho(v_t + v \cdot \nabla v) - \nabla \cdot (2\mu \varepsilon(v)) + \nabla p = \rho f \quad (\text{II-48})$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (\text{II-49})$$

Avec  $\varepsilon(v)$  gradient de la vitesse.

Les équations de Navier–Stokes (II-48)– (II-49) dépendent à la fois de l'espace et du temps. La plupart des approches de discrétisation divisent l'approximation en approximations distinctes pour la partie spatiale et temporelle. Pour établir

l'approximation spatiale EF, la première étape consiste à réécrire le système d'équations (II-48)– (II-49) sous forme variationnelle.

On l'appelle aussi méthode des éléments finis mixtes. Afin de présenter comment traiter cette difficulté, rappelons que la pression agit comme un multiplicateur lagrangien de la contrainte d'incompressibilité. Ensuite, le système algébrique pour les valeurs nodales de vitesse et de pression dans une formulation de Galerkin [76] sera régi par une matrice partitionnée avec une sous-matrice nulle sur la diagonale. La solution du système algébrique dépend d'un choix approprié d'espaces d'éléments finis pour la vitesse et la pression. Afin de mieux comprendre comment traiter la difficulté de la condition d'incompressibilité, la procédure de la méthode des éléments finis basée sur la formulation de variables primitives sera présentée étape par étape. Nous commençons par la discrétisation de l'équation de Navier-Stokes incompressible en forme faible en utilisant la formulation faible. Ensuite, la sélection des espaces d'éléments finis pour la vitesse et la pression sera discutée.

*Étape 1* : Discrétiser en forme faible, commençons par la discrétisation des équations (II-34), **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**. Les modèles éléments finis de ces équations seront développés dans leurs formes faibles. Sont déterminées à partir de ces équations sur un élément typique du domaine avec l'application de la méthode de Galerkin (PTV) [77].

$$w = \int_{\Omega} (\Psi f(v) + F) d\Omega = 0 \quad (\text{II-50})$$

$$w = \sum w_i^e \quad \text{avec} \quad w = w_{N-S} + w_{\text{continuité}} \quad (\text{II-51})$$

$$\begin{aligned} w_{N-S} = & \int_{\Omega} \rho \left( \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left( v_r \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho \left( v_{\theta} \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) d\Omega - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho \left( \Psi_r v_{\theta}^2 \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \left( v_r \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left( v_r \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho \left( v_{\theta} \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho \left( v_r \Psi_{\theta} v_{\theta} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \left( v_z \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \left( \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left( v_r \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho \left( v_{\theta} \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left( v_z \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II-52})$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_r \frac{v_r}{r^2} \right) d\Omega - \frac{1}{r^3} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right) d\Omega - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) d\Omega - \frac{2}{r^3} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu (\Psi_{\theta} v_{\theta}) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial z^2} \right) d\Omega \\
& \quad + \frac{2}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left( \Psi_r \frac{\partial p}{\partial r} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \Psi_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\Omega \\
& - \rho g_r \int_{\Omega} (\Psi_r) d\Omega + \rho g_{\theta} \int_{\Omega} (\Psi_{\theta}) d\Omega + \rho g_z \int_{\Omega} (\Psi_z) d\Omega
\end{aligned}$$

$$W_{cont} = \int_{\Omega} \left( \Psi_p \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( \Psi_p \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \Psi_p \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\Omega \quad (II-53)$$

$$\begin{aligned}
W_{N-s} &= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_r v_r) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_r \left( \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho v_{\theta} \left( \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) d\Omega \\
&\quad - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho u_{\theta} (\Psi_r v_{\theta}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_r \left( \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_{\theta} v_{\theta}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_r \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho v_{\theta} \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho v_r (\Psi_{\theta} v_{\theta}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_z \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_z v_z) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_r \left( \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho v_{\theta} \left( \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho v_z \left( \Psi_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\Omega \quad (II-54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu (\Psi_r v_r) d\Omega - \frac{1}{r^3} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) d\Omega - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) d\Omega \\
&\quad - \frac{2}{r^3} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu (\Psi_{\theta} v_{\theta}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) d\Omega \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) d\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left( \Psi_r \frac{\partial p}{\partial r} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( \Psi_{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \Psi_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\Omega \\
& \quad - \rho g_r \int_{\Omega} (\Psi_r) d\Omega + \rho g_{\theta} \int_{\Omega} (\Psi_{\theta}) d\Omega + \rho g_z \int_{\Omega} (\Psi_z) d\Omega \\
W_{cont} & = \int_{\Omega} \left( \Psi_p \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( \Psi_p \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \Psi_p \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\Omega \quad (II-55)
\end{aligned}$$

**Etape 2 :** Sélection de la fonction approchée, étant donné que les équations incompressibles de Navier Stokes ont déjà été discrétisées en forme faible, la sélection des fonctions approchées en ces formes faibles sera discutée dans cette section. Comme nous l'avons mentionné, la solvabilité du système algébrique dépend d'un choix approprié d'espaces d'éléments finis pour la vitesse et la pression. A partir de ces conditions, le choix des fonctions de pondération doit être restreint aux espaces des fonctions d'approximation utilisées pour les champs de pression et de vitesse. Ainsi, il est clair que les variables dépendantes de  $v_r, v_{\theta}, v_z$  et  $p$  sont approximées par la forme d'expansions [78].

### II.8.3. Exemples standard de méthodes d'éléments finis :

Cette liste d'exemples n'a pas vocation à être exhaustive de toutes les méthodes d'éléments finis possibles : voir [64] Zienkiewicz (1971) ou Ciarlet (1975) pour plus d'exemples : nous ne voulons donner que des exemples illustratifs qui apparaîtront utiles dans des applications de mécanique des fluides.

Dans un premier temps, nous allons appliquer la méthode des résidus pondérés, de manière à transformer notre problème différentiel en une équation intégrale sur le domaine  $\Omega$ . L'existence de deux ensembles différents d'inconnues dans les équations à résoudre et la nécessité de vérifier à la fois les dynamiques et les équations de continuité dans ces problèmes, nous amènent aux problèmes dits d'éléments finis mixtes. Plusieurs approches par éléments finis peuvent être envisagées, selon la manière dont les équations constitutives (dynamique) et d'équilibre (continuité) sont traitées. Parmi ces méthodes, nous utiliserons les techniques mixtes, de pénalité et

ségrégées. Ce sont les trois principales techniques disponibles, dans lesquelles de nombreux auteurs s'accordent à scinder le traitement par éléments finis des problèmes d'écoulement visqueux incompressibles [Kim 88], [Choi 94]. Une explication complète de ces approches et la justification de leur utilisation seront données dans les sections suivantes.

Introduisons maintenant la formulation par éléments finis des équations mixtes de Navier-Stokes. En multipliant nos équations différentielles par un ensemble de fonctions de pondération  $w_i$ ,  $q$  appartenant à  $H^1$  et en intégrant les équations sur le domaine, on obtient les équations suivantes :

$$\int_{\Omega} w_i \left( v_{i,t} + v_j v_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_i - f_i - \nu w_i v_{i,j} \right) d\Omega = 0 \quad (\text{II-56})$$

$$\int_{\Omega} q v_{i,j} d\Omega = 0 \quad (\text{II-57})$$

qui constitue une équation intégrale qui résout (II-55), ayant à la fois  $v_i$  et  $p$  comme inconnues. Maintenant, les distributions de pression et de vitesse doivent être calculées. On peut mentionner ici qu'une attention sérieuse doit être accordée au choix des fonctions d'interpolation pour les fonctions de pression et de flux. Pour obtenir le même ordre d'approximation pour les fonctions de flux et la pression, les fonctions d'interpolation pour les fonctions de flux doivent être supérieures d'un ordre aux fonctions d'interpolation pour la pression.

### II.8.3.1. *Espaces d'éléments finis :*

Il est donc souhaitable d'employer une interpolation de pression discontinue, car cela permet d'éliminer les inconnues nodales de pression au niveau de l'élément comme les couples en vitesse-pression qui doivent satisfaire la condition de stabilité de Babuska-Brezzi. Nous avons utilisé le type d'élément  $Q_2^-/P_0$  dans le code informatique présenté dans la Figure II-7. En utilisant les espaces d'éléments finis pour  $N_{nv}$  nombre des nœuds de chaque élément avec des inconnues de vitesse (interpolation  $C^0$  standard) et  $N_{gp}$  le nombre de nœuds de pression dans chaque élément (interpolation  $C^1$ ). Concernant le schéma pour le cas 2D ou 3D avec les nœuds des inconnues de vitesse représentés par un cercle et les nœuds des inconnues de pression par un triangle. Commentons maintenant quelques propriétés des éléments de la Figure II-7

concernant leur convergence pour les écoulements pour les équations transitoires de Navier-Stokes.

Type élément	$N_{nv} - N_{gp}$ (2D/3D)	Description	Elément (2D /3D)
$Q_1/P_0$	4/8 - 1/1	-Vitesse continue bi- ou tri-linéaire. -Pression constante par morceaux.	
$Q_2^-/P_0$	8/20 - 1/1	-Interpolation de la vitesse du hasard. -Pression constante à la pièce.	
$Q_2/P_1$	9/27 - 3/4	-Vitesse continue bi- ou tri-quadratique. -Pression constante à la pièce.	
$P_2/P_0$	6/10 - 1/1	-Vitesse quadratique continue. -Pression constante à la pièce.	
$P_2^+/P_1$	7/15 - 3/4	-Vitesse quadratique continue enrichie de fonctions bulle. -Pression linéaire par morceaux.	

Figure II-7 : Quelques éléments finis à pression discontinue [79]

### II.8.3.2. Élément $Q_1/P_0$ :

Il s'agit de l'élément de pression à vitesse constante bilinéaire (en 2D) ou tri-linéaire (en 3D). Il ne satisfait pas la condition limite. Il existe un moyen simple de voir que cela peut fonctionner sans procédure de stabilisation particulière. Pour simplifier, considérons le cas bidimensionnel.

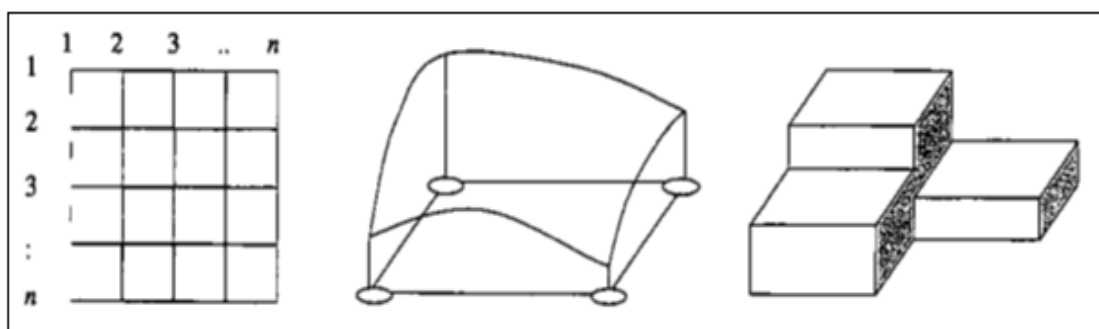


Figure II-8 : L'élément de base  $Q_1/P_0$ . Fonctions de maillage et d'interpolation pour la vitesse et la pression

La Figure II-8 montre comment un élément quadratique enrichi d'un nœud du triangle peut être décomposé en trois éléments bilinéaires. Si l'on considère une pression inconnue pour chaque quadrilatère, Lors de l'utilisation de maillages structurés, nous retrouverons la même restriction.

On peut considérer à titre d'exemple le couple Q1/Po (vitesse bilinéaire-pression constante) qui conduit à une interpolation d'ordre mixte, les vitesses étant approchées par un ensemble de fonctions continues bilinéaires, et la pression étant interpolée en termes de fonctions constantes discontinues sur chaque élément carré de base (voir Figure II-7). Dans ce cas, le nombre d'équations obtenues pour l'équation de continuité serait  $(n - 1)^2 - 1$ , et le nombre d'inconnues serait  $2(n - 2)^2$ .

D'après la Figure II-7 qui exprime l'emplacement des composantes de vitesse et de pression, il est évident que cet élément est constitué de 8 inconnues pour les vitesses et de 3 inconnues pour la pression. Ainsi, les fonctions d'interpolation quadratique représentent les composantes de vitesse tandis que la fonction d'interpolation linéaire représente la forme de la pression. Il existe un rapport  $r_e = n_{eq}/n_c$  pour la formulation mixte est la condition nécessaire et suffisante de stabilité LBB (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) aussi connue sous le nom de Babuska-Brezzi. En conséquence, les variables inconnues pour les vitesses et la pression seront représentées par 16 inconnues pour chaque élément. Ainsi, les expansions de la variable dépendante  $v_r, v_\theta, v_z$  et  $p$  sont exprimées comme :

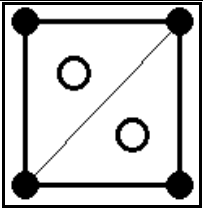
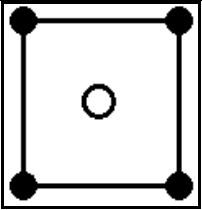
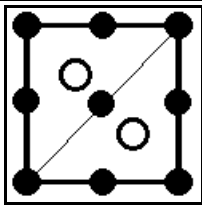
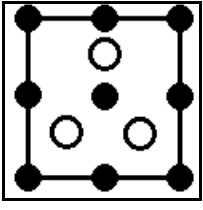
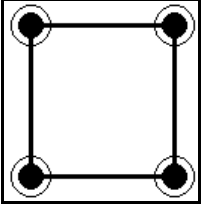
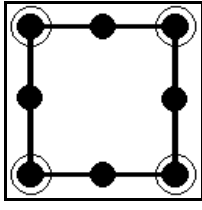
$$v_r(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N(r, \theta, z) v_i(t) \quad (\text{II-58})$$

$$v_\theta(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N(r, \theta, z) v_i(t) \quad (\text{II-59})$$

$$v_z(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N(r, \theta, z) v_i(t) \quad (\text{II-60})$$

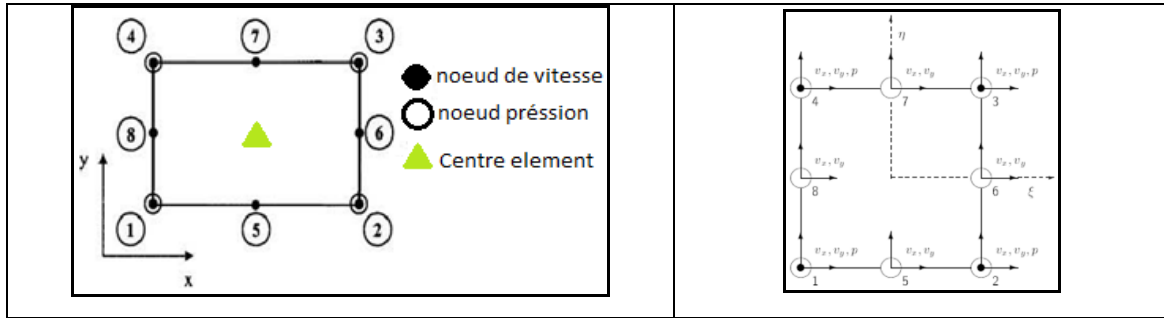
$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N(r, \theta, z) p_i(t) \quad (\text{II-61})$$

Où  $n_{eq}$  et  $n_c$  sont respectivement le nombre d'équations de vitesse (degrés de liberté) et le nombre de contraintes d'incompressibilité.

$r_e=1$	$r_e=2$	$r_e=4$
		
a	b	c
$r_e=8/3$	$r_e=2$	$r_e=6$
		
d	e	f

**Figure II-9** : Quelques éléments finis possibles pour une formulation mixte

Il existe deux types d'éléments finis quadrilatéraux utilisés en dynamique des fluides computationnelle : les éléments finis de Taylor-Hood et les éléments finis de Crouzeix-Raviart. Le premier type englobe tous les éléments finis avec une pression continue sur la frontière de l'élément, tandis que le second inclut tous ceux avec une pression discontinue et nécessite un lissage de la solution de pression résultante. Nous utilisons l'élément fini quadratique de type Taylor-Hood. Cet élément offre une interpolation mixte entre la vitesse et la pression et satisfait à la condition de stabilité de Babuska-Brezzi. Au niveau de l'élément, les composantes de vitesse sont approchées par des polynômes quadratiques (incomplets), considérés comme suffisants pour la plupart des simulations, tandis que la pression est approchée par un polynôme linéaire [80]. Il y a huit nœuds pour la vitesse et quatre nœuds pour la pression. Les nœuds de vitesse sont situés aux sommets et aux points médians de l'élément (Figure II-9). Les nœuds de pression coïncident avec les nœuds de vitesse d'angle. Ainsi, les nœuds d'angle ont 3 degrés de liberté correspondant chacun aux valeurs nodales de  $v_r, v_\theta, v_z$  et  $p$ , tandis que les nœuds médians ont 2 degrés de liberté qui correspondent aux valeurs nodales de  $v_r, v_\theta$  et  $v_z$ . La position de la vitesse et les nœuds de pression dans cet élément assurent la continuité sur la limite de l'élément.



**Figure II-10** : Élément fini quadrilatère de Taylor-Hood

Nous appliquons la méthode d'élément finie hiérarchique (MEFH) en prenant des éléments du type Taylor-Hood, avec des fonctions polynômiale légende [81] qui sont définie comme suit:

$$f_m(\xi) = \frac{1}{m! (-2)^m} \frac{d^m}{d\xi^m} \{(1 - \xi^2)^m\} - 1 \leq \xi \leq +1 \quad (\text{II-62})$$

Qui satisfont la relation d'orthogonalité  $\int_{-1}^1 f_i(\xi) f_j(\xi) d\xi = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij}$  est la fonction delta de Kronecker. Les fonctions hiérarchiques les plus couramment utilisées sont issues des polynômes de Legendre Tam H. Nguyen, Chau H. Le (2013) [82] à savoir:

$$f_m^r(\xi) = \sum_{n=0}^{m/2} \frac{(-1)^n (2m - 2n - 2s - 1)!!}{n! 2^n (m - 2n)!} \xi^{m-2n} \quad (\text{II-63})$$

Avec

$$m!! = m (m-2) \cdots (2 \text{ ou } 1), 0!! = 1 \quad (-1)!! = 1!!$$

L'orthogonalité du polynôme de Legendre Maurice Petyt [83] dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , est faite par l'intégration et que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur disparaissent à  $\xi = \pm 1$ , on obtient le résultat suivant formule numérique Babuska. I, Griebel. M [84].

### II.8.3.3. Vibration cylindrique par la méthode HFEM :

Le déplacement axial,  $u$ , est exprimé par :

$$u = \sum_{n=0}^q g_{ri}(\xi) q_{ri} \quad (\text{II-64})$$

Où  $q, p$  est le nombre de degrés de la fonction associée à l'intervalle  $-1 \leq \xi \leq 1$ , les fonctions hiérarchiques  $g_r(\xi)$ , pour  $r_i > 2$ , sont pour  $s = 1$  et  $m = (r - 1)$  dans l'équation (II-64). Cela donne:

$$g_{ri}(\xi) = \sum_{n=0}^{(ri-1)/2} \frac{(-1)^n (2m - 2n - 5)!!}{n! 2^n (ri - 2n - 1)!} \xi^{ri-2n-1} \quad (\text{II-65})$$

Le déplacement latéral,  $v$ , est exprimé par: [42]

$$v = \sum_{n=0}^p f_{ri}(\xi) q_{ri} \quad (\text{II-66})$$

Les fonctions hiérarchiques  $f_{ri}(\xi)$ , pour  $ri > 4$ , sont obtenues en mettant  $s=2$  et  $m=(ri-1)$  dans l'équation (II-66). Cela donne:

$$f_{ri}(\xi) = \sum_{n=0}^{(ri-1)/2} \frac{(-1)^n (2m - 2n - 7)!!}{n! 2^n (ri - 2n - 1)!} \xi^{ri-2n-1} \quad (\text{II-67})$$

Le h-FEM peut être utilisé pour calculer les caractéristiques de vibration, les déplacements des points d'une coque cylindrique, ou les composantes tangentielles  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $v_z$ , de la composante normale. Elles sont données par 3D:

$$\begin{cases} v_r(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^q \sum_{s=1}^p \sum_{e=1}^t g_s(\xi) g_s(\eta) g_s(\zeta) U_{ise} \\ v_\theta(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{ri=1}^q \sum_{s=1}^p \sum_{e=1}^t g_s(\xi) g_s(\eta) g_s(\zeta) V_{ise}, \\ v_z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{ri=1}^q \sum_{s=1}^p \sum_{e=1}^t g_s(\xi) g_s(\eta) g_s(\zeta) W_{ise} \end{cases} \quad (\text{II-68})$$

L'approximation conduit aux fonctions de forme suivantes écrites dans le repère local  $\{\xi, \eta\}$ :

### Quadrilatère 2D

Fonctions spatiales pour l'approximation de la composante de vitesse :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \\ N_2 &= 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \\ N_3 &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \\ N_4 &= 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \\ N_5 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6 &= 1/2 (1 - \eta^2)(1 + \xi) \\ N_7 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8 &= 1/2 (1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{aligned} \quad (\text{II-69})$$

L'approximation en HFEM de la composante de vitesse devient :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \\
 N_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi) \times \sum_{s=3}^p g_s(\eta) \\
 N_6 &= \frac{1}{2} \sum_{s=3}^p g_s(\xi) \times (1 - \eta) \\
 N_7 &= \frac{1}{2} (1 + \xi) \times \sum_{s=3}^p g_s(\eta) \\
 N_8 &= \frac{1}{2} \sum_{s=3}^p g_s(\xi) \times (1 + \eta) \\
 N_9 &= \sum_{s=3}^p g_s(\xi) \times \sum_{s=3}^p g_s(\eta) \text{ (contient la variation du element au centre)}
 \end{aligned} \tag{II-70}$$

Fonctions spatiales pour l'approximation de la pression :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\
 M_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\
 M_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\
 M_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{II-71}$$

$$\begin{aligned}
W_{N-S} = & \int_{\Omega} \rho \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \langle N \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_r \right\} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_r \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ v_r \} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho u_{\theta} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_r \} \right) d\Omega - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho u_{\theta} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \langle N \rangle \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho v_r \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_r \} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \langle N \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_{\theta} \right\} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_r \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho v_{\theta} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho v_r \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \langle N \rangle \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho v_z \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho \left( \langle N \rangle \{ \Psi_z \} \langle N \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_z \right\} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_r \left( \langle N \rangle \{ \Psi_z \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ v_z \} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho u_{\theta} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_z \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_z \} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho v_z \left( \langle N \rangle \{ \Psi_z \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_z \} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \langle N \rangle \{ v_r \} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_r \} \right) d\Omega - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_r \} \right) d\Omega - \frac{2}{r^2} \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_r \} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \langle N \rangle \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega \\
& + \frac{2}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_r \} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ \Psi_z \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ v_z \} \right) d\Omega - \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ \Psi_z \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_z \} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_z \} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_r \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ p \} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ p \} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_z \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ p \} \right) d\Omega \\
& - \rho g_r \int_{\Omega} \langle N \rangle \{ \Psi_r \} d\Omega + \rho g_{\theta} \int_{\Omega} \langle N \rangle \{ \Psi_{\theta} \} d\Omega + \rho g_z \int_{\Omega} \langle N \rangle \{ \Psi_z \} d\Omega
\end{aligned} \tag{II-72}$$

$$W_{cont} = \int_{\Omega} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_p \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \{ v_r \} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_p \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \theta} \{ v_{\theta} \} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \langle N \rangle \{ \Psi_p \} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial z} \{ v_z \} \right) d\Omega \tag{II-73}$$

$$\begin{aligned}
W_{N-S} = & \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \langle (N)\rho(N)^T \rangle d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_r \right\} + \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T v_r \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{v_r\} + \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T v_{\theta} \frac{1}{r} \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_r\} - \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T v_{\theta} \frac{1}{r} \langle (N)\rho(N)^T \rangle d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T v_r \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_r\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \langle (N)\rho(N)^T \rangle d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_{\theta} \right\} + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T v_r \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T v_{\theta} \frac{1}{r} \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T v_r \frac{1}{r} \langle (N)\rho(N)^T \rangle d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T v_z \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T \langle (N)\rho(N)^T \rangle d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_z \right\} + \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T v_r \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{v_z\} + \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T v_{\theta} \frac{1}{r} \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_z\} + \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T v_z \left\langle (N)\rho \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_z\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \frac{1}{r^2} \langle (N)\mu(N)^T \rangle d\Omega \{v_r\} - \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial \theta} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_r\} - \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial z} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_r\} - \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\langle (N)\mu \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_r\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \frac{1}{r^2} \langle (N)\mu(N)^T \rangle d\Omega \{v_{\theta}\} - \int_{\Omega} \left\langle \{\Psi_{\theta}\}^T \frac{\partial(N)}{\partial r} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} - \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \frac{1}{r^2} \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial \theta} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} - \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial z} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \frac{2}{r^2} \left\langle (N)\mu \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& - \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial r} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{v_z\} - \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T \frac{1}{r^2} \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial \theta} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_z\} - \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T \left\langle \frac{\partial(N)}{\partial z} \mu \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_z\} \\
& + \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \left\langle (N) \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{p_r\} + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \frac{1}{r} \left\langle (N) \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{p_{\theta}\} + \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T \left\langle (N) \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{p_z\}
\end{aligned} \tag{II-74}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho g_r \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T \langle (N)^T \rangle d\Omega + \rho g_{\theta} \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \langle (N)^T \rangle d\Omega + \rho g_z \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T \langle (N)^T \rangle d\Omega \\
W_{cont} = & \int_{\Omega} \{\Psi_p\}^T \left\langle (N) \frac{\partial(N)^T}{\partial r} \right\rangle d\Omega \{v_r\} + \int_{\Omega} \{\Psi_p\}^T \frac{1}{r} \left\langle (N) \frac{\partial(N)^T}{\partial \theta} \right\rangle d\Omega \{v_{\theta}\} + \int_{\Omega} \{\Psi_p\}^T \left\langle (N) \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{v_z\}
\end{aligned} \tag{II-75}$$

$$\begin{aligned}
W_{N-S} = & \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} ((N(r, \theta, z))\rho(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_r \right\} + \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} v_r \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial r} \right) d\Omega \{v\} + \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} v_{\theta} \frac{1}{r} \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_r\} \\
& - \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} v_{\theta} \frac{1}{r} ((N(r, \theta, z))\rho(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \{v_r\} + \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} v_r \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_r\} \\
& + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} ((N(r, \theta, z))\rho(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_{\theta} \right\} + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} v_r \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial r} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} v_{\theta} \frac{1}{r} \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} v_r \frac{1}{r} ((N(r, \theta, z))\rho(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \{v_{\theta}\} + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} v_z \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} ((N(r, \theta, z))\rho(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_z \right\} + \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} v_r \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial r} \right) d\Omega \{v_z\} + \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} v_{\theta} \frac{1}{r} \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_z\} \\
& + \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} v_z \left( (N(r, \theta, z))\rho \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_z\} \\
& + \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} ((N(r, \theta, z))\mu(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \{v_r\} - \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial \theta} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_r\} - \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial z} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_r\} \\
& - \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} \frac{2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( (N(r, \theta, z))\mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_r\} \\
& + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} ((N(r, \theta, z))\mu(N(r, \theta, z))^T) d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& - \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial r} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial r} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} - \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial \theta} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} - \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial z} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} \frac{2}{r^2} \left( (N(r, \theta, z))\mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} \\
& - \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial r} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial r} \right) d\Omega \{v_z\} - \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial \theta} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_z\} - \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \left( \frac{\partial(N(r, \theta, z))}{\partial z} \mu \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_z\} \\
& + \{\Psi_r\}^T \int_{\Omega} \left( (N(r, \theta, z)) \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial r} \right) d\Omega \{p_r\} + \{\Psi_{\theta}\}^T \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( (N(r, \theta, z)) \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{p_{\theta}\} + \{\Psi_z\}^T \int_{\Omega} \left( (N(r, \theta, z)) \frac{\partial(N(r, \theta, z))^T}{\partial z} \right) d\Omega \{p_z\} \\
& - \rho g_r \int_{\Omega} \{\Psi_r\}^T (N(r, \theta, z)) d\Omega - \rho g_{\theta} \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T (N(r, \theta, z)) d\Omega - \rho g_z \int_{\Omega} \{\Psi_z\}^T (N(r, \theta, z)) d\Omega
\end{aligned}$$

(II-76)

$$W_{\text{cont}} = \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \left( N(r, \theta, z) \frac{\partial \{N(r, \theta, z)\}^T}{\partial r} \right) d\Omega \{v_r\} + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \frac{1}{r} \left( N(r, \theta, z) \frac{\partial \{N(r, \theta, z)\}^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \{v_{\theta}\} + \int_{\Omega} \{\Psi_{\theta}\}^T \left( N(r, \theta, z) \frac{\partial \{N(r, \theta, z)\}^T}{\partial z} \right) d\Omega \{v_z\} \quad (\text{II-77})$$

La forme matricielle est donnée en annexe (Masse et raideur)

*Chapitre III*

---

### **III.1. Introduction**

La théorie du solide en mécanique est une branche de la physique qui se concentre sur l'étude du comportement des objets solides sous l'action des forces et des contraintes. Elle cherche à comprendre comment les solides se déforment, se déplacent et réagissent aux forces qui leur sont appliquées, basée sur des concepts de la cinématique, qui décrit les mouvements et les déformations des solides, et la dynamique, qui étudie les forces et les moments qui permettent sur eux. Elle s'appuie également sur des lois fondamentales, comme la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie, dans ce chapitre nous présentons le comportement contrainte-déformation du solide en forme cylindrique a section circulaire qui suit un développement mathématique et physique pour arriver à les équations du mouvement.

