

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

présenté par

Dari Kawthar

Soutenu le : 13 juin 2024

Thème :

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON
LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE AVEC RETARD

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. YEBDRI MUSTAPHA	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mr. BENCHAIAB ABDELLATIF	M.C.B, Université de Tlemcen	Examinateur
Mme. MERZAGUI NAIMA	Professeur, Université de Tlemcen	Invitée
Mr. DAHMANE MOHAMMED	M.C.B, Université de Tlemcen	Encadrant

Année universitaire : 2023 - 2024

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **ALLAH** de m'avoir donné la force et la persévérance nécessaire pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance infinie à mon encadrant Monsieur **Dahmane Mohammed**, pour ses conseils avisés, sa patience et son soutien constant. Son expertise et ses encouragements ont été indispensables à l'achèvement de ce mémoire.

Je souhaite aussi remercier sincèrement les membres du jury, **Yebdri Mustapha** et **Benchab Abdellatif**, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de lire et d'évaluer ce travail. Leur retour d'expérience et leurs critiques constructives sont d'une valeur inestimable.

Un grand merci à tous mes collègues et amis du master pour leur soutien moral, leurs échanges fructueux et les moments de camaraderie que nous avons partagés. Leur présence a rendu ce parcours plus enrichissant et agréable.

Enfin, je remercie ma famille pour leur amour, leur soutien inconditionnel et leur compréhension tout au long de cette période. Sans eux, rien de tout cela n'aurait été possible.

Merci à tous.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes chers parents

Mes frères

Mes amis

Table des matières

Introduction	3
1 Notions Préliminaires	5
1.1 Espaces Fonctionnels	5
1.2 Opérateurs linéaires bornés	6
1.3 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue	6
1.4 Opérateurs compacts	7
1.5 Inégalités de convexité	8
1.5.1 Ensemble convexe et fonction convexe	8
1.5.2 Inégalité de Jensen	8
1.5.3 Inégalité de Hölder	8
1.6 Théorèmes de points fixes	9
1.6.1 Théorème du point fixe de Leary-Schauder	9
1.6.2 Théorème de l'application contractante de Banach	9
2 Intégration et dérivation fractionnaire	10
2.1 Fonctions spécifiques utiles	10
2.1.1 Fonction Gamma	10
2.1.2 Fonction Bêta	11
2.2 Intégrales et dérivées fractionnaires	11
2.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	11
2.2.2 Propriétés principales de l'intégrale fractionnaire de R-L	12
2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	13
2.3.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	13
2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	13
2.4.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	14
2.4.2 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	14
3 Existence et unicité des solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire avec retard	16
3.1 Étude du problème aux conditions aux limites de Dirichlet	18
3.2 Étude du problème aux conditions aux limites de Neumann	26
3.3 Unicité de la solution	33
3.4 Application	35
Conclusion	36
Bibliographie	36

Introduction

Les équations aux dérivées partielles occupent une place prépondérante dans la modélisation mathématique de phénomènes complexes dans divers domaines scientifiques tels que la physique, la mécanique, la chimie, l'ingénierie, etc... Plus récemment, l'introduction d'opérateurs différentiels d'ordre fractionnaire a ouvert de nouvelles perspectives pour la modélisation de phénomènes physiques impliquant des processus non locaux et des comportements complexes. Dans ce contexte, les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire non-linéaires avec retard jouent un rôle crucial dans la représentation de systèmes dynamiques temporels, où le comportement du système à un instant donné dépend de ses états passés.

Dans ce mémoire, nous nous penchons sur l'existence des solutions pour une classe spécifique d'équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire non-linéaires avec retard. Plus précisément, nous considérons des équations de réaction-diffusion où la non-linéarité est modélisée de manière fractionnaire, introduisant ainsi des aspects de mémoire dans le système. Le retard temporel est également pris en compte, ce qui reflète des délais dans les interactions des composants du système.

Le modèle général que nous examinons est donné par l'équation fractionnaire de réaction-diffusion avec retard :

$$\frac{{}^c\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = a(t)\Delta u(x,t) + f(t, u(x, \tau(t))). \quad t \in [0, T_0]$$

où $\frac{{}^c\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} := {}^c\partial^\alpha$ représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α telle que $0 < \alpha < 1$, $a(t)$ est le coefficient de diffusion, f est une fonction non-linéaire qui capture les interactions du système définie comme $f(t, u) : [0, T_0] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, et $\tau(t)$ et la fonction de retard. Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T_0]$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T_0]$$

où N est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$.

L'objectif principal de ce travail est d'établir l'existence de solutions pour ce type d'équations, en utilisant des outils mathématiques avancés tels que le théorème du point fixe de Schauder, et le principe de contraction de Banach. Nous étendons ainsi les résultats existants et contribuons à la compréhension des propriétés fondamentales des systèmes dynamiques décrits par d'équations aux dérivées partielles fractionnaires non-linéaires avec retard.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons jugé utile de rappeler brièvement quelques notions générales et certains résultats fondamentaux indispensables pour le reste de la thèse comme le théorème d'Ascoli-

Arzela, de la convergence dominée de Lebesgue et les inégalités de convexité ou la partie principale du chapitre est dédiée la présentation des théorèmes de point fixe de Banach, et de Schauder .

Dans le deuxième chapitre nous rappelons les notions de base liées à la théorie de calcul fractionnaire dont on aura besoin dans la suite de ce travail (la fonction gamma et la fonction bêta), ensuite, nous étudions l'intégral fractionnaire de Riemann et ses propriétés, et les deux approches de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo .

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions d'un problème aux limites non linéaire concernant une équation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire au sens de caputo avec retard.

A noter que le présent travail est basé sur la lecture de l'article [8].

En plus de détails des calculs et de clarification de quelques points, nous avons démontré l'unicité de la solution pour un cas particulier.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Ce chapitre est composé de cinq sections, dans la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces fonctionnels, la deuxième section, contient un aperçu sur les opérateurs linéaires bornés, la troisième section sur les opérateurs compacts, la quatrième section sur les inégalités de convexité, et dans la dernière section, nous donnons quelques théorèmes comme le théorème du point fixe de Leary-Schauder et théorème de l'application contractante de Banach ...

1.1 Espaces Fonctionnels

Définition 1. (*Espace vectoriel normé*)

Nous considérons des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous x, y dans E et α dans $\mathbb{K}$

$$i) \|x\| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0.$$

$$ii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

$$iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 2. (*Espace métrique complet*)

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Définition 3. (*Espace de Banach*)

On appelle un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $d(x, y) = \|x - y\|$.

Espaces des fonctions continues

Définition 4. Soit $\Omega = [0, T_0]$ ($0 < T_0 < \infty$) un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées d'ordre inférieur ou égal à n sont continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Espaces des fonctions intégrables

Définition 5. Soit $\Omega = [0, T_0]$ ($0 < T_0 < \infty$) un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_0^{T_0} |f(t)|^p < \infty,$$

muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{T_0} |f(t)|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 6. Soient X et Y deux espaces normés.

Un opérateur $\tilde{A}$ défini sur X dans Y est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes : pour tous u, v dans X et α, β dans $\mathbb{R}$:

- i) $\tilde{A}u \in Y$.
- ii) $\tilde{A}(\alpha u + \beta v) = \alpha \tilde{A}u + \beta \tilde{A}v$.

