

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



## Mémoire

pour obtenir le diplôme de Master

**Option:** Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques  
(PeMAB)

Sur le Thème :

**Résultats d'existence et d'unicité pour des équations  
différentielles fractionnaires avec condition aux limites sur  
le bord**

Présenté par :

**DJEMAA LEYLA**

Devant le jury composé de :

Président : **Mr.H.DIB**  
Examineur: **Mr. M. Yebdri.**  
Encadreur : **Mr. M.Derhab**

Prof. Université de Tlemcen.  
Prof Université de Tlemcen.  
Prof. Université de Tlemcen.

# *Remerciement*

*Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.*

*Je tiens en tout deuxième lieu à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Mr M.DERHAB pour son orientation, ses conseils ainsi que ses précieuses directions.*

*J'exprime ma profonde et respectueuse gratitude à Mr .H.DIB qui a l'honneur d'accepter de présider le jury.*

*Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Mr.M.YEBDRI pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail et faire partie de jury.*

*D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique du Département de Mathématiques.*

*En fin, un grand merci à toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de cette étude.*

Résultats d'existence et d'unicité pour des  
équations différentielles fractionnaires avec  
conditions aux limites sur le bord.

LEYLA DJEMAA

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1	Notations et définitions . . . . .	4
1.2	Dérivée et intégrale fractionnaires . . . . .	4
1.3	Théorèmes de point fixe . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires</b>	<b>7</b>
2.1	Existence et unicité des solutions . . . . .	7
2.2	Exemple . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Equations intégro-différentielles fractionnaires avec conditions initiale non locale.</b>	<b>27</b>
3.1	Existence et unicité des solutions . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Equations différentielles fractionnaires impulsives avec condition initiale intégrale.</b>	<b>39</b>
4.1	Introduction . . . . .	39
4.2	Existence et unicité des solutions . . . . .	47
4.3	Exemple . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Chapitre 1

## Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la chimie, la biologie et dans certains domaines de physiques tel que la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique.

Ce mémoire comprend quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on donne quelques définitions et résultats qui seront utiles pour la suite. Le deuxième chapitre est consacré à l'existence et l'unicité des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)), & 0 < t < 1, & 1 < q \leq 2, \\ \alpha x(0) + \beta \dot{x}(0) = \gamma_1, & \alpha x(1) + \beta \dot{x}(1) = \gamma_2, \end{cases} \quad (2-2)$$

où  ${}^c D$  est la dérivée fractionnaire de Caputo,  $f : [0, 1] \times X \longrightarrow X$  est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des nombres réels et  $X$  est un espace de Banach.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t k(t, s, x(s)) ds, & t \in [0, T], & 0 < q < 1, \\ x(0) = x_0 - g(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  ${}^c D$  dénote la dérivée fractionnaire de Caputo de l'ordre  $q$ ,  $f : [0, T] \times X \longrightarrow X$ ,  $k : [0, T] \times [0, T] \times X \longrightarrow X$  sont deux fonctions continues, et

$g : C \longrightarrow C$  est une fonction continue.  $X$  est un espace de Banach et  $C$  est l'espace de Banach des fonctions continues de  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ .

Et dans le dernier chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t), \int_0^t k(t, s, y(s)) ds), \quad t \in J' := J \setminus \{t_1, \dots, t_m\}, \quad J = [0, 1], \\ y(t_k^+) = y(t_k^-) + y_k, \quad y_k \in \mathbb{R} \\ y(0) = \int_0^1 g(s) y(s) ds, \end{array} \right.$$

où  $k = 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  ${}^c D^\alpha$  est la dérivé fractionnaire de Caputo,  $X$  est un espace de Banach,  $f : J \times X \times X \longrightarrow X$  est une fonction donnée,  $k : \Delta \times X \longrightarrow X$ ,  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ ,  $g(t) \in [0, 1]$  et  $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$ ,  $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$ ,  $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$  et  $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t_k + h)$  représentent les limites à droite et à gauches de  $y(t)$  en  $t = t_k$ .

Finalement, on donne une conclusion du travail effectu, et on termine ce mémoire par une bibliographie.

**Mots clés:** Equations différentielles, fractionnaires, existence et unicité de solution, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, condition initiale non locale.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre on donne quelques définitions et résultats qui seront utiles pour la suite de ce travail.

### 1.1 Notations et définitions

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les notations suivantes:

Soit  $N := [a, b]$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $X$  est un espace de Banach.

On note par  $C(N, X)$  l'espace de Banach des fonctions continues  $y : N \rightarrow X$ , muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} := \sup \{\|y(t)\|, t \in N\}.$$

**Définition 1.1.1** [9] Soit  $X$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow X$  une application. Un élément  $x$  de  $X$  est dit point fixe de  $T$  si  $Tx = x$ .

**Définition 1.1.2** On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction notée  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

où  $z$  est un nombre complexe quelconque tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

### 1.2 Dérivée et intégrale fractionnaires

Dans cette section, on donne quelques définitions et résultats concernant la dérivée et l'intégrale fractionnaires.

**Définition 1.2.1** *L'intégrale fractionnaire d'ordre  $q$  est définie par*

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds \text{ avec } q > 0.$$

**Définition 1.2.2** *Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. La dérivée fractionnaire d'ordre  $q$  au sens de Riemann-Liouville de  $f$  est définie par*

$${}^{RL}D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} f(s) ds \text{ avec } n = [q] + 1,$$

où  $[q]$  est la partie entière du réel  $q$ .

**Définition 1.2.3** *Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. La dérivée fractionnaire d'ordre  $q$  au sens de Caputo de  $f$  est définie par*

$${}^C D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} \left( \frac{d}{ds} \right)^n f(s) ds, \text{ avec } n = [q] + 1.$$

**Remarque 1.2.4** *la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est égale à 0.*

**Proposition 1.2.5** *[4][7]*

*Pour tout  $q_1 > 0$  et  $q_2 > 0$  et  $f$  une fonction, On a les propriétés suivantes:*

- i) L'opérateur integral  $I^q$  est linéaire;*
- ii)  $I^{q_1} I^{q_2} f(t) = I^{q_1+q_2} f(t)$ ,*
- iii)  $I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - f(a)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,*
- iv)  ${}^C D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$ ,*

**Lemme 1.2.6** *[10] Soit  $q > 0$ , alors l'équation différentielle  ${}^C D^q f(t) = 0$  a pour solutions*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, \text{ avec } c_i \in \mathbb{R}, \text{ et } n = [q] + 1.$$

**Lemme 1.2.7** *[8][10] Soit  $q > 0$ , alors*

$$I^q ({}^C D^q f(t)) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

avec  $c_i \in \mathbb{R}$ , et  $n = [q] + 1$ .

### 1.3 Théorèmes de point fixe

Nous avons besoin de des théorèmes de point fixe suivants

**Définition 1.3.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $T : X \rightarrow Y$ , un opérateur linéaire, on dit que  $T$  est compact si pour tout  $B_u$ , on a  $T(B_u)$  est relativement compacte avec

$$B_u = \{x \in X, \|x\| \leq u\}.$$

**Remarque 1.3.2** L'ensemble  $\{Tx/x \in X\}$ , est dit relativement compacte dans  $X$  si son adhérence est compact.

**Théorème 1 (Théorème d'Arzèla Ascoli)** Soit  $I$  un intervalle fermé et borné de  $\mathbb{R}$ . Un sous ensemble  $A$  de  $C(I, X)$ , est dit relativement compacte dans  $C(I, X)$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

i)  $A$  est uniformément borné, c'est-à-dire

$$\exists k > 0, \forall u \in A \text{ on a } \|u\|_\infty = \sup_{x \in I} |u(x)| \leq k,$$

ii)  $A$  est équicontinue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in I, \forall u \in A \text{ telle que } (|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon) \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**Théorème 2 (Théorème du point fixe de Banach)** Soit  $(U, d)$  un espace métrique, complet et soit  $T : U \rightarrow U$  une application telle que

$$\forall x, y \in U, d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \text{ avec } k \in [0, 1[,$$

alors l'application  $T$  admet un unique point fixe  $u^* \in U$ .

**Théorème 3 (Théorème de Krasnoselskii)** Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $M$  un sous ensemble convexe, fermé et non vide de  $X$ . Soit  $A, B$  deux opérateurs telles que:

i)  $Ax + By \in M$ , pour tous  $x, y \in M$ ,

ii)  $A$  est compact et continu,

iii)  $B$  est contractant,

Alors il existe  $z \in M$  tel que  $z = Az + Bz$ .

## Chapitre 2

# Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)), & 0 < t < 1, & 1 < q \leq 2, \\ \alpha x(0) + \beta \dot{x}(0) = \gamma_1, & \alpha x(1) + \beta \dot{x}(1) = \gamma_2, \end{cases} \quad (2-2)$$

avec  ${}^c D$  est la dérivée fractionnaire de Caputo,  $f : [0, 1] \times X \rightarrow X$  est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des nombres réels et  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

Les résultats de ce travail se trouvent dans [2].

