



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Probabilités et Statistique

Par :

**Mme. *Lamia* BALASKA
Ep .BENDIMERAD**

Sur le thème

Inférence statistique pour un processus de type diffusion

Soutenue publiquement le 14 Février 2026 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr LABBAS Ahmed	MCA	UABB de Tlemcen	Président
Mme KORSO FECIANE Malika	Professeure	UABB de Tlemcen	Directrice de thèse
Mr KUTOYANTS Yury	Professeur Emérite	Université du Maine Le Mans	Examineur
Mr MADANI Fethi	Professeur	UTMS de Saida	Examineur
Mme KHETTAB Zahira	MCA	UABB de Tlemcen	Examinatrice
Mme KARA TERKI Nesrine	MCA	ESM Tlemcen	Examinatrice
Mme BOUKHIAR Souad	MCA	UABB de Tlemcen	Invitée

*Laboratoire de Statistiques et Modélisations Aléatoires (LSMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

À mes parents.

À mon mari.

À ma fille Fadéla Amel.

À mes fils Med El Mehdi et Yassine.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Madame Malika KORSO FECIANE, professeure à l'université de Tlemcen, qui m'a proposé le sujet de cette thèse et n'a cessé de m'encourager durant ce travail. Elle m'a orientée, conseillée et corrigée avec compétence et dévouement. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'exprime ma sincère reconnaissance à l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils me font d'assister à ma soutenance et d'examiner mon travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Yury KUTOYANTS, professeur émérite à l'université du Mans, pour ses suggestions éclairées et ses orientations pertinentes qui ont contribué à la qualité de ce travail. Je le remercie également vivement pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'en être le rapporteur.

Je remercie chaleureusement Monsieur Ahmed LABBAS, maître de conférences à l'université de Tlemcen, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Fethi MADANI, professeur à l'université de Saïda, à Madame Zahéra KHETTAB, maître de conférences à l'université de Tlemcen, et à Madame Nesrine KARA TERKI, maître de conférences à l'École Supérieure de Management de Tlemcen, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse.

Enfin, mes pensées les plus sincères vont à ma famille : à mon père, Abd El Ghani, qui a toujours accordé une valeur exceptionnelle aux études et n'a cessé de m'encourager à persévérer et à aller de l'avant, ainsi qu'à ma mère, Fatéma Zohra, à mes sœurs Nacéra et Ahlem et à mes frères Sidi Mohamed, Fethallah et Boumedien, pour leur soutien moral et leurs encouragements constants. Une pensée toute particulière pour mon mari, Mokhtar, pour sa grande disponibilité et son encouragement indéfectible, ainsi que pour mes enfants Mohamed el Mehdi, Yassine et Fadéla , qui ont été ma plus grande source de motivation.

Table des matières

Table des figures	1
Notations	1
1 Introduction générale	2
Introduction	2
1.1 Tests d'ajustement pour des observations i.i.d.	4
1.2 Tests d'ajustement pour des processus de diffusion	7
1.3 Tests d'ajustement pour les processus de Poisson	12
1.4 Plan de travail et position du Problème	14
2 Notions préliminaires	19
2.1 Calcul stochastique	19
2.1.1 Mouvement Brownien.	20
2.1.2 Intégrale stochastique et formule d'Itô	23
2.1.3 Équation différentielle stochastique (EDS)	25
2.2 Estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique	27
2.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance	28
2.2.2 Estimateur par la méthode de la distance minimale	30
2.2.3 Modèle mal spécifié	31
2.2.4 Estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique à retard	33
3 Test d'ajustement pour un processus de type diffusion à retard	38
3.1 Position du problème	39
3.2 Préliminaires et résultats auxiliaires	40
3.3 Résultats théoriques	41
3.3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance	43
3.3.2 Estimateur de la distance minimale	44
3.3.3 Test de distribution asymptotique libre	46
3.3.4 Alternatives	50
4 Application en biologie	56
4.1 Modèle déterministe pour la dynamique de population	56

4.2	Modélisation stochastique en dynamique de population	58
4.3	Test d'ajustement pour le modèle stochastique tronqué avec retard	60
4.4	Simulations numériques	67
4.4.1	Analyse numérique du comportement des estimateurs . . .	67
4.4.2	Comportement numérique de la statistique V_ε	70
5	Application en économie	75
5.1	Formulation déterministe du modèle sigmoïde	75
5.2	Extension stochastique et analyse des risques	76
5.3	Test d'ajustement pour le modèle stochastique avec retard	77
5.4	Simulations numériques	83
5.4.1	Analyse numérique du comportement des estimateurs . . .	84
5.4.2	Comportement numérique de la statistique V_ε	86
	Conclusion générale	91

Table des figures

4.1	Trajectoires déterministes et stochastiques du modèle logistique à retard	68
4.2	Comportement des estimateurs EMV et EDM (modèle logistique)	69
4.3	Convergence de l'information de Fisher empirique vers sa valeur théorique (modèle logistique)	70
4.4	Trajectoires de V_ε pour différentes valeurs de ε (modèle logistique)	71
4.5	Trajectoires de la statistique limite (modèle logistique)	71
4.6	Densités empiriques de V_ε (modèle logistique)	72
4.7	Comparaison entre trajectoires de V_ε et du pont Brownien B (modèle logistique)	74
5.1	Trajectoires stochastiques et déterministes du modèle à dérive sigmoïde	84
5.2	Log-vraisemblance $\mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b})$ en fonction du retard θ (modèle à dérive sigmoïde)	85
5.3	Comportement de l'EMV (modèle à dérive sigmoïde).	86
5.4	Trajectoires de V_ε pour différentes valeurs de ε (modèle à dérive sigmoïde)	87
5.5	Comparaison entre trajectoires de $V(t)$ et de $B(t)$ (modèle à dérive sigmoïde)	88
5.6	Densités empiriques de V_ε (modèle sigmoïde)	89
5.7	Comparaison entre trajectoires de V_ε et du pont Brownien B (modèle sigmoïde)	90

Notations

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$: tribu borélienne sur \mathbb{R} .

$(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$: processus de Wiener standard (mouvement brownien).

$\mathbf{E}(X)$: espérance mathématique de la variable aléatoire X .

$X \sim \mathcal{L}$: la variable aléatoire X suit la loi \mathcal{L} .

$\mathbf{P}_\theta - \lim$: la convergence en probabilité.

$\arg \min_{\theta \in \Theta} f(\theta)$: ensemble des valeurs de θ minimisant la fonction f .

$S'(\theta, x) := \frac{\partial S}{\partial x}(\theta, x)$.

$\dot{S}(\theta, x) := \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta, x)$.

\otimes : produit tensoriel.

$a \ll b$: a est négligeable devant b , c'est-à-dire $\frac{a}{b} \rightarrow 0$.

$a \gg b$: a domine b , c'est-à-dire $\frac{a}{b} \rightarrow +\infty$.

$a \approx b$: a est approximativement égal à b , par exemple $a - b = o(1)$.

\implies : convergence en loi.

Chapitre 1

Introduction générale

La statistique des processus stochastiques se situe à l'interface de la théorie des probabilités et de l'inférence mathématique. Ses fondements théoriques trouvent leur origine dans la construction rigoureuse du mouvement brownien par Wiener [96], puis s'appuient sur la théorie de la mesure et la théorie des martingales établies par Doob [25]. Tous ces fondements théoriques fournissent l'infrastructure conceptuelle nécessaire à l'analyse des dépendances temporelles et à l'étude asymptotique des procédures statistiques. Cette infrastructure est ensuite consolidée par des outils analytiques cruciaux tels que les dérivées de Radon-Nikodym définies par Shepp [90] pour les mesures gaussiennes ou le calcul des intégrales stochastiques développé par McKean [76]. Hoel et al. [32] et Revuz et Yor [88] développent aussi certains concepts fondamentaux tels que les chaînes de Markov, les processus de Poisson et le mouvement brownien, synthétisant ainsi une base de la modélisation des dynamiques aléatoires. L'élaboration d'une théorie unifiée de l'inférence pour ce type de processus trouve son accomplissement dans des traités de référence, nous citons l'ouvrage de Liptser et Shiryaev [69], qui présente une synthèse rigoureuse des processus stochastiques et étudie les filtrations et les processus de Markov.

L'inférence asymptotique pour les processus stochastiques est étudiée par Ibragimov et Khasminski [36] où l'outil puissant de la propriété de la normalité asymptotique locale (LAN) est introduit. Il convient également de mentionner l'apport essentiel de Hájek [30], dont les travaux ont structuré la théorie moderne de la condition LAN et de l'efficacité statistique. Pour le cas des diffusions en régime de faible bruit, plusieurs travaux de Kutoyants [44, 45], [46], [47, 50] adaptent et développent considérablement cette théorie sous des conditions de régularité appropriées. L'auteur établit la condition LAN uniforme, la consistance et les propriétés asymptotiques des estimateurs classiques : du maximum de vraisemblance et de bayes. Son ouvrage de référence (Kutoyants [49]) synthétise ces avancées en présentant une théorie complète de l'estimation paramétrique avec des résultats clés sur la consistance et l'efficacité asymptotique. L'étude approfondie de la classe des estimateurs de la distance minimale pour les processus de diffusions est développée par Kutoyants [53]. D'autre part Kutoyants, Mourid et Bosq [54] abordent le cas plus complexe d'un processus de diffusion linéaire avec retard.

Apoyan [2] aborde l'estimation paramétrique dans un processus de diffusion non linéaire où la dérive est non différentiable par rapport au paramètre inconnu. Dans le même contexte Korso [41] étudie l'estimateur du maximum de vraisemblance pour des retards multiples dans la dérive d'un processus de type diffusion. D'autre part Mourid et Benyahia [79] traite le problème de l'estimation semi paramétrique pour la densité de probabilité des retards dans la dérive. Nous rappelons aussi les travaux sur l'estimation semi paramétrique de Iacus [33] qui aborde le problème de l'estimation de l'état d'un système dynamique perturbé à partir de l'observation de la trajectoire d'un processus de diffusion dont le coefficient de diffusion (petit) est connu alors que le coefficient de dérive est une fonction régulière inconnue. Iacus [34] propose aussi un estimateur semi paramétriques pour le coefficient de dérive dans un système dynamique non homogène.

Pour les modèles où le paramétrage exact n'est pas disponible Kutoyants [52] explore l'estimation non paramétrique de la fonction de dérive, en proposant des méthodes adaptées à ces modèles flexibles. Mourid et Kutoyants [56] proposent un estimateur fonctionnel de la mesure représentant les retards dans la dérive dans un processus de type diffusion par la méthode de la distance minimale. Une étude exhaustive de ces questions est présentée dans l'ouvrage de Kutoyants [55], qui couvre aussi bien le cas régulier que les situations non régulières. L'exploitation des propriétés ergodiques a également permis d'étudier la consistance et le comportement asymptotique des estimateurs à partir d'observations stationnaires. Kutoyants en a systématisé l'étude dans [58], couvrant les cadres paramétrique et non paramétrique, avec des développements détaillés dans [52, 57] et des contributions complémentaires de Dalalyan [17, 18], Dachian [13] et Negri [82]. Parallèlement, l'inférence pour les processus fonctionnels a été initiée par Bosq, notamment à travers son traité avec Lecoutre [6], ses travaux sur les vitesses paramétriques des estimateurs non paramétriques en temps continu [7] et son ouvrage de référence sur l'estimation et la prédiction non paramétriques pour les processus stochastiques [8]. Dans ce prolongement, Mourid a étendu avec Kara-Terki [37] la théorie LAN aux processus autorégressifs hilbertiens, adaptant ainsi l'inférence asymptotique aux données fonctionnelles dépendantes. Enfin, les processus de Poisson non homogènes constituent une autre classe essentielle de modèles en temps continu, adaptés à la description de phénomènes ponctuels. Les travaux de Kutoyants [48, 51] ont largement développé la théorie de l'estimation de leur intensité, considérant à la fois les situations régulières et non régulières, ainsi que les approches paramétriques et non paramétriques, comme le présente son ouvrage récent [65].

Dans cette perspective générale, l'analyse statistique des processus stochastiques conduit naturellement à s'interroger sur la validité des modèles utilisés pour décrire les phénomènes observés. En effet, si les méthodes d'estimation per-

mettent de déterminer des paramètres ou des fonctions ajustés aux données, elles ne garantissent pas que la structure probabiliste choisie reflète fidèlement la dynamique réelle du système. Ce problème mène directement à l'étude des procédures permettant de tester la compatibilité d'un modèle avec les trajectoires observées. Les tests d'ajustement constituent précisément un outil fondamental de cette démarche. Ils permettent d'évaluer l'adéquation entre un modèle probabiliste et les données enregistrées, en fournissant des critères objectifs pour juger la validité d'une hypothèse portant sur la loi gouvernant les observations. Ces tests sont aujourd'hui largement utilisés dans de nombreux domaines, l'économétrie, la biologie, les mathématiques financières et les sciences de l'ingénieur, ...

Dans ce travail, nous nous focalisons sur la problématique des tests d'ajustement pour des processus de type diffusion évoluant en régime de faible bruit en particulier. Cette branche de l'inférence statistique a été progressivement étendue à des contextes variés, allant des cas classiques d'observations ponctuelles indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) aux structures plus complexes de l'observation de processus continus.

1.1 Tests d'ajustement pour des observations i.i.d.

La problématique des tests d'ajustement, initiée pour des observations i.i.d. dans les travaux pionniers de Cramér [9], von Mises [94], Kolmogorov [40] et Smirnov [91], a suscité un intérêt croissant durant les années 1950. Parmi les nombreuses contributions de cette période, celles de Darling [19,20], Anderson et Darling [1] et Watson [95] méritent d'être mentionnées. Ces travaux ont conduit aux tests classiques, dont les plus utilisés de Cramér–von Mises et de Kolmogorov–Smirnov reposent sur la comparaison entre la fonction de répartition empirique

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j < x\}}$$

et la fonction de répartition théorique $F_*(x)$. Le test de Cramér–von Mises utilise la mesure quadratique

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [\widehat{F}_n(x) - F_*(x)]^2 dF_*(x),$$

généralisée par von Mises avec un poids $\psi(x)$:

$$\widetilde{W}_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [\widehat{F}_n(x) - F_*(x)]^2 \psi(x) dF_*(x),$$

tandis que le test de Kolmogorov–Smirnov repose sur la distance uniforme

$$D_n = \sup_x \sqrt{n} |\widehat{F}_n(x) - F_*(x)|.$$

Considérons l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative :

$$\mathcal{H}_0 : F(x) = F_*(x), \quad \mathcal{H}_1 : F(x) \neq F_*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Un test d'ajustement basé sur la statistique Φ_n , l'une de celles définies précédemment (W_n^2 , \widetilde{W}_n^2 ou D_n), est défini par

$$\Psi_n = \mathbb{1}_{\{\Phi_n > c_\alpha\}},$$

où $\alpha \in (0, 1)$ est le niveau du test et le seuil critique c_α est déterminé à partir de Φ , la loi limite de Φ_n sous \mathcal{H}_0 :

$$\mathbf{P}(\Phi > c_\alpha) = \alpha.$$

Sous \mathcal{H}_0 , on a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_0[\Psi_n] = \alpha,$$

où \mathbf{E}_0 désigne l'espérance sous \mathcal{H}_0 .

Ces tests sont de distribution asymptotique libre (ADF), ce qui signifie que la loi limite Φ ne dépend pas de F_* . Cette propriété repose sur le fait que la fonction empirique normalisée

$$\sqrt{n}(\widehat{F}_n(x) - F_*(x))$$

converge en loi vers un pont brownien $\{B(s)\}_{0 \leq s \leq 1}$, un processus gaussien centré de covariance $\mathbf{E}[B(s)B(t)] = \min(s, t) - st$. Il en découle les convergences en loi :

$$W_n^2 \Longrightarrow \int_0^1 B(s)^2 ds \equiv W, \quad D_n \Longrightarrow \sup_{0 \leq s \leq 1} |B(s)| \equiv D,$$

permettant la construction de tests consistants contre toute alternative fixe.

Ainsi, les règles de décision pour les tests de Cramér–von Mises et de Kolmogorov–Smirnov s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Psi_n(X^n) &= \mathbb{1}_{\{W_n^2 > c_\alpha\}}, & \mathbf{P}\left(\int_0^1 B(s)^2 ds > c_\alpha\right) &= \alpha, \\ \phi_n(X^n) &= \mathbb{1}_{\{D_n > d_\alpha\}}, & \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B(s)| > d_\alpha\right) &= \alpha. \end{aligned}$$

Ces résultats sont établis dans de nombreux travaux, notamment Durbin [26], Greenwood & Nikulin [29] et Lehmann & Romano [67].

Après avoir étudié le cas i.i.d. sous une hypothèse nulle simple, nous abordons à présent le cadre plus délicat d'une hypothèse nulle paramétrique, dans lequel la distribution du modèle est spécifiée par une fonction de répartition régulière F_* dépendant d'un paramètre inconnu θ . Plus précisément, l'hypothèse nulle s'écrit

$$\mathcal{H}_0 : \quad F(x) = F_*(\theta, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}.$$

Ce modèle a été largement étudié, notamment dans les travaux de Nikabadze [86], Babu et Rao [3], et Leigh [68]. Dans une contribution fondatrice, Durbin [26] introduit l'analyse de statistiques asymptotiques basées sur la fonction empirique normalisée définie par

$$\widehat{U}_n(x) = \sqrt{n} (\widehat{F}_n(x) - F_*(\widehat{\theta}_n, x)),$$

où $\widehat{\theta}_n$ désigne l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre θ . L'auteur étudie notamment une statistique de type Cramér–von Mises

$$\widehat{W}_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_n(x)^2 dF_*(\widehat{\theta}_n, x),$$

ainsi qu'une statistique de type Kolmogorov

$$\widehat{D}_n = \sup_x |\widehat{U}_n(x)|.$$

Sous des conditions de régularité, l'EMV est consistant et asymptotiquement normal. De plus, en notant $I(\theta)$ l'information de Fisher, $f(\theta, x)$ la densité de X_i , et $\dot{f}(\theta, x) = \partial f(\theta, x)/\partial \theta$, on dispose de la représentation asymptotique suivante

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \frac{1}{\sqrt{n} I(\theta)} \sum_{j=1}^n \frac{\dot{f}(\theta, X_j)}{f(\theta, X_j)} + o(1), \quad I(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\dot{f}(\theta, x)^2}{f(\theta, x)} dx.$$

Posons

$$B_n(x) = \widehat{F}_n(x) - F_*(\theta, x), \quad \dot{F}_*(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta} F_*(\theta, x).$$

Un développement de Taylor donne

$$\widehat{U}_n(x) = B_n(x) - \sqrt{n} (\widehat{\theta}_n - \theta) \dot{F}_*(\theta, x) + o(1).$$

D'une part, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{\dot{f}(\theta, X_j)}{f(\theta, X_j)} = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{\dot{f}(\theta, y)}{f(\theta, y)} d\widehat{F}_n(y) = \int_{\mathbb{R}} \dot{\ell}(\theta, y) dB_n(y),$$

où

$$\dot{\ell}(\theta, x) = \frac{\partial \ln f(\theta, x)}{\partial \theta}.$$

D'autre part,

$$\dot{F}_*(\theta, x) = \int_{-\infty}^x \dot{f}(\theta, y) dy = \int_{-\infty}^x \dot{\ell}(\theta, y) dF_*(\theta, y).$$

On obtient ainsi la représentation asymptotique fondamentale

$$\widehat{U}_n(x) = B_n(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\dot{\ell}(\theta, y)}{\sqrt{I(\theta)}} dB_n(y) \right) \left(\int_{-\infty}^x \frac{\dot{\ell}(\theta, y)}{\sqrt{I(\theta)}} dF_*(\theta, y) \right) + o(1).$$

Sous \mathcal{H}_0 , comme $B_n(x) \Rightarrow B(F_*(\theta, x))$, où B est un pont brownien standard, il vient

$$U(x) = B(F_*(\theta, x)) - \left(\int_{\mathbb{R}} h(\theta, F_*(\theta, y)) dB(F_*(\theta, y)) \right) \left(\int_{-\infty}^x h(\theta, F_*(\theta, y)) dF_*(\theta, y) \right),$$

avec

$$h(\theta, v) = \frac{\dot{\ell}(\theta, F_*^{-1}(\theta, v))}{\sqrt{I(\theta)}}, \quad \int_0^1 h(\theta, v)^2 dv = 1.$$

Comme établi par Darling [19], la loi limite du processus $U(x)$ dépend de la distribution $F_*(\theta, \cdot)$. Les tests construits ne sont donc pas à distribution asymptotique libre, ce qui complique l'obtention du seuil critique. Une approche alternative, introduite notamment par Durbin [26] et développée ensuite par plusieurs auteurs, consiste à appliquer une transformation linéaire $L[\cdot]$ au processus limite $U(\cdot)$ de manière à obtenir un processus de Wiener $\{W(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$. Sous \mathcal{H}_0 , on a alors

$$\widehat{\Delta}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} L^2[\widehat{U}_n](x) dF_*(\widehat{\theta}_n, x) \implies \int_0^1 W^2(s) ds.$$

Par conséquent, le test

$$\widehat{\Psi}_n := \mathbb{1}_{\{\widehat{\Delta}_n > d_\alpha\}}, \quad \mathbf{P}\{\Delta > d_\alpha\} = \alpha, \quad \Delta = \int_0^1 W^2(s) ds,$$

est ADF et le seuil d_α est universel, il ne dépend ni de F_* ni de θ .

Plusieurs tests d'ajustement ADF ont été développés sur cette base, notamment par Delgado et al. [21] ainsi que par Dette et Hetzler [23]. Des présentations et démonstrations détaillées de la transformation linéaire apparaissent dans les travaux de Kleptsyna & Kutoyants [39] et de Kutoyants [63, 64] et dans la preuve de la Proposition 4.20 de [65].

1.2 Tests d'ajustement pour des processus de diffusion

Une approche comparable a été étendue aux processus stochastiques observés en temps continu, notamment dans les travaux de Fournie [27], Iacus & Kutoyants [35], Dachian & Kutoyants [14], Negri [83, 85], Kutoyants [58, 60, 64] et Kleptsyna & Kutoyants [39]. Une part importante de cette recherche s'est concentrée sur les tests d'ajustement (GoF) pour les processus de diffusion observés en temps continu, solution de l'EDS

$$dX_t = S(X_t) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Sous l'hypothèse nulle simple

$$\mathcal{H}_0 : S(\cdot) = S_*(\cdot), \quad S_*(\cdot) \text{ est une fonction régulière positive connue,}$$

ces tests, tels que ceux de type Cramér–von Mises et Kolmogorov–Smirnov [14] sont basés sur la statistique

$$v_\varepsilon(t) := \frac{X_t - x_t^*}{\varepsilon},$$

où x_t^* est la solution de l'équation différentielle ordinaire associée pour $\varepsilon = 0$,

$$\frac{dx_t^*}{dt} = S_*(x_t^*), \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ces statistiques sont donc introduites

$$W_\varepsilon^2 = \left[\int_0^T \frac{dt}{S_*^2(x_t^*)} \right]^{-2} \int_0^T \left(\frac{X_t - x_t^*}{\varepsilon S_*^2(x_t^*)} \right)^2 dt,$$

$$D_\varepsilon = \left[\int_0^T \frac{dt}{S_*^2(x_t^*)} \right]^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{X_t - x_t^*}{\varepsilon S_*(x_t^*)} \right|.$$

De plus, la convergence uniforme de la solution de l'EDS (1.1) X_t vers x_t^* (voir Kutoyants [55]) est utilisé pour décrire la limite de ces statistiques au moyen d'un processus de Wiener $\{w(s), 0 \leq s \leq 1\}$

$$W_\varepsilon^2 \implies \int_0^1 w(s)^2 ds, \quad D_\varepsilon \implies \sup_{0 \leq s \leq 1} |w(s)|, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent, les tests de type Cramér–von Mises et Kolmogorov–Smirnov peuvent être définis

$$\Psi_\varepsilon(X^\varepsilon) = \mathbf{1}_{\{W_\varepsilon^2 > c_\alpha\}}, \quad \phi_\varepsilon(X^\varepsilon) = \mathbf{1}_{\{D_\varepsilon > d_\alpha\}}.$$

Ici $X^\varepsilon = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ est une trajectoire observée et c_α, d_α sont définis comme suit

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^1 w(s)^2 ds > c_\alpha \right\} = \alpha, \quad \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq 1} |w(s)| > d_\alpha \right\} = \alpha.$$

Ces tests maintiennent un niveau asymptotique $\alpha \in (0, 1)$ et satisfont la propriété de distribution asymptotique libre. Kutoyants [60] a étendu ces méthodes à des diffusions plus générales

$$dX_t = S(X_t)dt + \varepsilon \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

en proposant des statistiques inspirées des tests classiques de Cramér–von Mises (C–vM), Kolmogorov–Smirnov (K–S) et du Chi–deux (Ch–S), adaptées au cas asymptotique de petit bruit et conservant les mêmes propriétés asymptotiques.

De nombreux travaux se sont intéressés au test d'hypothèses sous une hypothèse nulle simple où le paramètre est fixé à une valeur donnée $\theta = \{\theta_0\}$. Le modèle prend alors la forme

$$\mathcal{H}_0 : dX_t = S(\theta_0, t, X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dans ce cadre, des contributions majeures sont dues à Dachian et Kutoyants [14], Iacus et Kutoyants [35], et Kutoyants [60]. Dans [35], Iacus et Kutoyants proposent un test semi-paramétrique pour les systèmes dynamiques faiblement bruités, basé sur la fonctionnelle

$$\vartheta(S) = \int_0^T G(x_t(S)) dt,$$

où G est \mathcal{C}^1 , positive et croissante, et $x_t(S)$ la solution déterministe associée. L'hypothèse nulle est

$$\mathcal{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 = \int_0^T G(x_t^0) dt, \quad \mathcal{H}_1 : \vartheta > \vartheta_0.$$

La statistique de test est

$$\Delta_\varepsilon^*(X) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T [G(X_t) - G(x_t^0)] dt,$$

et le test associé

$$\phi_\varepsilon^*(X) = \mathbf{1}_{\{\Delta_\varepsilon^*(X) > z_{1-\alpha} \kappa(S_0)^{1/2}\}}, \quad \kappa(S_0) = \int_0^T \left(\frac{G(x_T^0) - G(x_t^0)}{S_0(x_t^0)} \right)^2 dt.$$

Sous \mathcal{H}_0 , $\Delta_\varepsilon^*(X) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \kappa(S_0))$, assurant le niveau asymptotique α . Le test est par ailleurs localement asymptotiquement uniformément le plus puissant dans une classe d'alternatives contiguës.

Nous proposons une synthèse des travaux sur les tests d'ajustement ADF appliqués aux processus de diffusion paramétriques bruités. Ceux-ci sont définis, sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , par l'EDS

$$dX_t = S(\theta, t, X_t) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

où $\theta \in \Theta = (a, b) \subset \mathbb{R}$ est le paramètre à estimer. Parmi les contributions remarquables, nous pouvons citer les travaux de Kutoyants [62, 63], [64]. Ces contributions peuvent être présentées selon l'évolution méthodologique proposée par l'auteur. Dans [62], Kutoyants considère le modèle de diffusion à petit bruit

$$X_t = S(X_t) dt + \varepsilon \sigma(X_t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

et étudie le test de l'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 : S(x) = S(\theta, x), \quad \theta \in \Theta.$$

Notons $x_t(\theta)$ la solution déterministe associée et $\hat{\theta}_\varepsilon$ l'estimateur du maximum de vraisemblance. La statistique fondamentale est alors

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-2} \int_0^T [X_t - x_t(\hat{\theta}_\varepsilon)]^2 dt.$$

Kutoyants montre que le processus normalisé

$$u_\varepsilon(t) = \frac{X_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon S(\theta, x_t)},$$

converge, après une transformation linéaire adéquate, vers un processus limite de la forme

$$U(t) = w(t) - \left(\int_0^1 h(\theta, s) dw(s) \right) \left(\int_0^t h(\theta, s) ds \right),$$

où $w(t)$ est un mouvement brownien. Cette représentation permet de ramener la statistique du test à une forme ADF

$$\widehat{\delta}_\varepsilon = \int_0^1 B(t)^2 dt,$$

où $B(t)$ est un pont brownien. Le test obtenu est ainsi ADF.

Poursuivant cette approche, Kutoyants [63] introduit la statistique naturelle

$$\widehat{v}_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}(X_t - x_t(\widehat{\theta})),$$

où $\widehat{\theta}$ désigne l'EMV. L'auteur propose deux constructions de tests : la première repose sur un changement de temps combiné à l'utilisation de la formule d'Itô, tandis que la seconde s'appuie sur une transformation linéaire de $\widehat{v}_\varepsilon(t)$. Une avancée méthodologique significative apparaît dans l'article [64], où Kutoyants exploite la fonction score pour construire des statistiques de test. L'étude repose sur l'observation du processus $X^\varepsilon = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$, solution de l'équation

$$dX_t = S(t, X_t) dt + \varepsilon \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où la dérive S est une fonction inconnue, tandis que le coefficient de diffusion $\varepsilon \sigma(t, X_t)$ est une fonction positive connue, avec $\varepsilon \in (0, 1)$. Le test s'appuie sur l'hypothèse nulle paramétrique

$$\mathcal{H}_0 : dX_t = S(\theta, t, X_t) dt + \varepsilon \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

où $S(\theta, t, X_t)$ est une fonction régulière connue dépendant d'un paramètre inconnu $\theta \in \Theta = (a, b)$. L'étude est menée sous la condition de régularité suivante :

(R) : *Les fonctions $S(\theta, t, x)$ et $\sigma(t, x)$ admettent deux dérivées bornées par rapport à θ et à x , et leurs dérivées sont continues et bornées par rapport à t .*

À l'équation stochastique (1.3) est associée l'équation déterministe

$$\frac{dx_t}{dt} = S(\theta, t, x_t), \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

et sa solution $x^T = \{x_t(\theta)\}_{0 \leq t \leq T}$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le processus X^ε converge uniformément sur $[0, T]$ vers la fonction déterministe x^T .

L'information de Fisher s'écrit alors

$$I(\theta) = \int_0^T \left(\frac{\dot{S}(\theta, t, x_t)}{\sigma(t, x_t)} \right)^2 dt > 0.$$

La construction du test débute par la définition de la fonction score normalisée

$$U_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) = \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t, X_t)}{\varepsilon I(\theta)^{1/2} \sigma(t, X_t)^2} [dX_t - S(\theta, t, X_t)dt].$$

Le processus de la fonction score est ensuite défini par

$$U_\varepsilon(t, \theta, X^\varepsilon) = \int_0^t \frac{\dot{S}(\theta, s, X_s)}{\varepsilon I(\theta)^{1/2} \sigma(s, X_s)^2} [dX_s - S(\theta, s, X_s)ds].$$

Soit $\hat{\theta}_\varepsilon$ l'EMV de θ . Afin de garantir que le processus $U_\varepsilon(t, \hat{\theta}_\varepsilon, X^\varepsilon)$ soit bien défini, Kutoyants propose deux approches méthodologiques. La première repose sur l'application de la formule d'Itô à la fonction

$$H(\theta, s, x) = \int_{x_0}^x \frac{\dot{S}(\theta, s, y)}{\sigma(s, y)^2} dy.$$

L'intégrale stochastique associée admet alors la représentation

$$\int_0^t \frac{\dot{S}(\theta, s, X_s)}{\sigma(s, X_s)^2} dX_s = H(\theta, t, X_t) - \int_0^t \left[H'_s(\theta, s, X_s) + \frac{\varepsilon^2 \sigma(s, X_s)^2}{2} H''_{xx}(\theta, s, X_s) \right] ds.$$

Dans sa forme normalisée, le processus utilisé pour construire la statistique de test s'écrit alors

$$U_\varepsilon(t) = \frac{H(\hat{\theta}_\varepsilon, t, X_t)}{\varepsilon I(\hat{\theta}_\varepsilon)^{1/2}} - \int_0^t \left[\frac{H'_s(\hat{\theta}_\varepsilon, s, X_s)}{\varepsilon I(\hat{\theta}_\varepsilon)^{1/2}} - \frac{\dot{S}(\hat{\theta}_\varepsilon, s, X_s) S(\hat{\theta}_\varepsilon, s, X_s)}{\varepsilon I(\hat{\theta}_\varepsilon)^{1/2} \sigma(s, X_s)^2} \right] ds.$$

La statistique de test est définie par

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^T \frac{U_\varepsilon(t)^2 \dot{S}(\hat{\theta}_\varepsilon, t, X_t)}{I(\hat{\theta}_\varepsilon) \sigma(t, X_t)^2} dt.$$

Sous \mathcal{H}_0 , et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la statistique Δ_ε converge en loi vers

$$\Delta = \int_0^1 B(s)^2 ds,$$

où $B(\cdot)$ est un pont brownien standard. Le test

$$\hat{\psi}_\varepsilon = \mathbf{1}_{\{\Delta_\varepsilon > c_\alpha\}}, \quad \text{où } \mathbf{P}(\Delta > c_\alpha) = \alpha,$$

est alors de niveau asymptotique α et possède une statistique asymptotiquement libre. Dans la seconde approche, Kutoyants propose l'introduction de deux estimateurs distincts du paramètre, l'EMV et l'EDM, afin de surmonter la difficulté

liée à la non-définition rigoureuse de l'intégrale stochastique intervenant dans le processus $U_\varepsilon(t, \hat{\theta}_\varepsilon, X^\varepsilon)$.