Les corps qui ne changent pas sensiblement de forme ou de taille lorsque les forces sont appliquées sont appelés solides, tandis que les corps qui changent sensiblement de forme ou de taille même lorsque de petites forces sont appliquées sont appelés fluides. La pierre, l'acier, le béton, etc. sont des exemples de solides tandis que l'eau, les gaz sont des exemples de fluides.

### **III.2. Contraintes en coordonnées cylindriques:**

En coordonnées cylindriques, les contraintes peuvent être présentées sous forme de composantes radiales ( $\sigma_r$ ), tangentielles ( $\sigma_\theta$ ) et verticales ( $\sigma_z$ ). Ces composantes représentent la Figure III-1 respectivement les contraintes appliquées dans la direction radiale, tangentielle à l'axe central et verticale par rapport au plan de référence.

En coordonnées cylindriques, les contraintes peuvent être indiquées sous la forme suivante :

- 1) **Contrainte radiale ( $\sigma_r$ )** : C'est la composante de contrainte qui agit perpendiculairement à l'axe central du système cylindrique. Elle est généralement notée  $\sigma_r$  et peut varier en fonction de la position radiale, de l'angle et de la hauteur.
- 2) **Contrainte tangentielle ( $\sigma_\theta$ )**: C'est la composante de contrainte qui agit tangentiellement à la circonférence du cylindre. Elle est généralement notée  $\sigma_\theta$  et peut également varier en fonction des coordonnées cylindriques.

3) Contrainte verticale ( $\sigma_z$ ) : C'est la composante de contrainte qui agit dans la sur la longueur du cylindre longitudinale direction verticale par rapport au plan de référence. Elle est généralement notée  $\sigma_z$  et peut dépendre de la position radiale, de l'angle et de la hauteur.

Ces trois composantes de contrainte peuvent varier en fonction du problème spécifique que vous souhaitez résoudre, des conditions aux limites et des forces appliquées. Les coordonnées cylindriques se nécessitent en utilisant trois quantités : la distance radiale ( $r$ ), l'angle azimutal ( $\theta$ ) et la hauteur ou la longueur ( $z$ ).

– La distance radiale ( $r$ ) est la distance entre l'origine du système de coordonnées et le point en question. Elle est mesurée le long d'une ligne droite perpendiculaire à l'axe  $z$ .

– L'angle ( $\theta$ ) est l'angle mesuré dans le plan  $xy$  entre l'axe  $x$  et la projection du vecteur dépendant de l'origine au point sur le plan  $xy$ . Il est généralement mesuré en radians.

– La hauteur ou la longueur ( $z$ ) est la distance entre le plan  $xy$  et le point. Elle est mesurée le long de l'axe  $z$ .

Ainsi, les coordonnées cylindriques d'un point dans l'espace peuvent être représentées sous la forme  $(r, \theta, z)$ .

Considérons un cylindre solide élastique transversalement isotrope de section constante. Le plan isotrope du matériau est perpendiculaire à l'axe du cylindre, qui est considéré comme identique à l'axe  $z$  du repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ , voir Fig. III.1a. Les relations constitutives contrainte ( $\sigma_{ij}$ )-déplacement ( $u_i$ ) pour les matériaux à isotropie transverse sont [87].

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \sigma_{\theta\theta} &= C_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{11} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{13} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \sigma_{rz} &= C_{44} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{III-1}$$

$$\sigma_{\theta z} = C_{44} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = C_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right)$$

où  $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$  et  $c_{ij}$  sont les constantes élastiques. En coordonnées cylindriques, les équations du mouvement indirect du mouvement d'un corps en termes de coordonnées radiales ( $r$ ), angulaires ( $\theta$ ) et axiales ( $z$ ). Voici les équations générales du mouvement en coordonnées cylindriques des contraintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + F_\theta &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

où  $\rho$  est la densité et  $t$  est la variable temporelle. Contrairement à la méthode de déplacement conventionnelle [88] qui élimine les six variables de contrainte  $\sigma_{ij}$  des Eqs. (II-1) et (III-2) pour obtenir trois équations aux dérivées partielles couplées du second ordre autour des trois composantes de déplacement  $u_i$ , l'approche de l'espace d'état conserve généralement trois composantes de contrainte et trois composantes de déplacement et transforme les équations gouvernantes en un ensemble d'équations du premier ordre équations différentielles ordinaires par rapport à une variable coordonnée particulière. L'approche de l'espace d'états présente des avantages particuliers par rapport à la méthode de déplacement dans la résolution de certains types de problèmes de mécanique et d'ingénierie, et le lecteur intéressé est renvoyé aux réf. [87], [89] pour plus de détails et références.

### III.3. Déformations en coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) :

Les relations contrainte-déformation en coordonnées cylindriques dotées du comportement mécanique des matériaux solides dans un système de coordonnées cylindriques. Elles permettent de relier les contraintes appliquées aux déformations résultantes dans le matériau.

Dans le contexte des déformations en coordonnées cylindriques, on considère généralement trois types de déformations principales : la déformation radiale, la

déformation angulaire et la déformation axiale. La déformation radiale, également appelée déformation de dilatation ou déformation radiale relative, mesure la variation relative de la distance radiale entre les points du solide. Elle est généralement représentée par la lettre  $\varepsilon_r$  et est définie comme le rapport de la variation de longueur radiale ( $\Delta r$ ) à la longueur radiale initiale ( $r_0$ ). La déformation radiale peut être positive si la distance radiale augmente ou négative si elle diminue.

La déformation angulaire, également appelée déformation de cisaillement, mesure le changement d'angle entre deux droites initialement perpendiculaires dans le solide. Elle est généralement représentée par la lettre  $\gamma$  et est définie comme le rapport de la variation d'angle ( $\Delta\theta$ ) à l'angle initial ( $\theta_0$ ). La déformation angulaire peut être positive si l'angle augmente dans le sens trigonométrique ou négatif si l'angle diminue.

La déformation axiale, également appelée déformation longitudinale ou déformation axiale relative, mesure la variation relative de la longueur axiale du solide. Elle est généralement représentée par la lettre  $\varepsilon_a$  et est définie comme le rapport de la variation de longueur axiale ( $\Delta z$ ) à la longueur axiale initiale ( $z_0$ ). La déformation axiale peut être positive si la longueur axiale augmente ou négative si elle diminue.

Les relations déformation-déplacement seront dérivées dans le système de coordonnées cylindriques. Le système de coordonnées polaires est un cas particulier avec  $z = 0$ . Les composantes du vecteur de déplacement sont  $\{u_r, u_\theta, u_z\}$ . Il existe deux façons de dériver les équations cinématiques. Puisque la déformation est un tenseur, on peut appliquer la règle de transformation d'une coordonnée à l'autre. Cette approche est suivie, l'expression de chaque composant du tenseur de déformation peut être dérivée de la géométrie. Ou Les composantes diagonales (normales)  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$  et  $\varepsilon_{zz}$  représentent le changement de longueur d'un élément infinitésimal. Les composantes non diagonales (cisaillement) décrivent le changement d'angles.

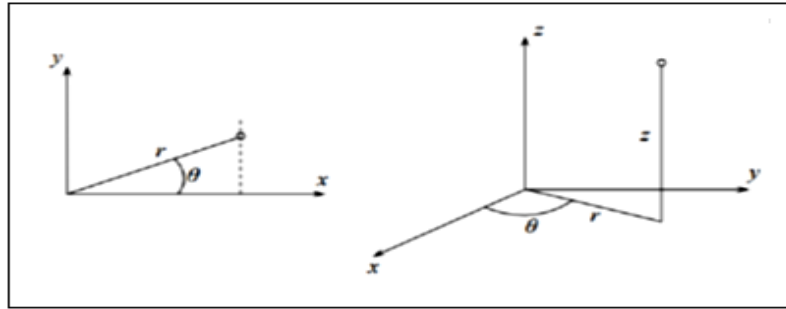


Figure III-1: Repère rectangulaire et cylindrique

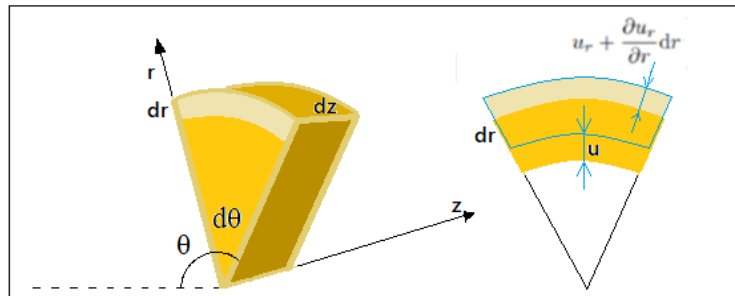


Figure III-2 : Changement de longueur dans le sens radial

La déformation radiale est uniquement due à la présence du gradient de déplacement dans le sens

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\left\{ u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr - u_r \right\}}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{III-3})$$

La déformation circonférentielle a deux composantes

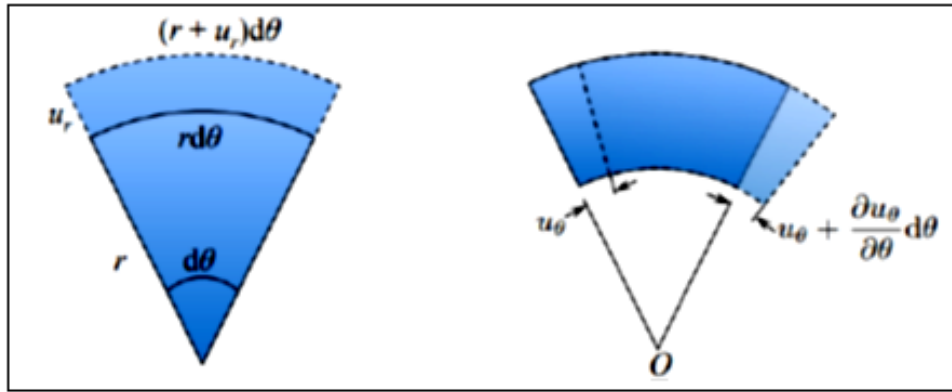
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} \quad (\text{III-4})$$

Le premier composant est le changement de longueur dû au déplacement radial, et le second composant est le changement de longueur dû au déplacement circonférentiel.

À partir de la Figure III-2, les composantes  $\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}$  et  $\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}$  sont calculées comme

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{(r + u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (\text{III-5})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta - u_\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{III-6})$$



**Figure III-3** : Déformation circonférentielle

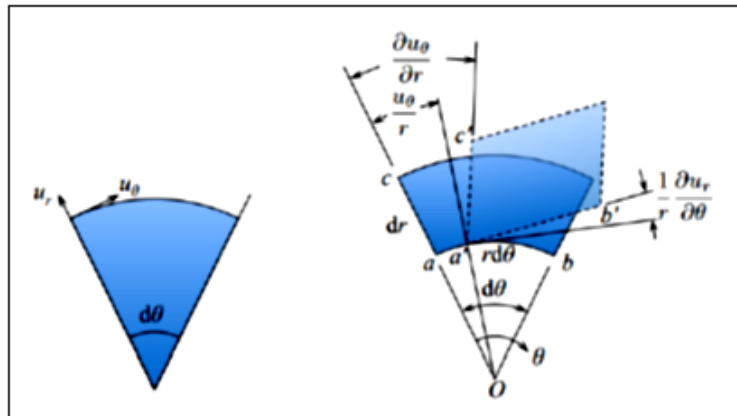
La composante circonférentielle totale (cerceau) du tenseur de déformation est

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{III-7})$$

Les composantes de déformation suivant la direction  $z$  ce sont mêmes dans le système de coordonnées rectangulaires

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{III-8})$$

La déformation de cisaillement  $\varepsilon_{r\theta}$  décrit un changement d'angle droit.

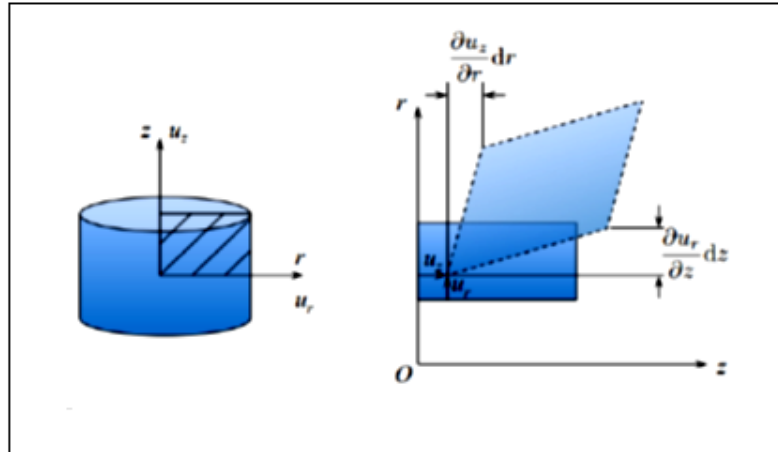


**Figure III-4** : Construction changement d'angle au déplacement radial et circonférentiel

D'après la Figure III-4, la déformation de cisaillement sur le plan  $\{r, \theta\}$  est

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III-9})$$

Sur le plan  $\{r, z\}$ , le cisaillement  $\varepsilon_{rz}$  se développe à partir des gradients respectifs, voir Figure III-5.

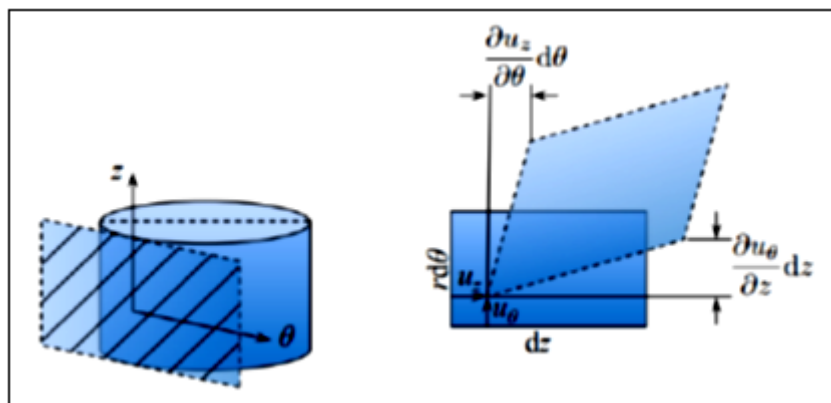


**Figure III-5 :** Changement d'angles dans le plan  $\{r, z\}$

D'après la construction de la Figure III-5, la composante  $\{r, z\}$ , est

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{III-10})$$

est valable sur le plan (tangent)  $(\theta, z)$ .



**Figure III-6 :** Composante de déformation  $(\theta, z)$ .

La composante de  $\varepsilon_{\theta z}$  du tenseur de déformation est la moitié du changement d'angle, c'est-à-dire

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \quad (\text{III-11})$$

Pour résumer la dérivation, les six composantes du tenseur de déformation infinitésimal dans le système de coordonnées cylindriques sont

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{III-12})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \quad (\text{III-13})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{III-14})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III-15})$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III-16})$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{III-17})$$

Les équations de mouvement de tout système structural peuvent être obtenues à partir des fonctions des énergies du système. Ces fonctions énergies sont constituées des énergies de déformation et cinétique, avec la fonction de dissipation du travail virtuel effectué par les charges appliquées. Les fonctions énergétiques sont des dérivées divers éléments structuraux.

Les dérivations sont basées sur la théorie linéaire de l'élasticité. Cela signifie que les relations contrainte-déformation et déformation-déplacement sont linéaires. L'état de contrainte dans un corps élastique tridimensionnel est défini par les composantes de contrainte [90] aux axes cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

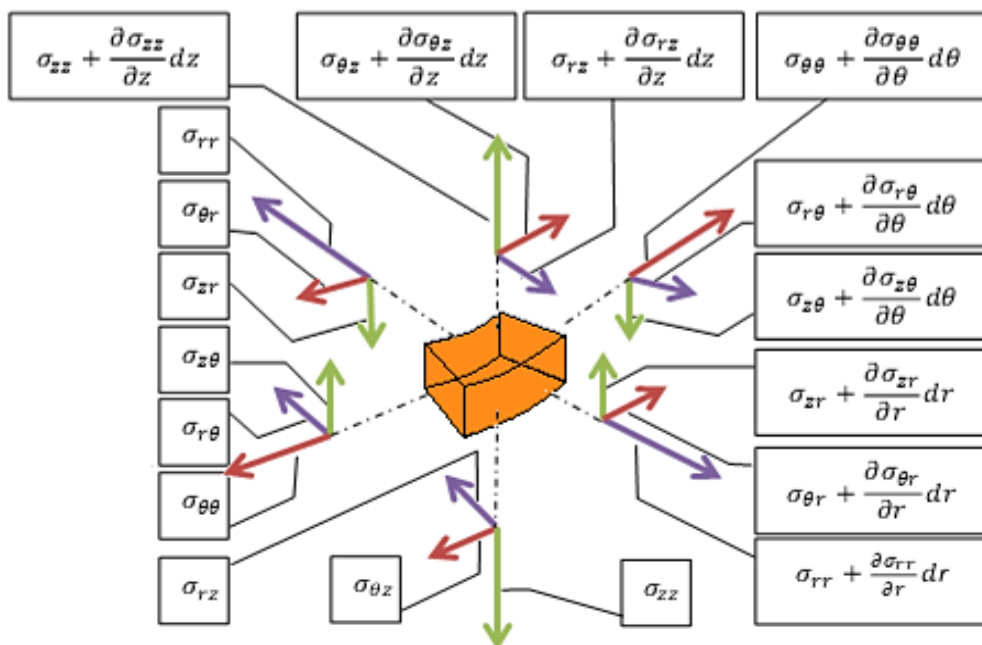


Figure III-7 : Contrainte en coordonnées cylindriques

Les relations constitutives contrainte  $(\sigma_{ij})$ -déplacement  $(u_i)$  pour les matériaux à isotropie transversale sont :

où  $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$  et  $C_{ij}$  sont les constantes élastiques [91].

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

Avec

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} \quad \tau_{zr} = \tau_{rz} \quad \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} \quad (\text{III-19})$$

Les équations d'équilibre ( $\text{div } \sigma + f = 0$ ) sont obtenues en coordonnées cylindriques en définissant  $a = \sigma$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + F_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

La relation entre déformation et déplacement en coordonnées cylindriques suit les mêmes principes généraux que dans tout autre système de coordonnées. Cependant, les caractéristiques de déformation et de déplacement sont présentées dans le contexte des coordonnées cylindriques. En coordonnées cylindriques, les déformations peuvent être décomposées en trois composantes principales : la déformation radiale ( $\varepsilon_r$ ), la déformation angulaire ( $\gamma$ ) et la déformation axiale ( $\varepsilon_a$ ). Les déplacements correspondants sont notés  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$  et  $\Delta z$  respectivement.

En rapportant les contraintes aux déformations, les matériaux anisotropes, orthotropes et isotropes seront considérés, sauf dans le cas d'éléments unidimensionnels (axial, torseur et poutre) où seul le cas isotrope est traité. L'état de déformation dans un corps élastique est défini par les composantes de déformation.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \gamma_{r\theta} & \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} & \gamma_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

Les déplacements en coordonnées cylindriques peuvent être décrits par trois composantes : le déplacement radial ( $u_r$ ), le déplacement axial ( $u_z$ ), et le déplacement circonférentiel ( $u_\theta$ ). Le déplacement radial ( $u_r$ ) mesure le changement absolu de la distance par rapport à l'axe central du cylindre. Il est défini comme la variation de

rayon ( $\Delta r$ ). Le déplacement axial ( $u_z$ ) mesure le changement absolu de la longueur du cylindre. Il est défini comme la variation de la longueur ( $\Delta Z$ ).

Le déplacement circonférentiel ( $u_\theta$ ) mesure le changement absolu de l'angle autour de l'axe central du cylindre. Il est défini comme la variation d'angle ( $\Delta\theta$ ).

Ces composantes de déformation et de déplacement peuvent être utilisées pour caractériser les déformations et les déplacements d'un objet ou d'une structure en coordonnées cylindriques.

Si les composantes de déplacement dans les directions des axes sont notées par  $(u_r, u_\theta, u_z)$ , alors les relations déformation-déplacement sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad \varepsilon_{rz} = \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad \varepsilon_{\theta z} = \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

Dans la section précédente le corps solide considéré avait une forme générale. Si la forme du corps peut être générée en faisant tourner une zone plane d'un tour complet autour d'un axe situé dans le plan de la zone, on l'appelle un solide de révolution ou un solide axisymétrique. Dans ce cas, il est plus pratique d'utiliser des coordonnées polaires cylindriques  $r, \theta, z$  que des coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ . Un solide axisymétrique avec ses axes, déplacements et chargements est représenté sur la Figure III-8. Les relations contrainte-déformation prennent la forme

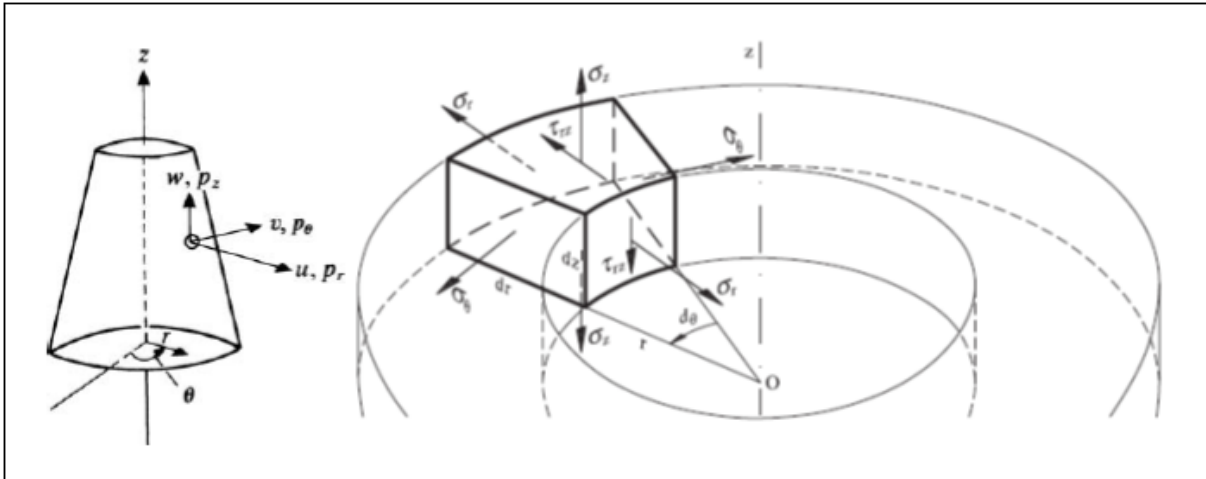
$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (\text{III-23})$$

où  $[D]$  est une matrice symétrique. Pour un matériau anisotrope, il contient 21 constantes de matériau indépendantes. Dans le cas d'un matériau isotrope, il est

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{III-24})$$

La substitution de l'équation (III-22) dans l'équation (III-23) donne

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (\text{III-25})$$



**Figure III-8** : Contraintes agissant sur un volume différentiel d'un solide axisymétrique sous chargement axisymétrique

Les relations déformation-déplacement à utiliser dans l'équation (III-21) sont données par (III-22) à savoir

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III-26})$$

Les déplacements dans les directions  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ . L'énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) dV \quad (\text{III-27})$$

Dans les deux équations (III-25) et (III-27), l'élément de volume est donné par

$$dV = r dr d\theta dz \quad (\text{III-28})$$

Si  $p_r$ ,  $p_\theta$ ,  $p_z$  sont les composantes des forces surfaciques appliquées par unité de surface, alors le travail virtuel est

$$\delta W = \int_s (p_r \delta u_r + p_\theta \delta u_\theta + p_z \delta u_z) dS \quad (\text{III-29})$$

L'élément de surface est donné par

$$dS = r_s d\theta ds \quad (\text{III-30})$$

où  $ds$  est un incrément de longueur d'arc sur la surface dans le plan  $r, z$  et  $r_s$  est la valeur de  $r$  sur la surface.