### 2.1 Existence et unicité des solutions

**Lemme 2.1.1** *Soit  $1 < q \leq 2$  et  $\zeta : [0, 1] \rightarrow X$  une fonction continue, alors le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = \zeta(t), & 0 < t < 1, \\ \alpha x(0) + \beta \dot{x}(0) = \gamma_1, & \alpha x(1) + \beta \dot{x}(1) = \gamma_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

*admet une unique solution donnée par*

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) \zeta(s) ds + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha(1-t) + \beta) \gamma_1 + (\alpha t - \beta) \gamma_2],$$

avec  $G(t, s)$  est la fonction de Green définie par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Démonstration :** Comme  $q \in ]1, 2]$  alors  $n = [q] + 1 = 2$ , donc d'après le lemme (1.2.7), on a

$$I^q ({}^C D^q x(t)) = x(t) + c_0 + c_1 t,$$

où  $c_0$  et  $c_1$  sont deux constantes réelles.

D'après l'égalité précédente, on a

$$x(t) = I^q \zeta(t) - c_0 - c_1 t. \quad (*.1)$$

Déterminons les constantes  $c_0$  et  $c_1$ .

D'après (\*.1), on a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [(t-s)^{q-1} \zeta(s) ds] + 0 - c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (q-1)(t-s)^{q-2} \zeta(s) ds - c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} \zeta(s) ds - c_1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} \zeta(s) ds - c_1. \quad (*.2)$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -\alpha c_0 - \beta c_1 = \gamma_1, & (1) \\ \alpha \left[ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds - c_0 - c_1 \right] + \beta \left[ \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds - c_1 \right] = \gamma_2. & (2) \end{cases}$$

La solution de ce système algébrique est

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{\alpha} (\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds + \frac{\beta}{\alpha \Gamma(q-1)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds, \\ \text{et} \\ c_0 = \frac{1}{\alpha^2} [\beta \gamma_2 - (\alpha + \beta) \gamma_1] - \frac{\beta}{\alpha \Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds \\ \quad - \frac{\beta^2}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds. \end{array} \right.$$

Par suite d'après (\*.1), il résulte que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \zeta(s) ds - \frac{1}{\alpha^2} [\beta \gamma_2 - (\alpha + \beta) \gamma_1] + \frac{\beta}{\alpha \Gamma(q)} \left[ \int_0^t (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^1 (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds \right] + \frac{\beta^2}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \left[ \int_0^t (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds + \int_t^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds \right] \\ &\quad + \frac{t}{\alpha} (\gamma_2 - \gamma_1) - \frac{t}{\Gamma(q)} \left[ \int_0^t (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds + \int_t^1 (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds \right] \\ &\quad - \frac{\beta t}{\alpha \Gamma(q-1)} \left[ \int_0^t (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds + \int_t^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds \right] \\ &= \int_0^t \left[ \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + \beta(1-s)^{q-1} - \alpha t(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta^2(1-s)^{q-2} - \alpha \beta t(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right] \zeta(s) ds + \int_t^1 \left[ \frac{\beta(1-s)^{q-1} - \alpha t(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta^2(1-s)^{q-2} - \alpha \beta t(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right] \zeta(s) ds + \frac{t}{\alpha} (\gamma_2 - \gamma_1) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^2} [\beta \gamma_2 - (\alpha + \beta) \gamma_1]. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \left[ \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \zeta(s) ds \\
&+ \int_t^1 \left[ \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \zeta(s) ds \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha t - \beta)\gamma_2 + (\alpha(1-t) + \beta)\gamma_1] \\
&= \int_0^1 G(t, s)\zeta(s) ds + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha t - \beta)\gamma_2 + (\alpha(1-t) + \beta)\gamma_1],
\end{aligned}$$

avec

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)}, & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

■

**Théorème 4** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach.

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites

H1)  $f : [0, 1] \times X \rightarrow X$  est une fonction continue,

H2)  $\exists L > 0$ , telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \text{ pour tout } t \in [0, 1], \text{ et pour tout } x, y \in X.$$

Si

$$L < \left[ \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)} \right]^{-1},$$

alors le problème aux limites (2.2) admet une unique solution.

**Démonstration :**

Transformons le problème (2.2) en un problème de point fixe.

On considère l'opérateur  $F$  défini par

$$F : C \longrightarrow C$$

$$(Fx)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s)) ds + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha(1-t) + \beta)\gamma_1 + (\alpha t - \beta)\gamma_2],$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Soit l'ensemble

$$B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\},$$

où  $B_r$  est un sous-ensemble fermé, borné et convexe.

Posons par définition

$$M = \sup_{t \in [0,1]} \|f(t, 0)\|.$$

Appliquons le théorème du point fixe de Banach.

Pour cela on doit vérifier les deux points suivants:

i)  $F(B_r) \subset B_r$ .

et

ii)  $F$  est contractant.

i) Montrons que  $F(B_r) \subset B_r$ .

Soit  $x \in B_r$ , on a

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left[ \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \right. \\ &\quad \left. f(s, x(s)) ds + \int_t^1 \left[ \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \right. \\ &\quad \left. f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha t - \beta)\gamma_2 + (\alpha(1-t) + \beta)\gamma_1] \right\| \\ &\leq \int_0^t \left[ \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \\ &\quad \|f(s, x(s))\| ds + \int_t^1 \left[ \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \\ &\quad \|f(s, x(s))\| ds + \frac{1}{\alpha^2} [(|\alpha t - \beta|)|\gamma_2| + (\alpha(|1-t|) + \beta)|\gamma_1|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \\
&\quad \|f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)\| ds \\
&\quad + \int_t^1 \left[ \frac{|\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] \\
&\quad \|f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)\| ds + \frac{1}{\alpha^2} [|\alpha t - \beta| |\gamma_2| + (\alpha |1-t| + \beta) |\gamma_1|] \\
&\leq \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \\
&\quad [ \|f(s, x(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\| ] ds \\
&\quad + \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \\
&\quad [ \|f(s, x(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\| ] ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} [|\alpha t - \beta| |\gamma_2| + (\alpha |1-t| + \beta) |\gamma_1|]
\end{aligned}$$

Si on pose

$$\Delta_1 = \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right)$$

$$[ \|f(s, x(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\| ] ds,$$

$$\Delta_2 = \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right)$$

$$[ \|f(s, x(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\| ] ds,$$

et

$$\Delta_3 = \frac{1}{\alpha^2} [|\alpha t - \beta| |\gamma_2| + (\alpha |1-t| + \beta) |\gamma_1|],$$

Comme  $f$  est lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned} \|f(s, x(s)) - f(s, 0)\| &\leq L \|x\|, \quad \forall x \in B_r, \\ &\leq Lr. \end{aligned}$$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) (Lr + M) ds, \\ &= (Lr + M) \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds \quad (*.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\leq \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) (Lr + M) ds \\ &= (Lr + M) \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{|\beta^2 - \alpha\beta t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds, \quad (*.2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{1}{\alpha^2} [|\alpha t - \beta| |\gamma_2| + (\alpha |1-t| + \beta) |\gamma_1|] \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha + \beta) |\gamma_2| + (\alpha + \beta) |\gamma_1|] \\ &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|), \quad (*.3) \end{aligned}$$

donc, d'après (\*.1), (\*.2) et (\*.3), on obtient:

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t)\| &\leq (Lr + M) \left[ \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds + \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|) \\
&= (Lr + M) \left[ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha\Gamma(q)} \int_0^t (1-s)^{q-1} ds + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \int_0^t (1-s)^{q-2} ds + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha\Gamma(q)} \int_t^1 (1-s)^{q-1} ds + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \int_t^1 (1-s)^{q-2} ds \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|) \\
&= (Lr + M) \left[ \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha\Gamma(q)} \left( \frac{-(1-t)^q}{q} + \frac{1}{q} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \left( \frac{-(1-t)^q}{q-1} + \frac{1}{q-1} \right) + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha\Gamma(q)} \left( \frac{(1-t)^q}{q} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta|\beta - \alpha t|}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \left( \frac{(1-t)^q}{q-1} \right) \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|). \\
&\leq (Lr + M) \left[ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|) \\
&= (Lr + M) \left[ \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|) \\
&= L \left( \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right) r + M \left( \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right) + \\
&\quad \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|)
\end{aligned}$$

Si on prend

$$r \geq 2 \max \left\{ L \left( \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right), M \left( \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_2| + |\gamma_1|) \right\},$$

on obtient

$$\|(Fx)(t)\| \leq r.$$

C'est-à-dire

$$F(B_r) \subset B_r.$$

ii) Montrons que  $F$  est contractant.