À partir des années 2000, l'étude des processus de diffusion ergodiques et la construction de tests d'ajustement adaptés ont suscité un intérêt particulier. Les contributions majeures ont visé à élaborer des procédures dont la distribution limite, sous l'hypothèse nulle, reste indépendante des paramètres inconnus, assurant ainsi la propriété ADF des tests. Un point de départ fondamental est l'ouvrage de Kutoyants [58], qui rassemble les outils d'inférence pour les diffusions ergodiques et introduit les notions techniques (ergodicité, temps local, transformées, MLE) nécessaires à la construction de tests de type Cramér–von Mises (CvM) et Kolmogorov–Smirnov (KS). Dans le cas d'une hypothèse simple, Kutoyants [59, 61] montre que les statistiques de type CvM et KS, basées respectivement sur la fonction de répartition empirique associée à la loi invariante et sur la densité empirique obtenue via le temps local, convergent vers des fonctionnelles gaussiennes universelles, conduisant à des tests ADF consistants contre des alternatives fixes. Parallèlement, Negri et al. [81, 83] introduisent une approche fondée sur le processus empirique marqué de la fonction score, dont les statistiques convergent faiblement vers un processus gaussien. Cette approche permet d'obtenir des tests ADF valides sous différentes modalités d'observation (continue, discrète ou en temps d'événement), avec de bonnes propriétés de puissance face à des alternatives non paramétriques. Le problème des paramètres inconnus est ensuite traité par Negri et Zhou [85], qui considèrent un modèle avec paramètre de translation. Ils construisent deux statistiques de type CvM (l'une basée sur le temps local appliqué à la densité invariante, l'autre sur la fonction de répartition empirique) et démontrent que les lois limites sous \mathcal{H}_0 conservent la propriété ADF. Kleptsyna [39] étend ces résultats aux hypothèses paramétriques composites, incluant notamment les modèles d'Ornstein–Uhlenbeck, en appliquant une transformation de type martingale aux statistiques CvM/KS. Sous \mathcal{H}_0 , les statistiques transformées convergent vers des fonctionnelles standards d'un pont brownien, permettant l'utilisation de seuils universels. Enfin, Kutoyants [63, 64] développe des tests ADF pour les systèmes dynamiques perturbés, en introduisant notamment des procédures basées sur les processus de fonction score, consolidant ainsi le lien entre méthodes empiriques et approches fonctionnelles dans la construction de tests ADF.

1.3 Tests d'ajustement pour les processus de Poisson

Au-delà du cas des diffusions, la problématique des tests d'ajustement a également trouvé un prolongement naturel dans l'étude des processus de comptage,

tels que le processus de Poisson. Les premières approches adaptent les statistiques classiques de type Kolmogorov-Smirnov ou Cramér-von Mises aux observations ponctuelles par Dachian [14], et des tests CvM ont été proposés pour des intensités paramétriques par Dabye [11], démontrant la possibilité de construire des tests ADF. Des travaux ultérieurs de Kutoyants [62, 64] et de Dachian [15, 16] ont systématisé l'étude des tests d'hypothèse pour les processus de Poisson, en considérant les cas réguliers et singuliers. Différentes méthodes ont été explorées, notamment les tests fondés sur la statistique de score, le rapport de vraisemblance généralisé (LRT), le test de Wald et des tests bayésiens, montrant que ces procédures peuvent être asymptotiquement uniformément les plus puissantes dans le cas régulier, tout en permettant une analyse détaillée des situations singulières. Enfin, Dabye [12] a proposé un test CvM pour des processus inhomogènes avec paramètres de décalage et d'échelle inconnus, dont la statistique converge vers une loi limite indépendante des paramètres sous \mathcal{H}_0 , assurant à la fois la propriété ADF et la consistance face aux alternatives. Ces résultats illustrent la richesse et la flexibilité des approches disponibles pour construire des tests d'ajustement pour les processus de Poisson, qu'elles reposent sur des statistiques classiques ou sur des principes fondés sur la vraisemblance et le score. Kutoyants [65] propose une transformation permettant de convertir le processus limite $U(\cdot)$ en un processus de Wiener $\{W(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$. Cette transformation constitue un outil central pour construire des statistiques de test dont la loi limite ne dépend pas du modèle sous-jacent, assurant ainsi la propriété ADF. À titre d'illustration, considérons un processus de Poisson inhomogène dont l'intensité dépend de paramètres inconnus. Soient $X_1(t), \dots, X_n(t)$ des processus indépendants observés sur $[0, T]$, avec sous l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 :

$$\lambda(\theta, t) = \alpha f(t) + \beta g(t) + \lambda_0, \quad \theta = (\alpha, \beta)^\top \in \Theta \subset \mathbb{R}^2,$$

où f et g sont des fonctions linéairement indépendantes et $\lambda_0 > 0$ est une intensité de base connue. Kutoyants construit un estimateur des moments (EMM) consistant $\tilde{\theta}_N$, puis un EMV en une étape θ_n^* , combinant la simplicité du l'EMM et l'efficacité asymptotique du l'EMV. Sur cette base, il définit un processus transformé $w_n(\theta_n^*, \cdot)$ et une statistique intégrée

$$\bar{W}_n^2(\theta_n^*) = \int_0^T w_n(\theta_n^*, y(\theta_n^*, t))^2 \lambda(\theta_n^*, t) dt,$$

qui converge en loi vers $\int_0^1 W(x)^2 dx$, où W est un mouvement brownien standard. Le test

$$\hat{\psi}_n(X^n) = \mathbb{1}_{\{\bar{W}_n^2(\theta_n^*) > c_T\}}$$

est ainsi ADF et consistant. Cet exemple illustre l'efficacité de la combinaison d'un estimateur des moments et d'une correction en une étape pour obtenir des tests ADF universels dans les modèles de Poisson inhomogènes.

1.4 Plan de travail et position du Problème

Ce travail est consacré à la construction et l'étude d'un test d'ajustement ADF d'un processus de diffusion, notés $X^\varepsilon = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, satisfaisant l'EDS dans l'asymptotique de petite diffusion ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{cases} dX_t = S(X_t)dt + \varepsilon dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_s = x_0, & s \leq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

$\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ est un processus de Wiener, tandis que la valeur initiale x_0 est déterministe et que $S(\cdot)$ est une fonction inconnue. Le paramètre $\varepsilon \in (0, 1)$ est donné. Afin de situer cette problématique dans un cadre plus large et de mettre en évidence la contribution de ce travail, nous proposons l'organisation de cette thèse selon les chapitres suivants :

Chapitre 1 : Nous présentons un aperçu historique succinct des travaux consacrés à la statistique des processus, à l'estimation et précisément aux tests d'ajustement, et plus spécifiquement à l'étude des tests d'ajustement ADF. Ce chapitre introductif fournit d'abord un rappel des fondements et des fondateurs de la théorie des processus stochastiques. Il se concentre ensuite sur l'inférence statistique, en commençant par une revue des méthodes d'estimation (paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique) appliquées à divers modèles (linéaires, non linéaires, fonctionnels) et sous différents régimes asymptotiques (petit bruit, ergodique, mélange) pour les processus stochastiques, de diffusion, de type diffusion et de Poisson. Enfin, nous proposons un aperçu technique des tests d'ajustement, en général et des tests ADF en particulier, en partant du cas des variables indépendantes et identiquement distribuées (hypothèses simple et paramétrique) pour étendre l'analyse aux processus de diffusion (régime de petite diffusion, cas ergodique) et aux processus de Poisson.

Chapitre 2 : Nous développons les outils mathématiques fondamentaux et les méthodes d'estimation spécifiques aux modèles stochastiques étudiés dans cette thèse. Ce chapitre est structuré en deux parties principales. Dans un premier temps, nous introduisons les éléments essentiels du calcul stochastique, incluant le mouvement brownien, l'intégrale stochastique et la formule d'Itô, ainsi que la théorie des EDS. Dans un second temps, nous nous concentrons sur l'estimation paramétrique au sein d'une EDS, en présentant et analysant des estimateurs clés tels que l'estimateur du maximum de vraisemblance et celui de la distance minimale. Nous abordons également le cas important d'un modèle mal spécifié, et étendons enfin le cadre d'étude à l'estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique à retard.

Chapitre 3 : Ce chapitre présente les résultats principaux de notre article [5]. Nous y développons et analysons une méthodologie complète pour tester la

présence d'un retard dans le coefficient de dérive de l'EDS (1.4) observée en régime de petite diffusion. Cette méthodologie aboutit à la construction d'un test d'ajustement à distribution asymptotique libre. Cette étude se structure en trois parties. Dans un premier temps, nous posons le problème : sous l'hypothèse nulle, le coefficient de dérive dépend d'un retard caractérisé par un paramètre unidimensionnel inconnu $\theta \in \Theta = (a, b) \subset [0, T]$. En notant S une fonction régulière donnée, l'hypothèse nulle s'écrit

$$\mathcal{H}_0 : dX_t = S(X_{t-\theta}) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

tandis que, pour une fonction régulière $B(\cdot)$, l'hypothèse alternative (sans retard) est donnée par

$$\mathcal{H}_1 : dX_t = B(X_t) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Fixons un niveau $\alpha \in (0, 1)$. Nous considérons alors la classe des tests de niveau asymptotique α :

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ \Psi_\varepsilon : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_\theta[\Psi_\varepsilon(X^\varepsilon)] = \alpha \right\}, \quad \forall \theta \in \Theta = (a, b),$$

où $\mathbf{E}_\theta[\Psi_\varepsilon(X^\varepsilon)]$ désigne la probabilité de rejet de \mathcal{H}_0 sous le paramètre θ , et \mathbf{E}_θ l'espérance correspondante. Ensuite, nous détaillons les préliminaires et résultats auxiliaires nécessaires : L'analyse est menée à partir de la trajectoire restreinte $X^{\varepsilon, b} = \{X_t\}_{t \in [b, T]}$ du processus X^ε , l'intervalle d'observation effectif étant $[\theta, T]$. En effet, l'impact du terme de dérive retardée ne devient observable qu'à partir de l'instant $t > \theta$, avec $\theta < b$.

En posant $\varepsilon = 0$, nous associons à (1.5) l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta}), \quad x_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

dont la solution est notée $\{x_t = x_t(\theta)\}_{0 \leq t \leq T}$.

Une particularité essentielle du problème réside dans le fait que, en écrivant (1.5) sous forme intégrale en $t - \theta$, nous obtenons

$$X_{t-\theta} = x_0 + \int_b^{t-\theta} S(X_{s-\theta}) ds + \varepsilon W_{t-\theta},$$

de sorte que les trajectoires $\{X_{t-\theta}, 0 \leq t \leq T\}$ possèdent la même régularité que celles du processus de Wiener $\{W_{t-\theta}, 0 \leq t \leq T\}$. Par conséquent, la dérive sous \mathcal{H}_0 n'est pas différentiable par rapport au paramètre de retard.

Pour l'étude inférentielle, nous introduisons l'hypothèse de régularité suivante :

\mathcal{C} : La fonction $S(\cdot)$ est positive, deux fois continûment dérivable, et sa dérivée $S'(\cdot)$ est positive, bornée, et non nulle sur un certain sous-intervalle de $[x_b, x_T]$.

Sous la condition \mathcal{C} , l'information de Fisher associée à (1.5) est strictement positive et la condition d'identifiabilité est satisfaite :

$$I_b(\theta) = \int_b^T S^2(x_{t-2\theta}) S'^2(x_{t-\theta}) dt > 0,$$

$$\forall \gamma > 0, \quad \inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \int_b^T (S(x_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta_0}))^2 dt > 0.$$

Enfin, nous énonçons et démontrons nos résultats théoriques principaux : La construction du test s'inspire des travaux de Kutoyants [63, 64], qui reposent sur la fonction score. Toutefois, dans notre cas, la non-différentiabilité du terme de dérive en θ nous conduit à définir le processus de la fonction score (SFP), dérivée du log-vraisemblance par rapport à θ dans l'espace $L^2_{[0,T]}$. Nous définissons ainsi le processus $U_\varepsilon(t, \theta, X^\varepsilon)$ par

$$U_\varepsilon(t, \theta, X^\varepsilon) = I(\theta)^{-1/2} \int_0^t \frac{S(X_{s-2\theta}) S'(X_{s-\theta})}{\varepsilon} [dX_s - S(X_{s-\theta}) ds].$$

Or, la statistique empirique $U_{\varepsilon,b}(t, \hat{\theta}, X^{\varepsilon,b})$ n'est pas bien définie en raison du caractère anticipatif de son intégrande. Dans ce contexte, Kutoyants [64] propose deux méthodes : une première basée sur la formule d'Itô, inadaptée ici du fait de la dépendance simultanée en $s - \theta$ et $s - 2\theta$, et une seconde approche permettant de contourner cette difficulté, que nous retenons. Notre démarche repose sur l'utilisation combinée de deux estimateurs :

1. l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$, défini par

$$\hat{\theta}_{\varepsilon,b} := \arg \max_{\theta \in [a,b]} L(\theta; X^{\varepsilon,b}),$$

où

$$L(\theta; X^{\varepsilon,b}) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_b^T S(X_{t-\theta}) dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_b^T S^2(X_{t-\theta}) dt \right\}.$$

2. l'EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$, défini par

$$\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b} := \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_b^{\nu_\varepsilon} (X_t - x_t(\theta))^2 dt, \quad \nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}.$$

Notons θ_0 la vraie valeur du paramètre. La statistique de test de type Cramér-von Mises est construite à partir de la statistique auxiliaire $V_\varepsilon(t)$:

$$\delta_\varepsilon = \int_{\nu_\varepsilon}^T \frac{V_\varepsilon(t)^2 S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})^2 S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})^2}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})} dt,$$

avec

$$V_\varepsilon(t) = \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} dW_s$$

$$- \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) [S(X_{s-\theta_0}) - S(X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon,b}})]}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} ds.$$

La démonstration des résultats s'appuie sur une analyse asymptotique dans le régime de petite diffusion ($\varepsilon \rightarrow 0$). Sous \mathcal{H}_0 , nous établissons la consistance des estimateurs $\widehat{\theta}_{\varepsilon,b}$ et $\widetilde{\theta}_{\nu\varepsilon,b}$, ainsi que la normalité asymptotique de l'EMV, accompagnées de résultats complémentaires. Ces outils permettent de montrer que la statistique proposée définit un test d'ajustement appartenant à la classe \mathcal{K}_α , dont la loi limite est indépendante du paramètre, garantissant ainsi un test ADF. Sous \mathcal{H}_1 , les estimateurs conservent leurs propriétés de convergence, mais vers d'autres valeurs caractéristiques du modèle mal spécifié, ce qui assure la consistance du test et établit sa puissance asymptotique contre toute alternative fixée. Ces développements reposent sur la convergence uniforme en $t \in [0, T]$ des solutions de l'EDS avec retard (1.5) et de l'EDS associée sous \mathcal{H}_1 vers leurs limites déterministes respectives.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à des applications du cadre théorique développé dans le chapitre 3. Chacun présente un modèle issu d'un domaine distinct, la biologie et l'économie, illustrant ainsi les résultats théoriques obtenus.

Chapitre 4 : Ce chapitre est consacré à une application en biologie, portant sur l'ajustement d'un modèle logistique stochastique décrit initialement par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = rX_t \left(1 - \frac{X_t}{K}\right) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La dérive de ce modèle n'étant que localement lipschitzienne, nous introduisons une troncature lisse afin d'obtenir une dérive globalement lipschitzienne et suffisamment régulière pour permettre l'application rigoureuse des résultats asymptotiques développés au chapitre 3. Cette modification est de nature purement technique et ne modifie pas la dynamique du modèle sur les domaines biologiquement pertinents. Le modèle stochastique effectivement considéré dans ce chapitre est alors donné par l'équation différentielle stochastique tronquée

$$dX_t = r\chi_K(X_t) \left(1 - \frac{\chi_K(X_t)}{K}\right) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où la fonction $\chi_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une troncature lisse de l'identité, définie par

$$\chi_K(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq K, \\ \text{fonction } C^2 \text{ d'interpolation,} & K < x < K + 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ou } x \geq K + 1, \end{cases} \quad \text{avec } |\chi'_K(x)| \leq 1.$$

La fonction χ_K coïncide avec l'identité sur l'intervalle biologiquement pertinent $[0, K]$ et assure que la dérive tronquée est globalement lipschitzienne. L'analyse repose alors sur le test d'ajustement construit au chapitre 3, appliqué à ce modèle logistique tronqué. Dans ce cadre, l'hypothèse nulle correspond à une dérive

logistique à retard, tandis que l'hypothèse alternative est donnée par un modèle à dérive instantanée. Nous construisons une statistique de test adaptée et montrons que, sous des conditions de régularité appropriées, elle converge en loi vers un fonctionnel d'un pont brownien. Le test ainsi obtenu est ADF. **Chapitre 5 :** Ce chapitre présente une application en économie, centrée sur un processus de diffusion à dérive sigmoïde

$$\begin{cases} dX_t = r \varphi\left(\frac{X_t - X^*}{\kappa}\right) dt + \varepsilon dW_t, & \varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-u}}, u \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T, \\ X_s = x_0, & s \leq 0. \end{cases}$$

modèle utilisé pour décrire certaines dynamiques de transition ou d'ajustement dans les sciences économiques et financières. Le test du chapitre 3 est appliqué à ce contexte pour distinguer deux dynamiques : une hypothèse nulle présentant un effet de mémoire (retard), et une hypothèse alternative caractérisée par un ajustement immédiat. Nous démontrons que la statistique de test proposée converge également en loi vers un fonctionnel d'un pont brownien, ce qui garantit la propriété ADF.

Ces deux chapitres d'application mettent en évidence la validité et l'utilité pratique de notre approche pour l'analyse de modèles réalistes où la présence d'un délai dans la dynamique est une question centrale. Dans chacun d'eux, des simulations numériques réalisées avec le logiciel **R** viennent illustrer les performances empiriques de la procédure de test et confirmer ses propriétés théoriques.

Enfin, une conclusion générale résume les principales contributions, en examine les limites et ouvre sur des perspectives de recherche.

Chapitre 2

Notions préliminaires

Sommaire

2.1	Calcul stochastique	19
2.1.1	Mouvement Brownien.	20
2.1.2	Intégrale stochastique et formule d'Itô	23
2.1.3	Équation différentielle stochastique (EDS)	25
2.2	Estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique	27
2.2.1	Estimateur du maximum de vraisemblance	28
2.2.2	Estimateur par la méthode de la distance minimale	30
2.2.3	Modèle mal spécifié	31
2.2.4	Estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique à retard	33

Dans ce chapitre, nous exposons les fondements théoriques indispensables à l'analyse statistique des processus de diffusion. Nous introduisons les outils essentiels du calcul stochastique, notamment ceux relatifs à la formulation et à l'interprétation des équations différentielles stochastiques, qui seront exploités dans l'étude du comportement asymptotique de certaines statistiques utilisées dans ce travail. Nous rappelons par ailleurs plusieurs notions clés de l'estimation paramétrique, en mettant l'accent sur l'estimateur du maximum de vraisemblance, dont les propriétés asymptotiques constitue un aspect essentiel dans l'élaboration des procédures d'ajustement. L'estimation par distance minimale est également abordée, comme alternative pertinente dans les situations où l'estimateur du maximum de vraisemblance peut s'avérer inadéquat.

2.1 Calcul stochastique

Nous considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, où :

- Ω désigne l'ensemble des événements élémentaires ;
- \mathcal{F} est une σ -algèbre de parties de Ω ;

- $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ est une mesure de probabilité, c'est-à-dire une application mesurable, σ -additive, vérifiant $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Nous supposons que l'espace de probabilité considéré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est complet, c'est-à-dire qu'il contient tous les sous-ensembles des ensembles de mesure nulle.

Un processus stochastique $h = \{h(t, \omega), 0 \leq t \leq T, \omega \in \Omega\}$ est dit mesurable si, pour tout ensemble borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'ensemble

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] : h(t, \omega) \in B\}$$

appartient à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$, où $\mathcal{B}([0, T])$ désigne la σ -algèbre de Borel sur l'intervalle $[0, T]$.

Soit $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ une famille croissante de σ -algèbres (filtration). Un processus stochastique mesurable h est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ si pour tout $t \in [0, T]$, la variable aléatoire $h(t, \cdot)$ est \mathcal{F}_t -mesurable. Un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ est dit progressivement mesurable si pour tout $t \in [0, T]$ et tout borélien $B \subset \mathbb{R}$,

$$\{(s, \omega) : 0 \leq s < t, h(s, \omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t]).$$

Dans la suite, nous introduisons successivement les principaux outils du calcul stochastique : le mouvement Brownien. comme processus fondamental, l'intégrale stochastique et la formule d'Itô comme cadre analytique, puis les équations différentielles stochastiques (EDS) qui en constituent l'application naturelle.

2.1.1 Mouvement Brownien.

Le mouvement Brownien. est le processus stochastique central qui sert de fondement à toute la théorie du calcul stochastique. Nous en rappelons ici la définition et quelques propriétés essentielles.

Définition 2.1.1. [96] *Un processus aléatoire $\{W_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est appelé processus de Wiener standard (ou mouvement Brownien. standard) s'il satisfait les trois conditions suivantes :*

- (i) $W_0 = 0$ presque sûrement ;
- (ii) *Les accroissements du processus sur des intervalles disjoints sont indépendants c'est à dire que pour toute partition $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, les variables aléatoires $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*
- (iii) *Pour tout $t, s \in [0, T]$, W_t sont des variables aléatoires de loi normale centrée, de variance t , et de covariance $\mathbf{E}[W_t W_s] = \min(t, s)$.*

Nous rappelons une deuxième définition équivalente à la première.

Définition 2.1.2. *Un mouvement Brownien standard réel est un processus gaussien centré $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à trajectoires continues, dont la fonction de covariance est donnée par*

$$K(s, t) = \min(s, t), \quad s, t \geq 0.$$

Proposition 2.1.1. *Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard, alors pour tout $N > 0$ et tout $t > 0$,*

$$\mathbf{P}\{W_t > N\} \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{t}}{N\sqrt{2\pi}} \right\} \exp \left(-\frac{N^2}{2t} \right), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} W_s > N \right\} = 2 \mathbf{P}\{W_t > N\}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| > N \right\} < 4 \mathbf{P}\{W_T > N\}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| > N \right\} \leq \min \left\{ 2, \frac{4\sqrt{T}}{N\sqrt{2\pi}} \right\} \exp \left(-\frac{N^2}{2T} \right). \quad (2.4)$$

Preuve. Pour établir les estimations de la proposition nous suivons Karatzas [38] et Kutoyants [55].

Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, alors $\xi := W_t/\sqrt{t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On pose $a := N/\sqrt{t}$, nous avons alors

$$\mathbf{P}(\xi > a) = \int_a^\infty \varphi(x) dx, \quad \text{où} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Le changement de variable $x = a + y$, donne

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \varphi(x) dx &= e^{-a^2/2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ay-y^2/2} dy \\ &\leq e^{-a^2/2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2} e^{-a^2/2}. \end{aligned}$$

D'autre part, notons que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. Pour $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \varphi(x) dx &= \left[-\frac{\varphi(x)}{x} \right]_a^\infty + \int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \\ &\leq \frac{\varphi(a)}{a} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}. \end{aligned}$$

En combinant les deux majorations précédentes, nous obtenons finalement

$$\mathbf{P}(\xi > a) = \int_a^\infty \varphi(x) dx \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \right\} e^{-a^2/2},$$

ce qui donne l'inégalité (2.1).

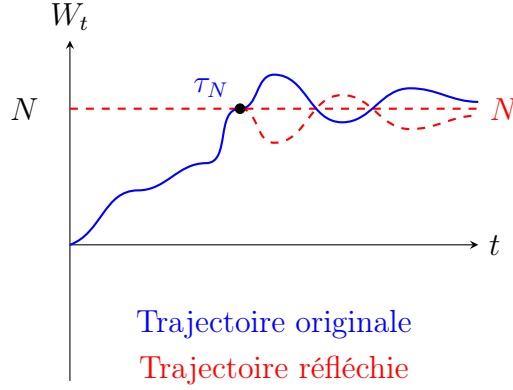
Pour établir le principe de réflexion pour le mouvement Brownien. (2.2), nous introduisons le temps d'atteinte du niveau N .

$$\tau_N = \inf\{s > 0 : W_s = N\},$$

et nous rappelons la transformation de réflexion du mouvement Brownien.

$$\tilde{W}_s := \begin{cases} W_s & \text{si } s \leq \tau_N \\ 2N - W_s & \text{si } s > \tau_N \end{cases}$$

Interprétation géométrique :



Le processus $(W_{\tau_N+s} - N)_{s \geq 0}$ est un mouvement Brownien, indépendant de \mathcal{F}_{τ_N} (propriété de Markov forte du mouvement Brownien, standard). Nous utilisons la partition

$$\left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N \right\} = \{W_t \geq N\} \cup \left\{ W_t < N, \sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N \right\},$$

Il s'en suit,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N \right\} = P \{W_t \geq N\} + P \left\{ W_t < N, \sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N \right\}.$$

Enfin la transformation de réflexion établit une bijection entre, les trajectoires correspondant à $\{\sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N, W_t < N\}$, et celles associées à $\{W_t > N\}$ permet d'écrire,

$$\mathbf{P} \left\{ W_t < N, \sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N \right\} = \mathbf{P} \{W_t > N\}.$$

Nous déduisons alors

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq N \right\} = 2\mathbf{P}\{W_t \geq N\}.$$

La preuve de (2.3). est établie en remarquant que

$$\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s| > N \right\} = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} W_s > N \right\} \cup \left\{ \inf_{0 \leq s \leq T} W_s < -N \right\}.$$

De l'égalité (2.2) et la symétrie de (W_t) nous avons

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} W_s > N \right\} = \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 \leq s \leq T} W_s < -N \right\} = 2\mathbf{P}\{W_T > N\},$$

Ceci aboutit à l'estimation

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| > N\right\} < 4 \mathbf{P}\{W_T > N\}$$

Enfin en combinant les estimations (2.1) et (2.3), nous obtenons (2.4)

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq s \leq T} |W_s| > N\right\} \leq 4 \mathbf{P}\{W_T > N\} \leq \min\left\{2, \frac{4\sqrt{T}}{N\sqrt{2\pi}}\right\} \exp\left(-\frac{N^2}{2T}\right).$$

□

Le lemme suivant établit une borne pour l'exponentielle du supremum du mouvement Brownien.

Lemme 2.1.1. [55]

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Pour tout $\lambda > 0$ nous avons

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\lambda \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|\right)\right] \leq 1 + \lambda\sqrt{8\pi T} e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}.$$

Et Pour $\lambda < \frac{1}{2T}$

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\lambda \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|^2\right)\right] \leq 1 + 2\lambda + \frac{8\lambda T}{\sqrt{1 - 2\lambda T}}.$$

Pour la preuve du lemme, voir Kutoyants [55] Chapitre 1, Lemme 1.14. où l'auteur utilise l'inégalité classique de la queue de la loi normale ainsi que les estimations (2.3) et (2.4).

2.1.2 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Nous rappelons la notion d'intégrale stochastique ainsi que certaines propriétés utiles pour ce travail. Nous introduisons \mathcal{M}_T la classe des processus h , progressivement mesurables et tels que

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T h(t, \omega)^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Nous rappelons aussi l'ensemble \mathcal{M}_T^2 défini par

$$\mathcal{M}_T^2 := \left\{h \in \mathcal{M}_T : \mathbf{E}\left[\int_0^T h(t, \omega)^2 dt\right] < \infty\right\}.$$

L'intégrale stochastique d'un processus $h \in \mathcal{M}_T$ est alors définie par

$$I_T(h) = \int_0^T h(t, \omega) dW_t.$$

De plus $I_T(h)$ satisfait les propriétés suivantes (voir Liptser & Shiryaev, [69] et Karatzas & Shreve [38]) :

(i) Si $h \in \mathcal{M}_T^2$, alors

$$\mathbf{E}[I_T(h)] = 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[I_T(h) \mid \mathcal{F}_t] = I_t(h).$$

(ii) Pour $h, g \in \mathcal{M}_T^2$, l'égalité suivante est satisfaite

$$\mathbf{E}[I_T(h)I_T(g)] = \mathbf{E} \left[\int_0^T h(t, \omega)g(t, \omega)dt \right],$$

en particulier

$$\mathbf{E}[I_T(h)^2] = \mathbf{E} \left[\int_0^T h(t, \omega)^2 dt \right].$$

(iii) Si $h \in \mathcal{M}_T$, alors

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(I_t(h) - \frac{1}{2} \int_0^T h(t, \omega)^2 dt \right) \right] \leq 1.$$

Un résultat fondamental pour l'étude des trajectoires de l'intégrale stochastique est l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

Théorème 2.1.1. *Soit $h \in \mathcal{M}_T^2$. Supposons que pour un entier $m \geq 1$,*

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T |h(t, \omega)|^{2m} dt \right] < \infty.$$

Alors, il existe une constante C_m telle que

$$\mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(h)|^{2m} \right] \leq C_m \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T h(t, \omega)^2 dt \right)^m \right].$$

En particulier, pour $m = 1$,

$$\mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(h)|^2 \right] \leq 4 \mathbf{E} \left[\int_0^T h(t, \omega)^2 dt \right].$$

Pour une démonstration de ce théorème, voir par exemple Karatzas et Shreve [38] ou Lipster et Shiriyayev [69].

Nous introduisons ensuite la définition et les principales propriétés d'un processus d'Itô. Soit W un processus de Wiener et X_0 une variable \mathcal{F}_0 -mesurable. Considérons deux processus : $h \in \mathcal{M}_T$ et g un processus \mathcal{F}_t -adapté, tel que

$$\mathbf{P} \left(\int_0^T |g(t, \omega)| dt < \infty \right) = 1.$$

Alors, le processus stochastique défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s, \omega) ds + \int_0^t h(s, \omega) dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

est appelé un processus d'Itô. Sous une forme abrégée, on écrit souvent

$$dX_t = g(t, \omega) dt + h(t, \omega) dW_t, \quad X_0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est une notation différentielle formelle correspondant à la représentation intégrale (2.5). La trajectoire $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ est presque sûrement continue, et le processus est \mathcal{F}_t -adapté; pour une démonstration rigoureuse, voir Lipster et Shiriyayev [69].