#### III.4. Principe du travail virtuel :

Le travail virtuel également, connu sous le nom de principe des travaux virtuels, est un concept important en mécanique des structures. Il est utilisé pour analyser les déformations et les forces internes dans un système en équilibre. Le principe des travaux virtuels repose sur l'idée que dans un système en équilibre, le travail effectué par les forces réelles est égal au travail effectué par les forces virtuelles (ou imaginaires) lorsque le système subit une déformation virtuelle infinitésimale.

L'idée clé est d'utiliser des déformations virtuelles pour analyser les forces internes dans le système sans avoir à résoudre les équations d'équilibre complexes. On suppose que les déformations virtuelles sont compatibles avec les conditions de liaison et les équations de déformation du système.

Généralement, la formulation par éléments finis est établie en termes d'une forme faible des équations différentielles considérées. Dans le contexte de la mécanique des solides, cela implique l'utilisation de l'équation du travail virtuel par principe de Hamilton. Dans ce but, notons  $\delta v$  une vitesse virtuelle arbitraire à partir de la position actuelle du corps. Le travail virtuel,  $\delta w$ , par unité de volume et de temps effectué par la force résiduelle  $f r_{\text{ésid}}$  pendant ce mouvement virtuel est  $f r_{\text{ésid}} \times \delta v$ , et l'équilibre implique.

$$\delta w = r_{\text{ésid}} \cdot \delta v = 0 \quad (\text{III-31})$$

Avec

$$r_{\text{ésid}} = \text{div} \sigma + f \quad (\text{III-32})$$

Nous utilisons l'équation (III-32) pour le vecteur résiduel et intégrons sur le volume du corps pour donner une déclaration faible de l'équilibre statique du corps comme

$$\delta w = \int_v (\operatorname{div} \sigma + f) \cdot \delta v \, dv = 0 \quad (\text{III-33})$$

Avec

$$\operatorname{div}(\sigma \delta v) = (\operatorname{div} \sigma) \cdot \delta v + \sigma : \nabla \delta v \quad (\text{III-34})$$

L'équation (III-33) avec le théorème de Gauss permet nous donne l'équation sous la forme

$$\int_{\delta v} n \cdot \sigma \delta v \, da - \int_v \sigma : \nabla \delta v \, dv + \int_v f \cdot \delta v \, dv = 0 \quad (\text{III-35})$$

Le gradient de  $\delta v$  est, par définition, le gradient de vitesse virtuelle  $\delta l$  et la symétrie de  $\sigma$  pour réécrire  $n \cdot \sigma \delta v$  comme  $\delta v \cdot t$ , et par conséquent l'équation (III-33) devient

$$\int_{\delta v} \sigma : \delta l \, dv = \int_v f \cdot \delta v \, dv + \int_v t \cdot \delta v \, da \quad (\text{III-36})$$

Enfin, exprimer le gradient de vitesse virtuelle en termes de taux de déformation virtuel symétrique  $\delta d$  et de tenseur de spin virtuel antisymétrique  $\delta w$  en tenant compte à nouveau de la symétrie de  $\sigma$  donne l'équation de travail virtuel spatial comme

$$\delta W = \int_{\delta v} \sigma : \delta l \, dv = \int_v f \cdot \delta v \, dv + \int_v t \cdot \delta v \, da = 0 \quad (\text{III-37})$$

### III.5. Élément fini:

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique numérique utilisée pour résoudre les problèmes d'ingénierie et de physique en les approximant par un modèle mathématique discret. Elle est particulièrement courante dans le domaine de la mécanique des structures, mais elle peut également être appliquée à d'autres domaines tels que la mécanique des fluides, l'électromagnétisme et la thermique.

La méthode des éléments finis est une technique numérique utilisée pour résoudre les problèmes d'ingénierie et de physique. Elle consiste à diviser un domaine continu en un ensemble fini d'éléments, généralement des triangles ou des quadrilatères pour les problèmes bidimensionnels, et des tétraèdres ou des hexaèdres pour les problèmes tridimensionnels. Ces éléments sont reliés entre eux pour former un maillage du domaine. L'élément fini est une méthode numérique utilisée pour résoudre des problèmes d'ingénierie et de physique impliquant des structures complexes. Il s'agit

d'une approche de discrétisation qui subdivise un domaine continu en éléments plus simples, appelés éléments finis, afin de représenter et d'analyser le comportement du système. Un élément fini est une unité discrète utilisée dans la méthode des éléments finis (MEF) pour représenter une portion du domaine d'étude. C'est une approximation géométrique d'une partie continue du domaine, qui permet de discrétiser le problème global en un ensemble de sous-problèmes plus simples à résoudre. Un élément fini est défini par un ensemble de nœuds ou de points d'interpolation qui servent de référence pour la représentation des variables d'intérêt, telles que les déplacements, les températures ou les contraintes. Ces nœuds sont généralement situés aux extrémités ou à l'intérieur de l'élément fini, et les variations des variables d'intérêt à l'intérieur de l'élément sont interpolées à partir des valeurs aux nœuds.

Les fonctions de forme  $N_i$  forment une base de l'espace des fonctions choisies pour représenter le déplacement dans l'élément : Tout déplacement interne est une combinaison linéaire des fonctions d'interpolation. Il existe de très nombreuses familles connues définissant des bases fonctionnelles et qui peuvent être directement utilisées pour les fonctions de forme. Les séries de Fourier, les polynômes de Lagrange, Hermite, Legendre... en sont des exemples. [92] Le polynôme de Lagrange d'ordre  $i$  passe exactement par 1 au point  $x_i$  et par 0 sur tous les autres points  $x_j$ . On peut donc l'utiliser comme fonction de forme :

$$N_i(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} \quad (\text{III-38})$$

La fonction de déplacement pour un élément fini s'est avérée être la somme des produits de ses valeurs de, ou déplacement nodal, et de leur fonction de forme correspondante.

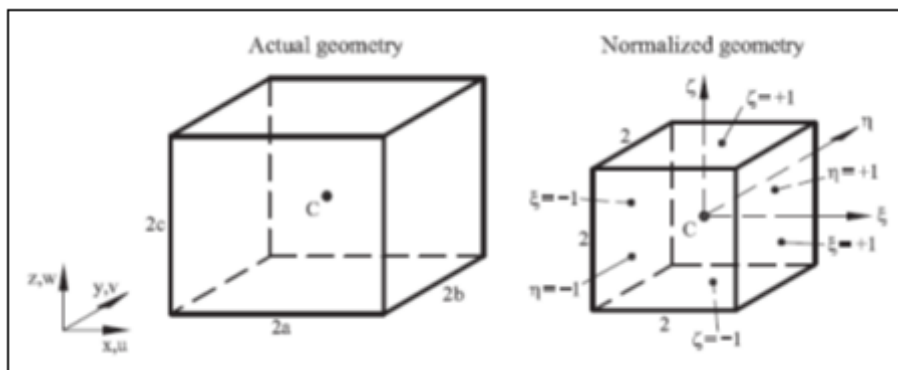
$$u(r, \theta, z) = [N(r, \theta, z)]\{q\} \quad (\text{III-39})$$

Les déplacements en translation  $u_r(r, \theta, z)$ ,  $u_\theta(r, \theta, z)$  et  $u_z(r, \theta, z)$  dans l'élément de structure sont fonction des coordonnées de position et sont indépendants les uns des autres ; ils seront représentés séparément en vecteur de :

$$\{u\} = \{u(r, \theta, z)\} = \begin{Bmatrix} u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \end{Bmatrix} \quad (\text{III-40})$$

En raison de l'indépendance de  $u_r(r,\theta,z)$ ,  $u_\theta(r,\theta,z)$  et  $u_z(r,\theta,z)$ , un seul ensemble de fonctions de forme peut être utilisé pour représenter chacune. Il doit y avoir autant de fonctions de forme dans cet ensemble qu'il y a de nœuds sur l'élément. Seuls ceux dans la direction du tangentiel  $\theta$  contribueront à  $u_\theta(r,\theta,z)$  et Seuls ceux dans la direction de la radiale  $r$  contribueront à  $u_z(r,\theta,z)$ . La somme des produits de ces valeurs de degrés de liberté nodaux et de leurs fonctions de forme correspondantes à partir de chacune des fonctions de déplacement à trois éléments. Pour l'élément hexaédrique « D » à 8 nœuds illustrés à la Figure III-9, il y a 3 degrés de liberté de translation à chaque nœud pour un total de 24 degrés de liberté. Huit degrés de liberté sont dans les directions  $z$ , 8 sont dans la direction  $\theta$  et 8 sont dans la direction  $r$ . On peut écrire une équation séparée de la de l'équation (III-39) pour chaque fonction de déplacement comme :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= [N_i]\{q_x\} \\ u_y(x, y, z) &= [N_i]\{q_y\} \\ u_z(x, y, z) &= [N_i]\{q_z\} \end{aligned} \quad (\text{III-41})$$



**Figure III-9 :** Prisme droit. Géométries réelles et normalisées ( hexahedron élément )

Considérons un prisme droit d'arêtes  $2a \times 2b \times 2c$ , de coordonnées naturelles  $\xi; \eta; \zeta$  définies comme illustré à la Figure III-9 Nous pouvons écrire

$$\xi = \frac{(x - x_c)}{a} ; \eta = \frac{(y - y_c)}{b} ; \zeta = \frac{(z - z_c)}{c} \quad (\text{III-42})$$

où  $(x_c; y_c; z_c)$  sont les coordonnées du centriole du prisme qui devient un cube dans le système de coordonnées naturel (Figure III-9). De l'équation (III-42). La modélisation de géométries 3D arbitraires de forme irrégulière avec des hexaèdres est simple à l'aide d'une formulation iso-paramétrique. Les fonctions de forme des prismes droits de Lagrange sont simplement obtenues par le produit de trois polynômes de Lagrange en

1D, suivant chaque trois direction d'axe pour les éléments prismatiques 3D, bien que les mêmes règles données pour 2D s'appliquent

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{a}; \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{b}; \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{c} \quad (\text{III-43})$$

En coordonné cylindrique devient en dérivation se base sur élément référencie fini

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{a}; \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{r}{b}; \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{c} \quad (\text{III-44})$$

Avec  $dx = dr$ ;  $dy = rd\theta$ ;  $dz = dz$  et le différentiel du volume exprimé par :

$$dV = \begin{cases} dx dy dz = abc d\xi d\eta d\zeta \\ dx dy dz = r dr d\theta dz \end{cases} \rightarrow r dr d\theta dz = abc d\xi d\eta d\zeta = dV \quad (\text{III-45})$$

Le dérivé volumique devient :

$$r dr d\theta dz = \frac{a \cdot b \cdot c}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{III-46})$$

Donc L'intégration d'une fonction  $f(r, \theta, z)$  sur l'élément s'exprime dans le système de coordonnées naturel comme

$$\begin{aligned} \iiint_{V_e} f(x, y, z) dV &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \frac{abc}{r} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

Puisque l'élément est un prisme droit, les dérivées cartésiennes des fonctions de forme sont directement obtenues par

$$\frac{dN_i}{dr} = \frac{1}{a} \frac{dN_i}{d\xi}; \frac{dN_j}{d\theta} = \frac{r}{b} \frac{dN_j}{d\eta}; \frac{dN_k}{dz} = \frac{1}{c} \frac{dN_k}{d\zeta} \quad (\text{III-48})$$

### III.5.1 Prisme famille de Lagrange :

La méthode des éléments finis de Lagrange, également appelée éléments finis polynomiaux de Lagrange, est une technique couramment utilisée pour la discrétisation des problèmes dans la méthode des éléments finis. Elle tire son nom du mathématicien français Joseph-Louis Lagrange.

Dans la méthode des éléments finis de Lagrange, les fonctions d'interpolation utilisées pour représenter les variations des quantités d'intérêt à l'intérieur de chaque élément fini sont basées sur les polynômes de Lagrange. Ces polynômes sont intégrés

de telle manière qu'ils satisfont les conditions d'interpolation aux nœuds de l'élément fini, c'est-à-dire qu'ils prennent la valeur de 1 à un nœud spécifique et la valeur de 0 à tous les autres nœuds.

L'élément prismatique de Lagrange est une forme spécifique d'élément fini utilisée dans la méthode des éléments finis pour modéliser des géométries prismatiques, c'est-à-dire des structures ayant une forme de prisme avec une base polygonale et des côtés rectangulaires. Cet élément fini est défini par des nœuds d'interpolation placés aux sommets, aux arêtes et à l'intérieur du prisme. La forme des fonctions d'interpolation utilisée pour représenter les variations des quantités d'intérêt à l'intérieur de l'élément est basée sur les polynômes de Lagrange. Ces polynômes sont intégrés pour satisfaire les conditions d'interpolation aux nœuds, c'est-à-dire qu'ils prennent la valeur de 1 à un nœud spécifique et la valeur de 0 à tous les autres nœuds. La particularité de l'élément prismatique de Lagrange est sa capacité à représenter les variations le long de l'axe du prisme. En plus des fonctions d'interpolation bidimensionnelles dans le plan de la base du prisme, des fonctions d'interpolation unidimensionnelles sont utilisées le long de l'axe du prisme. Cela permet de représenter avec précision les variations dans cette direction.

L'élément prismatique de Lagrange le plus simple est le prisme linéaire à 8 nœuds illustré à la Figure III-9. La fonction de forme nodale est obtenue en multipliant les trois polynômes linéaires normalisés en  $\xi, \eta$  et  $\zeta$ , correspondant au nœud. Sous forme générale avec la présence du polynôme Legendre (chapitre 2) devient

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) ; & N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) ; & N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\
N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) ; & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) ; & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\
N_9 &= \frac{1}{2}(1-\eta)\frac{1}{2}(1-\zeta)g(\xi) ; & N_{10} &= \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}(1-\zeta)f(\eta) \\
N_{11} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)g(\xi) ; & N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\zeta)f(\eta) \\
N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)g(\xi) ; & N_{14} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\zeta)f(\eta) \\
N_{15} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)g(\xi) ; & N_{16} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)f(\eta) \\
N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)l(\zeta) ; & N_{18} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)l(\zeta) \\
N_{19} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)l(\zeta) ; & N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)l(\zeta) \\
N_{21} &= g(\xi)f(\eta)l(\zeta)
\end{aligned} \tag{III-49}$$

Le vecteur ligne  $N_i(r, \theta, z)$  contient huit fonctions de forme, une pour chaque nœud il en est de même dans chacune des équations (III-42). Les vectrices colonnes  $q$  contiennent chacun les valeurs des huit degrés de liberté dans leurs directions de coordonnées correspondantes  $u_r, u_\theta, u_z$ , qui diffèrent dans chaque équation. Les équations (III-50) peuvent être combinées en une seule équation matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 & \cdots & N_{21} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 & \cdots & 0 & N_{21} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 & \cdots & 0 & 0 & N_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1r} \\ u_{1\theta} \\ u_{1z} \\ \vdots \\ u_{8r} \\ u_{8\theta} \\ u_{8z} \\ \vdots \\ u_{21r} \\ u_{21\theta} \\ u_{21z} \end{pmatrix} \tag{III-50}$$

ou

$$u(r, \theta, z) = [N_i(r, \theta, z)]\{q\} \tag{III-51}$$

La matrice de déformation-déplacement, également appelée matrice de gradient des déplacements, est une matrice utilisée dans la méthode des éléments finis pour relier les déplacements nodaux aux déformations dans un élément fini. Cette matrice permet de calculer les déformations à partir des déplacements nodaux et de les utiliser dans la

formulation des équations constitutives pour déterminer les contraintes et autres grandeurs d'intérêt. La matrice de déformation-déplacement est une matrice utilisée dans la méthode des éléments finis pour relier les déformations locales d'un élément fini aux déplacements nodaux correspondants. Cette matrice est souvent notée [d].

La forme de l'équation (III-41) est générale. Les matrices u, N et q sont déterminées par la nature de l'élément fini traité. Les relations de déformation et de déplacement sont dérivées des définitions des déformations en tant que dérivations des déplacements de translation. Pour l'élément fini 3D, les équations de définition de déformation (III-22) sont appliquées à l'équation de fonction de déplacement (III-40) pour obtenir, sous forme matricielle,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \end{Bmatrix} \quad (\text{III-52})$$

Ou

$$\{\varepsilon\} = [d]\{u(r, \theta, z)\} \quad (\text{III-53})$$

La matrice d est un tableau d'opérateur dérivé. Ses entrées sont déterminées par les définitions de déformation en dérivée des déplacements. La substitution de l'équation (III-41) dans l'équation (III-52) donne

$$\{\varepsilon\} = [d][N_i(r, \theta, z)]\{q\} \quad (\text{III-54})$$

Ou

$$\{\varepsilon\} = [B(r, \theta, z)]\{q\} \quad (\text{III-55})$$

La matrice B, qui équivaut au produit des matrices d et N, est appelée la matrice de déplacement de la chaîne pré multiplie le vecteur des valeurs des degrés de liberté q, le résultat est le vecteur de la fonction de déformation dans l'élément structurel. La forme de l'équation (III-54) est générale. La composition des matrices d et N, et donc B,

dépendra de la nature de l'élément fini traité. La substitution de l'équation (III-54) dans l'équation (III-23) donne

$$\{\sigma(r, \theta, z)\} = [D][B(r, \theta, z)]\{q\} \quad (III-56)$$

L'équation (III-56) donne les vecteurs des contraintes de l'élément de la structure en forme cylindrique. Ce sont des fonctions des coordonnées de position.

L'énergie de déformation virtuelle lorsque l'élément différentiel subit un déplacement virtuel de manière similaire. L'énergie de déformation virtuelle de l'élément différentiel entier est son énergie de déformation virtuelle spécifique multipliée par le volume de l'élément différentiel par l'intégrale volumique d'élément fini choisi leur référence.

$$\delta U = \int_V [\delta\varepsilon]\{\sigma\} dV = \int_V [\delta q][B]^T[D][B]\{q\} dV \quad (III-57)$$

$$\delta U = [\delta q] \left[ \int_V [B]^T[D][B] dV \right] \{q\} \quad (III-58)$$

Ou la matrice de rigidité et :

$$[K] = \int_V [B]^T[D][B] dV \quad (III-59)$$

Avec

$$[B]^T = [N]^T[d]^T \text{ et } [B] = [d][N] \quad (III-60)$$

Ou

$$[B] = [d][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{bmatrix} \quad (III-61)$$

$$\times \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & N_8 & 0 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & N_{21} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & N_8 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & N_{21} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & N_8 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & N_{21} \end{bmatrix}$$

Donc

$$[K] = \int_V [N]^T [d]^T [D] [d] [N] dV \quad (\text{III-62})$$

La matrice  $B(x, y, z)$  pour élément hexaèdres a 8 nœud de 24 degrés de liberté suivant la matrice des contraintes cylindriques circulaires à diamètre  $D$ , rayon externe  $R$ , rayon interne  $r$  et de longueur  $L$ , peut être déterminée par rapport aux axes  $(r, \theta, z)$  et sera écrite sous forme :  $B(r, \theta, z)$  qui sous forme développée est :

$$[B(r, \theta, z)] = [[B_1(r, \theta, z)] \quad \dots \quad [B_8(r, \theta, z)] \quad \dots \quad [B_{21}(r, \theta, z)]] \quad (\text{III-63})$$

Matrice de rigidité  $K$  pour l'élément de contrainte cylindrique circulaire s'écrit comme suit :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^T D B_1 & \dots & B_1^T D B_{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{21}^T D B_1 & \dots & B_{21}^T D B_{21} \end{bmatrix} [J(\xi, \eta, \zeta)] \frac{abc}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{III-64})$$

Avec la masse matricielle :

$$[M] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \rho [N] [J(\xi, \eta, \zeta)] \frac{abc}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{III-65})$$

Une exigence fondamentale pour les fonctions de forme est qu'elles soient égales au polynôme Legendre à leur degré de liberté respectif et à zéro à l'autre degré de liberté.

C'est cette propriété des fonctions de forme qui permet aux fonctions de déplacement de l'élément d'être représentées par la somme des produits des fonctions de forme et leurs déplacements nodaux correspondants. Cette même propriété permet de représenter la variation des coordonnées d'une manière tout à fait analogue à la variation des déplacements, mais en utilisant les valeurs correspondantes des coordonnées nodales au lieu des déplacements nodaux. Notez que les variations de coordonnées  $(r, \theta, z)$  sont indépendantes les unes des autres, comme la variation de déplacement  $u_r, u_\theta, u_z$ . Donc

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta, \zeta) = & r_1 N_1(\xi, \eta, \zeta) + r_2 N_2(\xi, \eta, \zeta) + r_3 N_3(\xi, \eta, \zeta) + r_4 N_4(\xi, \eta, \zeta) \\ & + r_5 N_5(\xi, \eta, \zeta) + r_6 N_6(\xi, \eta, \zeta) + r_7 N_7(\xi, \eta, \zeta) + r_8 N_8(\xi, \eta, \zeta) + \\ & + r_{21} N_{21}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (\text{III-66})$$

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \eta, \zeta) = & \theta_1 N_1(\xi, \eta, \zeta) + \theta_2 N_2(\xi, \eta, \zeta) + \theta_3 N_3(\xi, \eta, \zeta) + \theta_4 N_4(\xi, \eta, \zeta) \\ & + \theta_5 N_5(\xi, \eta, \zeta) + \theta_6 N_6(\xi, \eta, \zeta) + \theta_7 N_7(\xi, \eta, \zeta) + \theta_8 N_8(\xi, \eta, \zeta) + \\ & + r_{21} N_{21}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (\text{III-67})$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = z_1 N_1(\xi, \eta, \zeta) + z_2 N_2(\xi, \eta, \zeta) + z_3 N_3(\xi, \eta, \zeta) + z_4 N_4(\xi, \eta, \zeta) \\ + z_5 N_5(\xi, \eta, \zeta) + z_6 N_6(\xi, \eta, \zeta) + z_7 N_7(\xi, \eta, \zeta) + z_8 N_8(\xi, \eta, \zeta) + r_{21} N_{21}(\xi, \eta, \zeta) \quad (\text{III-68})$$

Forme matriciel :

$$r(\xi, \eta, \zeta) = [N(\xi, \eta, \zeta)]\{r\} \quad (\text{III-69})$$

$$\theta(\xi, \eta, \zeta) = [N(\xi, \eta, \zeta)]\{\theta\} \quad (\text{III-70})$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = [N(\xi, \eta, \zeta)]\{z\} \quad (\text{III-71})$$

La matrice de Jacobien :

$$\frac{\partial r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = r_1 \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + r_2 \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + r_3 \frac{\partial N_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + r_4 \frac{\partial N_4(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ + r_5 \frac{\partial N_5(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + r_6 \frac{\partial N_6(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + r_7 \frac{\partial N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + r_8 \frac{\partial N_8(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ + r_{21} \frac{\partial N_{21}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \quad (\text{III-72})$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \theta_1 \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \theta_2 \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \theta_3 \frac{\partial N_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \theta_4 \frac{\partial N_4(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ + \theta_5 \frac{\partial N_5(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \theta_6 \frac{\partial N_6(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \theta_7 \frac{\partial N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \theta_8 \frac{\partial N_8(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ + \theta_{21} \frac{\partial N_{21}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \quad (\text{III-73})$$

$$\frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = z_1 \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + z_2 \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + z_3 \frac{\partial N_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + z_4 \frac{\partial N_4(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ + z_5 \frac{\partial N_5(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + z_6 \frac{\partial N_6(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + z_7 \frac{\partial N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + z_8 \frac{\partial N_8(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ + z_{21} \frac{\partial N_{21}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \quad (\text{III-74})$$

$$[J(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \theta(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{III-75})$$

*Chapitre IV*

---

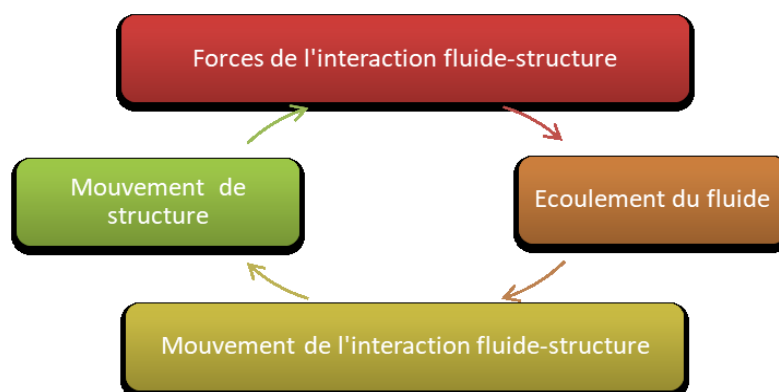
## IV.1. Interaction fluide-structure et conditions limites suivant l'interface :

### IV.1.1 Introduction :

L'interaction fluide-structure est l'étude de l'interaction entre un fluide, tel que l'air ou l'eau, et une structure solide, telle qu'une aile d'avion ou un pont. Cette interaction peut avoir un impact significatif sur le comportement de la structure et la performance globale du système. L'interaction fluide-structure peut être étudiée en utilisant des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (MEF). La MEF est une approche couramment utilisée pour modéliser et simuler le comportement des structures soumises à des interactions fluides. Pour appliquer la MEF à l'interaction fluide-structure, on divise la structure en éléments finis et on discrétise le fluide en utilisant des méthodes telles que la méthode des éléments finis pour les fluides (MEFF). Les équations de mouvement des éléments finis de la structure et les équations de Navier-Stokes ou d'autres équations fluides sont résolues simultanément.