Soient  $x, y \in C$  et  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left[ \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds + \right. \\ &\quad \left. \int_t^1 \left[ \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse  $(H_2)$  du théorème (4), on a

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|_C, \forall t \in [0, 1], x, y \in X.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \|Fx - Fy\| &\leq L \|x - y\|_C \left[ \int_0^t \left[ \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} ds \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_t^1 \left[ \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L \|x - y\|_C \left[ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha \Gamma(q)} \int_0^t (1-s)^{q-1} ds \right. \\
&\quad + \frac{\beta |\beta - \alpha t|}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \int_0^t (1-s)^{q-2} ds + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha \Gamma(q)} \int_t^1 (1-s)^{q-1} ds \\
&\quad \left. + \frac{\beta |\beta - \alpha t|}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \int_t^1 (1-s)^{q-2} ds \right] \\
&= L \|x - y\|_C \left[ \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha \Gamma(q+1)} [1 - (1-t)^q] \right. \\
&\quad + \frac{\beta |\beta - \alpha t|}{\alpha^2 \Gamma(q)} [1 - (1-t)^{q-1}] \\
&\quad \left. + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha \Gamma(q+1)} (1-t)^q + \frac{\beta |\beta - \alpha t|}{\alpha^2 \Gamma(q)} (1-t)^{q-1} \right] \\
&\leq L \|x - y\|_C \left[ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\beta + \alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right] \\
&= L \|x - y\|_C \left[ \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right] \\
&= k_{\alpha, \beta, L, q} \|x - y\|_C,
\end{aligned}$$

avec

$$k_{\alpha, \beta, L, q} = L \left[ \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right].$$

Comme

$$L < \left[ \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right]^{-1},$$

on obtient que  $k_{\alpha, \beta, L, q} < 1$  c'est-à-dire  $F$  est contractant et par suite le problème (2.2) admet une unique solution. ■

**Théorème 5** *On suppose que  $f : [0, 1] \times X \rightarrow X$  est une fonction continue satisfait les hypothèses suivantes*

$$(A_1) \quad \exists L > 0 \text{ telle que } \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \forall t \in [0, 1], x, y \in X,$$

(A<sub>2</sub>)  $\|f(t, x)\| \leq \mu(t), \forall (t, x) \in [0, 1] \times X$  et  $\mu \in C([0, 1], \mathbb{R}^+)$ .

Si  $L\left(\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)}\right) < 1$ , alors le problème aux limites (2.2) admet au moins une solution dans  $[0, 1]$ .

**Démonstration :**

On considère l'ensemble suivant

$$B_r = \{x \in X, \|x\| \leq r\}.$$

Où  $B_r$  est un sous ensemble d'un espace de Banach et de plus il est fermé, convexe et non vide.

Soient deux opérateurs  $A$  et  $B$  définies par

$$\begin{aligned} A: C &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow Ax, \end{aligned}$$

avec

$$(Ax)(t) = \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds,$$

et

$$\begin{aligned} B: C &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow Bx, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (Bx)(t) &= \int_t^1 \left( \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha(1-t) + \beta)\gamma_1 + (\alpha t - \beta)\gamma_2]. \end{aligned}$$

i) Montrons que  $Ax + Bx \in B_r$  pour tout  $x, y \in B_r$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments quelconques de  $B_r$  et soit  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t) + (By)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^1 \left( \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha(1-t) + \beta)\gamma_1 + (\alpha t - \beta)\gamma_2] \right\| \\
&\leq \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha|1-t| + \beta)\gamma_1 + |\alpha t - \beta|\gamma_2]
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse  $(A_2)$  du théorème (5), on obtient

$$\begin{aligned}
\|Ax + By\|_C &\leq \int_0^t \mu(s) \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds \\
&\quad + \int_t^1 \mu(s) \left( \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha|1-t| + \beta)\gamma_1 + |\alpha t - \beta|\gamma_2] \\
&\leq \left[ \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta|\beta - \alpha t|}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] \sup_{t \in [0,1]} \mu(t) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} [(\alpha|1-t| + \beta)\gamma_1 + |\alpha t - \beta|\gamma_2] \\
&\leq \|\mu\|_C \left[ \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_1| + |\gamma_2|)
\end{aligned}$$

Si on prend

$$r \geq \|\mu\|_C \left[ \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (|\gamma_1| + |\gamma_2|),$$

on obtient

$$\|Ax + By\|_C \leq r.$$

C'est-à-dire

$$Ax + By \in B_r.$$

ii) Montrons que  $A$  est un opérateur compact.

Pour cela, on utilise le théorème d'Arzéla Ascoli.

ii-1) Montrons que  $A$  est uniformément borné.

Soient  $x \in C$ , et  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \|f(s, x(s))\| ds
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse  $(A_2)$  du théorème (5), on a

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t)\| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \mu(t) \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta |\beta - \alpha t| (1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right) ds \\
&= \sup_{t \in [0,1]} \mu(t) \left[ \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha \Gamma(q+1)} (1 - (1-t)^q) + \frac{\beta |\beta - \alpha t|}{\alpha^2 \Gamma(q)} (1 - (1-t)^{q-1}) \right] \\
&\leq \|\mu\|_C \left( \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\beta}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\|Ax\|_C \leq \frac{\|\mu\|_C}{\Gamma(q)} \left( \frac{1}{q} + \frac{\beta}{\alpha q} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right).$$

Donc  $A$  est uniformément borné.

ii-2) Montrons que la famille  $\{Ax, x \in B_r\}$  est équicontinue.

On pose

$$\Omega = [0, 1] \times B_r,$$

et

$$c := \sup_{(t,x) \in \Omega} \|f(t,x)\|,$$

Pour tout  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  avec  $t_1 < t_2$  on a

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| &= \left\| \int_0^{t_1} \left( \frac{\alpha(t_1-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t_1)(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta(\beta - \alpha t_1)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_2} \left( \frac{\alpha(t_2-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta(\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^{t_1} \left( \frac{\alpha(t_1-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t_1)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t_1)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad - \int_0^{t_1} \left( \frac{\alpha(t_2-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \\
&\quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\alpha(t_2-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{t_1} \frac{[(t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}]}{\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad + \int_0^{t_1} \left[ \frac{(\beta - \alpha t_1) - (\beta - \alpha t_2)}{\alpha\Gamma(q)} \right] (1-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad + \int_0^{t_1} \left[ \frac{\beta(\beta - \alpha t_1) - \beta(\beta - \alpha t_2)}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right] (1-s)^{q-2} f(s, x(s)) ds \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds \\
&\quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta(\beta - \alpha t_2)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\quad + \frac{\beta(t_2 - t_1)}{\alpha\Gamma(q-1)} \int_0^{t_1} (1-s)^{q-2} \|f(s, x(s))\| ds + \frac{\beta|\beta - \alpha t_2|}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \int_{t_1}^{t_2} (1-s)^{q-2} \|f(s, x(s))\| ds \\
&\leq \int_0^{t_1} \frac{[(t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}]}{\Gamma(q)} \|f(s, x(s))\| ds + \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (1-s)^{q-1} \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \frac{\beta(t_2 - t_1)}{\alpha\Gamma(q-1)} \int_0^{t_1} (1-s)^{q-2} \|f(s, x(s))\| ds + \frac{\beta|\beta - \alpha t_2|}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \int_{t_1}^{t_2} (1-s)^{q-2} \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \|f(s, x(s))\| ds + \frac{|\beta - \alpha t_2|}{\alpha\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (1-s)^{q-1} \|f(s, x(s))\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \left[ \frac{t_1^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{(t_2 - t_1)^q}{\Gamma(q+1)} - \frac{t_2^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(q+1)} (1 - (1 - t_1)^q) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta(t_1 - t_2)}{\alpha\Gamma(q)} (1 - (1 - t_1)^q) + \frac{\beta|\beta - \alpha t_2|}{\alpha^2\Gamma(q)} [(1 - t_1)^q - (1 - t_2)^q] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(t_2 - t_1)^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\beta - \alpha t_2|}{\Gamma(q+1)} [(1 - t_1)^q - (1 - t_2)^q] \right] \\
&\leq c \left[ \frac{t_1^q}{\Gamma(q+1)} + 2\frac{(t_2 - t_1)^q}{\Gamma(q+1)} - \frac{t_2^q}{\Gamma(q+1)} \right] \\
&= \frac{c}{\Gamma(q+1)} [t_1^q - t_2^q + 2(t_2 - t_1)^q]
\end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| \leq \frac{c}{\Gamma(q+1)} [t_1^q - t_2^q + 2(t_2 - t_1)^q].$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , un nombre arbitrairement choisi, alors il existe  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  telle que

$$\text{La condition } |t_1 - t_2| < \delta_1(\varepsilon) \text{ entraîne que } |t_1^q - t_2^q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe  $\delta_2(\varepsilon) > 0$  telle que

$$\text{La condition } |t_1 - t_2| < \delta_2(\varepsilon) \text{ entraîne que } 2|(t_2 - t_1)^q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite si on prend  $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ , on obtient que

$$\text{La condition } |t_1 - t_2| < \delta_2(\varepsilon) \text{ entraîne que } \frac{c}{\Gamma(q+1)} [t_1^q - t_2^q + 2(t_2 - t_1)^q] < \frac{c}{\Gamma(q+1)} \varepsilon.$$

Par suite, on obtient que la famille  $\{Ax, x \in B_r\}$  est équicontinue.