Proposition 2.1.2 ([38]). *Soit $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ un processus d'Itô vérifiant (2.6), et soit $F : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2,1}$, (deux fois continûment différentiable en la variable spatiale x et une fois en la variable temporelle t). Alors le processus transformé*

$$Y_t = F(X_t, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

est également un processus d'Itô, et il vérifie la relation différentielle stochastique, connue sous le nom de formule d'Itô :

$$\begin{cases} dY_t = \left(F'_t(X_t, t) + F'_x(X_t, t)g(t, \omega) + \frac{1}{2}F''_{xx}(X_t, t)h^2(t, \omega) \right) dt + F'_x(X_t, t)h(t, \omega)dW_t, \\ Y_0 = F(X_0, 0). \end{cases}$$

Nous nous intéressons à présent à une classe particulière de processus d'Itô : les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS). Cette section est consacrée à la définition rigoureuse d'une EDS, à la notion de solution forte, ainsi qu'au théorème fondamental d'existence et d'unicité.

2.1.3 Équation différentielle stochastique (EDS)

Définition 2.1.3. *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une relation de la forme*

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration usuelle, μ désigne le coefficient de dérive et σ le coefficient de diffusion. Un processus solution $(X_t)_{t \geq 0}$, de l'EDS (2.7), est un processus continu, adapté à la filtration, satisfaisant presque sûrement l'égalité intégrale

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s, \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Un tel processus est appelé processus de diffusion; il s'agit d'un processus de Markov à trajectoires continues gouverné par un opérateur différentiel du second ordre.

Après avoir introduit la notion générale de processus de diffusion associée à une EDS dont les coefficients peuvent dépendre à la fois de l'état et du temps,

nous considérons à présent un cas particulier d'importance fondamentale : celui des *diffusions homogènes*, où les coefficients dépendent uniquement de la variable d'état.

Définition 2.1.4. *Un processus de diffusion homogène est un processus de diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de l'EDS*

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (2.9)$$

où les coefficients μ et σ ne dépendent que de la variable X_t et non du temps t .

Deux types de solutions pour l'EDS (2.9) sont possibles : les solutions fortes et les solutions faibles. En effet, considérons la famille de σ -algèbres

$$\mathcal{F}_t^{X_0, W} = \sigma\{X_0, W_s : 0 \leq s \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

engendrée par la condition initiale X_0 et par (W_t) jusqu'au temps t .

Définition 2.1.5. *L'EDS (2.9) admet une solution forte $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ relativement au mouvement Brownien (W_t) si :*

(i) *le processus (X_t) satisfait l'égalité intégrale*

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (2.10)$$

et possède des trajectoires continues \mathbf{P} -presque sûrement,

(ii) *pour tout $t \in [0, T]$, la variable X_t est $\mathcal{F}_t^{X_0, W}$ -mesurable.*

La solution forte est unique si pour toutes solutions fortes $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ construites sur le même espace et pour le même mouvement Brownien, nous avons

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}| = 0\right) = 1,$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution forte de l'EDS (2.9) (voir [69]).

Nous posons les hypothèses **H** :

(i) X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable et $\mathbf{E}[|X_0|^2] < \infty$.

(ii) Pour tout $N > 0$ il existe $L_N > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x| \vee |y| \leq N$,

$$|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L_N |x - y|.$$

(iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2x \mu(x) + \sigma(x)^2 \leq C(1 + x^2).$$

Théorème 2.1.2. *Considérons l'EDS (2.9) et supposons que les hypothèses \mathbf{H} sont satisfaites. Alors l'équation (2.9) admet une solution forte unique $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ sur tout intervalle compact $[0, T]$. De plus, cette solution possède une version à trajectoires continues \mathbf{P} -presque sûrement et il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] \leq K.$$

Alors qu'une solution forte est définie sur un espace probabilisé fixé et adaptée à un mouvement Brownien. donné, une solution faible consiste à construire simultanément l'espace probabilisé, le mouvement Brownien. et le processus qui satisfait l'équation.

Définition 2.1.6. *L'EDS (2.9) admet une solution faible $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec loi initiale F s'il existe*

- (i) *un système stochastique constitué d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfaisant les conditions usuelles, et d'un mouvement Brownien. $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté à cette filtration,*
- (ii) *une variable aléatoire X_0 de loi F , c'est-à-dire*

$$\mathbf{P}(X_0 \leq x) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tels que (X_t) soit (\mathcal{F}_t) -adapté, possède des trajectoires continues \mathbf{P} -presque sûrement, satisfasse (2.10), et vérifie la condition d'intégrabilité

$$\mathbf{P} \left(\int_0^T (|\mu(X_t)| + \sigma^2(X_t)) dt < \infty \right) = 1.$$

Remarque : La présente étude vise la construction d'un test d'ajustement à distribution asymptotique libre. Elle porte sur des processus de diffusion avec mémoire. Les quelles sont solution d'EDS à retard et appartiennent à la classe plus générale des processus de type diffusion.

Après avoir présenté brièvement les fondements du calcul stochastique ainsi que quelques résultats théoriques relatifs aux EDS, nous abordons à présent les méthodes d'estimation paramétrique dans ce contexte. Cette section est consacrée à l'étude de différentes approches : les estimateurs de la distance minimale, l'analyse du cas des modèles mal spécifiés, ainsi que l'estimation dans le cadre des EDS avec retard.

2.2 Estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique

L'estimation paramétrique dans une EDS à temps continu consiste à identifier les paramètres inconnus gouvernant les coefficients de dérive $S(\theta, \cdot)$ et de diffusion

$\sigma(\theta, \cdot)$, à partir d'observations discrètes ou continues de la trajectoire du processus solution. Dans ce travail, nous utilisons l'estimation par la distance minimale (EDM), fondée sur la minimisation d'une métrique entre les données observées et les prédictions théoriques du modèle, et ainsi que l'estimation par le maximum de vraisemblance (EMV), obtenue par maximisation de la fonction de vraisemblance du processus observé. Néanmoins ces méthodes classiques peuvent être complétées par des approches bayésiennes, qui introduisent des distributions a priori sur les paramètres, ou par des techniques non paramétriques adaptées aux situations où la forme fonctionnelle des coefficients de l'EDS est inconnue.

Dans le cas plus complexe des EDS avec retard :

$$dX_t = S(t, X_t, X_{t-\theta})dt + \varepsilon\sigma(t, X_t)dW_t,$$

des difficultés théoriques et numériques supplémentaires émergent en raison de la dépendance non-markovienne du passé du processus. La littérature mathématique a établi plusieurs résultats fondamentaux concernant l'estimation paramétrique dans ce cadre. Les travaux importants de Kutoyants (1986, 2004) ont démontré des propriétés asymptotiques pour l'EMV, couvrant simultanément le régime de petit bruit ($\varepsilon \rightarrow 0$) et le cas des diffusions ergodiques ($T \rightarrow +\infty$). Parallèlement, Küchler et Kutoyants [43] ont développé des estimateurs pour le paramètre de retard θ dans le contexte particulier linéaire. D'autre part Korso Feciane [41] a établi des résultats de consistance et de normalité asymptotique pour l'estimation paramétrique multi-dimensionnelle des retards dans le cadre non linéaire des processus de type diffusions.

Dans ce travail, nous nous concentrons particulièrement sur deux méthodes fondamentales d'estimation. D'une part l'EMV reconnu pour ses propriétés d'efficacité asymptotique optimale. D'autre part, l'EDM, dont l'utilité s'avère particulièrement pertinente dans les situations où l'EMV n'est pas applicable ou que son calcul est compliqué. Nous analysons les résultats théoriques clés relatifs à ces estimateurs, en s'appuyant sur le cadre méthodologique développé dans les travaux antérieurs.

2.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

Dans cette section, nous présentons un résultat utile pour ce travail selon lequel, sous des conditions de régularité, l'EMV est consistant, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace. Ces propriétés font de l'EMV un outil central de la théorie de l'estimation paramétrique. Considérons le processus de diffusion solution de

$$dX_t = S(\theta, X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.11)$$

où S est une fonction régulière en x et θ . θ est un paramètre inconnu dans Θ un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Nous avons à estimer θ à partir de l'observation d'une trajectoire complète $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$. Soit $x_t(\theta)_{0 \leq t \leq T}$ la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) associée

$$\frac{dx_t}{dt} = S(\theta, x_t), \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.12)$$

L'information de Fisher associé à ce modèle est donné par la formule suivante (voir Kutoyants [50] ou [55], section 2.2)

$$I(\theta) = \int_0^T \dot{S}^2(\theta, x_t) dt.$$

Nous étudions les propriétés de l'EMV sous les conditions suivantes

- (C₁) : La fonction $S(\theta, x)$ admet deux dérivées continues et bornées par rapport à θ et x .
- (C₂) : L'information de Fisher $I(\theta)$ est strictement positive.
- (C₃) : La condition d'identifiabilité est satisfaite :

$$\forall \nu > 0, \quad \inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \nu} \int_0^T [S(\theta, x_t(\theta)) - S(\theta_0, x_t(\theta_0))]^2 dt > 0,$$

où θ_0 désigne la vraie valeur inconnue du paramètre θ , voir Kutoyants [64].

Sous la condition (C₁), le problème (2.11) admet une solution unique. De plus, les mesures $\{\mathbf{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\}$, induites par le processus solution de cette équation sur l'espace $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ des fonctions continues sur $[0, T]$, sont équivalentes (voir Lipster et Shirayayev [69], chap. 4, pour une étude détaillée).

Le rapport de vraisemblance associé au modèle paramétrique (2.11), pour deux valeurs $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ est donné par la formule suivante (voir [55], section 1.2 ou [69], section 7.2)

$$\frac{d\mathbf{P}_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{d\mathbf{P}_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}(X) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T [S(\theta_2, X_t) - S(\theta_1, X_t)] dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [S(\theta_2, X_t)^2 - S(\theta_1, X_t)^2] dt \right\}.$$

L'EMV $\hat{\theta}_\varepsilon$ est alors défini comme solution de l'équation :

$$\frac{d\mathbf{P}_{\hat{\theta}_\varepsilon}^\varepsilon}{d\mathbf{P}_{\theta_1}^\varepsilon}(X) = \sup_{\theta \in \Theta} \frac{d\mathbf{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbf{P}_{\theta_1}^\varepsilon}(X).$$

Ici $\theta_1 \in \Theta$ est une valeur fixée. Pour une étude détaillée se référer à [36], section 3.1 ou [55]. Si θ_0 désigne la valeur vraie (inconnue) du paramètre, le comportement asymptotique de cet estimateur est décrit dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. [55] Supposons que les conditions C_1 , C_2 et C_3 sont satisfaites.

Alors uniformément sur tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$,

1. l'EMV $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est consistant : $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\theta}_\varepsilon = \theta_0$,
2. $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est asymptotiquement normal : $\varepsilon^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta_0) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, I_b^{-1}(\theta_0))$, ($\varepsilon \rightarrow 0$),
3. $\widehat{\theta}_\varepsilon$ possède des moments convergents : pour tout $p > 0$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\theta \in \mathcal{K}} \left| \mathbf{E}_\theta |I(\theta)^{1/2}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)^p \varepsilon^{-p} - \mathbf{E}|\Delta|^p \right| = 0,$$

où $\mathcal{L}(\Delta) = \mathcal{N}(0, 1)$.

2.2.2 Estimateur par la méthode de la distance minimale

Cette section est consacrée à une classe d'estimateurs dits de la distance minimale (EDM). Leur principe repose sur la minimisation d'un critère fonctionnel mesurant l'écart entre une caractéristique empirique du processus observé et sa contrepartie théorique dépendant du paramètre à estimer. L'un des principaux atouts de cette méthode réside dans son efficacité asymptotique mais aussi son applicabilité aux cas dits non standards où l'estimateur du maximum de vraisemblance ne peut être utilisé. Nous nous intéressons plus particulièrement à la convergence en probabilité de ces estimateurs dans le cadre des petites diffusions ($\varepsilon \rightarrow 0$). On considère le même modèle d'observations (2.11)

$$dX_t = S(\theta, X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Soit $x_t(\theta)_{0 \leq t \leq T}$ la solution de l'EDO (2.12) associée,

$$\frac{dx_t}{dt} = S(\theta, x_t), \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La définition la plus générale de l'EDM peut s'énoncer comme suit. Soit $Y(\theta, \cdot)$, $\theta \in \Theta$, une famille d'applications mesurables de $\mathcal{C}[0, T]$, l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$, dans un espace de Banach $(\mathbf{B}, \|\cdot\|_{\mathbf{B}})$, telle que

$$\mathbf{P}_{\theta_0} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Y(\theta, \cdot)\|_{\mathbf{B}} = \|y(\theta, \theta_0, \cdot)\|_{\mathbf{B}},$$

où $y(\theta, \theta_0, \cdot)$ est une fonction déterministe vérifiant

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} \|y(\theta, \theta_0, \cdot)\|_{\mathbf{B}}.$$

L'EDM $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ est alors défini par

$$\widetilde{\theta}_\varepsilon = \arg \min_{\theta \in \Theta} \|Y(\theta, X_t)\|_{\mathbf{B}}.$$

Le comportement asymptotique de l'EDM dans ce cadre général a été étudié par P. Millar [77, 78]. Dans notre cas, nous nous intéressons à minimiser la distance entre la trajectoire observée (X_t) et une trajectoire théorique (x_t). Nous

introduisons d'abord l'espace fonctionnel normé $(\mathbf{B}, \|\cdot\|_{\mathbf{B}})$ auquel appartiennent ces trajectoires. À titre d'exemples, comme dans Kutoyants [55], nous considérons différents espaces fonctionnels adaptés au problème d'estimation et nous introduisons l'EDM correspondant.

(i) L'espace de Banach $(\mathcal{C}_{[0,T]}, \|f\|_{\infty})$ des fonctions continues sur $[0, T]$, avec

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_{\varepsilon,1} := \arg \min_{\theta \in \Theta} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t(\theta)|$$

(ii) L'espace de Banach $(\mathbf{L}^1(\mu), \|f\|_{\mathbf{L}^1(\mu)})$ des fonctions intégrables sur $[0, T]$ par rapport à une mesure finie μ , avec

$$\|f\|_{\mathbf{L}^1(\mu)} = \int_0^T |f(t)| \mu(dt) \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_{\varepsilon,2} := \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_0^T |X_t - x_t(\theta)| \mu(dt).$$

(iii) L'espace de Hilbert $(\mathbf{L}^2(\mu), \|f\|_{\mathbf{L}^2(\mu)})$ des fonctions de carré intégrable, avec

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \left(\int_0^T f(t)^2 \mu(dt) \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_{\varepsilon,3} := \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_0^T (X_t - x_t(\theta))^2 \mu(dt).$$

La consistance de chacun de ces estimateurs est établie sous des hypothèses assez générales dans [55], théorème 7.2. À cet effet, considérons une norme générique $|\cdot|_*$, qui peut être $|\cdot|_{\infty}$, $|\cdot|_{\mathbf{L}^1(\mu)}$ ou $|\cdot|_{\mathbf{L}^2(\mu)}$. Notons $\tilde{\theta}_{\varepsilon}$ l'EDM correspondant à $|\cdot|_*$. Si θ_0 désigne la valeur vraie du paramètre, pour tout $\nu > 0$, nous introduisons les fonctions suivantes

$$g_{\theta_0}(\nu) = \inf_{|\theta - \theta_0| > \nu} \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_*, \quad \text{et} \quad g(\nu) = \inf_{\theta_0 \in \Theta} g_{\theta_0}(\nu).$$

Théorème 2.2.2. [55] *Si les hypothèses \mathbf{H} sont satisfaites, et $g(\nu) > 0$, pour tout (assez petit) $\nu > 0$, alors*

$$\sup_{\theta_0 \in \Theta} \mathbf{P}_{\theta_0}^{\varepsilon} \left\{ |\tilde{\theta}_{\varepsilon} - \theta_0| \geq \nu \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{g(\nu)^2}{2TC_*^2\varepsilon^2} \right\}.$$

Où $C_* > 0$ est une constante.

Dans la section suivante nous rappelons quelques notions utiles dans notre travail et concernant des modèles mal spécifiés. Nous présentons le problème de l'estimation dans le cas où la famille paramétrique considérée ne correspond pas à la loi véritable des données. Pour une étude exhaustive se référer à [55].

2.2.3 Modèle mal spécifié

Ce type de modèle apparaît dans ce travail au chapitre 3, dans la section consacrée aux alternatives auquel cas, le modèle observé est non paramétrique

avec une dérive inconnue. Nous considérons le problème d'estimation du paramètre inconnu θ dans la situation où l'observateur ne connaît pas la véritable famille paramétrique (modèle mal spécifié). Le processus observé réellement est défini par

$$dX_t = B(X_t) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.13)$$

Pour identifier ce processus de dérive inconnue $B(X_t)$, nous supposons que le processus observé appartient à une famille paramétrique (2.11) :

$$dX_t = S(\theta, X_t) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\theta \in \Theta$ un intervalle fini de \mathbb{R} . Nous supposons que le processus observé provient du modèle mathématique (2.11), et nous cherchons à estimer le paramètre inconnu θ à partir des observations issues de (2.13). Néanmoins ces observations n'ont rien en commun avec le processus décrit par (2.11). Nous notons \mathbf{P}_B^ε la mesure induite par le processus (2.13). Enfin nous associons aux EDS (2.13) et (2.11), les EDO correspondantes obtenues pour $\varepsilon = 0$.

$$\frac{dy_t}{dt} = B(y_t), \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.14)$$

$$\frac{dx_t}{dt} = S(\theta, x_t), \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Les solutions de ces deux problèmes déterministes sont notées respectivement $\{y_t\}_{0 \leq t \leq T}$ et $\{x_t(\theta)\}_{0 \leq t \leq T}$. Nous rappelons particulièrement les résultats de convergence des estimateurs du maximum de vraisemblance et de la distance minimale vers de nouvelles "vraies" valeurs du paramètre dites pseudo-paramètres. lesquelles minimisent la distance, dans certain sens, entre les dérivées respectives de (2.11) et (2.13), voir [55], sections 2.6 et 7.4.

Introduisons le rapport de vraisemblance associé au modèle paramétrique (2.11),

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta^{(\varepsilon)}}{d\mathbf{P}_{\theta_0}^{(\varepsilon)}}(X_t) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T [S_t(\theta, X_t) - S_t(\theta_0, X_t)] dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [S_t(\theta, X_t)^2 - S_t(\theta_0, X_t)^2] dt \right\}.$$

L'EMV est alors défini par

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \arg \sup_{\theta \in \Theta} \frac{d\mathbf{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbf{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X_t).$$

Pour décrire son comportement asymptotique, considérons la fonction

$$g(\theta) := \int_0^T [S(x_t(\theta)) - B(y_t)]^2 dt,$$

et la "vraie" valeur correspondante

$$\theta_0^{(1)} = \arg \inf_{\theta \in \Theta} g(\theta).$$

Le théorème suivant établit la consistance de l'EMV.

Théorème 2.2.3 ([55]). *Supposons que les hypothèses \mathbf{H} sont vérifiées par la dérivée B et les conditions (C_1) , (C_2) et (C_3) sont satisfaites, ainsi que $g(\theta) > 0$, pour tout $\theta \in \Theta$. Si $\theta_0^{(1)}$ est unique dans Θ , alors l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est consistant*

$$\mathbf{P}_b^\varepsilon\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\theta}_\varepsilon = \theta_0^{(1)}.$$

Nous introduisons également l'EDM, défini à partir d'une trajectoire (X_t) observée dans (2.13)

$$\widetilde{\theta}_\varepsilon := \arg \inf_{\theta \in \Theta} \|X_t - x_t(\theta)\|_{L^2[0,T]}^2,$$

ici (x_t) est la solution du problème limite pour (2.12). D'autre part le processus observé réellement converge vers la fonction (2.14).

Le résultat suivant garantit la convergence en probabilité de l'EDM θ_ε^* vers $\theta_0^{(2)}$ (voir [55], théorème 7.2), défini par

$$\theta_0^{(2)} := \arg \inf_{\theta \in \Theta} \|y_t - x_t(\theta)\|_{L^2[0,T]}^2.$$

Cette valeur est considérée aussi comme seconde nouvelle "vraie" valeur du paramètre. Nous introduisons alors la fonction

$$\forall \gamma > 0, \quad h(\gamma) := \inf_{|\theta - \theta_0^{(2)}| > \gamma} \left(\|y_t - x_t(\theta)\|_{L^2[0,T]}^2 - \|y_t - x_t(\theta_0^{(2)})\|_{L^2[0,T]}^2 \right).$$

Théorème 2.2.4 ([55]). *Supposons que les conditions \mathbf{H} sont satisfaites par B et S , et que $h(\gamma) > 0$ pour tout $\gamma > 0$. Si $\theta_0^{(2)}$ est unique dans Θ , alors il existe des constantes $\kappa > 0$ et $\gamma_0 > 0$ telles que, pour tout $\gamma < \gamma_0$,*

$$\mathbf{P}_b^\varepsilon \left\{ |\widetilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0^{(2)}| > \gamma \right\} \leq 4 \exp \left(-\frac{\kappa^2 h^2(\gamma)}{2T\varepsilon^2} \right).$$

2.2.4 Estimation paramétrique dans une équation différentielle stochastique à retard

Dans cette section, nous étudions le problème de l'estimation paramétrique dans le cadre d'un processus de diffusion à retard. Plus précisément, nous considérons l'estimation du paramètre de retard $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta) \subset (0, T)$ caractérisant

la dynamique du processus stochastique $X^\varepsilon = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$, défini comme solution de l'EDS avec retard

$$dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.15)$$

où $S(\cdot)$ est une fonction régulière donnée, x_0 est fixé et $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement Brownien standard. En prenant $\varepsilon = 0$, nous associons à (2.15) l'équation déterministe correspondante

$$\frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta}), \quad x_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.16)$$

dont la solution $\{x_t = x_t(\theta)\}_{0 \leq t \leq T}$ décrit la trajectoire sans bruit du système.

L'analyse repose sur l'hypothèse de régularité suivante, (voir Korso [42])

(C) : $S(\cdot)$ est une fonction positive de classe C^2 de dérivée non nulle sur un intervalle $[a; b] \subset [x_0; x_T]$ et bornée sur \mathbb{R} .

Sous l'hypothèse (C), la fonction $S(\cdot)$ est lipschitzienne, ce qui garantit l'existence et l'unicité d'une solution forte de l'EDS avec retard (2.15) (voir l'article de Kutoyants, Mourid et Bosq [54], Section 2.1). Par ailleurs, les mesures $\{\mathbf{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\}$ induites par le processus (2.15) sur l'espace mesurable $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ des fonctions continues sur $[0, T]$ sont équivalentes (voir Liptser et Shiryaev [69], Chapitre 4).

Le lemme suivant énonce deux inégalités, permettant d'analyser la convergence uniforme de X_t vers x_t lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lemme 2.2.1. *Sous la condition (C), les inégalités suivantes sont vérifiées $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon$ presque sûrement*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s|, \quad (2.17)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2. \quad (2.18)$$

La démonstration repose sur une version généralisée de l'inégalité de Grönwall, voir Kutoyants [55] ou Korso [42].

Lemme 2.2.2 (Inégalité de Grönwall généralisée). *Soient C_0, C_1, C_2 des constantes non négatives, et $u(t), v(t)$ des fonctions bornées non négatives définies pour $t \in [0, T]$, satisfaisant l'inégalité*

$$u(t) \leq C_0 + C_1 \int_0^t v(s)u(s) ds + C_2 \int_0^t v(s) \left(\int_0^s u(r) dK(r) \right) ds$$

où K est une fonction non décroissante, continue à droite telle que $0 \leq K(t) \leq K_0$ pour une constante $K_0 > 0$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$u(t) \leq C_0 \exp \left\{ (C_1 + C_2 K_0) \int_0^t v(s) ds \right\}$$

Preuve.(du lemme (2.2.1))

Considérons la forme intégrale de (2.15) et (2.16) respectivement :

$$X_t = x_0 + \int_0^t S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon W_t, \quad x_t = x_0 + \int_0^t S(x_{s-\theta})ds.$$

Posons : $h(t) = |X_t - x_t|$,

sous l'hypothèse (C), $S'(\cdot)$ est borné, donc

$$\exists L \in \mathbb{R}, \text{ tel que } L = \sup_{x \in \mathbb{R}} |S'(x)|.$$

Donc :

$$\begin{aligned} h(t) &= \left| \int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta}))ds + \varepsilon W_t \right| \\ &\leq L \int_0^t |X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| \\ &= L \int_0^t h(s - \theta)ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| \\ &= L \int_{-\theta}^{t-\theta} h(s)ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| \\ &\leq L \int_0^t h(s)ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s|, \end{aligned}$$

Cette dernière estimation découle du fait que la fonction h satisfait $h(s) = 0$ pour tout $s \leq 0$ et $h(t) \geq 0$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

L'application du lemme de Grönwall (2.2.2) permet d'obtenir,

$$\begin{aligned} h(t) &\leq \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| \exp(L \int_0^t ds) \\ &\leq \varepsilon \exp(LT) \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| \\ &= L_1 \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s|, \end{aligned}$$

et

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |X_t - x_t| \leq L_1 \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s|, \quad L_1 = \varepsilon \exp(KT).$$

Posons $h(t) = E|X_t - x_t|^2$, en utilisant l'hypothèse **(C)**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
h(t) &= E_\theta \left| \int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})) ds + \varepsilon W_t \right|^2 \\
&\leq 2E_\theta \left(\int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})) ds \right)^2 + 2\varepsilon^2 E_\theta W_t^2 \\
&\leq 2t \int_0^t E_\theta (L|X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|)^2 ds + 2\varepsilon^2 t \\
&= 2L^2 t \int_0^{t-\theta} h(s) ds + 2\varepsilon^2 t \\
&\leq 2L^2 t \int_0^t h(s) ds + 2\varepsilon^2 t \\
&\leq 2L^2 T \int_0^t h(s) ds + 2\varepsilon^2 T.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Grönwall

$$E|X_t - x_t|^2 \leq 2\varepsilon^2 T \exp(2L^2 T^2).$$

Pour $L_2 = 2T \exp(2L^2 T^2)$, nous déduisons les inégalités suivantes

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq L_2 \varepsilon^2,$$

et

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq L_2 \varepsilon^2.$$

□

L'objectif principal de cette section est d'estimer le paramètre de retard θ à partir des observations $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ issues de (2.15), et d'étudier le comportement asymptotique de l'EMV lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Sous l'hypothèse de régularité **(C)**, l'information de Fisher associée à (2.15) est strictement positive et la condition d'identifiabilité est satisfaite (voir Korso [42] Chapter 1, pour plus de détails). Par conséquent, on a

$$I(\theta) = \int_0^T S'^2(x_{t-\theta}) S^2(x_{t-2\theta}) dt > 0,$$

et

$$\forall \gamma > 0, \inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \int_0^T (S(x_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta_0}))^2 dt > 0.$$

Rappelons que la fonction du rapport de vraisemblance $L(\theta; X^\varepsilon)$ est défini dans [69] ou [55], Théorème 1.2, par

$$L(\theta; X^\varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T S(X_{t-\theta}) dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T S^2(X_{t-\theta}) dt \right\}.$$

L'EMV est alors solution de l'équation suivante

$$L(\widehat{\theta}_\varepsilon; X^\varepsilon) = \sup_{\theta \in [\alpha, \beta]} L(\theta; X^\varepsilon). \quad (2.19)$$

Le théorème suivant décrit le comportement asymptotique de cet estimateur, avec θ_0 la vraie valeur (inconnue) du retard.

Théorème 2.2.5. *Si l'hypothèse (C) est vérifiée, alors, uniformément sur tout compact $K = [a, b] \subset (\alpha, \beta)$, l'EMV $\widehat{\theta}_\varepsilon$ vérifie :*

1. $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\theta}_\varepsilon = \theta_0$,
2. $\mathcal{L}_\theta\{\varepsilon^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta_0)\} \implies \mathcal{N}(0, I(\theta_0))$,
3. *Convergence des moments :*

$$E_\theta \left| \frac{I(\theta)^{1/2}}{\varepsilon} (\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta) \right|^p \longrightarrow E|\Delta|^p, \quad \forall p > 0,$$

où Δ suit une loi normale centrée réduite.

4. *L'EMV $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est localement asymptotiquement minimax au sens de Hájek, pour les fonctions de perte $l(\cdot) \in W_{e,2}$, ensemble des fonctions de perte à majorant exponentiel :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} \mathbf{E}_\theta \left[l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} l(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

avec $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I(\theta)^{1/2}$.

La preuve de ce théorème est donnée dans l'article de Korso [41], Théorème 3.2.

Remarque : Dans le chapitre 3, nous analysons la consistance de l'EDM dans le cas particulier des processus de diffusion avec retard, à partir des observations sur un intervalle de temps restreint.

Chapitre 3

Test d'ajustement pour un processus de type diffusion à retard

Sommaire

3.1	Position du problème	39
3.2	Préliminaires et résultats auxiliaires	40
3.3	Résultats théoriques	41
3.3.1	Estimateur du maximum de vraisemblance	43
3.3.2	Estimateur de la distance minimale	44
3.3.3	Test de distribution asymptotique libre	46
3.3.4	Alternatives	50

Ce chapitre est consacré à la construction et à l'étude asymptotique d'un test d'ajustement pour des processus de type diffusion en régime de petit bruit. Nous y présentons et développons en détail les résultats de l'article Balaska& et Korso [5]. Le cas considéré est celui d'une hypothèse nulle paramétrique composite, où la dérive du processus dépend d'un paramètre de retard inconnu. L'objectif central est de construire un test ADF, c'est-à-dire dont la loi limite sous l'hypothèse nulle est indépendante du paramètre. La méthodologie repose sur une statistique de test de type Cramér–von Mises, construite à partir du processus de la fonction score. La définition de cette statistique fait appel à deux estimateurs convergents du paramètre de retard : l'EMV et l'EDM, dont nous établissons les propriétés asymptotiques (consistance, normalité). L'analyse de la convergence faible de la statistique permet de montrer qu'après une transformation appropriée, le processus limite est une fonctionnelle d'un pont brownien. Cette caractérisation garantit la propriété ADF souhaitée. Enfin, nous démontrons que le test proposé est consistant contre toute alternative fixe, achevant ainsi la présentation d'un cas théorique complet pour l'inférence dans la limite où l'intensité du bruit tend vers zéro ($\varepsilon \rightarrow 0$).

3.1 Position du problème

L'objectif principal est de construire un test d'ajustement ADF pour un processus $X^\varepsilon = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, satisfaisant l'EDS dans l'asymptotique des petites diffusions ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$dX_t = S(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \text{ pour } s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.1)$$

Ici, $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ désigne un processus de Wiener, tandis que la valeur initiale x_0 est déterministe et $S(\cdot)$ est une fonction inconnue. Le paramètre $\varepsilon \in (0, 1)$ est donné.

Nous supposons que, sous l'hypothèse nulle, le coefficient de dérive dépend d'un retard représenté par un paramètre inconnu $\theta \in \Theta = (a, b) \subset [0, T]$. En considérant $S(\cdot)$ comme une fonction régulière connue, l'hypothèse nulle s'écrit

$$\mathcal{H}_0 : dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0 \text{ pour } -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

L'hypothèse alternative s'écrit pour toute fonction régulière B

$$\mathcal{H}_1 : dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0 \text{ pour } s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous fixons maintenant une valeur $\alpha \in (0, 1)$ et considérons la classe des tests de niveau asymptotique α

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ \Psi_\varepsilon : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_\theta [\Psi_\varepsilon(X^\varepsilon)] = \alpha \right\}, \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta = (a, b),$$

où $\mathbf{E}_\theta[\Psi_\varepsilon(X^\varepsilon)]$ représente la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 , et \mathbf{E}_θ désigne l'espérance mathématique.

Notre approche s'inspire des travaux de Kutoyants [63], où la construction de la statistique de test repose sur le processus de fonction score et sur deux estimateurs du paramètre de retard l'EMV $\hat{\theta}$ et l'EDM $\tilde{\theta}$.

