

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences  
Département de Mathématiques  
**Mémoire de Master**

présenté par

Boudaoud Mohammed El Mahdi

**Soutenu le : 13 juin 2024**

---

**Thème :**

UNE INTRODUCTION AU CONTRÔLE OPTIMAL POUR LES SYSTÈMES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES AVEC DES  
APPLICATIONS EN ÉPIDÉMIOLOGIE ET EN ÉCOLOGIE.

---

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. DERHAB MOHAMMED	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mme. RAHMOUN BENMOUSSAT AMEL	M.C.A, Université de Tlemcen	Examinatrice
Mr. CHEKROUN ABDENNASSER	M.C.A, Université de Tlemcen	Encadrant
Mr. SIMON GIREL	M.C, Université Côte d'Azur	Co-encadrant
Mr. BOUKARABILA YOUSSEF OUSSAMA	M.C.A, Université de Tlemcen	Invité

**Année universitaire : 2023 - 2024**



# *Remerciements*

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon travail et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadrant Monsieur **Chekroun Abdennasser**, pour m'avoir permis d'effectuer ce travail sous sa direction et m'a offert la possibilité de travailler sur un sujet passionnant, mais aussi pour sa gentillesse et ces précieux conseils.

Je tiens à remercier mon co-encadrant **Simon Girel** maître de conférence à l'université de Côte-d'Azur (Nice), pour son soutien, disponibilité et de l'aide qui m'a attribué.

Je remercie également le professeur **Derhab Mohammed** pour son encouragement durant nos deux ans de master et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Mme **Rahmoun Benmoussat Amel** membre du Jury et Mr **Boukarabila Youssef Oussama** notre invité. Je vous exprime toute ma reconnaissance de l'honneur que vous me faites en acceptant de lire et évaluer ce travail.

Enfin, un grand merci à Mr **Jérémy Toulisse** maître de conférence à l'université de Côte-d'Azur (Nice), pour avoir facilité toutes les démarches administratives. Votre soutien a été inestimable.

# *Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire à :*

*Mes chers parents*

*Mes frères*

*Mes amis*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la théorie du contrôle optimal appliquée aux EDOs</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	4
1.2	Conditions nécessaires d'optimalité . . . . .	5
1.3	Quelques exemples . . . . .	8
1.4	Quelques résultats d'existence d'un contrôle optimal pour une ODE [6] . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Contrôler la propagation d'une maladie infectieuse</b>	<b>13</b>
2.1	Modèle sur la propagation du VIH avec une catégorie sous PrEP . . . . .	13
2.1.1	Présentation du modèle . . . . .	13
2.1.2	Simulations numériques . . . . .	17
2.2	Contrôle optimal d'une maladie infectieuse d'un modèle SEIR [9] . . . . .	18
2.2.1	Présentation du modèle . . . . .	18
2.2.2	Caractérisation du contrôle optimal et simulations numériques . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Contrôle optimal d'un modèle de culture-ravageur-ennemi naturel</b>	<b>22</b>
3.1	Introduction . . . . .	22
3.2	Points d'équilibre et stabilité . . . . .	24
3.3	Formulation du contrôle optimal . . . . .	28
3.3.1	L'étude du contrôle optimal . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Contrôle optimal d'un modèle de proie-prédateur</b>	<b>32</b>
4.1	Formulation du Modèle avec et sans diffusion . . . . .	32
4.2	Analyse mathématique du modèle sans diffusion . . . . .	34
4.2.1	Positivité et existence des solutions bornées . . . . .	34
4.2.2	Points d'équilibre et leurs stabilités . . . . .	35
4.2.3	Formulation d'un problème de contrôle optimal . . . . .	36
4.3	Etude du système avec diffusion . . . . .	38
4.3.1	Instabilité de Turing bidimensionnel . . . . .	39
4.3.2	Résultats numériques . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>45</b>
5.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange (Extrema liés) . . . . .	45
5.2	Résolution de quelques problèmes de contrôle optimal sous Matlab . . . . .	48
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>

# Résumé

Dans ce mémoire de master, nous visons à introduire la théorie du contrôle optimal appliqué aux systèmes **d'équations différentielles ordinaires** en mettant l'accent sur des modèles épidémiologiques et écologiques. Nous décrivons les étapes de la formulation d'un problème de contrôle optimal et en déduisant les conditions nécessaires. Plusieurs exemples simples fournissent une méthodologie détaillée pour caractériser le contrôle optimal grâce à l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin.

Nous enchaînons par le traitement de quelques systèmes d'EDO non linéaires avec contrôle optimal. Un modèle SEIR avec un contrôle agissant comme un taux de vaccination est présenté et un problème de contrôle optimal est formulé pour inclure une contrainte isopérimétrique sur l'approvisionnement en vaccins. Un deuxième système épidémiologique du VIH avec Prep est aussi analysé. Nous avons varié l'étude dans ce mémoire à d'autres systèmes écologiques (modèle de proies et prédateurs et même super prédateurs). Après l'étude mathématique de stabilité et une étude d'instabilité de Turing pour le cas diffusif, le contrôle est appliqué indirectement sur les variables dans les systèmes traduisant des mesures de lutte biologique puisque elles sont écologiques pour les situations considérées.

Pour chaque chapitre, les résultats numériques illustrent comment les contraintes altèrent le calendrier optimal et son effet sur les populations.

# Abstrat

In this work, we aim to introduce the theory of optimal control applied to systems of ordinary differential equations with an emphasis on epidemiological and ecological models. We describe the steps of formulating an optimal control problem and deriving the necessary conditions. Several simple examples provide a detailed methodology for characterizing optimal control through the use of Pontryagin's maximum principle.

We continue with the treatment of some nonlinear ODE systems with optimal control. An SEIR model with control acting as a vaccination rate is presented and an optimal control problem is formulated to include an isoperimetric constraint on vaccine supply. A second HIV epidemiological system with Prep is also analyzed. We have varied the study in this work to other ecological systems (prey and predators model and even super predators). After the mathematical study of stability and a study of Turing instability for the diffusive case, the control is applied indirectly to the variables in the systems reflecting biological control measures since they are ecological for the situations considered.

For each chapter, the numerical results illustrate how constraints alter the optimal schedule and the effect on populations.

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie du contrôle optimal appliquée aux EDOs

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions de la théorie élémentaire du contrôle optimal appliquée aux systèmes d'équations différentielles ordinaires. Nous décrivons les étapes de la formulation d'un problème de contrôle optimal et en déduisons les conditions nécessaires et principales, voir [9]. Plusieurs exemples simples fournissent une méthodologie détaillée pour caractériser le contrôle optimal grâce à l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin. Nous l'étudions à la fois de manière analytique et numérique.

### 1.1 Introduction

Dans un problème de contrôle optimal, on ajuste les contrôles dans un système dynamique afin d'atteindre un objectif. Le système sous-jacent peut être décrit par divers types d'équations, telles que des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, des équations discrètes, des équations différentielles stochastiques ou des équations aux différences intégrales. Dans ce travail introductif, nous ne considérons que des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Pour simplifier, dans le contrôle d'une seule équation différentielle ordinaire (EDO), nous désignons  $u(t)$  comme la commande et  $x(t)$  comme l'état. Nous obtenons un problème de contrôle général, sur  $[t_0, T]$ ,

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \text{avec } x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

où  $x'$  désigne la dérivée par rapport au temps  $t$ . Les deux fonctions  $u(t)$  et  $x(t)$  influent l'objectif qu'on va viser, appelé fonctionnelle objective (voir ci-après). Nous cherchons à trouver un contrôle optimal  $u(t)$  et l'état correspondant qui atteignent le maximum (ou le minimum) de notre fonctionnelle objective.

Pour donner une illustration concrète, considérons l'exemple suivant avec une dynamique très simple. Soit  $x(t)$  le nombre des cellules cancéreuses dans le corps au temps  $t$  et  $u(t)$  la concentration de médicament dans le corps au temps  $t$ . On peut supposer que la dynamique est gouvernée par

$$x'(t) = \alpha x(t) - u(t), \quad \text{avec } x(0) = x_0,$$

où  $x_0$  est une donnée initiale connue et  $\alpha$  est le taux de croissance naturelle des cellules cancéreuses. La fonction objective est prise comme suit

$$\min_u \left\{ x(T) + \int_0^T u^2(t) dt \right\},$$

où le premier terme représente le nombre de cellules cancéreuses au temps final et le deuxième terme représente les effets nocifs du médicament sur le corps. Nous restreignons les valeurs de notre contrôle de telle sorte que  $0 \leq u(t) \leq 1$ .

Les bases de la mise en place et de la résolution d'un problème de contrôle optimal comprennent :

- Modéliser la situation avec un système d'Équations Différentielles Ordinaires (ODEs).
- Choisir le format et les bornes des contrôles.
- Concevoir une fonctionnelle objective appropriée.
- Prouver l'existence du contrôle optimal.
- Dérivation des conditions nécessaires pour le contrôle optimal.
- Caractériser le contrôle optimal.
- Calculer numériquement le contrôle optimal.

## 1.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette partie, nous allons expliquer comment obtenir des conditions d'optimalité d'un problème. Pour la simplicité, considérons le problème de contrôle optimal scalaire suivant, pour  $t \in [0, T]$  avec  $T$  une constante fixe,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } x(T) \text{ libre,} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec un coût

$$\max_u \left\{ \int_0^T \phi(t, x(t), u(t)) dt \right\}.$$

Nous supposons que les contrôles sont des fonctions continues par morceaux avec des valeurs dans un ensemble  $U$ . Cependant, on peut également utiliser des fonctions mesurables au sens de Lebesgue.

Soit  $(u^*(t), x^*(t))$  une paire optimale (contrôle et trajectoire optimales), alors nous allons avoir des conditions nécessaires. Ces conditions nécessaires pour la théorie du contrôle optimal des EDOs ont été développées par Pontryagin et ses collaborateurs vers 1950. Ils ont développé l'idée clé d'introduire la fonction adjointe pour attacher l'équation différentielle à la fonctionnelle objectif. Cette idée est similaire aux multiplicateurs de Lagrange (voir l'annexe 5) qui attachent les contraintes lors de la recherche du maximum d'une fonction en plusieurs dimensions soumise à certaines contraintes d'équation.

Supposons que  $(u^*(t), x^*(t))$  est une paire optimale pour le problème (1.2) avec un coût à maximiser. Soit  $h(t)$  une fonction de variation,  $a \in \mathbb{R}$  et  $u^*(t) + ah(t)$  un autre contrôle. Alors,

$y(t, a)$  est l'état correspondant à  $u^* + ah$  et on a

$$\begin{cases} \frac{dy(t, a)}{dt} = f(t, y(t, a), u^*(t) + ah(t)), \\ y(0, a) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

puisque toutes les trajectoires commencent à la même position  $x_0$ . De plus, nous avons  $y(t, 0) = x^*(t)$  lorsque  $a = 0$  et le contrôle associé est  $u^*$ .

Nous pouvons écrire notre fonctionnelle objective comme suit

$$J(a) = \int_0^T \phi(t, y(t, a), u^*(t) + ah(t)) dt.$$

La valeur maximale de  $J$  par rapport à  $a$  se produit lorsque  $a = 0$ , ce qui donne

$$\left. \frac{dJ}{da} \right|_{a=0} = 0.$$

De plus, une fonction différentiable,  $\lambda(t)$ , appelée adjoint, est introduite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}(\lambda(t)y(t, a)) dt &= \lambda(T)y(T, a) - \lambda(0)y(0, a), \\ \Rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}(\lambda(t)y(t, a)) dt + \lambda(0)y(0, a) - \lambda(T)y(T, a) &= 0. \end{aligned}$$

Ajouter l'expression nulle ci-dessus à notre  $J(a)$  donne

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_0^T \left[ \phi(t, y(t, a), u^*(t) + ah(t)) + \frac{d}{dt}(\lambda(t)y(t, a)) \right] dt \\ &\quad + \lambda(0)y(0, a) - \lambda(T)y(T, a), \\ &= \int_0^T \{ \phi(t, y(t, a), u^*(t) + ah(t)) + \lambda'(t)y(t, a) \\ &\quad + \lambda(t)f(t, y(t, a), u^*(t) + ah(t)) \} dt + \lambda(0)x_0 - \lambda(T)y(T, a). \end{aligned}$$

En différenciant  $J$  par rapport à  $a$ , on obtient

$$\frac{dJ}{da} = \int_0^T \left[ \phi_x \frac{\partial y}{\partial a} + \phi_u \frac{\partial(u^* + ah)}{\partial a} + \lambda'(t) \frac{\partial y}{\partial a} + \lambda(t)f_x \frac{\partial y}{\partial a} + \lambda(t)f_u \frac{\partial(u^* + ah)}{\partial a} \right] dt - \lambda(T) \frac{\partial}{\partial a} y(T, a),$$

Évaluer cette différentielle en  $a = 0$  donne

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{da} \right|_{a=0} &= 0 \\ \int_0^T \left\{ (\phi_x + \lambda f_x + \lambda') \frac{\partial y}{\partial a} \Big|_{a=0} + (\phi_u + \lambda f_u)h \right\} dt - \lambda(T) \frac{\partial}{\partial a} y(T, 0) &= 0, \end{aligned}$$

Pour que ce qui précède soit vrai, nous choisissons  $\lambda(t)$  de telle sorte que

$$\lambda'(t) = -[\phi_x(t, x^*, u^*) + \lambda(t)f_x(t, x^*, u^*)],$$

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^T (\phi_u + \lambda f_u) h(t) dt = 0 \quad \text{pour} \quad h(t) \quad \text{arbitraire.}$$

**Remarque 1.** *Si le coût est de la forme*

$$\psi(y(T, a)) + \int_0^T \phi(t, y(t, a), u^*(t) + ah(t)) dt,$$

*alors nous aurons*

$$\int_0^T \left\{ (\phi_x + \lambda f_x + \lambda') \frac{\partial y}{\partial a} \Big|_{a=0} + (\phi_u + \lambda f_u) h \right\} dt + [\psi'(y(T, 0)) - \lambda(T)] \frac{\partial}{\partial a} y(T, 0) = 0.$$

*Cette fois-ci, on obtient*

$$\lambda(T) = \psi'(x^*(T)).$$

Reprenons le développement avant la remarque, la dernière ligne implique

$$\phi_u(t, x^*, u^*) + \lambda(t) f_u(t, x^*, u^*) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

On peut exprimer les conditions nécessaires du premier ordre de la manière la plus simple grâce au Principe du Maximum de Pontryagin [10]. En pratique, avant d'appliquer ce principe, il convient de démontrer qu'un contrôle optimal existe en utilisant un argument de compacité. Un tel argument dépend de l'ensemble spécifique de contrôles utilisés, souvent des fonctions continues ou Lebesgue mesurables bornées. Après avoir montré que la fonction objective est bornée pour tous les contrôles, on peut alors construire une suite maximisante (ou minimisante) de contrôles et les suites d'états correspondantes, et démontrer leur convergence dans l'espace approprié, [9].

**Théorème 1. (Principe du Maximum de Pontryagin [9])** *Si  $u^*(t)$  est le contrôle optimal et  $x^*(t)$  est la trajectoire optimale pour le problème (1.2), alors il existe une variable adjointe  $\lambda(t)$  telle que*

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

*à chaque instant, pour tout  $u$  dans  $U$ , avec  $H$ , appelé Hamiltonien, défini par*

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \phi(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, x(t), u(t)),$$

*et*

$$\lambda'(t) = - \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x},$$

$$\lambda(T) = 0.$$

La condition finale sur la variable adjointe est appelée la condition de transversalité. Ce principe convertit le problème de trouver un contrôle qui maximise la fonctionnelle objective sous réserve de l'EDO avec la condition initiale. Comme mentionné ci-dessus, le Hamiltonien est défini par

$$H(x, u, \lambda) = \phi(t, x, u) + \lambda f(t, x, u),$$

= intégrante de la fonctionnelle objective + (adjoint)  $\times$  (la fonction de l'EDO).

On peut donner les conditions nécessaires établies auparavant en maximisant  $H$  par rapport à  $u$  en  $u^*$  et nous avons

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \phi_u + \lambda f_u = 0 \quad (\text{l'équation d'optimalité}),$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \lambda' = -\phi_x - \lambda f_x \quad (\text{l'équation adjointe}),$$

$$\lambda(T) = 0 \quad (\text{condition de transversalité}).$$

Nous notons que ce théorème est énoncé dans un cas simple où il n'y a pas de contraintes (telles que des bornes supérieures et inférieures) sur les contrôles.