Donc d'après le théorème d'Arzela Ascoli  $A$  est un opérateur compact.

ii-3) Montrons que  $A$  est continu au sens de  $C([0, 1], X)$

Pour cela, on considère une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonction d'éléments de  $C$  telle que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ au sens de } C,$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \|x_n(t) - x(t)\| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \right. \\
&\quad \left. [f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) \\
&\quad [ \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ] ds \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(q)} \|x_n - x\|_C \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds
\end{aligned}$$

Dons on a,

$$\begin{aligned}
\|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq L \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds \sup_{t \in [0,1]} \|x_n(t) - x(t)\|.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,1]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq L \left[ \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t \left( \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\beta|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} \right) ds \right] \sup_{t \in [0,1]} \|x_n(t) - x(t)\| \\
&= L \left( \frac{1}{\Gamma(q+1)} \right) \sup_{t \in [0,1]} \|x_n(t) - x(t)\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, il résulte que,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in [0,1]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{L}{\Gamma(q+1)} \sup_{t \in [0,1]} \|x_n(t) - x(t)\| \right] \\ &= \frac{L}{\Gamma(q+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} \|x_n(t) - x(t)\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in [0,1]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \right) = 0,$$

donc  $A$  est un opérateur continu.

De plus,  $A$  est compact, alors  $c$  est un opérateur complètement continu.

iii) Montrons que  $B$  est contractant.

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $C$  et soit  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} \|(Bx)(t) - (By)(t)\| &= \left\| \int_t^1 \left( \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right) \\ &\quad \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq L \|x - y\|_C \int_t^1 \left( \frac{|\beta - \alpha t|(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta |\beta - \alpha t|(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right) ds \\ &= L \|x - y\|_C \left[ \frac{|\beta - \alpha t|}{\alpha \Gamma(q+1)} (1-t)^q + \frac{\beta |\beta - \alpha t|}{\alpha^2 \Gamma(q)} (1-t)^{q-1} \right] \\ &\leq L \|x - y\|_C \left[ \frac{\beta + \alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right] \\ &= k_{\alpha, \beta, q, L} \|x - y\|_C, \end{aligned}$$

avec

$$k_{\alpha,\beta,q,L} = L \left[ \frac{\beta + \alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right].$$

D'après le théorème (5), si  $L \left[ \frac{\beta + \alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] < 1$  alors  $B$  est contractante.

En conclusion  $A$  est un opérateur complètement continu et  $B$  est contractante, donc d'après le théorème de Krasnolskii, le problème (2.2) admet au moins une solution dans  $[0, 1]$ . ■

## 2.2 Exemple

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = \frac{\cos(t)}{(t+5)^2} \frac{\|x\|}{1+\|x\|} & t \in [0, 1], \\ x(0) + \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) + \dot{x}(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

avec  $f(t, x) = \frac{\cos(t)}{(t+5)^2} \frac{\|x\|}{1+\|x\|}$  et  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \alpha = \beta = 1$ .

Montrons que  $f$  est Lipschitzienne

$$\begin{aligned} \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| &= \left\| \frac{\cos(t)}{(t+5)^2} \left( \frac{\|x\|}{1+\|x\|} - \frac{\|y\|}{1+\|y\|} \right) \right\| \\ &= \left| \frac{\cos(t)}{(t+5)^2} \right| \left\| \frac{\|x\| - \|y\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{25} (\|x\| - \|y\|) \\ &\leq \frac{1}{25} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Donc  $f$  est Lipschitzien avec  $L = \frac{1}{25}$ , donc l'hypothèse  $(A_1)$  du théorème

(5) est satisfaite et de plus

$$\begin{aligned}
 L \left[ \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta(\beta + \alpha)}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] &= \frac{1}{25} \left[ \frac{3}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right] \\
 &= \frac{1}{25} \left[ \frac{3}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{2}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \\
 &= \frac{8}{25\sqrt{\pi}} \\
 &< 1.
 \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème (5), le problème aux limites (1) a une solution unique dans  $[0, 1]$ .

# Chapitre 3

## Equations intégro-différentielles fractionnaires avec conditions initiale non locale.

Dans ce chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour le problème suivant

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t k(t, s, x(s)) ds, & t \in [0, T], \quad 0 < q < 1, \\ x(0) = x_0 - g(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  ${}^cD$  dénote la dérivée fractionnaire de Caputo de l'ordre  $q$ ,  $f : [0, T] \times X \longrightarrow X$ ,  $k : [0, T] \times [0, T] \times X \longrightarrow X$  sont deux fonctions continues et  $g : C \longrightarrow C$  est une fonction continue.  $X$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$ .

Les résultats de ce travail se trouvent dans [3]

### 3.1 Existence et unicité des solutions

**Théorème 6** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

$$(A_1) \quad \exists L_1 > 0 \text{ tel que } \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_1 \|x - y\|, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x, y \in X;$$

$$(A_2) \quad \exists L_2 > 0 \text{ tel que } \|k(t, s, x) - k(t, s, y)\| \leq L_2 \|x - y\|, \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x, y \in X;$$

$$(A_3) \quad \|g(x) - g(y)\| \leq b \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Si  $b < \frac{1}{2}$ ,  $L_1 \leq \frac{\Gamma(q+1)}{4T^q}$  et  $L_2 \leq \frac{\Gamma(q+2)}{4T^{q+1}}$ , alors le problème (3.3) admet une unique solution dans  $[0, T]$ .

**Démonstration :**

Transformons le problème (3.3) en un problème de point fixe, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + I^q \left[ f(t, x(t)) + \int_0^t k(t, s, x(s)) ds \right] \\ &= x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds \end{aligned}$$

On considère l'opérateur  $F$  définie par

$$F : C \longrightarrow C$$

$$(Fx)(t) = x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds,$$

et considérons la boule fermée, borné et non vide définie par

$$B_r = \{x \in C, \|x\| \leq r\}$$

et posons

$$M_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t, 0)\|, \quad M_2 = \sup_{s, t \in [0, T]} \|k(t, s, 0)\| \quad \text{et} \quad G = \sup_{x \in C} \|g(x)\|.$$

Appliquons le théorème du point fixe de Banach.

Pour cela on doit vérifier les deux points suivant:

i)  $F(B_r) \subset B_r$ ,

et

ii)  $F$  est contractante.

i) Montrons que  $F(B_r) \subset B_r$ .

Soit  $x \in C$ , on a

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t)\| &= \left\| x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds \right\| \\ &\leq \|g(x)\| + \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [\|f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)\|] ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ \int_0^s \|k(s, \tau, x(\tau)) - k(s, \tau, 0)\| d\tau \right] ds \end{aligned}$$

Comme  $f$  et  $k$  sont lipschitziennes, on obtient

$$\begin{aligned}\|f(s, x(s)) - f(s, 0)\| &\leq L_1 \|x\| \\ &\leq L_1 r,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|k(s, \tau, x(\tau)) - k(s, \tau, 0)\| &\leq L_2 \|x\| \\ &\leq L_2 r.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)\| &\leq \|x_0\| + G + \frac{(L_1 r + M_1)}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds \\ &\quad + \frac{(L_2 r + M_2)}{\Gamma(q)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{q-1} d\tau ds \\ &= \|x_0\| + G + \frac{(L_1 r + M_1)}{\Gamma(q+1)} t^q + \frac{(L_2 r + M_2)}{\Gamma(q)} \int_0^t s(t-s)^{q-1} ds.\end{aligned}$$

On fait une intégrale par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)\| &\leq \|x_0\| + G + \frac{(L_1 r + M_1)}{\Gamma(q+1)} t^q + \frac{(L_2 r + M_2)}{\Gamma(q+2)} t^{q+1}, \quad \forall t \in [0, T], \\ &\leq \|x_0\| + G + \frac{(L_1 r + M_1)}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{(L_2 r + M_2)}{\Gamma(q+2)} T^{q+1}.\end{aligned}$$

Comme

$$L_1 \leq \frac{\Gamma(q+1)}{4T^q} \quad \text{et} \quad L_2 \leq \frac{\Gamma(q+2)}{4T^{q+1}},$$

alors

$$\frac{L_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{L_2 T^{q+1}}{\Gamma(q+2)} \leq \frac{1}{2},$$

donc

$$\|x_0\| + G + \frac{M_1}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{M_2}{\Gamma(q+2)} T^{q+1} \leq \frac{r}{2}.$$

Si on prend

$$r \geq 2 \left[ \|x_0\| + G + \frac{M_1}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{M_2}{\Gamma(q+2)} T^{q+1} \right],$$

on obtient que

$$\|(Fx)(t)\| \leq r,$$

en conclusion  $F(B_r) \subset B_r$ .