Sous \mathcal{H}_0 , la représentation intégrale

$$X_{t-\theta} = x_0 + \int_0^{t-\theta} S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon W_{t-\theta},$$

met en évidence que les trajectoires $(X_{t-\theta})$ héritent de la même régularité que le processus de Wiener $(W_{t-\theta})$. Cette propriété entraîne la non-différentiabilité de la dérive par rapport à θ . Pour surmonter cette difficulté, nous introduisons le processus de fonction score (PFS), défini comme la dérivée de la log-vraisemblance par rapport à θ dans $L^2_{[0, T]}$. La construction finale du test repose alors sur une statistique de type Cramér-von Mises adaptée à ce PFS, garantissant à la fois une distribution asymptotique libre et la consistance du test.

3.2 Préliminaires et résultats auxiliaires

Nous considérons l'EDS avec retard suivante

$$dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

où $\theta \in \Theta = (a, b) \subset [0, T]$ est un paramètre positif inconnu avec a et b fixés, et ε est un "petit" paramètre positif. De plus, nous supposons que la fonction $S(\cdot)$ vérifie une condition de Lipschitz globale de constante L

$$|S(x) - S(y)| \leq L|x - y|.$$

Cette condition suffit à garantir l'existence d'une solution forte unique pour l'EDS avec retard (3.2), comme indiqué dans l'article de Kutoyants, Mourid et Bosq [54], Section 2.1. De plus, les mesures $\{\mathbf{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\}$ induites par le processus (3.2) sur l'espace mesurable $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ des fonctions continues sur $[0, T]$ sont équivalentes. Pour plus de détails, voir le livre de Liptser et Shiryaev [69], Chapitre 4. Nous associons alors à l'EDS avec retard (3.2) l'EDO correspondant au cas $\varepsilon = 0$, dont nous notons la solution $\{x_t = x_t(\theta)\}_{0 \leq t \leq T}$

$$\frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta}), \quad x_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.3)$$

Il est important de rappeler que le processus (3.2), $X^\varepsilon = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ converge uniformément en $t \in [0, T]$ vers la fonction déterministe (3.3), dans le cadre des asymptotiques de bruit faible ($\varepsilon \rightarrow 0$). Nous disposons en effet des estimations (2.17) et (2.18)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s|,$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2.$$

Il convient de rappeler certains résultats relatifs au problème d'estimation pour le modèle d'observations (3.2). Nous considérons alors la condition suivante

$\mathbf{S}(\cdot)$ est une fonction positive, deux fois continûment différentiable, dont la dérivée est bornée et non nulle sur un sous-intervalle $[c, d] \subset [x_0, x_T]$.

L'information de Fisher associée à ce problème est donnée par (voir Korso [42], Chapitre 1)

$$I(\theta) = \int_0^T S^2(x_{t-2\theta}) S'^2(x_{t-\theta}) dt.$$

Désignons maintenant par \mathbf{P}^ε la mesure induite par le processus $\{\varepsilon W_t + x_0\}_{0 \leq t \leq T}$. Le rapport de vraisemblance associé à ce problème, pour un paramètre $\theta \in (a, b)$, s'écrit comme suit (voir [69], Section 2.1 pour plus de détails).

$$L(\theta; X^\varepsilon) = \frac{d\mathbf{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbf{P}^\varepsilon}(X^\varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T S(X_{t-\theta}) dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T S^2(X_{t-\theta}) dt \right\}.$$

L'EMV $\widehat{\theta}_\varepsilon$ du retard est défini comme solution de

$$L(\widehat{\theta}_\varepsilon; X^\varepsilon) = \sup_{\theta \in \bar{\theta}=[a,b]} L(\theta; X^\varepsilon).$$

Une analyse approfondie de ce problème d'estimation et du comportement de l'EMV est proposée dans Ibragimov & Khasminskii [36] et Korso [41].

Notre objectif est de construire un test d'ajustement de niveau asymptotique $\alpha \in (0, 1)$ donné, consistant dans le cas des petites diffusions. La première étape de cette démarche est la définition de la fonction score normalisée associée au processus (3.2)

$$U_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) = I(\theta)^{-1/2} \int_0^T \frac{S(X_{t-2\theta})S'(X_{t-\theta})}{\varepsilon} [dX_t - S(X_{t-\theta})dt].$$

Si θ_0 est la vraie valeur, la convergence suivante est satisfaite [55]

$$I(\theta_0)^{1/2}U_\varepsilon(\theta_0, X^\varepsilon) = \int_0^T S(X_{t-2\theta_0})S'(X_{t-\theta_0})dW_t \rightarrow \int_0^T S(x_{t-2\theta_0})S'(x_{t-\theta_0})dW_t.$$

Cette variable aléatoire limite suit une loi normale $N(0, I(\theta_0))$. S'inspirant des travaux de Kutoyants [63], nous introduisons alors le processus suivant

$$U_\varepsilon(t, \theta, X^\varepsilon) = I(\theta)^{-1/2} \int_0^t \frac{S(X_{s-2\theta})S'(X_{s-\theta})}{\varepsilon} [dX_s - S(X_{s-\theta})ds]. \quad (3.4)$$

Il convient de souligner que l'effet du retard dans la dérive $S(X_{t-\theta})$ ne se manifeste véritablement que lorsque $t > \theta$, avec le paramètre $\theta < b$. Si nous supposons que T est suffisamment grand par rapport à b , nous pouvons nous concentrer exclusivement sur la partie des trajectoires $X^{\varepsilon,b} = \{X_t\}_{t \in [b,T]}$. Par ailleurs, pour définir la statistique de test, nous ne pouvons nous appuyer uniquement sur l'EMV $\widehat{\theta}$ car $U_\varepsilon(t, \widehat{\theta}, X^\varepsilon)$ n'est pas bien défini. En effet, l'EMV dépend de la réalisation observée complète $X^\varepsilon = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Nous introduisons donc une modification de la statistique $U_\varepsilon(t, \theta, X^\varepsilon)$ utilisant à la fois un EMV et un EDM basés sur deux parties distinctes et appropriées de la trajectoire observée.

Nous établissons que cette statistique modifiée converge en distribution vers un pont brownien. Ce résultat, combiné à une analyse fine du processus (3.2), nous permet de construire une statistique de test vérifiant la propriété de distribution asymptotique libre.

3.3 Résultats théoriques

Nous considérons l'observation d'une trajectoire $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ du processus de diffusion (3.1)

$$dX_t = S(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous testons une hypothèse nulle composite (paramétrique) contre des alternatives composites, dans le cadre des asymptotiques de petit bruit. Sous l'hypothèse nulle, nous supposons l'existence d'un retard $\theta \in (a, b)$ dans le terme de dérive, de sorte que le processus observé satisfait l'EDS avec retard (3.2). Nous pouvons par conséquent écrire

$$\mathcal{H}_0 : dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ici, $S(\cdot)$ est une fonction positive connue et θ est un retard inconnu dans Θ . Nous associons à (3.2) l'EDO correspondante (3.3), dont la solution est notée $\{x_t(\theta)\}_{0 \leq t \leq T}$.

Considérons la condition de régularité suivante

\mathcal{C} : La fonction $S(\cdot)$ est positive et deux fois continûment différentiable. De plus, sa dérivée $S'(\cdot)$ est positive, bornée et non nulle sur un sous-intervalle de $[x_b, x_T]$.

Nous explorons essentiellement la partie $X^{\varepsilon, b} = \{X_t\}_{t \in [b, T]}$ de la trajectoire observée X^ε . La condition de régularité \mathcal{C} permet de déduire que l'information de Fisher associée à (3.2) est strictement positive et que la condition d'identifiabilité est satisfaite. Pour plus de détails, voir [42], Chapitre 1. Par conséquent

$$I_b(\theta) = \int_b^T S^2(x_{t-2\theta}) S'^2(x_{t-\theta}) dt > 0,$$

et

$$\forall \gamma > 0, \quad \inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \int_b^T (S(x_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta_0}))^2 dt > 0.$$

Rappelons que l'objectif est de construire un test d'ajustement (GoF) appartenant à la classe

$$\mathcal{K}_\alpha = \{\Psi_\varepsilon : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_\theta \Psi_\varepsilon(X^{\varepsilon, b}) = \alpha\}.$$

De plus, nous devons démontrer qu'il s'agit d'un test ADF. En d'autres termes, la distribution limite de la statistique de test ne dépend pas du modèle sous-jacent représenté par la dérive $S(X_{t-\theta})$ sous l'hypothèse nulle.

Considérons maintenant la restriction à $[b, t]$ du processus $U_\varepsilon(t, \theta, X^\varepsilon)$ défini par (3.4),

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon, b}(t, \theta, X^{\varepsilon, b}) &:= I_b(\theta)^{-1/2} \int_b^t \frac{S(X_{s-2\theta}) S'(X_{s-\theta})}{\varepsilon} [dX_s - S(X_{s-\theta}) ds] \\ &= \int_b^t \frac{S(X_{s-2\theta}) S'(X_{s-\theta})}{\varepsilon I_b(\theta)^{1/2}} dX_s - \int_b^t \frac{S(X_{s-2\theta}) S'(X_{s-\theta})}{\varepsilon I_b(\theta)^{1/2}} S(X_{s-\theta}) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Il convient de noter que la statistique $U_{\varepsilon, b}(t, \hat{\theta}_{\varepsilon, b}, X^{\varepsilon, b})$ s'écrit formellement comme la différence de deux intégrales. La première intégrale n'est pas bien définie car l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ dépend de la trajectoire complète $X^{\varepsilon, b}$. De plus, les propriétés exigées de $\hat{\theta}_{\varepsilon, b} \rightarrow \theta_0$ diffèrent selon l'intégrale considérée : pour la première intégrale, une simple consistance suffit, alors que pour la seconde nous exigeons que

l'EMV atteint l'efficacité asymptotique. Pour contourner ces difficultés, nous suivons l'approche de Kutoyants [64] et remplaçons, lorsque nécessaire, l'EMV par un estimateur préliminaire consistant. Plus précisément, nous introduisons $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ construit à partir des observations initiales $\{X_t, 0 \leq t \leq \nu_\varepsilon\}$, où la suite (ν_ε) est définie par $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$, afin d'assurer une convergence lente vers b relativement à $\varepsilon \rightarrow 0$. Cet estimateur $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ peut ensuite être utilisé dans le calcul de l'intégrale stochastique.

Dans les deux sous-sections suivantes, nous introduisons les estimateurs $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ et $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$, qui sont utilisés pour définir la statistique de test ajustée. Nous établissons ensuite le principal résultat de ce travail, un test d'ajustement qui est de distribution asymptotique libre.

3.3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ est construit à partir de l'observation $X^{\varepsilon, b} = \{X_t\}_{t \in (b, T]}$ du processus (3.2), sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 .

Rappelons que la fonction du rapport de vraisemblance $L(\theta; X^{\varepsilon, b})$ est définie pour ce type de problème comme suit (voir Kutoyants [55], Théorème 1.2.)

$$L(\theta; X^{\varepsilon, b}) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_b^T S(X_{t-\theta}) dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_b^T S^2(X_{t-\theta}) dt \right\}.$$

L'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ est alors défini comme solution de

$$L(\hat{\theta}_{\varepsilon, b}; X^{\varepsilon, b}) = \sup_{\theta \in [a, b]} L(\theta; X^{\varepsilon, b}). \quad (3.6)$$

Le comportement asymptotique de cet estimateur est décrit par la proposition suivante. Ci-dessous, θ_0 désigne la vraie valeur inconnue du retard.

Proposition 3.3.1. *Supposons que la condition \mathcal{C} soit satisfaite. Alors, uniformément sur tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$, l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ est :*

1. *Consistant, $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_{\varepsilon, b} = \theta_0$.*
2. *Asymptotiquement normal, $\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0) \implies \mathcal{N}(0, I_b^{-1}(\theta_0))$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$*

La démonstration s'obtient par adaptation du Théorème 3.2 de Korso [41], en remplaçant l'observation complète $X^\varepsilon = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ par l'observation tronquée $X^{\varepsilon, b} = \{X_t\}_{t \in (b, T]}$, conformément aux préliminaires. Par ailleurs, lorsque la condition de régularité \mathcal{C} est vérifiée, l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ admet la représentation suivante (voir [42], Théorème 3.1)

$$\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0) = I_b(\theta_0)^{-1} \int_b^T S(x_{t-2\theta_0}) S'(x_{t-\theta_0}) dW_t + o(1). \quad (3.7)$$

3.3.2 Estimateur de la distance minimale

Un EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ est construit à partir de l'observation $X^{\varepsilon, \nu_\varepsilon} = \{X_t\}_{b \leq t \leq \nu_\varepsilon}$ sous \mathcal{H}_0 , où $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$

$$\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} := \arg \inf_{\theta \in \Theta} \int_b^{\nu_\varepsilon} (X_t - x_t(\theta))^2 dt. \quad (3.8)$$

La démonstration de la consistance de cet estimateur, présentée dans la proposition suivante, s'appuie sur Kutoyants [55], Théorème 7.2.

Proposition 3.3.2. *[5] Supposons que la condition de régularité \mathcal{C} soit satisfaite et que pour tout $\theta \in \Theta$, $S'(x_b) \geq \lambda$, où $\lambda > 0$. Alors, pour $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$, l'EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ est consistant.*

Preuve. Ci-dessous, $\|\cdot\|_{\nu_\varepsilon}$ désigne la norme $L^2[b, \nu_\varepsilon]$. Soit θ_0 la vraie valeur, mais inconnue, du paramètre, et θ un paramètre variable. Pour les solutions correspondantes de l'équation (3.3), et pour $\gamma > 0$, nous introduisons les fonctions suivantes

$$g_{\theta_0}(\gamma, \nu_\varepsilon) = \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}, \quad \text{et} \quad g(\gamma, \nu_\varepsilon) = \inf_{\theta_0 \in \Theta} g_{\theta_0}(\gamma, \nu_\varepsilon).$$

La dérivée de $x_t(\theta)$ par rapport à θ satisfait l'équation

$$\dot{x}_t(\theta) = \int_0^t -S'(x_{s-\theta})S(x_{s-2\theta})ds.$$

Pour une valeur intermédiaire θ' entre θ et θ_0 , nous avons

$$\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}^2 = \int_b^{\nu_\varepsilon} [x_t(\theta) - x_t(\theta_0)]^2 dt = (\theta - \theta_0)^2 \int_b^{\nu_\varepsilon} \dot{x}_t^2(\theta') dt.$$

D'après la condition \mathcal{C} , les fonctions $S(\cdot)$ et $S'(\cdot)$ sont positives, donc pour $b \leq t \leq \nu_\varepsilon$,

$$\dot{x}_t^2(\theta) = \left(- \int_0^t S'(x_{s-\theta})S(x_{s-2\theta})ds \right)^2 \geq \left(\int_b^t S'(x_{s-\theta})S(x_{s-2\theta})ds \right)^2.$$

D'autre part, pour les valeurs de $t \in (b, \nu_\varepsilon)$, nous pouvons écrire

$$\int_b^t S'(x_{s-\theta})S(x_{s-2\theta})ds = (t-b)S'(x_b)S(x_b) + O((t-b)^2).$$

Ainsi, pour $K = S'(x_b)S(x_b) > 0$ et pour des valeurs suffisamment petites de $t - b$, nous obtenons l'estimation

$$\dot{x}_t^2(\theta) > K^2(t-b)^2.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_*$, où ε_* est une valeur suffisamment petite,

$$\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}^2 > \frac{(\theta - \theta_0)^2 K^2 (\nu_\varepsilon - b)^3}{3}.$$

Nous en déduisons donc une borne inférieure de $g(\gamma, \nu_\varepsilon)^2$

$$g(\gamma, \nu_\varepsilon)^2 = \inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \int_b^{\nu_\varepsilon} (x_t(\theta) - x_t(\theta_0))^2 dt \geq \frac{\gamma^2 K^2 (\nu_\varepsilon - b)^3}{3}. \quad (3.9)$$

Il convient également de noter que pour tout $\gamma > 0$, l'EDM vérifie (voir [55], p.223)

$$A := \{\omega : |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma\} = \{\omega : \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} > \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} P_{\theta_0} \left(|\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma \right) &= \\ P_{\theta_0} \left(|\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma, \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} > \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \right) &+ \\ + P_{\theta_0} \left(|\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma, \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \leq \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite de l'équation précédente est nul car, si

$$\omega \in \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma, \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \leq \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \right\}.$$

Il existe donc un θ' tel que $|\theta' - \theta_0| \leq \gamma$ et

$$\|X_t - x_t(\theta')\|_{\nu_\varepsilon} \leq \|X_t - x_t(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})\|_{\nu_\varepsilon}$$

ce qui contredit la définition de l'EDM (3.8). Considérons maintenant les ensembles A et B

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} > \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \right\} \\ B &= \left\{ \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} (\|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} + \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) > \right. \\ &\quad \left. > \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} (\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} - \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) \right\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit l'inclusion suivante

$$\begin{aligned} A \subset B &:= \left\{ \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} (\|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} + \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) \right. \\ &\quad \left. > \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} (\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} - \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où les inégalités suivantes sont utilisées

$$\begin{aligned} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} &\leq \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} + \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} \\ \Rightarrow \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} &\leq \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \left(\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} + \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} - \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} \leq \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \\ \Rightarrow & \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \left(\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} - \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} \right) \leq \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (3.10) et l'égalité

$$\inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} = 0,$$

on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\theta_0} \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma \right\} & \leq \mathbf{P}_{\theta_0} \left\{ \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} (\|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} + \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) \right. \\ & \quad \left. > \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} (\|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} - \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) \right\} \\ & = \mathbf{P}_{\theta_0} \left\{ (\|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} + \inf_{|\theta - \theta_0| \leq \gamma} \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon}) \right. \\ & \quad \left. > \left(\inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \|x_t(\theta) - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} - \|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} \right) \right\} \\ & = \mathbf{P}_{\theta_0} \{ 2\|X_t - x_t(\theta_0)\|_{\nu_\varepsilon} \geq g(\gamma, \nu_\varepsilon) \}. \end{aligned}$$

Par la suite, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, combinée aux estimations (3.9) et (2.18), est appliquée pour déduire la consistance de l'estimateur $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\theta_0} \left(|\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta_0| > \gamma \right) & \leq \frac{4}{g(\gamma, \nu_\varepsilon)^2} \mathbf{E}_{\theta_0} \int_b^{\nu_\varepsilon} (X_t - x_t(\theta_0))^2 dt \leq \frac{6C\varepsilon^2(\nu_\varepsilon^2 - b^2)}{\gamma^2 K^2 (\nu_\varepsilon - b)^3} \\ & = \frac{6C\varepsilon^2(\nu_\varepsilon + b)}{\gamma^2 K^2 (\nu_\varepsilon - b)^2} = \frac{6C\varepsilon(2b + \sqrt{\varepsilon})}{\gamma^2 K^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

En s'appuyant sur ce qui précède, il devient alors possible d'introduire une transformation appropriée $V_\varepsilon(t)$ de la statistique $U_{\varepsilon, b}(t, \theta, X^{\varepsilon, b})$ définie en (3.5)

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) & := \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} dX_s \\ & \quad - \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-\tilde{\theta}_{\varepsilon, b}})}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} ds, \quad b < \nu_\varepsilon \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous utiliserons cette modification pour définir la statistique de test ci-dessous.

3.3.3 Test de distribution asymptotique libre

Soit $\{B(s), 0 \leq s \leq 1\}$ un pont brownien. Le seuil c_α est déterminé par l'équation

$$\mathbf{P} \left(\int_0^1 B(\tau)^2 d\tau > c_\alpha \right) = \alpha. \quad (3.12)$$

Théorème 3.3.1. [5] *Supposons que la condition de régularité \mathcal{C} soit vérifiée et que pour tout $\theta \in \Theta$, $S'(x_b) \geq \lambda$, où $\lambda > 0$. Alors le test $\psi_\varepsilon = \mathbf{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$, avec*

$$\delta_\varepsilon = \int_{\nu_\varepsilon}^T \frac{V_\varepsilon(t)^2 S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})^2 S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})^2}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})} dt,$$

est de distribution asymptotique libre et appartient à \mathcal{K}_α .

Preuve. Il convient de noter que, sous \mathcal{H}_0 , la statistique V_ε définie en (3.11) admet la reformulation suivante

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} dW_s + \\ &+ \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) \left[S(X_{s-\theta_0}) - S(X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon,b}}) \right]}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ici θ_0 représente la vraie valeur inconnue et $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$. De plus, pour étudier le comportement asymptotique de $V_\varepsilon = (V_\varepsilon(t))_{\nu_\varepsilon \leq t \leq T}$, nous utilisons les convergences établies dans les lemmes suivants.

Lemme 3.3.1. *Si la condition \mathcal{C} est vérifiée et que, pour tout $\theta \in \Theta$, on a $S'(x_b) \geq \lambda > 0$, alors la convergence suivante est satisfaite, où $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$ désigne l'EDM du paramètre définie en (3.8) :*

$$\mathbf{P}_{\theta_0} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}) - I_b(\theta_0)| = 0.$$

Preuve. L'information de Fisher I_b du processus (3.2) en θ_0 et $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$ s'exprime par :

$$I_b(\theta_0) = \int_b^T S^2(x_{t-2\theta_0}) S'^2(x_{t-\theta_0}) dt,$$

et

$$I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}) = \int_b^T S^2(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) S'^2(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) dt.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}) - I_b(\theta_0)| &= \left| \int_b^T [S^2(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) S'^2(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) - S^2(x_{t-2\theta_0}) S'^2(x_{t-\theta_0})] dt \right| \\ &\leq \int_b^T |S(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) - S(x_{t-2\theta_0}) S'(x_{t-\theta_0})| \\ &\quad \times |S(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}}) + S(x_{t-2\theta_0}) S'(x_{t-\theta_0})| dt. \end{aligned}$$

Sous la condition \mathcal{C} , la dérivée S' est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\sup_{y \in \mathbb{R}} |S'(y)| \leq K$. De plus, comme S est continue sur le compact

$[x_b, x_T]$, il existe une constante positive C vérifiant $\sup_{y \in [x_b, x_T]} |S(y)| \leq C$. Le second terme de l'intégrale peut alors être majoré de la manière suivante

$$\begin{aligned} |I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}) - I_b(\theta_0)| &\leq 2KC \int_b^T |S(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S(x_{t-2\theta_0})S'(x_{t-\theta_0})| dt \\ &\leq 2KC \left[\int_b^T |S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})| |S(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S(x_{t-2\theta_0})| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_b^T |S(x_{t-2\theta_0})| |S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t-\theta_0})| dt \right]. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à $S(x_{t-\cdot})$ (voir [89], Théorème 5.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} |I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}) - I_b(\theta_0)| &\leq 2K^3C \int_b^T |x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - x_{t-2\theta_0}| dt \\ &\quad + 2KC^2 \int_b^T |S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t-\theta_0})| dt. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, nous déduisons le résultat du lemme en utilisant, la consistance de l'EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ ainsi que la continuité uniforme des fonctions $S'(\cdot)$ et x_\bullet sur $[b, T]$. □

Lemme 3.3.2. *Soit la condition \mathcal{C} vérifiée, et supposons que $S'(x_b) \geq \lambda > 0$ pour tout $\theta \in \Theta$. Alors, nous avons la convergence*

$$\mathbf{P}_{\theta_0} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{b \leq t \leq T} |S'(X_{t, \tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{t, 2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t, \theta_0})S(x_{t, 2\theta_0})| = 0.$$

Preuve. Nous écrivons d'abord,

$$\begin{aligned} &\sup_{b \leq t \leq T} |S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t-\theta_0})S(x_{t-2\theta_0})| \\ &= \sup_{b \leq t \leq T} \left| S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \left(S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \right) \right. \\ &\quad + S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \left(S(x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S(x_{t-2\theta_0}) \right) \\ &\quad + S'(x_{t-\theta_0}) \left(S(X_{t-2\theta_0}) - S(x_{t-2\theta_0}) \right) + S(X_{t-2\theta_0}) \left(S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t-\theta_0}) \right) \\ &\quad \left. + S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(x_{t-2\theta_0}) - S(X_{t-2\theta_0})S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \right|. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, nous pouvons alors établir l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \sup_{b \leq t \leq T} \left| S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t-\theta_0})S(x_{t-2\theta_0}) \right| \leq \\
& \leq K^2 \sup_{b \leq t \leq T} |X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - x_{t-2\theta_0}| + K^2 \sup_{b \leq t \leq T} |x_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - x_{t-2\theta_0}| \\
& + K^2 \sup_{b \leq t \leq T} |X_{t-2\theta_0} - x_{t-2\theta_0}| + \sup_{b \leq t \leq T} \left| S(X_{t-2\theta_0}) \left(S'(x_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) - S'(x_{t-\theta_0}) \right) \right| \\
& + K^2 \sup_{b \leq t \leq T} |X_{t-2\theta_0} - x_{t-2\theta_0}|. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la consistance du MDE $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ (Proposition 3.3.2), et en tenant compte de la continuité uniforme des fonctions x_\bullet et $S'(\cdot)$, ainsi que de l'estimation fondamentale (2.17), nous concluons à la convergence uniforme en probabilité vers zéro de chaque terme de (3.14) pour $t \in [b, T]$. Ceci établit la convergence requise et achève la démonstration du Lemme 3.3.2. \square

Reprenons maintenant la démonstration du Théorème 3.3.1. En nous appuyant sur les Lemmes 3.3.1 et 3.3.2, nous commençons par étudier le comportement asymptotique de la statistique (3.13).

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\bar{\theta}$ vérifiant

$$|\bar{\theta} - \theta_0| \leq |\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0|,$$

et tel que

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon(t) &= \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} dW_s - \\
& - \frac{\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{-1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S'(X_{s-\bar{\theta}})S(X_{s-2\bar{\theta}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})} ds.
\end{aligned}$$

Notons $o(1)$ une quantité qui converge en probabilité vers zéro. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} dW_s = \int_b^t \frac{S'(x_{s-\theta_0})S(x_{s-2\theta_0})}{I_b(\theta_0)^{1/2}} dW_s + o(1)$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})S'(X_{s-\bar{\theta}})S(X_{s-2\bar{\theta}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})} ds \\
& = \int_b^t \frac{S'(x_{s-\theta_0})^2 S(x_{s-2\theta_0})^2}{I_b(\theta_0)} ds + o(1).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la représentation (3.7) de l'EMV donne le résultat suivant

$$\frac{\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{-1/2}} = \int_b^T \frac{S'(x_{s-\theta_0})S(x_{s-2\theta_0})}{I_b(\theta_0)^{1/2}} dW_s + o(1).$$

Nous obtenons donc, sous \mathcal{H}_0 , l'expression suivante

$$V_\varepsilon(t) = \int_b^t \frac{S'(x_{s-\theta_0})S(x_{s-2\theta_0})}{I_b(\theta_0)^{1/2}} dW_s - \int_b^T \frac{S'(x_{s-\theta_0})S(x_{s-2\theta_0})}{I_b(\theta_0)^{1/2}} dW_s \int_b^t \frac{S'(x_{s-\theta_0})^2 S(x_{s-2\theta_0})^2}{I_b(\theta_0)} ds + o(1).$$

Pour $b \leq t \leq T$, nous considérons à présent le changement de variable

$$\tau = \int_b^t \frac{S'(x_{s-\theta_0})^2 S(x_{s-2\theta_0})^2}{I_b(\theta_0)} ds, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

avec

$$d\tau = \frac{S'(x_{t-\theta_0})^2 S(x_{t-2\theta_0})^2}{I_b(\theta_0)} dt.$$

La première intégrale de Wiener, dans l'expression précédente de $V_\varepsilon(t)$, peut s'exprimer comme

$$\int_b^t \frac{S'(x_{s-\theta_0})S(x_{s-2\theta_0})}{I_b(\theta_0)^{1/2}} dW_s = \mathcal{W}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

où $\mathcal{W}(\cdot)$ désigne un processus de Wiener. Nous obtenons par conséquent la convergence en loi

$$V_\varepsilon(t) \implies \mathcal{W}(\tau) - \mathcal{W}(1)\tau = B(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Où $B(\cdot)$ désigne un pont brownien. Ici, nous nous référons au résultat dans [90], Section 6.

Par conséquent, nous déduisons la convergence en loi de la statistique de test δ_ε

$$\delta_\varepsilon = \int_{\nu_\varepsilon}^T \frac{V_\varepsilon(t)^2 S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})^2 S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})^2}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})} dt \implies \delta := \int_0^1 B(\tau)^2 d\tau \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

De plus, nous pouvons conclure que le test ψ_ε est à distribution asymptotique libre (ADF) et appartient à $\mathcal{K}\alpha$. Ceci découle directement de (3.12).