Définition 7. Un opérateur linéaire $\tilde{A}$ défini sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive C , telle que :

$$\forall u \in X, \quad \|\tilde{A}u\|_Y \leq C\|u\|_X.$$

La plus petite valeur de C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur et se note $\|\tilde{A}\|$, on a

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|\tilde{A}u\|_Y = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|\tilde{A}u\|_Y}{\|u\|_X}.$$

Définition 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et soit $M \subset E$. Une application $T : M \rightarrow M$, est dite continue sur M , si pour toute suite $\{x_n\}$ de M :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \text{ entraîne que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx\| = 0$$

1.3 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue est un résultat fondamental en théorie de la mesure et en analyse fonctionnelle. Il permet d'établir des conditions sous lesquelles la convergence

d'une suite de fonctions peut être échangée avec l'intégration. Voici une énonciation générale du théorème :

Théorème 1. [7]

Soit f_n une suite de fonctions mesurables dans X à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad \text{presque partout dans } X,$$

et telle qu'il existe une fonction g sur X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, intégrable, telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{presque partout dans } X,$$

Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

En particulier ,

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

1.4 Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs bornés, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts.

Définition 9. Soit $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, on dit que $\tilde{A}$ est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y , c'est à dire son adhérence est compact.

Définition 10. L'opérateur $\tilde{A}$ est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dans X , la suite $\{\tilde{A}x_n\}_{n \geq 1}$ admet une sous suite convergente dans Y .

Définition 11. (Opérateur complètement continu) Un opérateur $\tilde{A}$ est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

Définition 12. Une famille F des fonctions de $C(X, \mathbb{R})$ est dite uniformément bornée s'il existe $M > 0$ telle que :

$$\forall x \in X, \forall u \in F, \quad |u(x)| \leq M.$$

Définition 13. Une famille F des fonctions de $C(X, \mathbb{R})$ est dite équicontinue si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute fonction u de F et pour tous x_1, x_2 dans X , la condition $|x_2 - x_1| < \delta_1(\varepsilon)$ implique $|u(x_2) - u(x_1)| < \varepsilon$.

Théorème 2. (Arzela-Ascoli)[4] Une famille F des fonctions de $C(X, Y)$ est relativement compacte si et seulement si

- (i) F est uniformément bornée dans $C(X, Y)$.
- (ii) F est équicontinue .

1.5 Inégalités de convexité

1.5.1 Ensemble convexe et fonction convexe

Un ensemble convexe et une fonction convexe sont des concepts fondamentaux en mathématiques, particulièrement en analyse convexe et en optimisation.

Voici une explication de ces deux notions :

Définition 14. (*ensemble convexe*) Soit C un sous ensemble d'un espace vectoriel complexe V , alors C est dit convexe si pour tout couple (x, y) d'éléments de C , le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans C . Autrement dit, C est convexe si pour tous $u, v \in C$

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda u + (1 - \lambda)v \in C.$$

Définition 15. (*fonction convexe*) Soit $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un espace vectoriel complexe V à valeurs réelles, alors w est dite convexe si pour tous $u, v \in V$

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad w(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda w(u) + (1 - \lambda)w(v).$$

Les inégalités de convexité sont des relations qui expriment la convexité d'une fonction, c'est à dire la manière dont la fonction se comporte par rapport à une droite entre deux points de son domaine. La convexité est une propriété importante en analyse mathématique, car elle garantit souvent des propriétés de régularité et des conditions optimales dans divers problèmes d'optimisation. Voici quelques-unes des inégalités de convexité les plus couramment utilisées :

1.5.2 Inégalité de Jensen

Théorème 3. ([9],[11],[14]) Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positivement homogène et $f \in L^1(X, \mu; \mathbb{R})$. Si ϕ est convexe, alors

$$\phi \left(\int_X f \, d\mu \right) \leq \int_X \phi(f) \, d\mu.$$

Si ϕ est concave alors

$$\int_X \phi(f) \, d\mu \leq \phi \left(\int_X f \, d\mu \right).$$

1.5.3 Inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et établit une relation entre les normes des deux fonctions et leurs produits.

Définition 16. (*conjugués au sens de Hölder*) Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$. p et q sont dit conjugués au sens de Hölder si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particulier, $p = 2$ est le conjugué de lui même .

Théorème 4. (*Inégalité de Hölder*) [14] Soient Ω un ensemble mesurable, et $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (1.1)$$

1.6 Théorèmes de points fixes

Dans plusieurs problèmes, on se ramène à étudier des équations de la forme $X = TX$ où T est un opérateur en général non linéaire.

La résolution de ces équations opérationnelles est équivalente à étudier l'existence de points fixes de l'opérateur T .

Parmi ces théorèmes, on cite les théorèmes de Schauder et de Banach.

1.6.1 Théorème du point fixe de Leary-Schauder

Le théorème du point fixe de Leary-Schauder est très utile dans l'étude de l'existence de solutions pour les équations intégrales, les équations différentielles et d'autres problèmes d'analyse fonctionnelle. Il permet de montrer qu'un opérateur compact laisse toujours invariante une certaine partie de l'espace de Banach sur lequel il est défini, ce qui garantit l'existence d'un point fixe.

Théorème 5. (*point fixe de Leary-Schauder*) [8] Soit X est un sous-ensemble convexe fermé borné d'un espace de Banach E , et $T : X \rightarrow X$ est un opérateur complètement continu, alors T admet au moins un point fixe dans X .

1.6.2 Théorème de l'application contractante de Banach

Le théorème de l'application contractante de Banach est également connu sous le nom de théorème du point fixe de Banach, est un résultat fondamental en analyse fonctionnelle qui garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour certaines classes d'opérateurs dans des espaces métriques complets.

Définition 17. Soit (X, d) un espace métrique complet. Une application $T : X \rightarrow X$ est dite contractante s'il existe un réel $0 < k < 1$ tel que,

$$\forall x, y \in X, \quad d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

Voici une version générale du théorème de l'application contractante de Banach :

Théorème 6. [8] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application contractante d'un espace métrique complet X . Alors, il existe un unique point fixe $x^* \in X$ tel que $T(x^*) = x^*$.

Chapitre 2

Intégration et dérivation fractionnaire

L'intégration et la dérivation fractionnaires sont des généralisations des opérations classiques d'intégration et de dérivation à des ordres non entiers ou fractionnaires. Elles sont utilisées dans de nombreux domaines, notamment en mathématiques appliquées, en physique, en ingénierie et en sciences biologiques, pour modéliser des phénomènes avec des propriétés.

2.1 Fonctions spécifiques utiles

Dans cette section, nous présentons les fonctions : Gamma et *Bêta*. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

2.1.1 Fonction Gamma

La fonction **Gamma d'Euler** notée Γ est l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et *même* aux nombres complexes à parties réelles positives). Par ([5],[6]) la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0, \quad (2.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$.

Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_0^{\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2.1.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0. \quad (2.2)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x > 0, y > 0, \quad (2.3)$$

il s'en suit de (2.3) que :

$$B(x, y) = B(y, x), x > 0, y > 0.$$

2.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, y compris quelques une de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

2.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n-fois.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, T]$, $a > 0$. Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I_{a+}^1 f(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(t) &= \int_a^t I_{a+}^1 f(s) ds = \int_a^t \left(\int_a^s f(s) ds \right) du = \int_a^t \left(\int_s^t du \right) f(s) ds \\ &= \int_a^t (t-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la n^{ieme} primitive de la fonction f sous la forme :

$$I_{a+}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, t > 0, n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.4)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la généralisation de la factorielle par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann s'est rendu compte que le second membre de (2.4) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a défini l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 18. Soit $f \in L^1([a, T])$, $T > a$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la

fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ notée I_{a+}^α est définie par :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, t > a. \quad (2.5)$$

2.2.2 Propriétés principales de l'intégrale fractionnaire de R-L

Théorème 7. ([5],[6]) Pour $f \in C[a, T]$, $a > 0$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :

$$I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

preuve : Soit $f \in C[a, T]$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors :

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_{a+}^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

On pose $s = \tau + (t-\tau)\mu$, alors

$$ds = (t-\tau) d\mu$$

$$s = \tau \implies \tau + (t-\tau)\mu = \tau \implies \mu = 0$$

$$s = t \implies \tau + (t-\tau)\mu = t \implies \mu = 1$$

alors

$$\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds = (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu,$$

et d'après la définition de la fonction Bêta (2.2) et (2.3), on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(t) &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

Proposition 1. L'opérateur de l'intégrale I_{a+}^α est linéaire.