ii) Montrons que  $F$  est contractante

Soient  $x, y \in C$  et  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left( \int_0^s (k(s, \tau, x(\tau)) - k(s, \tau, y(\tau))) d\tau \right) ds \right. \\ &\quad \left. + g(x) - g(y) \right\| \\ &\leq \|g(x) - g(y)\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ \int_0^s \|k(s, \tau, x(\tau)) - k(s, \tau, y(\tau))\| d\tau \right] ds, \end{aligned}$$

d'après les hypothèses de théorème (6), on a

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left[ L_1 \|x - y\|_C \int_0^t (t-s)^{q-1} ds + \right. \\ &\quad \left. L_2 \|x - y\|_C \int_0^t (t-s)^{q-1} \int_0^s d\tau ds \right] + b \|x - y\|_C \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left[ \frac{L_1}{q} t^q \|x - y\|_C + \frac{L_2}{q(q+1)} t^{q+1} \|x - y\|_C \right] + b \|x - y\|_C \\ &= \left( b + \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} t^q + \frac{L_2 t^{q+1}}{\Gamma(q+2)} \right) \|x - y\|_C \quad \forall t \in [0, T] \\ &\leq \left( b + \frac{L_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{L_2 T^{q+1}}{\Gamma(q+2)} \right) \|x - y\|_C \\ &= k_{b, L_1, L_2, T, q} \|x - y\|_C. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| \leq k_{b, L_1, L_2, T, q} \|x - y\|_C,$$

avec

$$k_{b, L_1, L_2, T, q} = b + \frac{L_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{L_2 T^{q+1}}{\Gamma(q+2)},$$

si on suppose que  $k_{b,L_1,L_2,T,q} < 1$ , on obtient

$$\|Fx - Fy\|_C < \|x - y\|_C.$$

Donc  $F$  est contractante et par suite, le problème de Cauchy (3.3) admet une unique solution dans  $[0, T]$ . ■

**Théorème 7** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

$$(B_1) \quad \|f(t, x)\| \leq \mu(t), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times X, \quad \|k(t, s, x)\| \leq \sigma(t), \quad \forall (t, s, x) \in [0, T] \times [0, T] \times X, \text{ avec } \mu, \sigma \in C([0, T], \mathbb{R}^+),$$

$$(B_2) \quad \|g(x) - g(y)\| \leq b \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C, \quad b < 1.$$

Alors le problème (3.3) admet au moins une solution dans  $[0, T]$ .

**Démonstration :**

On considère  $B_r = \{x \in X : x \leq r\}$  un sous ensemble de Banach fermé, convexe et non vide.

Soient deux opérateurs  $A$  et  $B$  définies par

$$\begin{aligned} A : C[0, T] &\longrightarrow C[0, T] \\ x &\longrightarrow Ax, \end{aligned}$$

$$(Ax)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds, \quad \text{avec } t \in [0, T]$$

et

$$\begin{aligned} B : C[0, T] &\longrightarrow C[0, T] \\ x &\longrightarrow Bx, \end{aligned}$$

$$(Bx)(t) = x_0 - g(x), \quad \text{avec } t \in [0, T].$$

i) Montrons que  $(Ax + By) \in B_r$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments quelconques de  $B_r$  et soit  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \|Ax + By\|_C &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds + x_0 - g(x) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ \|f(s, x(s))\| + \int_0^s \|k(s, \tau, x(\tau))\| d\tau \right] ds + \|x_0\| + G \\ &= \|x_0\| + G + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, x(s))\| ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \\ &\quad \left[ \int_0^s \|k(s, \tau, x(\tau))\| d\tau \right] ds. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses du théorème (7), on obtient

$$\begin{aligned}
\|Ax + By\|_C &\leq \|x_0\| + G + \sup_{t \in [0, T]} \mu(t) \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds + \sup_{t \in [0, T]} \sigma(t) \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t s (t-s)^{q-1} ds \\
&= \|x_0\| + G + \sup_{t \in [0, T]} \mu(t) \frac{1}{\Gamma(q+1)} t^q + \sup_{t \in [0, T]} \sigma(t) \frac{1}{\Gamma(q+2)} t^{q+1}, \forall t \in [0, T] \\
&= \|x_0\| + G + \frac{\|\mu(t)\|_C}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{\|\sigma(t)\|_C}{\Gamma(q+2)} T^{q+1}.
\end{aligned}$$

Si on prend

$$r \geq \|x_0\| + G + \frac{\|\mu(t)\|_C}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{\|\sigma(t)\|_C}{\Gamma(q+2)} T^{q+1},$$

on obtient

$$\|Ax + By\|_C \leq r.$$

C'est-à-dire

$$(Ax + By) \in B_r.$$

ii) Montrons que  $A$  est un opérateur compact.

Pour cela, on utilise le théorème d'Arzela Ascoli.

ii-1) Montrons que  $A$  est uniformément borné.

Soient  $x \in B_r$  et  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ f(s, x(s)) + \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, x(s))\| ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \int_0^s \|k(s, \tau, x(\tau))\| d\tau ds.
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses de théorème (7), on obtient

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t)\| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \mu(t) \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds + \sup_{t \in [0, T]} \sigma(t) \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t s (t-s)^{q-1} ds \\
&= \sup_{t \in [0, T]} \mu(t) \frac{1}{\Gamma(q+1)} t^q + \sup_{t \in [0, T]} \sigma(t) \frac{1}{\Gamma(q+2)} t^{q+1} \cdot \forall t \in [0, T] \\
&\leq \frac{\|\mu(t)\|_C}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{\|\sigma(t)\|_C}{\Gamma(q+2)} T^{q+1}
\end{aligned}$$

Par suite,  $A$  est uniformément borné.

ii-2) Montrons que la famille  $\{Ax, x \in B_r\}$  est équicontinue.

On pose:

$$\Omega_1 = [0, T] \times X \quad \text{et} \quad \Omega_2 = [0, T] \times [0, T] \times X.$$

Comme  $f$  et  $k$  sont deux fonctions bornés dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement, on pose

$$c_1 := \sup_{(t,x) \in \Omega_1} \|f(t, x)\| \quad \text{et} \quad c_2 := \sup_{(t,s,x) \in \Omega_2} \|k(t, s, x)\|.$$

Maintenant, pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T]$  avec  $t_1 < t_2$  et  $x \in B_r$  on a

$$\begin{aligned} \|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} \right. \\ &\quad \left[ \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} \right. \\
&\quad \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \right. \\
&\quad \left. \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}) \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \right\| \\
&\leq \frac{c_1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] ds \\
&\quad + \frac{c_2}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} s [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] ds \\
&\quad + \frac{c_1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} ds + \frac{c_2}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} s (t_2 - s)^{q-1} ds. \\
&= \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} [t_1^q + (t_2 - t_1)^q - t_2^q] \\
&\quad + \frac{c_2}{\Gamma(q)} \left[ \frac{t_1^{q+1}}{q(q+1)} + \frac{t_1(t_2 - t_1)^q}{q} + \frac{(t_2 - t_1)^{q+1}}{q(q+1)} - \frac{t_2^{q+1}}{q(q+1)} \right] \\
&\quad + \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q + \frac{c_2}{\Gamma(q)} \left[ \frac{t_1(t_2 - t_1)^q}{q} + \frac{(t_2 - t_1)^{q+1}}{q(q+1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} [t_1^q + 2(t_2 - t_1)^q - t_2^q] \\
&\quad + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} [t_1^{q+1} - t_2^{q+1} + 2(t_2 - t_1)^{q+1}] + \frac{c_2}{\Gamma(q+1)} (2t_1(t_2 - t_1)^q)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| &\leq \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} [t_1^q + 2(t_2 - t_1)^q - t_2^q] \\
&\quad + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} [t_1^{q+1} - t_2^{q+1} + 2(t_2 - t_1)^{q+1}] + \frac{c_2}{\Gamma(q+1)} (2t_1(t_2 - t_1)^q).
\end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a

$$|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon) \implies |t_2^q - t_1^q| < \alpha_1 \cdot \varepsilon \text{ et } |t_2^{q+1} - t_1^{q+1}| < \alpha_2 \cdot \varepsilon.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1}{\Gamma(q+1)} [t_1^q + 2(t_2 - t_1)^q - t_2^q] + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} [t_1^{q+1} - t_2^{q+1} + 2(t_2 - t_1)^{q+1}] \\
&\quad + \frac{c_2}{\Gamma(q+1)} (2t_1(t_2 - t_1)^q) \\
&\leq \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} [\alpha_1 \cdot \varepsilon + 2\delta^q(\varepsilon)] + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} [\alpha_2 \cdot \varepsilon + 2\delta^{q+1}(\varepsilon)] \\
&\quad + \frac{c_2}{\Gamma(q+1)} (2T\delta^q(\varepsilon)),
\end{aligned}$$

si on choisi  $\delta(\varepsilon) < 1$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1}{\Gamma(q+1)} [\alpha_1 \cdot \varepsilon + 2\delta^q(\varepsilon)] + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} [\alpha_2 \cdot \varepsilon + 2\delta^{q+1}(\varepsilon)] + \frac{c_2}{\Gamma(q+1)} (2T\delta^q(\varepsilon)) \\
&\leq \left[ \frac{\alpha_1 c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} \right] \varepsilon + 2 \left[ \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} + \frac{c_2 T}{\Gamma(q+1)} \right] \delta^q(\varepsilon) \quad (*)
\end{aligned}$$

Si on prend

$$\delta^q(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2 \left[ \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} + \frac{c_2 T}{\Gamma(q+1)} \right]},$$

on obtient

$$\|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| \leq \left[ \frac{\alpha_1 c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\alpha_2 c_2}{\Gamma(q+2)} + 1 \right] \varepsilon,$$

donc, on choisi

$$\delta(\varepsilon) = \min \left( 1, \frac{\varepsilon}{2 \left[ \frac{c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_2}{\Gamma(q+2)} + \frac{c_2 T}{\Gamma(q+1)} \right]} \right)$$

Alors, d'après le théorème d'Arzela Ascoli  $\{Ax, x \in B_r\}$  est un opérateur compact.

ii-3) Montrons que  $A$  est continu.