Nous pouvons également considérer des conditions du second ordre. Pour la maximisation, nous avons

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{u=u^*} < 0 \quad (\text{pour la minimisation } \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{u=u^*} > 0).$$

Nous avons commencé avec deux inconnues  $u^*$  et  $x^*$ , puis nous avons introduit un adjoint  $\lambda$  (similaire à un multiplicateur de Lagrange). Maintenant, nous avons trois inconnues  $u^*$ ,  $x^*$  et  $\lambda$ . Fréquemment, lorsque le contrôle entre dans le problème de manière non linéaire, nous pouvons fixer  $H_u|_{u=u^*} = 0$  et résoudre pour  $u^*$  en fonction de  $x^*$  et  $\lambda$ . Ensuite, nous avons deux inconnues  $x^*$  et  $\lambda$  avec deux EDO et deux conditions aux limites (une condition initiale pour l'état et une condition de temps final pour l'adjoint). Dans de nombreux problèmes biologiques ou physiques, les contrôles seront soumis à des bornes imposées en raison de l'application spécifique. Le Principe du Maximum de Pontryagin reste valable lorsque les contrôles sont contraints dans les limites.

$$u(t) \in [a, b].$$

Dans le cas de contrôles bornés, la résolution du contrôle optimal peut être plus difficile lorsque  $H$  est linéaire par rapport à  $u$ . Par exemple,  $\frac{\partial H}{\partial u}$  ne contiendrait pas  $u$ . Ainsi, le maximum de  $H$  pourrait toujours se produire aux extrémités de l'ensemble de contrôle, c'est-à-dire, égale à  $a$  ou  $b$ . Ce cas où les contrôles optimaux prennent des valeurs uniquement aux bornes supérieures ou inférieures est appelé un scénario bang-bang. Une autre possibilité est lorsque  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  pourrait se produire sur un certain intervalle de temps à l'intérieur de notre intervalle de temps global. Dans cette situation, appelée le cas singulier, il n'est pas facile de résoudre pour un contrôle optimal à partir de la condition d'optimalité, ce qui nécessite donc d'autres techniques.

### 1.3 Quelques exemples

Avant d'énoncer des théorèmes d'existence d'un contrôle optimal, nous proposons quelques exemples simples qui peuvent être traités d'une manière explicite. L'idée est d'essayer d'appliquer les conditions nécessaires d'optimalité pour trouver le contrôle optimal associé à un problème considéré.

**Exemple 1.** *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + u(t), \\ x(0) = \frac{e^2}{2} - 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

et

$$J(u) = \int_0^2 \left( x(t) + \frac{u^2(t)}{2} \right) dt.$$

*Nous voulons diminuer la variable  $x$  tout en gardant  $u^2$  aussi petit. On commence par écrire le Hamiltonien :*

$$H(x, u, \lambda) = x + \frac{u^2}{2} + \lambda(x + u).$$

D'après le principe du maximum de Pontryagin, s'il existe un contrôle optimal  $u^*$  et une trajectoire optimale  $x^*$ , alors

$$\begin{cases} x^{*'}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x^* + u^*, \\ \lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 - \lambda(t), \\ x^*(0) = \frac{e^2}{2} - 1, \\ \lambda(2) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

La solution de l'équation de l'adjoint  $\lambda' = -1 - \lambda$  avec  $\lambda(2) = 0$  est donnée par  $\lambda(t) = e^{2-t} - 1$ .

De plus, la condition d'optimalité  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  donne

$$u^* + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = 1 - e^{2-t},$$

La première équation de (1.5) permet d'avoir

$$x^*(t) = \frac{e^{2-t}}{2} - 1.$$

On peut noter que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1 > 0.$$

**Exemple 2.** Dans cet exemple on a un système différentiel en dimension 2, avec une condition finale sur  $x_1$

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_1(1) = 1, \quad x_2(1) \text{ libre}, \\ \min \left\{ \int_0^1 x_2(t) + u^2(t) dt \right\}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le Hamiltonien associé au problème (1.6) est donné comme suit

$$H(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u) = x_2 + u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u.$$

On a

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) - 1.$$

Après la résolution, on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c \in \mathbb{R}, \\ \lambda_2(t) = -(c+1)(t-1), \quad \lambda_2(1) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté,  $\frac{\partial H}{\partial u} = 2u^* + \lambda_2 = 0$  implique que  $u^* = -\frac{\lambda_2}{2} = \frac{c+1}{2}(t-1)$ . On remplace dans les

équations de  $x'_1$  et  $x'_2$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{c+1}{2} \left( \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right), \\ x_2(t) = \frac{c+1}{2} \left( \frac{t^2}{2} - t \right). \end{cases}$$

On trouve  $c = -7$  avec la condition  $x_1(1) = 1$ . Finalement, nous avons eu

$$u^*(t) = 3 - 3t, \quad x_1^*(t) = \frac{3t^2 - t^3}{2}, \quad x_2^*(t) = \frac{6t - 3t^2}{2}.$$

**Exemple 3.** Soit maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} \max_u \left\{ \int_0^1 x(t) + u(t) dt \right\}, \\ x'(t) = 1 - u^2(t), \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

L'Hamiltonien et les conditions d'optimalité sont donnés comme suit

$$H(x, u, \lambda) = x + u + \lambda(1 - u^2),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2\lambda u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2\lambda},$$

et pour le problème adjoint on a

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 \quad \text{et} \quad \lambda(1) = 0.$$

Ceci nous donne  $\lambda(t) = 1 - t$ . Donc,  $u$  est bien un maximum car  $H_{uu} = -2\lambda \leq 0$ . Après les calculs on trouve  $(x^*, u^*)$

$$x^*(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad u^*(t) = \frac{1}{2(1-t)}.$$

Cependant, remarquez que lorsque la fonction objective est évaluée en  $(x^*, u^*)$ , elle nous donne

$$\int_0^1 x^*(t) + u^*(t) dt = \int_0^1 t + \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4} dt = \infty.$$

Dans ce cas, il n'y a pas de "contrôle optimal", car nous considérons des problèmes avec une fonction objective de maximum (ou minimum) fini.

**Remarque 2.** L'explosion est une conséquence de la non-linéarité quadratique  $u^2$  dans l'équation différentielle. Notons que,

$$x' = x^2 \quad \text{et} \quad x(0) = 1,$$

a la solution  $x(t) = \frac{1}{1-t}$  et cette fonction explose en temps fini ( $t = 1$ ).

## 1.4 Quelques résultats d'existence d'un contrôle optimal pour une ODE [6]

Pour les exemples précédents, le contrôle est explicite et trivial. Cependant, dans la réalité nous ferons face à des problèmes plus complexes non-linéaires. Nous allons annoncer deux théorèmes

pour assurer au moins l'existence d'un contrôle optimal.

Soit le problème de contrôle optimal suivant défini sur un intervalle de temps fixe  $[a, b]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On minimise} \quad J(u) = l(x(a), x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), u(t)) dt, \\ x'(t) = g_0(t, x(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(t, x(t)) u^j(t), \\ u(t) \in U, \\ (t, x(t)) \in Q, \quad \forall t \in [a, b], \quad (x(a), x(b)) \in E \quad (\text{l'ensemble cible dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Les détails sont prescrit dans le théorème suivant.

**Théorème 2. (Théorème d'existence de contrôle optimal de Clarke [2])** On prend le problème (1.8) sur l'intervalle de temps  $[a, b]$  avec :

- Pour  $(i = 0, \dots, m)$ , chaque  $g_i$  est continue en  $x$  et mesurable en  $t$ , et de croissance linéaire

$$i.e. \text{ Il existe une constante } M \text{ telle que} \quad (t, x) \in Q \quad \Rightarrow \quad |g_i(t, x)| \leq M(1 + |x|).$$

- $U$  (l'ensemble des contrôles admissibles) est convexe et fermé.
- $E$  et  $Q$  sont fermés, et  $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue intérieurement.
- $\Lambda(t, x(t), u(t))$  est Lebesgue mesurable en  $t$  et  $(x, u)$ , et semi-continue intérieurement en  $(x, u)$ .  
 $\Lambda(t, x(t), \cdot)$  est convexe pour  $(t, x) \in Q$ , et il existe  $\lambda_0$

$$(t, x) \in Q, \quad u \in U \quad \Rightarrow \quad \Lambda(t, x, u) \geq \lambda_0.$$

- La projection  $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : (\alpha, \beta) \in E, \text{ pour certain } \beta \in \mathbb{R}^n\}$  de  $E$  est bornée.
- L'une des assertions suivantes est vraie pour certains  $r > 1$ .

(i) Il existe  $k \in L^r(a, b)$  tel que, pour presque tous  $t$ ,

$$u \in U \quad \Rightarrow \quad |u| \leq k(t).$$

(ii) Il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta$  tel que

$$(t, x) \in Q, \quad u \in U \quad \Rightarrow \quad \Lambda(t, x, u) \geq \alpha|u|^r + \beta.$$

Alors, s'il existe au moins un couple admissible  $(x^*, u^*)$  pour lequel  $J(x^*, u^*)$  est fini, le problème admet un contrôle optimal et une trajectoire optimale.

Le théorème de Clarke établit des conditions d'existence de solutions optimales sous certaines conditions. Il se peut qu'une des conditions n'est pas appropriée pour le problème considéré. Nous proposons aussi un deuxième résultat dans le théorème suivant (voir le livre de Fleming et Rishel [3]).

**Théorème 3.** Soit le problème de contrôle optimal suivant (traité par [3]), pour  $t \in [a, b]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On minimise} \quad J(u) = \phi(a, b, x(a), x(b)) + \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt, \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)) = \alpha(t, x(t)) + \beta(t, x(t))u, \\ u(t) \in U, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système et  $u$  est le contrôle appliqué à l'instant  $t$ ,  $e = (a, b, x(a), x(b)) \in S$  sous ensemble de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Supposons que

- (i) L'ensemble des solutions du système (1.9) vérifiant  $e \in S$  avec des variables de contrôle  $u$  intégrable sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $U$  est non vide.
- (ii) L'ensemble de contrôle  $U$  est convexe et fermé.
- (iii) Le côté droit du système d'état (1.9) est continu vérifiant

$$|f(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|),$$

$$|f(t, x', u) - f(t, x, u)| \leq C_2|x' - x|(1 + |u|),$$

pour certaines constantes positives  $C_1, C_2$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in U$ .

- (iv) L'intégrante  $L(t, x(t), u(t))$  de la fonction objective est continue et convexe en  $u$ .
- (v) Il existe des nombres positifs  $c_1, c_2$  avec  $c_1 > 0$ , et une constante  $\beta > 1$  tels que

$$L(t, x(t), u(t)) \geq c_1|u|^\beta - c_2.$$

- (vi)  $S$  est compact et  $\phi$  est continue sur  $S$ .

Alors, il existe un couple admissible  $(x^*, u^*)$  pour lequel  $J(x^*, u^*)$  est fini.

## Chapitre 2

# Contrôler la propagation d'une maladie infectieuse

### 2.1 Modèle sur la propagation du VIH avec une catégorie sous PrEP

La PrEP (Prophylaxie Pré-Exposition) est un médicament préventif contre le VIH pris par des personnes à risque élevé pour réduire les chances d'infection. Ce médicament est très coûteux (le médicament PrEP coûte entre 8 000 et 14 000 dollars par an pour chaque individu). Par conséquent, il est essentiel d'établir quelle est la proportion optimale d'individus susceptibles qui devraient prendre la PrEP, en tenant compte du coût. Dans cette section, nous formulons ce problème mathématiquement, en utilisant la théorie du contrôle optimal, et nous l'étudions à la fois de manière analytique et numérique.

#### 2.1.1 Présentation du modèle

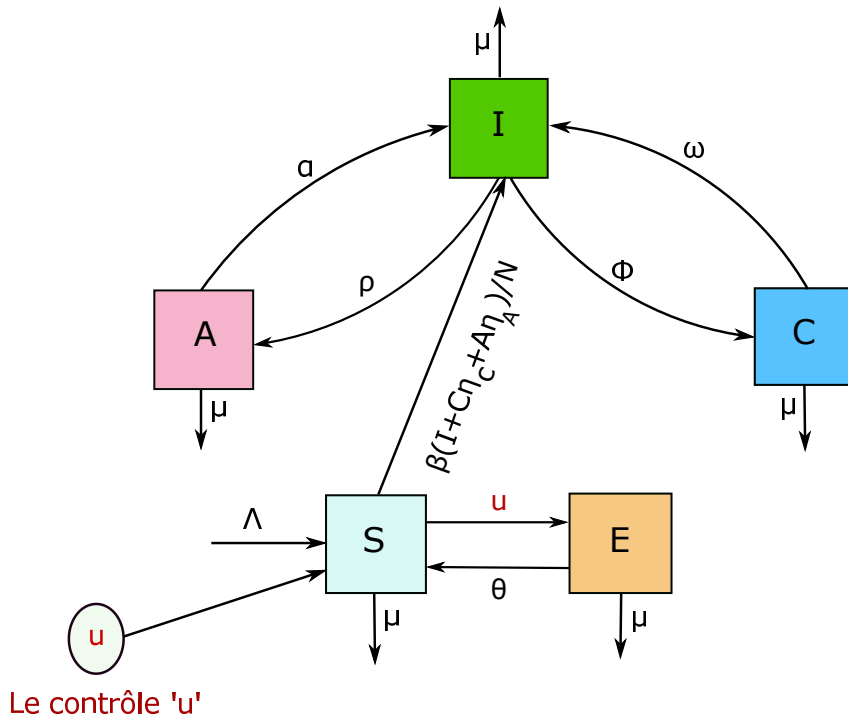
Nous examinons ce modèle de propagation du VIH en prenant en compte les individus susceptibles ( $S$ ), infectés ( $I$ ), sous traitement antirétroviral (empêche le VIH de se multiplier) ( $C$ ) et les individus atteints du SIDA ( $A$ ) sans PrEP, voir Figure 2.1. Une catégorie ( $E$ ) d'individus sous PrEP est ajoutée. Ces modèles décrivent l'évolution du nombre d'individus dans chaque catégorie en fonction du temps  $t$  dans l'intervalle  $[0, t_f]$  (avec  $t_f=25$  ans dans [13]).

Les auteurs de [13] posent une question intéressante : le prix de la PrEP est plutôt élevé et dans certains pays, il n'est pas pris en charge par une assurance maladie. La question est donc de trouver un compromis entre limiter l'infection avec ce nouveau traitement tout en limitant le nombre de personnes sous traitement pour réduire les coûts. Dans cette étude, le taux de susceptibles qui prennent la PrEP est une fonction du temps  $u(t)$ , donc  $u \in \Omega := \{u(\cdot) \in L^\infty(0, t_f) / 0 \leq u(t) \leq 1\}$ . Pour cette étude, nous considérons que le taux de mortalité induite par le SIDA est nul et que la

population globale  $N$  est constante. En d'autres termes, nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \frac{\beta(I(t) + C(t)\eta_c + A(t)\eta_A)}{N}S(t) - \mu S(t) - u(t)S(t) + \theta E(t), \\ I'(t) = \frac{\beta(I(t) + C(t)\eta_c + A(t)\eta_A)}{N}S(t) - (\Phi + \rho + \mu)I(t) + \alpha A(t) + \omega C(t), \\ C'(t) = \Phi I(t) - (\omega + \mu)C(t), \\ A'(t) = \rho I(t) - (\alpha + \mu)A(t), \\ E'(t) = u(t)S(t) - (\mu + \theta)E(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Les décès sont décrits avec un taux  $\mu > 0$ , et les nouveaux individus arrivent dans la catégorie  $S$  avec un taux  $\Lambda = \mu N > 0$ .



**Figure 2.1** – Illustration schématique du modèle du VIH avec une catégorie sous PrEP et un contrôle appliqué sur les susceptibles.

- **Susceptible  $S$**  : Ce terme correspond aux individus non infectés, le transfert de  $S$  vers les infectés  $I$  est donné par  $\beta \frac{I(t) + C(t)\eta_c + A(t)\eta_A}{N} S(t)$ , qui traduit le contact des susceptibles avec chaque membre infecté par le VIH.  $\beta$  est le taux de contact effectif pour l'infection par le VIH.  $\eta_c$  traduit l'infectiosité d'un individu sous traitement  $C$  et  $\eta_A$  est plus grande décrivant l'infectiosité d'un individu atteint du SIDA.
- **Infectés  $I$**  : Cela correspond aux individus infectés par le VIH mais non traités et sans symptômes cliniques du SIDA. Ils entament un traitement et passent à la catégorie  $C$  selon un taux  $0 < \Phi < 1$ , puis ils développent des symptômes du SIDA avec un taux  $0 < \rho < 1$ .

- **Individus sous traitement antirétroviral  $C$**  : Cela correspond aux individus infectés par le VIH qui suivent un traitement antirétroviral contre le VIH. Ils passent à la catégorie  $I$  s'ils arrêtent le traitement, avec un taux  $0 < \omega < 1$ .
- **Individus atteints du SIDA  $A$**  : Cela correspond aux individus présentant des symptômes cliniques du SIDA. Ils passent à la catégorie  $I$  s'ils suivent un traitement, avec un taux  $0 < \alpha < 1$ .
- **Individus sous PrEP  $E$**  : C'est la classe d'individus qui prennent le médicament PrEP.