L'interaction fluide-structure exprime le problème mécanique du contact d'un corps solide élastique et d'un fluide visqueux en mouvement. Cette étape nécessite les caractéristiques des conditions aux limites supplémentaires qui décrivent une interface entre le fluide et le solide.

Le FSI s'intéresse au comportement dynamique de la structure ou du fluide en contact avec un interface bien définie. Comme le montre la Figure IV-1, le mécanisme de base du couplage fluide-structure peut être décrit comme suit : le mouvement de la structure modifie les conditions d'écoulement à l'interface avec le fluide, ce qui induit à son tour une fluctuation de la pression et/ou des forces visqueuses ; le chargement appliqué à l'interface fluide-structure modifie ensuite le mouvement de la structure.



**Figure IV-1:** Mécanisme du couplage d'interaction fluide-structure

Les interfaces se produisent dans un large éventail de structures. En génie civil, on les rencontre par exemple dans les sols renforcés, comme couche intermédiaire entre la roche et le béton, ou dans l'analyse des joints rocheux. Les applications dans le béton armé et précontraint comprennent la modélisation de la fissuration discrète et l'enclenchement et la liaison des agrégats entre le béton et l'armature. Dans les pièces en caoutchouc, les interfaces peuvent être importantes lorsqu'il s'agit de désintégration du caoutchouc et de la texture, comme dans les bandes transporteuses. Souvent, il existe une discontinuité dans les propriétés du matériau à une interface, telles que la rigidité élastique ou d'autres propriétés physiques telles que la conductivité. De telles discontinuités ont tendance à être parmi les parties les plus critiques d'une structure et peuvent agir comme un précurseur d'une défaillance. Deux types d'analyses de rupture peuvent être distingués. La première classe de méthodes considère le calcul des propriétés de rupture pour une fissure stationnaire donnée. En règle générale, cela concerne des propriétés telles que les facteurs d'intensité de contrainte ou l'intégrale J.

Le problème d'interaction fluide-structure est modélisé par un domaine fluide  $\Omega_F$  assemblé par un domaine structurel  $\Omega_S$  en couplage, ce couplage est régi par une interface  $\Omega_F \cap \Omega_S$  et le système couplé est régi par  $\Sigma = \Omega_F \cup \Omega_S$  aux frontières, est définie avec le vecteur normal  $n$  et les vecteurs tangentiels  $t$  comme le montre la Figure IV-2 [93]. Les deux continus, le fluide et la structure, sont supposés être décrits en termes de vitesse  $\dot{u}_F$  et  $\dot{u}_S$ . Les vecteurs contraintes, déplacements et vitesses sont définis dans la base de l'interface de coordonnées locales ( $n, s_1, s_2$ ). Nous supposons que la relation constitutive générale à l'interface est linéaire [94] et s'écrit

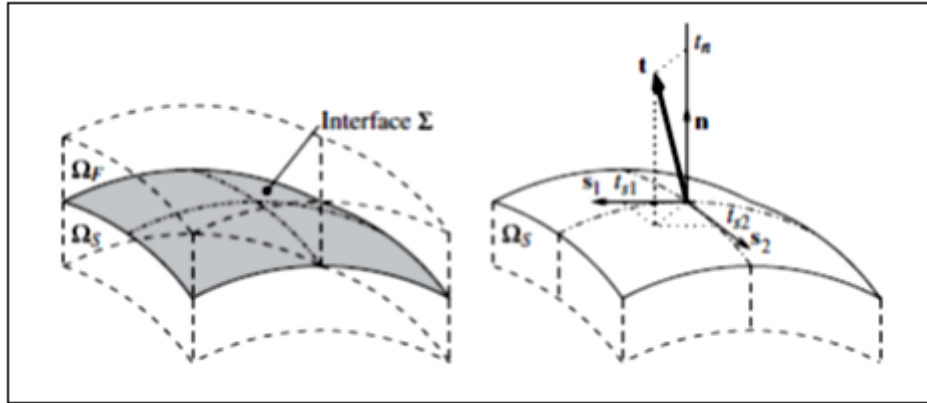
$$t + \alpha t - \beta \Delta \dot{u}_F - \gamma \Delta \dot{u}_S = 0 \quad (\text{IV-1})$$

Cette relation est une équation différentielle en temps où  $\Delta \dot{u}_F$  et  $\Delta \dot{u}_S$  sont respectivement les sauts de déplacement et de vitesse à l'interface.

Ici, les matrices de coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  désignent les propriétés matérielles structurelles de l'interface rhéologique qui dépendent de l'épaisseur. Dans le cas général, ceux-ci sont entièrement occupés, ce qui conduit à un comportement couplé dans les différentes directions de base. Dans ce qui suit, nous supposons un comportement de matériau découplé tel que les matrices de coefficients données par

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_S & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_S & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_S \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_S & 0 & 0 \\ 0 & \beta_S & 0 \\ 0 & 0 & \beta_S \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_S & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_S & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_S \end{bmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

Qui sont diagonaux et réguliers dans la base de l'interface de coordonnées locales.



**Figure IV-2** : Interface fluide-structure avec base locale et vecteur de contrainte [94]

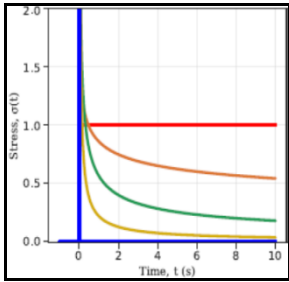
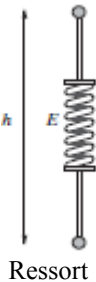
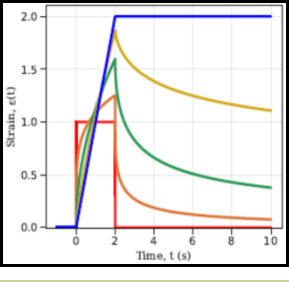

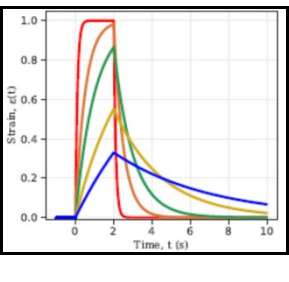
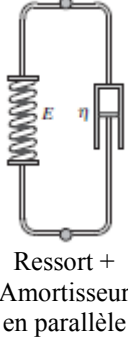
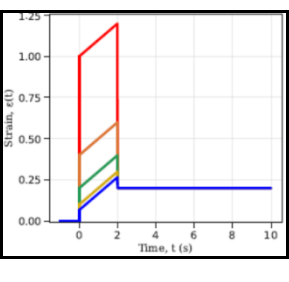
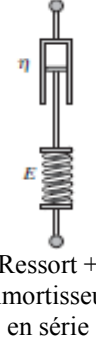
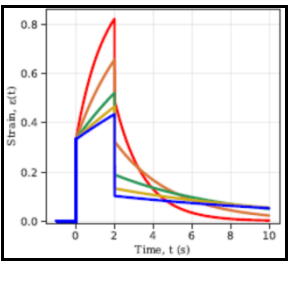
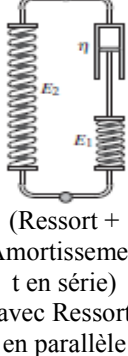
Le choix réel de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  détermine le modèle rhéologique actif spécifique dans chaque direction d'interface locale.

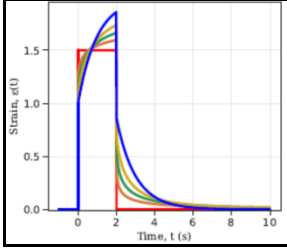
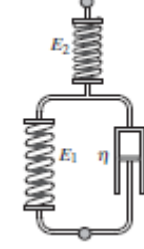
#### IV.2. Type de couplages :

Le passage au choix du modèle peut être effectué selon le tableau IV.1 et les schémas décrivent les spécificités associées à la relation d'équilibre généralisé. Les dispositifs à ressort et amortisseur utilisés dans le modèle rhéologique ont l'étendue spatiale inhérente de l'épaisseur d'interface  $h$ . L'unité des paramètres de rigidité  $\beta_n$  et  $\beta_s$  est définie en Pascal par unité de longueur (épaisseur d'interface physique) tandis que les paramètres d'amortissement  $\gamma_n$  et  $\gamma_s$  sont exprimés en termes de Pascal-seconde par unité de longueur (épaisseur d'interface physique). L'unité des paramètres  $\alpha_n$  et  $\alpha_s$  est la seconde. La détermination des paramètres pour un matériau d'interface donné fait l'objet d'investigations expérimentales ou numériques.

Les modèles de Kelvin-Voigt sont identifiés à partir d'une analyse numérique tridimensionnelle complète d'un matériau poro-élastique, les petits échantillons peuvent nous fournir des courbes qui permettent d'identification des paramètres comme cela est fait dans [95] en utilisant les résultats de [96].

Tableau IV-1: différents modèles d'interface rhéologique possibles

Modèle	$\alpha [s]$	$h[m] \cdot \beta [Pa \cdot m^{-1}]$	$h[m] \cdot \beta [Pa \cdot m^{-1}]$	Contrainte de pas appliquée [98]	Schémas [97]
Hooke	0	E	0		 Ressort
Newton	0	0	$\eta$		 Amortisseur
Kelvin	0	E	$\eta$		 Ressort + Amortisseur en parallèle
Maxwell	$\eta/E$	0	$\eta$		 Ressort + Amortisseur en série
Zener-M	$\eta/E_1$	$E_2$	$\eta \frac{(E_1 + E_2)}{E_1}$		 (Ressort + Amortissement en série) avec Ressort en parallèle

Zener-K	$\frac{\eta}{(E_1 + E_2)}$	$\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2)}$	$\eta \frac{E_2}{(E_1 + E_2)}$		 <p>(Ressort + Amortissement en parallèle) avec Ressort en série</p>
---------	----------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--	---

Les éléments d'interface ont été utilisés avec succès, exploitant pleinement le potentiel des modèles de zone cohésive. Bien que de telles analyses fournissent beaucoup d'informations, avec un modèle d'éléments finis dans lequel des éléments d'interface dotés d'une relation de décohésion quasi-fragile ont été insérés entre tous les éléments du continuum (Figure IV-3). Les grandeurs cinématiques déterminées dans les éléments d'interface continus sont un ensemble de déplacements relativement orthogonal suivant  $(v_n, v_s, v_t)$ , ils contiennent mode normal  $n$  et deux modes de glissement  $s, t$  respectivement (tangentiels) [99]. la collecte des déplacements relatifs dans un vecteur  $v$ , ils peuvent être liés aux déplacements des côtés supérieur (+) et inférieur (-) de l'interface,  $v_n^-, v_s^-, v_t^-, v_n^+, v_s^+, v_t^+$ , via (Figure IV-3).

$$v = Lv \tag{IV-3}$$

Avec

$$v_j^T = (v_n^-, v_n^+, v_s^-, v_s^+, v_t^-, v_t^+) \tag{IV-4}$$

et

$$L = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \tag{IV-5}$$

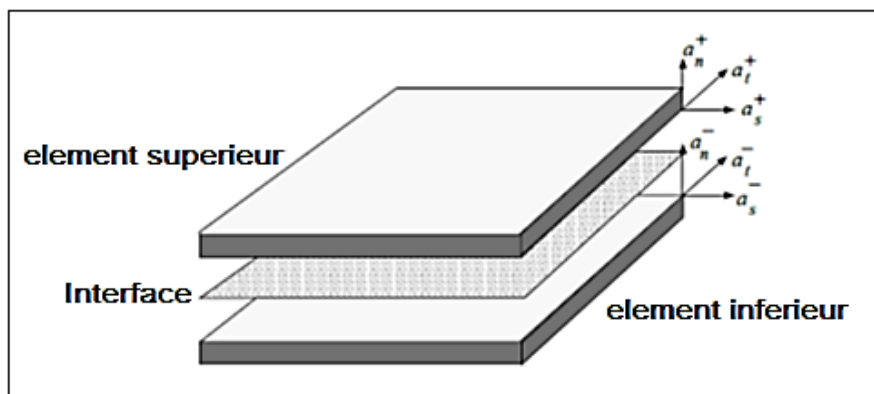


Figure IV-3: Élément d'interface planaire entre deux éléments finis tridimensionnels

Chaque côté de l'élément d'interface une matrice d'opérateurs, pour des déplacements contenus dans  $u$  sont interpolés de manière standard comme suit :

$$v = H v_j \quad (IV-6)$$

avec le réseau de déplacement nodal  $u_j$

$$u_j = \left( (v_{j_n}^-)_1, \dots, (v_{j_n}^-)_n, (v_{j_s}^-)_1, \dots, (v_{j_s}^-)_n, (v_{j_t}^-)_1, \dots, (v_{j_t}^-)_n, \right. \\ \left. (v_{j_n}^+)_1, \dots, (v_{j_n}^+)_n, (v_{j_s}^+)_1, \dots, (v_{j_s}^+)_n, (v_{j_t}^+)_1, \dots, (N_t^+)_n \right)^T \quad (IV-7)$$

et

$$N = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (IV-8)$$

Avec  $N$  une matrice  $1 \times n$  contenant les fonctions de forme  $N_1, \dots, N_n$ . On note qu'une certaine confusion peut résulter de cette notation, puisque le premier indice  $n$  se rapporte à la direction normale, tandis que le deuxième indice  $n$  désigne le nombre de pour chaque côté d'élément d'interface. La relation entre les déplacements nodaux et les déplacements relatifs pour les éléments d'interface est maintenant dérivée comme suit :

$$v = LN v_j = B_d v_j \quad (IV-9)$$

Où la matrice déplacement relatif–déplacement nodal  $B_d$  pour l'élément d'interface s'écrit :

$$B_d = \begin{bmatrix} -N & +N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N & +N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N & +N \end{bmatrix} \quad (IV-10)$$

Pour un élément d'interface orienté arbitrairement, la matrice  $B_d$  doit ensuite être transformée dans le système de coordonnées local de l'élément d'interface parent. Les éléments d'interface conventionnels doivent être insérés dans le maillage d'éléments finis au début du calcul, la rigidité doit être attribuée et finie avec au moins les éléments diagonaux non nuls. La matrice de rigidité dans l'élément d'interface [de Borst et Schellekens, 1993] s'écrit donc :

$$D_d = \begin{bmatrix} d_n & 0 & 0 \\ 0 & d_s & 0 \\ 0 & 0 & d_t \end{bmatrix} \quad (IV-11)$$

avec  $d_n$  la raideur normale à l'interface et  $d_s$  et  $d_t$  les raideurs tangentielles.

$$d_n = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{1}{h}, d_s = E \cdot \frac{1}{h}, d_t = E \cdot \frac{1}{h} \quad (IV-12)$$

Avec la matrice de rigidité tangentielle du matériau  $D_d$ , la matrice de rigidité tangentielle de l'élément peut être dérivée de manière simple, où le domaine d'intégration soit surface ou volumique respectivement S ou V. d'intégration numérique l'intégrale de l'équation (IV-12) est remplacée par des coordonnées iso-paramétriques  $\xi, \eta, \zeta$  d'un élément continu. Alors, la matrice de rigidité des éléments avec  $\mathbf{J}$  la matrice jacobienne devient :

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_d^T \mathbf{D}_d \mathbf{B}_d dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\det \mathbf{J}) \mathbf{B}_d^T \mathbf{D}_d \mathbf{B}_d d\xi d\eta d\zeta \quad (IV-13)$$

L'intégration numérique donne ensuite :

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_i} w_i \det \mathbf{J}_i (\mathbf{B}_d^T)_i (\mathbf{D}_d)_i (\mathbf{B}_d)_i \quad (IV-14)$$

D'autres approches et pour élucider le phénomène des oscillations de traction dans les éléments d'interface intégrés numériquement, nous développons la matrice de rigidité comme suit :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{bmatrix} \quad (IV-15)$$

les sous-matrices  $\mathbf{K}_{sou}, sou = n, s, t$  définies comme :

$$\mathbf{K}_{sou} = \mathbf{d}_{sou} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{N} & -\mathbf{N}^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N} & \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (IV-16)$$

Si l'élément d'interfaces quadratiques bidimensionnelles nous utilisons l'intégrale de Newton-Cotes [100], qui est souvent donne sa performance des résultats vibratoires ou oscillatoires car la matrice B contient des points d'intégration qui son centré, qui relie les déplacements nodaux normaux aux déplacements relatifs normaux à l'élément au point d'intégration est proportionnelle à :

$$B \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV-17)$$

Les composantes non nulles de la matrice B sont les déplacements des gradients  $\xi$  ou  $\eta$ , dans laquelle les directions des nœuds de déplacement résultent des tractions et déplacements relatifs au point d'intégration central. Dans cette classe d'éléments d'interface, les déplacements relatifs aux n paires de nœuds sont utilisés à la place d'un champ de déplacement relatif interpolé en points d'intégration. La matrice de rigidité de l'élément est maintenant développée comme suit :

$$K = \sum_{i=1}^{n_i} A_i (B_d^T)_i (D_d)_i (B_d)_i \quad (IV-18)$$

où la matrice  $(B_d)_i$  pour l'élément d'interface à l'ensemble de nœuds i s'écrit

$$(B_d)_i = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (IV-19)$$

et  $A_i$ , la surface nœuds i. La sous-matrice  $K_{sou}$  pour un élément d'interface linéaire avec quatre paires de nœuds et une surface A devient :

$$K_{sou} = \frac{Ad_{sou}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV-20)$$

Bien évidemment, aucun couplage n'existe entre les degrés de liberté des différentes paires de nœuds. On note que les éléments d'interface à intégration localisée sont proches des éléments d'interface dits nodaux ou ponctuels (Ngo et Scordelis 1967), qui peuvent, au sens mécanique, être interprétés comme des interfaces reliées par des ressorts aux nœuds.

### IV.3. Conditions aux limites :

Considérons deux milieux différemment 1 et 2, fluides ou solides, séparés par une frontière  $\partial\Omega$ . Dans certains cas de Figure IV-4, la valeur d'une grandeur P telle que la vitesse, la température ou des forces, ou condition imposée comme valeur, flux ...etc.

– On parle de condition **Dirichlet** :

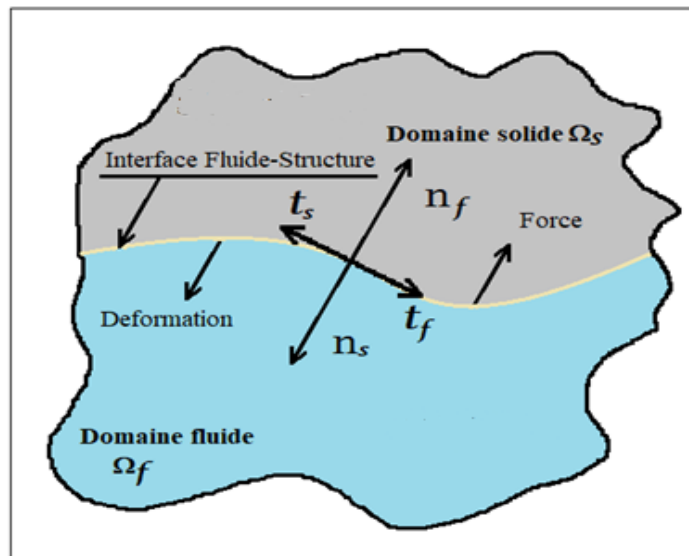
Pour un point M sur la frontière  $\partial\Omega$  :  $P(M) =$  une valeur imposée

– Dans d'autres cas, c'est une valeur du flux de  $P$  qui sont des contraintes influx sur l'interface de contact (frontière). On parle de conditions de **Neumann** :

Pour un point M sur la frontière  $\partial\Omega$  :  $(\nabla P)_{(M)} \cdot \vec{n}_{out} =$  une valeur imposée

– On trouve aussi la condition mixte de **Robin**:

Pour un point M sur la frontière  $\partial\Omega$  :  $(\nabla P)_{(M)} \cdot \vec{n}_{out} =$  une valeur imposée



**Figure IV-4** : Système de couplage entre Fluide-structure

Nous considérons que l'interface contient une vitesse  $V$  continue au cours du temps. Ceci implique que

$$V = \dot{u} \text{ en } \Gamma(t) \quad (\text{IV-21})$$

Les forces tangentielles sont équilibrées mécaniquement en interface pour éviter la perturbation fréquentielle et la somme des forces de contact soit nulle.

$$t_f + t_s = 0 \text{ en } \Gamma(t) \quad (\text{IV-22})$$

Avec les vecteurs interfaces normaux suivants :

$$n = n_f = -n_s \quad (\text{IV-23})$$

La condition de Dirichlet permet d'écrire les conditions d'interface avec deux milieux de différente nature fluide visqueux et solide élastique aussi de différente déformation à travers le temps ou le solide se déforme par la présence d'une force

appliquée et le fluide se déforme en présence de la vitesse, que nous imposons. Nous prenons donc les hypothèses suivantes :

[101], [102], [103]:

$$x^{s0} + d = x \dot{d} = v, \dot{d} = \dot{v} \vec{v}_s \vec{n} = \vec{v}_f \vec{n} \quad \text{dans } \Gamma \times T \quad (\text{IV-24})$$

Afin d'atteindre le problème FSI couplé, les champs du solide et fluide doivent être connectés le long de l'interface  $\Gamma$ . La solution du problème global nécessite une continuité cinématique et dynamique à travers  $\Gamma$  à chaque instant de  $T$ , où  $x$  désigne la position de la frontière fluide et  $x^{s0}$  représente la position initiale du point structurel. Dans la plupart des cas,  $x^{s0}$  sera identifié avec la coordonnée lagrangienne  $X$ .

Dans Figure IV-3 des conditions aux limites sans glissement à l'interface  $\Gamma$  ont été supposées. Si le glissement doit être possible, les composantes normales des variables cinématiques sont couplées exclusivement [125].

$$(\sigma_f - \sigma_s)n = 0 \text{ en } \Gamma(t) \text{ ou } \overline{\sigma_s \vec{n}} = \overline{\sigma_f \vec{n}} \quad (\text{IV-25})$$

#### **IV.4. Les équations d'ondes :**

Avant d'entamer les déplacements vibratoire [104] il faut comprendre que il y a des équations d'onde unidimensionnel, bidimensionnel et tridimensionnel c'est à dire le choix du mouvement à étudier (analyser) comme solide ou la structure ou un phénomène physique spéciale (chimique, atomique,...etc.). La raison de l'étude ou analyse la perturbation des ondes qui se déplace dans un milieu permanent pour éviter généralement les ondes progressive.

- Si la perturbation perpendiculairement à la direction de propagation des ondes est dite transverse.
- Si la perturbation long de la direction de propagation en dite longitudinale.

Tout point de la perturbation est en fonction du point du temps à tout instant  $t$ . La perturbation sonore c'est la variation de pression dans un milieu, c'est la perturbation qui se déplace et non les particules du milieu.

#### **IV.6. Ondes unidimensionnelles 1D :**

Supposons qu'une onde se déplace suivant un axe  $x$  (ondes directes) avec une vitesse constante  $v$  et sans changement de forme (c'est-à-dire non dispersion) et que la perturbation et parallèlement à l'axe des  $y$ , alors on a

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (\text{IV-26})$$

Si en a une décroissante d'onde suivant la direction x. Alors l'équation (IV.26) devient :

$$y(x, t) = f(x + vt) \quad (\text{IV-27})$$

C'est ce qu'on appelle l'onde arrière. Équations. (IV-26) et (IV-27) satisfont l'équation aux dérivées partielles du second ordre (C'est l'équation des cordes vibrantes en mouvement [105]):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{IV-28})$$

Pour corps oscillent en mouvement harmonique à la même pulsation  $\omega$  et avec constante de phase  $\alpha$ . Est égale à :

Alor l'expression générale d'onde stationnaire est [106] :

$$y(x, t) = A(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (\text{IV-29})$$

Où  $A(x)$  est :

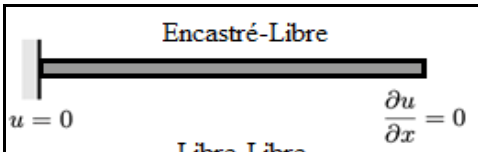

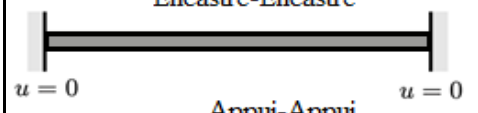
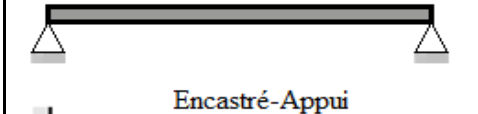
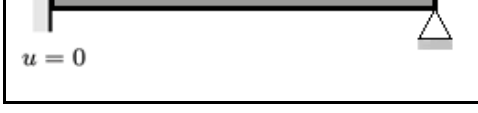
$$A(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) = A \sin kx + B \cos kx \quad (\text{IV-30})$$

Ainsi, la solution générale pour le déplacement d'onde stationnaire est

$$y(x, t) = (A \sin kx + B \cos kx) \sin(\omega t + \alpha) \quad (\text{IV-31})$$

Suivant les conditions aux limites la pulsation k est égale à :

Tableau IV-2 : Nombre d'ondes et conditions aux limites

Condition Limites	Nombre d'onde	Formes mode
 <p>Encastré-Libre Libre (E-L) <math>u = 0</math> <math>\frac{\partial u}{\partial x} = 0</math></p>	$k = \frac{(2m-1)\pi}{2L}$	$u_r(z) = \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2L}z\right)$
 <p>Libre-Libre (L-L) <math>\frac{\partial u}{\partial x} = 0</math> <math>\frac{\partial u}{\partial x} = 0</math></p>	$k = \frac{m\pi}{L}$	$u_r(z) = \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$
 <p>Encastré-Encastré (E-E) <math>u = 0</math> <math>u = 0</math></p>	$k = \frac{m\pi}{L}$	$u_r(z) = \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$
 <p>Appui-Appui Simple appui Simple appui (S-S) <math>u = 0</math> <math>u = 0</math></p>	$k = \frac{m\pi}{L}$	$u_r(z) = \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$
 <p>Encastré-Appui (E-A) <math>u = 0</math> <math>u = 0</math></p>	$k = \frac{(4m+1)\pi}{4L}$	$u_r(z) = \sin\left(\frac{(4m+1)\pi}{4L}z\right)$

Dans le cas d'un déplacement nul à l'origine, nous avons :

$$y(t, 0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad y(t, L) = 0 \Rightarrow A \sin kL = 0 \quad (IV-32)$$

$A = 0$ , ne peut pas retenue, la solution est donc  $\sin(kL) = 0$ :

$$k = k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

La fonction (IV-31) devient comme suit [105] :

$$y_m(x, t) = A_m \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(\omega_m t + \alpha_m) \quad (IV-33)$$

La formule générale de la fonction de déplacement suivant x direction direct :

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(\omega_m t + \alpha_m) \quad (IV-34)$$

Avec

$$\frac{\omega L}{v} = m\pi \quad (IV-35)$$

Si nous choisissons que les déplacements maximaux se produisent à  $t = 0$ , alors on a l'angle de phase  $\varphi$  est nul alors (IV-33).

$$y(x, t) = f(x) \cos \omega t \quad (\text{IV-36})$$

où  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Ainsi,  $\omega$  doit prendre l'une des valeurs données par l'équation (IV-36) et nous l'écrivons donc

$$\omega_m = \frac{m\pi v}{L} \quad (\text{IV-37})$$

où pour chaque valeur de  $m$  nous avons un  $\omega_m$  associé. En remplaçant  $\omega = \omega_m$  dans l'équation (IV-31) et en rappelant que  $B = 0$ , on obtient

$$f_m(x) = A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \quad (\text{IV-38})$$

Pour chaque valeur de  $m$  nous avons une fonction associée  $f_m(x)$  qui est de forme sinusoïdale avec une amplitude. En remplaçant la solution (IV-38) par  $f(x)$  et l'équation (IV-37) par  $\omega = \omega_m$  dans l'équation (IV-37) nous obtient [107]:

$$y_m(x, t) = A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos \omega_m t \quad (\text{IV-39})$$

En général, le mouvement de modes normaux sera donnés par

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos \omega_m t \quad (\text{IV-40})$$

Comme on travaille sur le modèle d'une conduite cylindrique à section circulaire avec la présence du fluide à l'intérieur de la conduite, l'équation du mouvement onde d'oscillation ou vibration en deux dimensions devient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (\text{IV-41})$$

La solution de l'équation (IV-41):

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \{\cos \omega_{mn}t + \cos \omega_{mn}t\} \quad (\text{IV-42})$$

Où l'équation de déplacement ondes ou oscillation est :

$$f_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{IV-43})$$

Un bloc solide de n'importe quel matériau a toujours un certain degré d'élasticité et, par conséquent, un spectre de modes normaux de vibration.