On considère une suite de fonctions  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $C$  telle que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ au sens de } C.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ \int_0^s (k(s, \tau, x_n(\tau)) - k(s, \tau, x(\tau))) d\tau \right] ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [\|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|] ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[ \int_0^s [\|k(s, \tau, x_n(\tau)) - k(s, \tau, x(\tau))\|] d\tau \right] ds \\ &\leq \frac{L_1}{\Gamma(q)} \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\| \int_0^t (t-s)^{q-1} ds \\ &\quad + \frac{L_2}{\Gamma(q)} \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\| \int_0^t s (t-s)^{q-1} ds \\ &= \left[ \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} t^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} t^{q+1} \right] \cdot \|x_n - x\|_C. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, T]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left[ \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} t^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} t^{q+1} \cdot \|x_n(t) - x(t)\| \right] \\
&\leq \left[ \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} \sup_{t \in [0, T]} t^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} \sup_{t \in [0, T]} t^{q+1} \right] \\
&\quad \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\| \\
&= \left[ \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} T^{q+1} \right] \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\|.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \leq \left[ \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} T^{q+1} \right] \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} T^{q+1} \right) \right. \\
&\quad \left. \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\| \right] \\
&= \left[ \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} T^q + \frac{L_2}{\Gamma(q+2)} T^{q+1} \right] \\
&\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - x(t)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \right) = 0,$$

c'est-à-dire,  $A$  est continu.

En conclusion,  $A$  est un opérateur compact et continu, donc il est complètement continu.

iii) Montrons que  $B$  est contractant.

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $B_r$  et  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned}\|(Bx)(t) - (By)(t)\| &= \|x_0 - g(x) - x_0 + g(y)\| \\ &= \|(g(x) - g(y))\| \\ &= \|g(x) - g(y)\| \\ &\leq b \|x - y\|.\end{aligned}$$

Donc  $B$  est contractante.

En conclusion  $A$  est un opérateur compact et continu et  $B$  est un opérateur contractant, donc d'après le théorème de Krasnoselskii, le problème de Cauchy (3.3) admet au moins une solution dans  $[0, T]$ . ■

# Chapitre 4

## Equations différentielles fractionnaires impulsives avec condition initiale intégrale.

### 4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions du problème initial suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t), \int_0^t k(t, s, y(s)) ds), \quad t \in J' := J \setminus \{t_1, \dots, t_m\}, \quad J = [0, 1], \\ y(t_k^+) = y(t_k^-) + y_k, \quad y_k \in \mathbb{R} \\ y(0) = \int_0^1 g(s)y(s) ds, \end{array} \right.$$

où  $k = 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  ${}^c D^\alpha$  est la dérivé fractionnaire de Caputo,  $X$  est un espace de Banach,  $f : J \times X \times X \rightarrow X$  est une fonction donnée,  $k : \Delta \times X \rightarrow X$ ,  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ ,  $g(t) \in [0, 1]$  et  $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$ ,  $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$ ,  $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$  et

$y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t_k + h)$  représentent les limites à droite et à gauches de  $y(t)$  en  $t = t_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

On pose par définition

$$By(t) = \int_0^t k(t, s, y(s)) ds.$$

Les résultats de ce travail se trouvent dans [1]

Dans tout ce chapitre,  $PC(J, E)$  désigne l'espace de Banach défini par

$$PC(J, E) = \{x : J \longrightarrow X : x \in C([t_k, t_{k+1}[, X), k = 0, \dots, m \text{ et il existe } x(t_k^-) \text{ et } x(t_k^+), k = 1, \dots, m \text{ avec } x(t_k^-) = x(t_k)\}.$$

Cet ensemble est un espace de Banach avec la norme

$$\|x\|_{PC} = \sup_{t \in J} |x(t)|.$$

**Lemme 4.1.1** *Si  $Q(\tau) = \int_{\tau}^1 g(s)(s - \tau)^{\alpha-1} ds$  pour  $\tau \in [0, 1]$  et si  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  satisfait  $0 \leq g(s) \leq 1$ , alors*

- i)  $\frac{Q(\tau)}{\Gamma(\alpha)} < e$ ,
- ii)  $\frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds}{\Gamma(\alpha)} < e$ .

**Démonstration :** Soit  $\tau \in [0, 1]$  et  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$  avec  $0 \leq g(s) \leq 1$ .

i) On a

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tau)}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{\int_{\tau}^1 g(s)(s - \tau)^{\alpha-1} ds}{\int_0^{\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &< \frac{\int_{\tau}^1 (s - \tau)^{\alpha-1} ds}{\int_0^{\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \quad \text{car } 0 \leq g(s) \leq 1 \\ &= \frac{\int_0^{1-\tau} s^{\alpha-1} ds}{\int_0^{\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ \int_0^{1-\tau} s^{\alpha-1} ds &= \int_0^{1-\tau} e^{-s} e^s s^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} e^s &\leq e^{1-\tau} \quad \text{car } 0 \leq s \leq 1 - \tau \\ &\leq e^1, \end{aligned}$$

il résulte que

$$\int_0^{1-\tau} e^{-s} e^s s^{\alpha-1} ds \leq e \int_0^{1-\tau} e^{-s} s^{\alpha-1} ds,$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tau)}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{\int_1^\tau g(s)(s-\tau)^{\alpha-1} ds}{\int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &\leq \frac{e \int_0^{1-\tau} e^{-s}(s-\tau)^{\alpha-1} ds}{\int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &< e. \end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{\int_0^t u^{\alpha-1} du}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\int_0^t e^u e^{-u} u^{\alpha-1} du}{\Gamma(\alpha)} \\ &\leq e \frac{\int_0^t e^u u^{\alpha-1} du}{\Gamma(\alpha)}, \text{ car } t \in J \\ &\leq e. \end{aligned}$$

■

**Lemme 4.1.2** Soit  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $\mu = \int_0^1 g(s) ds$  et supposons que  $h : J \longrightarrow X$  est une fonction continue. La fonction  $y$  est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + y_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds & \text{si } t \in ]t_1, t_2[, \\ \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + (y_1 + y_2) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds & \text{si } t \in ]t_2, t_3[, \\ \vdots \\ \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \sum_{i=1}^k y_i & \text{si } t \in ]t_k, t_{k+1}], \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $k = 1, \dots, m$ , si et seulement si  $y$  est une solution du problème fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = h(t), & t \in J, \\ y(t_k^+) = y(t_k^-) + y_k, & k = 1, \dots, m, \\ y(0) = \int_0^1 g(s)y(s)ds. \end{cases} \quad (4.4)$$

**Démonstration :**

Premièrement, on va montrer que si  $y$  est une solution du problème (4.4) alors elle est solution de l'équation intégrale fractionnaire.