L'objectif est de trouver un compromis entre un faible nombre de personnes infectées et en même temps avoir pas trop d'individus sous PrEP. Nous définissons la fonction

$$J = \int_0^{t_f} \{I(t)\omega_1 + u^2(t)\omega_2\} dt = \int_0^{t_f} L(I(t), u(t))dt, \quad (2.2)$$

avec les constantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  représentent les poids associés au nombre d'individus infectés par le VIH et au coût associé au traitement préventif PrEP, respectivement. La fonction  $J$  est  $C^\infty$  en  $u$  car il s'agit simplement d'une fonction carrée et l'intégrale est bornée. Nous avons choisi de mettre  $u^2$  pour rendre la fonction  $J$  strictement convexe lorsque  $\omega_2 \neq 0$  afin de trouver un minimum unique.

L'objectif est de trouver la fonction  $u$  qui minimise la fonction  $J$ . Cependant,  $u$  est un taux donc  $0 \leq u(t) \leq 1$ . Lorsque  $u(t) = 0$ , aucun individu susceptible ne prend la PrEP. Pour pouvoir étudier ce problème, nous posons le problème sous une autre forme. Pour commencer, nous posons le vecteur colonne  $x(t)$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)) = (S(t), I(t), C(t), A(t), E(t)) \in \mathbb{R}^5.$$

Le problème consiste donc à trouver le chemin optimal  $x^*$  associé à la contrainte  $u^*$  qui satisfait le système

$$x'(t) = f(x(t)) + Ax(t) + Bx(t)u(t) = F(x(t), u(t)),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & -\rho - \Phi - \mu & \omega & \alpha & 0 \\ 0 & \Phi & -\omega - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & -\alpha - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et  $f = (f_1 \quad f_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$  avec

$$f_1 = \mu N - \frac{\beta}{N}(I(t) + C(t)\eta_C + A(t)\eta_A)S(t),$$

et

$$f_2 = \frac{\beta}{N}(I(t) + C(t)\eta_C + A(t)\eta_A)S(t).$$

L'existence d'une fonction  $u$  qui minimise  $J$  est démontrée par Clark dans le théorème 2 (dans le chapitre 1). Les hypothèses sont facilement vérifiables puisque la fonction  $u$  est bornée et agit sur la dérivée de  $x$  de manière linéaire seulement. De plus, pour assurer son existence, nous devons nous assurer que la fonction dérivée est augmentée par une croissance linéaire de  $x$ , ce qui est évident

pour les termes linéaires dans  $A$  et  $B$ . En ce qui concerne la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} |f(x(t))| &\leq \mu N + \frac{2\beta S(t)}{N}(I(t) + C(t)\eta_C + A(t)\eta_A), \\ &\leq \mu N + 2\beta \max(1, \eta_C, \eta_A)(I(t) + C(t) + A(t)), \\ &\leq M(|x(t)| + 1). \end{aligned}$$

Cela nous permet de garantir l'existence d'une trajectoire qui minimise notre contrainte. Maintenant que nous savons qu'il existe une solution, nous utilisons le principe du maximum de Pontryagin (Théorème 1 du chapitre 1) pour caractériser et trouver une forme explicite. Pour cela, nous définissons le Hamiltonien  $H$  du système (2.1) associé à (2.2) et les fonctions adjointes  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t))$ , on a

$$H(x, u, \lambda) = L(x, u) + \lambda^T F(x, u),$$

$$H(x, u, \lambda) = w_1 x_2 + w_2 u^2 + \lambda^T (f(x) + Ax + Bxu).$$

Le principe du maximum de Pontryagin nous assure que  $\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda) = 0$ , ce qui nous permet de trouver une estimation sur  $u$ . Donc nous avons :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}^*(t) = \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_5(t))x_1^*(t)}{2w_2},$$

et puisque  $u \in [0, 1]$ . On prend

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_5(t))x_1^*(t)}{2w_2} < 0, \\ 1, & \text{si } \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_5(t))x_1^*(t)}{2w_2} > 1, \\ \tilde{u}^*(t), & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc

$$u^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_5(t))x_1^*(t)}{2w_2} \right\} \right\}.$$

Par le principe du maximum de Pontryagin, on déduit que l'état adjoint vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = \lambda_1 \left( \frac{\beta}{N}(x_2^* + \eta_c x_3^* + \eta_A x_4^*) + \mu + u^* \right) - \lambda_2 \frac{\beta}{N}(x_2^* + \eta_c x_3^* + \eta_A x_4^*) + \lambda_5 u^*, \\ \lambda_2'(t) = -w_1 + \frac{\beta}{N} \lambda_1 x_1^* - \lambda_2 \left( \frac{\beta}{N} x_1^* - \rho - \Phi - \mu \right) - \lambda_3 \Phi - \lambda_4 \rho, \\ \lambda_3'(t) = \frac{\beta}{N} \lambda_1 \eta_c x_1^* - \lambda_2 \left( \frac{\beta}{N} \eta_c x_1^* + w \right) + \lambda_3 (w + \mu), \\ \lambda_4'(t) = \frac{\beta}{N} \lambda_1 \eta_A x_1^* - \lambda_2 \left( \frac{\beta}{N} \eta_A x_1^* + \alpha \right) + \lambda_4 (\alpha + \mu), \\ \lambda_5'(t) = -\lambda_1 \theta + \lambda_5 (\theta + \mu), \end{cases} \quad (2.3)$$

avec les conditions suivantes

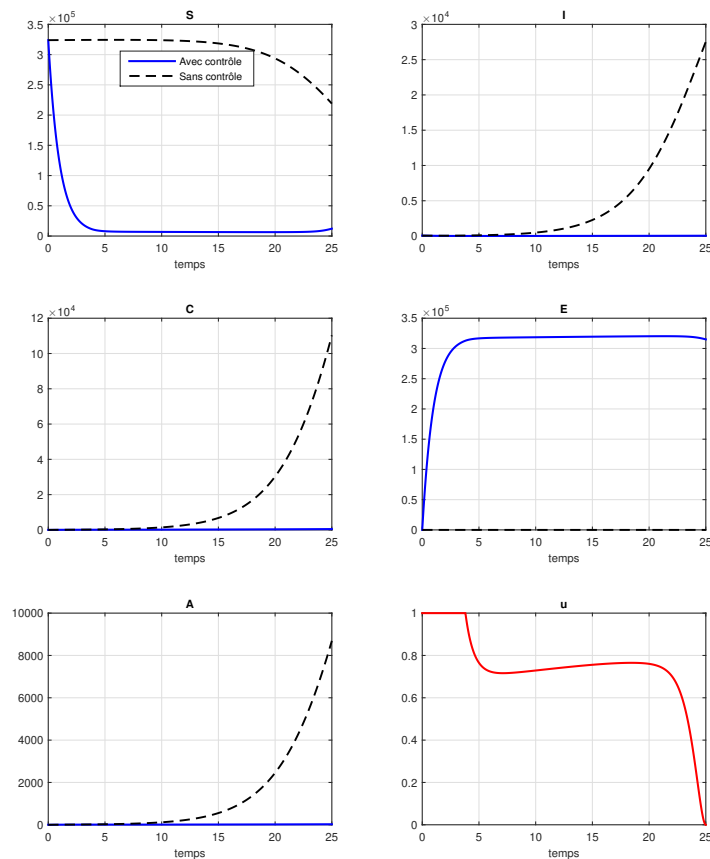
$$\lambda_1(t_f) = 0, \quad \lambda_2(t_f) = 0, \quad \lambda_3(t_f) = 0, \quad \lambda_4(t_f) = 0, \quad \lambda_5(t_f) = 0.$$

Le système principal et le système de l'état adjoint ci-dessus sont non linéaire et c'est impossible de faire une résolution analytique, pour cela nous passons à une résolution numérique dans la partie suivante.

### 2.1.2 Simulations numériques

Pour résoudre le système (2.1) numériquement, on utilise la méthode de Rung Kutta 4 en avançant dans le temps car les conditions initiales sont connues (forward) pour l'état, puis on injecte les valeurs obtenues pour résoudre le système (2.3) avec la méthode Rung Kutta 4 en reculant dans le temps (backwards). Le détail de l'approche numérique ainsi que le code développé sont donnés dans l'annexe 5.2.

Pour les simulations on prend les valeurs de [13] :  $S_0 = 323911$  ,  $I_0 = 61$  ,  $C_0 = 0$  ,  $A_0 = 0$  ,  $E_0 = 0$ , et pour les paramètres :  $\Lambda = 13045 \text{ ind.année}^{-1}$  ,  $\beta = 0.752 \text{ ans}^{-1}$  ,  $\eta_A = 1.35$ ,  $\eta_c = 0.04$  ,  $\mu = 1/69.54 \text{ ans}^{-1}$  ,  $\theta = 0.001$ ,  $\Phi = 1 \text{ ans}^{-1}$ ,  $\rho = 0.1 \text{ ans}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.33 \text{ ans}^{-1}$ ,  $\omega = 0.09 \text{ ans}^{-1}$ . Voir le code 2 de Matlab dans l'annexe 5.2, pour les détails. Dans la Figure 2.2, nous donnons une illustration de ce qui précède et sur l'application de la théorie du contrôle optimal utilisée. On a fourni des stratégies de la PrEP qui minimisent le nombre d'individus infectés par le VIH et le coût associé à la PrEP.



**Figure 2.2** – Simulation numérique du modèle HIV avec la PrEP et l'effet de l'application du contrôle optimale sur les infectés.

## 2.2 Contrôle optimal d'une maladie infectieuse d'un modèle SEIR [9]

Le contrôle de la propagation d'une maladie infectieuse peut être réalisé grâce à diverses stratégies de vaccination. En utilisant des techniques de contrôle optimal, il est possible de trouver le calendrier de vaccination qui minimise le nombre d'individus infectés et le coût global de la vaccination sur une période fixe. Nous examinons le cas où les fournitures de vaccins sont limitées et trouvons le calendrier de vaccination optimal de manière à ce qu'un nombre donné de personnes seulement soient vaccinées.

Nous nous concentrons sur une maladie infectieuse micro-parasitaire, englobant les virus, bactéries ou champignons. Ces maladies peuvent être caractérisées par leur petite taille, leur capacité à se reproduire directement à l'intérieur de l'hôte individuel, et leur durée relativement courte de l'infection.

Nous présentons un modèle SEIR pour illustrer l'utilisation du contrôle optimal. La population hôte est divisée en classes d'individus susceptibles, exposés, infectés, et immunisés (rétablis ou vaccinés). La classe exposée contient ceux qui ont la maladie mais restent latents pendant un certain temps avant de devenir contagieux. Nous désignons par  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  et  $R(t)$  le nombre d'individus dans les classes respectives de susceptibles, exposés, infectés et immunisés au temps  $t$ . La population totale au temps  $t$  est représentée par  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ . Les équations différentielles gouvernant ces classes sont données par, voir [9],

$$\begin{cases} S'(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \\ E'(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \\ I'(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \\ R'(t) = gI(t) - dR(t) + u(t)S(t), \\ N'(t) = (b - d)N(t) - aI(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

### 2.2.1 Présentation du modèle

La variable du contrôle est désignée par  $u(t)$ , représentant le pourcentage d'individus susceptibles vaccinés par unité de temps. On suppose que le vaccin est toujours efficace, de sorte que tous les individus susceptibles vaccinés deviennent immunisés. Nous limitons la variable du contrôle entre  $0 \leq u(t) \leq 0.9$  pour exclure le cas où l'ensemble de la population susceptible sera vacciné. Soit  $b$  le taux de natalité exponentielle naturel de la population et  $d$  le taux de mortalité exponentielle naturel. L'incidence ou la fréquence de maladie est décrite par le terme  $cS(t)I(t)$ . Le paramètre  $e$  représente la vitesse à laquelle les individus exposés deviennent infectieux, et  $g$  est la vitesse à laquelle les individus infectieux se rétablissent. Le paramètre  $a$  désigne le taux de mortalité dû à la maladie chez un individu infecté.

Si on applique un contrôle optimal à un modèle pour une maladie particulière, il convient de vérifier que nombre de reproduction de base  $R_0 > 1$  dans le modèle sans contrôle. Si  $R_0 < 1$ , la maladie a tendance à s'éteindre d'elle-même sans nécessiter d'intervention.

Nous étendons ce modèle pour prendre en compte la situation dans laquelle une offre limitée de vaccins est disponible. Si  $X$  représente le nombre total de personnes susceptibles que nous pouvons

vacciner sur  $T$  années, alors nous avons une contrainte intégrale :

$$\int_0^T S(t)u(t)dt = X.$$

De telles contraintes sont appelées isopérimétriques et peuvent être gérées en créant une autre variable d'état  $W(t)$  :

$$\begin{cases} W'(t) = S(t)u(t), \\ W(0) = 0, \\ W(T) = X. \end{cases} \quad (2.5)$$

Notre objectif est de minimiser le nombre d'individus infectieux et le coût global de la vaccination sur une période de  $T$  années. Par conséquent, notre coût à minimiser :

$$\min \int_0^T \{AI(t) + u^2(t)\}dt,$$

où  $A$  un paramètre d'équilibrage, qui détermine l'importance relative des deux facteurs. Le contrôle  $u(\cdot)$  se trouve dans  $U$  avec

$$U = \{u : [0, T] \rightarrow [0, 0.9] \mid u \text{ est Lebesgue mesurable}\}.$$

Le système (2.4) est complété par les conditions initiales

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0, \quad N(0) = N_0.$$

Notons que l'état final  $(S(T), E(T), I(T), N(T))$  est libre. On remarque que la variable  $R$  n'apparaît que dans l'équation de  $R'$ , et nous allons l'ignorer en considérant tout simplement  $R(t) = N(t) - S(t) - E(t) - I(t)$ .

Pour l'étude de ce problème, on le réécrit sous une forme convenable. Prenons le vecteur  $x(t)$ ,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)) := (S(t), E(t), I(t), N(t), W(t)) \in \mathbb{R}^5.$$

Nous avons donc, pour  $t \geq 0$ ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + Ax(t) + Bx(t)u(t), \quad (2.6)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -e-d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & -g-a-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & b-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$  avec

$$f_1 = -cSI, \quad f_2 = cSI, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 0.$$

## 2.2.2 Caractérisation du contrôle optimal et simulations numériques

L'existence d'une fonction  $u$  qui minimise  $J$  se démontre par le résultat de Clark dans le Théorème 2 du chapitre 1. Les hypothèses sont facilement vérifiables puisque la fonction  $u$  est bornée et agit sur la dérivée de  $x$  de manière linéaire seulement. En effect, on a

$$\begin{aligned} |f(x(t)) + Ax(t) + Bx(t)u(t)| &= |(2b - d)N - d(S + E + I) - 2aI - gI|, \\ &\leq |2b - d|N + d(S + E + I) + |2a + g|I. \\ &\leq (|2b - d| + d + |2aI + gI|)(S + E + I + N + W), \\ &\leq M(1 + |x(t)|), \quad \text{avec } M = |2b - d| + d + |2aI + gI|. \end{aligned}$$

En utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin, on trouve le programme optimal de vaccination. Nous commençons par définir l'Hamiltonien comme suit

$$\begin{aligned} H &= AI + u^2 + \lambda_S(bN - dS - cSI - uS) + \lambda_E(cSI - (e + d)E) \\ &\quad + \lambda_I(eE - (g + a + d)I) + \lambda_N((b - d)N - aI) + \lambda_W(Su). \end{aligned}$$

En différenciant l'Hamiltonien par rapport à chaque variable d'état, nous obtenons le système différentiel pour l'adjoint associé. De plus, comme  $S, E, I$  et  $N$  n'ont pas de valeurs fixes à l'instant final, les valeurs des multiplicateurs (adjoints) associés à cet instant sont nulles. Puisque  $W$  a une condition initiale et une finale,  $\lambda_w$  n'a pas de condition de transversalité. Par conséquent, le système adjoint est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda'_S = \lambda_S(d + cI + u) - cI\lambda_E - \lambda_W u, \\ \lambda'_E = \lambda_E(e + d) - e\lambda_I, \\ \lambda'_I = -A + cS\lambda_S - cS\lambda_E + \lambda_I(g + a + d) + a\lambda_N, \\ \lambda'_N = -b\lambda_S + \lambda_N(d - b), \\ \lambda'_W = 0, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

et par le principe du maximum de Pontryagin on a les conditions suivantes

$$\lambda_S(T) = 0, \quad \lambda_E(T) = 0, \quad \lambda_I(T) = 0, \quad \lambda_N(T) = 0.$$

Selon la condition d'optimalité, nous avons :