En effet, si f et g sont deux fonctions telles que $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{a+}^\alpha g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels

arbitraires on aura

$$\begin{aligned}
 I_{a+}^{\alpha}(c_1 f + c_2 g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (c_1 f + c_2 g)(s) ds \\
 &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\
 &= c_1 I_{a+}^{\alpha} f(t) + c_2 I_{a+}^{\alpha} g(t).
 \end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est une généralisation de la dérivée ordinaire utilisée pour étudier les fonctions non entièrement différentiables. Elle est largement utilisée dans le domaine des équations différentielles fractionnaires et dans d'autres domaines de la physique et de l'ingénierie pour modéliser des phénomènes complexes.

Définition 19. ([5],[10]) Soit $f \in L^1([a, T])$, $a > 0$ une fonction intégrable sur $[a, T]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ notée $D_{a+}^{\alpha} f$ est définie par :

$$\begin{aligned}
 D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t)
 \end{aligned}$$

avec $a > 0$ et $n-1 < \alpha < n$.

2.3.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propositions suivantes :

Proposition 2. [5] Pour $n-1 < \alpha < n$ et $m-1 < \beta < m$, on a :

1. L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

$$D_{a+}^{\alpha}(\lambda f + g)(t) = \lambda(D_{a+}^{\alpha} f)(t) + (D_{a+}^{\alpha} g)(t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. En général

$$D_{a+}^{\alpha}(D_{a+}^{\beta} f(t)) \neq D_{a+}^{\beta}(D_{a+}^{\alpha} f(t)).$$

3. Pour $f \in L^1([a, T])$, $a > 0$, l'égalité :

$$D_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\alpha} f(t)) = f(t)$$

est vrai pour tout $t \in [a, T]$.

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 20. ([5],[10]) Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1(a, T)$, $a > 0$.

La dérivée fractionnaire d'ordre n de f au sens de Caputo est définie par

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

2.4.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo possède les propositions suivantes :

Proposition 3. [5] Pour $n-1 < \alpha < n$ avec $n, m \in \mathbb{N}^*$, et les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^c D_{a+}^{\alpha} f(t)$ et ${}^c D_{a+}^{\alpha} g(t)$ existent, on a :

1. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^c D_{a+}^{\alpha} (\lambda f + g)(t) = \lambda ({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(t) + ({}^c D_{a+}^{\alpha} g)(t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Si f est une fonction continue on a :

$${}^c D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t).$$

Et

$$I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$$

Remarque 1. Cas particulier :

1. Si $\alpha = n$ on a

$${}^c D_{a+}^{\alpha} = D_{a+}^{\alpha} = D^n,$$

où D est l'opérateur de la dérivation classique.

2. Si $n = 1$ et $0 < \alpha < 1$ on a

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds. \\ &= \frac{d}{dt} I_{a+}^{1-\alpha} f(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds. \\ &= I_{a+}^{1-\alpha} f'(t), \end{aligned}$$

on a aussi

$$I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - f(a).$$

2.4.2 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville.

Théorème 8. ([5],[10]) Soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^c D_{a+}^\alpha f(t)$ et ${}^c D_{a+}^\alpha f(t)$ avec $n-1 < \alpha < n$ existent alors :

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha f(t) &= D_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^k \right] \\ &= D_{a+}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 2. Si $n=1$ et $0 < \alpha < 1$, on a

$${}^c D_{a+}^\alpha f(t) = D_{a+}^\alpha [f(t) - f(a)] = D_{a+}^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{t^\alpha},$$

Remarque 3. Dans la suite de ce mémoire et pour simplifier l'écriture pour $a=0$ on pose $I_{a+}^\alpha = I_{0+}^\alpha = I^\alpha$, ${}^c D_{a+}^\alpha = {}^c D_{0+}^\alpha = {}^c D^\alpha$ et $D_{a+}^\alpha = D_{0+}^\alpha = D^\alpha$.

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire avec retard

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions d'un problème aux limites non-linéaire concernant une équation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo.

Plus précisément on considère le problème suivant :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = a(t) \Delta u(x, t) + f(t, u(x, \tau(t))). \quad t \in I \quad (3.1)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

et la condition aux limites suivantes :

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I, \quad (CD)$$

où

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial N} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I. \quad (CN)$$

où ${}^c D_t^\alpha := \frac{{}^c \partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, $I = [0, t_0]$ avec $t_0 > 0$, $a(t)$ est le coefficient de diffusion, Δ est le Laplacien, $\tau(t)$ est la fonction de retard et la fonction f est définie comme $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Par exemple, dans la dynamique des populations, le terme $a\Delta u$ correspond à la diffusion de la concentration locale .

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H₁) : $f(t, \cdot)$ est concave, continue et $\forall \lambda > 0$, $f(\cdot, \lambda u) \geq \lambda f(\cdot, u)$, et $f(\cdot, u)$ est mesurable au sens de Lebesgue par rapport à $t \in I$.

(H₂) : $0 \leq \tau(t) \leq t$, pour tout $t \in I$.

(H₃) : $|f(t, u(x, \tau(t)))| \leq m(t)|u(x, \tau(t))|$ où $m : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ et il existe $\beta \in (0, \alpha)$ tel que $m \in L^{1/\beta}(I)$

avec $(\int_0^a (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds)^{\beta} \leq l_1 < 1$.

($\mathbf{H}_4$) : La fonction a est continue sur I avec $(\int_0^{t_0} |a(s)|^{\frac{1}{\beta}} ds)^{\beta} \leq l_2 < 1$.

Lemme 1. *On suppose que les hypothèses ($\mathbf{H}_1$)-($\mathbf{H}_4$) sont vérifiées. Alors pour $t \in I$, le problème à valeur initiale (3.1) – (3.2) est équivalent à l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s)\Delta u(x, s) + f(s, u(x, \tau(s)))] ds \\ &= \varphi(x) + I^{\alpha}[a(t)\Delta u(x, t)] + I^{\alpha}[f(t, u(x, \tau(t)))], x \in \Omega, \quad t \in I, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où

$$I^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, t > 0.$$

Preuve :

i) On suppose que $u(x, t)$ est une solution du problème à valeur initiale (3.1) – (3.2).