Dans le cas de systèmes unidimensionnels et bidimensionnels, nous avons pu discuter et mettre en évidence les modes caractéristiques d'oscillation transversale d'une manière assez vivante. Nous nous contenterons donc de signaler qu'on peut établir, pour trois dimensions, une équation différentielle du mouvement qui est en stricte analogie avec les équations que nous avons précédemment établies pour une et deux dimensions. L'équation sera de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{IV-44})$$

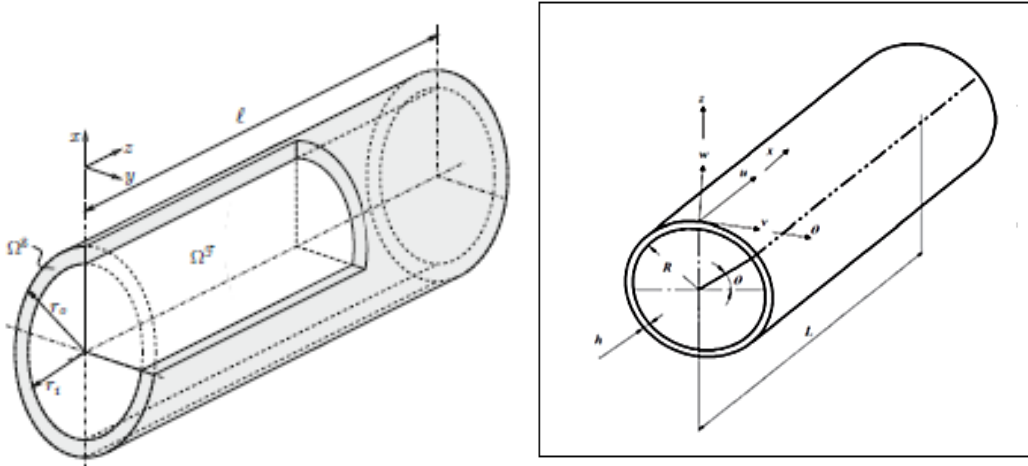
Notre travail se base sur une conduite cylindrique de section circulaire sur le développement fait dans [108], [108], [110], [111], [112], [113], [114] et de trouver les matrices de masse et de rigidité du système. Ce type d'élément (voir Figure II-10) a deux cercles nodaux avec deux points nodaux : i et j. Il y a 3 degrés de liberté à chaque nœud : ont supposé que les déplacements vibratoires axiaux, circonférentiels et radiaux. Ce type d'élément permet d'utiliser des coques minces ou élément 3D, pour trouver facilement la solution exacte des fonctions de déplacement plutôt qu'une approximation avec des fonctions polynomiales, comme cela se fait dans le MEF classique, remplacé par la méthode MEFH. Considérant le déplacement de manière normale comme avec n mode circonférentiel [115]

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= U_x(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\alpha \cos \omega t \\ u_y(x, y, z, t) &= U_y(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\alpha \cos \omega t \\ u_z(x, y, z, t) &= U_z(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\alpha \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{IV-45})$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= U_r(z) \cos n\theta \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \omega t \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= U_\theta(z) \sin n\theta \sin \frac{m\pi z}{L} \cos \omega t \\ u_z(r, \theta, z, t) &= U_z(z) \cos n\theta \sin \frac{m\pi z}{L} \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{IV-46})$$

Certaines conditions aux limites courantes pour les mouvements axiaux sont illustrées à Tableau IV-2, avec des déplacements longitudinales courantes sont présentés.



**Figure IV-5 :** déplacements dans un système de coordonnées cylindriques

Les fréquences naturelles les plus basses d'une coque cylindrique sont généralement dominantes dans la direction radiale, donc pour de tels modes, on peut supposer que les déplacements tangentiels sont relativement faibles. Compte tenu d'une telle hypothèse, une simplification importante est fréquemment appliquée, en négligeant les termes d'inertie tangentielle dans les équations du mouvement. Dans cette procédure, la masse de la coque est traitée comme si elle avait trois composantes ; avec les composantes dans le plan négligées (égales à zéro). La première et la plus évidente conséquence de la négligence des termes d'inertie tangentielle dans les équations du mouvement est la réduction des matrices.

#### IV.6. Oscillations libres :

##### IV.6.1. Mouvement harmonique simple (MHS) :

Le mouvement harmonique simple (SHM) est un type de mouvement périodique qui est régi par une force restauratrice qui est proportionné au déplacement par rapport à une position d'équilibre. C'est l'un des mouvements les plus fondamentaux en physique et il se trouve dans de nombreux systèmes physiques, tels que les ressorts, les pendules et les oscillateurs électriques.

L'harmonique simple est un concept fondamental en mouvement physique et est largement utilisé pour modéliser de nombreux phénomènes naturels et systèmes mécaniques. Il permet de comprendre et d'analyser les oscillations et les vibrations

dans diverses applications, de l'horlogerie aux systèmes oscillants complexes tels que les oscillations moléculaires.

Les oscillations et les vibrations sont les phénomènes les plus fréquents. Il est essentiel de comprendre la nature des oscillations et des vibrations. L'oscillation est un mouvement répétitif qui se produit lorsqu'une force variable dans le temps agit sur le système. Les oscillations sont des mouvements périodiques répétitifs. Les oscillations se produisent sans l'action d'une force périodique externe, ces oscillations sont appelées oscillations libres. SHM est un type particulier de mouvement périodique. Le mouvement d'un objet est dit mouvement harmonique simple si la force de rappel est directement proportionnelle au déplacement du mouvement. Défini comme la projection du mouvement circulaire uniforme sur le diamètre par rapport au temps. Le mouvement du poids attaché au ressort oscillant est les meilleurs exemples de SHM [116]. Notre étude est basé sur le modèle SHM qui élimine l'angle de phase  $\alpha = 0$  équation (IV-33) ou (IV-34) devient (IV-47).

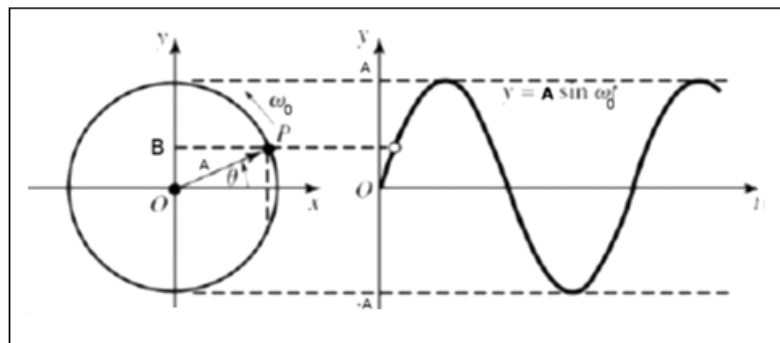


Figure IV-6 : Oscillation suit MHS du system Masse-raideur

$$y_m(x, t) = A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(\omega_m t) \quad (IV-47)$$

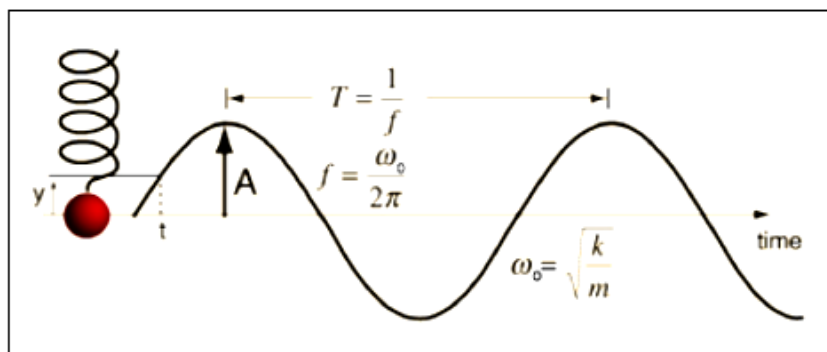


Figure IV-7 : Harmonique Simple mouvement SHM

Pour avoir la possibilité de trouver les fréquences propres de système masse raideur du fluide et solide ou structure avec le modèle du couplage (IV-48) (conduite cylindrique), conditionné par les modes longitudinaux  $m$  et circonférentiels  $n$

$$\begin{aligned} [M]_{\text{solide}}\{\ddot{u}\} + [K]_{\text{solide}}\{u\} &= 0 \\ [M]_{\text{interface}}\{\ddot{u}\} + [K]_{\text{interface}}\{u\} &= 0 \\ [M]_{\text{fluide}}\{\ddot{V}\} + [K]_{\text{fluide}}\{V\} &= 0 \end{aligned} \quad (IV-48)$$

Comme on néglige la masse d'interface (couplage par raideur) [117] suivant le modèle de Hooke qui nous permet d'assembler la masse équivalente sous la forme suivante  $M_{eq} = \frac{M_f + M_s}{M_f \cdot M_s}$  [118], Comme mentionné l'application de la théorie Narrows sur l'intégrale en temps [119] sur fluide on a alors l'équation du système de mouvement suivant:

#### IV.6.2 Equation du fluide :

Ces équations sont la base de la mécanique des fluides et peuvent être utilisées pour résoudre une grande variété de problèmes, tels que la dynamique des fluides, les écoulements autour des objets, les vagues, etc. Elles peuvent être simplifiées ou modifiées en fonction des hypothèses et des conditions spécifiques du problème examiné.

On peut écrire l'équation de Navier-stokes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \rho \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] & 0 & 0 \\ 0 & \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \mu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV-49)$$

Alors en a:

$$v_r = \sum N v_r ; v_\theta = \sum N v_\theta ; v_z = \sum N v_z$$

$$\rho [N] \begin{Bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{v}_\theta \\ \dot{v}_z \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} v_r & v_\theta & v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial z} & -\frac{N}{r} & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial N}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] & -\frac{2}{r^2} \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 \\ \frac{2}{r^2} \frac{\partial N}{\partial \theta} & \mu \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \mu \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (IV-50)$$

$$- \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_r \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{Bmatrix}$$

### 1. fluide incompressible :

Ces équations spécifiques pour un fluide incompressible simplifient les calculs et sont couramment utilisées pour étudier les écoulements de fluides tels que les écoulements autour d'objets, les écoulements à travers des conduites, etc.

Pour un fluide incompressible, la masse volumique  $\rho$  est une constante (dans le temps et l'espace). Par conséquent, le bilan de masse se simplifie en :

$$\text{div } v = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left( \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{v}_\theta \\ \dot{v}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \theta} & -N & 0 \\ N & \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_r & v_\theta & v_z \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & -2 \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 \\ 2 \frac{\partial N}{\partial \theta} & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (IV-51)$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_r \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{Bmatrix}$$

## 2. Écoulement irrotationnel :

Un écoulement irrotationnel est un type d'écoulement de fluide dans lequel la vitesse du fluide en chaque point ne possède pas de rotation locale. Cela signifie que la circulation du vecteur vitesse le long de toute courbe fermée dans le fluide est nulle.

Alors il existe une fonction scalaire appelée potentiel des vitesses, vérifiant que  $\vec{v} \equiv \nabla \Phi$ . Si, de plus, l'écoulement est à divergence nulle ( $\text{div } v = 0$ ), alors Laplacien du potentiel est nul  $\Delta \Phi = 0$ .

Donc on trouve :

$$\begin{aligned} \rho \left( [N] \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \right) \times \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \\ - \mu \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_r \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_r \\ \xi_\theta \\ \xi_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-52})$$

## 3. Intégrale de Galerkin:

L'intégrale de Galerkin est une méthode utilisée dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles (EDP) pour approximer les solutions. Cette méthode est basée sur le principe de la projection des équations sur un espace de fonctions de test approprié. Cet espace est généralement de dimension finie et est choisi de manière à être suffisamment souple pour bien désigner la solution réelle. Pour appliquer la méthode de Galerkin, on projette les équations de l'EDP sur cet espace d'approximation en utilisant des fonctions de test appropriées. Cela se fait généralement en multipliant les équations de l'EDP par les fonctions de test et en les intégrant dans le domaine d'intérêt. Ensuite, on effectue une discrétisation du problème en approximant les fonctions de test et la solution par des fonctions discrètes (par exemple, des polynômes ou des éléments finis).

Les équations de Navier – Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires dans le cas général et restent donc dans presque toutes les situations réelles. Dans certains cas, tels que l'écoulement unidimensionnel et l'écoulement de Stokes (ou écoulement rampant), les équations peuvent être simplifiées en équations linéaires. La

non linéarité rend la plupart des problèmes difficiles ou impossibles à résoudre et est le principal contributeur à la turbulence que modélisent les équations. La non-linéarité est due à une accélération convective, qui est une accélération associée au changement de vitesse sur la position. Par conséquent, tout écoulement convectif, qu'il soit turbulent ou non, impliquera une non-linéarité. Un exemple d'écoulement convectif mais laminaire (non turbulent) serait le passage d'un fluide visqueux (par exemple, de l'huile) à travers une petite buse convergente. De tels flux, qu'ils soient exactement solubles ou non, peuvent souvent être étudiés et compris de manière approfondie. Pour mieux comprendre les mécanismes d'application de cette décomposition dans l'étude d'équations aux dérivées partielles, nous nous proposons d'étudier dans cette section le système suivant qui est une simplification des équations de Navier-Stokes classiques :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p + g, & \text{div}(\vec{v}) = 0, \\ \vec{v}(0, x) = \vec{v}_0, & \text{div}(\vec{v}_0) = 0, \end{cases} \quad (\text{IV-53})$$

Où  $u_0$  est une donnée initiale que l'on supposera a divergence nulle,  $g$  est une force extérieure donnée. Remarquons que la condition de divergence nulle imposée a la donnée initiale correspond au fait que l'on cherchera des solutions  $\vec{v}(t, x)$  qui sont continués en variable de temps, on s'attend donc à obtenir la limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \vec{v}(t, x) = \vec{v}(0, x)$  et par souci de compatibilité il est totalement naturel d'imposer la condition  $\text{div}(u_0) = 0$ .

$$\begin{aligned} & \rho \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \\ & + \rho \left( \begin{bmatrix} N \frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & N \frac{\partial N}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & N \frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} N \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & N \frac{\partial N}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & N \frac{\partial N}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \frac{\partial N}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & N \frac{\partial N}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & N \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \\ & \text{suivant la proche de Stokes } (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \\ & - \mu \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_z \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-54})$$

Donc équation du fluide proposé par les approches est comme suit:

$$[M_f] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_\theta \\ \ddot{u}_z \end{Bmatrix} + [K_f] \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = F_P + F_G \quad (\text{IV-50})$$

#### 4 Déformations dans un écoulement :

Les déformations dans un écoulement se réfèrent aux changements de forme et de taille d'un fluide lorsqu'il se déplace. Ces déformations peuvent être caractérisées par des grandeurs telles que la déformation linéaire, la déformation angulaire et le taux de déformation. La déformation linéaire mesure le changement relatif de longueur d'une ligne dans le fluide. Elle est donnée par la formule :

Déformation linéaire = (longueur finale - longueur initiale) / longueur initiale

La déformation angulaire mesure le changement d'angle relatif entre deux lignes qui se croisent dans le fluide. Elle est donnée par la formule :

Déformation angulaire = (angle final - angle initial) / angle initial

Le taux de déformation représente la vitesse à laquelle les déformations se produisent dans le fluide. Il est généralement exprimé en termes de gradients de vitesse. Par exemple, dans un écoulement laminaire, le taux de déformation est proportionnel au gradient de vitesse. Dans certains cas, les déformations dans un écoulement peuvent être élastiques, c'est-à-dire que le fluide retrouve sa forme d'origine une fois que les forces qui le déforment cessent d'agir. Dans d'autres cas, les déformations peuvent être permanentes, ce qui signifie que le fluide conserve sa nouvelle forme même après l'arrêt des forces extérieures.

##### 4.1 Décomposition du gradient de vitesse :

Nous verrons que la dynamique des écoulements est régie par les gradients de vitesse, c'est-à-dire par le mouvement relatif des particules de fluide. Il faut de ce fait analyser en détail les déformations subies par un élément de fluide placé dans un écoulement. Si deux particules de fluide sont placées respectivement en  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , la

$$\delta\epsilon_i = \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta r_j \delta t \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta r_j \delta t$$

différence de leur déplacement pendant un temps  $t$  est :

L'équation devient :

$$\frac{\rho}{2} * \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_\theta \\ \ddot{u}_z \end{Bmatrix} - \frac{\mu}{2} * \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_j}{\partial r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_k}{\partial r^2} \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_j}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_k}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_k}{\partial z^2} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_\theta \\ \ddot{u}_z \end{Bmatrix} = F_P + F_G \quad (\text{IV-51})$$

### 5 Equation de mouvement pour solide :

L'équation de mouvement pour un solide peut être traduite à l'aide des principes fondamentaux de la mécanique newtonienne. Ces principes sont basés sur la seconde loi du mouvement de Newton, qui énonce que la force appliquée à un objet est égale au produit de sa masse par son accélération (Voir annexe).

### 6 Matrice de rigidité pour un matériau isotrope :

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions. Dans ce cas le nombre de constantes d'élasticité est réduit à (2) et la matrice de rigidité prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-52})$$

Les coefficients de la matrice de rigidité sont exprimés en fonction des coefficients de Lamé ( $\mu$ ) et ( $\lambda$ ) :

$$C_{11} = \lambda + 2\mu ; \mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$

### 7 Loi fondamentale de la dynamique :

La loi fondamentale de la dynamique est l'un des principes fondamentaux de la mécanique classique et constitue la base du formalisme mathématique utilisé pour étudier les mouvements des objets dans le monde physique. Elle permet de prédire et d'expliquer les mouvements des objets en réponse aux forces qui leur sont appliquées.

En mécanique des matériaux, la loi fondamentale de la dynamique peut également être formulée en termes de contraintes. Elle est basée sur le principe d'équilibre des contraintes à l'intérieur d'un solide déformable.

Pour un problème dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_j} + f_i = \text{div}(\sigma_{ij}) = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (\text{IV-53})$$

Cette équation stipule que la divergence du tenseur des contraintes, combinée aux forces externes appliquées sur le solide, est égale au produit de la masse volumique du matériau par l'accélération du solide. En d'autres termes, elle établit l'équilibre entre les forces internes et externes agissant sur le solide déformable.

Alors que

$$\begin{bmatrix} \left( D_{rr} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} \right) + \frac{D_{r\theta}}{2r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} + D_{rz} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) & \frac{D_{r\theta}}{2r} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial N}{r \partial \theta} \right) & D_{rz} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial r \partial z} \right) \\ D_{r\theta} \left( \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta \partial r} + \frac{D_{\theta\theta}}{r^2} + r \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{D_{\theta\theta}}{r^2} \left( r \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} - \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) + D_{r\theta} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} - \frac{N}{r^2} \right) + D_{\theta z} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) & D_{\theta z} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta \partial z} \right) \\ D_{rz} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial z} \right) & \frac{D_{r\theta}}{r} \frac{1}{2} \left( + \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial \theta} \right) & \left( D_{zz} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{D_{r\theta}}{2r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} + D_{rz} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} \right) \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} f_r + \frac{d^2 u_r}{dt^2} \\ f_\theta + \frac{d^2 u_\theta}{dt^2} \\ f_z + \frac{d^2 u_z}{dt^2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-54})$$

Nous obtenons l'équation de mouvement suivante :

$$[M_{solide}]\{\ddot{u}\} + [K_{solide}]\{u\} = 0 \quad (IV-55)$$

### 8 Équation au niveau de l'interface :

L'équation au niveau de l'interface entre un fluide et un solide dépend du type d'interaction et du comportement des deux milieux. Dans le cas général, l'équation qui décrit l'interface fluide-solide est appelée condition de continuité des contraintes ou condition de glissement.

La condition de continuité des contraintes stipule que la contrainte tangentielle conservée par le fluide sur la surface solide doit être égale à la contrainte tangentielle conservée par le solide sur le fluide à l'interface. Cette égalité des contraintes tangentes est essentielle pour que l'interface en équilibre et pour assurer une continuité mécanique entre les deux milieux.

Comme en a la condition de L'interface par port les efforts appliquées entre fluide et structure :

$$\sigma_{FLUIDE} = \sigma_{STRUCTURE}$$

$$\sigma_{FLUIDE \text{ NEWTONIAN}} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = \sigma_{ij} = \sigma_{STRUCTURE}$$

$$-\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (IV-56)$$

La démonstration du calcul en le trouve dans l'annexe

Suivant la définition d'interface on a :

$$[K_{couplage}] = \frac{Ad_{sou}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV-57)$$

Suivant le principe d'élément de contact par l'interface bien choisi, où le couplage joue un rôle d'une force de contact qui nous permet de négliger la masse;  $[M_{couplage}] = 0$ .

$$[M_{COUPLAGE}]\{\ddot{u}\} + [K_{COUPLAGE}]\{u\} = 0 \quad (IV-58)$$

et pour éviter la déstabilisation en remplace la masse de couplage par la masse équivalente, l'équation de mouvement (IV-58) devient :

$$[M_{equivalente}]\{\ddot{u}\} + [[K_{COUPLAGE}]]\{u\} = 0 \quad (IV-59)$$

L'équation de mouvement du système et :

$$\begin{bmatrix} M_{solide} & 0 & 0 \\ 0 & M_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & M_{fluide} \end{bmatrix} \{\ddot{u}\} + \begin{bmatrix} K_{solide} & 0 & 0 \\ 0 & K_{sf} & 0 \\ 0 & 0 & K_{fluide} \end{bmatrix} \{u\} = 0 \quad (IV-60)$$

*Chapitre V*

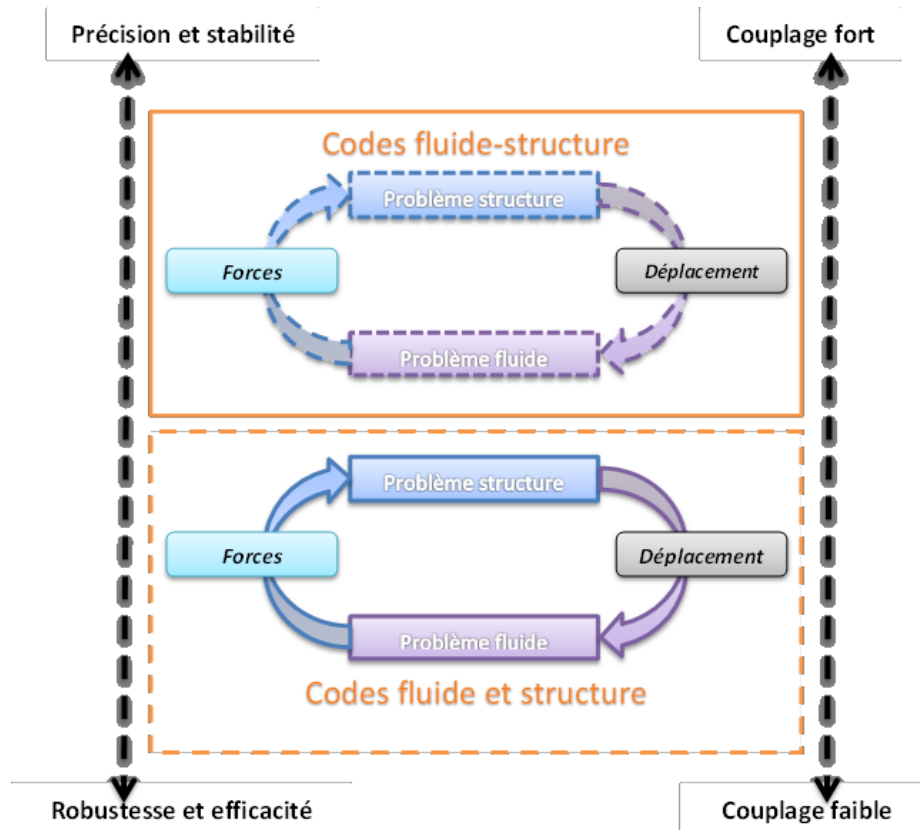
---

**V.1. Introduction**

La méthode des éléments finis est une méthode numérique largement utilisée pour résoudre des problèmes d'ingénierie et de sciences appliquées. Il permet de modéliser et d'analyser le comportement de structures complexes en les subdivisant en éléments plus simples. MATLAB est un environnement de programmation et de calcul scientifique populaire qui fournit des outils puissants pour la mise en œuvre de méthodes numériques, y compris l'élément fini.