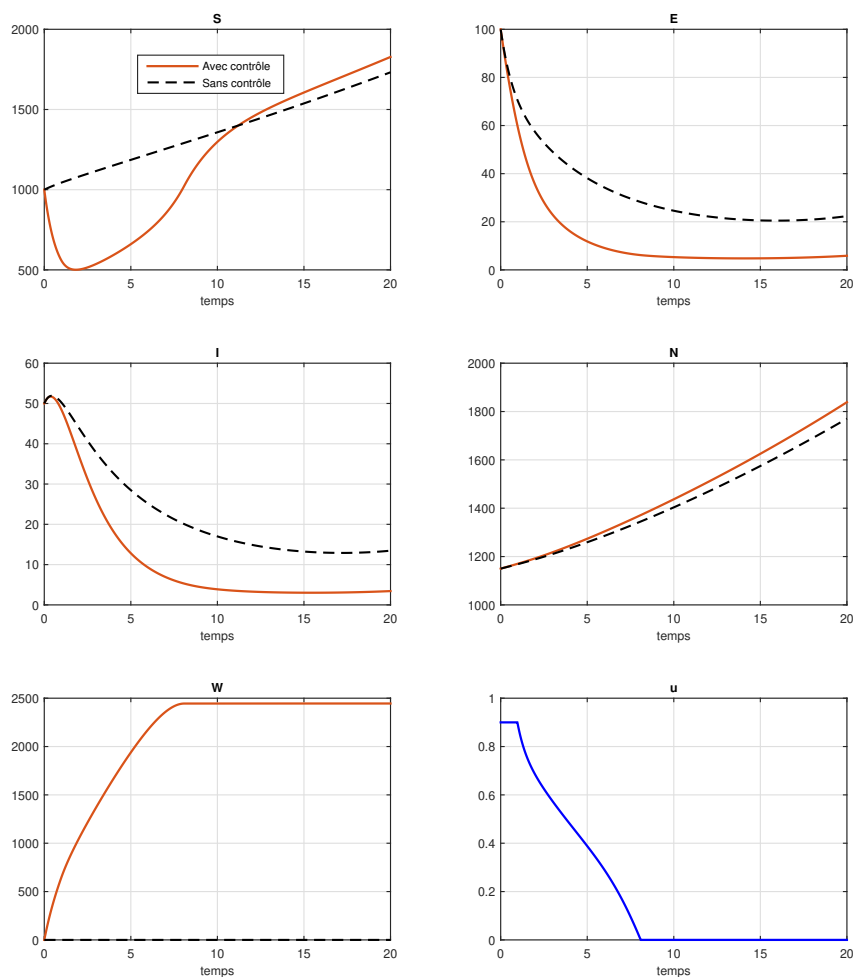
$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0 \Rightarrow u^*(t) = \frac{S(t)(\lambda_S(t) - \lambda_w(t))}{2}.$$

En tenant compte des limites, nous concluons que

$$u^*(t) = \min \left[ 0.9, \max \left[ 0, \frac{S(t)(\lambda_S(t) - \lambda_w(t))}{2} \right] \right].$$

Il est clair que le système devrait être résolu numériquement comme pour le premier modèle de la partie précédente. Nous utilisons la méthode de Rung Kutta 4, en avançant dans le temps car les conditions initiales sont connues (forward) pour l'état, puis d'injecter les valeurs obtenues pour résoudre le système (2.7) avec la méthode Rung Kutta 4 en reculant dans le temps (backwards). Pour plus de détails sur les implémentations voir l'annexe.

Notons que pour  $\lambda_W$  on a pas de condition finale ou initiale. Par la dernière équation du système (2.7), nous avons  $\lambda_W(t) = k$  avec  $k$  une constante à déterminer. L'idée est de donner des valeurs pour  $k$  et comparer à chaque fois  $W(T)$  avec  $X$  donnée au départ. Pour  $X = 2500$ , nous aurons  $k = 0.0019$ .



**Figure 2.3** – Calendrier du vaccination optimal avec les paramètres suivants [9] :  $S_0=1000$  ,  $E_0 = 100$  ,  $I_0=20$ ,  $R_0 = 15$  ,  $b = 0.525$  ,  $d = 0.5$  ,  $c = 0.001$  ,  $e = 0.5$  ,  $g = 0.1$  ,  $a = 0.2$  ,  $A = 0.1$  ,  $T = 20$  ans.

Dans le problème de contrôle optimal considéré, l'objectif était de caractériser le calendrier de vaccination qui minimise le nombre d'individus infectés et le coût de la vaccination sur une période de temps finie. De plus, nous avons imposé une contrainte sur l'approvisionnement du vaccin. Nous avons vu que les contraintes isopérimétriques sur le contrôle peuvent être gérées en créant une variable d'état supplémentaire. Les résultats numériques illustrent le calendrier de vaccination optimal avec la contrainte. Cet outil est intéressant pour les décideurs ayant besoin d'une vision immédiate pour concevoir des stratégies rentables de contrôle des maladies.

## Chapitre 3

# Contrôle optimal d'un modèle de culture-ravageur-ennemi naturel

Plusieurs études mathématiques et résultats ont déjà été obtenus sur l'interaction entre les ennemis naturels et les ravageurs, ainsi que leur influence sur les cultures, en utilisant des modèles différentiels [5, 8]. Il nous semble essentiel de mener également une étude avec un contrôle optimal pour mieux comprendre cette interaction écologique. Par conséquent, nous considérons dans ce travail un modèle avec contrôle sur l'ennemi naturel pour minimiser le ravageur ou son extinction du système. Nous suivons le principe de Pontryagin pour obtenir la condition nécessaire d'optimalité, dont la formulation implique les notions d'état adjoint et d'Hamiltonien. Ensuite, nous proposons une partie numérique pour résoudre le système d'optimalité, puis discuter les résultats numériques avec des interprétations.

### 3.1 Introduction

L'écosystème est divisé en deux parties, à savoir les écosystèmes naturels et les écosystèmes artificiels. Les écosystèmes naturels sont ceux qui se forment naturellement sans intervention humaine, tandis que les écosystèmes artificiels sont le contraire, résultant de l'intervention humaine. À l'intérieur de l'écosystème, il existe une interaction entre l'environnement et les êtres vivants, tels que le parasitisme, le mutualisme, le commensalisme et la prédation.

La recherche reconnaît les défis croissants auxquels l'agriculture est confrontée en raison de diverses contraintes biotiques et abiotiques, qui sont exacerbées par l'intensification de l'agriculture et les changements dans l'environnement. Par conséquent, il est urgent de développer des techniques de lutte antiparasitaire efficaces, durables, favorisant la productivité et maintenant la santé environnementale. L'objectif principal de la présente partie est de développer des techniques et des stratégies de lutte antiparasitaire efficaces et durables qui peuvent réduire les pertes de productivité agricole causées par les ravageurs.

A partir du modèle mathématique donné dans (3.1), voir [7], nous considérons les variables d'état et les paramètres suivants :  $C(t)$  représente la population de cultures, tandis que  $P(t)$  et  $N(t)$  représentent les populations de ravageurs et d'ennemis naturels, respectivement. De plus,  $r$  est le taux de croissance intrinsèque de la population de cultures et  $K$  est la capacité de charge. Nous supposons en outre que les cultures sont consommées par les ravageurs avec une réponse fonctionnelle de type 2 de Holling, et que l'ennemi naturel consomme la population de ravageurs avec la même

réponse fonctionnelle. Ici,  $a_1$ ,  $a_2$  représentent le taux de prédation des populations de ravageurs et d'ennemis naturels, respectivement.  $c_1$  représente l'efficacité de conversion de la population de ravageurs à partir des cultures, et  $c_2$  représente l'efficacité de conversion de l'ennemi naturel à partir de la population de ravageurs. De plus,  $b_1$ ,  $b_2$  représentent des constantes de demi-saturation.  $h$  est le taux de récolte de la population de cultures,  $\mu$  et  $\delta$  représentent les taux de mortalité naturelle des populations de ravageurs et d'ennemis naturels, respectivement. Alors, nous avons

$$\begin{cases} C'(t) = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \frac{a_1 CP}{b_1 + C} - hC, \\ P'(t) = \frac{c_1 a_1 CP}{b_1 + C} - \frac{a_2 PN}{b_2 + P} - \mu P, \\ N'(t) = \frac{a_2 c_2 PN}{b_2 + P} - \delta N, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales :

$$C(0) \geq 0, \quad P(0) \geq 0 \quad \text{and} \quad N(0) \geq 0. \quad (3.2)$$

Tous les paramètres sont des constantes positives. Dans un premier temps, nous allons offrir une étude qualitative de ce systèmes.

L'existence et l'unicité pour ce système (3.1) est classique (par le théorème d'existence locale de Cauchy Lipschitz). Donc, on va se concentrer sur la positivité et montrer que les solutions sont bornées.

**Proposition 1.** *Les solutions du système (3.1) avec des conditions initiales positives sont positives.*

*Démonstration.* Soit  $(C, P, N)$  la solution de (3.1) associée à la condition initiale  $(C(0), P(0), N(0)) \in \mathbb{R}_+^3$ . On prouve la positivité en remarquant que

$$C(t) = 0, \quad (P, N) \in \mathbb{R}_+^2 \Rightarrow C'(t) \geq 0,$$

$$P(t) = 0, \quad (C, N) \in \mathbb{R}_+^2 \Rightarrow P'(t) \geq 0,$$

et

$$N(t) = 0, \quad (C, P) \in \mathbb{R}_+^2 \Rightarrow N'(t) \geq 0.$$

Cela donne  $C(t) \geq 0$ ,  $P(t) \geq 0$  et  $N(t) \geq 0$  par le Théorème 3.4 dans [12], pour  $t > 0$ .  $\square$

Ensuite, nous énonçons le théorème suivant.

**Théorème 4.** *Toute solution du système (3.1) avec une condition initiale  $(C(0), P(0), N(0))$  dans  $\mathbb{R}_+^3$  est uniformément bornée.*

*Démonstration.* On définit la fonction

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ t &\mapsto \Psi(t) = C(t) + \frac{1}{c_1} P(t) + \frac{1}{c_1 c_2} N(t). \end{aligned}$$

La dérivée temporelle de  $\Psi$  le long de la trajectoire d'une solution de (3.1) est donnée par

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dC}{dt} + \frac{1}{c_1} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{c_1 c_2} \frac{dN}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - hC - \frac{\mu}{c_1} P - \frac{\delta}{c_1 c_2} N.$$

Par conséquent,

$$\frac{d\Psi}{dt} + q\Psi = rC \left(1 + \frac{q}{r} - \frac{C}{K} - \frac{h}{r}\right) - \left(\frac{\mu}{c_1} - \frac{q}{c_1}\right)P - \left(\frac{\delta}{c_1c_2} - \frac{q}{c_1c_2}\right)N.$$

Si on prend  $0 < q \leq \min\{\mu, \delta\}$ , alors

$$\frac{d\Psi}{dt} + q\Psi \leq \left(rC + qC - hC - \frac{rC^2}{K}\right).$$

Et on a :  $\max_{C \in \mathbb{R}_+} \left(rC + qC - hC - \frac{rC^2}{k}\right) = \frac{K(r+q-h)^2}{4r}$ , donc

$$\frac{d\Psi}{dt} + q\Psi \leq \frac{K(r+q-h)^2}{4r} =: B.$$

En appliquant la théorie des inégalités différentielles, on obtient

$$0 \leq \Psi(C(t), P(t), N(t)) \leq \frac{B}{q}(1 - e^{-qt}) + \Psi(0)e^{-qt} \leq \frac{B}{q} + \Psi(0).$$

Finalement, toute solution de (3.1) est bornée.  $\square$

## 3.2 Points d'équilibre et stabilité

Dans cette section, nous considérons le système (3.1). Notre prochain résultat établit l'existence et la stabilité des équilibres du système (3.1). Les états stationnaires du système (3.1) sont :

- $E_0(0, 0, 0)$  est l'équilibre trivial.
- L'équilibre sans ravageurs est  $E_1(\tilde{k}, 0, 0)$ , où  $\tilde{k} := K(1 - \frac{h}{r})$ . Cet équilibre est réalisable si  $r > h$ , c'est-à-dire si le taux de croissance intrinsèque de la population de culture est supérieur au taux de récolte de la densité de culture, et il se réduit à l'équilibre trivial  $E_0$  si  $r \leq h$ .
- $E_2(\bar{C}, \bar{P}, 0)$  représente l'équilibre sans prédateurs, où  $\bar{C}$  et  $\bar{P}$  sont donnés par,

$$\bar{C} = \frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu} \quad \text{et} \quad \bar{P} = \frac{b_1 + \bar{C}}{a_1} \left[r \left(1 - \frac{\bar{C}}{K}\right) - h\right].$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel équilibre sont

$$r > h, \quad \mu < a_1 c_1 \quad \text{et} \quad \tilde{k} > \frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu} = \bar{C}. \quad (3.3)$$

- Pour l'équilibre intérieur noté  $(C^*, P^*, N^*)$ , nous constatons que  $C^*$  est une racine positive de l'équation suivante,

$$C^2 + m_1 C + m_2 = 0, \quad (3.4)$$

avec

$$m_1 = \frac{Kh}{r} + b_1 - K \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{K}{r} [a_1 P^* + h b_1 - r b_1],$$

où,

$$P^* = \frac{\delta b_2}{c_2 a_2 - \delta}.$$

Nous pouvons vérifier que nous avons deux situations. En fait, en utilisant le signe des coefficients de l'équation (3.4), nous pouvons obtenir l'existence d'un ou de deux équilibres positifs.

Un équilibre avec $C_1^*, N_1^* > 0$	
$(m_1, m_2) \neq (0, 0)$	
$m_2 \leq 0,$	$\frac{a_1 c_1 C_1^*}{b_1 + C_1^*} > \mu$
$r > h,$	$c_2 a_2 > \delta$
Deux équilibres positifs	
$(C_1^*, P^*, N_1^*)$	$(C_2^*, P^*, N_2^*)$
$\frac{a_1 c_1 C_1^*}{b_1 + C_1^*} > \mu$	$\frac{a_1 c_1 C_2^*}{b_1 + C_2^*} > \mu$
$r > h,$	$c_2 a_2 > \delta$
$m_1^2 \geq 4m_2$	
$m_1 < 0, m_2 > 0$	

En plus, on a

$$P^* = \frac{\delta b_2}{c_2 a_2 - \delta}, \quad C_{1,2}^* = \frac{1}{2} (-m_1 \pm (m_1^2 - 4m_2)^{\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad N_{1,2}^* = \frac{b_2 + P^*}{a_2} \left( \frac{a_1 c_1 C_{1,2}^*}{b_1 + C_{1,2}^*} - \mu \right). \quad (3.5)$$

Nous admettons que lorsque  $m_1^2 = 4m_2$ , avec  $m_1 < 0$ , les deux équilibres coïncident en une seule valeur. De plus, nous pouvons vérifier que toute autre situation qui n'est pas exprimée dans le tableau n'est pas associée à l'existence de points d'équilibre positifs.

Maintenant, nous procédons à l'analyse de la stabilité de chaque équilibre.