On a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}[{}^c D_t^{\alpha} u(x, t)] &= I^{\alpha}[a(t)\Delta u(x, t) + f(t, u(x, \tau(t)))] \\ &= I^{\alpha}[a(t)\Delta u(x, t)] + I^{\alpha}[f(t, u(x, \tau(t)))]. \end{aligned}$$

D'après la remarque (1) du chapitre 2, on a

$$I^{\alpha}[{}^c D_t^{\alpha} u(x, t)] = u(x, t) - u(x, 0) = I^{\alpha}[a(t)\Delta u(x, t)] + I^{\alpha}[f(t, u(x, \tau(t)))],$$

donc

$$u(x, t) - \varphi(x) = I^{\alpha}[a(t)\Delta u(x, t)] + I^{\alpha}[f(t, u(x, \tau(t)))],$$

d'où

$$u(x, t) = \varphi(x) + I^{\alpha}[a(t)\Delta u(x, t)] + I^{\alpha}[f(t, u(x, \tau(t)))].$$

Ce qui montre que $u(x, t)$ est une solution de l'équation (3.3).

ii) Supposons que $u(x, t)$ est une solution de l'équation (3.3).

On a :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{\alpha} u(x, t) &= {}^c D_t^{\alpha} \left(\varphi(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s)\Delta u(x, s) + f(s, u(x, \tau(s)))] ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} {}^c D_t^{\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s)\Delta u(x, s) + f(s, u(x, \tau(s)))] ds \\ &= {}^c D_t^{\alpha} [I^{\alpha}(a(t)\Delta u(x, t) + f(t, u(x, \tau(t))))] \\ &= a(t)\Delta u(x, t) + f(t, u(x, \tau(t))). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $u(x, t)$ est une solution du problème (3.1) – (3.2).

3.1 Étude du problème aux conditions aux limites de Dirichlet

Maintenant, nous allons prouver l'existence d'une solution du problème (3.1) – (3.2) avec la condition aux limites de Dirichlet

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I. \quad (CD)$$

Afin de prouver notre résultat, on considère le problème à valeurs propres suivant

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

où λ est une constante ne dépend pas de la variable x .

D'après [13], il est bien connu que pour $x \in \Omega$, la plus petite valeur propre λ_1 du problème (3.4) est strictement positive et sa fonction propre correspondante est positive ($\phi(x) \geq 0$).

On a alors $\Delta\phi = -\lambda_1\phi$.

Pour une solution $u(x, t)$ du problème (3.1) – (3.2) – (CD), on définit la fonction $U(t)$ comme suit :

$$U(t) = \frac{\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} \phi(x)dx}, \quad (3.5)$$

avec

$$U(0) = \frac{\int_{\Omega} \varphi(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} \phi(x)dx} = a_0, \quad (3.6)$$

où $a_0 \in \mathbb{R}$, et pour toute constante $b > 0$, on pose

$$h = \min \left\{ t_0, \left[\frac{\Gamma(\alpha)b}{(|a_0| + b)(\lambda_1 l_1 + l_2)} \left(\frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \right\}, \quad (3.7)$$

pour un certain β , tel que $\beta \in (0, \alpha)$.

Théorème 9. ([8],[10]) *Supposons que les hypothèses (H_1) – (H_4) sont satisfaites, et qu'il existe $\beta \in (0, \alpha)$. Alors il existe au moins une solution du problème (3.1) – (3.2) avec la condition (CD) sur $\Omega \times [0, h]$, où h est défini par (3.7).*

Preuve : La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 :

D'abord, on va prouver que le problème à valeur initiale (3.1) – (3.2) avec la condition (CD) a une solution si et seulement si l'équation

$$U(t) = a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) ds$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, U(\tau(s)))] ds \\
& = a_0 - \lambda_1 I^\alpha [a(t)U(t)] + I^\alpha [f(t, U(\tau(t)))], \quad t \in [0, h],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

possède une solution.

i) Supposons que $U(t)$ soit une solution de l'équation (3.8).

Posons $u(x, t) = \phi(x)U(t)$, donc $\Delta u(x, t) = \Delta \phi(x)U(t)$, mais $\Delta \phi(x) = -\lambda_1 \phi(x)$ et par suit $\Delta u(x, t) = -\lambda_1 \phi(x)U(t)$.

En multipliant l'équation (3.8) par $\phi(x)$, on obtient :

$$\phi(x)U(t) = \phi(x)a_0 - \lambda_1 \phi(x)I^\alpha [a(t)U(t)] + \phi(x)I^\alpha [f(t, U(\tau(t)))],$$

d'où

$$u(x, t) = u(x, 0) + I^\alpha [a(t)(-\lambda_1 \phi(x)U(t))] + I^\alpha [f(t, \phi(x)U(\tau(t)))],$$

et comme $\Delta \phi(x) = -\lambda_1 \phi(x)$ alors

$$u(x, t) = \varphi(x) + I^\alpha [a(t)\Delta u(x, t)] + I^\alpha [f(t, u(x, t))].$$

Ce qui prouve que $u(x, t)$ est une solution de l'équation (3.3), et d'après le lemme 2, $u(x, t)$ est aussi solution du problème (3.1) – (3.2) – (CD).

ii) Supposons que le problème (3.1) – (3.2) – (CD) admet une solution $u(x, t)$.

D'après le lemme 1, $u(x, t)$ est aussi une solution de l'équation (3.3).

En multipliant les deux membres de l'équation (3.3) par $\phi(x)$, et en intégrant par rapport à $x \in \Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \phi(x)u(x, t)dx &= \int_{\Omega} \phi(x)\varphi(x)dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\Omega} \phi(x) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s)\Delta u(x, s) \\
&\quad + f(s, u(x, \tau(s)))] ds dx \\
&= \int_{\Omega} \phi(x)\varphi(x)dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[a(s) \int_{\Omega} \phi(x)\Delta u(x, s)dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \phi(x)f(s, u(x, \tau(s))) dx \right] ds.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Comme $\Delta \phi = -\lambda_1 \phi$, alors $\int_{\Omega} u\Delta \phi dx = -\lambda_1 \int_{\Omega} u\phi dx$, et par une double intégration par partie, et compte-tenu de la condition aux limites (CD) et du problème à valeur propres (3.4), on obtient

$$\int_{\Omega} u\Delta \phi dx = \int_{\Omega} \Delta u\phi dx.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx = -\lambda_1 \int_{\Omega} u \phi \, dx, \quad t \geq t_0. \quad (3.10)$$

D'après (3.9), (3.10), on a

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{\int_{\Omega} \phi(x) u(x, t) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \phi(x) \varphi(x) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[a(s) \frac{\int_{\Omega} \phi(x) \Delta u(x, s) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_{\Omega} \phi(x) f(s, u(x, \tau(s))) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} \right] \, ds \\ &= a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) \left(\frac{\int_{\Omega} \phi(x) u(x, s) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} \right) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{\int_{\Omega} \phi(x) f(s, u(x, \tau(s))) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} \right) \, ds \\ &= a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{\int_{\Omega} \phi(x) f(s, u(x, \tau(s))) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} \right) \, ds, \end{aligned}$$

d'après $\mathbf{H}_1$, on a

$$\frac{\phi(x)}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} f(s, u(x, \tau(s))) \leq f\left(s, \frac{\phi(x)}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx} u(x, \tau(s))\right).$$

Et comme f est concave et d'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\int_{\Omega} f\left(s, \frac{\phi(x) u(x, \tau(s))}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx}\right) \, dx \leq f\left(s, \frac{\int_{\Omega} \phi(x) u(x, \tau(s)) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} U(t) &\leq a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) \, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\quad \times f\left(s, \frac{\int_{\Omega} \phi(x) u(x, \tau(s)) \, dx}{\int_{\Omega} \phi(x) \, dx}\right) \, ds \\ &\leq a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) \, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, U(\tau(s))) \, ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donc $U(t)$ vérifie l'inéquation

$$U(t) \leq a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) \, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, U(\tau(s))) \, ds. \quad (3.12)$$

On définit maintenant l'ensemble K par

$$K = \{U : U \in C(I, \mathbb{R}), |U(t) - a_0| \leq b\}, \quad (3.13)$$

et on définit l'opérateur $T : C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ par

$$(TU)(t) = \begin{cases} a_0, & t = 0, \\ a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, U(\tau(s))) ds, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Il est clair que $a_0 \in K$, et d'après notre construction de K , on peut dire que K est un ensemble fermé borné.