En utilisant MATLAB, nous pouvons créer et résoudre des modèles d'éléments finis en suivant quelques étapes clés. Tout d'abord, nous devons définir la géométrie de votre structure et la subdiviser en éléments finis. MATLAB offre différentes fonctionnalités pour générer des maillages et des géométries complexes.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la résolution de l'équation (IV-60) . Pour cela nous allons utiliser le logiciel MATLAB (MAtrix LABoratory), qui est un programme interactif de calcul numérique et de visualisation des données et des résultats. Il est aussi spécialement conçu pour le traitement des matrices, cela le rend particulièrement adapté à la programmation de la méthode des éléments finis hiérarchiques. La nature de la physique impliquée dans les interactions fluides et structures est si diverse, et la portée des méthodes numériques qui peuvent être utilisées pour les représenter est si large qu'il est difficile de proposer une classification générale des techniques de calcul FSI. Cependant, la grande majorité des méthodes existantes peuvent appartenir à l'une des approches représentées sur la Figure V-1, le choix d'une stratégie numérique particulière étant toujours un compromis entre coût de calcul,



**Figure V-1:** Simulation numérique du FSI : code couplé fluide-structure ou stratégie de couplage codes fluide-structure

La méthode des éléments finis est une technique numérique qui donne des solutions approchées à des équations différentielles qui modélisent des problèmes survenant en physique et d'ingénierie.

- Solide
- Fluide
- Interface solide-fluide

Nous devons spécifier les propriétés matérielles de chaque élément, telles que la rigidité, l'élasticité ou la conductivité thermique. Ces informations sont souvent déterminées à partir des propriétés du matériau réel utilisé dans la structure. Une fois que vous avez défini la géométrie et les propriétés matérielles, vous devez établir les équations du modèle d'éléments finis. Cela implique généralement la formulation d'un système d'équations linéaires, qui décrit le comportement de la structure. MATLAB propose des fonctions pour assembler ces équations en utilisant des méthodes d'éléments finis telles que les éléments linéaires, quadratiques ou d'ordre supérieur.

Il est modélisé par la méthode des éléments fini. La Figure V-2 représente le schéma de calcul.

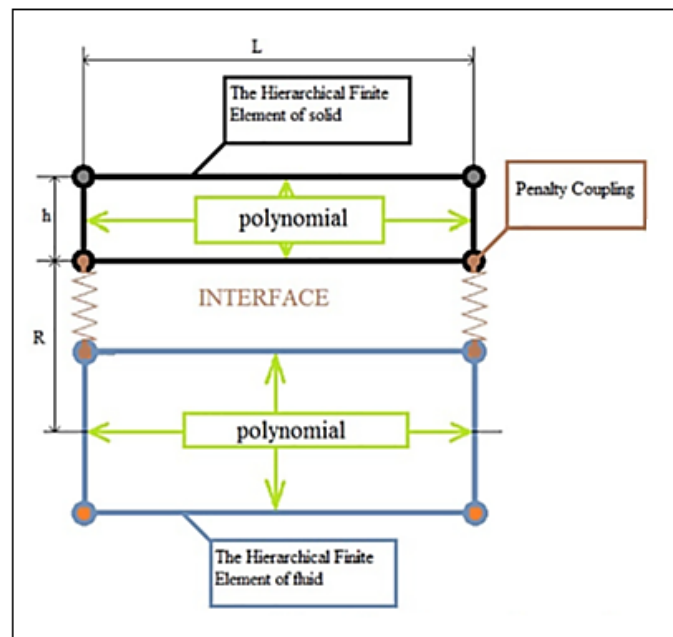


Figure V-2 : Interaction Fluide-structure en couplage par penalty

### V.2. Algorithme :

L'algorithme général pour résoudre un problème d'éléments finis en utilisant MATLAB peut être décrit en plusieurs étapes :

- 1- Définir la géométrie : spécification de la forme et les dimensions de la structure que vous souhaitez ensuite analyser à l'aide de fonctions MATLAB. Cela peut inclure la création de points, de lignes, de surfaces ou de volumes qui représentent la géométrie de votre modèle.
- 2- Générer le maillage : Division de la géométrie en éléments plus petits (par exemple, des triangles ou des quadrilatères pour les modèles 2D, ou des tétraèdres ou des hexaèdres pour les modèles 3D). MATLAB propose des outils pour créer automatiquement des maillages ou vous pouvez créer votre propre maillage en spécifiant les connexions entre les nœuds.
- 3- Spécifier les propriétés matérielles : Définition des propriétés matérielles de chaque élément, telles que la rigidité, l'élasticité, la conductivité thermique, etc. Ces propriétés sont généralement déterminées à partir des caractéristiques du matériau réel utilisé dans la structure.

- 4- Formuler les équations d'éléments finis : Utilisation des lois de comportement pour formuler les équations qui comportent le comportement de la structure. Cela peut inclure des équations d'équilibre statique, des équations de diffusion, des équations d'élasticité, etc. Assemblez ces équations pour construire un système d'équations globales.
- 5- Appliquez les conditions aux limites : spécification des conditions aux limites du problème, telles que les forces appliquées, les déplacements imposés ou les températures aux frontières. Ces conditions produisent les restrictions et les interactions entre votre structure et son environnement.
- 6- Résoudre le système d'équations : Utilisation des fonctions de résolution de MATLAB pour résoudre le système d'équations linéaires ou non linéaires résultant de l'assemblage des équations d'éléments finis. Nous pouvons choisir parmi différentes méthodes de résolution en fonction de la nature du problème et de sa taille.
- 7- Analyser les résultats : Une fois le système d'équations résolu, nous pouvons extraire les résultats souhaités, tels que les déformations, les contraintes, les températures, etc. Nous pouvons aussi utiliser les fonctionnalités de visualisation de MATLAB pour représenter graphiquement les résultats et les analyser.

Les solutions de ces équations sont obtenues à l'aide des techniques d'algèbre linéaire. Pour arriver à ces résultats nous avons établi un programme qui calcule les matrices de masse et raideur du solide, puis les matrices de masse et raideur du fluide suivant les données à saisir avec la vérification de la convergence pour différent degré de liberté du polynôme. On détermine ensuite la matrice de l'interface utilisée dans notre système IFS qui s'appelle le couplage, une fois on obtient les équations de mouvement, le programme va calculer les fréquences propre de chaque équations de mouvement solide seule et fluide seul en suite pour tout le système. Notre travail est basé sur le fait qu'il suit le schéma de l'élément fini hiérarchique, comme le montre la Figure IV-7

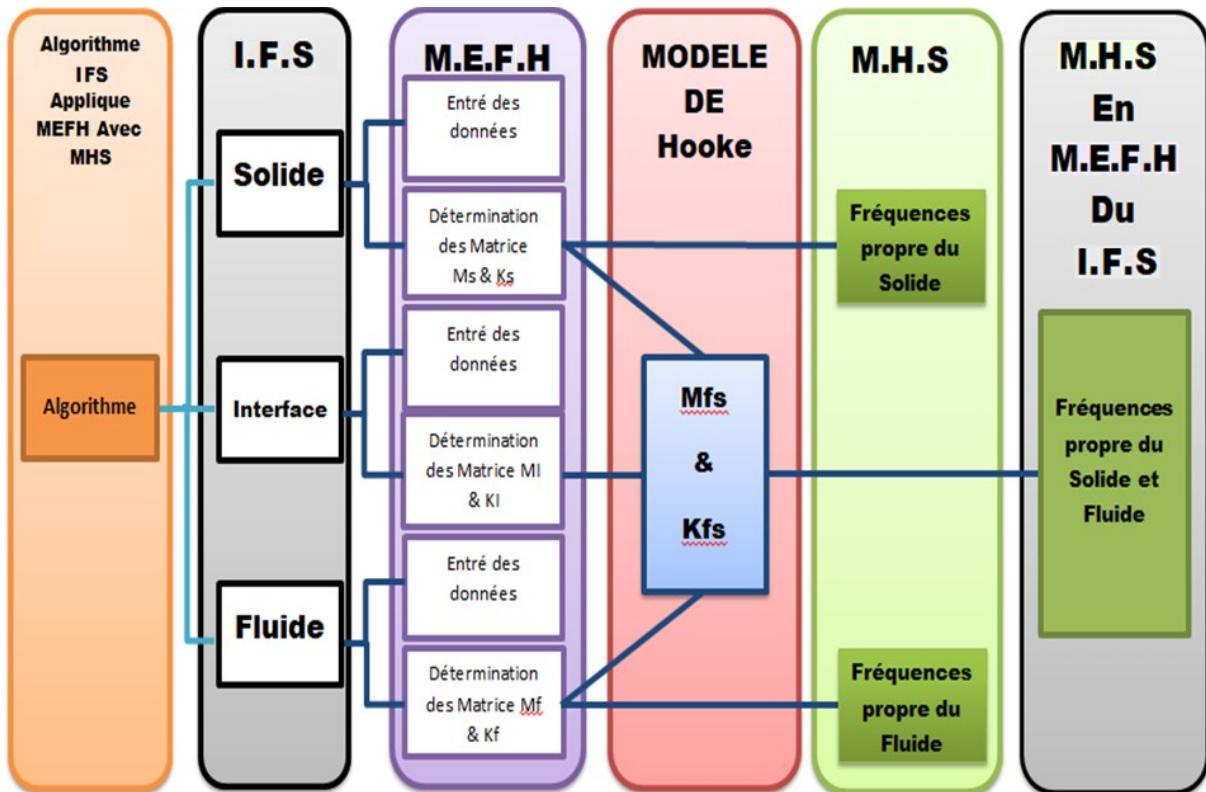


Figure V-3 : Algorithme de calcul

V.3. Validation :

Dans les tableaux suivants, nous comparons les fréquences propres d'un tube Encastré-Encastré de caractéristiques physiques et mécaniques différentes avec celles des valeurs expérimentales Maxuch. Et al [120], et les résultats de la référence Yong et al [121] avec les conditions géométriques et physiques pour tuyau solide sans fluide et tuyau solide avec fluide.

Tableau V-1 : référence de validation

solide pipe sans fluide		solide pipe avec fluide	
E	$2.05 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	E	$2.05 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$
$\nu$	0.3	$\nu$	0.3
R/h	51.5	R/h	51.5
L/R	2.99	L/R	2.99
$\rho_s$	$7800 \text{ Kg m}^{-3}$	$\rho_f / \rho_s$	0.128
$p_0$	1 kPa		

La validation de notre programme se fait en étudiant la convergence et la comparaison des résultats déterminés, avec les résultats d'auteurs, selon le modèle hiérarchique d'éléments finis qui contient un élément fini solide et fluide dans la

Figure V-2. Avec l'interface entre les deux, par la taille géométrique variable de l'élément tige pris sous forme de polynôme de n degré de liberté, utilisé comme grille, selon la convergence du polynôme par La méthode de Gauss-Seidel [122], [123] [124] également connue sous le nom de méthode de Liebmann, est une méthode itérative utilisée pour résoudre un système d'équations linéaires montrées dans les Figure V-4 et Figure V-5.

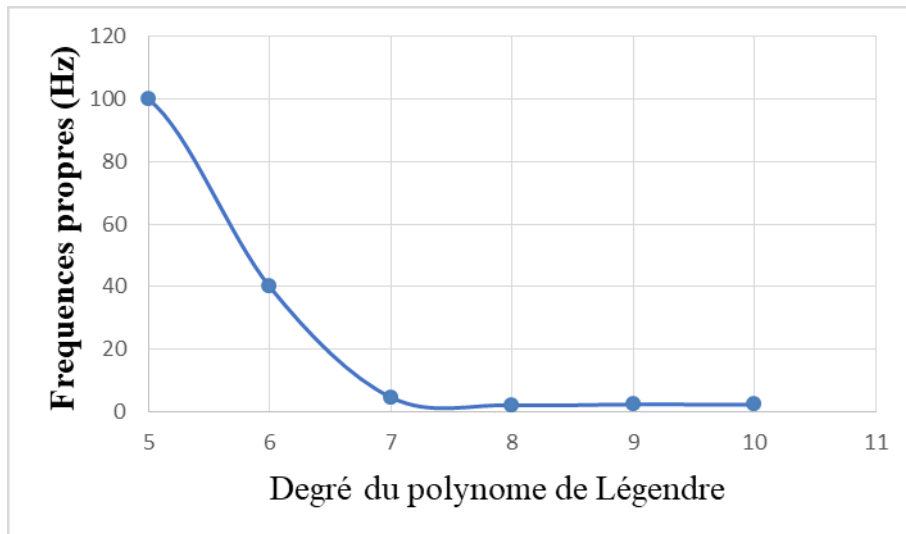


Figure V-4 : Convergence du polynôme pour différents degrés de liberté solide

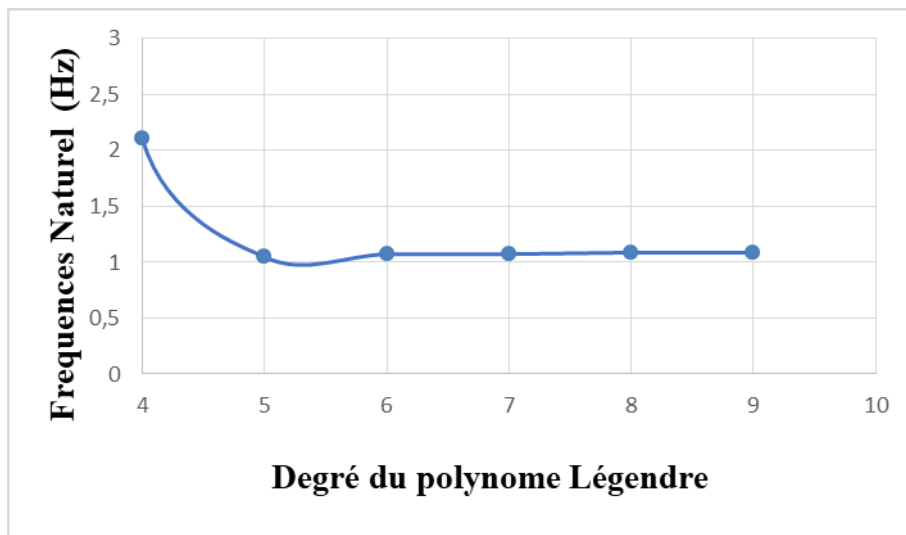


Figure V-5 : Convergence du polynôme pour différents degrés de liberté fluide

Nous constatons que les résultats sont proches des résultats expérimentaux et de ceux de la référence Maxuch. T, Horacek. J. (1996) [120] et on remarque également que les fréquences propres déterminées par la méthode des éléments finis sont plus proches des résultats expérimentaux que la référence Yong Liang Zhang, Daniel G.

Gorman (2003) [121]. Les pourcentages d'écart  $\varepsilon_{ij}$  sont définis dans les tableaux par  $\varepsilon_{ij} = |(100 (f_i - f_j) / f_i)|$  et Figure V-6.

Tableau V-2 : Comparaison entre les fréquences propre

**1.a Solide sans fluide**

mode		Expérimentales f1 (Hz) [43]	Référence FEM f2(Hz) [44]	Ecart (%) $\varepsilon_{21\%}$ expérimentales	Présente Model HFEM f3(Hz)	Ecart (%) $\varepsilon_{31\%}$ [43]	Ecart (%) $\varepsilon_{21\%}$ [44]
n	m						
1	3	616	637,9	3,43	631,07	2,39	1,08
1	2	708	816	13,24	709,9	0,27	14,95
1	4	945	952,8	0,82	895,18	5,57	6,44
1	5	1479	1487,6	0,58	1322,1	11,87	12,52
2	4	1628	1665,3	2,24	1622,9	0,31	2,61
2	5	1851	1853,3	0,12	1815,7	1,94	2,07
2	3	1969	2049	3,90	1880,4	4,71	8,97
1	6	2151	2164,2	0,61	2112,1	1,84	2,47

**1. b Solide avec fluide**

mode		Expérimentales f1 (Hz) [43]	Référence FEM f2(Hz) [44]	Ecart (%) $\varepsilon_{21\%}$ expérimentales	Modèle Présenté FEMH f3(Hz)	Ecart (%) $\varepsilon_{31\%}$ [43]	Ecart (%) $\varepsilon_{21\%}$ [44]
n	m						
1	3	388	370,1	4,84	385,76	0,58	4,06
1	2	421	431,2	2,37	433	2,77	0,42
1	4	628	597,2	5,16	630,02	0,32	5,21
1	5	1027	990,1	3,73	1022,2	0,47	3,14
2	4	1094	1046	4,59	1093,69	0,03	4,36
2	5	1245	1193,6	4,31	1257,5	0,99	5,08
2	3	1299	1234,7	5,21	1256,3	3,40	1,72
1	6	1546	1511,5	2,28	1567,4	1,37	3,57
2	6	1748	1676,2	4,28	1713,1	2,04	2,15

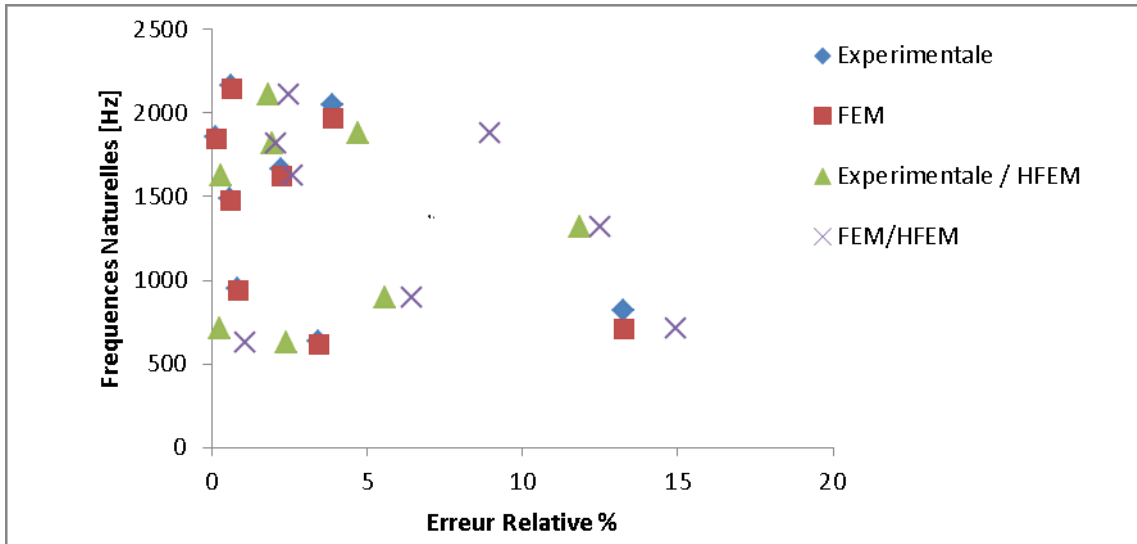


Figure V-6 : Ecart relatif  $\varepsilon\%$  du Tableau 1

#### V.4. Études de cas :

On détermine les paramètres fréquentiels d'un tuyau cylindrique par condition de serrage libre en faisant varier les paramètres physiques et géométriques suivants :

##### V.4.1. Variation de l'épaisseur du cylindrique :

En prenant le mode longitudinal constant, on détermine la variation des modes circonférentiels en fonction de l'épaisseur du tuyau on obtient le graphique suivant sur la Figure V-7:

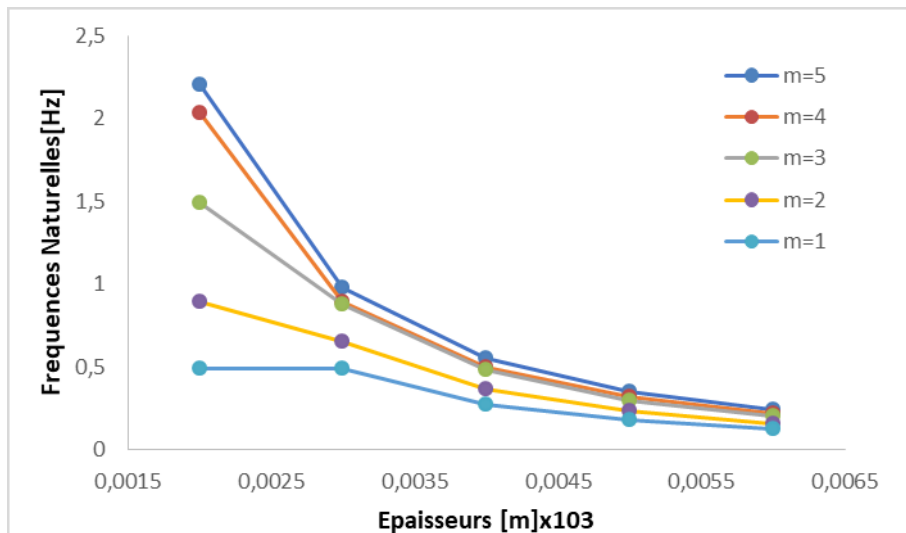


Figure V-7 : Variation de la fréquence propre par rapport l'épaisseur avec différents modes circonférentiels du solide.

**V.4.2. Variation de la longueur du cylindre :**

En considérant que les modes de vibration longitudinale constants, on détermine la variation des modes circonférentiels en fonction de la longueur du cylindre on obtient le graphique suivant sur la Figure V-8:

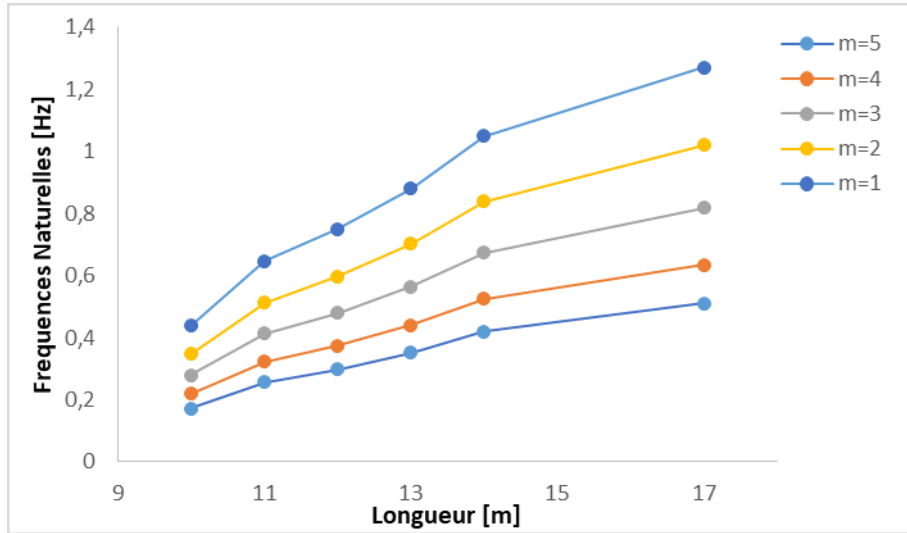


Figure V-8 : Variation de la fréquence propre par rapport la longueur avec différents modes circonférentiel du solide.

**V.4.3. Variation de la longueur du tuyau avec et sans fluide**

En prenant les modes circonférentiels constants, on détermine la variation des modes longitudinaux en fonction de l'épaisseur du tuyau on obtient le graphique suivant dans les f Figure V-9 et Figure V-10

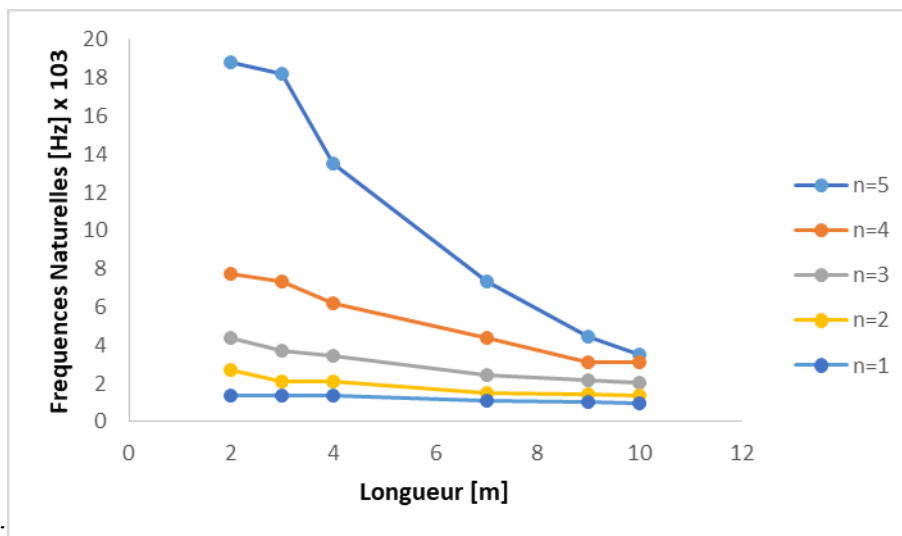


Figure V-9: Variation de la fréquence propre par rapport la longueur avec différents modes longitudinaux du solide.

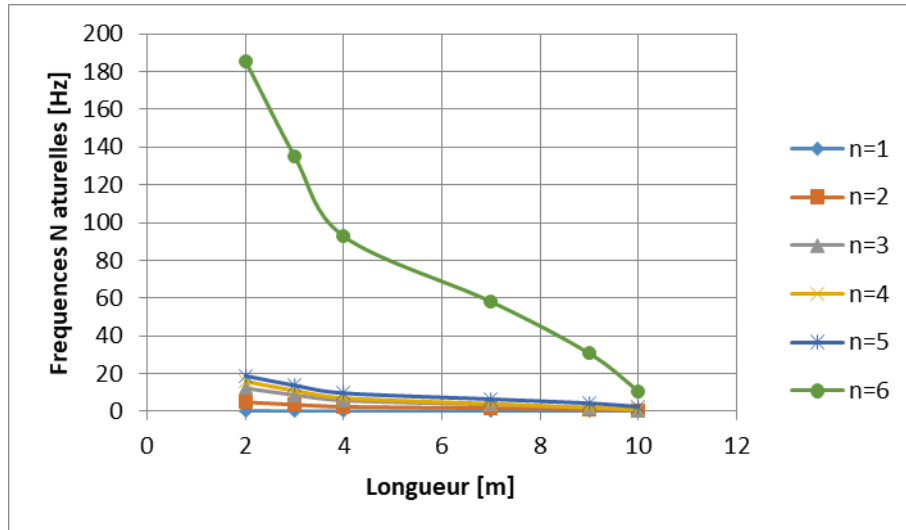


Figure V-10: Variation de la fréquence propre par rapport la longueur avec différents modes longitudinaux du solide avec fluide.