**Lemme 1.** *Le système (3.1) autour de  $E_0(0,0,0)$  est localement asymptotiquement stable si  $r < h$ . Sinon, si  $r > h$ , alors il est instable.*

*Démonstration.* Le Jacobien est exprimé par

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r - h & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de cette matrice jacobienne autour de l'équilibre  $E_0$  sont  $r - h$ ,  $-\mu$  et  $-\delta$ . Par conséquent, l'équilibre trivial est localement asymptotiquement stable si  $r < h$  et il est instable si  $r > h$ .  $\square$

**Théorème 5.** *Supposons que  $r < h$ . Alors, l'unique équilibre trivial de (3.1) est globalement asymptotiquement stable.*

*Démonstration.* Une fonction de Lyapunov est proposée pour le système donnée par,  $V_0: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , où

$$V_0(C, P, N) = C + \frac{1}{c_1} P + \frac{1}{c_1 c_2} N.$$

Cette fonction est positive et  $V_0(x, y, z) = 0$  si et seulement si  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .  $\dot{V}_0$  est calculé comme suit, pour  $t > 0$ ,

$$\dot{V}_0(C(t), P(t), N(t)) = (r - h)C(t) - \frac{r}{K}C^2(t) - \frac{\mu}{c_1}P(t) - \frac{\delta}{c_1c_2}N(t) \leq 0.$$

De plus,  $\dot{V}_0(x, y, z) = 0$  si et seulement si  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Ensuite, par le théorème de l'invariance de LaSalle, nous concluons que  $(0, 0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\mathbb{R}_+^3$ . Cela conclut la preuve du théorème.  $\square$

**Lemme 2.** *Le système (3.1) autour de  $E_1(\tilde{k}, 0, 0)$  est localement asymptotiquement stable si  $r > h$  et  $\tilde{k}(a_1c_1 - \mu) < \mu b_1$ . Sinon, il est instable.*

*Démonstration.* Les valeurs propres de la matrice jacobienne autour de l'équilibre  $E_1$  sont

$$-r + h, \quad \frac{1}{b_1 + \tilde{k}}[\tilde{k}(a_1c_1 - \mu) - \mu b_1] \quad \text{et} \quad -\delta,$$

où  $\tilde{k} = K(1 - \frac{h}{r})$ . Par conséquent, l'équilibre sans ravageurs  $E_1$  est stable si  $h < r$  et  $\tilde{k}(a_1c_1 - \mu) < \mu b_1$ .  $\square$

Le résultat suivant établit une condition pour que  $E_1$  soit globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 6.** *Si on a  $r > h$  et  $\mu > a_1c_1$ . Alors,  $E_1$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .*

*Démonstration.* On définit  $V_1: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$V_1(C, P, N) = \frac{\eta}{2}(C - \tilde{k})^2 + \frac{1}{c_1}P + \frac{1}{c_1c_2}N, \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\mu - a_1c_1}{a_1c_1\tilde{k}} > 0.$$

Cette fonction est positives et  $V_1(x, y, z) = 0$  si et seulement si  $(x, y, z) = (\tilde{k}, 0, 0)$ .  $\dot{V}_1$  est calculée comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(C(t), P(t), N(t)) &= \eta \dot{C}(t)(C(t) - \tilde{k}) + \frac{1}{c_1} \dot{P}(t) + \frac{1}{c_1c_2} \dot{N}(t), \\ &= -\frac{\eta r}{K}C(t)(C(t) - \tilde{k})^2 - \eta \frac{a_1C(t)P(t)}{b_1 + C(t)}(C(t) - \tilde{k}) + \frac{a_1C(t)P(t)}{b_1 + C(t)} \\ &\quad - \frac{\mu}{c_1}P(t) - \frac{\delta}{c_1c_2}N(t), \\ &= -\frac{\eta r}{K}C(t)(C(t) - \tilde{k})^2 - \eta \frac{a_1C^2(t)P(t)}{b_1 + C(t)} + \eta \frac{a_1\tilde{k}C(t)P(t)}{b_1 + C(t)} + \frac{a_1C(t)P(t)}{b_1 + C(t)} \\ &\quad - \frac{\mu}{c_1}P(t) - \frac{\delta}{c_1c_2}N(t), \\ &< -\frac{\eta r}{K}C(t)(C(t) - \tilde{k})^2 - \eta \frac{a_1C^2(t)P(t)}{b_1 + C(t)} + \left[ \eta a_1\tilde{k} + a_1 - \frac{\mu}{c_1} \right] P(t) - \frac{\delta}{c_1c_2}N(t), \\ &= -\frac{\eta r}{K}C(t)(C(t) - \tilde{k})^2 - \eta \frac{a_1C^2(t)P(t)}{b_1 + C(t)} - \frac{\delta}{c_1c_2}N(t) \leq 0. \end{aligned}$$

On déduit que  $\dot{V}_1(C(t), P(t), N(t)) < 0$ . Donc,  $(\tilde{k}, 0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\mathbb{R}_+^3 / \{(0, 0, 0)\}$ .  $\square$

**Lemme 3.** *Supposons que (3.3) soit vérifiée. Alors, le système (3.1) autour de  $E_2(\bar{C}, \bar{P}, 0)$  est stable si et seulement si*

$$\frac{a_1 \bar{C} \bar{P}}{(b_1 + \bar{C})^2} < \frac{r \bar{C}}{K} \quad \text{et} \quad \frac{a_2 c_2 \bar{P}}{b_2 + \bar{P}} < \delta.$$

*Démonstration.* La matrice jacobienne autour de l'équilibre  $E_2$  est donnée par

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} L & Q & 0 \\ R & 0 & T \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix},$$

tel que,

$$L = -\frac{r \bar{C}}{K} + \frac{a_1 \bar{C} \bar{P}}{(b_1 + \bar{C})^2}, \quad Q = -\frac{a_1 \bar{C}}{b_1 + \bar{C}}, \quad R = \frac{a_1 b_1 c_1 \bar{P}}{(b_1 + \bar{C})^2}, \quad T = -\frac{a_2 \bar{P}}{b_2 + \bar{P}}, \quad H = \frac{a_2 c_2 \bar{P}}{b_2 + \bar{P}} - \delta.$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est

$$(H - \lambda)[\lambda^2 - L\lambda - RQ] = 0.$$

On remarque que  $H < 0$ . Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux racines de  $\lambda^2 - L\lambda - RQ = 0$ . Alors, la stabilité se produit lorsque  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  et  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ . Par un calcul simple, nous pouvons voir que l'équilibre sans prédateur  $E_2$  est localement stable si et seulement si les conditions du lemme (3) sont satisfaites.  $\square$

À partir de (3.5), nous pouvons avoir un ou deux états d'équilibre positifs. Nous les désignons par  $(C_i^*, P^*, N_i^*)$  avec  $i = 1, 2$ , et s'il n'existe qu'un seul équilibre positif, nous prenons  $i = 1$ . Dans la suite, nous étudions la stabilité asymptotique locale de chaque équilibre positif.

**Lemme 4.** *Sous les conditions ci-dessus d'existence de l'état d'équilibre positif  $(C_i^*, P^*, N_i^*)$ , le système (3.1) autour de cet équilibre est localement asymptotiquement stable si  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3$  sont tous positifs, avec  $\sigma_1 := -(A + D)$ ,  $\sigma_2 := AD - EF - BC$  et  $\sigma_3 := AEF$ , où*

$$A = -\frac{r C_i^*}{K} + \frac{a_1 C_i^* P^*}{(b_1 + C_i^*)^2}, \quad B = -\frac{a_1 C_i^*}{b_1 + C_i^*}, \quad C = \frac{a_1 b_1 c_1 P^*}{(b_1 + C_i^*)^2}, \quad D = \frac{a_2 P^* N_i^*}{(b_2 + P^*)^2},$$

et

$$E = -\frac{a_2 P^*}{b_2 + P^*}, \quad F = \frac{a_2 b_2 c_2 N_i^*}{(b_2 + P^*)^2}.$$

*Démonstration.* La matrice jacobienne autour de l'équilibre  $(C_i^*, P^*, N_i^*)$  est en effet donnée par

$$J((C_i^*, P^*, N_i^*)) = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & E \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique du système (3.1) autour  $(C_i^*, P^*, N_i^*)$  est

$$\lambda^3 + \sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda + \sigma_3 = 0,$$

avec

$$\sigma_1 = -(A + D), \quad \sigma_2 = AD - EF - BC \quad \text{and} \quad \sigma_3 = AEF.$$

Finalement,  $E^*$  est localement asymptotiquement stable si  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$  soient positives (voir le critère de Routh Hurwitz [1]).  $\square$

### 3.3 Formulation du contrôle optimal

Dans cette section, nous résumons les principales caractéristiques de la méthode du contrôle optimal. Pour un système dynamique donné, le but de l'application d'un contrôle consiste à construire une expression analytique pour une entrée du système,  $U(t)$ , tout en garantissant que le système réel (dans notre cas, la sortie  $P(t)$ ) atteint une valeur souhaitée et contrôlée. Nous appliquons un contrôle sur l'ennemi naturel afin de contrôler la population des ravageurs, donc le modèle devient

$$\begin{cases} C'(t) = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \frac{a_1 CP}{b_1 + C} - hC, \\ P'(t) = \frac{c_1 a_1 CP}{b_1 + C} - \frac{a_2 PN}{b_2 + P} - \mu P, \\ N'(t) = \frac{a_2 c_2 PN}{b_2 + P} - N\delta + U(t)N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Le but du contrôle optimal est de réduire le nombre de ravageurs et également de minimiser le coût du contrôle, c'est-à-dire de trouver la fonction optimale  $U \in \Gamma$  pour le contrôle  $U$  pour atteindre cet objectif. Ici,  $\Gamma$  est l'ensemble des contrôles admissibles donné par

$$\Gamma = \{U(\cdot) \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}) : 0 \leq U(t) \leq U_{\max}\}, \quad (3.7)$$

avec  $t_f$  le temps finale de notre étude. Pour  $U^*$ , on note les trajectoires d'état  $C^*(t), P^*(t), N^*(t)$  la solution du système (3.6) dans l'intervalle de temps  $[0, t_f]$ . Pour une question d'utilité, nous considérons le coût (fonctionnel objectif) avec un contrôle sous forme quadratique donnée par,  $J : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$J(U) = \int_0^{t_f} (\alpha_1 P(t) + U^2(t)) dt = \int_0^{t_f} S(P(t), U(t)) dt. \quad (3.8)$$

Le constant  $\alpha_1$  représente un poids associé au nombre des ravageurs  $P$ . La fonction  $J$  est  $C^\infty$  en  $U$  car elle est simplement une fonction carrée et l'intégrale est bornée. Nous choisissons de mettre  $U^2$  pour rendre  $J$  strictement convexe afin de trouver un minimum unique tel que  $J(U^*(\cdot)) = \min_{\Gamma} J(U(\cdot))$ .

Pour l'étude de ce problème, on écrit le système sous la forme,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + Ax(t) + Bx(t)U(t) = F(x(t), U(t)) = [F_1, F_2, F_3].$$

Avec le vecteur  $x(t)$ ,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) := (C(t), P(t), N(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} r-h & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et  $f = (f_1, f_2, f_3)$  avec

$$\begin{aligned} f_1 &= -r \frac{C^2}{K} - \frac{a_1 CP}{b_1 + C}, \\ f_2 &= \frac{c_1 a_1 CP}{b_1 + C} - \frac{a_2 PN}{b_2 + P}, \\ f_3 &= \frac{a_2 c_2 PN}{b_2 + P}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous devons montrer que le système (3.1)-(3.8) admet une solution.

### 3.3.1 L'étude du contrôle optimal

Tout d'abord, nous commençons par établir ce théorème sur l'existence d'un tel contrôle optimal.

**Théorème 7.** *Le problème de contrôle optimal, défini par la fonction objective (3.8) sur l'ensemble admissible  $\Gamma$  sous réserve du système (3.6) et des conditions initiales  $(C_0, P_0, N_0) \in \mathbb{R}_+^3$ , admet une solution telle que*

$$J(U^*) = \min_{U \in \Gamma} J(U).$$

*Démonstration.* Le résultat est immédiat si les conditions dans [3] (voir aussi le premier chapitre 1) sont vérifiables.

- (i) Étant donné que  $\Gamma$  est un ensemble non vide de fonctions mesurables à valeurs réelles sur l'intervalle de temps fini, le système (3.6) possède des coefficients bornés, et donc toutes les solutions sont bornées sur  $[0, t_f]$ . Donc, les solutions correspondantes pour le système (3.6) existent.
- (ii) Soit  $u, v \in \Gamma$  tels que  $0 \leq u \leq U_{\max}$  et  $0 \leq v \leq U_{\max}$ . Alors, pour un  $\lambda$  arbitraire appartenant à  $[0, 1]$ , nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda u \leq \lambda U_{\max} \quad \text{et} \quad 0 \leq (1-\lambda)v \leq (1-\lambda)U_{\max} \\ \Rightarrow 0 \leq \lambda u + (1-\lambda)v \leq \lambda U_{\max} + (1-\lambda)U_{\max} = U_{\max}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $0 \leq \lambda u + (1-\lambda)v \leq U_{\max}$ . Cela implique que l'ensemble de contrôle  $\Gamma$  est convexe, et il est fermé par définition. Donc,  $\Gamma$  est convexe fermé.

- (iii) Tous les termes de droite des équations du système (3.6) sont continus, toutes les variables  $C, P, N$  et  $U$  sont bornées sur  $[0, t_f]$ , et peuvent être écrites comme une fonction linéaire de  $U$  avec des coefficients dépendant du temps et de l'état.
- (iv) Il est clair que  $S$  est convexe en  $U$ .
- (v) On a aussi  $S = \alpha_1 P(t) + U^2(t) \geq \alpha_1 U^2(t)$ , donc  $c_1 = \alpha_1$  et  $c_2 = 0$ .

Nous concluons qu'il existe une paire de contrôle optimale (voir chapitre 1). □

En règle générale, nous enchaînons en introduisant l'Hamiltonien

$$\begin{aligned} H(x(t), U(t), \lambda(t)) &= \tilde{p}S(x_2(t), U(t)) + \lambda(t)F(x(t), U(t)) \\ &= \alpha_1 x_2(t) + U^2(t) + \lambda(t)[f(x(t)) + Ax(t) + Bx(t)U(t)], \end{aligned}$$

où  $\tilde{p} = +1$ ,  $S(x_2(t), U(t))$  est la fonction du coût définie précédemment,  $F(x(t), U(t))$  est la fonction du côté droit du système (3.1) et  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$  est le vecteur adjoint. Clairement,  $H$  devient

$$\begin{aligned} H(x(t), U(t), \lambda(t)) &= \alpha_1 x_2(t) + U^2(t) \\ &+ \lambda_1(t) \left( r x_1(t) \left( 1 - \frac{x_1(t)}{K} \right) - \frac{a_1 x_1(t) x_2(t)}{b_1 + x_1(t)} - h x_1(t) \right) \\ &+ \lambda_2(t) \left( \frac{c_1 a_1 x_1(t) x_2(t)}{b_1 + x_1(t)} - \frac{a_2 x_2(t) x_3(t)}{b_2 + x_2(t)} - \mu x_2(t) \right) \\ &+ \lambda_3(t) \left( \frac{a_2 c_2 x_2(t) x_3(t)}{b_2 + x_2(t)} - \delta x_3(t) + U(t) x_3(t) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nous remarquons que  $\frac{\partial H^2}{\partial U^2} = 2 > 0$ . Ainsi, les points extrêmes de Pontryagin sont des minimiseurs du coût  $J$  et non des maximiseurs. De plus, une structure quadratique dans le contrôle présente l'avantage mathématique suivant : si l'ensemble de contrôle est convexe et compact (comme c'est le cas ici), cela implique que le Hamiltonien atteint son minimum sur l'ensemble de contrôle en un point unique.

**Théorème 8.** *Si le contrôle  $U^*(t)$  et la trajectoire  $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t))^T$  sont optimaux d'après le principe du Maximum de Pontryagin, il existe des fonctions adjointes  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$  satisfaisant le système suivant*

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, & t \in [0, t_f] \quad \text{et} \quad \lambda_1(t_f) = 0, \\ \lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, & t \in [0, t_f] \quad \text{et} \quad \lambda_2(t_f) = 0, \\ \lambda_3'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_3}, & t \in [0, t_f] \quad \text{et} \quad \lambda_3(t_f) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

De plus, pour  $t \in [0, t_f]$ , le contrôle optimal  $U^*(t)$  est caractérisé par :

$$\frac{\partial H}{\partial U}(t, U^*(t), \lambda(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Les conditions  $\lambda_i(t_f) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$  sont connues sous le nom de conditions de transversalité. Un calcul direct nous donne

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = -\lambda_1 r + \frac{2\lambda_1 r x_1^*}{K} + \frac{\lambda_1 a_1 b_1 x_2^*}{(b_1 + x_1^*)^2} + \lambda_1 h - \frac{\lambda_2 a_1 c_1 b_1 x_2^*}{(b_1 + x_1^*)^2}, \\ \lambda_2'(t) = -\alpha_1 + \frac{\lambda_1 a_1 x_1^*}{b_1 + x_1} + \frac{\lambda_2 a_2 b_2 x_3^*}{(b_2 + x_2^*)^2} + \frac{\lambda_3 b_2 a_2 c_2 x_3^*}{(b_2 + x_2^*)^2} - \frac{\lambda_2 a_1 c_1 x_1^*}{b_1 + x_1} + \mu \lambda_2, \\ \lambda_3'(t) = \frac{\lambda_2 a_2 x_2^*}{b_2 + x_2^*} - \frac{\lambda_3 a_2 c_2 x_2^*}{b_2 + x_2^*} - \lambda_3 U^*(t) + \lambda_3 \delta. \end{cases} \quad (3.11)$$

De plus, pour  $t \in [0, t_f]$ , le contrôle optimal  $U^*$  peut être résolu à partir de la condition de minimalité,

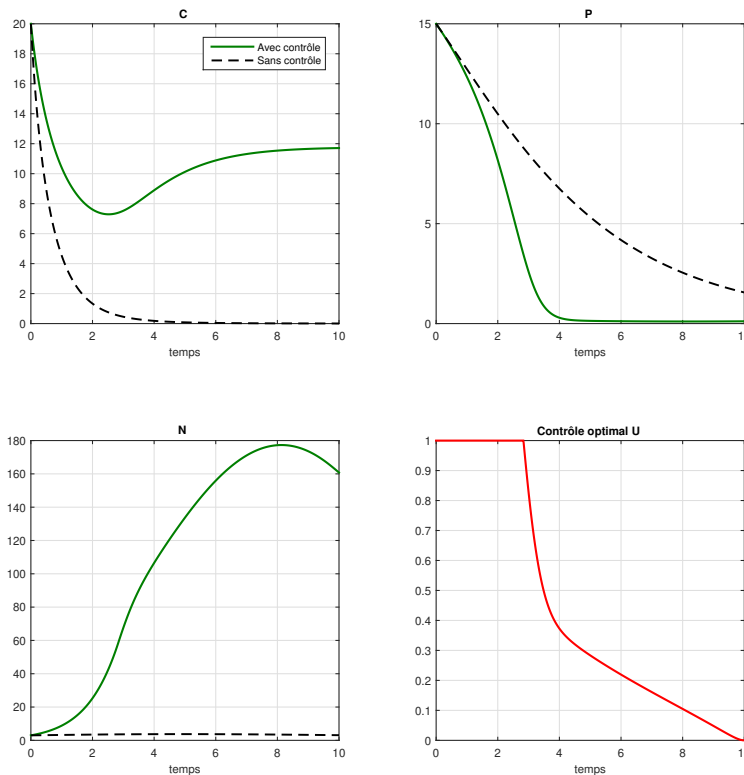
$$\frac{\partial H}{\partial U} \Big|_{U=U^*} = 0.$$

Alors, à l'intérieur de l'ensemble des contrôles admissibles, nous obtenons

$$U^*(t) = \min \left( U_{\max}, \max \left( U_{\min}, \frac{-\lambda_3 x_3^*(t)}{2} \right) \right). \quad (3.12)$$

Ainsi, cette expression décrit une expression analytique pour le contrôle qui dépend des variables d'état.