Maintenant, pour tout $U_1, U_2 \in K$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |\lambda U_1(t) + (1-\lambda)U_2(t) - a_0| &= |\lambda U_1(t) + (1-\lambda)U_2(t) - (1+\lambda-\lambda)a_0| \\ &\leq \lambda |U_1(t) - a_0| + (1-\lambda) |U_2(t) - a_0| \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda)b \\ &\leq b, \end{aligned}$$

donc $\lambda U_1(t) + (1-\lambda)U_2(t) \in K$, et par conséquent K est un ensemble convexe non vide et fermé.

Ensuite, on va montrer que $T(K) \subset K$.

Pour $U \in K$ et d'après $(\mathbf{H}_2)$ – $(\mathbf{H}_3)$, on a :

$$\begin{aligned} |(TU)(t) - a_0| &= \left| \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, U(\tau(s))) ds \right| \\ &\leq \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a(s)| |U(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, U(\tau(s)))| ds \\ &\leq \frac{(|a_0| + b)\lambda_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |m(s)| |U(s)| ds \\ &\leq \frac{(|a_0| + b)\lambda_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a(s)| ds + \frac{(|a_0| + b)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |m(s)| ds. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}
|(TU)(t) - a_0| &\leq \frac{(|a_0| + b)\lambda_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{(|a_0| + b)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t |m(s)|^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{(|a_0| + b)\lambda_1 l_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{(|a_0| + b)l_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{(|a_0| + b)(\lambda_1 l_2 + l_1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Si $t < h$ et en calculant l'intégrale $\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds$, on a :

$$\begin{aligned}
|(TU)(t) - a_0| &\leq \frac{(|a_0| + b)\lambda_1 l_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} + \frac{(|a_0| + b)l_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} \\
&\leq \frac{(|a_0| + b)(\lambda_1 l_2 + l_1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} \\
&\leq b,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

ce qui prouve que $(TU) \in K$, et par conséquent $T(K) \subset K$.

En définit maintenant dans K la suite $\{U_k(t), k \in \mathbb{N}\}$ par

$$U_0(t) = a_0, \quad 0 \leq t \leq h$$

et

$$U_{k+1}(t) = (TU_k)(t), \quad 0 \leq t \leq h, k \in \mathbb{N}.$$

Puisque K est fermé, alors il existe une sous-suite $\{U_{k_i}(t)\}$ de $\{U_k(t)\}$ qui converge vers une fonction $\tilde{U}(t) \in K$, c'est à dire

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} U_{k_i}(t) = \tilde{U}(t), \quad 0 \leq t \leq h.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il s'en suit que $\tilde{U}(t)$ vérifie l'équation

$$\tilde{U}(t) = \begin{cases} a_0, & t = 0, \\ a_0 - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) \tilde{U}(s) ds \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, \tilde{U}(\tau(s))\right) ds, & 0 \leq t \leq h, \end{cases}$$

ce qui prouve que $\tilde{U}(t)$ est une solution de l'équation (3.8).

Maintenant pour prouver notre résultat, c'est à dire le problème (3.1) – (3.2) – (CD) admet une solution, il suffit de prouver que l'équation (3.8) admet une solution.

Pour cela, on va montrer que l'opérateur T est complètement continue pour avoir appliqué le théorème du point fixe de Schauder.

Étape 2 : Montrons que T est continu.

Soit $\{U_n(t)\}$ une suite qui converge dans K vers $U(t)$, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n(t) - U(t)| = 0, \quad t \in [0, h].$$

Puisque

$$0 \leq \tau(t) \leq t,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n(\tau(t)) - U(\tau(t))| = 0,$$

et d'après $(\mathbf{H}_1)$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(t, U_n(\tau(t))) - f(t, U(\tau(t)))| = 0.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif N lorsque $n > N$, on a

$$|U_n(t) - U(t)| < \frac{\Gamma(\alpha)}{2\lambda_1 l_2} \left(\frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} \right)^{1-\beta} h^{\beta-\alpha} \varepsilon, \quad (3.16)$$

et

$$|f(t, U_n(\tau(t))) - f(t, U(\tau(t)))| < \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2h^\alpha} \alpha. \quad (3.17)$$

D'après (3.14), on a :

$$\begin{aligned} |(TU_n)(t) - (TU)(t)| &\leq |U_n(0) - U(0)| + \left| \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) (U_n(s) - U(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, U_n(\tau(s))) - f(s, U(\tau(s)))) ds \right| \\ &\leq \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a(s)| |U_n(s) - U(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \times \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, U_n(\tau(s))) - f(s, U(\tau(s)))| ds, \end{aligned}$$

d'après $(\mathbf{H}_4)$, (3.16) – (3.17), et l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}
|(TU_n)(t) - (TU)(t)| &\leq \frac{\lambda_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \frac{\Gamma(\alpha)}{2\lambda_1 l_2} \\
&\quad \times \left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\beta-\alpha} \varepsilon + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2h^\alpha} \alpha \\
&\leq \frac{\lambda_1 l_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \frac{\Gamma(\alpha)}{2\lambda_1 l_2} \left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\beta-\alpha} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2h^\alpha} \alpha \\
&\leq \frac{\lambda_1 l_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2\lambda_1 l_2 h^{\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{h^\alpha}{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2h^\alpha} \alpha \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque ε est arbitrairement petit, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(TU_n)(t) - (TU)(t)| = 0,$$

ce qui implique que T est continu.

Maintenant, on va montrer que T est compact, c'est à dire $T(K)$ est relativement compact. Pour cela, il suffit de montrer que $T(K)$ est uniformément borné et équicontinu sur $[0, h]$.

Étape 3 : Pour $U \in K$ et $t \in [0, h]$ on a

$$\begin{aligned}
|(TU)(t)| &= |(TU)(t) - a_0 + a_0| \\
&\leq |(TU)(t) - a_0| + |a_0| \\
&\leq b + |a_0|,
\end{aligned}$$

donc $T(K)$ est uniformément borné.

Étape 4 : Soit $U \in K$ et $t_1, t_2 \in [0, h]$, on a

$$\begin{aligned}
|(TU)(t_1) - (TU)(t_2)| &= \left| -\lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} a(s) U(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} \right. \\
&\quad \times f(s, U(\tau(s))) ds + \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} a(s) U(s) ds \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, U(\tau(s))) ds \right| \\
&= \left| \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) a(s) U(s) ds \right. \\
&\quad + \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} a(s) U(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) f(s, U(\tau(s))) ds \\
&\quad \left. - \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, U(\tau(s))) ds \right| \\
&\leq \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| |a(s)| |U(s)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} |a(s)| |U(s)| ds \right) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| |f(s, U(\tau(s)))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} |f(s, U(\tau(s)))| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(TU)(t_1) - (TU)(t_2)| &\leq \frac{(b + |a_0|)\lambda_1 M_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| ds \\
&\quad + \frac{(b + |a_0|)\lambda_1 M_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \frac{(b + |a_0|)M_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| ds \\
&\quad + \frac{(b + |a_0|)M_2}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} ds,
\end{aligned}$$

où $M_1 = \sup_{t \in I} |a(t)|$ et $M_2 = \sup_{t \in I} |g(t)|$ avec $g(t) = f(t, U(\tau(t)))$, d'où

$$\begin{aligned}
|(TU)(t_1) - (TU)(t_2)| &\leq \frac{(b + |a_0|)(\lambda_1 M_1 + M_2)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| ds \\
&\quad + \frac{(b + |a_0|)(\lambda_1 M_1 + M_2)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{(b + |a_0|)(\lambda_1 M_1 + M_2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} \left(-(t_2 - s)^{\alpha-1} + (t_1 - s)^{\alpha-1} \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right) \\
&\leq \frac{(b + |a_0|)(\lambda_1 M_1 + M_2)}{\Gamma(\alpha)\alpha} ((t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha + t_1^\alpha) + (t_2 - t_1)^\alpha.
\end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$ alors :

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} (t_2 - t_1)^\alpha = 0 \quad (3.18)$$

et

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} ((t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha + t_1^\alpha) = 0. \quad (3.19)$$

Il s'en suit que

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} |(TU)(t_1) - (TU)(t_2)| = 0$$

Par conséquent, $T(K)$ est équicontinu.