Si  $t \in [0, t_1]$ , on a

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = h(t), & t \in ]0, t_1] \\ y(0) = \int_0^1 g(s)y(s)ds. \end{cases}$$

Alors

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^1 g(s)y(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \left[ y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau) d\tau \right] ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= y(0) \cdot \int_0^1 g(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 g(s) \left[ \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau) d\tau \right] ds + \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= y(0) \cdot \mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 g(s) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau) d\tau ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned}$$

On utilise le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) \left[ \int_\tau^1 (s-\tau)^{\alpha-1} g(s) ds \right] d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= y(0)\mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$y(t) = y(0)\mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \quad (*)$$

pour  $t = 0$ , on a

$$y(0) = y(0)\mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau.$$

Alors

$$(1-\mu)y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau,$$

ce qui donne

$$y(0) = \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau, \quad (*.1)$$

En remplace (\*.1) dans (\*), on obtient

$$y(t) = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \quad (**)$$

de même, si  $t \in ]t_1, t_2]$ , on obtient

$$y(t_1^+) = y(0)\mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

alors

$$y(0) = \frac{1}{\mu} \left[ y(t_1^+) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau)Q(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \right], \quad (*.2)$$

en remplace (\*.2) dans (\*), on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1^+) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &= y(t_1^-) + y_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \end{aligned}$$

d'après (\*\*), on a

$$y(t_1^-) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau$$

Par suite, pour tout  $t \in ]t_1, t_2]$ , on a

$$y(t) = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau + y_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \quad (***)$$

De même, si  $t \in ]t_2, t_3]$ , on a

$$y(t_2^+) = y(0)\mu + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

Alors

$$y(0) = \frac{1}{\mu} \left[ y(t_2^+) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds \right], \quad (*.3)$$

en remplace (\*.3) dans (\*), on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_2^+) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= y(t_2^-) + y_2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds, \end{aligned}$$

d'après (\*\*\*), on a

$$y(t_2^-) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau + y_1$$

Par suite, pour tout  $t \in ]t_2, t_3]$ , on a

$$y(t) = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau + y_1 + y_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Par récurrence pour tout  $]t_k, t_{k+1}]$ , on a

$$y(t) = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) Q(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^k y_i.$$

Inversement, on va montrer que si  $y$  est une solution de l'équation intégrale fractionnaire, alors elle est solution du problème (4.4).

Supposons que  $y$  est solution de l'équation intégrale fractionnaire, c'est-à-dire,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + y_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds & \text{si } t \in ]t_1, t_2[, \\ \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + (y_1 + y_2) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds & \text{si } t \in ]t_2, t_3[, \\ \vdots \\ \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \sum_{i=1}^k y_i & \text{si } t \in ]t_k, t_{k+1}[, \end{cases}$$

pour  $t = 0$ , on a

$$y(0) = \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau,$$

c'est-à-dire

$$(1-\mu)y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} y(0) &= \mu y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \mu y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 h(\tau) \left[ \int_\tau^1 (s-\tau)^{\alpha-1}g(s)ds \right] d\tau, \end{aligned}$$

on applique le théorème du Fubini, on a

$$\begin{aligned} y(0) &= \mu y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 g(s) \left[ \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau \right] ds \\ &= y(0) \int_0^1 g(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 g(s) \left[ \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau \right] ds \\ &= \int_0^1 g(s) \left[ y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau \right] ds \\ &= \int_0^1 g(s)y(s)ds. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$y(0) = \int_0^1 g(s)y(s)ds. \quad (*.1)$$

Pour  $t \in ]0, t_1]$ , on a

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &= C + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \end{aligned}$$

on applique la dérivée au sens de Caputo, on obtient

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y(t) &= {}^C D^\alpha (I^\alpha h(t)) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t).$$

De même pour  $t \in ]t_1, t_2[$ , on a

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t).$$

Et ainsi de suite, pour  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$ , on a

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t).$$

C'est-à-dire, pour tout  $t \in J$  on a

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t). \quad (*.2)$$

Dernièrement, elle est facile de montrer que  $y(t_k^+) = y(t_k^-) + y_k$ .

$$\begin{aligned} y(t_k^+) - y(t_k^-) &= \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \sum_{i=1}^k y_i \\ &\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)h(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \sum_{i=1}^{k-1} y_i \\ &= y_k. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = y_k. \quad (*.3)$$

D'après (\*.1), (\*.2) et (\*.3), on déduit que  $y$  est solution du problème fractionnaire (4.4). ■

## 4.2 Existence et unicité des solutions

**Théorème 8** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites:*

(C<sub>1</sub>) *La fonction  $f : J \times X \times X \longrightarrow X$  est continue.*

(C<sub>2</sub>) *Il existe une constante  $l > 0$ , telle que*

$$\|f(t, u, v) - f(t, \bar{u}, \bar{v})\| \leq l [\|u - \bar{u}\| + \|v - \bar{v}\|]$$

*pour tout  $t \in J$  et pour tout  $u, \bar{u}, v$  et  $\bar{v} \in X$ .*

(C<sub>3</sub>)  *$k : \Delta \times X \longrightarrow X$  est continu et il existe une constante  $l_1 > 0$ , telle que*

$$\|k(t, s, u) - k(t, s, v)\| \leq l_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in X, t, s \in \Delta.$$

*Si*

$$\left[ \frac{(l + ll_1)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{e(l + ll_1)}{(1 - \mu)} \right] < 1,$$

*alors le problème (4.4) admet une unique solution dans  $J$ .*

**Démonstration :** Transformons le problème (4.4) en un problème de point fixe.

Soit  $F$  l'opérateur définie par

$$F : PC(J, X) \longrightarrow PC(J, X),$$

avec

$$(Fx)(t) = \frac{1}{(1 - \mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) f(\tau, x(\tau), Bx(\tau)) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds + \sum_{i=1}^k x_i.$$

Montrons que  $F$  est une contraction.

Soient  $x, y \in PC(J, X)$  et  $t \in J$ , on a

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| &= \left\| \frac{1}{(1 - \mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) [f(\tau, x(\tau), Bx(\tau)) - f(\tau, y(\tau), By(\tau))] d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} [f(s, x(s), Bx(s)) - f(s, y(s), By(s))] ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{(1 - \mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) \|f(\tau, x(\tau), Bx(\tau)) - f(\tau, y(\tau), By(\tau))\| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s), Bx(s)) - f(s, y(s), By(s))\| ds, \end{aligned}$$

d'après les hypothèses du théorème (8), on obtient

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| &\leq \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)l [\|x(\tau) - y(\tau)\| + \|Bx(\tau) - By(\tau)\|] d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}l [\|x(\tau) - y(\tau)\| + \|Bx(\tau) - By(\tau)\|] d\tau \\
&\leq \frac{l\|x-y\|_{PC}}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)d\tau + \frac{ll_1\|x-y\|_{PC}}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau)d\tau \\
&\quad + \frac{l+ll_1}{\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_{PC} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{le\Gamma(\alpha)}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_{PC} + \frac{ll_1e\Gamma(\alpha)}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_{PC} \\
&\quad + \frac{l+ll_1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \|x-y\|_{PC} \\
&\leq \left[ \frac{le(1+l_1)}{(1-\mu)} + \frac{l+ll_1}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \|x-y\|_{PC}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème (8), si  $\left[ \frac{le(1+l_1)}{(1-\mu)} + \frac{l+ll_1}{\Gamma(\alpha+1)} \right] < 1$  alors  $F$  est contractante. Par suite  $F$  a un point fixe qui est une unique solution du problème (4.4). ■

**Théorème 9** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(C<sub>4</sub>) *Il existe une constante  $M > 0$  telle que  $\|f(t, u, v)\| \leq M$  pour tout  $t \in J$  et tout  $u, v \in X$ .*

*Si  $\frac{le(1+l_1)}{(1-\mu)} < 1$ , alors le problème (4.4) admet au moins une solution dans  $J$ .*

**Démonstration :** Pour tout entier  $r > 0$ , on considère

$M = B_r = \{x \in PC(J, X) : \|x\| \leq r, t \in [0, 1]\}$  un sous ensemble de Banach fermé, convexe et non vide dans  $PC(J, X)$ .

On définit deux opérateurs  $A$  et  $B$  par :

$$(Ax)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds$$

et

$$(Bx)(t) = \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) f(\tau, x(\tau), Bx(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^k x_i$$

i) Montrons que  $Ax + By \in B_r$ .

Soient  $x, y \in B_r$ ,

$$\begin{aligned} \|Ax + By\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) f(\tau, y(\tau), By(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^k y_i \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s), Bx(s))\| ds + \\ &\quad \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) \|f(\tau, y(\tau), By(\tau))\| d\tau + \sum_{i=1}^k \|y_i\|, \end{aligned}$$

d'après les hypothèses du théorème (9)

$$\begin{aligned} \|Ax + By\| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) d\tau + \frac{\mu}{(1-\mu)} \sum_{i=1}^k \|y_i\| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{Me\Gamma(\alpha)}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu}{(1-\mu)} \sum_{i=1}^k \|y_i\| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Me}{(1-\mu)} + \frac{\mu}{(1-\mu)} \sum_{i=1}^k \|y_i\|. \end{aligned}$$

Si on prend

$$r \geq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Me}{(1-\mu)} + \frac{\mu}{(1-\mu)} \sum_{i=1}^k \|y_i\|,$$

on obtient

$$\|Ax + By\| \leq r,$$

c'est-à-dire

$$Ax + By \in B_r.$$

ii) Montrons que  $A$  est un opérateur compact.

Pour cela, on utilise le théorème d'Arzéla Ascoli.

ii-1) Montrons que  $A$  est uniformément borné

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s), Bx(s))\| ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

Alors,  $A$  est uniformément borné.

ii-2) Montrons que  $\{Ax, x \in B_r\}$  est équicontinue

Soit  $t_1, t_2 \in J$  avec  $t_1 < t_2$  et  $x \in B_r$ .