Maintenant, il suffit de résoudre numériquement le problème de contrôle optimal (3.1), (3.2), (4.4), (3.8) avec des valeurs concrètes et des conditions initiales. Dans la suite, on a résolu le problème traité numériquement sous Matlab avec Rung-Kutta d'ordre 4, voir la Figure 3.1 pour une illustration d'un cas. Pour plus de détails sur le schéma numérique voir l'annexe 5.2. Le contrôle optimal permet de réduire  $P(t)$  (les ravageurs) et minimiser au même temps un coût donné dans  $J(U)$ . Le contrôle est appliqué indirectement sur la variable d'ennemi naturel car nous supposons que c'est un moyen de lutte biologique puisque c'est écologiques et moins nuisibles pour la santé humaine.



**Figure 3.1** – Les simulations du modèle culture-ravageur-ennemi naturel montrent l'effet de l'application optimale sur les cultures. Avec les valeurs des paramètres :  $r = 1.2$ ,  $a_1 = 0.9$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $b_1 = 10$ ,  $k = 20$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $b_2 = 15$ ,  $c_2 = 0.75$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.9$ ,  $h = 0.3$ ,  $U_{\max} = 1$ ,  $U_{\min} = 0$ ,  $c_1 = 1.3$ ,  $C(0) = 20$ ,  $P(0) = 15$ ,  $N(0) = 3$ .

## Chapitre 4

# Contrôle optimal d'un modèle de proie-prédateur

Parmi les diverses interactions qui se produisent dans la nature on trouve l'interaction entre les espèces. Cela reçoit une attention significative en raison de son existence universelle et de son importance énorme. L'interaction proie-prédateur est énormément affectée par la prédation d'un prédateur, parfois la prédation peut conduire à l'extinction de la proie. De plus, en raison de cet effet massif de la prédation, les espèces proies modifient à la fois leur comportement quantitatif et qualitatif. Tout d'abord, Lotka et Volterra ont formulé mathématiquement les interactions entre espèces en utilisant des équations différentielles ordinaires. Ensuite, les dynamiques spatiotemporelles des espèces proie et prédateur ont été étudiées sur un domaine ou une région spécifique à l'aide d'équations de réaction-diffusion. Si nous examinons le changement des densités d'espèces au fil du temps et de l'espace, alors les dynamiques sont appelées dynamiques spatiotemporelles. Au cours des dernières années, une attention considérable a été accordée à la compréhension de la propagation spatiale des espèces et à la formation de motifs dans des domaines beaucoup plus complexes. Dans ce chapitre, nous allons proposer un système écologique décrivant l'interaction entre des proies et prédateurs. Nous analysons ce système mathématiquement tout en dérivant un problème de contrôle optimal. Ensuite, nous montrons que ce système, en présence de diffusion, génère les motifs de Turing.

### 4.1 Formulation du Modèle avec et sans diffusion

Dans cette étude, nous supposons une reproduction logistique des proies en l'absence d'une population de prédateurs. Nous supposons également qu'une nourriture supplémentaire est uniformément répartie dans l'habitat. Ainsi, en présence de nourriture supplémentaire, une réponse fonctionnelle de type II de Holling est considéré comme suit

$$f(U, V) = \frac{(1 - c)e_1 UV}{a + h_2 e_2 A + h_1 e_1 U + \rho V},$$

avec  $c \in [0, 1]$  est le taux de refuge des proies,  $h_2$  décrit le temps de manipulation de la nourriture supplémentaire  $A$ ,  $e_1$  est le taux de prédation,  $e_2$  représente la capacité à détecter la biomasse alimentaire et  $\rho$  représente la force de l'interférence mutuelle entre les prédateurs. Nous supposons également que les proies sont récoltées grâce à un taux de récolte constant des proies  $H$  (harvesting

term). En fonction des hypothèses ci-dessus, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dT} &= rU \left(1 - \frac{U}{K}\right) - \frac{(1-c)e_1UV}{a + h_2e_2A + h_1e_1U + \rho V} - HU, \\ \frac{dV}{dT} &= \frac{b((1-c)e_1U + e_2A)V}{a + h_2e_2A + h_1e_1U + \rho V} - mV,\end{aligned}\tag{4.1}$$

ici, les densités de proies et de prédateurs sont notées par  $U$  et  $V$ , respectivement, avec des conditions initiales  $U(0) \geq 0$  et  $V(0) \geq 0$ . La description de toutes les variables et des paramètres est donnée dans le Tableau 4.1.

**Table 4.1** – Interprétation des variables et paramètres utilisés dans le modèle [11].

Variables/Paramètres	Interprétation
$U$	Biomasse des proies
$V$	Biomass des prédateurs
$r$	Taux de croissance intrinsèque des proies
$K$	Capacité de charge environnementale des proies
$m$	Taux de mortalité naturelle du prédateur
$b$	Efficacité de conversion des proies en prédateurs
$c \in [0, 1]$	Taux de refuge des proies
$a$	Constante de demi-saturation
$H$	Taux de récolte constant des proies
$h_1$	Temps de manipulation du prédateur par proie
$A$	Biomasse de nourriture supplémentaire
$h_2$	Temps de manipulation de $A$
$e_1$	Taux de prédation
$e_2$	Taux de détection de la nourriture supplémentaire
$\rho$	Force de l'interférence mutuelle entre les prédateurs

Pour simplifier, on pose

$$u = U \frac{e_1 h_1}{a}, \quad v = V \frac{c e_1}{a r}, \quad t = r T, \quad \alpha = \frac{h_2}{h_1}, \quad \beta = \frac{b}{h_1 r},$$

et

$$\gamma = K \frac{e_1 h_1}{a}, \quad \delta = \frac{m}{r}, \quad h = \frac{H}{r}, \quad \rho = \frac{\rho r}{c e_1}, \quad \zeta = A \frac{e_2 h_1}{a},$$

et ceci permet de transformer le système (4.1) en au système suivant, pour  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} u'(t) &= u \left( 1 - \frac{u}{\gamma} \right) - \frac{(1-c)uv}{1+a\zeta+u+\rho v} - hu, \\ v'(t) &= \frac{\beta((1-c)u+\zeta)v}{1+a\zeta+u+\rho v} - \delta v, \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec des conditions initiales  $u(0) \geq 0$  et  $v(0) \geq 0$ . Les termes  $a$  et  $\zeta$  sont les paramètres qui caractérisent respectivement la "qualité" et la "quantité" de nourriture supplémentaire. Très récemment, Ghosh et al. [4] ont étudié le modèle proie-prédateur ci-dessus avec refuge des proies et nourriture supplémentaire. Les auteurs ont étudié les conditions d'existence d'un cycle limite décrivant la coexistence des deux densités.

D'un autre côté, les proies et les prédateurs se déplacent aléatoirement dans un domaine (considérons le comme borné) spatial avec un mouvement brownien, conduisant à des équations de réaction-diffusion. C'est une manière d'introduire le mouvement spatial d'une population dans des modèles de dynamique de population. Nous considérons donc aussi le modèle de réaction-diffusion correspondant suivant, pour  $t > 0$  et  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u \left( 1 - \frac{u}{\gamma} \right) - \frac{(1-c)uv}{1+a\zeta+u+\rho v} - hu, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + \frac{\beta((1-c)u+\zeta)v}{1+a\zeta+u+\rho v} - \delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ [u(x,0), v(x,0)] = [u_0(x), v_0(x)], \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Ici,  $\nu$  est le vecteur normal unitaire sortant sur la frontière. Les constantes positives  $d_1$  et  $d_2$  sont appelées les coefficients de diffusion de  $u$  et  $v$ , respectivement. La condition au bord de Neumann homogène signifie que le système (4.3) n'admet aucun flux de population à travers la frontière  $\partial\Omega$ . Les données initiales  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  sont des fonctions assez régulières non négatives.

Dans la suite, nous tentons d'étudier l'existence des motifs de Turing du systèmes de réaction-diffusion. Cette étude est inspiré de l'article [11]. Mais tout d'abord, nous commençons par le système sans diffusion et nous formulons un problème de contrôle optimale nouveau qui fait l'objet de ce mémoire.

## 4.2 Analyse mathématique du modèle sans diffusion

### 4.2.1 Positivité et existence des solutions bornées

Le second membre du système (4.2) est clairement continu en temps et  $C^1$  en  $(u, v)$ , donc on a l'existence et l'unicité locale pour le système (4.2) (par le théorème d'existence locale de Cauchy Lipschitz). Nous allons étudier la positivité puis la bornitude des solutions.

**Proposition 2.** *Les solutions de système (4.2) avec conditions initiales positives sont positives.*

*Démonstration.* Soit  $(u, v)$  la solution de (4.2) associée à la condition initiale  $(u(0), v(0)) \in \mathbb{R}_+^2$ .

Puisque, nous avons

$$u(t) = 0 \Rightarrow u'(t) \geq 0,$$

et

$$v(t) = 0 \Rightarrow v'(t) \geq 0,$$

alors d'après le Théorème 3.4 dans [12]  $u(t) \geq 0$  et  $v(t) \geq 0$ , pour  $t > 0$ .  $\square$

Ensuite, nous énonçons le théorème correspondant à la bornitude de la solution du système.

**Théorème 9.** *Toute solution du système (4.2) avec la condition initiale  $(u(0), v(0))$  dans  $\mathbb{R}_+^2$  est bornée.*

*Démonstration.* On définit la fonction

$$\begin{aligned} G: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ t &\mapsto G(t) = u(t) + \frac{v(t)}{\beta}. \end{aligned}$$

La dérivée en temps de  $G$  le long de la trajectoire de solution de (4.2) est donnée par

$$\frac{dG}{dt} = u'(t) + \frac{v'(t)}{\beta} = u\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) - hu + \frac{\zeta v}{(1 + a\zeta + u + \rho v)} - \frac{\delta v}{\beta}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dG}{dt} + \delta G = u\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) - (h - \delta)u + \frac{\zeta v}{(1 + a\zeta + u + \rho v)},$$

i.e.,

$$\frac{dG}{dt} + \delta G \leq u\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) - (h - \delta)u + \frac{\zeta}{\rho}.$$

Si on prend  $\phi(u) = u\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right) - (h - \delta)u$ , alors le maximum est atteint en  $u^* = (\delta - h + 1)\frac{\gamma}{2}$ , et donc  $\phi(u) \leq \phi(u^*)$  ( $\phi(u^*)$  constante). Donc

$$\frac{dG}{dt} + \delta G \leq \phi(u^*) + \frac{\zeta}{\rho} =: C.$$

En appliquant la théorie des inégalités différentielles, on obtient

$$0 \leq G(u(t), v(t)) \leq \frac{C}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) + G(0)e^{-\delta t} \leq \frac{C}{\delta} + G(0).$$

Finalement, toute solution de (4.2) est bornée.  $\square$

## 4.2.2 Points d'équilibre et leurs stabilités

Il n'est pas difficile de montrer les points suivants (voir [11]) :

- Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système (4.2) au point d'équilibre  $E_0(0, 0)$  sont  $1 - h$  et  $\frac{\beta\zeta}{(1+a\zeta)} - \delta$ . Par conséquent, le point d'équilibre  $E_0$  est localement stable si  $h > 1$  et  $\delta > \frac{\beta\zeta}{(1+a\zeta)}$ , sinon il est instable.
- Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système au point d'équilibre  $E_1(\gamma(1 - h), 0)$  sont  $-1 + h$  et  $\frac{\beta[\zeta + (1-c)(1-h)\gamma]}{(1+a\zeta + (1-h)\gamma)} - \delta$ . Ainsi, le point d'équilibre  $E_1$  est localement stable si

$\frac{\beta[\zeta+(1-c)(1-h)\gamma]}{(1+a\zeta+(1-h)\gamma)} - \delta < 0$  et  $h < 1$ . Il est un point selle si  $h > 1$  ou  $\frac{\beta[\zeta+(1-c)(1-h)\gamma]}{(1+a\zeta+(1-h)\gamma)} - \delta > 0$ .

- Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système au point d'équilibre  $E_2(0, v^*)$  sont  $\frac{\beta\zeta(1-h)+cv^*\delta-\delta v^*}{\beta\zeta}$  et  $\frac{-\rho\delta v^*}{1+a\zeta+\rho v^*}$  avec  $v^* = \frac{\beta\zeta-\delta(1+a\zeta)}{\rho\delta}$ . Par conséquent, l'équilibre  $E_2$  est localement stable si  $\beta\zeta(1-h) + cv^*\delta < \delta v^*$ .
- $E_3(u_3, v_3)$  est l'équilibre intérieur du système (4.2), avec  $u_3$  est une racine positive de l'équation quadratique donnée par

$$A_1 u_3^2 + A_2 u_3 + A_3 = 0,$$

et  $v_3$  est calculé par

$$v_3 = A u_3 + B,$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \beta(1-c), & A_2 &= A\delta\gamma(1-c) + \beta\zeta + \beta(1-c)(h-\gamma), \\ A_3 &= \gamma\delta(1-c)B + \beta\zeta(h-\gamma), & A &= \frac{\beta(1-c) - \delta}{\rho\delta}, & B &= \frac{\beta\zeta - \delta(1+a\zeta)}{\rho\delta}. \end{aligned}$$

Le point d'équilibre dans le cas du coexistence  $E_3(u_3, v_3)$  est localement asymptotiquement stable si la condition suivante est satisfaite,

$$(H_1) : \quad Tr(J_3) < 0, \quad Det(J_3) > 0.$$

La matrice jacobienne correspondant au point  $E_3$  est

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \frac{2u_3}{\gamma} - \frac{(1-c)(1+a\zeta+\rho v_3)v_3}{(1+u_3+a\zeta+\rho v_3)^2} - h, & a_{12} &= -\frac{(1-c)u_3(1+u_3+a\zeta)}{(1+u_3+a\zeta+\rho v_3)^2}, \\ a_{21} &= \frac{\beta v_3((1+a\zeta+\rho v_3)(1-c)-\zeta)}{(1+u_3+a\zeta+\rho v_3)^2}, & a_{22} &= \frac{\beta((1-c)u_3+\zeta)(1+u_3+a\zeta)}{(1+u_3+a\zeta+\rho v_3)^2} - \delta. \end{aligned}$$

Donc,  $E_3$  est localement asymptotiquement stable ssi

$$Tr(J_3) = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{et} \quad Det(J_3) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

### 4.2.3 Formulation d'un problème de contrôle optimal

L'idée de ce mémoire est basé sur le développement de quelques problèmes de contrôle optimal d'ODE. Dans le même esprit, nous développons une nouvelle situation de contrôle optimal pour ce système de proies et prédateurs. Nous considérons les proies  $U$  comme étant des crevettes et un de ses prédateurs est le sébaste (voir la Figure 4.1). L'explosion de la population de sébaste dans le fond du Saint-Laurent (Canada) inquiète les pêcheurs qui voient le poisson rouge envahir le territoire des crevettes entre autres. Un récent rapport de l'état des stocks confirme une biomasse de sébaste record de 4,4 millions de tonnes.