D'après le théorème d' Ascoli-Arzelà T est complètement continu.

Finalement, on applique le théorème du point fixe de Schauder, on déduit que T admet au moins un point fixe dans K , et par suite le problème (3.1) – (3.2) – (CD) admet au moins une solution.

3.2 Étude du problème aux conditions aux limites de Neumann

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude de l'existence des solutions du problème (3.1) – (3.2) avec une condition aux limites de Neumann au lieu d'une condition aux limites de Dirichlet. C'est-à-dire,

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I, \quad (\text{CN})$$

où N est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$.

Pour une solution $u(x, t)$ du problème (3.1) – (3.2) – (CN), on définit la fonction $V(t)$ comme suit :

$$V(t) = \frac{\int_{\Omega} u(x, t) dx}{\int_{\Omega} dx}, \quad (3.20)$$

avec

$$V(0) = \frac{\int_{\Omega} \varphi(x) dx}{\int_{\Omega} dx} = d_0, \quad (3.21)$$

où $d_0 \in \mathbb{R}$.

Pour toute constante $b_1 > 0$, on pose

$$h_1 = \min \left\{ t_0, \left[\frac{\Gamma(\alpha) b_1}{(|d_0| + b_1) l_2} \left(\frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \right\}, \quad (3.22)$$

pour un certain β , tel que $\beta \in (0, \alpha)$.

Théorème 10. ([8],[10]) *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont satisfaites, et qu'il existe $\beta \in (0, \alpha)$. Alors il existe au moins une solution du problème (3.1) – (3.2) avec la condition (CN) sur $\Omega \times [0, h_1]$, où h_1 est défini par (3.22).*

Preuve : Cette preuve est similaire à la preuve précédente, et elle sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 : D'abord, on va prouver que le problème à valeur initiale (3.1) – (3.2) avec la condition (CN) a une solution si et seulement si l'équation

$$V(t) = d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds, \quad t \in [0, h_1] \quad (3.23)$$

possède une solution.

i) Supposons que $V(t)$ est une solution de l'équation (3.23).

Pour $x \in \Omega$, posons $u(x, t) = V(t)$, ce qui implique que $\Delta u(x, t) = 0$.

On va montrer que $u(x, t)$ est une solution de l'équation (3.3).

On a

$$\begin{aligned} V(t) &= d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \\ u(x, t) &= u(x, 0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s) \Delta u(x, s) + f(s, u(x, \tau(s)))] ds \\ u(x, t) &= \varphi(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s) \Delta u(x, s) + f(s, u(x, \tau(s)))] ds \end{aligned}$$

Ce qui Prouve que $u(x, t)$ est une solution de l'équation (3.3), donc c'est aussi une solution du problème (3.1) – (3.2) – (CN).

ii) Supposons que le problème (3.1) – (3.2) – (CN) admet une solution $u(x, t)$.

D'après le Lemme 1, $u(x, t)$ est aussi une solution de l'équation (3.3).

En intégrant les deux membres de l'équation (3.3) par rapport à $x \in \Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u(x, t) dx &= \int_{\Omega} \varphi(x) dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\Omega} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a(s) \Delta u(x, s) + f(s, u(x, \tau(s)))] ds \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \varphi(x) dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[a(s) \int_{\Omega} \Delta u(x, s) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} f(s, u(x, \tau(s))) dx \right] ds.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Si $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$, $(x, t) \in \partial\Omega \times I$, cela signifie que la dérivée partielle de u par rapport à la normale extérieure est nulle le long de la frontière $\partial\Omega$ pour tout t dans l'intervalle I . En d'autres termes, cela implique que la fonction u reste constante le long de la frontière pendant cette période de temps. En utilisant la formule de Green, qui relie l'intégrale de Laplacien d'une fonction sur un domaine à l'intégrale de la fonction et de son gradient sur la frontière de ce domaine, on peut montrer que :

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = 0, \quad t \in I. \tag{3.25}$$

La formule de Green pour Ω s'écrit comme suit :

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds,$$

mais puisque $\frac{\partial u(x, t)}{\partial N} = 0$ pour tout $(x, t) \in \partial\Omega \times I$, l'intégrale sur la frontière est nulle, ce qui conduit à $\int_{\Omega} \Delta u \, dx = 0$ pour tout $t \in I$.

Cela signifie que l'intégrale du Laplacien de u sur Ω est nulle sur l'intervalle du temps I .

D'après (3.24), (3.25), on a

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{\int_{\Omega} u(x, t) dx}{\int_{\Omega} dx} \\
&= \frac{\int_{\Omega} \varphi(x) dx}{\int_{\Omega} dx} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[a(s) \frac{\int_{\Omega} \Delta u(x, s) dx}{\int_{\Omega} dx} + \frac{\int_{\Omega} f(s, u(x, \tau(s))) dx}{\int_{\Omega} dx} \right] ds \\
&= d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\int_{\Omega} f(s, u(x, \tau(s))) dx}{\int_{\Omega} dx} ds.
\end{aligned}$$

D'après **H**₁, on a

$$\frac{1}{\int_{\Omega} dx} f(s, u(x, \tau(s))) \leq f\left(s, \frac{\int_{\Omega} u(x, \tau(s)) dx}{\int_{\Omega} dx}\right),$$

et comme f est concave et d'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\int_{\Omega} f\left(s, \frac{u(x, \tau(s))}{\int_{\Omega} dx}\right) dx \leq f\left(s, \frac{\int_{\Omega} u(x, \tau(s)) dx}{\int_{\Omega} dx}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} V(t) &\leq d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, \frac{\int_{\Omega} u(x, \tau(s)) dx}{\int_{\Omega} dx}\right) ds \\ &= d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donc $V(t)$ vérifier l'inéquation

$$V(t) \leq d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds. \quad (3.27)$$

On définit maintenant l'ensemble $\tilde{K}$ par

$$\tilde{K} = \{V : u \in C(I, \mathbb{R}), |V(t) - d_0| \leq b_1\}, \quad (3.28)$$

et On définit l'opérateur $\tilde{T} : C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ par

$$(\tilde{T}V)(t) = \begin{cases} d_0, & t = 0, \\ d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Il est claire que $d_0 \in \tilde{K}$, et d'après notre construction de $\tilde{K}$ on peut dire que $\tilde{K}$ est un ensemble fermé borné.