#### V.4.4 Variation du rayon du cylindre avec fluide

En prenant le mode circonférentiel constant, on détermine la variation des modes longitudinaux en fonction du rayon du cylindre, on obtient le graphique suivant à la Figure V-11:

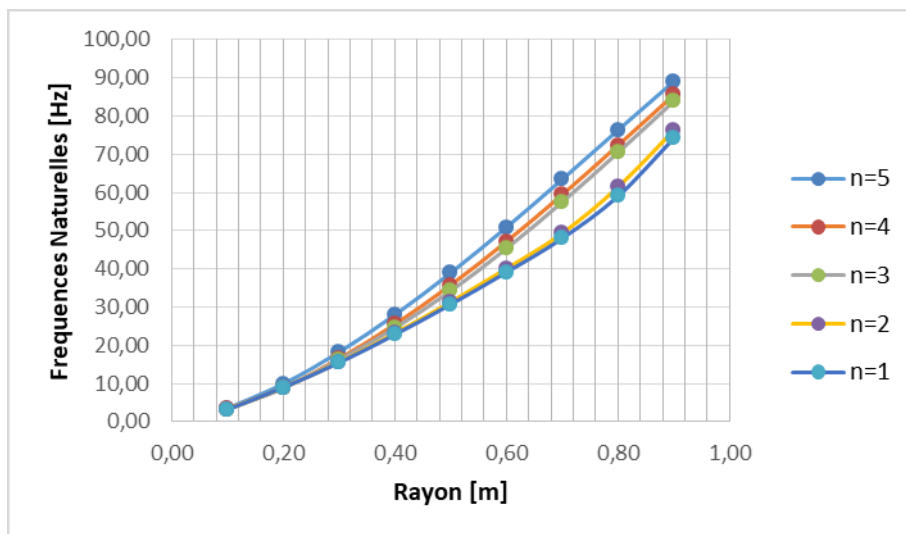


Figure V-11: Variation du rayon en fonction des fréquences propres du solide.

#### V.5. Interprétation :

D'après les Tableau V-2 (1. a) et (1. b), on note un accord parfait avec les résultats expérimentaux par la référence Maxuchet et al en(1996) ; Yong et al en (2003) [120,121]. D'après la figure 30. On voit que la convergence d'un polynôme pour un solide commence par un degré de liberté égal à sept ( $n = 7$ ) par contre, la Figure V-4, montre que la convergence des polynômes commence par  $n = 5$ , donc à partir de ces

résultats (Figure V-4 et Figure V-5). Nous avons choisi un degré de liberté du polynôme legendre  $n = 8$ , comme une assurance de pression pour les résultats avec différents paramètres géométriques et physiques à suivre.

Nous pouvons conclure que la vibration des fréquences propres tient compte des paramètres géométriques et physiques. On a également observé que les fréquences dépendent de la nature des ondes circonférentielles et longitudinales. L'augmentation de diamètre a permis d'augmenter la fréquence propre de la structure en l'absence de fluide, pour les conditions aux limites et les différents modes vibratoires circonférentiels et axiaux. Cela signifie que la rigidité augmente avec la déformation de la structure. Mais d'autre part, la présence du fluide à l'intérieur de la structure donne une diminution significative des fréquences propres et donne une stabilité structurelle ou le fluide joue un rôle de masse ajoutée à la structure, on peut dire que l'énergie vibratoire de la structure a été absorbée, par la présence du fluide, c'est un gain supplémentaire pour minimiser l'énergie fréquentielle.

On constate que l'augmentation de l'épaisseur du cylindre diminue la valeur des fréquences propres circonférentielles de la structure, avec ou sans fluide. De plus, l'augmentation de la longueur implique une augmentation des fréquences propres pour différents modes circonférentiels et longitudinaux de la structure.

Le but de ce travail est d'appliquer la méthode des éléments finis hiérarchiques avec des polynômes bien définis. Cette méthode donne une efficacité de calcul numérique du phénomène d'interaction fluide structure en fonction des conditions limites proposées à la pression interne avec couplage pénalisant. La méthode des éléments finis hiérarchiques est plus précise et stable en convergence que les autres méthodes de résolution actuelles telles que les méthodes des éléments finis, par perspective on peut étudier différents paramètres, la turbulence et l'énergie thermique par cette méthode.

Nous présentons quelques observations importantes basées sur les vibrations longitudinales et circonférentielles selon lesquelles l'augmentation ou la diminution des fréquences propres suit la nature de la structure. En gardant les rapports (rayon/épaisseur) et (longueur/rayon) constant (données du Tableau V-1) nous constatons que les fréquences longitudinales augmentent rapidement en présence, ou non du fluide et que les fréquences circonférentiels diminuent. Cette étude peut nous

permettre de déterminer des rapports optimaux, pour reste dans une gamme de fréquences suffisamment éloignée de la zone de résonance.

*Conclusion générale*

---

L'objet de notre recherche est l'étude de l'interaction fluide-structure du pipeline de pression interne à l'aide de la méthode hiérarchique par éléments finis. La modélisation du domaine fluide est faite par l'application des équations de Navier-Stokes qui sont exprimées sur la base des principes de conservation de la masse, quantité de mouvement et l'énergie. Le calcul de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation, ainsi que l'application de principe d'Hamilton, sont utilisés dans la modélisation du domaine solide. Le couplage est modélisé par la méthode des éléments finis simple ajoutée dans les matrices par la méthode de pénalité qui définit l'interface entre le fluide et le pipe forme cylindrique.

Un programme de calcul des fréquences propres du système couplé a été élaboré en Matlab, en utilisant la formulation de la méthode des éléments finis (MEF) version hp qui est une combinaison de la méthode des éléments finis standard version h et de la méthode des éléments finis hiérarchiques version p, où p est le degré du polynôme de Legendre représentant les fonctions de formes agissant entre les nœuds de chaque élément du maillage.

Après l'étude de la convergence, une validation du programme est faite et les résultats obtenus par ce programme sont comparés avec les résultats d'autres auteurs. La rapidité de la convergence et la concordance des résultats obtenus et ceux de la littérature montrent l'efficacité du code de calcul élaboré.

Plusieurs exemples sont traités et cela nous a permis de déterminer l'influence de différents paramètres géométriques :

- L'augmentation de l'épaisseur du cylindrique diminue la valeur des fréquences propres circonférentielles de la structure, avec ou sans fluide. elle, provoque la diminution des fréquences propres pour les modes circonférentiels quel que soit le mode longitudinal. Ceci nous permet de dire que nous avons ajouté une masse variable pour le solide de façon qui contribue à la diminution du rapport  $\sqrt{K/M}$ .
- L'augmentation de la longueur provoque, une augmentation des fréquences propres pour les modes longitudinales quel que soit le mode circonférentiel.

- Dans le cas où nous ajoutons le fluide les fréquences propres diminuent légèrement donc on peut dire que le fluide joue le rôle d'amortissement.
- En gardant les rapports (rayon/épaisseur) et (longueur/rayon) constant, les fréquences longitudinales augmentent rapidement en présence, ou non du fluide et que les fréquences circonférentiels diminuent. Cette étude peut nous permettre de déterminer des rapports optima, pour reste dans une gamme de fréquences suffisamment éloignée de la zone de résonance.

En perspective nous pouvons étudier l'influence du rapport  $R/h$  et  $L/R$  par rapport aux fréquences propres du système avec différentes conditions aux limites sur les extrémités de la conduite pour optimiser les dimensions de la conduite, ainsi que l'étude de l'influence de la température sur le pipe.

## *Références Bibliographiques*

---

- 1 Bungartz, Hans-Joachim; Schäfer, Michael, 'Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization', Springer-Verlag; 2006, ISBN 978-3-540-34595-4.
- 2 M. Heil, 'An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems', 2004. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 193 (1–2): 1–23, doi: 10.1016/j.cma.2003.09.006.
- 3 K.-J. Bathe; H. Zhang, 'Finite element developments for general fluid flows with structural interactions', 2004, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 60 (1): 213–232. Bibcode: 2004 IJNME.60. 213B.Cite SeerX 10.1.1.163.1531.
- 4 J. Hron, S. Turek. H.-J. Bungartz; M. Schäfer , 'A monolithic FEM/multigrid solver for ALE formulation of fluid-structure interaction with application in biomechanics', 2006, *Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag. pp. 146–170. ISBN 978-3-540-34595-4.
- 5 H. Matthies; J. Steindorf, 'Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction', 2003. *Computers and Structures*. 81 (8–11): 805–812. CiteSeerX 10.1.1.487. 5577. doi:10.1016/S0045-7949(02)00409-1.
- 6 Jump up to: a b H. Matthies; R. Niekamp; J. Steindorf, 'Algorithms for strong coupling procedures', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006. 195 (17–18): 2028–2049. doi: 10.1016/j.cma.2004.11.032.
- 7 J.-F. Gerbeau; M. Vidrascu, 'A quasi-Newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows,' (PDF). *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2003, 37 (4): 631–648. doi:10.1051/m2an:2003049.
- 8 J.-F. Gerbeau; M. Vidrascu; P. Frey, 'Fluid-structure interaction in blood flows on geometries based on medical imaging', *Computers and Structures*. 2005, 83 (2–3): 155–165. doi:10.1016/j.compstruc.2004.03.083.
- 9 J. Degroote; K.-J. Bathe; J. Vierendeels, 'Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid–structure interaction', *Computers and Structures*. 2009 87 (11–12): 793–801, doi: 10.1016/j.compstruc.2008.11.013.
- 10 J. Vierendeels; L. Lanoye; J. Degroote; P. Verdonck, 'Implicit coupling of partitioned fluid-structure interaction problems with reduced order models', *Computers and Structures*. (2007) 85 (11–14): 970–976. doi:10.1016/j.compstruc.2006.11.006.
- 11 P. Causin; J.-F. Gerbeau; F. Nobile, 'Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005.194 (42–44):4506–4527. doi:10.1016/j.cma.2004.12.005
- 12 U. Küttler; W. Wall, 'Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation', *Computational Mechanics*. 2008. 43(1):61–72. doi:10.1007/s 00466 - 008 -0255-5
- 13 Edelstein, W. S., Chen, S. S. and Jendrzeczyk, J. A. A finite element computation of flow-induced oscillations in a cantilevered tube. *J. Sound and Vibr.*, 1986, 107, 121–129.
- 14 P. Causin; J.-F. Gerbeau; F. Nobile, 'Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005 194 (42–44): 4506–4527.. doi:10.1016/j.cma.2004.12.005
- 15 F.Casadei, J.P.Hlleux,A.Sala, F.Chille, 'Transient fluid-structure interaction algorithms for industrial applications', *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 190 (2001) 3081–3110.
- 16 J.Vierendeels, K.Dumont, E.Dick, P.Verdonck , " Analysis and Stabilization of Fluid–Structure Interaction Algorithm for Rigid-Body Motion", *AIAA JOURNAL* Vol. 43, No. 12, December 2005
- 17 E. Onate, J.Garcia, S.R.Idelsohn, F.Del Pin, ' Finite calculus formulations for finite element analysis of incompressible flows. Eulerian, ALE and Lagrangian approaches', *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 195 (2006) 3001–3037
- 18 W.G.Dettmer, D.Peric, " A new staggered scheme for fluid–structure interaction', *Int. J. Numer. Meth. Engrg* (2012)

- 19 D.Ferras, P.A. Manso, A.J. Schleiss, D.I.C.Covas, 'One-Dimensional Fluid-Structure Interaction Models in Pressurized Fluid-Filled Pipes: A Review', *Appl. Sci.* 2018, 8, 1844; doi:10.3390/app8101844
- 20 Iroizan Ubulom, 'Influence of fluid-structure interaction modelling on the stress and fatigue life evaluation of a gas turbine blade', *Proc IMechE Part A: J Power and Energy*, 2021, Vol. 235(5) 1019-1038
- 21 H. K. Aliabadi, A. Ahmadi, A.Keramat, 'Frequency response of water hammer with fluid-structure interaction in a viscoelastic pipe', *Mechanical Systems and Signal Processing* 144 (2020) 106848
- 22 R. H. Long, Jr., Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid, A.S.M.E., Preprint 54-A-22
- 23 H.Ashley, G.Haviland, 'Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid', *J. Appl. Mech*, Sep 1950, 17(3): 229-232
- 24 G. W. Housner, 'Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid', *J. Appl. Mech.* Jun 1952, 19(2): 205-208.
- 25 F. I. N. Niordson, 'Vibrations of a cylindrical tube containing flowing fluid', *Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm*, Nr. 73, (1953)
- 26 K.Fumik, 'On fluctuating flow water through a circular pipe', Faculty of Engineering Keio 1961, vol.14', (53), P. 41-50.
- 27 H. L. Dodds Jr, H. L. Runyan. - Effect of high-velocity fluid flow on the bending vibrations and static divergence of a simply supported pipe, NASA TN D-2870, 1965.
- 28 G.B.Warburton, J.Higgs, 'Natural frequencies of thin cantilever cylindrical shells', *Journal of Sound and Vibration*, Volume 11, Issue 3, March 1970, Pages 335-338
- 29 S.A.Rinehart, J.T.S.Wang, 'Vibration of simply supported cylindrical shells with longitudinal stiffeners', *Journal of Sound and Vibration* Volume 24, Issue 2, 22 September 1972, Pages 151-163
- 30 C.B. Sharma, 'Calculation of natural frequencies of fixed-free circular cylindrical shells', *Journal of Sound and Vibration*, Volume 35, Issue 1, 8 July 1974, Pages 55-76.
- 31 T.J. R. Hughes, W.K.Liu, A.Brooks, 'Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation', *Journal of computational physics* 30, I-60 (1979).
- 32 Combescurre, R.J.Gibert, F.Jeanpierre, A. Hoffmann and M. Livolant, 'Fluid-Structure Interaction: a general method used in the ceasemt computer programs', *Computers& Structures*, 1980.12, p.471-474
- 33 T. Belytschko, M. Karabin, J. I. Lin, 'Fluid-Structure Interaction in Waterhammer Response of Flexible Piping', *J. Pressure Vessel Technol.* Aug 1986, 108(3): 249-255.
- 34 R. K. Singh, A. Kakodkar, T. Kant, 'Some studies on fluid structure interaction problems', *Indian Institute of Technology, Bombay*, 1988, 400 076
- 35 R.Endo, N.Tosaka, 'Free Vibration Analysis of Coupled External Fluid-Elastic Cylindrical Shell-Internal Fluid Systems', *JSME international journal. Ser. 1, Solid mechanics, strength of materials*, 1989, 32(2), 217-221
- 36 C. Nitikitpuoon et K. J. Bathe, 'an arbitrary lagrangian-eulerian velocity potential formulation for fluid-structure interaction', *Computers and Structures*, 1993, Vol. 47, (4/5), (871-891).
- 37 T.Mazuch, J.Horacek, J.Trnka, J.Vesely, 'Natural modes and Frequencies of a Thin Clamped-Free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement', *Journal of Sound and Vibration*, 1996,193(3), 669-690
- 38 W. Q. Chen, H. J. Ding, YM Guo, Qingda Yang, 'Free vibrations of fluid-filled orthotropic cylindrical shells', *Journal of Engineering Mechanics*, Novembre 1997, 123(11) DOI: 10.1061/(ASCE) 0733-9399 (1997)123:11(1130).
- 39 L.J.Pedroso, M.V.G.de Morais and A.N.Barbosa, 'Some Cases of a coustical problems in Fluid-Structure interaction Base on a 2D potential Symmetric Formulation', *International conference 15TH on Structural Mechanics*, 1999, 15-20

- 40 Y L Zhang, D G Gorman, JM Reese ‘, Analysis of the vibration of pipes conveying fluid’, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1 August 1999, Vol 213,849-860.
- 41 S.Perova, E.Altstadt, M.Werner, ‘Vibration analysis of the pressure vessel internals of WWER-1000 type reactors with consideration of fluid–structure interaction’, *Annals of Nuclear Energy*, 2000,27(16), 1441-1457.
- 42 X.M.Zhang, G.R.Liu, K.Y. Lam, ‘vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach’, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 239, Issue 3,18 January 2001, Pages 397-403
- 43 Y.L.Zhang a, J.M.Reese, D.G.Gorman’, Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 5207–5231.
- 44 Y.L.Zhang, D.G.Gorman, J. M.Reese, ‘Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid’, *Thin-Walled Structures*, Volume 41, Issue 12, December 2003, Pages 1103-1127.
- 45 U.Lee, H.Oh’, The spectral element model for pipelines conveying internal steady flow’, *Journal Engineering Structures*, Volume 25,8, 2003,1045-1055.
- 46 N.Ganesan, R.Kadoli, ‘A study on the dynamic stability of a cylindrical shell conveying a pulsatile flow of hot fluid’, *Journal of Sound and Vibration*, 274 (2004), 953–984.
- 47 S.jeune-soo, W-B.Jeong, W-S.Yoo, H-K.Jeong, ‘Analyse de la réponse en fréquence des coques cylindriques transportant du fluide à l’aide de la méthode des éléments finis’, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2005, volume 19, pages 625–633.
- 48 J.F.Sigrist, ‘Analyse dynamique d’une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure’, *Mecanique & Industries* 7, 453–464 (2006) DOI: 10.1051/meca:2007003
- 49 L.Wang, J.Gan et Q.Ni, ‘Natural frequency analysis of fluid conveying pipes in the ADINA system’, *Journal of Physics: Conference Series* 448 (2013) 012014.
- 50 Z.J.G.N. del Prado, A.L.D.P. Argenta, F.M.A. da Silva, P.B. Gonçalves, ‘The Effect of Internal Flowing Fluid on the Non-Linear Behavior of Orthotropic Circular Cylindrical Shells’, *Applied Mechanics and Materials* Vol. 706 (2015) pp 54-68.
- 51 A.Kesimli, S. M. Bağdath, S.Çanakci, ‘Free Vibrations of Fluid Conveying Pipe by Intermediate Supported’, *Research on Engineering Structures & Materials* 1 (2015) 39-51
- 52 S.Sutar, R.Madabhushi, R. B.Poosa, ‘Finite Element Analysis of Piping Vibration with Guided Supports’, *International Journal of Mechanical Engineering and Automation*, Volume 3, Number 3, 2016, pp. 96-106.
- 53 S.M.Hamza Cherif, M.N.Ouissi, ‘Free Vibration Analysis of a Liquid in a Circular Cylindrical Rigid Tank Using the Hierarchical Finite Element Method’, *Latin American Journal of Solids and Structures* 13 (2016) 1265-1280.
- 54 Etim S Udoetok’, Internal Fluid Flow Induced Vibration of Pipes’, *Journal of Mechanical Design and Vibration*, 2018, Vol. 6, No. 1, 1-8.
- 55 Y.Li, Y.Li, N.Akbar, ‘Analysis of Vibration of the Euler-Bernoulli Pipe Conveying Fluid by Dynamic Stiffness Method and Transfer Matrix’, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2020, 8, 172-183.
- 56 M.Dahmane, S.Zahaf, M.Benkhettab, M. Soubih, S.A.Slimane, D.Boutchicha, ‘application of the finite element method to vibration analysis of pipes conveying fluid flow’, *Structural Integrity And Life* Vol. 21, No 1 (2021), pp. 7–14.
- 57 R.Abdollahi, R.D.Firouz-abadi, M.Rahmanian, ‘Nonlinear vibrations and stability of rotating cylindrical shells conveying annular fluid medium’, *Thin-Walled Structures*, Volume 171, February 2022, 108714.
- 58 O. Hamza, ‘contribution a la modelisation par elements finis dans l’analyse dynamique des structures planes’, Université Mohamed Khider– BISKRA, Faculté des sciences et de la Technologie, Département de génie mécanique

- 59 R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. Bulletin of the American Mathematical Society, 49:1–23, 1943.
- 60 J. H. Argyris. Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements. Journal of the Royal Aeronautical Society, 69:801–805, 1965.
- 61 R. W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. Proceedings of the 2nd A.S.C.E. Conference in Electronic Computation, Pittsburgh, PA, 1960.
- 62 J. N. Reddy. An introduction to the finite element method. McGraw-Hill, New York, 1993.
- 63 E. Onate. Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos. CIMNE, Barcelona, 1995
- 64 O. C. Zienkiewicz. The finite element method. McGraw-Hill, New York, 1991.
- 65 T. J. R. Hughes. The finite element method-Linear static and dynamic finite element analysis. Dover Publications, New York, 2000.
- 66 Hinton. Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells. Pineridge Press, Swansea, 1988.
- 67 Y. W. Kwon and H. Bang. Finite element method using MATLAB. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996
- 68 P. I. Kattan. MATLAB Guide to finite elements, an interactive approach. Springer, Berlin, 2nd ed., 2007.
- 69 Mattia de Michieli Vitturi', NAVIER-STOKES Equations in Cylindrical Coordinates derivation of the equations', INGV Pisa, Italy. mattia.demichielivitturi@ingv.it
- 70 C.E.Perez, Jean-M.Thomas, S.Blancher,R.Creff,' The steady Navier–Stokes/energy system with temperature-dependent viscosity—Part 2: The discrete problem and numerical experiments', Int. J. Numer. Meth. Fluids 2008; 56:91–114
- 71 J.PADET,'Fluides en Écoulement Méthodes et modèles', Seconde édition revue et augmentée 1980
- 72 D. Nelson, A. Minot, P.Mocz, Pengfei Liu. “Continuous Galerkin Navier-Stokes in 2D.” (2012): Final Project AM274.
- 73 I. Abbas. "Natural frequencies of a poroelastic hollow cylinder." Acta Mechanica 186.1-4 (2006): 229-237.
- 74 E.Lee, W.Choi, H. Ha,' An L2 finite element approximation for the incompressible Navier–Stokes equations', Numer Methods Partial Differential Eq. 2020;1–16, DOI: 10.1002/num.22478
- 75 E.Bansch,' Finite element discretization of the Navier–Stokes equations with a free capillary surface', Numer. Math. (2001) 88: 203–235, Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002110000225
- 76 B.Sousedik, H.C.Eلمان,'Stochastic Galerkin methods for the steady-state Navier–Stokes equations', Journal ofComputationalPhysics316(2016)435–452.
- 77 D.A.French,' Continuous Galerkin finite element methods for a forward-backward heat equation', Volume15,(2), 1999, 257-265.
- 78 S.Gounand,'Introduction à la méthode des éléments finis en mécanique des fluides incompressibles', Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives Centre de Saclay, DEN, DM2S, STMF, LMSF, F-91191 Gif-sur-Yvette, France mailto:stephane.gounand@cea.fr
- 79 R.C.I Rovira,'A finite element model for incompressible flow problems', UNIVERSITAT politecnica de catalunya, doctoral thesis barcelona, june 1992
- 80 N. S. BARDELL ;' the free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method', Comptrer&a Structures Vol.45, No.5 /6.pp 841-874,1992
- 81 T.H.Vu, A.J.Deeks,'use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method', International Journal for Numerical Methods in Engineering, March 2006, DOI: 10.1002/nme.1517

- 82 Tam H. Nguyen, Chau H. Le, Jerome F. Hajjar. “High-order Finite Elements for Topology Optimization.” 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Orlando, Florida, USA 10 (2013): 1675-1677.
- 83 Maurice Petyt. “Introduction to Finite Element Vibration Analysis.” Second Edition, Maurice Petyt University of Southampton Cambridge University Press 32 Avenue of the Americas, New York. NY (2010): 10013-2473.
- 84 Babuska.I., Griebel. M., Pitkäranta. J. “The problem of Selecting the Shape Functions for a p-type Finite Element.” International journal of Numerical Method in Engineering 28 (1989): 1891-1908.
- 85 S.S.Bhavikatti, Mechanics of solids, Emeritus Fellow (AICTE) BVB College of Engineering and Technology Hubli, New AGE International (p) limited publishers ,ISBN (13) : 978-81-224-2858-2, 2010.
- 86 Maurice Petyt. “Introduction to Finite Element Vibration Analysis.” Second Edition, Maurice Petyt University of Southampton Cambridge University Press 32 Avenue of the Americas, New York. NY (2010): 10013-2473.
- 87 Ding, H.J., Chen, W.Q., Zhang, L.C.: Elasticity of Transversely Isotropic Materials. Springer, Dordrecht (2006)
- 88 Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, 3rd edn. McGraw-Hill, New York (1970)
- 89 Chen, W.Q., Ding, H.J.: The state-space method and its application in analyses of FGM structures. In: Mechanics of Functionally Graded Materials and Structures, pp. 139–178. Nova Science Publishers, New York (2012)
- 90 Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, 3rd edn. McGraw-Hill, New York (1970)
- 91 W.Q.Chen, B.Wu, C.L.Zhang, Ch. Zhang, On wave propagation in anisotropic elastic cylinders at nanoscale: surface elasticity and its effect, Acta Mech 225, 2743–2760. Springer (2014).
- 92 T.Takahashi, M.Pierre, A.Henrot ‘, Analyse Numérique’, Ecole des Mines de Nancy - Campus Artem - 54 042 Nancy Cedex- email: takeo.takahashi@univ-lorraine.fr
- 93 M. Denis Mazuyer., la force de frottement limite’, l'école centrale de lyon, N° d'Ordre : ECL 89.005, soutenue le 23 Février 1989
- 94 A.Legay, A.Zilian , Christian Janssen, ‘A rheological interface model and its space–time finite element formulation for fluid–structure interaction’, Int. J. Numer. Meth. Engng 2011; 86:667–687.
- 95 P.Gran, G.Berg, E. Joachim. Giefmann, Rheologische Untersuchungen tester Stoffe mit Dehnungsraten-wechselversuchen, Technische Mechanik, 4, 1983.
- 96 A. Legay, A. Zilian, C.Janssen, ‘A rheological interface model and its space time finite element formulation for fluid–structure interaction’, International journal for numerical methods in engineering, 86:667–687 , 17 December 2010
- 97 N. Mohammadi1, M. J. Mahjoob, B. Kaffashi, S. Malakooti, An experimental evaluation of pre-yield and post-yield rheological models of magnetic field dependent smart materials, Journal of Mechanical Science and Technology, 1829~18372 (2010).
- 98 F. Lautenschläger, Cell compliance: cytoskeletal origin and importance for cellular function, University of Cambridge, 2011.
- 99 R.D. Borst, M.A. Crisfield, Joris J.C. Remmers, Clemens V. Verhoosel, Non-linear finite element analysis of solids and structures, John Wiley & Sons Ltd 2012, This edition first published
- 100 T. Ramachandran, R.Parimala, open newton – cotes quadrature with midpoint derivative for integration of algebraic functions, International Journal of Research in Engineering and Technology, : 2321-7308....
- 101 T.J.Barth, M.Griebel, D.E.Keyes, R.M.Nieminen, D.Roose , T.Schlick, ‘Fluid-structure Interactions Models, Analysis and Finite Elements’, Springer International Publishing AG 2017, DOI 10.1007/978-3-319-63970-3