En pratique, le sébaste vit jusqu'à 75 ans et mange de la crevette à l'âge adulte. Alors, on va appliquer un contrôle optimal  $w$  sur le sébaste qui représente le taux qu'on pêche à l'instant



$$\frac{\partial H}{\partial w}(u^*, v^*, \lambda, w^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}^* = \frac{-\lambda_2(t)v^*(t)}{2},$$

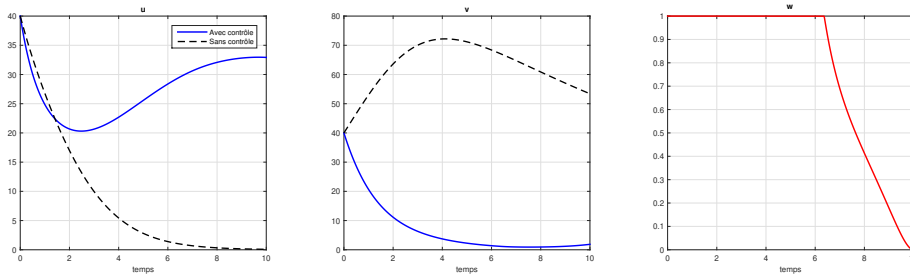
et puisque  $w \in [0, w_{\max}]$ , on aura

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{-\lambda_2(t)v^*(t)}{2} < 0, \\ w_{\max} & \text{si } \frac{-\lambda_2(t)v^*(t)}{2} > w_{\max}, \\ \tilde{w}^* & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est à dire

$$w^*(t) = \min \left\{ w_{\max}, \max \left\{ 0, \frac{-\lambda_2(t)v^*(t)}{2} \right\} \right\}.$$

Comme un exemple d'illustration par une simulation numérique, nous avons utilisés la méthode de Rung Kutta 4 comme les problèmes précédents (forward pour l'état et backward pour l'adjoint), pour plus de détails voir l'annexe 5.2. Dans la Figure 4.2, nous présentons les graphes de cette



**Figure 4.2** – Les simulations du modèle montrent l'effet du contrôle optimal sur la population des crevettes. Avec les paramètres suivants :  $\gamma = 50$ ,  $c = 0.1$ ,  $h = 0.3$ ,  $\zeta = 0.9$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\delta = 0.09$ ,  $a = 0.3$ , avec  $(u_0, v_0) = (40, 40)$ .

simulation numérique où on a estimé la quantité nécessaires de sébaste à pêcher dans chaque instant avec le contrôle optimal et on voit qu'on va obtenir la persistance de la crevette en temps final. Dans la Figure 4.2, on remarque que la population du sébaste est menée à la distinction, et donc il faut proposer une amélioration de ce travail dans l'avenir en ajoutant une contrainte pour assurer la persistance de cette population de sébaste.

### 4.3 Etude du système avec diffusion

En 1952, le mathématicien Alan Turing a publié un article dans Theoretical Biology présentant un modèle de formation de motifs spatiaux qui est étudié à ce jour. Le modèle indique qu'un ensemble de produits chimiques réagissant et se diffusant dans les tissus peuvent présenter des schémas spatiaux dans des circonstances appropriées. Le modèle est basé sur les équations de réaction-diffusion. La condition d'avoir ces motifs est que l'équilibre, en l'absence de diffusion, est stable et instable en présence de diffusion. Motivé par cette problématique, nous allons faire un traitement d'existence des structures de Turing.

### 4.3.1 Instabilité de Turing bidimensional

Soit le domaine  $\Omega$  suivant

$$\Omega = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L\}.$$

La frontière  $\partial\Omega$  est un carré. On sait que la solution du problème à valeur propre suivant (avec la méthode de séparation de variables)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0, & X \in \Omega, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0, & X \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

admet les vecteurs propres suivants

$$\Phi_{n,m}(x, y) = C_{n,m} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{L}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

avec

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}(n^2 + m^2),$$

et  $C_{n,m}$  sont les coefficients de Fourier.

Dans cette partie, nous dérivons les conditions pour avoir l'instabilité de Turing de l'état stationnaire homogène en espace positif  $E_3(u_3, v_3)$  du modèle (4.3). La linéarisation autour de cet équilibre est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + a_{11} \tilde{u} + a_{12} \tilde{v}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + a_{21} \tilde{u} + a_{22} \tilde{v}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = 0, & X \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

Pour avoir l'instabilité, on considère la matrice suivante

$$J_3^k := \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_2 k^2 \end{pmatrix},$$

et les valeurs propres sont solutions de

$$\lambda^2 - Tr(J_3^k)\lambda + Det(J_3^k) = 0.$$

Pour que  $E_3$  soit instable il faut qu'on ait au moins une racine de ce polynôme avec une partie réelle positive. Notez que  $Tr(J_3^k) < 0$  sous l'hypothèse  $(H_1)$  car  $\tau_{11} + \tau_{22} - k^2(d_1 + d_2)$  restera valide pour  $k$  positif. Ainsi, l'instabilité de Turing peut seulement être obtenue dans le cas où  $Det(J_3^k) < 0$ , pour certaines valeurs de  $k$ . Nous définissons

$$Det(J_3^k) := P(k^2) = d_1 d_2 k^4 - (a_{11} d_2 + a_{22} d_1) k^2 + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Pour avoir l'instabilité de Turing, nous avons besoin

$$\text{Det}(J_3^0) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

Par conséquent, la seule possibilité pour que  $P$  soit négative est que

$$\kappa(d_1, d_2) = a_{11}d_2 + a_{22}d_1 > 0.$$

Puisque  $a_{11} + a_{22} < 0$  sous l'hypothèse  $(H_1)$ , nous concluons que  $d_1 \neq d_2$  et que  $a_{11}$  et  $a_{22}$  doivent avoir des signes opposés. Ensuite, nous cherchons le point critique de la stabilité  $k^2 = k_{\min}^2$ , si on pose

$$k^2 = w \quad \Rightarrow \quad P(w) = d_1d_2w^2 - (a_{11}d_2 + a_{22}d_1)w + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

alors,

$$\begin{aligned} P'(w_{\min}) &= 2w_{\min}d_1d_2 - (a_{11}d_2 + a_{22}d_1) = 0, \\ \Rightarrow \quad w_{\min} &= \frac{a_{11}d_2 + a_{22}d_1}{2d_1d_2}, \end{aligned}$$

i.e, le point critique de la stabilité est :

$$k_{\min}^2 = \frac{a_{11}d_2 + a_{22}d_1}{2d_1d_2}.$$

Pour avoir  $P(k_{\min}^2) < 0$ , il faut que

$$\begin{aligned} P(k_{\min}^2) &= -\frac{(a_{11}d_2 + a_{22}d_1)^2}{4d_1d_2} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0, \\ \Rightarrow \quad \frac{(a_{11}d_2 + a_{22}d_1)^2}{4d_1d_2} &> a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

A la bifurcation, nous avons

$$\frac{(a_{11}d_2 + a_{22}d_1)^2}{4d_1d_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \xi(d_1, d_2) &= (a_{11}d_2 + a_{22}d_1)^2 - 4d_1d_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \\ \Rightarrow \xi(d_1, d_2) &= d_1^2a_{22}^2 + d_2^2a_{11}^2 - 2d_1d_2a_{11}a_{22} + 4d_1d_2a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

et puisque on cherche le signe de  $\xi$  on multiplie la dernière équation par  $\frac{1}{d_1^2}$  et on pose  $\eta = \frac{d_2}{d_1}$  pour obtenir

$$\xi(d_1, d_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(d_1, d_2) = a_{22}^2 + 2(2a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})\eta + \eta^2a_{11}^2 = 0.$$

De plus, nous avons

$$\kappa(d_1, d_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta^* := -\frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Puisque  $a_{21} > 0$  et  $a_{12} < 0$  sont de signe différent et  $\text{Det}(J_3^0) > 0$ , nous obtenons

$$\Delta_{\Psi} = 4(2a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})^2 - 4a_{22}^2a_{11}^2 = 16a_{12}a_{21}(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}) > 0.$$

Par conséquent, l'équation quadratique  $\xi(d_1, d_2) = 0$  possède exactement deux racines réelles posi-

tives,

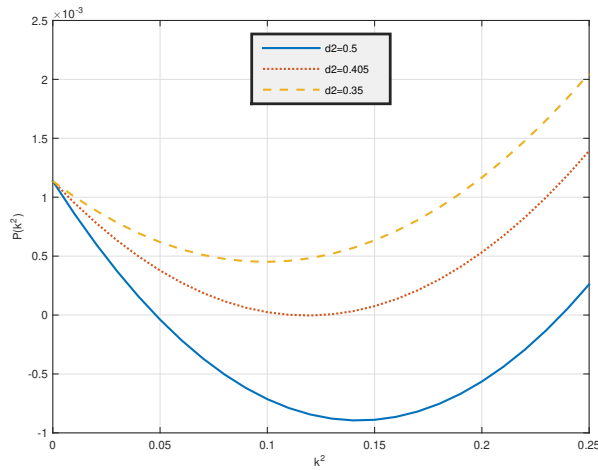
$$\eta_1 = \frac{1}{a_{11}^2} \left( -2a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} + 2\sqrt{a_{12}a_{21}(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})} \right),$$

et

$$\eta_2 = \frac{1}{a_{11}^2} \left( -2a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} - 2\sqrt{a_{12}a_{21}(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})} \right).$$

Il n'est pas difficile de remarquer que  $0 < \eta_2 < \eta^* < \eta_1$ . Par conséquent, une fois que  $\eta = d_2/d_1 > \eta_c := \max\{\eta_1, \eta^*\} = \eta_1$ , nous obtenons  $\min_k P(k^2) < 0$  (voir la Figure 4.3 pour une illustration) et  $\kappa(d_1, d_2) > 0$ , et ainsi  $E_3$  est instable, ce qui implique que l'instabilité de Turing se produit. On note  $d_2^c = d_1\eta_c$ . Alors,

$$k_c^2 = \frac{(d_2^c a_{11} + d_1 a_{22})}{2d_1 d_2^c}.$$



**Figure 4.3** – Le dessin de  $P(k^2)$  pour différents valeurs de  $d_2$ . Avec les paramètres suivants :  $\gamma = 9$ ,  $c = 0.3$ ,  $a = 2$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\zeta = 3.2$ ,  $\rho = 0.3$ ,  $\beta = 1$ ,  $d_1 = 0.2$ ,  $d_2 = 0.5$ ,  $h = 0.01$ .

En conclusion, nous avons le résultat suivant qui énonce l'instabilité induite par la diffusion.

**Théorème 11.** *Supposons que  $(H_1)$  est vérifiée, c'est-à-dire que l'unique équilibre homogène positif  $E_3$  est stable pour le modèle sans diffusion. Si*

$$d_2 > d_2^c := d_1\eta_c,$$

*alors,  $E_3$  est spatialement instable, c'est-à-dire que l'instabilité de Turing se produit.*

### 4.3.2 Résultats numériques

Dans cette section, les résultats numériques illustrent une compréhension claire du comportement dynamique du système et qui valide également les résultats analytiques. Nous employons des perturbations aléatoires autour de l'état stationnaire de coexistence positive dans les simulations. En lançant le programme développé et après quelques itérations, toutes les conditions initiales produisent des motifs. Toutes les figures numériques sont réalisées à l'aide du logiciel MATLAB. Nous limitons notre observation de la formation de motifs spatio-temporels à une seule distribution, celle de la distribution des espèces proies.

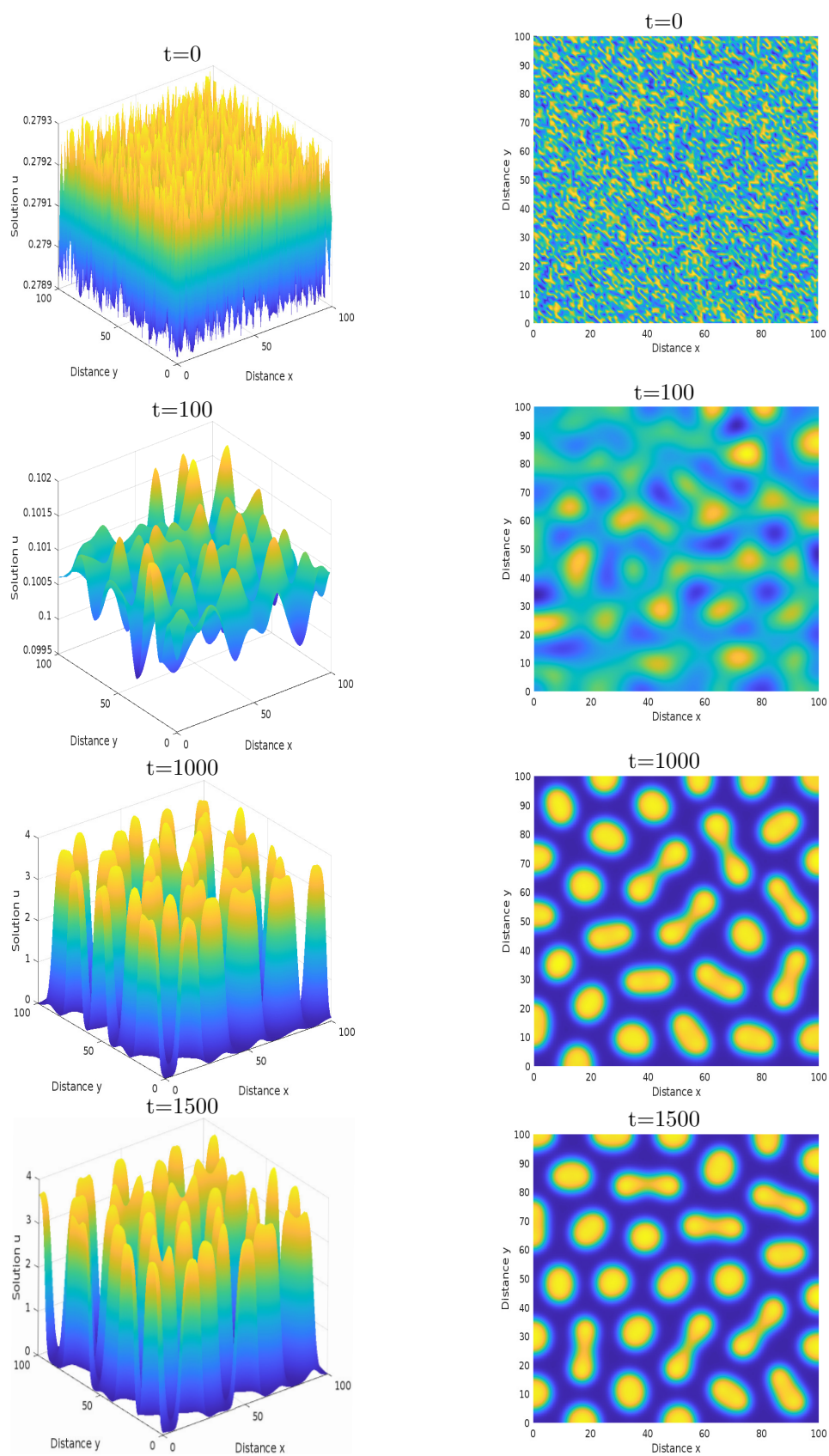
A propos du code développé, nous avons simulé ce système avec la méthode des différences finies. Cette méthode consiste à discrétiser le temps et l'espace et à remplacer les dérivées par leurs équivalents discrets. La fonction qui décrit l'opérateur de Laplace discret d'une variable 2D sur la grille est définie par :

$$\Delta u(x, y) \simeq \frac{u(x + dx, y) + u(x - dx, y) - 2u(x, y)}{dx^2} + \frac{u(x, y + dy) - u(x, y - dy) - 2u(x, y)}{dy^2}.$$

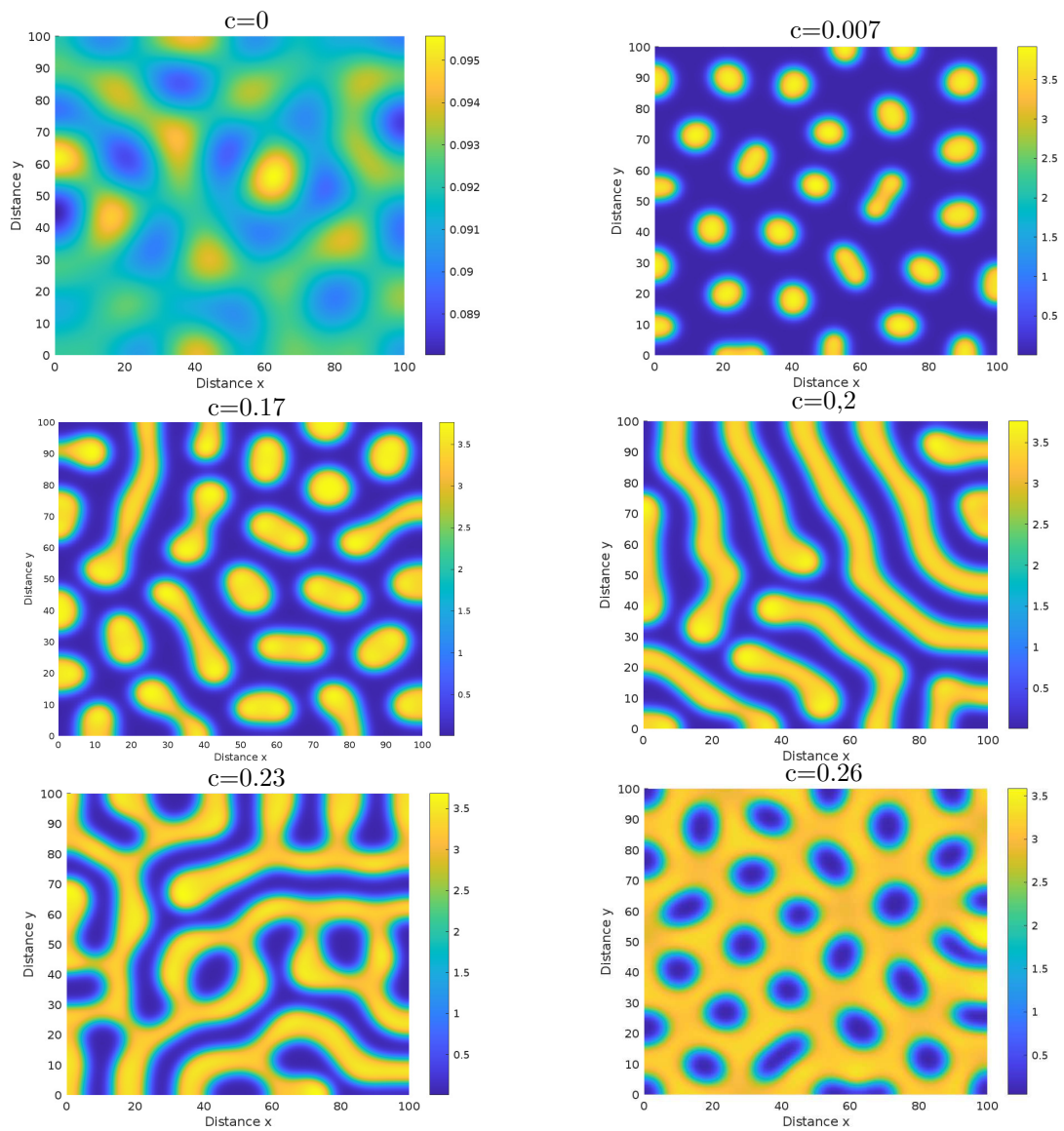
Nous utilisons également le schéma d'Euler pour la dérivée temporelle de  $u$  et  $v$ . Le système est simulé numériquement sur une grille carrée bidimensionnelle de  $100 \times 100$ .