Maintenant, pour tout $V_1, V_2 \in \tilde{K}$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda V_1(t) + (1-\lambda)V_2(t) - d_0| &= |\lambda V_1(t) + (1-\lambda)V_2(t) - (1+\lambda-\lambda)d_0| \\ &\leq \lambda |V_1(t) - d_0| + (1-\lambda) |V_2(t) - d_0| \\ &\leq \lambda b_1 + (1-\lambda)b_1 \\ &\leq b_1, \end{aligned}$$

donc $\lambda V_1(t) + (1-\lambda)V_2(t) \in \tilde{K}$, et par conséquent $\tilde{K}$ est un ensemble convexe non vide et fermé. Ensuite, on va montrer que $\tilde{T}(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$.

Pour $V \in \tilde{K}$ et d'après **(H₂)**–**(H₃)**, on a :

$$\begin{aligned} |(\tilde{T}V)(t) - d_0| &= |(\tilde{T}V)(t) - (\tilde{T}V)(0)| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, V(\tau(s)))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |m(s)| |V(s)| ds \\ &\leq \frac{(|d_0| + b_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |m(s)| ds. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} |(\tilde{T}V)(t) - d_0| &\leq \frac{(|d_0| + b_1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t |m(s)|^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\leq \frac{(|d_0| + b_1)l_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Si $t < h_1$ et en calculant l'intégrale $\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds$, on a :

$$|(\tilde{T}V)(t) - d_0| \leq \frac{(|V(0)| + b_1)l_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} \leq b_1, \quad (3.30)$$

ce qui montre que $(\tilde{T}U) \in \tilde{K}$, et par conséquent $\tilde{T}(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$.

En définit maintenant dans $\tilde{K}$ la suite $\{V_k(t), k \in \mathbb{N}\}$ par

$$V_0(t) = d_0, \quad 0 \leq t \leq h_1,$$

et

$$V_{k+1}(t) = (\tilde{T}V_k)(t), \quad 0 \leq t \leq h_1, k \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\tilde{K}$ est fermé, alors il existe une sous-suite $\{V_{k_i}(t)\}$ de $\{V_k(t)\}$ qui converge vers une fonction $\tilde{V}(t) \in \tilde{K}$, c'est à dire

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} V_{k_i}(t) = \tilde{V}(t), \quad 0 \leq t \leq h_1.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il s'en suit que $\tilde{V}(t)$ vérifie l'équation

$$\tilde{V}(t) = \begin{cases} d_0, & t = 0, \\ d_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, \tilde{V}(\tau(s))\right) ds, & 0 \leq t \leq h_1, \end{cases}$$

ce qui prouve que $\tilde{V}(t)$ est une solution de l'équation (3.23).

Maintenant pour prouver notre résultat, c'est à dire le problème (3.1) – (3.2) – (CN) admet une solution, il suffit de prouver que l'équation (3.23) admet une solution.

Pour cela on va montrer que l'opérateur $\tilde{T}$ est complètement continu pour avoir appliqué le théorème du point fixe de Schauder.

Étape 2 : Montrons que $\tilde{T}$ est continu.

Soit $\{V_m(t)\}$ une suite qui converge dans $\tilde{K}$ vers $V(t)$, c'est à dire

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |V_m(t) - V(t)| = 0, \quad t \in [0, h_1].$$

Puisque

$$0 \leq \tau(t) \leq t,$$

alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |V_m(\tau(t)) - V(\tau(t))| = 0.$$

Et d'après $(\mathbf{H}_1)$, on obtient

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f(t, V_m(\tau(t))) - f(t, V(\tau(t)))| = 0$$

donc pour tout $\tilde{\varepsilon} > 0$, il existe un entier positif N lorsque $m > N$, on a

$$|f(t, V_m(\tau(t))) - f(t, V(\tau(t)))| < \frac{\Gamma(\alpha)\tilde{\varepsilon}}{h^\alpha} \alpha \quad (3.31)$$

À partir de (3.29), nous avons

$$\begin{aligned} \left| (\tilde{T}V_m)(t) - (\tilde{T}V)(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, V_m(\tau(s))) - f(s, V(\tau(s)))) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, V_m(\tau(s))) - f(s, V(\tau(s)))| ds, \end{aligned}$$

d'après (3.31), on aura

$$\begin{aligned} \left| (\tilde{T}V_m)(t) - (\tilde{T}V)(t) \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \frac{\Gamma(\alpha)\tilde{\varepsilon}}{h^\alpha} \alpha \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{h^\alpha}{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\tilde{\varepsilon}}{h^\alpha} \alpha \\ &\leq \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{\varepsilon}$ est arbitrairement petit, alors on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| (\tilde{T}V_m)(t) - (\tilde{T}V)(t) \right| = 0,$$

ce qui implique que $\tilde{T}$ est continu.

Maintenant, on va montrer que $\tilde{T}$ est compact, c'est à dire $\tilde{T}(\tilde{K})$ est relativement compact. Pour cela, il suffit de montrer que $\tilde{T}(\tilde{K})$ est uniformément borné et équicontinu sur $[0, h_1]$.

Étape 3 : Pour $V \in \tilde{K}$ et $t \in [0, h_1]$ on a :

$$\begin{aligned}
\left| (\tilde{T}V)(t) \right| &= \left| (\tilde{T}V)(t) - d_0 + d_0 \right| \\
&\leq \left| (\tilde{T}V)(t) - d_0 \right| + |d_0| \\
&\leq b_1 + |d_0|,
\end{aligned}$$

donc $\tilde{T}(\tilde{K})$ est uniformément borné.

Étape 4 : Soit $V \in \tilde{K}$ et $t_1, t_2 \in [0, h_1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| (\tilde{T}V)(t_1) - (\tilde{T}V)(t_2) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| - \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) f(s, V(\tau(s))) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, V(\tau(s))) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| |f(s, V(\tau(s)))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} |f(s, V(\tau(s)))| ds \\
&\leq \frac{M_3}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}| ds + \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s|^{\alpha-1} ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| (\tilde{T}V)(t_1) - (\tilde{T}V)(t_2) \right| &= \frac{M_3}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} (-(t_2 - s)^{\alpha-1} + (t_1 - s)^{\alpha-1}) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right) \\
&= \frac{M_3}{\Gamma(\alpha)\alpha} (((t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha + t_1^\alpha) + (t_2 - t_1)^\alpha).
\end{aligned}$$

avec $M_3 = \sup_{t \in I} |\tilde{g}(t)|$ et $\tilde{g}(t) = f(t, V(\tau(t)))$.

Puisque $\alpha > 0$, et d'après (3.18) – (3.19) on a

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \left| (\tilde{T}V)(t_1) - (\tilde{T}V)(t_2) \right| = 0.$$

Par conséquent, $\tilde{T}(\tilde{K})$ est équicontinu et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà $\tilde{T}$ est complète-

ment continue.

Finalement, d'après le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur $\tilde{T}$ admet au moins un point fixe dans $\tilde{K}$, et par conséquent le problème (3.1) – (3.2) – (CN) admet une solution.

Remarque 4. Dans les théorèmes 9 et 10, les conditions $(H_1) - (H_4)$ assurent l'existence d'au moins une solution pour les problèmes (3.1) – (3.2) – (CD) et (3.1) – (3.2) – (CN).

Maintenant, on va discuter l'unicité de la solution pour le problème (3.1) – (3.2) – (CD).

3.3 Unicité de la solution

Supposons que f satisfait l'hypothèse suivante

(H_5) : Il existe $L > 0$ telle que $|f(t, U_1) - f(t, U_2)| < L|U_1 - U_2|$, pour tout $t \in I$, et pour tous $U_1, U_2 \in \mathbb{R}$ et $\rho = \frac{(\lambda_1 M_1 + L)h^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} < 1$.