- 102 Z. Driss, S. Karray, H. Kchaou, M. S. Abid ,’ Computer Simulations of Fluid-Structure Interaction Generated by a Flat-Blade Paddle in a Vessel Tank ‘,International Review of Mechanical Engineering 2007 (I.R.E.M.E.), Vol. 1, n. 6,p 608-617.
- 103 K-J.Bathe, H Zhang,’ Finite element developments for general fluid flows with structural interactions’, Int.J.Numer.Meth.Engng 2004; 60:213–232 (DOI: 10.1002/nme.959)
- 104 C.F.Li, Q.S.Tang, H.X.She, B.C. Wen,’Natural Characteristic of Thin Wall Pipe under Uniformly Distributed Pressure’, Chinese Journal of Mechanical Engineering , (2018) 31-95.
- 105 1H. Sazdjian,’ Ondes, Cordes vibrantes, ondes sonores, ondes optiques ’, Universit’e Paris-Sud 11, 2012-2013.
- 106 R.N. Chaudhuri,’ Waves and Oscillations’, New Age International (P) 2010
- 107 G.C. King, ’Vibrations and Waves’, A John Wiley and Sons, Ltd., Publication ,2010
- 108 A.Farshidianfar, M.H.Farshidianfar, M.J.Crocker, W.O.Smith,’Vibration analysis of long cylindrical shells using acoustical excitation’, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) 3381–3399.
- 109 1N. Ouelaa, M. C. Djamaa, B. Laulagnet, J. L. Guyader,’Rayonnement Acoustique d’une Coque Cylindrique Excitée Mécaniquement et Introduction à L’étude de l’Instabilité’, Conference: Congrès Algérien de Mécanique CAM2009 November 16—19, 2009 At: Biskra, Algeri.
- 110 Y. Kerboua, A.A. Lakis,’ Dynamic Behaviour of a Rocket Filled with Liquid’, Universal Journal of Aeronautical & Aerospace Sciences 2 (2014), 55-79
- 111 A. Farshidianfar, P.Oliazadeh ,’ Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells: Comparison of Different Shell Theories’, International Journal of Mechanics and Applications 2012, 2(5): 74-80.
- 112 M.Caresta, N. J.Kessissoglou,’Vibration of fluid loaded conical shells’, Acoustical Society of America (2008), 2068–2077.
- 113 F. Ebrahimi, A.Seyfi,’Propagation of FlexuralWaves in Anisotropic Fluid-Conveying Cylindrical Shells’, Journale Symmetry 2020.
- 114 R. N. Arnold, D.Sc, G. B. Warburton,’ Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends, Communicated by M. Born, F.R.S.14 December 1948 Royalsociety 23 March 2022.
- 115 M. lohith k s,’Oscillations : SHM, free, Damped, Forced oscillations shock Waves : properties and generation’, engineering physics a short notes
- 116 N.aquelet, M.souli,’Fluid-Structure Coupling in a Water-wedge impact problem’, emerging technology in fluids, structures, and fluid-structure interactions -, (2004), 2004-2887
- 117 N.Aquelet, M.Souli,’ Damping Effect in Fluid-Structure Interaction:Application to slamming problem’, asme pressure vessels and piping conference, (2003), 2003-1968
- 118 R.Hertrich,’ partitioned fluid structure interaction: coupling fenics and openfoam via precice’, Technical University of Munich, September 27, 2019
- 119 G.Cohen, S.Pernet ,’ Finite Element and Discontinuous Galerkin Methods for Transient Wave Equations’, Springer Science+Business Media Dordrecht 2017.
- 120 Maxuch T, Horacek J, Trnka J, Vesely J. Natural modes and frequencies of a thin clamped–freestee cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measure-ment. J Sound and Vibration 1996; 193: 669-690.
- 121 Yong L Z, Daniel G G, Jason M R. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid. Thin-Walled Structures. 2003; 41: 1103-1127.
- 122 W.Y. Yang, W.Cao , T.-S.Chung ,J. Morris,’APPLIED NUMERICAL METHODS USING MATLAB’, 2005 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.
- 123 H.J.B.Miriam, M.M.Schäfer,’Fluid Structure Interaction II Modelling, Simulation, Optimization’, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
- 124 Bungartz, Hans-Joachim; Schäfer, Michael, eds. (2006). Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-34595-4

- 125 Kuttler, U., Förster, Ch., Wall, W. A., 'A solution for the incompressibility dilemma in partitioned fluid-structure interaction with pure Dirichlet fluid domains.', Computational Mechanics, (2006)Vol. 38, pp. 417–429.

Coordonnées :  $x$  (composante  $U$ ),  $r$  (composante  $V$ )  
 $\theta$  (composante  $W$ ).

Équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0.$$

Équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ = \frac{F_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{r} \\ = \frac{F_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{VW}{r} \\ = \frac{F_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

Équation d'énergie (avec  $P = 0$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = a \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right\} + \Phi$$

Fonction de dissipation, cas axisymétrique

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{V^2}{r^2} + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right\}$$

Forme matricielle:

$$M_r = \rho \left( \int_{\Omega} (\langle N(r, \theta, z) \rangle \langle N(r, \theta, z) \rangle^T) d\Omega \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_r \right\}$$

$$M_r = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_5 & N_1 N_6 & N_1 N_7 & N_1 N_8 & N_1 N_9 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_5 & N_2 N_6 & N_2 N_7 & N_2 N_8 & N_2 N_9 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & N_3 N_5 & N_3 N_6 & N_3 N_7 & N_3 N_8 & N_3 N_9 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & N_4 N_5 & N_4 N_6 & N_4 N_7 & N_4 N_8 & N_4 N_9 \\ N_5 N_1 & N_5 N_2 & N_5 N_3 & N_5 N_4 & N_5 N_5 & N_5 N_6 & N_5 N_7 & N_5 N_8 & N_5 N_9 \\ N_6 N_1 & N_6 N_2 & N_6 N_3 & N_6 N_4 & N_6 N_5 & N_6 N_6 & N_6 N_7 & N_6 N_8 & N_6 N_9 \\ N_7 N_1 & N_7 N_2 & N_7 N_3 & N_7 N_4 & N_7 N_5 & N_7 N_6 & N_7 N_7 & N_7 N_8 & N_7 N_9 \\ N_8 N_1 & N_8 N_2 & N_8 N_3 & N_8 N_4 & N_8 N_5 & N_8 N_6 & N_8 N_7 & N_8 N_8 & N_8 N_9 \\ N_9 N_1 & N_9 N_2 & N_9 N_3 & N_9 N_4 & N_9 N_5 & N_9 N_6 & N_9 N_7 & N_9 N_8 & N_9 N_9 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{v}_{r1} \\ \dot{v}_{r2} \\ \dot{v}_{r3} \\ \dot{v}_{r4} \\ \dot{v}_{r5} \\ \dot{v}_{r6} \\ \dot{v}_{r7} \\ \dot{v}_{r8} \\ \dot{v}_{r9} \end{Bmatrix}$$

$$M_{\theta} = \rho \left( \int_{\Omega} (\langle N(r, \theta, z) \rangle \langle N(r, \theta, z) \rangle^T) d\Omega \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_{\theta} \right\}$$

$$M_{\theta} = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_5 & N_1 N_6 & N_1 N_7 & N_1 N_8 & N_1 N_9 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_5 & N_2 N_6 & N_2 N_7 & N_2 N_8 & N_2 N_9 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & N_3 N_5 & N_3 N_6 & N_3 N_7 & N_3 N_8 & N_3 N_9 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & N_4 N_5 & N_4 N_6 & N_4 N_7 & N_4 N_8 & N_4 N_9 \\ N_5 N_1 & N_5 N_2 & N_5 N_3 & N_5 N_4 & N_5 N_5 & N_5 N_6 & N_5 N_7 & N_5 N_8 & N_5 N_9 \\ N_6 N_1 & N_6 N_2 & N_6 N_3 & N_6 N_4 & N_6 N_5 & N_6 N_6 & N_6 N_7 & N_6 N_8 & N_6 N_9 \\ N_7 N_1 & N_7 N_2 & N_7 N_3 & N_7 N_4 & N_7 N_5 & N_7 N_6 & N_7 N_7 & N_7 N_8 & N_7 N_9 \\ N_8 N_1 & N_8 N_2 & N_8 N_3 & N_8 N_4 & N_8 N_5 & N_8 N_6 & N_8 N_7 & N_8 N_8 & N_8 N_9 \\ N_9 N_1 & N_9 N_2 & N_9 N_3 & N_9 N_4 & N_9 N_5 & N_9 N_6 & N_9 N_7 & N_9 N_8 & N_9 N_9 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{v}_{\theta 1} \\ \dot{v}_{\theta 2} \\ \dot{v}_{\theta 3} \\ \dot{v}_{\theta 4} \\ \dot{v}_{\theta 5} \\ \dot{v}_{\theta 6} \\ \dot{v}_{\theta 7} \\ \dot{v}_{\theta 8} \\ \dot{v}_{\theta 9} \end{Bmatrix}$$

$$M_z = \rho \left( \int_{\Omega} (\langle N(r, \theta, z) \rangle \langle N(r, \theta, z) \rangle^T) d\Omega \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} v_z \right\}$$

$$M_z = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_5 & N_1 N_6 & N_1 N_7 & N_1 N_8 & N_1 N_9 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_5 & N_2 N_6 & N_2 N_7 & N_2 N_8 & N_2 N_9 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & N_3 N_5 & N_3 N_6 & N_3 N_7 & N_3 N_8 & N_3 N_9 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & N_4 N_5 & N_4 N_6 & N_4 N_7 & N_4 N_8 & N_4 N_9 \\ N_5 N_1 & N_5 N_2 & N_5 N_3 & N_5 N_4 & N_5 N_5 & N_5 N_6 & N_5 N_7 & N_5 N_8 & N_5 N_9 \\ N_6 N_1 & N_6 N_2 & N_6 N_3 & N_6 N_4 & N_6 N_5 & N_6 N_6 & N_6 N_7 & N_6 N_8 & N_6 N_9 \\ N_7 N_1 & N_7 N_2 & N_7 N_3 & N_7 N_4 & N_7 N_5 & N_7 N_6 & N_7 N_7 & N_7 N_8 & N_7 N_9 \\ N_8 N_1 & N_8 N_2 & N_8 N_3 & N_8 N_4 & N_8 N_5 & N_8 N_6 & N_8 N_7 & N_8 N_8 & N_8 N_9 \\ N_9 N_1 & N_9 N_2 & N_9 N_3 & N_9 N_4 & N_9 N_5 & N_9 N_6 & N_9 N_7 & N_9 N_8 & N_9 N_9 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{v}_{z1} \\ \dot{v}_{z2} \\ \dot{v}_{z3} \\ \dot{v}_{z4} \\ \dot{v}_{z5} \\ \dot{v}_{z6} \\ \dot{v}_{z7} \\ \dot{v}_{z8} \\ \dot{v}_{z9} \end{Bmatrix}$$

$$MK_r = \rho \left( \int_{\Omega} v_r \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial r} \right) d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Omega} v_{\theta} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial \theta} \right) d\Omega - \frac{1}{r} \int_{\Omega} v_{\theta} (\langle N(r, \theta, z) \rangle \langle N(r, \theta, z) \rangle^T) d\Omega + \int_{\Omega} v_z \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial z} \right) d\Omega \right) \{v_r\}$$

$$MK_r = \rho \int_{\Omega} \left( v_r \begin{bmatrix} N_1 N_{1,r} & \dots & N_1 N_{9,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,r} N_1 & \dots & N_{9,r} N_9 \end{bmatrix} + v_{\theta} \left( -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \dots & N_1 N_9 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_9 N_1 & \dots & N_9 N_9 \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} N_1 N_{1,\theta} & \dots & N_1 N_{9,\theta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,\theta} N_1 & \dots & N_{9,\theta} N_9 \end{bmatrix} \right) + v_z \begin{bmatrix} N_1 N_{1,z} & \dots & N_1 N_{9,z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,z} N_1 & \dots & N_{9,z} N_9 \end{bmatrix} \right) d\Omega \begin{Bmatrix} v_{r1} \\ \vdots \\ v_{r9} \end{Bmatrix}$$



$$K_z = \mu \left( - \begin{bmatrix} N_{1,r}N_{1,r} & \cdots & N_{1,r}N_{9,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,r}N_{1,r} & \cdots & N_{9,r}N_{9,r} \end{bmatrix} - \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} N_{1,\theta}N_{1,\theta} & \cdots & N_{1,\theta}N_{9,\theta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,\theta}N_{1,\theta} & \cdots & N_{9,\theta}N_{9,\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{1,z}N_{1,z} & \cdots & N_{1,z}N_{9,z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,z}N_{1,z} & \cdots & N_{9,z}N_{9,z} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_{z1} \\ \vdots \\ v_{z9} \end{Bmatrix}$$

$$K_{pr} = \left( \int_{\Omega} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial r} \right) d\Omega \right) \{p_r\}$$

$$K_{pr} = \begin{pmatrix} N_1 N_{1,r} & \cdots & N_1 N_{9,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,r} N_1 & \cdots & N_{9,r} N_{9,r} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{r1} \\ \vdots \\ p_{r9} \end{Bmatrix}$$

$$K_{p\theta} = \frac{1}{r} \left( \int_{\Omega} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \right) \{p_{\theta}\}$$

$$K_{p\theta} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} N_1 N_{1,\theta} & \cdots & N_1 N_{9,\theta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,\theta} N_1 & \cdots & N_{9,\theta} N_{9,\theta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\theta 1} \\ \vdots \\ p_{\theta 9} \end{Bmatrix}$$

$$K_{pz} = \left( \int_{\Omega} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial z} \right) d\Omega \right) \{p_z\}$$

$$K_{pz} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} N_1 N_{1,z} & \cdots & N_1 N_{9,z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,z} N_1 & \cdots & N_{9,z} N_{9,z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{z1} \\ \vdots \\ p_{z9} \end{Bmatrix}$$

$$K_{rp} = \left( \int_{\Omega} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial r} \right) d\Omega \right) \{v_{rp}\}$$

$$K_{rp} = \begin{pmatrix} N_1 N_{1,r} & \cdots & N_1 N_{9,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,r} N_1 & \cdots & N_{9,r} N_{9,r} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_{rp1} \\ \vdots \\ v_{rp9} \end{Bmatrix}$$

$$K_{\theta p} = \frac{1}{r} \left( \int_{\Omega} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial \theta} \right) d\Omega \right) \{v_{\theta p}\}$$

$$K_{\theta p} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} N_1 N_{1,\theta} & \cdots & N_1 N_{9,\theta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,\theta} N_1 & \cdots & N_{9,\theta} N_{9,\theta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_{\theta p1} \\ \vdots \\ v_{\theta p9} \end{Bmatrix}$$

$$K_{zp} = \left( \int_{\Omega} \left( \langle N(r, \theta, z) \rangle \frac{\partial \langle N(r, \theta, z) \rangle^T}{\partial z} \right) d\Omega \right) \{v_{zp}\}$$

$$K_{zp} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} N_1 N_{1,z} & \cdots & N_1 N_{9,z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{9,z} N_1 & \cdots & N_{9,z} N_{9,z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_{zp1} \\ \vdots \\ v_{zp9} \end{Bmatrix}$$

$$K = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} K_r & K_{r\theta} & K_{rz} & K_{pr} & 0 & 0 \\ K_{\theta r} & K_{\theta} & K_{\theta z} & 0 & K_{p\theta} & 0 \\ K_{zr} & K_{z\theta} & K_z & 0 & 0 & K_{pz} \\ K_{rp} & 0 & 0 & Kp_r & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta p} & 0 & 0 & Kp_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zp} & 0 & 0 & Kp_z \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{v}_{r1} \\ \dot{v}_{\theta 1} \\ \dot{v}_{z1} \\ \vdots \\ p_{r27} \\ p_{\theta 27} \\ p_{z27} \end{Bmatrix}$$

$$M = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \cdots & N_1 N_{13} & \cdots & N_1 N_{14} & \cdots & N_1 N_{27} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{13} N_1 & \cdots & N_{13} N_{13} & \cdots & N_{13} N_{14} & \cdots & N_{13} N_{27} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{14} N_1 & \cdots & N_{14} N_{13} & \cdots & N_{14} N_{14} & \cdots & N_{14} N_{27} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{27} N_1 & \cdots & N_{27} N_{13} & \cdots & N_{27} N_{14} & \cdots & N_{27} N_{27} \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{v}_{r1} \\ \dot{v}_{\theta 1} \\ \dot{v}_{z1} \\ \vdots \\ \dot{v}_{r27} \\ \dot{v}_{\theta 27} \\ \dot{v}_{z27} \end{Bmatrix}$$

MK

$$\begin{aligned}
 &= \rho \int_{\Omega} v_r \begin{bmatrix} N_1 N_{1,r} & N_1 N_{2,r} + \frac{1}{r} N_1 N_{2,\theta} & N_1 N_{3,r} & \dots & N_1 N_{25,r} & N_1 N_{26,r} + \frac{1}{r} N_1 N_{26,\theta} & N_1 N_{27,r} \\ N_{2,r} N_1 + \frac{1}{r} N_{2,\theta} N_1 & N_2 N_{2,r} + \frac{1}{r} N_2 N_{2,\theta} & N_2 N_{3,r} & \dots & N_{2,r} N_{25} + \frac{1}{r} N_{2,\theta} N_{25} & N_2 N_{26,r} + \frac{1}{r} N_2 N_{26,\theta} & N_2 N_{27,r} \\ N_{3,r} N_1 & N_{3,\theta} N_1 & N_3 N_{3,r} & \dots & N_{3,r} N_{25} & N_{3,\theta} N_{25} & N_3 N_{27,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{25,r} N_1 & N_{25} N_{2,r} + \frac{1}{r} N_{25,r} N_{2,\theta} & N_{25} N_{3,r} & \dots & N_{25} N_{25,r} & N_{25} N_{26,r} + \frac{1}{r} N_{25} N_{26,\theta} & N_{25} N_{27,r} \\ N_{26,r} N_1 + \frac{1}{r} N_{26,\theta} N_1 & N_{26} N_{2,r} + \frac{1}{r} N_{26} N_{2,\theta} & N_{26} N_{3,r} & \dots & N_{26,r} N_{25} + \frac{1}{r} N_{26,\theta} N_{25} & N_{26} N_{26,r} + \frac{1}{r} N_{26} N_{26,\theta} & N_{26} N_{27,r} \\ N_{27,r} N_1 & N_{27,r} N_2 & N_{27} N_{3,r} & \dots & N_{27,r} N_{25} & N_{27,\theta} N_{26} & N_{27} N_{27,r} \end{bmatrix} \\
 &+ v_{\theta} \begin{bmatrix} N_1 N_{1,\theta} & N_1 N_{2,\theta} - \frac{1}{r} N_1 N_{2,r} & N_1 N_{3,\theta} & \dots & N_1 N_{25,\theta} & N_1 N_{26,\theta} - \frac{1}{r} N_1 N_{26,r} & N_1 N_{27,\theta} \\ N_{2,\theta} N_1 - \frac{1}{r} N_{2,r} N_1 & N_2 N_{2,\theta} - \frac{1}{r} N_2 N_{2,r} & N_2 N_{3,\theta} & \dots & N_{26,\theta} N_2 - \frac{1}{r} N_{26,r} N_2 & N_2 N_{26,\theta} - \frac{1}{r} N_2 N_{26,r} & N_2 N_{27,\theta} \\ N_{3,\theta} N_1 & N_{3,\theta} N_2 & N_3 N_{3,\theta} & \dots & N_{3,\theta} N_{25} & N_{3,\theta} N_{26} & N_3 N_{27,\theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{25,\theta} N_1 & N_{25} N_{2,\theta} - \frac{1}{r} N_{25} N_{2,r} & N_{25} N_{3,\theta} & \dots & N_{25} N_{25,\theta} & N_{25} N_{26,\theta} - \frac{1}{r} N_{25} N_{26,r} & N_{25} N_{27,\theta} \\ N_{26,\theta} N_1 - \frac{1}{r} N_{26,r} N_1 & N_{26} N_{2,\theta} - \frac{1}{r} N_{26} N_{2,r} & N_{26} N_{3,\theta} & \dots & N_{26,\theta} N_{25} - \frac{1}{r} N_{26,r} N_{25} & N_{26} N_{26,\theta} - \frac{1}{r} N_{26} N_{26,r} & N_{26} N_{27,\theta} \\ N_{27,\theta} N_1 & N_{27,\theta} N_2 & N_{27} N_{3,\theta} & \dots & N_{27,\theta} N_{25} & N_{27,\theta} N_{26} & N_{27} N_{27,\theta} \end{bmatrix} \\
 &+ v_z \begin{bmatrix} N_1 N_{1,z} & N_1 N_{2,z} & N_1 N_{3,z} & \dots & N_1 N_{25,z} & N_1 N_{26,z} & N_1 N_{27,z} \\ N_{2,z} N_1 & N_{2,z} N_2 & N_{2,z} N_3 & \dots & N_{2,z} N_{25} & N_{2,z} N_{26} & N_{2,z} N_{27} \\ N_{3,z} N_1 & N_{3,z} N_2 & N_{3,z} N_3 & \dots & N_{3,z} N_{25} & N_{3,z} N_{26} & N_{3,z} N_{27} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{25,z} N_1 & N_{25,z} N_2 & N_{25,z} N_3 & \dots & N_{25,z} N_{25} & N_{25,z} N_{26} & N_{25,z} N_{27} \\ N_{26,z} N_1 & N_{26,z} N_2 & N_{26,z} N_3 & \dots & N_{26,z} N_{25} & N_{26,z} N_{26} & N_{26,z} N_{27} \\ N_{27,z} N_1 & N_{27,z} N_2 & N_{27,z} N_3 & \dots & N_{27,z} N_{25} & N_{27,z} N_{26} & N_{27,z} N_{27} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{r1} \\ v_{\theta 1} \\ v_{z1} \\ \vdots \\ v_{r27} \\ v_{\theta 27} \\ v_{z27} \end{Bmatrix} d\Omega
 \end{aligned}$$

## les équations de trajectoire de l'écoulement

$$\begin{cases} \frac{du_r}{dt} = v_r(r, \theta, z, t) = \dot{u}_r \\ \frac{du_{\theta}}{dt} = v_{\theta}(r, \theta, z, t) = \dot{u}_{\theta} \\ \frac{du_z}{dt} = v_z(r, \theta, z, t) = \dot{u}_z \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \frac{d^2 u_r}{dt^2} = \gamma_r(r, \theta, z, t) = \ddot{u}_r \\ \frac{d^2 u_{\theta}}{dt^2} = \gamma_{\theta}(r, \theta, z, t) = \ddot{u}_{\theta} \\ \frac{d^2 u_z}{dt^2} = \gamma_z(r, \theta, z, t) = \ddot{u}_z \end{cases}$$

$$\rho [N] \begin{Bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{v}_{\theta} \\ \dot{v}_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} * [M_f] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_{\theta} \\ \ddot{u}_z \end{Bmatrix}$$

$$-\mu \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_r \\ v_{\theta} \\ v_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} * [K_f] \begin{Bmatrix} u_r \\ u_{\theta} \\ u_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_r \\ P_{\theta} \\ P_z \end{Bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_r \\ G_{\theta} \\ G_z \end{Bmatrix} = F_p + F_g$$

L'équation de mouvement pour un solide peut être écrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho f_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} D_{rr} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{D_{r\theta}}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + D_{rz} \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} + \frac{D_{rr} \varepsilon_{rr} - D_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & D_{r\theta} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial r} + \frac{D_{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta} + D_{\theta z} \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial z} + D_{r\theta} \frac{2\varepsilon_{r\theta}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & D_{rz} \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial r} + \frac{D_{\theta z}}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial \theta} + D_{zz} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} + D_{rz} \frac{\varepsilon_{rz}}{r} \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{matrix} r & \theta & z \end{matrix}}$

$$\begin{bmatrix} D_{rr} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) & \frac{D_{r\theta}}{r} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) & D_{rz} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) \\ D_{r\theta} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right) & \frac{D_{\theta\theta}}{r^3} \left( r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & D_{\theta z} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \\ D_{rz} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{D_{r\theta}}{r} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} \right) & D_{zz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{bmatrix}$$

### Calcul du couplage

$$-\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} \end{bmatrix}$$

Matériau isotrope

$$-\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{bmatrix} = 0$$

Matériau composite

$$\iint \left( \Delta t \begin{bmatrix} 2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}N & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{1}{2r}\frac{\partial N}{\partial \theta} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{1}{r}N\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} ds$$


---

*la difference des Forces appliqué*

$$= \iint \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} ds = F_{\text{COUPLAGE DU SURFACE DE CONTACTE}} = [K_{\text{couplage}}]\{u\}$$

## ***Algorithme pour la méthode de Gauss-Seidel***

%Gauss Seidal

clc

format compact

A=input ('Enter the Coefficient Matrix A: ');

B=input ('Enter the solution Matrix b (Colum matrix): ');

C= [A B]; n=input ('Enter le nombre pour itération: ');

X=input ('Enter the initial guess (Colum matrix): ');

x(1)=X(1,1); y(1)=X(2,1); z(1)=X(3,1);

for j=1:3

% déclaration savoir si diagonale contient zéro

diag=0;

if A(j,j)==0

diag=1;

end

end

if diag==1

disp('Erreur!, éléments diagonale pour la matrice contient des zéro')

else

eig\_A = eig(A);

% definite positivité

positive = 0;

for i = 1:rank(A)

if eig\_A(i) <= 0

positive = 1;

```

end
end
diagdom=0;
% Diagonalité du domaine
for j=1:length(B)
if abs(A(j,j))>= sum(abs(A(j,:)))-abs(A(j,j))
diagdom=1;
end
end
for i=1:n
% étape Itérative
x(i+1)=(1/C(1,1))*(C(1,4)-C(1,2)*y(i)- C(1,3)*z(i));
y(i+1)=(1/C(2,2))*(C(2,4)-C(2,1)*x(i+1)- C(2,3)*z(i));
z(i+1)=(1/C(3,3))*(C(3,4)-C(3,1)*x(i+1)- C(3,2)*y(i+1));
error1=abs((x(i)-x(i+1))/x(i+1))*100;
error2=abs((y(i)-y(i+1))/y(i+1))*100;

```