En effet

$$\mathbf{E}_{\theta_0} \psi_\varepsilon(X^{\varepsilon, b}) = \mathbf{E}_{\theta_0}(\mathbf{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}) = \mathbf{P}_{\theta_0}^\varepsilon(\delta_\varepsilon > c_\alpha) = \mathbf{P}(\delta > c_\alpha) + o(1) = \alpha + o(1).$$

□

3.3.4 Alternatives

Nous abordons dans cette section la consistance du test. Dans le cadre de l'hypothèse alternative, le processus observé admet la représentation

$$\mathcal{H}_1 : \quad dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.15)$$

Le terme de dérive $B(X_t)$ ne présente aucun retard et par conséquent, la statistique $V_\varepsilon(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} dX_s \\ &\quad - \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon,b}})}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} ds \\ &= \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})(B(X_s) - S(X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon,b}}))}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} ds \\ &\quad + \int_{\nu_\varepsilon}^t \frac{S'(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})S(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}})}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} dW_s. \end{aligned}$$

Considérons d'une part y_t la solution du problème limite sous \mathcal{H}_1 , et d'autre part $x_t(\theta)$ la solution de l'équation différentielle sous \mathcal{H}_0 (avec retard). nous avons alors

$$\frac{dy_t}{dt} = B(y_t), \quad y_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

et

$$\frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta}), \quad x_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous décrivons d'abord le comportement asymptotique sous \mathcal{H}_1 des estimateurs, l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$ et l'EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$ (définis dans (3.6) et (3.8)). En ce qui concerne l'EMV, nous suivons l'approche présentée dans [55], sous-section 2.6. Notons $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $y = \{y_t, 0 \leq t \leq T\}$ les solutions des problèmes limites associés respectivement aux hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

Nous introduisons donc la fonction G ainsi qu'une nouvelle vraie valeur θ^*

$$G(\theta, x, y) = \int_b^T [S(x_t(\theta)) - B(y_t)]^2 dt,$$

et

$$\theta^* = \arg \inf_{\theta \in \Theta} G(\theta, x, y).$$

Considérons \mathbf{P}_1^ε la mesure sur $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ induite par le processus (3.15), où \mathcal{C}_T désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$. nous avons alors la consistance de $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$, (voir [55],p.77), au sens où

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_{\varepsilon,b} = \theta^*. \quad (3.16)$$

Nous considérons à présent le comportement asymptotique de l'EDM, décrit dans le lemme suivant. Soit

$$\theta^{**} := \arg \inf_{\theta \in (a,b)} \|y - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}.$$

Pour $\gamma > 0$ et $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$, nous introduisons la fonction

$$h(\gamma) := \inf_{|\theta - \theta^{**}| > \gamma} \left(\|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2 \right).$$

Lemme 3.3.3. *Supposons que la condition de régularité \mathcal{C} est vérifiée pour la dérive $B(X_t)$ et pour la fonction $S(x_{t-\theta})$ et que $h(\gamma) > 0$ pour tout $\gamma > 0$. Si, de plus, θ^{**} est unique dans $\Theta = (a, b)$, alors pour $\gamma < \gamma_0$ avec certaines constantes $\kappa > 0$ et $\gamma_0 > 0$, on a*

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma \right\} \leq 4 \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 h^2(\gamma)}{2T\varepsilon^2} \right\}.$$

Preuve. En se référant à [55], Section 7.4, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_1^\varepsilon \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma \right\} &= P_1^\varepsilon \left\{ \inf_{|\theta - \theta^{**}| \leq \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} > \inf_{|\theta - \theta^{**}| > \gamma} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \right\} \\ &= P_1^\varepsilon \left\{ \inf_{|\theta - \tilde{\theta}| \leq \gamma} \left(\|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\tilde{\theta})\|_{\nu_\varepsilon}^2 \right) > \right. \\ &\quad \left. \inf_{|\theta - \tilde{\theta}| > \gamma} \left(\|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\tilde{\theta})\|_{\nu_\varepsilon}^2 \right) \right\} \\ &= P_1^\varepsilon \left\{ \inf_{|\theta - \theta^{**}| \leq \gamma} \left(\|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2 \right) > \right. \\ &\quad \left. \inf_{|\theta - \theta^{**}| > \gamma} \left(\|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2 &= \\ &= \langle X_t - y_t + x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta), X_t + y_t - x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta) \rangle \\ &\leq \|X_t - y_t + x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \|X_t + y_t - x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2 &= \\ &= \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 + \|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Pour les deux premiers termes du second membre de cette égalité, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \|X_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 &= \int_b^{\nu_\varepsilon} [(X_t - x_t(\theta))^2 - (y_t - x_t(\theta))^2] dt \\ &= \int_b^{\nu_\varepsilon} (X_t + y_t - 2x_t(\theta))(X_t - y_t) dt \\ &= \langle X_t + y_t - 2x_t(\theta), X_t - y_t \rangle \\ &= \langle X_t - y_t, X_t - y_t \rangle + \langle 2y_t - 2x_t(\theta), X_t - y_t \rangle \\ &\geq -2 \langle x_t(\theta) - y_t, X_t - y_t \rangle \geq -2 \|x_t(\theta) - y_t\|_{\nu_\varepsilon} \|X_t - y_t\|_{\nu_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il résulte des relations (3.18) et (3.19) que l'expression (3.17) admet l'estimation suivante, pour certaines constantes C_1 , C_2 et C_3

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma \right\} \\
& \leq \mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ \inf_{|\theta - \theta^{**}| \leq \gamma} (\|X_t - y_t + x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} \|X_t + y_t - x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}) \right. \\
& \quad \left. \geq h(\gamma) - 2\|x_t(\theta) - y_t\|_{\nu_\varepsilon} \|X_t - y_t\|_{\nu_\varepsilon} \right\} \\
& \leq \mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ \inf_{|\theta - \theta^{**}| \leq \gamma} (\|X_t - y_t\|_{\nu_\varepsilon} + \|x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}) (\|X_t - y_t\|_{\nu_\varepsilon} \right. \\
& \quad \left. + \|x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} + 2\|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}) \geq h(\gamma) - 2\|x_t(\theta) - y_t\|_{\nu_\varepsilon} \|X_t - y_t\|_{\nu_\varepsilon} \right\} \\
& \leq \mathbf{P} \left\{ \varepsilon C_1 \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| (\varepsilon C_1 \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| + C_2) + \varepsilon C_3 \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \geq h(\gamma) \right\}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Dans la dernière majoration, nous avons utilisé l'égalité suivante

$$\inf_{|\theta - \theta^{**}| \leq \gamma} \|x_t(\theta^{**}) - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon} = 0,$$

ainsi que l'estimation (2.17) sous \mathcal{H}_1

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - y_t| \leq \varepsilon C_1 \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|.$$

De plus, la continuité uniforme de la solution au problème limite ($\varepsilon = 0$) sous les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 garantit que la norme $\|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}$ reste bornée.

En posant

$$\beta_1 = \frac{1}{C_1 C_2 + C_3} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{C_1^2}{C_1 C_2 + C_3},$$

il découle de (3.20) que

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \varepsilon \beta_2 \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \right)^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \geq \frac{\beta_1 h(\gamma)}{\varepsilon} \right\}.$$

En introduisant la variable $\eta = \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|$, nous déduisons

$$\varepsilon \beta_2 \eta^2 + \eta > \frac{\beta_1 h(\gamma)}{\varepsilon} \Rightarrow \eta > \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\beta_2 \beta_1 h(\gamma)}}{2\beta_2 \varepsilon}.$$

Et nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ |\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma \right\} & \leq \mathbf{P}_1^\varepsilon \left\{ \varepsilon \beta_2 \eta^2 + \eta > \frac{\beta_1 h(\gamma)}{\varepsilon} \right\} \\
& = \mathbf{P} \left\{ \eta > \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\beta_2 \beta_1 h(\gamma)}}{2\beta_2 \varepsilon} \right\} \\
& \leq 4 \exp \left\{ \frac{-1}{2T} \frac{(-1 + \sqrt{1 + 4\beta_2 \beta_1 h(\gamma)})^2}{4\beta_2^2 \varepsilon^2} \right\}. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Nous utilisons ici les propriétés fondamentales du mouvement brownien., voir Karatzas [38], Chapitre 2 ou Kutoyants [55], Chapitre 1.

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| > N\right) = 4\mathbf{P}(W_T > N) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(W_T > N) \leq \exp -\frac{N^2}{2T}, \text{ for } N > 0.$$

Nous notons que

$$-1 + \sqrt{1 + 4\beta_2\beta_1 h(\gamma)} = \frac{4\beta_2\beta_1 h(\gamma)}{\sqrt{1 + 4\beta_2\beta_1 h(\gamma)} + 1} \geq \frac{4\beta_2\beta_1 h(\gamma)}{2\sqrt{1 + 4\beta_2\beta_1 h(\gamma)}}.$$

Alors, pour $\gamma_0 > 0$ tel que $4\beta_2\beta_1 h(\gamma_0) < 1$, nous obtenons

$$\left(-1 + \sqrt{1 + 4\beta_2\beta_1 h(\gamma_0)}\right)^2 \geq \left(\frac{2\beta_2\beta_1 h(\gamma_0)}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

L'équation (3.21) donne par ailleurs

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon\left(|\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma\right) \leq 4 \exp\left\{\frac{-1}{2T} \frac{\beta_1^2 h^2(\gamma_0)}{2\varepsilon^2}\right\}.$$

D'où, pour tout $\gamma < \gamma_0$, $h(\gamma_0) \geq h(\gamma)$. Le choix $\kappa = \beta_1/\sqrt{2} > 0$ conduit alors au résultat final

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon\left\{|\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} - \theta^{**}| > \gamma\right\} \leq 4 \exp\left\{-\frac{\kappa^2 h^2(\gamma)}{2T\varepsilon^2}\right\}.$$

□

Comme conséquence directe du lemme démontré précédemment, nous obtenons la propriété de consistance pour l'EDM

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} = \theta^{**}. \quad (3.22)$$

La consistance des estimateurs EMV (3.16) et EDM (3.22) entraîne celle du test statistique $\psi_\varepsilon = \mathbf{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$, comme l'établit le résultat suivant

Théorème 3.3.2. [5] *Supposons que la condition \mathcal{C} est vérifiée pour la dérivée $B(X_t)$ ainsi que pour la fonction $S(x_{t-\theta})$. Si, pour tout $t \in (b, T]$, la condition*

$$\mathcal{C}_1 : \int_b^t S'(y_{s-\theta^{**}}) S(y_{s-2\theta^{**}}) [B(y_s) - S(y_{s-\theta^*})] ds > 0$$

est satisfaite, alors le test ψ_ε est consistant.

Preuve. La statistique $V_\varepsilon(t)$ admet la reformulation suivante

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \int_b^t \frac{S'(y_{s-\theta^{**}}) S(y_{s-2\theta^{**}})}{I_b(\theta^{**})^{1/2}} dW_s + o(1) \\ &+ \int_b^t \frac{S'(y_{s-\theta^{**}}) S(y_{s-2\theta^{**}}) [B(y_s) - S(y_{s-\theta^*})]}{\varepsilon I_b(\theta^{**})^{1/2}} ds (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le premier terme s'exprime comme

$$\int_b^t \frac{S'(y_{s-\theta^{**}})S(y_{s-2\theta^{**}})}{I_b(\theta^{**})^{1/2}} dW_s = \mathcal{W}\left(\int_b^t \frac{S'(y_{s-\theta^{**}})^2 S(y_{s-2\theta^{**}})^2}{I_b(\theta^{**})} ds\right),$$

avec $\mathcal{W}(\cdot)$ processus de Wiener. Ce processus est donc gaussien et borné en probabilité. De plus, sous la condition \mathcal{C}_1 , nous avons

$$\int_b^t \frac{S'(y_{s-\theta^{**}})S(y_{s-2\theta^{**}})[B(y_s) - S(y_{s-\theta^*})]}{\varepsilon I_b(\theta^{**})^{1/2}} ds \longrightarrow \infty \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En nous appuyant sur ces résultats, nous pouvons alors établir que

$$\delta_\varepsilon = \int_b^T \frac{V_\varepsilon(t)^2 S'(X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon}})^2 S(X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon}})^2}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon})} dt \longrightarrow \infty \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Il en découle que le test est consistant contre toute alternative fixée

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\} \rightarrow 1.$$

□

Les deux chapitres qui suivent sont consacrés aux applications nous proposons deux exemples pratiques, le premier en dynamique des populations et le deuxième en économie. Les tests d'ajustement que nous proposons permettent d'évaluer l'adéquation entre des modèles stochastiques intégrant les retards temporels et les bruits environnementaux et les données observées. Nous mettons en avant l'aspect application des résultats théoriques établis dans les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

Chapitre 4

Application en biologie

Sommaire

4.1	Modèle déterministe pour la dynamique de population	56
4.2	Modélisation stochastique en dynamique de population	58
4.3	Test d'ajustement pour le modèle stochastique tronqué avec retard	60
4.4	Simulations numériques	67
4.4.1	Analyse numérique du comportement des estimateurs	67
4.4.2	Comportement numérique de la statistique V_ε	70

En biologie des populations, l'application de tests d'ajustement éclaire le statisticien sur les dynamiques démographiques et oriente les stratégies de gestion de celles ci. Pour illustrer concrètement l'application du test d'ajustement défini dans le théorème 3.3.1 en biologie, nous commençons par présenter le modèle logistique classique dans le cadre général de dynamique des populations Bacaër [4].

4.1 Modèle déterministe pour la dynamique de population

Nous rappelons quelques notions fondamentales pour modéliser la dynamique d'une population isolée c'est à dire qu'il n'y a pas un facteur de compétitivité avec une autre population. Soit $x(t)$ la densité de population au temps t , modélisant la biomasse (taille) de la population. Les paramètres démographiques de base sont définis par :

- $a \in \mathbb{R}^+$: taux de natalité de la population,
- $b \in \mathbb{R}^+$: taux de mortalité de la population.

La dynamique de la population peut alors être décrite par l'équation suivante

$$x(t + \delta t) - x(t) = a x(t) \delta t - b x(t) \delta t, \quad (4.1)$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = (a - b)x(t).$$

En prenant la limite lorsque $\delta t \rightarrow 0$, nous obtenons une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = r x(t), \quad (4.2)$$

où $r = a - b$ représente le taux de croissance intrinsèque de la population c'est à dire l'accroissement net par individu et par unité de temps.

Dans la littérature, la modélisation de la dynamique d'une population isolée sous l'influence d'un terme de croissance est abordée en suivant plusieurs approches. En particulier le modèle logistique, proposé par Verhulst en 1838, (voir Bacaër [4]), est fondamental car il intègre non seulement la croissance de la population, mais aussi les contraintes liées aux ressources disponibles, introduisant ainsi l'effet de saturation. Néanmoins d'autres modèles complémentaires existent, nous en citons les suivants à titre d'exemples.

- Le modèle exponentiel de Malthus (1798), qui postule une croissance illimitée en l'absence de facteurs restrictifs.
- Le modèle de Gompertz, adapté aux croissances rapides initiales suivies d'un ralentissement asymptotique.

Ainsi, le modèle logistique s'inscrit dans un ensemble plus large de modèles décrivant les dynamiques de population, chacun offrant des perspectives différentes selon les hypothèses et les contraintes prises en compte. Pour enrichir le modèle linéaire (4.2), Murray, J. D. introduit l'idée que les taux de natalité et de mortalité dépendent de la densité de la population, voir Murray [80], chapitre 3. Pour rappeler le modèle mathématique tenant compte de ce principe, nous introduisons les quatre paramètres suivants

- α est le taux de croissance intrinsèque de la population,
- β est l'effet de la limitation des ressources sur ce taux (coefficient de saturation),
- γ est le taux de mortalité de base,
- λ est le taux de mortalité dépendant de la densité.

Les taux de natalité et de mortalité de la population sont alors définis par

$$\begin{cases} a(x) = \alpha - \beta x, \\ b(x) = \gamma + \lambda x. \end{cases}$$

L'équation (4.1) est alors réécrite sous la forme

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = (\alpha - \gamma) x(t) - (\beta + \lambda) x^2(t).$$

Ensuite nous notons

$r = \alpha - \gamma > 0$ le taux de croissance intrinsèque,

$K = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \lambda} > 0$ la capacité de charge maximale de l'environnement.

Enfin un passage à la limite lorsque $\delta t \rightarrow 0$, permet de déduire l'équation logistique introduite par Verhulst Bacaër [4] :

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right), \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

La résolution de cette équation conduit à la solution explicite

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x(0)} - 1 \right) \exp(-rt)}, \quad t \geq 0,$$

de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K.$$

Ainsi, lorsque $x(0) < K$, la trajectoire de la population suit une croissance sigmoïde (en forme de S) et converge vers la capacité de charge K .

En résumé, le modèle logistique constitue un outil de référence pour décrire la croissance d'une population isolée, limitée par les ressources disponibles. Toutefois, ce modèle reste purement déterministe et ne tient pas compte des fluctuations aléatoires ni des délais associés aux processus biologiques. Afin de mieux représenter la variabilité observée dans les dynamiques réelles de population, nous adoptons une extension stochastique et retardée de ce modèle.

4.2 Modélisation stochastique en dynamique de population

La dynamique des populations biologiques est souvent soumise à des influences extérieures variables et imprévisibles. Ces perturbations aléatoires, qu'elles proviennent de l'environnement ou d'interactions internes à la population rendent nécessaire l'introduction d'une composante stochastique dans les modèles démographiques. Dans la littérature, deux sources principales de stochasticité sont généralement prises en compte :

- (i) l'approximation continue des tailles de population, issue du passage de modèles discrets à des modèles continus ;
- (ii) les variations imprévisibles des conditions environnementales (changements climatiques, fluctuations des ressources, catastrophes naturelles, ...).

L'intégration de ces effets dans les modèles de croissance permet une représentation plus réaliste des systèmes biologiques. Un tel cas stochastique est notamment présenté dans Hamdous [31], chapitre 1, ainsi que dans Mao et al. [70]. Nous considérons le processus $X^\varepsilon = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$, où X_t représente la taille de la population au temps t , et qui satisfait l'EDS logistique suivante :

$$dX_t = rX_t \left(1 - \frac{X_t}{K} \right) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.4)$$

Ici, x_0 est une constante positive. Le paramètre $r > 0$ représente le taux de croissance intrinsèque de la population, c'est-à-dire la vitesse à laquelle celle-ci croît en l'absence de contraintes. La constante positive K correspond à la capacité de charge, autrement dit la taille maximale de la population que l'environnement peut soutenir. La perturbation stochastique due à l'aléa environnemental est modélisée par (W_t) , un processus de Wiener, et par le coefficient de diffusion $\varepsilon \in (0, 1)$, qui en contrôle l'intensité.

Dans la suite, nous adoptons une version tronquée de la dérive logistique afin de disposer d'un contexte analytique adapté aux résultats développés ultérieurement, notamment ceux relatifs à l'existence et à l'unicité globale de la solution, à la consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance et de l'estimateur de distance minimale dans l'asymptotique des petites diffusions. Cette version tronquée permet également d'établir la consistance du test d'ajustement tel qu'il est construit au chapitre 3. En effet, dans le problème (4.4), la dérive ne vérifie pas une condition de Lipschitz globale. Cette difficulté est levée en introduisant une modification contrôlée de la dérive en dehors d'un domaine borné, tout en préservant la dynamique du modèle dans les régions biologiquement pertinentes.

Nous introduisons la fonction de troncature lisse $\chi_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (voir Mao et al. [73] ou Deng et al. [22]) définie par :

$$\chi_K(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq K, \\ \text{fonction } C^2 \text{ d'interpolation,} & K < x < K + 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ou } x \geq K + 1, \end{cases} \quad \text{avec } |\chi'_K(x)| \leq 1. \quad (4.5)$$

La fonction χ_K est une troncature lisse de l'identité. Elle est de classe $C^2(\mathbb{R})$, globalement lipschitzienne, à valeurs dans $[0, K]$, et coïncide avec l'identité sur l'intervalle biologiquement pertinent $[0, K]$.

Nous définissons alors la dérive tronquée lisse associée par

$$S_K(x) := r \chi_K(x) \left(1 - \frac{\chi_K(x)}{K} \right).$$

Nous considérons le processus $X^\varepsilon = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ satisfaisant l'EDS logistique tronquée, pour $x_0 \in (0, \frac{K}{2})$,

$$dX_t = r \chi_K(X_t) \left(1 - \frac{\chi_K(X_t)}{K} \right) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.6)$$

Notons que cette troncature garantit la régularité souhaitée, principalement la condition de lipschitz globale et la différentiabilité nécessaires à l'analyse asymptotique présentée dans la suite. Nous évaluons ensuite la pertinence de l'introduction d'un terme de dérive à retard, c'est-à-dire d'une dynamique tenant compte d'un effet de mémoire par rapport au modèle tronqué (4.6) à dérive instantanée.

La section suivante est consacrée à la construction d'un test d'ajustement illustrant, sur cet exemple particulier, les résultats théoriques établis au chapitre 3. Pour les raisons techniques précédemment évoquées, nous considérerons systématiquement la fonction de troncature lisse définie en (4.5).

4.3 Test d'ajustement pour le modèle stochastique tronqué avec retard

Nous proposons un test d'ajustement reposant sur l'opposition entre l'hypothèse nulle composite paramétrique à dérive retardée \mathcal{H}_0 et une alternative non paramétrique à dérive instantanée \mathcal{H}_1 , définies pour $t \in [0, T]$ par :

$$\mathcal{H}_0 : dX_t = r \chi_K(X_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(X_{t-\theta})}{K} \right) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{H}_1 : dX_t = B(X_t) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0. \quad (4.8)$$

Sous \mathcal{H}_0 , le modèle s'inscrit dans la classe des EDS avec retard de type logistique, dont la stabilité a été largement étudiée par Mao et al. [71]. Nous estimons d'abord le paramètre de retard inconnu en nous inspirant de certains résultats établis dans l'ouvrage de Kutoyants [55] sur l'estimation paramétrique pour des processus de type diffusion non linéaires. Le paramètre $\theta \in (a, b)$ représente un retard traduisant la dépendance de la croissance actuelle de la population à son état passé au temps $t - \theta$, afin de modéliser des phénomènes biologiques tels que les périodes de maturation ou la disponibilité différée des ressources.

Notons d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $0 \leq \chi_K(x) \leq K$ et donc

$$S_K(x) = r \chi_K(x) \left(1 - \frac{\chi_K(x)}{K} \right) \geq 0.$$

Ainsi la dérive dans (4.7) est positive. De plus la fonction S_K étant une composition de fonctions C^2 , appartient donc à $C^2(\mathbb{R})$. Sa dérivée s'écrit

$$S'_K(x) = r \chi'_K(x) \left(1 - \frac{2\chi_K(x)}{K} \right).$$

Comme $|\chi'_K(x)| \leq 1$ et $0 \leq \chi_K(x) \leq K$, nous déduisons

$$|S'_K(x)| \leq r, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent S'_K est bornée et donc la fonction S_K est globalement lipschitzienne avec une constante de lipschitz égale à r .

De plus, pour $x \in [0, K]$, nous avons

$$S'_K(x) = r \left(1 - \frac{2x}{K} \right).$$

Il en résulte que

$$S'_K(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \left(0, \frac{K}{2} \right), \quad S'_K(x) = 0 \quad \text{pour } x = \frac{K}{2}.$$

Nous en déduisons que l'EDS logistique tronquée avec retard (4.7) adhère bien à la classe des EDS avec retard étudiée dans le chapitre 3. Nous vérifions que la solution de l'EDS (4.7) converge uniformément, par rapport à $\theta \in (a, b)$, vers la solution de l'EDO avec retard associée définie pour $t \in [0, T]$ par

$$dx_t = r \chi_K(x_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(x_{t-\theta})}{K} \right) dt, \quad x_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0. \quad (4.9)$$

Nous suivons la preuve du lemme 2.2.1 en considérant la fonction $h(t) = |X_{t-\theta} - x_{t-\theta}|$, où X et x désignent respectivement les solutions de l'EDS (4.7) et de l'EDO (4.9). La fonction h est continue, positive et vérifie les hypothèses du lemme de Grönwall 2.2.2, puisque

$$\begin{aligned} h(t) &= \left| \int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})) ds + \varepsilon W_t \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |S'_K(x)| \int_0^t h(s) ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s| \\ &= r \int_0^t h(s) ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s|. \end{aligned}$$

Et le lemme de Grönwall permet de déduire les inégalités (2.17) et (2.18) :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s|, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_\theta [|X_t - x_t|^2] \leq K_2 \varepsilon^2,$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes positives indépendantes de θ .

Enfin, pour des raisons techniques liées aux démonstrations ultérieures, nous supposons que

$$x_b < \frac{K}{2}.$$

Ci après nous introduisons l'information de Fischer associée au processus tronqué (4.7) et nous remarquons qu'elle est définie et strictement positive.

$$I_b(\theta) = \int_b^T r^4 (\chi_K(x_{t-2\theta}))^2 (\chi'_K(x_{t-\theta}))^2 \left(1 - \frac{\chi_K(x_{t-2\theta})}{K} \right)^2 \left(1 - \frac{2\chi_K(x_{t-\theta})}{K} \right)^2 dt > 0.$$

D'autre part la condition d'identifiabilité du paramètre de retard θ est satisfaite : Pour tout $\gamma > 0$,

$$\inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \int_b^T r^2 \left[\chi_K(x_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(x_{t-\theta})}{K} \right) - \chi_K(x_{t-\theta_0}) \left(1 - \frac{\chi_K(x_{t-\theta_0})}{K} \right) \right]^2 dt > 0.$$

Toute l'argumentation précédante permet de conclure que la condition \mathcal{C} posée dans le chapitre 3 section 3.3 est satisfaite par la fonction de dérive sous l'hypothèse nulle.

Le rapport de vraisemblance associé à l'EDS logistique tronquée avec retard (4.7) pour des observations sur l'intervalle $[b, T]$ est défini comme suit.

Pour tout $\theta \in (a, b)$

$$L(\theta; X^{\varepsilon, b}) = \exp \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \int_b^T \chi_K(X_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(X_{t-\theta})}{K} \right) dX_t - \frac{r^2}{2\varepsilon^2} \int_b^T \left[\chi_K(X_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(X_{t-\theta})}{K} \right) \right]^2 dt \right\}.$$

L'objectif est de construire, pour l'EDS tronquée avec retard (4.7), un test d'ajustement dans la classe des tests de niveau asymptotique $\alpha \in (0, 1)$ donné :

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ \Psi_\varepsilon : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_\theta[\Psi_\varepsilon(X^{\varepsilon, b})] = \alpha \right\}.$$

Où \mathbf{E}_θ désigne l'espérance mathématique sous l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 . Nous prouvons que le test obtenu est à distribution asymptotique libre (ADF) et consistant. Nous reformulons donc dans ce cas particulier les résultats établis dans les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2. La démarche adoptée s'appuie sur la méthodologie de construction de tests exposée au chapitre 3. Nous nous concentrons sur la partie $X^{\varepsilon, b} = \{X_t\}_{t \in [b, T]}$ de la trajectoire observée X^ε (4.6). Notons que sous \mathcal{H}_0 , la fonction score normalisée associée à l'EDS logistique tronquée avec retard (4.7) est définie pour $b \leq t \leq T$ par

$$U_\varepsilon(\theta, X^{\varepsilon, b}) = \frac{r^2}{\varepsilon I(\theta)^{1/2}} \int_b^T \chi_K(X_{t-2\theta}) \chi'_K(X_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(X_{t-2\theta})}{K} \right) \times \left(1 - \frac{2\chi_K(X_{t-\theta})}{K} \right) \left[dX_t - r\chi_K(X_{t-\theta}) \left(1 - \frac{\chi_K(X_{t-\theta})}{K} \right) dt \right].$$

Nous considérons deux estimateurs du paramètre de retard inconnu : l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$ (3.6) obtenu à partir de l'observation $X^{\varepsilon, b} = \{X_t\}_{t \in [b, T]}$ et l'EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}$ (3.8) construit en utilisant l'observation de la portion de trajectoire $X^{\varepsilon, \nu_\varepsilon} = \{X_t\}_{b \leq t \leq \nu_\varepsilon}$ telle que $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$. Nous définissons alors la statistique $V_\varepsilon(t)$ à partir du processus $U_{\varepsilon, b}(t, \theta, X^{\varepsilon, b})$ moyennant les modifications adéquates explicitées dans

le chapitre précédent. Si t appartient à $[\nu_\varepsilon, T]$,

$$\begin{aligned}
 V_\varepsilon(t) := & \frac{r^2}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \\
 & \times \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) dX_s \\
 & - \frac{r^3}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi_K(X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon, b}}) \\
 & \times \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon, b}})\right) ds.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous exposons ci-après le premier résultat pour cette application, illustrant le théorème fondamental 3.3.1 du chapitre 3. Nous introduisons le seuil critique c_α défini au moyen du pont Brownien $B(s)_{\{0 \leq s \leq 1\}}$ par

$$\mathbf{P} \left(\int_0^1 B(s)^2 ds > c_\alpha \right) = \alpha. \quad \alpha \in (0, 1).$$

Enfin nous définissons la statistique de test :

$$\begin{aligned}
 \delta_\varepsilon := & I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{-1} \int_{\nu_\varepsilon}^T V_\varepsilon^2(t) r^4 (\chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}))^2 \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right)^2 \\
 & (\chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}))^2 \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right)^2 dt.
 \end{aligned}$$

Théorème 4.3.1. *Si la solution du problème limite sous \mathcal{H}_0 vérifie $x_b < \frac{K}{2}$, le test $\psi_\varepsilon := \mathbf{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$ est ADF et appartient à la classe \mathcal{K}_α des tests de niveau asymptotique α .*

Preuve. Notons θ_0 la vraie valeur inconnue du paramètre de retard et considérons $\bar{\theta}$ un certain point intermédiaire entre θ_0 et $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$. Nous posons

$$\begin{aligned}
 T_1(t) := & \frac{r^2}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \\
 & \times \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) dW_s, \\
 T_2 := & \frac{\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{-1/2}}, \\
 T_3(t) := & \frac{r^4}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})} \int_{\nu_\varepsilon}^t \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi_K(X_{s-2\bar{\theta}}) \chi'_K(X_{s-\bar{\theta}}) \\
 & \times \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\bar{\theta}})\right) \\
 & \times \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(X_{s-\bar{\theta}})\right) ds,
 \end{aligned}$$

La statistique $V_\varepsilon(t)$ (4.10) définie pour $t \in [\nu_\varepsilon, T]$ s'écrit alors

$$V_\varepsilon(t) = T_1(t) - T_2 \times T_3(t).$$

Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , les résultats établis sur la convergence uniforme du processus (4.7) vers (4.9) ainsi que ceux du lemme 3.3.1 concernant la convergence de l'information et les propositions 3.3.2, 3.3.1 sur la consistance des estimateurs permettent de déduire les égalités suivantes

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{r^2}{I_b(\theta_0)^{1/2}} \int_b^t \chi_K(x_{s-2\theta_0}) \chi'_K(x_{s-\theta_0}) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(x_{s-2\theta_0})\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(x_{s-\theta_0})\right) dW_s + o(1), \\ T_2 &= \frac{r^2}{I_b(\theta_0)^{1/2}} \int_b^T \chi_K(x_{s-2\theta_0}) \chi'_K(x_{s-\theta_0}) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(x_{s-2\theta_0})\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(x_{s-\theta_0})\right) dW_s + o(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_3(t) &= \frac{r^4}{I_b(\theta_0)} \int_b^t (\chi'_K(x_{s-\theta_0}))^2 (\chi_K(x_{s-2\theta_0}))^2 \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(x_{s-\theta_0})\right)^2 \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(x_{s-2\theta_0})\right)^2 ds + o(1). \end{aligned}$$

$o(1)$ désigne ici une fonction convergente vers 0 en probabilité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
Considérons alors le changement de variable τ défini sur $[0, 1]$

$$\tau = \frac{r^4}{I_b(\theta_0)} \int_b^t \chi'_K(x_{s-\theta_0}) \chi_K(x_{s-2\theta_0}) \left(1 - \frac{2\chi_K(x_{s-\theta_0})}{K}\right)^2 \left(1 - \frac{\chi_K(x_{s-2\theta_0})}{K}\right)^2 ds.$$

Nous déduisons la convergence en loi suivante

$$V_\varepsilon(t) = T_1(t) - T_2 \times T_3(t) \implies B(\tau) := \mathcal{W}(\tau) - \tau \mathcal{W}(1).$$

Où $\mathcal{W}(\cdot)$ est un processus de Wiener standard, Il s'en suit la convergence en loi de la statistique du test

$$\delta_\varepsilon \implies \delta := \int_0^1 B^2(\tau) d\tau.$$

Nous concluons que la loi limite est indépendante du processus observé et donc le test ψ_ε est ADF et appartient à \mathcal{K}_α , du fait que

$$\mathbf{E}_{\theta_0} \psi_\varepsilon(X^{\varepsilon, b}) = \mathbf{E}_{\theta_0}(\mathbf{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}) = \mathbf{P}_{\theta_0}^\varepsilon(\delta_\varepsilon > c_\alpha) = \alpha + o(1).$$

□

Examinons maintenant la consistance du test. L'alternative non paramétrique s'écrit

$$\mathcal{H}_1 : dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

Et l'expression de la statistique $V_\varepsilon(t)$ devient

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \frac{r^2}{I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \left(1 - \frac{2\chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})}{K}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})}{K}\right) dW_s + \frac{r^2}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \chi'_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}}) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{2\chi_K(X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})}{K}\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}})\right) \left[B(X_t) - r\chi_K(X_{t-\hat{\theta}_{\varepsilon, b}})\right] \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\chi_K(X_{t-\hat{\theta}_{\varepsilon, b}})}{K}\right) ds. \end{aligned}$$

Considérons y_t la solution du problème limite (sous \mathcal{H}_1)

$$\frac{dy_t}{dt} = B(y_t), \quad y_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Notons $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $y = \{y_t, 0 \leq t \leq T\}$ les solutions des problèmes limites associés respectivement aux hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

La mesure de probabilité induite par le processus (X_t) (sous \mathcal{H}_1) est notée \mathbf{P}_1^ε . Conformément aux résultats du chapitre 3, pour étudier la consistance des estimateurs sous l'alternative nous considérons les deux fonctions suivantes.

$$G(\theta, x, y) := \int_b^T \left[r \chi_K(x_t(\theta)) \left(1 - \frac{\chi_K(x_t(\theta))}{K}\right) - B(y_t) \right]^2 dt,$$

et pour $\gamma > 0$ et $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$,

$$h(\gamma) := \inf_{|\theta - \theta^{**}| > \gamma} (\|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2).$$

Nous établissons alors la convergence en probabilité des deux estimateurs

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_{\varepsilon, b} = \theta^*, \quad \text{où } \theta^* := \arg \min_{\theta \in \Theta} G(\theta, x, y),$$

et

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} = \theta^{**}, \quad \text{avec } \theta^{**} := \arg \min_{\theta \in (a, b)} \|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}.$$

Nous pouvons vérifier que :

$$\begin{aligned} r^2 \int_b^t \chi'_K(y_{s-\theta^{**}}) \chi_K(y_{s-2\theta^{**}}) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(y_{s-\theta^{**}})\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-2\theta^{**}})\right) \\ \left[B(y_s) - r \chi_K(y_{s-\theta^*}) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-\theta^*})\right) \right] ds > 0 \quad \text{pour } t \in (b, T]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nous formulons à présent le second résultat de cette application, comme cas particulier du théorème 3.3.2.