Et on définit

$$c := \sup_{(t,x) \in J \times B_r} \|f(t, x(s), Bx(s))\|.$$

Donc, pour tout  $(t, x) \in J \times B_r$ , on obtient:

$$\begin{aligned}
\|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}] f(s, x(s), Bx(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Bx(s)) ds \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}] \|f(s, x(s), Bx(s))\| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s), Bx(s))\| ds \\
&\leq \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} [t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} [t_1^\alpha + 2(t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha]
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} [t_1^\alpha + 2(t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha]$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , un nombre arbitrairement choisi.

$$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } |t_1 - t_2| < \delta_1(\varepsilon) \implies \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de même

$$\exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } |t_1 - t_2| < \delta_2(\varepsilon) \implies \frac{2c}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1 - t_2)^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, si on prend

$$\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)),$$

on a

$$|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon) \implies \|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\| < \varepsilon$$

On obtient que la famille  $\{Ax, x \in B_r\}$  est équicontinue.

Alors, d'après le théorème d'Arzela Ascoli,  $A$  est un opérateur compact.

ii-3) Montrons que  $A$  est continu.

On considère une suite de fonction  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $J$ , tel que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ au sens de } PC,$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |x_n(t) - x(t)| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, x_n(s), Bx_n(s)) - f(s, x(s), Bx(s))] ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_n(s), Bx_n(s)) - f(s, x(s), Bx(s))\| ds, \end{aligned}$$

d'après les hypothèses du théorème (9)

$$\begin{aligned} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l [\|x_n(s) - x(s)\| + \|Bx_n(s) - Bx(s)\|] ds \\ &\leq \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [\|x_n(s) - x(s)\| + l_1 \|x_n(s) - x(s)\|] ds \\ &\leq \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha)} \|x_n - x\|_{PC} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \|x_n - x\|_{PC}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq \sup_{t \in J} \left[ \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \|x_n(t) - x(t)\| \right] \\ &\leq \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \sup_{t \in J} t^\alpha \right) \sup_{t \in J} \|x_n(t) - x(t)\| \\ &= \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t \in J} \|x_n(t) - x(t)\|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sup_{t \in J} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \leq \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t \in J} \|x_n(t) - x(t)\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in J} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t \in J} \|x_n(t) - x(t)\| \right] \\ &= \frac{l(1+l_1)}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in J} \|x_n(t) - x(t)\| \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $A$  est continu.

$A$  est un opérateur compact et continu, alors  $A$  est complètement continue.

iii) Montrons que  $B$  est contractante.

Soient  $x, y \in B_r$  on a

$$\begin{aligned} \|Bx - By\| &= \left\| \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) [f(\tau, x(\tau), Bx(\tau)) - f(\tau, y(\tau), By(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) \|f(\tau, x(\tau), Bx(\tau)) - f(\tau, y(\tau), By(\tau))\| d\tau. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses du théorème (9), on a

$$\begin{aligned} \|Bx - By\| &\leq \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) l [\|x(s) - y(s)\| + \|Bx(s) - By(s)\|] d\tau \\ &\leq \frac{l}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau) [\|x(s) - y(s)\| + l_1 \|x(s) - y(s)\|] d\tau \\ &= \frac{l(1+l_1)}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{PC} \int_0^1 Q(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{le(1+l_1)}{(1-\mu)} \|x - y\|_{PC} \\ &= \Lambda_{l,e,l_1,\mu} \|x - y\|_{PC}, \end{aligned}$$

d'après le théorème (9), si  $\Lambda_{l,e,l_1,\mu} < 1$  alors  $B$  est contractante.

En conclusion,  $A$  est un opérateur complètement continu et  $B$  est un opérateur contractant, donc d'après le théorème de Krasnolskii, le problème (4.4) admet au moins une solution dans  $J$ . ■

### 4.3 Exemple

On considère le problème fractionnaire impulsif suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)} + \int_0^t e^{s-t}|y(s)| ds, \quad t \in J := [0, 1], \quad t \neq \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ y\left(\frac{1}{2}^+\right) = \frac{\left|y\left(\frac{1}{2}^+\right)\right|}{3 + \left|y\left(\frac{1}{2}^+\right)\right|}, \\ y(0) = \frac{1}{5} \int_0^1 |y(s)| ds. \end{cases} \quad (\text{Pr})$$

Soit

$$f(t, x, Bx) = \frac{e^{-t}x}{(9 + e^t)(1 + x)} + \frac{1}{10}Bx(t), \quad (t, x) \in J \times [0, \infty), \quad g(s) = \frac{1}{5}$$

et

$$\begin{aligned} Bx(t) &= \int_0^t e^{s-t}x(s)ds \\ &= \int_0^t k(t, s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+$  et  $s$  et  $t \in \Delta$ .

On a

$$\begin{aligned} |f(t, x, Bx) - f(t, y, By)| &= \left| \frac{e^{-t}x}{(9 + e^t)(1 + x)} + \frac{1}{10}Bx(t) - \frac{e^{-t}y}{(9 + e^t)(1 + y)} + \frac{1}{10}By(t) \right| \\ &= \left| \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} \left( \frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y} \right) + \frac{1}{10}(Bx(t) - By(t)) \right| \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} \left| \frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y} \right| + \frac{1}{10}|Bx(t) - By(t)| \\ &= \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} \left| \frac{x - y}{(1 + x)(1 + y)} \right| + \frac{1}{10}|Bx(t) - By(t)| \\ &\leq \frac{1}{10} [|x - y| + |Bx - By|]. \quad \text{car } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} |k(t, s, x) - k(t, s, y)| &= |e^{s-t}x(t) - e^{s-t}y(t)| \\ &= |e^{s-t}(x(t) - y(t))| \\ &\leq e^{s-t}|x - y| \\ &\leq |x - y|. \quad \text{car } t \text{ et } s \in \Delta, \end{aligned}$$

et on a,

$$\int_0^1 g(s)ds = \int_0^1 \frac{1}{5}ds = \frac{1}{5}.$$

En conclusion, on a  $l = \frac{1}{10}$ ,  $l_1 = 1$  et  $\mu = \frac{1}{5}$ .

Alors les conditions  $(C_2)$  et  $(C_3)$  du théorème (8) sont satisfaites et la condition

$$\left[ \frac{(l + ll_1)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{e(l + ll_1)}{(1 - \mu)} \right] < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{e}{4} < 1,$$

c'es-à-dire

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} < 5 \left( 1 - \frac{e}{4} \right)$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(\alpha + 1) > \frac{4}{5(4 - e)}.$$

Sous cette condition, le problème (*Pr*) admet une unique solution.

# Chapitre 5

## Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire, est de présenter plusieurs résultats d'existence et d'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions locales et non locales dans des espaces de Banach.

# Bibliographie

- [1] A. Anguraj, P.Karthikeyan, M. Rivero, J.J. Trujillo, On new existence results for fractional integro-differential equations with impulsive and integral conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, Article in press (2013), 8 pages (Corrected Proof, Available online 7 March 2013).
- [2] Bashir Ahmad and S.Sivasundaram, Existence and uniqueness results for nonlinear boundary value problems of fractional differential equations with separated boundary conditions, *Communications in Applied Analysis* 13 (2009), no. 1, 121-128.
- [3] Bashir Ahmad and S.Sivasundaram, Some Existence results for fractional integro differential equations with nonlinear conditions, *Communications in Applied Analysis* 12 (2008), no. 2, 107-112.
- [4] A.A. Kilbas, H.M.Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.
- [6] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle. *Funct. Anal. Appl.* 1 1967 pp. 74-76.
- [7] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [8] S. Szuffa, On the application of measure of noncompactness to existence theorems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 75 (1986), 1-14.
- [9] K. Yosida, *Fonctional Analysis*, 6th edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [10] S. Zhang, Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, *Electron. J. Differential Equations* 2006, No. 36, pp. 1-12.

## *Abstract*

### **Differential Equations With Fractional Order On Banach Spaces**

*In this paper, we present several existence results for certain classes of differential equations*

*of fractional order in the sense of Caputo with non local conditions and local on Banach spaces of infinite dimension.*

**Key words and phrases:** *fractional differential equations, existence and unicity of solutions, fractional derivative within the meaning of Caputo, nonlocal initial condition.*

## *Résumé*

### **Équations Différentielles D'Ordre Fractionnaires Dans Des Espaces De Banach**

*Dans ce mémoire, nous présentons plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions locales et non locales dans des espaces de Banach de dimension infinie.*

**Phrases et mots clés :** *équations différentielles, fractionnaires, existence et unicity de solutions, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, condition initiale non locale.*

## **ملخص**

### **المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة في فضاء بناخ**

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة حلول بعض أنواع المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة بمفهوم كابيتو بشروط محلية و غير محلية.

**الكلمات والجمل الافتتاحية:**

المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة ، وجود الحلول ، الاشتقاقية ذات رتبة ناطقة حسب كابيتو ، شرط ابتدئي غير محلي.