Théorème 11. (Unicité de la solution de l'équation (3.8))

Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_5) - (3.7)$ sont satisfaites, alors pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (3.8) admet une unique solution.

Preuve : Il suffit de montrer que l'opérateur T est contractant.

Pour $t \in I$ et $U_1, U_2 \in C(I, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
 |(TU_1)(t) - (TU_2)(t)| &= \left| -\lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U_1(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \right. \\
 &\quad \times f(s, U_1(\tau(s))) ds + \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) U_2(s) ds \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, U_2(\tau(s))) ds \right| \\
 &= \left| -\lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) (U_1(s) - U_2(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, U_1(\tau(s))) - f(s, U_2(\tau(s)))) ds \right| \\
 &\leq \lambda_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|a(s)\| \|U_1 - U_2\| ds \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, U_1(\tau(s))) - f(s, U_2(\tau(s)))| ds \\
 &\leq \lambda_1 \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \|U_1 - U_2\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \|U_1 - U_2\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{(\lambda_1 M_1 + L)h^\alpha}{\Gamma(\alpha)\alpha} \|U_1 - U_2\|,
 \end{aligned}$$

d'où

$$|(TU_1)(t) - (TU_2)(t)| \leq \rho \|U_1 - U_2\|.$$

D'après le théorème de Banach de l'application contractante, T admet un point fixe unique.

Remarque : Le théorème suivant assure l'unicité de la solution du problème (3.1) – (3.2) – (CD)

dans un cas particulier sous l'hypothèse :

$$(\mathbf{H}'_5) : |f(t, u_1) - f(t, u_2)| < L|u_1 - u_2|, \quad L > 0$$

tel que $\frac{LT_0^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} < 1$.

Théorème 12. (unicité de la solution du problème (3.1) – (3.2)) Supposons que les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}'_5) - (3.7)$ sont satisfaites, alors le problème (3.1) – (3.2) – (CD) admet une seule solution harmonique.

Preuve : On cherche des solutions harmoniques pour le problème (3.1)–(3.2) c'est à dire $\Delta u(x, t) = 0$.

Notre problème devient :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = f(t, u(x, \tau(t))). \quad t \in I \quad (3.1)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

et la condition au limite suivante :

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I. \quad (CD)$$

D'après le théorème 9, le problème (3.1) – (3.2) – (CD) admet au moins une solution.

Supposons que le problème (3.1) – (3.2) admet deux solutions $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ alors pour $t \in I$:

$${}^c D_t^\alpha u_1(x, t) = f(t, u_1(x, \tau(t))),$$

et

$${}^c D_t^\alpha u_2(x, t) = f(t, u_2(x, \tau(t))),$$

donc

$${}^c D_t^\alpha u_1(x, t) - {}^c D_t^\alpha u_2(x, t) = f(t, u_1(x, \tau(t))) - f(t, u_2(x, \tau(t))),$$

d'où

$$\begin{aligned} I^\alpha [{}^c D_t^\alpha u_1(x, t) - {}^c D_t^\alpha u_2(x, t)] &= I^\alpha [f(t, u_1(x, \tau(t))) - f(t, u_2(x, \tau(t)))] \\ u_1(x, t) - \varphi(x) - u_2(x, t) + \varphi(x) &= I^\alpha [f(t, u_1(x, \tau(t))) - f(t, u_2(x, \tau(t)))] \\ u_1(x, t) - u_2(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(t, u_1(x, \tau(s))) - f(t, u_2(x, \tau(s)))] ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L |u_1(x, \tau(s)) - u_2(x, \tau(s))| ds \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{L}{\alpha\Gamma(\alpha)} t^\alpha \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{LT_0^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{LT_0^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u_1 - u_2\|,$$

$$\text{où } \|u\| = \sup_{(x,t) \in \Omega \times I} |u(x, t)|$$

comme $\frac{LT_0^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} < 1$, alors on aura $u_1 = u_2$.

3.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple illustrant l'application de notre résultat.

Exemple 1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^{1/2} u(x, t) = t^2 \Delta u(x, t) - \frac{1}{2} t \left| u \left(x, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right|, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in I \\ u(x, 0) = x, & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in I. \end{cases} \quad (P)$$

où $I = [0, 1]$ et $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.

Dans cet exemple, on a

$$f(t, u(x, \tau(t))) = -\frac{1}{2} t \left| u \left(x, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right| \quad \text{avec} \quad \tau(t) = \frac{t}{\sqrt{2}} < t,$$

d'où

$$|f(t, u)| \leq m(t) |u|$$

avec $m(t) = t < 1$ et $(\int_0^1 |t|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta} < 1$, pour un certain $\beta \in (0, \frac{1}{2})$.

On a aussi

$$a(t) = t^2 \quad \text{et} \quad \left(\int_0^1 |t^2|^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta} < 1.$$

Les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ sont vérifiées, donc d'après le théorème 9 le problème (P) admet au moins une solution.

Pour les solutions harmoniques, on considère le même exemple avec $\Delta u(x, t) = 0$.

On vérifie facilement que la condition $(\mathbf{H}'_5)$ est satisfaite.

$$\begin{aligned} |f(t, u_1) - f(t, u_2)| &= \left| -\frac{t}{2} |u_1| + \frac{t}{2} |u_2| \right| \\ &\leq \frac{t}{2} |u_1 - u_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |u_1 - u_2|, \end{aligned}$$

et par conséquent, le problème (P) admet une unique solution harmonique.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons analysé un nouveau type d'équations mathématiques des équations aux dérivées partielles fractionnaires avec diffusion et retard non étudiés pendant mon cursus. Pour cela, nous avons proposé de donner un aperçu historique du développement de cette notion. Nous avons donc commencé par faire l'étude des approches les plus utilisées (approche de Riemann-Liouville, Caputo) pour comprendre le cadre théorique de ces équations.

Ces résultats ont été obtenus en utilisant la théorie des points fixes, en particulier on a utilisé le théorème du point fixe de Schauder, et le théorème de Banach de l'application contractante .

Bibliographie

- [1] K. Balachandran, An Introduction to Fractional Differential Equations, Springer Nature, 127-133, 2019.
- [2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, 1983.
- [3] M.M. El-Borai, Exact solutions for some fractional parabolic partial differential equations, Appl. Math. Comput. 206 :150-153, 2008.
- [4] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory. Springer, New York, 2003.
- [5] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, in : North Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [6] A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, Differential equations of fractional order : methods, results, and problems II, Appl. Anal. 81, 2002.
- [7] H. Le Dret, Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Vol 136. Springer, 2013.
- [8] Z. Ouyang, Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay. Computers & Mathematics with Applications. 61,4 :860-870, 2011.
- [9] P. O. Parisé, De l'inégalité de Jensen à l'inégalité arithmético-géométrique. 2017.
- [10] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1993.
- [11] S. Sarfati, M. Fegyveres, Mathématiques : Méthodes, savoir-faire et astuces. Editions Bréal, 1997.
- [12] V.S. Vladimirov, Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1981.
- [13] B. Zhu, L. Liu, Y. Wu, Existence and uniqueness of global mild solutions for a class of nonlinear fractional reaction-diffusion equations with delay, Computers & Mathematics with

Applications. 78,6 :1811-1818, 2019.

- [14] A. Yger, J.A. Weil, S. Abgrall, D. Aussel, J.P. Dedieu, Mathématiques L3-Mathématiques appliquées : Cours complet avec 500 tests et exercices corrigés, Pearson Education France, 2009.