Nous supposons que la fonction B satisfait également la condition \mathcal{C} :

\mathcal{C} : **La fonction $B(\cdot)$ est positive et deux fois continûment dérivable. De plus, sa dérivée $B'(\cdot)$ est positive, bornée et non nulle sur un sous-intervalle de $[y_b, y_T]$.**

Théorème 4.3.2. *Si la fonction $B(\cdot)$ dans \mathcal{H}_1 satisfait \mathcal{C} et la solution du problème limite sous \mathcal{H}_0 vérifie $x_b \leq \frac{K}{2}$ alors le test ψ_ε est consistant.*

Preuve. Nous pouvons réécrire la statistique $V_\varepsilon(t)$ comme suit

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \frac{r^2}{I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \chi'_K(y_{s-\theta^{**}}) \chi_K(y_{s-2\theta^{**}}) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(y_{s-\theta^{**}})\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-2\theta^{**}})\right) dW_s + o(1) + \frac{r^2}{\varepsilon I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \chi'_K(y_{s-\theta^{**}}) \chi_K(y_{s-2\theta^{**}}) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(y_{s-\theta^{**}})\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-2\theta^{**}})\right) \\ &\quad \times \left[B(y_s) - r, \chi_K(y_{s-\theta^*}) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-\theta^*})\right) \right] ds (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Remarquons que le premier terme peut être exprimé au moyen d'un processus de Wiener $\mathcal{W}(\cdot)$

$$\begin{aligned} &\frac{r^2}{I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \chi'_K(y_{s-\theta^{**}}) \chi_K(y_{s-2\theta^{**}}) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(y_{s-\theta^{**}})\right) \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-2\theta^{**}})\right) dW_s \\ &= \mathcal{W} \left(\frac{r^4}{I_b(\theta^{**})} \int_b^t \chi'_K(y_{s-\theta^{**}}) \chi_K(y_{s-2\theta^{**}}) \left(1 - \frac{2}{K} \chi_K(y_{s-\theta^{**}})\right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{1}{K} \chi_K(y_{s-2\theta^{**}})\right)^2 ds \right) \end{aligned}$$

Ainsi c'est un processus Gaussien, donc borné en probabilité sur tout intervalle fini. D'autre part, de la condition (4.11), nous déduisons que le deuxième terme de $V_\varepsilon(t)$ tend vers ∞ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous pouvons alors établir que sous l'hypothèse alternative \mathcal{H}_1

$$\delta_\varepsilon \longrightarrow \infty \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent, le test est consistant contre toute alternative fixée

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\} \rightarrow 1.$$

□

4.4 Simulations numériques

Cette section est consacrée à la validation numérique du Théorème 3.3.1. L'étude, réalisée à l'aide du logiciel **R**, illustre notamment la propriété de distribution asymptotiquement libre de la statistique δ_ε .

Nous notons que la troncature de la dérive constitue un outil purement technique, introduit afin de garantir les propriétés d'existence, d'unicité globale et de bornitude uniforme nécessaires aux analyses asymptotiques dans le régime des petites diffusions, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans les simulations numériques, nous travaillons toutefois avec le modèle non tronqué, les trajectoires simulées restant, pour ε suffisamment petit, dans un domaine borné avec une probabilité arbitrairement proche de un sur l'horizon de temps fini considéré. En particulier, la troncature n'est jamais activée au cours des simulations et l'on a donc $\chi_K(x) = x$ pour toutes les trajectoires simulées.

Notre démarche s'articule en deux étapes. Nous examinons d'abord le comportement du processus et des estimateurs. La simulation de trajectoires de l'EDS logistique avec retard (4.7) pour différentes valeurs de ε , comparées à celles de l'EDO (4.9), met en évidence l'effet du bruit et la convergence vers la dynamique déterministe lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. L'évolution des estimateurs EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$ et EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$, ainsi que leur concentration autour de la vraie valeur θ_0 , confirment leur convergence. Par ailleurs, la convergence numérique de l'information de Fisher $I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})$ est étudiée et comparée à sa valeur théorique en θ_0 . La seconde étape porte sur la validation de la statistique de test V_ε . Celle-ci met en évidence sa convergence empirique vers la trajectoire limite V , établit le lien entre sa loi asymptotique et celle du pont brownien standard $\{B(s)\}_{0 \leq s \leq 1}$, et renforce ces observations à l'aide d'un test de Kolmogorov–Smirnov appliqué à un échantillon simulé contre une loi normale centrée. Ainsi, cette étude fournit une vérification empirique solide et une visualisation claire des propriétés asymptotiques de δ_ε dans le régime des petites diffusions.

4.4.1 Analyse numérique du comportement des estimateurs

1. Simulation des trajectoires : L'étude comparative des solutions numériques examine conjointement l'EDS logistique avec retard (4.7), résolue par la méthode d'Euler–Maruyama, et l'EDO associée (4.9) traitée par la méthode d'Euler explicite. Les paramètres utilisés sont $t \in [0, 10]$, $r = 0.5$, $K = 10$, $\theta = 0.5$ et $\varepsilon \in \{0.05, 0.5, 0.9\}$. L'implémentation sous **R** exploite le package `ggplot2` pour visualiser des trajectoires indépendantes générées pour chaque configuration, avec superposition systématique des solutions EDS avec retard et EDO, permettant une analyse qualitative directe de leur convergence.

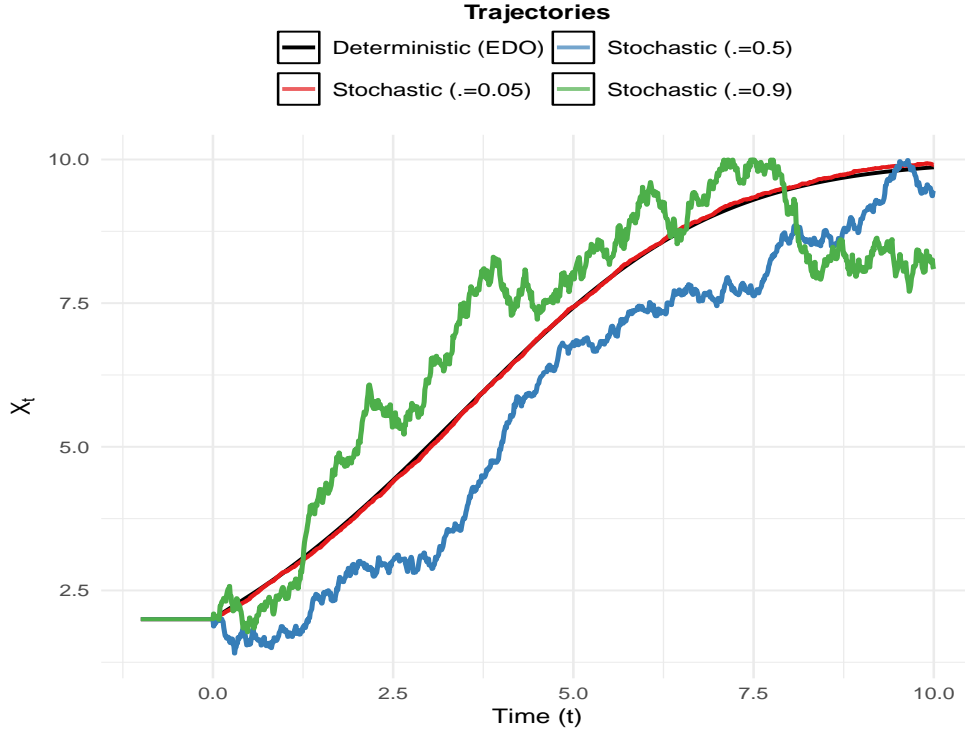


FIGURE 4.1 – Trajectoires déterministes et stochastiques du modèle logistique à retard

Conclusion : Les graphiques montrent que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, les trajectoires EDS avec retard convergent vers la solution déterministe associée.

2. Comportement des estimateurs du paramètre de retard : L'EMV est défini par

$$\hat{\theta}_{\varepsilon,b} := \arg \max_{\theta \in [a,b]} L(\theta; X^{\varepsilon,b}),$$

où $L(\theta; X^{\varepsilon,b})$ désigne la fonction de vraisemblance. En pratique, on maximise la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b}) = \log L(\theta; X^{\varepsilon,b})$ correspondante sur une grille discrète de $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b}) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_b^T r X_{t-\theta} \left(1 - \frac{X_{t-\theta}}{K}\right) \left[r X_{t-\theta_0} \left(1 - \frac{X_{t-\theta_0}}{K}\right) dt + \varepsilon dW_t \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_b^T \left(r X_{t-\theta} \left(1 - \frac{X_{t-\theta}}{K}\right) \right)^2 dt \\ &= \frac{r^2}{\varepsilon^2} \int_b^T \left[X_{t-\theta} X_{t-\theta_0} \left(1 - \frac{X_{t-\theta}}{K}\right) \left(1 - \frac{X_{t-\theta_0}}{K}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(X_{t-\theta} \left(1 - \frac{X_{t-\theta}}{K}\right) \right)^2 \right] dt \\ &\quad + \frac{r}{\varepsilon} \int_b^T X_{t-\theta} \left(1 - \frac{X_{t-\theta}}{K}\right) dW_t. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur candidate θ , la quantité $\mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b})$ est évaluée à partir des observations discrétisées du processus (X_t) , et l'estimateur $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$ correspond à la valeur de θ maximisant cette fonction.

L'EDM est défini par :

$$\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b} := \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_b^{\nu_\varepsilon} (X_t - x_t(\theta))^2 dt,$$

où X_t désigne la trajectoire observée et $x_t(\theta)$ la solution déterministe correspondante. L'intégrale est approchée numériquement par une somme discrète sur l'intervalle $[b, \nu_\varepsilon]$, avec $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$, et l'EDM correspond au minimum recherché sur une grille discrète de Θ .

Les deux graphiques suivants présentent le comportement comparé des estimateurs $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$ et $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$ en fonction de $\varepsilon \in (0, 1)$, pour les paramètres $T = 36$, $\theta \in [0.5, 3]$, $x_0 = 5$, $r = 0.2$, $K = 100$, et une vraie valeur fixé du retard à $\theta_0 = 1.2$.

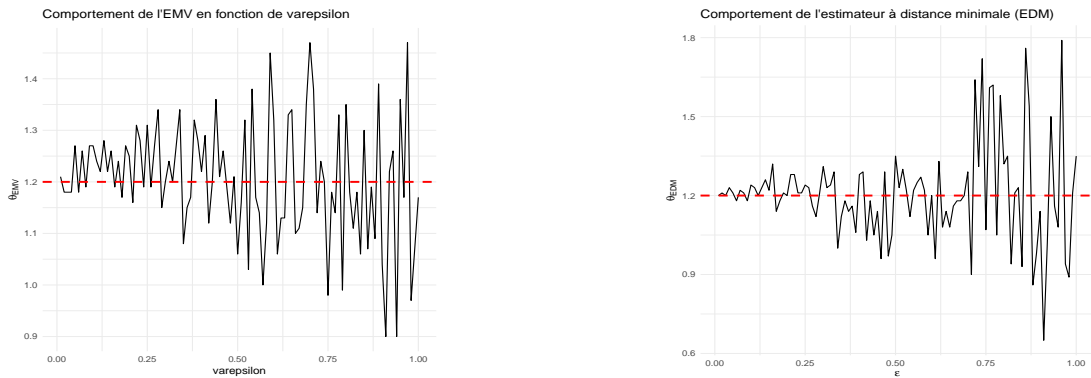


FIGURE 4.2 – Comportement des estimateurs EMV et EDM (modèle logistique)

Conclusion : La diminution asymptotique de la variabilité des estimateurs EMV et EDM, observée sur les graphiques, confirme leur convergence vers la vraie valeur θ_0 lorsque l'intensité du bruit ε tend vers zéro.

3. Information de Fisher : La Figure 4.3 illustre la convergence numérique de l'information de Fisher $I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})$ vers sa valeur théorique $I_b(\theta_0) = 2.5446$, confirmant ainsi le Lemme 3.3.1 adapté au modèle logistique. Nous avons utilisé les mêmes paramètres de la simulation ci-dessus, et la valeur théorique de l'information de Fisher est obtenue directement sur la console du programme.

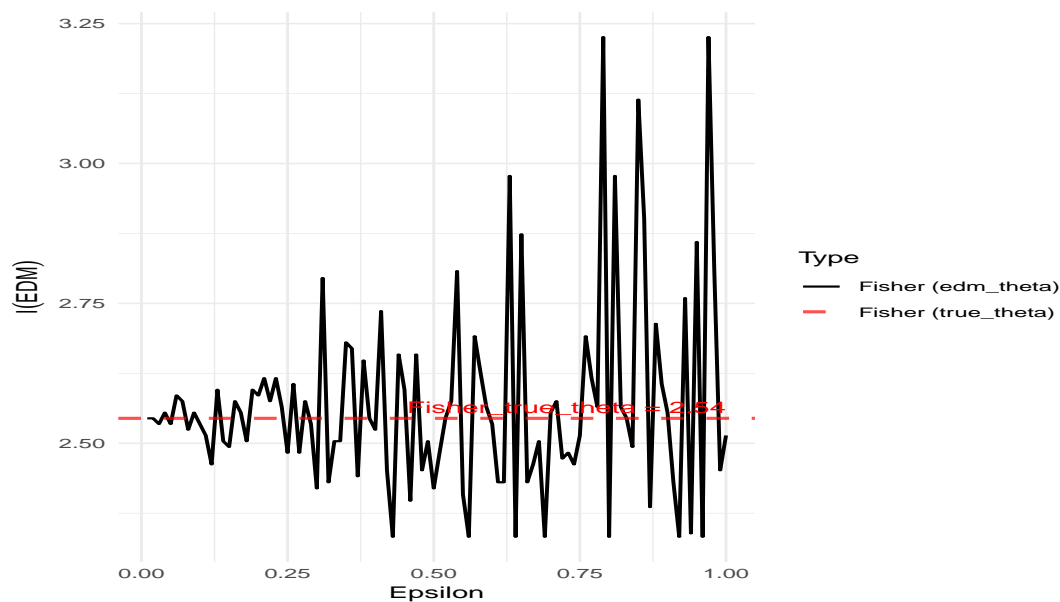


FIGURE 4.3 – Convergence de l’information de Fisher empirique vers sa valeur théorique (modèle logistique)

Conclusion : Cette convergence numérique valide le comportement asymptotique de l’estimateur de la distance minimale et assure la cohérence entre l’information de Fisher empirique et son analogue théorique dans le régime des petites diffusions.

4.4.2 Comportement numérique de la statistique V_ε

Dans toutes les simulations de cette sous-section, nous conservons les mêmes paramètres ; $T = 36$, $\theta \in [0.5, , 3]$, $x_0 = 10$, $r = 0.2$, $K = 100$, et avec une vraie valeur fixé $\theta_0 = 1.2$.

1. Illustration numérique de la convergence de $V_\varepsilon(t)$ vers $V(t)$: Les graphes ci-dessous représentent l’évolution de la statistique $V_\varepsilon(t)$ pour différentes valeurs de ε , ainsi que celle de sa limite $V(t)$. Le tableau ci-contre, extrait directement de la console d’exécution du code **R**, présente les valeurs numériques des estimateurs obtenues pour différentes valeurs de ε :

Résultats numériques issus de la console d’exécution

ε	θ_{EMV}	θ_{EDM}	$\bar{\theta}$	ν_ε
0.1	1.1707	1.1897	1.2	3.316228
0.5	1.5495	1.3659	1.2	3.707107
2	1.4503	2.8545	1.2	4.414214

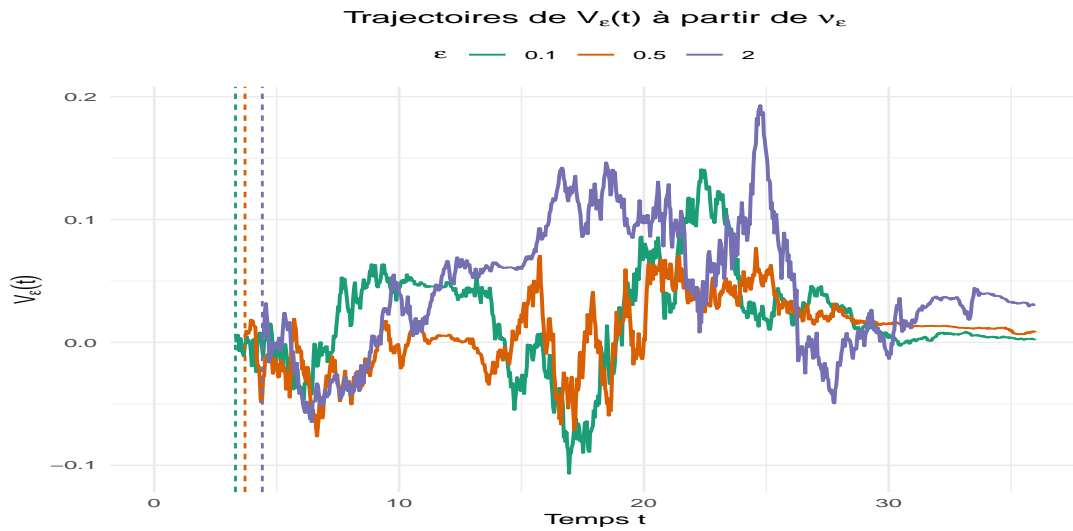
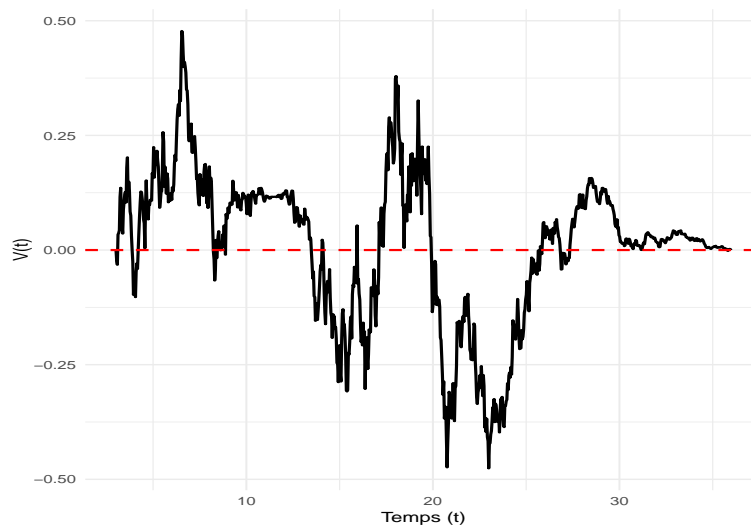
FIGURE 4.4 – Trajectoires de V_ε pour différentes valeurs de ε (modèle logistique)

FIGURE 4.5 – Trajectoires de la statistique limite (modèle logistique)

Conclusion : La convergence empirique de $V_\varepsilon(t)$ vers $V(t)$ est clairement observée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. L'alignement progressif des trajectoires simulées avec la limite théorique, tant en amplitude qu'en dynamique, fournit une validation numérique des propriétés asymptotiques établies.

2. Validation numérique de la convergence en loi de V_ε vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: L'objectif principal de cette simulation est d'illustrer numériquement, pour un temps fixé $t = T/2$, la convergence en loi de la statistique normalisée

$$V_\varepsilon^*(t) = \frac{V_\varepsilon(t) - \mathbf{E}[V_\varepsilon(t)]}{\sqrt{\text{Var}(V_\varepsilon(t))}}$$

vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans la simulation, l'espérance $\mathbf{E}[V_\varepsilon(t)]$ et la variance $\text{Var}(V_\varepsilon(t))$ sont approximées respectivement par la moyenne empirique et la variance empirique calculées à partir d'un grand nombre de trajectoires simulées. La validation numérique est réalisée au moyen de densités empiriques et du test de Kolmogorov–Smirnov, confirmant le comportement asymptotique gaussien attendu dans le cadre des modèles stochastiques à retard perturbés par un bruit de faible intensité.

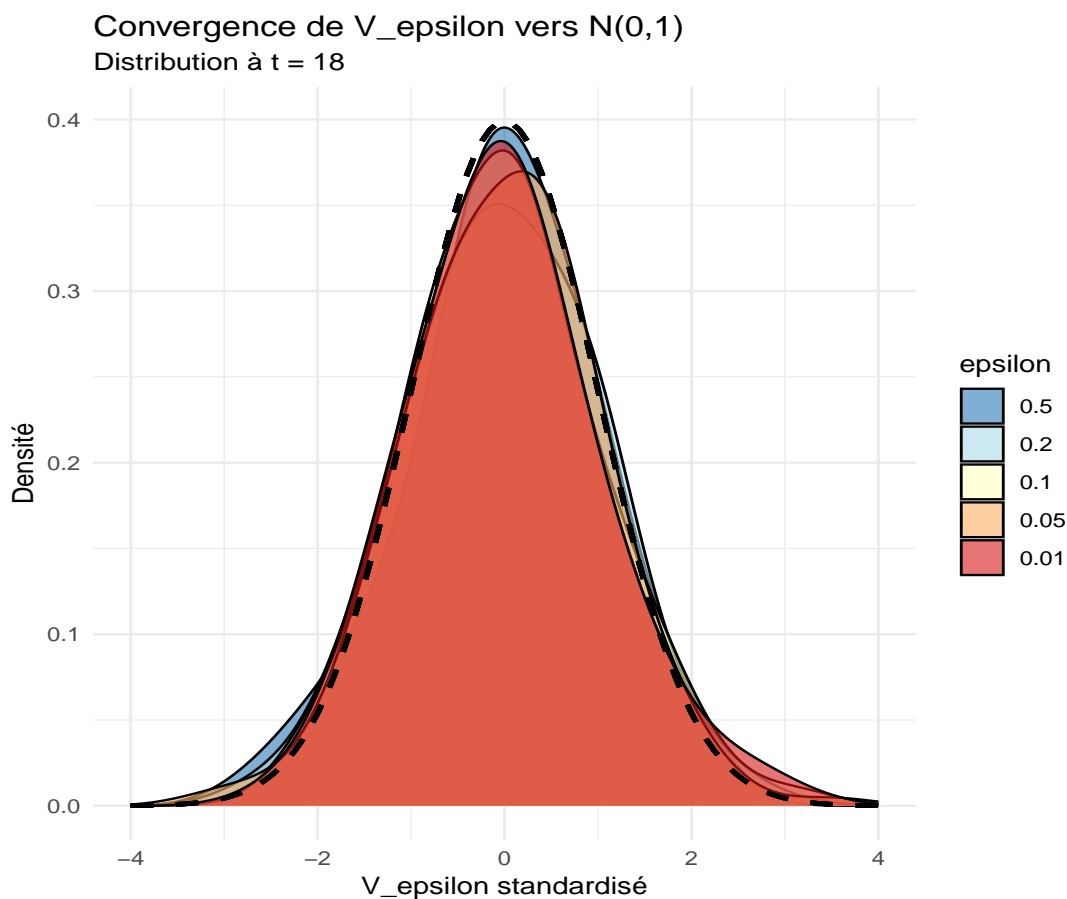


FIGURE 4.6 – Densités empiriques de V_ε (modèle logistique)

3. Interprétation du test de Kolmogorov–Smirnov : Le test de Kolmogorov–Smirnov compare la fonction de répartition empirique de la statistique normalisée V_ε^* à celle de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ sous l’hypothèse nulle de normalité. Pour toutes les valeurs de ε étudiées, les *p-values* sont supérieures au seuil de 0.05, de sorte qu’aucun test ne rejette H_0 . La statistique de Kolmogorov–Smirnov (KS), faible pour l’ensemble des cas, confirme l’adéquation à la loi normale. Ces résultats valident numériquement la convergence en loi de $V_\varepsilon^*(t)$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov pour la convergence				
<hr/>				
	ε	Statistique KS	p-value	Conclusion
<hr/>				
de V_ε vers $\mathcal{N}(0, 1)$	0.500	0.0584	0.5020	Non rejet de H_0
	0.200	0.0376	0.9397	Non rejet de H_0
	0.100	0.0568	0.5377	Non rejet de H_0
	0.050	0.0401	0.9054	Non rejet de H_0
	0.010	0.0549	0.5819	Non rejet de H_0
<hr/>				

Conclusion : Les simulations menées dans le cadre du modèle logistique confirment le comportement asymptotique attendu de la statistique V_ε . La convergence en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ se vérifie numériquement pour de différentes valeurs de ε . Les tests de Kolmogorov–Smirnov, dont toutes les p-values dépassent 0.5, attestent d’une excellente adéquation à la loi normale sur l’ensemble des niveaux de bruit étudiés.

4. Validation numérique de la convergence en loi de V_ε vers un pont Brownien : Dans le but d’illustrer numériquement la convergence en loi de la statistique $V_\varepsilon(t)$ vers un pont brownien $B(t)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, nous effectuons une comparaison entre les trajectoires simulées de $V_\varepsilon(t)$ pour deux valeurs différentes du bruit stochastique $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.01$, et des réalisations indépendantes d’un pont brownien défini sur le même intervalle temporel $[b, T]$.

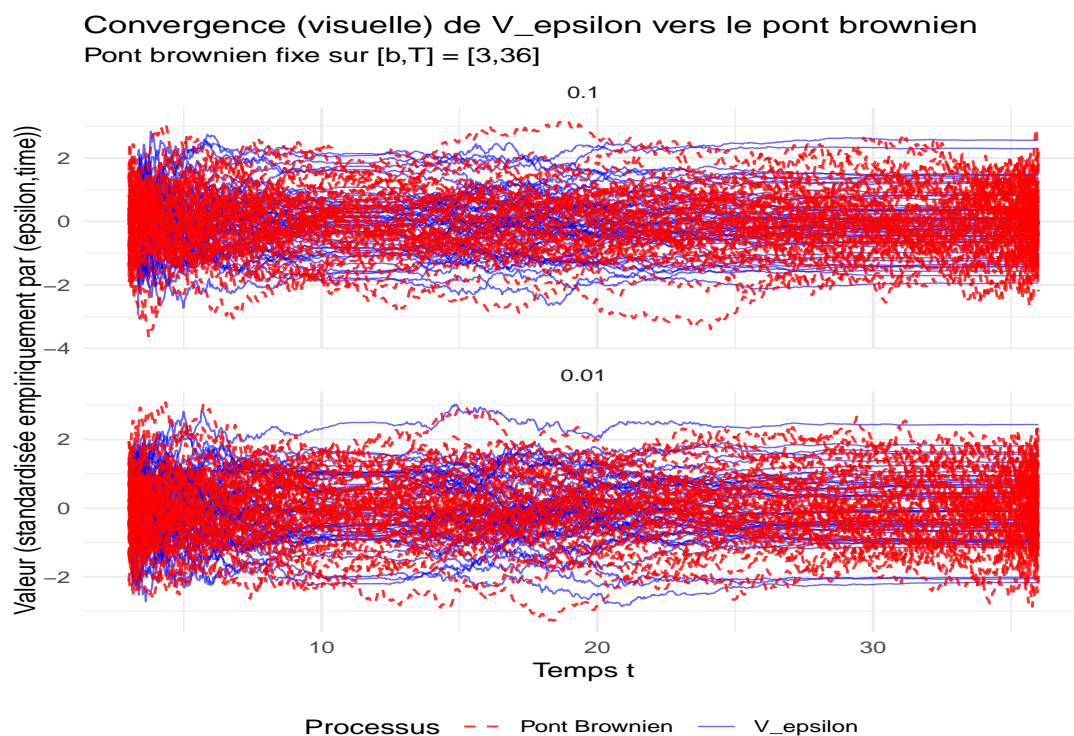


FIGURE 4.7 – Comparaison entre trajectoires de V_ϵ et du pont Brownien B (modèle logistique)

Conclusion : Les simulations confirment la convergence fonctionnelle de la statistique normalisée $V_\epsilon(t)$ vers un pont brownien sur $[b, T]$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Après renormalisation, les trajectoires obtenues de V_ϵ^* présentent un centrage autour de zéro, une amplitude de fluctuations comparable et une structure de variation indiscernable de celles du pont brownien limite. Cette adéquation visuelle et statistique constitue une validation numérique convaincante de la convergence en loi annoncée par la théorie.

Chapitre 5

Application en économie

Sommaire

5.1	Formulation déterministe du modèle sigmoïde	75
5.2	Extension stochastique et analyse des risques	76
5.3	Test d'ajustement pour le modèle stochastique avec retard	77
5.4	Simulations numériques	83
5.4.1	Analyse numérique du comportement des estimateurs	84
5.4.2	Comportement numérique de la statistique V_ε	86

En économie et en finance, les tests d'ajustement s'avèrent particulièrement utiles pour confronter les hypothèses issues de la modélisation mathématique à la réalité des marchés. Bien que le modèle logistique du Chapitre 4 trouve des applications bien établies en biologie, son utilisation s'étend également au domaine économique, notamment pour décrire des phénomènes tels que la croissance à long terme ou la diffusion d'innovations, voir kwasnicki [66] et Dimmick & Wang [24]. Néanmoins, de nombreuses dynamiques de marché présentent des transitions de régime plus complexes et des effets de seuil qui appellent une modélisation plus fine. Cette constatation motive l'introduction, d'un deuxième exemple d'application : une EDS à dérive sigmoïde. Ce cas généralisé permet de capturer des phénomènes de saturation progressive et de transition entre différents états économiques, offrant ainsi un terrain de validation particulièrement pertinent pour la théorie des tests développée au Chapitre 3.

5.1 Formulation déterministe du modèle sigmoïde

Le modèle à transition sigmoïde constitue un outil de modélisation déterministe particulièrement adapté aux dynamiques non linéaires présentant à la fois un mécanisme de croissance initiale, une phase d'accélération transitoire et une saturation finale. Contrairement au modèle logistique classique de Verhulst (1838) qui décrit une croissance auto-limitée en démographie [93], le modèle sigmoïde repose sur une fonction de transition à seuil, permettant de capturer des changements de régime dans des contextes économiques Marchetti [74] ou des dynamiques de de-

mande saturée sur des marchés matures. Dans son principe général, la dynamique déterministe d'un système à transition sigmoïde peut être décrite par l'EDO

$$\frac{dx_t}{dt} = r \varphi\left(\frac{x_t - X^*}{\kappa}\right), \quad t \in [0, T],$$

où

$$\varphi(u) := \frac{1}{1 + e^{-u}} \in [0, 1]$$

désigne la fonction sigmoïde standard bornée et de classe C^∞ . Cette fonction sera utilisée de manière récurrente dans ce chapitre.

Les paramètres du modèle possèdent une interprétation économique précise. Le coefficient $r > 0$ représente le taux maximal d'évolution, reflétant l'intensité intrinsèque du phénomène étudié, comme le taux d'adoption d'une innovation ou la vitesse d'ajustement d'une variable macroéconomique. Le seuil X^* désigne la valeur critique à partir de laquelle le régime de transition se déclenche ; il peut correspondre, selon le contexte, à un seuil technologique, un niveau de revenu ou encore une taille critique de marché. Le paramètre $\kappa > 0$ mesure la rapidité avec laquelle le système franchit cette zone de transition : plus il est faible, plus le passage d'un régime à un autre est abrupt (soudain).

La structure non linéaire de la dérive induit trois régimes dynamiques :

- **Régime sous-critique** ($x_t \ll X^*$) : $\varphi(\cdot) \approx 0$, le système évolue très lentement.
- **Régime critique** ($x_t \approx X^*$) : $\varphi(\cdot) \approx 0.5$, la dynamique atteint sa vitesse maximale.
- **Régime sur-critique** ($x_t \gg X^*$) : $\varphi(\cdot) \approx 1$, le système sature à son taux maximal.

5.2 Extension stochastique et analyse des risques

Le cas déterministe présenté précédemment permet de décrire une dynamique sigmoïde purement structurelle. Toutefois, dans la majorité des contextes économiques ou financiers, l'évolution d'un système n'est jamais entièrement prévisible : elle est soumise à des perturbations aléatoires, à des chocs d'origine externe et à une incertitude informationnelle. Afin de tenir compte de ces fluctuations, nous proposons une généralisation de modèle en introduisant une composante bruitée de nature brownienne. nous considérons ainsi le processus stochastique $X^\varepsilon = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ défini comme la solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = r \varphi\left(\frac{X_t - X^*}{\kappa}\right) dt + \varepsilon dW_t, & t \in [0, T], \\ X_s = x_0, & s \leq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard, et $\varepsilon \in (0, 1)$ mesure l'intensité du bruit. Ce modèle constitue une extension non linéaire du processus d'Ornstein–Uhlenbeck : contrairement au cas linéaire, où la réversion vers la moyenne est constante, la force de rappel dépend ici du niveau de X_t relativement au seuil X^* , et se trouve saturée dans les régimes extrêmes. Il s'agit ainsi d'un processus de diffusion à dérive sigmoïde bornée, typique des dynamiques de transition progressive en économie. De telles dynamiques stochastiques peut être utiliser dans plusieurs domaines de l'économie, notamment dans la modélisation de cycles macroéconomiques non linéaires à seuil aléatoire, dans les modèles de diffusion d'innovations intégrant une incertitude informationnelle, dans l'étude de dynamiques de prix ou de volatilité saturée sur des marchés fortement concentrés, ainsi que dans l'analyse de transitions lentes–rapides dans les modèles environnementaux, par exemple en économie du climat ou des ressources naturelles.

L'introduction du bruit modifie profondément la structure du système : la trajectoire n'est plus sigmoïde mais forme un "tube probabiliste" autour de la solution déterministe, les points de bascule deviennent aléatoires, et les risques de transition brutale peuvent être quantifiés. L'analyse asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ permettra alors d'établir un double résultat : la convergence de X^ε vers la solution déterministe en probabilité, et la caractérisation de la loi limite des fluctuations résiduelles, base des procédures de test étudiées dans la suite du chapitre.

5.3 Test d'ajustement pour le modèle stochastique avec retard

Pour déterminer la pertinence d'une spécification à mémoire dans la modélisation de ces systèmes économiques (5.1), nous proposons un test d'hypothèses visant à discriminer entre un modèle à dérive retardée et son homologue à dérive instantanée. L'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 spécifie une dynamique à mémoire, où la dérive dépend de l'état retardé $X_{t-\theta}$

$$\mathcal{H}_0 : \quad dX_t = r \varphi \left(\frac{X_{t-\theta} - X^*}{\kappa} \right) dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad -b \leq s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.2)$$

L'hypothèse alternative \mathcal{H}_1 correspond à une dynamique à ajustement immédiat

$$\mathcal{H}_1 : \quad dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

L'estimation du paramètre de retard dans ce type de modèle (5.2) s'inscrit dans le prolongement des travaux de Kutoyants [54]. Sous \mathcal{H}_0 , le paramètre de retard $\theta \in (a, b) \subset [0, T]$ caractérise le décalage temporel du système. Il représente le délai avec lequel les conditions antérieures influencent la dynamique présente. Le

modèle à dérive sigmoïde avec retard constitue ainsi un formalisme adapté pour l'étude de dynamiques non linéaires soumises à des perturbations stochastiques et à des effets de mémoire.

Notons que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution de l'EDS à dérive sigmoïde avec retard (5.2) converge uniformément par rapport à $\theta \in (a, b)$ vers la solution de l'EDO à retard correspondante

$$\begin{cases} dx_t = r \varphi\left(\frac{x_{t-\theta} - X^*}{\kappa}\right) dt, & \varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-u}}, u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_s = x_0, & -b \leq s \leq 0. \end{cases}$$

Nous montrons que l'EDS à dérive sigmoïde avec retard (5.3) appartient à la classe des processus couverts par le cas théorique du Chapitre 3, au sens où sa dérive satisfait la condition de régularité \mathcal{C} .

\mathcal{C} : La fonction $S(\cdot)$ est positive et deux fois continûment dérivable. De plus, sa dérivée $S'(\cdot)$ est positive, bornée et non nulle sur un sous-intervalle de $[x_b, x_T]$.

Nous vérifions la condition \mathcal{C} pour la fonction sigmoïde

$$S(x) = r \varphi\left(\frac{x - X^*}{\kappa}\right), \text{ avec } r > 0, \kappa > 0.$$

La fonction S est positive en vertu de l'encadrement $0 < \varphi(u) < 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. La régularité \mathcal{C}^∞ de φ implique celle de S , avec

$$S'(x) = \frac{r}{\kappa} \varphi\left(\frac{x - X^*}{\kappa}\right) \left[1 - \varphi\left(\frac{x - X^*}{\kappa}\right)\right].$$

En posant $v = \varphi\left(\frac{x - X^*}{\kappa}\right) \in (0, 1)$, la fonction $v \mapsto v(1 - v)$ atteint son maximum $1/4$ en $v = 1/2$, établissant ainsi la bornitude :

$$0 < S'(x) \leq \frac{r}{4\kappa} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

S' est donc positive sur tout \mathbb{R} , et en particulier sur tout sous-intervalle de $[x_b, x_T]$. Toute l'argumentation précédente permet de conclure que la condition \mathcal{C} posée dans le chapitre 3 section 3.3 est satisfaite par la fonction de dérive sous l'hypothèse nulle.

L'information de Fisher associée au processus (5.2) est strictement positive et la condition d'identifiabilité est satisfaite

$$I_b(\theta) = \frac{r^4}{\kappa^2} \int_b^T \varphi^2\left(\frac{x_{t-2\theta} - X^*}{\kappa}\right) \varphi^2\left(\frac{x_{t-\theta} - X^*}{\kappa}\right) \left(1 - \varphi\left(\frac{x_{t-\theta} - X^*}{\kappa}\right)\right)^2 dt > 0,$$

$$\forall \gamma > 0, \inf_{\theta_0 \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta_0| > \gamma} \int_b^T r^2 \left(\varphi\left(\frac{x_{t-\theta} - X^*}{\kappa}\right) - \varphi\left(\frac{x_{t-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right)\right)^2 dt > 0.$$

Le rapport de vraisemblance associé à l'EDS à dérive sigmoïde avec retard (5.2) est défini par

$$L(\theta; X^{\varepsilon,b}) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_b^T r \varphi \left(\frac{X_{t-\theta} - X^*}{\kappa} \right) dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_b^T r^2 \varphi^2 \left(\frac{X_{t-\theta} - X^*}{\kappa} \right) dt \right\}.$$

La démarche adoptée s'appuie sur la méthodologie de construction de tests développée au Chapitre 3. Nous nous concentrons à la restriction $X^{\varepsilon,b} = \{X_t\}_{t \in [b,T]}$ de la trajectoire observée X^ε . Cette application vise à construire un test d'ajustement appartenant à la classe \mathcal{K}_α des tests de niveau asymptotique $\alpha \in (0, 1)$ donnée :

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ \Psi_\varepsilon : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_\theta[\Psi_\varepsilon(X^{\varepsilon,b})] = \alpha \right\}.$$

Nous prouvons que le test obtenu est à distribution asymptotique libre (ADF) et consistant. Nous reformulons également dans ce cas particulier les résultats établis dans les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

Nous rappelons que sous \mathcal{H}_0 , la fonction score normalisée associée à l'EDS à dérive sigmoïde avec retard est définie pour $b \leq t \leq T$ par

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon,b}(t, \theta, X^{\varepsilon,b}) &= \frac{r^2}{\kappa \varepsilon I_b(\theta)^{1/2}} \int_b^t \varphi \left(\frac{X_{s-2\theta} - X^*}{\kappa} \right) \varphi \left(\frac{X_{s-\theta} - X^*}{\kappa} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \varphi \left(\frac{X_{s-\theta} - X^*}{\kappa} \right) \right) \left[dX_s - r \varphi \left(\frac{X_{s-\theta} - X^*}{\kappa} \right) ds \right]. \end{aligned}$$

Pour la construction du test d'ajustement, nous considérons deux estimateurs du paramètre de retard inconnu ; l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$ obtenu à partir de l'observation $X^{\varepsilon,b} = \{X_t\}_{t \in (b,T]}$ (3.6) et l'EDM $\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}$, construit à partir de l'observation de la portion de trajectoire $X^{\varepsilon,\nu_\varepsilon} = \{X_t\}_{b \leq t \leq \nu_\varepsilon}$, telle que $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$ (3.8).

Nous définissons la statistique $V_\varepsilon(t)$ à partir du processus $U_{\varepsilon,b}(t, \theta, X^{\varepsilon,b})$ moyennant les modifications adéquates explicitées dans le chapitre 3. Si t appartient à $[\nu_\varepsilon, T]$,

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \frac{r^2}{\kappa \varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi \left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) \varphi \left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \varphi \left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) \right) dX_s \\ &\quad - \frac{r^3}{\kappa \varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi \left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) \varphi \left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \varphi \left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) \right) \varphi \left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon,b}} - X^*}{\kappa} \right) ds \end{aligned} \tag{5.3}$$

Nous présentons ci-après le premier résultat de cette application, illustrant le théorème fondamental 3.3.1 du chapitre 3. Pour cela nous introduisons le seuil critique c_α défini au moyen du pont Brownien $B(s)_{\{0 \leq s \leq 1\}}$ par

$$\mathbf{P} \left(\int_0^1 B(s)^2 ds > c_\alpha \right) = \alpha. \quad \alpha \in (0, 1).$$

Nous définissons enfin la statistique de test pour $t \in [\nu_\varepsilon, T]$

$$\delta_\varepsilon = \frac{r^4}{\kappa^2 I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})} \int_{\nu_\varepsilon}^T V_\varepsilon(t)^2 \varphi\left(\frac{X_{t-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)^2 \varphi\left(\frac{X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{t-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right)^2 dt,$$

avec $\varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-u}}$, $u \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.3.1. *Le test $\psi_\varepsilon := \mathbf{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$, est à distribution asymptotique libre et appartient à la classe \mathcal{K}_α .*

Preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \frac{r^2}{\kappa I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi\left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right) dW_s \\ &\quad + \frac{r^3}{\kappa \varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi\left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right) \left[\varphi\left(\frac{X_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) - \varphi\left(\frac{X_{s-\hat{\theta}_{\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right] ds. \end{aligned}$$

Notons θ_0 la vraie valeur inconnue du paramètre de retard et considérons $\bar{\theta}$ un certain point intermédiaire entre θ_0 et $\hat{\theta}_{\varepsilon, b}$. Nous posons

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{r^2}{\kappa I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi\left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right) dW_s, \\ T_2 &= \frac{\hat{\theta}_{\varepsilon, b} - \theta_0}{\varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{-1/2}}, \\ T_3(t) &= \frac{r^4}{\kappa^2 I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi\left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{X_{s-\bar{\theta}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\quad \times \varphi\left(\frac{X_{s-2\bar{\theta}} - X^*}{\kappa}\right) \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right) \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\bar{\theta}} - X^*}{\kappa}\right)\right) ds. \end{aligned}$$

La statistique $V_\varepsilon(t)$ (4.10) définie pour $t \in [\nu_\varepsilon, T]$ s'écrit alors

$$V_\varepsilon(t) = T_1(t) - T_2 \times T_3(t).$$

Les résultats établis plus haut sur la convergence uniforme du processus (5.2) vers (5.3) ainsi que ceux du lemme 3.3.1 concernant la convergence de l'information, les propositions 3.3.2, 3.3.1 sur la consistance des estimateurs et la représentation asymptotique de l'EMV (3.7) , permettent de déduire les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
 T_1(t) &= \frac{r^2}{\kappa I_b(\theta_0)^{1/2}} \int_b^t \varphi\left(\frac{x_{s-2\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{x_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \\
 &\quad \times \left(1 - \varphi\left(\frac{x_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right)\right) dW_s + o(1), \\
 T_2 &= \frac{r^2}{\kappa I_b(\theta_0)^{1/2}} \int_b^T \varphi\left(\frac{x_{t-2\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{x_{t-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \\
 &\quad \times \left(1 - \varphi\left(\frac{x_{t-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right)\right) dW_t + o(1), \\
 T_3(t) &= \frac{r^4}{\kappa^2 I_b(\theta_0)} \int_b^t \varphi^2\left(\frac{x_{s-2\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \varphi^2\left(\frac{x_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \\
 &\quad \times \left(1 - \varphi\left(\frac{x_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right)\right)^2 ds + o(1).
 \end{aligned}$$

$o(1)$ désigne ici une fonction convergente vers 0 en probabilité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
Considérons alors le changement de variable $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \tau &:= \\
 &\frac{r^4}{\kappa^2 I_b(\theta_0)} \int_b^t \varphi^2\left(\frac{x_{s-2\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \varphi^2\left(\frac{x_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right) \left(1 - \varphi\left(\frac{x_{s-\theta_0} - X^*}{\kappa}\right)\right)^2 ds,
 \end{aligned}$$

Nous déduisons alors

$$V_\varepsilon(t) = T_1 - T_2 \times T_3 \implies B(\tau) := \mathcal{W}(\tau) - \tau \mathcal{W}(1).$$

Où $\mathcal{W}(\cdot)$ est un processus de Wiener standard, il s'en suit la convergence en loi de la statistique du test

$$\delta_\varepsilon \implies \delta := \int_0^1 B^2(\tau) d\tau.$$

Nous concluons que la loi limite est indépendante du processus observé et donc le test ψ_ε est ADF et appartient à la classe \mathcal{K}_α , en effet

$$\mathbf{E}_{\theta_0} \psi_\varepsilon(X^{\varepsilon,b}) = \mathbf{P}_{\theta_0}^\varepsilon(\delta_\varepsilon > c_\alpha) = \alpha + o(1).$$

□

Examinons maintenant la consistance du test. L'alternative non paramétrique s'écrit

$$\mathcal{H}_1 : \quad dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Et l'expression de la statistique $V_\varepsilon(t)$ devient

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \frac{r^2}{\kappa \varepsilon I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right) \\ &\quad \times \varphi\left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \left[B(X_s) - r\varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right] ds \\ &\quad + \frac{r^2}{\kappa I_b(\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b})^{1/2}} \int_{\nu_\varepsilon}^t \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) \left(1 - \varphi\left(\frac{X_{s-\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right)\right) \\ &\quad \times \varphi\left(\frac{X_{s-2\tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b}} - X^*}{\kappa}\right) dW_s. \end{aligned}$$

Sous \mathcal{H}_1 , nous considérons y_t la solution du problème limite

$$\frac{dy_t}{dt} = B(y_t), \quad y_s = x_0, \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Notons $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $y = \{y_t, 0 \leq t \leq T\}$ les solutions des problèmes limites associés respectivement aux hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

La mesure de probabilité induite par le processus (X_t) (sous \mathcal{H}_1) est notée \mathbf{P}_1^ε . Conformément aux résultats du chapitre 3, pour étudier la consistance des estimateurs sous l'alternative nous considérons les deux fonctions suivantes.

$$G(\theta, x, y) = \int_b^T \left[r^2 \varphi\left(\frac{x_t(\theta) - X^*}{\kappa}\right) - B(y_t) \right]^2 dt,$$

et pour $\gamma > 0$ et $\nu_\varepsilon = b + \sqrt{\varepsilon}$,

$$h(\gamma) := \inf_{|\theta - \theta^{**}| > \gamma} \left(\|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}^2 - \|y_t - x_t(\theta^{**})\|_{\nu_\varepsilon}^2 \right).$$

Nous établissons alors la convergence en probabilité des deux estimateurs

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_{\varepsilon, b} = \theta^* \quad \text{avec} \quad \theta^* := \arg \inf_{\theta \in \Theta} G(\theta, x, y),$$

et

$$\mathbf{P}_1^\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\theta}_{\nu_\varepsilon, b} = \theta^{**}, \quad \text{avec} \quad \theta^{**} := \arg \min_{\theta \in (a, b)} \|y_t - x_t(\theta)\|_{\nu_\varepsilon}.$$

Nous pouvons vérifier que :

$$\begin{aligned} &\frac{r^2}{\kappa} \int_b^t \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \left[1 - \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right)\right] \varphi\left(\frac{y_{s-2\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\quad \times \left[B(y_s) - r\varphi\left(\frac{y_{s-\theta^*} - X^*}{\kappa}\right)\right] ds > 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nous formulons à présent le second résultat de cette application, comme cas particulier du théorème 3.3.2.

Nous supposons que la fonction B satisfait également la condition \mathcal{C} :

\mathcal{C} : La fonction $B(\cdot)$ est positive et deux fois continûment dérivable. De plus, sa dérivée $B'(\cdot)$ est positive, bornée et non nulle sur un sous-intervalle de $[y_b, y_T]$.

Théorème 5.3.2. *Si la fonction $B(\cdot)$ dans \mathcal{H}_1 satisfait \mathcal{C} alors le test ψ_ε est consistant.*

Preuve. La statistique $V_\varepsilon(t)$ peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(t) &= \frac{r^2}{\kappa I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{y_{s-2\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\times \left[1 - \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right)\right] dW_s + o(1) + \frac{r^2}{\kappa \varepsilon I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \varphi\left(\frac{y_{s-2\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\times \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \left[1 - \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right)\right] \left[B(y_s) - r\varphi\left(\frac{y_{s-\theta^*} - X^*}{\kappa}\right)\right] ds \\ &\times (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Remarquons que le premier terme peut être exprimé au moyen d'un processus de Wiener $\mathcal{W}(\cdot)$

$$\begin{aligned} &\frac{r^2}{\kappa I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \left[1 - \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right)\right] \varphi\left(\frac{y_{s-2\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) dW_s = \\ &\times \mathcal{W}\left(\frac{r^4}{\kappa^2 I_b(\theta^{**})} \int_b^t \varphi^2\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \left[1 - \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right)\right]^2 \varphi^2\left(\frac{y_{s-2\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) ds\right). \end{aligned}$$

Ainsi c'est un processus Gaussien, donc borné en probabilité sur tout intervalle fini. D'autre part, de la condition

$$\begin{aligned} &\frac{r^2}{\kappa I_b(\theta^{**})^{1/2}} \int_b^t \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \left[1 - \varphi\left(\frac{y_{s-\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right)\right] \varphi\left(\frac{y_{s-2\theta^{**}} - X^*}{\kappa}\right) \\ &\times \left[B(y_s) - r\varphi\left(\frac{y_{s-\theta^*} - X^*}{\kappa}\right)\right] ds > 0, \end{aligned}$$

nous déduisons que le deuxième terme de $V_\varepsilon(t)$ tend vers ∞ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ces arguments assurent la consistance du test. \square

5.4 Simulations numériques

Cette étude numérique valide le Théorème 5.3.1 en illustrant la propriété de test à distribution asymptotique libre. L'objectif principal est de vérifier numériquement la convergence en loi de la statistique V_ε vers un pont brownien quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous suivons une démarche de simulation similaire à celle du chapitre 4 : nous simulons des trajectoires de l'EDS avec retard sous différentes intensités de

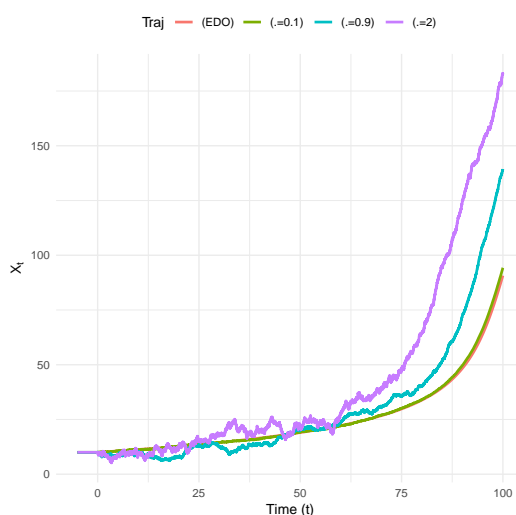
bruit ε , nous étudions le profil de vraisemblance pour localiser l'estimateur du maximum de vraisemblance, et nous analysons le comportement de la statistique V_ε . La validation finale repose sur un test de Kolmogorov–Smirnov pour confirmer l'adéquation de sa loi limite.

5.4.1 Analyse numérique du comportement des estimateurs

1. Simulation des trajectoires : Les simulations sont réalisées à l'aide du langage R, en utilisant principalement les bibliothèques `purrr` et `ggplot2` pour la génération et la visualisation des trajectoires. La dynamique du modèle étudié repose sur une dérive sigmoïde à retard, de la forme

$$S(x_{t-\theta}) = r \varphi\left(\frac{x_{t-\theta} - X^*}{k}\right), \quad \text{où } \varphi(u) = \frac{1}{1 + e^{-u}}.$$

Le schéma d'Euler a été utilisé pour discrétiser l'EDS avec retard (5.2) et l'EDO (5.3) avec un pas de temps $h = 0.001$ sur l'intervalle $[0, T]$.



Paramètres :

- Horizon temporel : $T = 100$.
- Pas de temps : $h = 0.001$.
- Condition initiale : $x_0 = 10$.
- Retard : $\theta = 2.9$.
- Taux de croissance : $r = 7$.
- Paramètre d'échelle $\kappa = 10$.
- Seuil de transition : $X^* = 50$.
- $\varepsilon \in \{0.1, 0.9, 2\}$.

FIGURE 5.1 – Trajectoires stochastiques et déterministes du modèle à dérive sigmoïde

Conclusion : Les simulations confirment la convergence de l'EDS avec retard vers l'EDO à retard lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La réduction des fluctuations autour de la trajectoire déterministe et la stabilisation du processus stochastique valident le comportement asymptotique attendu.

2. Comportement de l'EMV du paramètre de retard : L'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$ maximise la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b})$ sur l'intervalle $[a, b]$, qui s'explique pour la dérive sigmoïde sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b}) &= \log L(\theta; X^{\varepsilon,b}) \\ &= \frac{r}{\varepsilon^2} \int_b^T \varphi\left(\frac{X_{t-\theta}-X^*}{\kappa}\right) \left[r \varphi\left(\frac{X_{t-\theta_0}-X^*}{\kappa}\right) dt + \varepsilon dW_t \right] \\ &\quad - \frac{r^2}{2\varepsilon^2} \int_b^T \varphi^2\left(\frac{X_{t-\theta}-X^*}{\kappa}\right) dt \\ &= \frac{r^2}{\varepsilon^2} \int_b^T \left(\varphi\left(\frac{X_{t-\theta}-X^*}{\kappa}\right) \varphi\left(\frac{X_{t-\theta_0}-X^*}{\kappa}\right) - \frac{1}{2} \varphi^2\left(\frac{X_{t-\theta}-X^*}{\kappa}\right) \right) dt \\ &\quad + \frac{r}{\varepsilon} \int_b^T \varphi\left(\frac{X_{t-\theta}-X^*}{\kappa}\right) dW_t. \end{aligned}$$

Nous considérons les paramètres : $T = 100$, $h = 0.001$, $a = 1$, $b = 5$, $x_0 = 10$, $\theta_0 = 3$, $r = 7$, $\kappa = 10$ et $X^* = 50$.

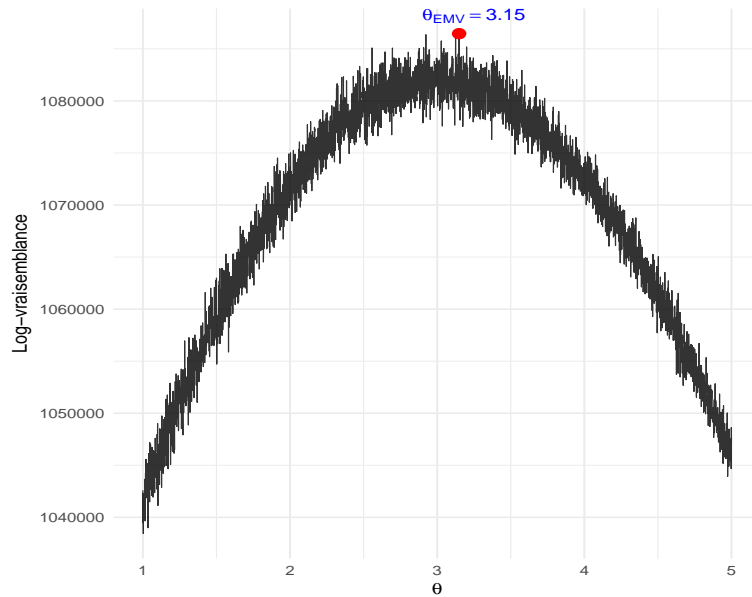


FIGURE 5.2 – Log-vraisemblance $\mathcal{L}(\theta; X^{\varepsilon,b})$ en fonction du retard θ (modèle à dérive sigmoïde)

Conclusion : L'analyse du profil de vraisemblance révèle un maximum net atteint en $\hat{\theta}_{\varepsilon,b} = 3.15$, confirmant la proximité avec la valeur vraie $\theta_0 = 3$.

Pour étudier le comportement de l'EMV $\hat{\theta}_{\varepsilon,b}$, nous procédons à son analyse numérique pour différentes valeurs de $\varepsilon \in (0, 1)$. Les paramètres utilisés sont : $T = 100$, $h = 0.001$, $a = 1$, $b = 5$, $x_0 = 10$, $\theta_0 = 3$, $r = 7$, $\kappa = 10$ et $X^* = 50$.

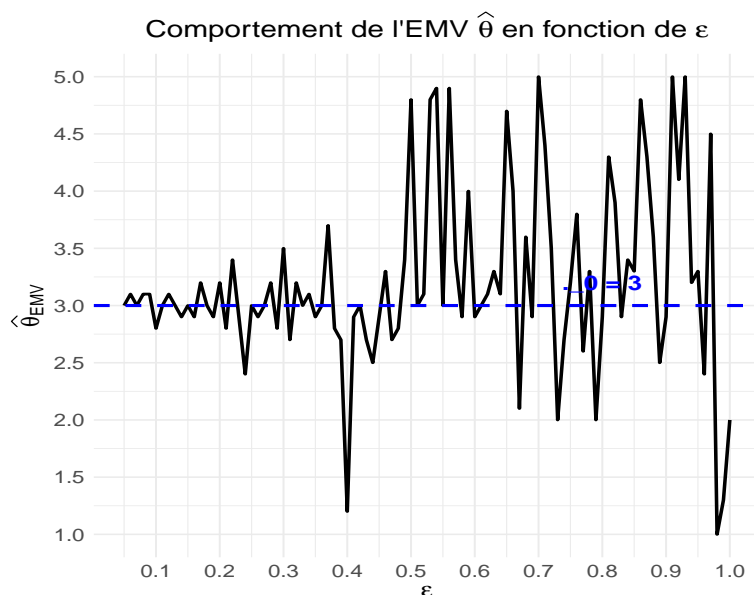


FIGURE 5.3 – Comportement de l'EMV (modèle à dérive sigmoïde).

Conclusion : La simulation valide la consistance de l'EMV, avec une variance réduite autour de $\theta_0 = 3$ pour les petits ε , confirmant sa convergence.

5.4.2 Comportement numérique de la statistique V_ε

Nous conservons les mêmes paramètres pour les simulations suivantes : $T = 50$, $h = 0.001$, $x_0 = 10$, $a = 2$, $b = 4$, $\theta_0 = 3$, $r = 7$ et $K = 80$

1. Simulation des trajectoires de $V_\varepsilon(t)$: Les graphes ci-dessous illustrent l'évolution de la statistique $V_\varepsilon(t)$ pour trois valeurs distinctes de ε .

Le tableau adjacent, issu de la console d'exécution **R**, présente les estimateurs numériques obtenus pour différentes valeurs de ε :

Résultats numériques issus de la console d'exécution

ε	θ_{EMV}	θ_{EDM}	$\bar{\theta}$	ν_ε
0.01	3.00	2.9697	3	4.1000
0.05	2.77	2.9744	3	4.2236
0.10	2.94	3.0540	3	4.3162

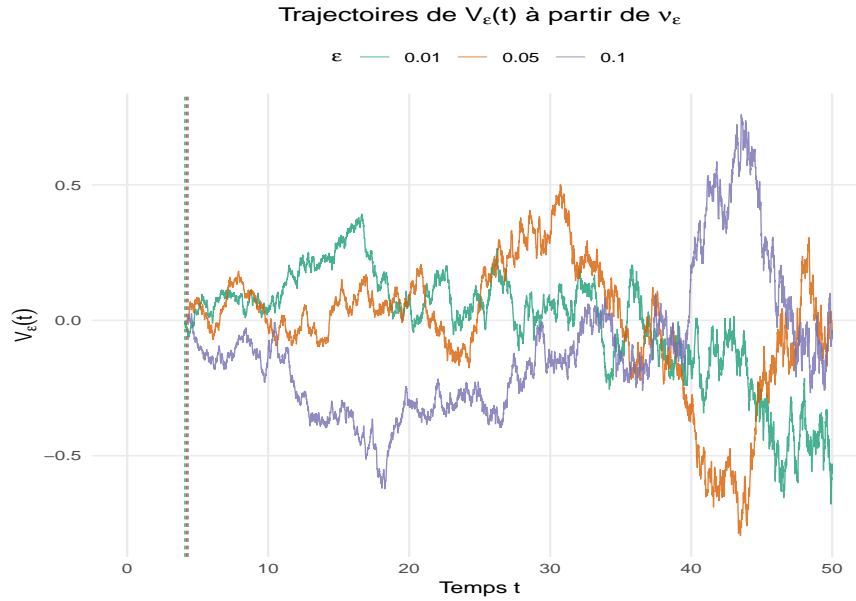


FIGURE 5.4 – Trajectoires de V_ε pour différentes valeurs de ε (modèle à dérive sigmoïde)

2. Analyse numérique de la statistique limite V : Afin de rendre les trajectoires de la statistique $V(t)$ et du pont Brownien $B(t)$ comparables, il est nécessaire de procéder à une normalisation du pont Brownien $B(t)$. En effet, si $B(t)$ désigne un pont Brownien défini sur l'intervalle $[b, T]$, sa variance est donnée par

$$\text{Var}[B(t)] = \frac{(t-b)(T-t)}{T-b}, \quad t \in [b, T].$$

On constate que cette variance est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $T-b$. Ainsi, en divisant $B(t)$ par son écart-type caractéristique $\sqrt{T-b}$, on ramène ses fluctuations à une variance de l'ordre de 1.

En effet : Par définition

$$B(t) = W(t) - W(b) - \frac{t-b}{T-b} (W(T) - W(b)), \quad t \in [b, T],$$

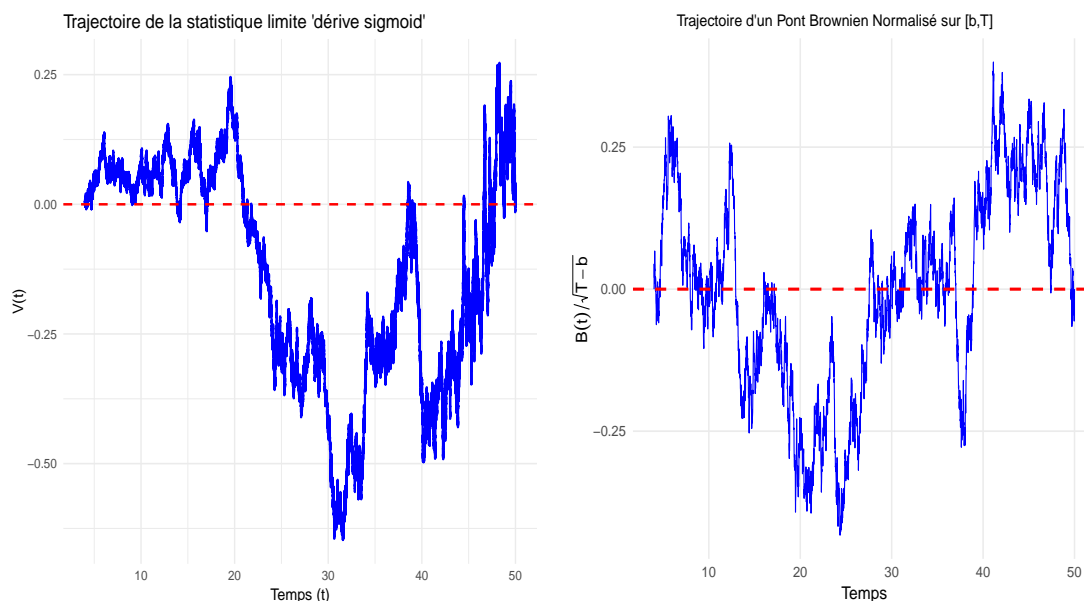
où W est un mouvement brownien standard. Nous posons :

$$U := W(t) - W(b), \quad V := W(T) - W(b),$$

avec $\text{Var}(U) = t-b$, $\text{Var}(V) = T-b$ et $\text{Cov}(U, V) = t-b$, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \text{Var}[B(t)] &= \text{Var}(U) + \left(\frac{t-b}{T-b}\right)^2 \text{Var}(V) - 2\frac{t-b}{T-b} \text{Cov}(U, V) \\ &= \frac{(t-b)(T-t)}{T-b}. \end{aligned}$$

Ainsi, on constate que cette variance s'annule en $t=b$ et $t=T$, et qu'elle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $T-b$.



(a) Trajectoire de la statistique limite

(b) Trajectoire du pont Brownien.

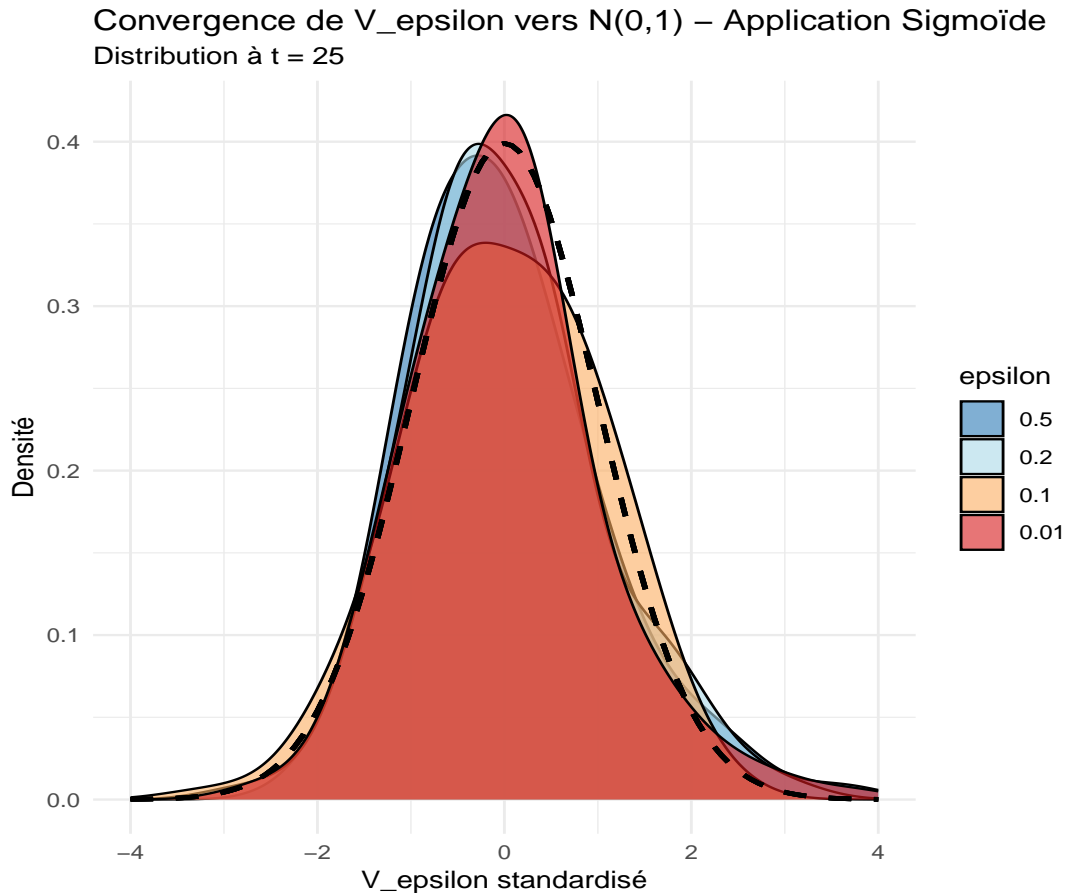
FIGURE 5.5 – Comparaison entre trajectoires de $V(t)$ et de $B(t)$ (modèle à dérive sigmoïde)

Conclusion : La comparaison des deux graphes montre des fluctuations similaires qui s'annulent en b et T bornes de l'intervalle. Cela confirme que la statistique limite hérite des propriétés du pont Brownien. et illustre la convergence théorique.

3. Validation numérique de la convergence en loi de V_ε : L'objectif est d'illustrer, pour un temps fixé $t = T/2$, la convergence en loi de la statistique normalisée

$$V_\varepsilon^*(t) = \frac{V_\varepsilon(t) - \mathbf{E}[V_\varepsilon(t)]}{\sqrt{\text{Var}(V_\varepsilon(t))}}$$

vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans le cadre d'un modèle sigmoïde à retard perturbé par un bruit faible. La convergence gaussienne est vérifiée à l'aide des densités empiriques et du test de Kolmogorov-Smirnov.

FIGURE 5.6 – Densités empiriques de V_ϵ (modèle sigmoïde)

Interprétation du test de Kolmogorov–Smirnov : Le test de Kolmogorov–Smirnov évalue l'écart entre la fonction de répartition empirique de la statistique normalisée V_ϵ^* et celle de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous l'hypothèse de normalité. Pour toutes les valeurs de ϵ considérées, les p -values demeurent supérieures au seuil de 0.05, et la statistique KS reste faible, indiquant l'absence de rejet de H_0 . Ces résultats confirment numériquement, dans le cadre du modèle sigmoïde à retard perturbé par un bruit faible, la convergence en loi de $V_\epsilon^*(t)$ vers une loi normale centrée réduite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov pour la convergence				
	ϵ	Statistique KS	p-value	Conclusion
de V_ϵ vers $\mathcal{N}(0,1)$	0.500	0.0747	0.2144	Non rejet de H_0
	0.200	0.0631	0.4036	Non rejet de H_0
	0.100	0.0503	0.6932	Non rejet de H_0
	0.010	0.0721	0.2488	Non rejet de H_0

Conclusion : Les simulations confirment que la statistique V_ϵ suit déjà, pour

des valeurs finies de ε , le comportement asymptotique prédit par la théorie : une convergence en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Les tests de Kolmogorov–Smirnov, dont toutes les p-values dépassent 0.21, valident nettement l'adéquation à la loi normale.

4. Illustration numérique de la convergence en loi de V_ε vers un pont Brownien B : L'objectif de cette étude numérique est d'illustrer la convergence fonctionnelle de la statistique normalisée $V_\varepsilon(t)$ vers un pont brownien lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Plusieurs trajectoires sont générées pour deux différentes valeurs de ε , puis comparées à des réalisations indépendantes d'un pont brownien simulé sur le même intervalle de temps. Afin de rendre la comparaison visuelle pertinente, les trajectoires sont standardisées empiriquement en chaque temps $V_\varepsilon^*(t)$ ce qui permet d'évaluer la compatibilité entre les fluctuations de $V_\varepsilon(t)$ et celles du processus limite théorique.

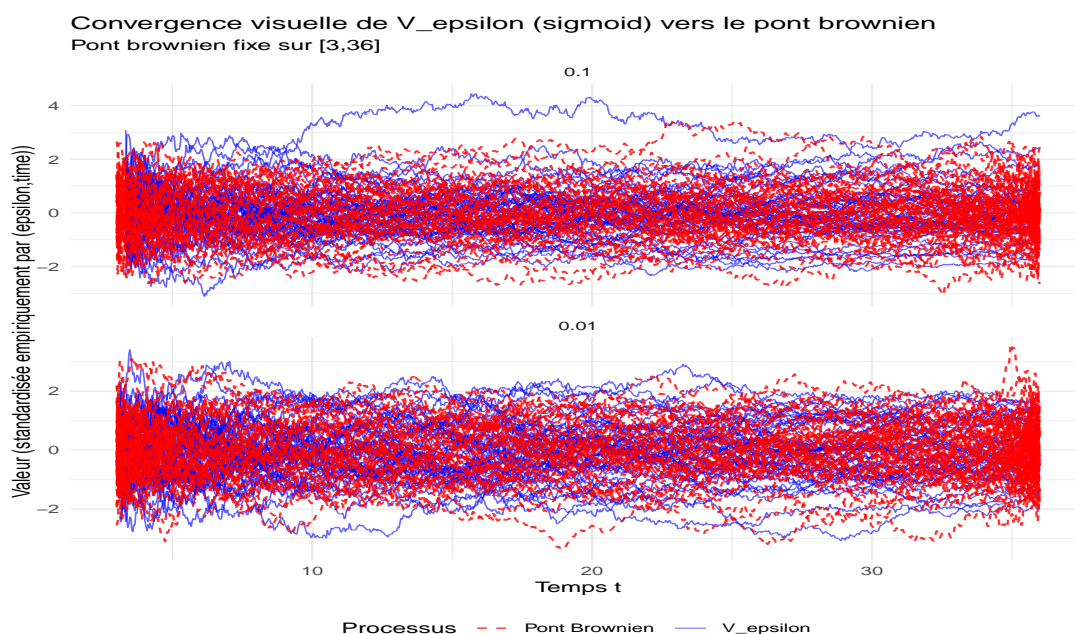


FIGURE 5.7 – Comparaison entre trajectoires de V_ε et du pont Brownien B (modèle sigmoïde)

Conclusion : Les résultats obtenus montrent une forte proximité qualitative entre les trajectoires normalisées de $V_\varepsilon(t)$ et celles du pont brownien, confirmant numériquement la convergence fonctionnelle annoncée par la théorie. Les trajectoires des deux processus présentent un centrage autour de zéro, une amplitude de fluctuations comparable, ainsi qu'une structure de variation similaire.

Conclusion générale

Ce travail établit une théorie asymptotique complète pour la construction d'un test d'ajustement à distribution asymptotique libre (ADF) dans le cadre des processus de diffusion perturbés par un bruit de faible intensité. Nous avons considéré un processus de type diffusion solution d'une équation différentielle stochastique à retard $\theta \in [a, b] \subset [0, T]$, en formulant le problème d'ajustement comme une procédure de test d'hypothèses paramétrique opposant une hypothèse nulle à dérive retardée à des alternatives non retardées. Pour contourner la non-différentiabilité de la dérive par rapport au paramètre de retard θ , nous avons introduit le processus de fonction score dans l'espace $L^2_{[0, T]}$ et construit une statistique de test de type Cramér–von Mises en considérant une restriction de l'observation complète sur $[b, T]$, s'appuyant sur une double estimation complémentaire : l'estimateur du maximum de vraisemblance pour l'efficacité asymptotique et l'estimateur de distance minimale pour la consistance locale du terme anticipatif, étant construits à partir de deux parties disjointes de la restriction considérée. Dans le régime de petit bruit $\varepsilon \rightarrow 0$, nous avons démontré la convergence de l'EDM vers la vraie valeur inconnue du retard, établi la consistance et la normalité asymptotique de l'EMV, et prouvé la convergence faible de la statistique de test vers une fonctionnelle de pont brownien, garantissant ainsi un test ADF. Nous avons également montré que le test est consistant contre toute alternative fixe. Les applications aux modèles logistique tronqué en biologie et sigmoïde en économie, validées par des simulations numériques, ont confirmé la portée théorique et les performances empiriques de notre approche. Les perspectives incluent l'extension aux retards multidimensionnels et l'étude du comportement en contexte ergodique, où les propriétés asymptotiques diffèrent profondément de celles considérées ici.

Bibliographie

- [1] Anderson.T.W and D.A. Darling. 1952. Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes. *The Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 23 (2), pp 193-212.
- [2] Apoyan G.T., 1986. Parameter estimation of non differentiable trend coefficient. *Uchen. Zap. Erevan Univ*. Vol. 1, pp 33-62. (in Russian).
- [3] Babu.G.J and C.R. Rao. 2004. Goodness-of-fit Tests When Parameters are Estimated. *The Indian Journal of Statistics*. Vol. 66 (1), pp 63-74.
- [4] Bacaër, N. 2008. Verhulst et l'équation logistique en dynamique des populations. *hal.science*. pp.24-26.
- [5] Balaska. L and M. Korso Feciane. 2025. On goodness of fit testing for a diffusion type process with a delay parameter. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. Vol. 54 (17),pp 5654–5672.
- [6] Bosq, D. et J.-P. Lecoutre. 1987. Théorie de l'estimation fonctionnelle. *Collection Économie et Statistiques Avancées*. Economica, Paris.
- [7] Bosq, D. 1997. Parametric rates of nonparametric estimators and predictors for continuous time processes. *Ann. Statist.*, 25(3), 982–1000.
- [8] Bosq, D. 2012. Nonparametric Statistics for Stochastic Processes : Estimation and Prediction. *Springer Series in Statistics*. Springer, Berlin.
- [9] Cramér, H. 1928. On the composition of elementary errors. *II Skand. Aktuarietids*. Vol. 11, pp 141-180.
- [10] Cramér, H. 1999. Mathematical methods of statistics. *Princeton university press*. Vol. 43.
- [11] Dabye, A.S. 2013. On the Cramér–von Mises test with parametric hypothesis for Poisson processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes.*, Vol. 16(1),pp 1-13.
- [12] Dabye, A.S., Yu.A. Kutoyants, and E.D. Tanguiep. 2013. On APF Test for Poisson Process with Shift and Scale Parameters. *Statist. Probab. Lett.*, Vol.145, pp 28-36
- [13] Dachian, S. and Yu. A. Kutoyants. 2003. On cusp estimation of ergodic diffusion process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 117, pp. 153–166. :contentReference[oaicite :0]index=0

- [14] Dachian, S. and Yu.A. Kutoyants. 2008 .On the Goodness-of-Fit Tests for Some Continuous Time Processes. *Stat Models for Bio.- Tech. Systems. F.Vonta et al. (Eds), Boston.* , pp 385-403.
- [15] Dachian, S., Yu.A. Kutoyants, and X. Yang. 2016. On hypothesis testing problems for inhomogeneous Poisson processes : regular case. *Communications in Statistics- Theory and Methods.*, Vol. 45(23), pp 6816-6832.
- [16] Dachian, S., Yu.A. Kutoyants, and X. Yang. 2016. On Hypothesis Testing for Poisson Processes : Singular Cases. *Communications in Statistics- Theory and Methods.*, Vol 45(23), pp 6833-6859.
- [17] Dalalyan, A. S. and Yu. A. Kutoyants. 2002. Asymptotically efficient trend coefficient estimation for ergodic diffusion. *Mathematical Methods of Statistics*, Vol. 11 (4), pp. 402-427.
- [18] Dalalyan, A. S. and Yu. A. Kutoyants. 2003. Asymptotically efficient estimation of the derivative of the invariant density. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Vol. 6 (1), pp. 89-107.
- [19] Darling, D.A. 1955. The Cramér–Smirnov Test in the Parametric Case. *Ann. Math. Statist.*, Vol.26, pp 1–20.
- [20] Darling, D.A. 1957. The Kolmogorov-Smirnov, Cramér–von Mises Tests. *Ann. Math. Statist.*, Vol. 28(4), pp 823-838.
- [21] Delgado, M.A., J. Hidalgo. and C. Velasco. 2005. Distribution free goodness-of-fit tests for linear processes. *Ann.Statist.* , Vol.33(6), pp 2568-2609.
- [22] Deng, S., C. Fei., W.Fei and X. Mao. 2021. The truncated EM method for stochastic differential delay equations with variable delay. *Elsevier.*.
- [23] Dette, H. and B. Hetzler. 2009. Khmaladze transformation of integrated variance processes with applications to goodness-of-fit testing. *Mathematical Methods of Statistics.*, Vol.18, pp 97-116.
- [24] Dimmick, J., and T. Wang. 2005. Toward an Economic Theory of Media Diffusion Based on the Parameters of the Logistic Growth Equation. *Journal of Media Economics.*, Vol.18, pp 233-246.
- [25] Doob, J. L., 1953. Stochastic Processes. *John Wiley & Sons, New York.* (Réédité par Wiley Classics Library).
- [26] Durbin, J. 1973. Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function. *conference series in Applied mathematics, No.9. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.*.
- [27] Fournié, E. 1992. Un test de type Kolmogorov-Smirnov pour processus de diffusions ergodiques. *INRIA, Sophia-Antipolis.* Rapport de Recherche, 1696 pp.

- [28] Gasseem, A. 2010. Goodness-of-fit test for switching diffusion. *Statistical Inference for Stochastic Processes.*, Vol.13, pp 97-123.
- [29] Greenwood, P. E., and M. Nikulin. 1996. A Guide to Chi-Squared Testing. *John Wiley and Sons, New York.*
- [30] Hàjek, J. 1972. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. *6-th Proc Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.*, Vol. 1, pp. 175-194.
- [31] Hamdous, S. 2010. Étude des systèmes d'équations stochastiques de la dynamique des populations avec diffusion spatiale., These PhD. *Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU.*
- [32] Hoel, P. G., Port, S. C., & Stone, C. J., 1972. Introduction to Stochastic Processes. *Houghton Mifflin, Boston.*
- [33] Iacus, S. M. 2000. Semiparametric Estimation of the State of a Dynamical System with Small Noise. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Vol. 3 (3), pp. 277–288.
- [34] Iacus, S. M. 2001. Semiparametric estimation of a functional of the drift coefficient for a non-homogeneous dynamical system with small noise. *Journal of Nonparametric Statistics*, Vol. 13 (1), pp. 129–151.
- [35] Iacus, S., and Yu.A. Kutoyants. 2001. Semiparametric Hypotheses Testing for Dynamical Systems with Small Noise. *Math. Methods Statist.*, Vol 10(1), pp 105–120.
- [36] Ibragimov, I. A. and R. Z. Khasminskii. 1981. Statistical Estimation : Asymptotic Theory. *Springer-Verlag. Applications of Mathematics*, Vol 16.
- [37] Kara-Terki, N., and T. Mourid. 2016. On local asymptotic normality for functional autoregressive processes. *Journal of Multivariate Analysis.*, Vol. 148, pp 120-140.
- [38] Karatzas, I., and S.E. Shreve, 1991. Brownian Motion and Stochastic Calculus. *Springer* (2nd ed.).
- [39] Kleptsyna, M., and Yu. A. Kutoyants. 2014. On asymptotically distribution free tests with parametric hypothesis for ergodic diffusion processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, Vol. 17(3), pp 295-319.
- [40] Kolmogorov, A. N. 1933. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giorn Dell'inst Ital Degli Att.*, Vol. 4, pp 89-91.
- [41] Korso Feciane, M. 2010. Sur l'estimation des retards multiples dans une diffusion non linéaire. *Annales de l'ISUP.*, Vol.3, pp 41-66.
- [42] Korso Feciane, M. 2010. Estimation dans un processus de diffusion non linéaire à retards et tests. These PhD. *Université Abou-Bekr Belkaid, Tlemcen.*

- [43] K uchler, U., and A. Kutoyants Yu. 2000. Delay estimation for some stationary diffusion-type processes. *Scandinavian Journal of Statistics.*, Vol.27(3), pp 405-414.
- [44] Kutoyants, Y. A., 1975. Local asymptotic normality for processes of diffusion type. *Izv.Akad.Nauk Arm.SSR, Matematika.*, Vol.10, pp103-112 (in Russian).
- [45] Kutoyants, Y. A., 1975. Local Asymptotic Normality for Stochastic Processes and its Applications in Statistics. Dissertation(PhD). *Moscow Phys-Techn. Inst.*,(in Russian).
- [46] Kutoyants, Y. A., 1977. Estimation of the trend parameter of a diffusion process. *Theory Prob.Appl.*, Vol.22, pp 399-405.
- [47] Kutoyants, Y. A., 1978. Estimation of parameter of a diffusion type process. *Theory Prob.Appl.*, Vol.23, pp 641-649.
- [48] Kutoyants, Y. A., 1979. Parameter estimation of intensity of inhomogeneous Poisson processes. *Problems of Control and Information Theory.*, Vol.8, pp 137-149.
- [49] Kutoyants, Y. A., 1984. Parameter Estimation for Stochastic Processes. *Heldermann, Berlin*, 206 p.
- [50] Kutoyants, Y. A., 1984. Parameter estimation for diffusion type processes of observations. *Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. Statistics.*, Vol. 15(4), pp 541-551.
- [51] Kutoyants, Y. A., 1984. On nonparametric estimation of intensity function of inhomogeneous Poisson process. *Problems of Control and Information Theory.*, Vol. 13(4), pp 253-258.
- [52] Kutoyants, Yu. A. 1985. On nonparametric estimation of the trend coefficient of the diffusion process. *Statistics and Control of Stochastic Processes (Steklov Seminar 1984)*, Optimization Software, New York, pp. 230-250.
- [53] Kutoyants, Y. A., 1991. Minimum distance parameter estimation for diffusion type observations. *C.R.Acad.Paris.*, Vol. 312, s er I, pp 637-642.
- [54] Kutoyants, Y. A., T. Mourid, and D. Bosq. 1992. Estimation param etrique d'un processus de diffusion avec retards. *Annales de l'IHP.*, Vol. 28(1), pp 95-106.
- [55] Kutoyants, Y. A., 1994. Identification of Dynamical Systems with Small Noise. *Springer Science   Business Media.*, 298 p.
- [56] Kutoyants, Y. A., and T. Mourid. 1994. Estimation par la Distance Minimale pour un Processus de Type Diffusion avec Retards. *Annales de l'ISUP.*, XXXVIII (2), pp.3-18.

- [57] Kutoyants, Y. A., 1997. Some problems of nonparametric estimation by observations of ergodic diffusion process. *Statistics and Probability Letters.*, Vol.32, pp 311–320.
- [58] Kutoyants, Y. A., 2004. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. *Springer Series in Statistics.*, 496 p.
- [59] Kutoyants, Y. A., 2010. On the goodness-of-fit testing for ergodic diffusion processes. *Journal of Nonparametric Statistics.*, Vol. 22(4), pp 529-543.
- [60] Kutoyants, Y. A., 2011. Goodness-of-fit tests for perturbed dynamical systems. *Journal of Statistical Planning and Inference.*, Vol. 141(5), pp 1655-1666.
- [61] Kutoyants, Y.A. 2014. On asymptotic distribution of parameter free tests for ergodic diffusion processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, Vol.17, pp 139–161.
- [62] Kutoyants, Y.A. 2014. On ADF goodness-of-fit tests for stochastic processes. *New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis. J. R. Bozeman, V. Girardin, and C. H. Skiadas (Ed's).*, pp 3–18.
- [63] Kutoyants, Y.A. 2015. On ADF goodness-of-fit tests for perturbed dynamical systems. *Bernoulli.*, Vol. 21(4), pp 2430-2456.
- [64] Kutoyants, Yu.A. 2016. On score-function processes and goodness of fit tests for stochastic processes. *Math. Meth. Stat.*, Vol.25, pp 99–120.
- [65] Kutoyants, Y. A., 2023. Introduction to the Statistics of Poisson Processes and Applications. *Springer, Cham.*, 666 p.
- [66] kwasnicki, W. 2013. Logistic Growth of the Global Economy and Competitiveness of Nations. *Technological Forecasting and Social Change.*, Vol.80(1), pp 50–76.
- [67] Lehmann, E.L., and J.P.Romano. 2005. Testing Statistical Hypotheses. *Springer, New York.*, 3rd ed.
- [68] Leigh, A.R. 2015. Distribution free testing of goodness of fit in a one dimensional parameter space. *Statistics and Probability Letters.*, Vol. 99, pp 215–222.
- [69] Liptser, R. S., & Shiryaev, A. N., 2001. Statistics of Random Processes (2nd ed.). *Springer-Verlag, Berlin*, 2 vol., 757 p.
- [70] Mao, X., G. Marion., and E. Renshaw. 2002. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stochastic Processes and their Applications.*, Vol. 97(1), pp 95–110.
- [71] Mao, X., C. Yuan, and J. Zou. 2005. Stochastic differential delay equations of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 304(1), pp 296–320.

- [72] Mao, X. 2007. Stochastic Differential Equations and Applications (2nd ed.). *Horwood*, 411 p.
- [73] Mao, X. 2015. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.290, pp 370–384.
- [74] Marchetti, C. 1980. Society as a Learning System : Discovery, Invention, and Innovation Cycles Revisited. *Technological Forecasting and Social Change*, Vol. 18(3), pp 276–282.
- [75] Masuda, H., I.Negri., and Y.Nishiyama. 2011. Goodness-of-fit test for ergodic diffusions by discrete-time observations : An innovation martingale approach. *Journal of Nonparametric Statistics.*, Vol. 23(2), pp 237–254.
- [76] McKean, H. P. 1969. Stochastic Integrals. *Academic Press*.
- [77] Millar, P.W. 1983. The minimax principle in asymptotic statistical theory. *Springer, Berlin / Heidelberg. Lecture Notes in Math.*, Vol. 976, pp 75-265.
- [78] Millar, P.W. 1984. A general approach to the optimality of minimum distance estimators. *Transactions of the American Mathematical Society.*, Vol. 286(1), pp 377-418.
- [79] Mourid,T., and W.Benyahia 2011. Estimation de la densité des retards dans un processus de type diffusion. *Annales de l'ISUP.*, Vol. 55, pp 43-64.
- [80] Murray, J. D. 2002. Mathematical Biology I : An Introduction. (3rd ed.). *Interdisciplinary Applied Mathematics.*, Vol.17. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [81] Negri, I., and Y. Nishiyama. 2008. Goodness of fit test for ergodic diffusion processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Vol.61(4), pp 919-928.
- [82] Negri, I. 2009. Efficiency of a Class of Unbiased Estimators for the Invariant Distribution Function of a Diffusion Process. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, Vol. 39 (1), pp. 177–185.
- [83] Negri, I., and Y. Nishiyama. 2010. Review on Goodness of Fit Tests for Ergodic Diffusion Processes by Different Sampling Schemes. *Economic Notes.*, Vol. 39, issue 1-2, pp 91-106.
- [84] Negri, I., and Y. Nishiyama. 2011. Goodness-of-fit test for small diffusions by discrete time observations. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics.*, Vol.63(2), pp 211–225.
- [85] Negri, I., and L. Zhou. 2014. On goodness-of-fit testing for ergodic diffusion process with shift parameter. *Stat. Inference Stoch. Process.*, Vol.17(1), pp 51-73.
- [86] Nikabadze.A.M. 1988. On a Method for Constructing Goodness-of-Fit Tests for Parametric Hypotheses in \mathbf{R}^m . *Theory of Probability & its Applications.*, vol.21(3), pp 539-544.

- [87] Rabhi, A. 2009. On the Goodness-of-fit Testing of Composite Hypothesis for Dynamical Systems with Small Noise. *Annales de l'ISUP*. Vol. 53.2-3, pp 31-48.
- [88] Revuz, D., and M. Yor. 1999. Continuous Martingales and Brownian Motion. *Springer*. 3e éd.
- [89] Rudin, W. 1976. Principles of Mathematical Analysis. *New York : McGraw-Hill*, 3rd ed.
- [90] Shepp, L.A. 1966. Radon-Nikodym Derivatives of Gaussian Measures. *The Annals of Mathematical Statistics.*, Vol.37(2), pp 321-354.
- [91] Smirnov, N. 1936. Sur la distribution de w^2 , *C. R. Acad. Sci. Paris.*, Vol.202. pp. 449-452.
- [92] Top, A. , A.S.Dabye, and D.Tanguiep. 2016. On the Cramér–von Mises test for Poisson processes with scale parameter. *Far East Journal of Theoretical Statistics.*, Vol.52(6). pp. 419-441.
- [93] Verhulst, P.F. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique.*, Vol.10. pp. 113–121.
- [94] Von Mises, R. 1931. Über einige Abschätzungen von Erwartungswerten. *für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*
- [95] Watson, G. S. 1959. Some Recent Results in Chi-Square Goodness-of-Fit Tests *Biometrics*. Vol. 15(3), pp. 440-468.
- [96] Wiener, N. 1923. Differential-Space. *in Journal of Mathematics and Physics*. vol.2, pp. 131–174.

Résumé : Ce travail porte sur la construction d'un test d'ajustement dans le cadre de processus stochastiques observés en temps continu. Plus précisément, nous considérons l'observation d'un processus de type diffusion perturbé par un petit bruit. Sous l'hypothèse nulle, le modèle dépend d'un paramètre inconnu unidimensionnel, et le processus est défini comme solution d'une équation différentielle stochastique à retard. Dans ce contexte, nous proposons deux estimateurs du paramètre de retard : l'estimateur du maximum de vraisemblance et un estimateur de distance minimale. Nous analysons le comportement asymptotique de ces deux estimateurs. Sur cette base, nous construisons un test d'ajustement asymptotiquement de distribution libre (ADF), de niveau asymptotique $\alpha \in (0,1)$. La statistique de test est exprimée à partir de la fonction score normalisée et des deux estimateurs du paramètre de retard. Nous démontrons que, sous une alternative non paramétrique, ce test est consistant. Enfin, la partie théorique est illustrée par deux exemples d'application, accompagnés de simulations numériques visant à évaluer les performances empiriques du test dans chacun des cas.

Abstract : This work focuses on the construction of a goodness-of-fit test for stochastic processes observed in continuous time. More precisely, we consider the observation of a diffusion-type process perturbed by a small noise. Under the null hypothesis, the model depends on a one-dimensional unknown parameter, and the process is defined as the solution of a stochastic differential equation with delay. In this context, we propose two estimators of the delay parameter: the maximum likelihood estimator and a minimum distance estimator. We analyze the asymptotic behavior of these two estimators. On this basis, we construct an asymptotically distribution-free fit (ADF) test, with asymptotic level $\alpha \in (0,1)$. The test statistic is expressed from the normalized score function and the two estimators of the lag parameter. We demonstrate that, under a nonparametric alternative, this test is consistent. Finally, the theoretical part is illustrated by two application examples, accompanied by numerical simulations aimed at evaluating the empirical performance of the test in each case.

الملخص. يتناول هذا العمل بناء اختبار ملاءمة في إطار العمليات العشوائية الملاحظة بصفة مستمرة في الزمن. وعلى وجه التحديد، ندرس ملاحظة عملية عشوائية من نوع الانتشار مضطربة بضجيج صغير. تحت الفرضية العدمية، يعتمد النموذج على معلمة مجهولة أحادية البعد، وتُعرف العملية على أنها حل لمعادلة تفاضلية تصادفية ذات تأخير. في هذا السياق، نقترح مقدرين لمعامل التأخير: مقدر الاحتمال الأعظمي ومقدر المسافة الدنيا. ثم نقوم بتحليل السلوك التقاربي لهذين المقدرين. واستنادًا إلى ذلك، نبني اختبار ملاءمة ذي توزيع حرّ تقريباً (ADF)، بمستوى تقاربي α ، حيث إن α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $(0,1)$. وتُعرف إحصائية الاختبار بالاعتماد على دالة السكور المعيارية والمقدرين لمعامل التأخير. ونبرهن على أن هذا الاختبار متسق تحت فرض بديل غير معلمي. وأخيرًا، يتم توضيح الجزء النظري من خلال مثالين تطبيقيين مصحوبين بمحاكاة عددية تهدف إلى تقييم الأداء التجريبي للاختبار في كل حالة.