Dans la Fig. 4.4, nous avons observé l'évolution du motif spatial des proies à  $t = 0, 100, 1000$  et  $1500$  itérations.

Pour obtenir l'effet du paramètre de refuge des proies sur la dynamique du système, nous dessinons six figures différentes pour six valeurs différentes de  $c$  (voir Fig. 4.5). Nous avons fixés les autres paramètres :  $\gamma = 9, a = 0.45, \delta = 0.3, \zeta = 1, \rho = 0.3, \beta = 0.6, d_1 = 0.2, d_2 = 10, h = 0.01$ . Tout d'abord, nous simulons le système (4.3) en l'absence de refuge pour les proies, c'est-à-dire pour  $c = 0$ . La dynamique des proies du système donné produit un motif de taches froides, comme on peut le voir à la Fig. 4.5. Il est évident que même de légers changements dans le refuge des proies peuvent entraîner une variété de motifs de Turing. Lorsque nous augmentons la valeur à  $c = 0.2$ , le motif de rayures apparaît, comme montré à la Fig. 4.5. Pour  $c = 0.26$ , les motifs de points chauds dominant, comme montré à la Fig. 4.5.



**Figure 4.4** – Les simulation montrent l'apparence des états stationnaires pour les proies avec le temps. Avec les paramètres suivants :  $\gamma = 9, c = 0.15, a = 0.45, \delta = 0.3, \zeta = 1, \rho = 0.3, \beta = 0.6, d_1 = 0.2, d_2 = 10, h = 0.01$ .



**Figure 4.5** – Les motifs de Turing pour le système (4.3) pour différentes valeurs de  $c$  (taux de refuge des proies).

## Chapitre 5

### Annexe

#### 5.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange (Extrema liés)

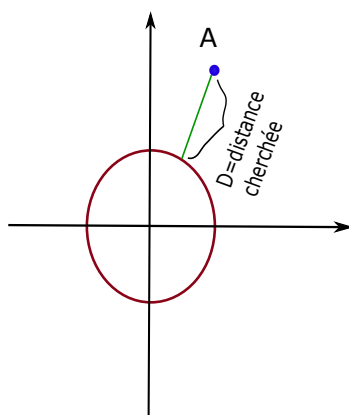
La méthode des multiplicateurs de Lagrange (1788) est une méthode d'optimisation permettant de déterminer l'extremum local d'une fonction  $f$  sous contrainte que les variables de  $f$  sont liées par une relation  $g$  (de la forme  $g(x) = 0$ ). On peut envisager plusieurs contraintes. Le nombre de contraintes  $p$  est dans tous les cas strictement inférieur à  $n$  ( $p < n$ ) (où  $n$  la dimension de  $x$ ).

On suppose que les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$ . Soient  $\lambda$  un vecteur et  $L$  donné par

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x).$$

La fonction  $L$  est dite Lagrangien et  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange. Dans la suite, nous donnons quelques exemples d'applications.

**Exemple 4.** On cherche à calculer la distance  $D$  du point  $A(1, 2)$  au cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1. On rappelle que  $D = \min_{(x,y) \in C} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ , où  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .



On a facilement  $D^2 = \min_{(x,y) \in C} (x-1)^2 + (y-2)^2$ . Notre objectif est de minimiser cette distance. On pose

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2.$$

En générale on choisit une contrainte de la forme  $g(x) = 0$ , et puisque le bord du segment qui va

minimiser la distance doit être sur le cercle donc

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

C'est donc un problème de Lagrange et on va minimiser

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Pour la recherche des extremums liés, on résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Après calcul, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -1 + \sqrt{5} &\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ c'est le point } B = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{5} &\Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{5}} \text{ et } y = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \text{ c'est le point } C = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

Pour montrer que nous avons effectivement un minimum, il suffit de calculer la hessienne et voir si elle est définie positive. Nous avons

$$Hess = \begin{pmatrix} 2(1 + \lambda_{1,2}) & 0 \\ 0 & 2(1 + \lambda_{1,2}) \end{pmatrix}.$$

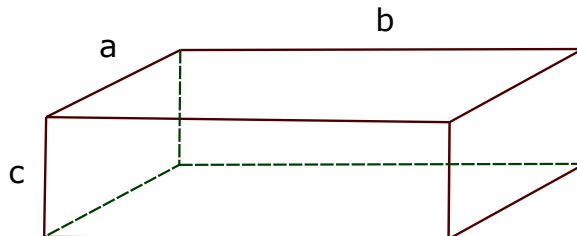
En  $B$  et  $C$ , on obtient

$$Hess(B) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ and } Hess(C) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Donc on atteint un minimum locale en  $B$ . i.e,  $B$  est bien le point où la distance  $D$  est minimale.

$$D^2 = f(B) \Rightarrow D = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}. \quad \blacksquare$$

**Exemple 5.** Un réservoir d'eau a une forme d'un parallélépipède. Avec une surface latérale constante, on cherche la forme dont le volume est maximal. Le volume est  $V(a, b, c) = abc$ , et la surface latérale



est  $S = 2(ab + ac + bc)$ .

On cherche donc le maximum du volume, à une surface  $S$  constante. La méthode de Lagrange

suggère de poser

$$F(a, b, c, \lambda) = abc + \lambda[S - 2(ab + ac + bc)].$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = bc - 2\lambda(b + c) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = ac - 2\lambda(a + c) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial c} = ab - 2\lambda(a + b) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = S - 2(ab + ac + bc) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Après calcul, on trouve le seul point critique qui vérifie  $a = b = c = \sqrt{S/6}$  (i.e la forme d'un cube). Et pour affirmer que le point est un maximum, on utilise la contrainte qui nous donne  $c = \frac{1}{a+b} \left[ \frac{S}{2} - ab \right]$

puis la remplacer dans  $V$ . i.e  $V(a, b, c) = W(a, b) = \frac{ab}{a+b} \left( \frac{S}{2} - ab \right)$ . Ensuite, par un calcul simple on trouve que  $(\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}})$  est maximum pour  $W$ .

Finalement, la bonne forme pour maximiser ce volume est la forme d'un cube. ■

**Exemple 6.** Soit  $v_0 \geq 0$  (un volume fixe d'un cylindre), et on veut minimiser la surface. On définit deux fonctions, pour tout  $r, h \in \mathbb{R}^+$ ,

$$v(r, h) = \pi r^2 h, \quad s(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

En générale, on choisit une contrainte de la forme  $\psi(x) = 0$ , et puisqu'on a le volume est fixe, on va poser

$$\psi(r, h) = v(r, h) - v_0.$$

Notre but est de minimiser la surface (sous un volume fixe) i.e,

$$L(r, h, \lambda) = s(r, h) + \lambda\psi(r, h).$$

Maintenant chercher les extremums liés revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi(h + 2r + \lambda hr) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial h} = \pi(2r + \lambda r^2) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - v_0 = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

la solution de système (5.3) est  $(r^*, h^*, \lambda^*) = \left( \left( \frac{v_0}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}, 2 \left( \frac{v_0}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}, -2 \left( \frac{2\pi}{v_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$ .

On peut voir dès le début que la contrainte implique que  $h = \frac{v_0}{\pi r^2}$ , plus simplement on remplace dans  $L$  pour avoir

$$L(r) = 2\pi r + \frac{2v_0}{r}.$$

Il suffit de trouver la valeur de  $r$  minimisant cette fonction à une seule variable pour trouver la solution  $h = 2r$ .

## 5.2 Résolution de quelques problèmes de contrôle optimal sous Matlab

Soit le problème du contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \\ \min_u J(u) = \min_u \int_0^T \Psi(t, x(t), u(t)) dt. \end{cases} \quad (5.4)$$

Nous divisons l'intervalle de temps  $[0, T]$  comme suit

$$0 = t_1, t_2, \dots, t_M, t_{M+1} = T, \quad \text{avec} \quad h = \frac{T}{M} \quad (\text{le pas}).$$

Prenons  $x = (x_1, \dots, x_{M+1})$  comme tant l'approximation vectorielle pour l'état. L'approximation du vecteur pour le contrôle

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{M+1}), \quad \text{où} \quad u_i \approx u(t_i).$$

L'approximation de l'état  $x(t+h)$  est donnée par (Runge-Kutta 4), en avançant dans le temps (forward) car les conditions initiales sont connues, nous avons

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

où

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x(t), u(t)), \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1, u(t)\right), \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2, u(t)\right), \\ k_4 &= f(t+h, x(t) + hk_3, u(t)). \end{aligned}$$

Prenons maintenant  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$  considéré comme étant l'approximation vectorielle pour l'adjoint. Le système différentiel associé à l'adjoint est donné par :

$$\lambda'(t) = g(t, \lambda(t), x(t), u(t)), \quad \lambda(T) = 0.$$

Pour l'approximation de l'adjoint, on applique Runge-Kutta 4 en reculant dans le temps (backwards), par

$$\lambda(t-h) \approx \lambda(t) - \frac{h}{6}h(\tilde{k}_1 + 2\tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_3 + \tilde{k}_4),$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= g(t, \lambda(t), x(t), u(t)), \\ \tilde{k}_2 &= g\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}\tilde{k}_1, x(t), u(t)\right), \\ \tilde{k}_3 &= g\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}\tilde{k}_2, x(t), u(t)\right), \\ \tilde{k}_4 &= g(t - h, \lambda(t) - h\tilde{k}_3, x(t), u(t)).\end{aligned}$$

Puisque on n'a pas une initiation sur le contrôle, en premier temps on commence avec  $u \equiv 0$ , et on va itérer en prenant toujours la moyenne entre la valeur du contrôle précédente et la nouvelle obtenue jusqu'à ce qu'on arrive à une erreur négligeable. Pour tester la convergence, nous exigerons comme dans [6] que l'erreur relative soit négligeable comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\|u - oldu\|}{\|u\|} &\leq \delta \quad \text{avec} \quad \|u - oldu\| = \sum_{i=0}^{M+1} |u_i - oldu_i|, \\ &\Rightarrow \delta \|u\| - \|u - oldu\| \geq 0,\end{aligned}$$

et de même on teste la convergence pour le vecteur d'état et l'adjoint.

Pour une illustration rapide, on commence par étudier un exemple simple dans le cas scalaire (l'exemple 1 du chapitre 1).

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + u(t), \\ x(0) = \frac{e^2}{2} - 1, \\ J(u) = \int_0^2 x(t) + \frac{u^2(t)}{2} dt. \end{cases} \quad (5.5)$$

On a calculé la solution explicitement,

$$u^*(t) = 1 - e^{2-t}, \quad x^*(t) = \frac{e^{2-t}}{2} - 1.$$

Ce calcul explicite va permettre de valider les codes qu'on va utiliser dans ce mémoire. On va voir la différence entre la solutions exacte et l'approximation de Runge-Kutta 4.

```

1 M=1000; delta = 0.001; T=2;
2 h=T/M;
3 test=-1; deltaError = 0.001;
4 t = linspace(0,T,M+1);
5 u = zeros(1,M+1);
6 x = zeros(1,M+1);
7 lambda = zeros(1,M+1);
8 x(1)=0.5*exp(2)-1;
9 while(test < 0)
10 oldx = x; oldu = u; oldlambda = lambda;
11 %Forward Runge-Kutta iterations
12 for i = 1:M
13 k1=x(i)+u(i);
14 k2 = (x(i)+0.5*h*k1)+0.5*(u(i) + u(i+1));

```

```

15 k3 = (x(i)+0.5*h*k2)+0.5*(u(i) + u(i+1));
16 k4 = (x(i)+h*k3)+u(i+1);
17 x(i+1) = x(i) + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
18 end
19 %backward Runge-Kutta iterations
20 for i = 1:M
21     j=M+2-i;
22     auxlambda1=-1-lambda(j);
23     auxlambda2=-1-(lambda(j)-auxlambda1*0.5*h);
24     auxlambda3=-1-(lambda(j)-auxlambda2*0.5*h);
25     auxlambda4=-1-(lambda(j)-auxlambda3*h);
26     lambda(j-1) = lambda(j)-(h/6)*(auxlambda1 + 2*auxlambda2 + ...
27     + 2*auxlambda3 + auxlambda4);
28 end
29 u1=-lambda;
30 u= (u1+oldu)/2;
31 temp1 = delta*sum(abs(x))-sum(abs(olddx - x));
32 temp2 = delta*sum(abs(lambda))-sum(abs(olddlambd-lambda));
33 temp3 = delta*sum(abs(u))-sum(abs(olddu-u));
34 test = min([temp1 temp2 temp3 ]);
35 end

```

Listing 5.1 – Code 1 pour l'exemple 1.

Les graphes obtenues par le code 1 sont donnés dans cette figure.

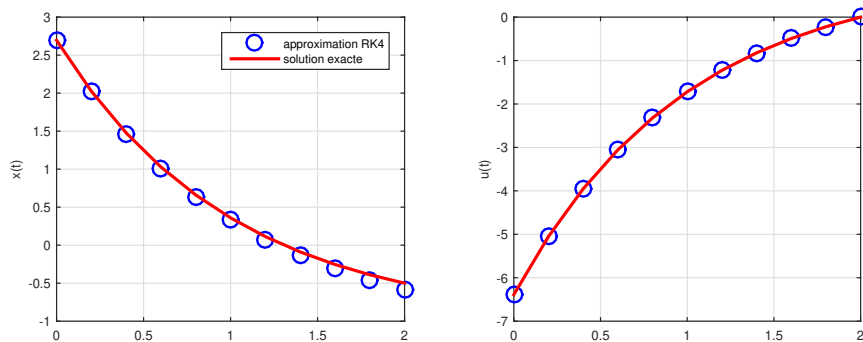


Figure 5.1 – Les simulations de l'exemple 1 avec la solution exacte et l'approximation de Rung kutta 4. Cette figure permet de valider numériquement les codes utilisés dans ce mémoire.

Pour donner plus de pratique au lecteur, nous donnons dans ce mémoire le code pour le modèle

du HIV avec la PrEP du chapitre 2. Rappelons le système

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \frac{\beta(I(t) + C(t)\eta_c + A(t)\eta_A)}{N} S(t) - \mu S(t) - u(t)S(t) + \theta E(t), \\ I'(t) = \frac{\beta(I(t) + C(t)\eta_c + A(t)\eta_A)}{N} S(t) - (\Phi + \rho + \mu)I(t) + \alpha A(t) + \omega C(t), \\ C'(t) = \Phi I(t) - (\omega + \mu)C(t), \\ A'(t) = \rho I(t) - (\alpha + \mu)A(t), \\ E'(t) = u(t)S(t) - (\mu + \theta)E(t). \end{cases}$$

avec le coût  $J$  à minimiser

$$J = \int_0^{t_f} \{I(t)\omega_1 + u^2(t)\omega_2\} dt.$$

Voici le code Matlab pour la résolution de ce couplet (les détails sont dans le chapitre 2).

```

1 test = -1; deltaError =0.0001; M =1000;
2 Lambda=4695;mu=0.014;nc=0.04;na=1.35;phi=1;rho=0.1;w1=1;w2=1;
3 alpha=0.33;w=0.09;T=25;N=323972;B=0.75;
4 theta=0.001;
5 % Parameters of the Runge-Kutta (4th order) method
6 t = linspace(0,T,M+1);
7 h = T / M; h2 = h / 2; h6 = h / 6;
8 S = zeros(1,M+1); I = zeros(1,M+1);
9 C = zeros(1,M+1); A = zeros(1,M+1);
10 E= zeros(1,M+1);
11 % Initial conditions of the model
12 S(1) =323911; I(1) =61; C(1) = 0; A(1) = 0;E(1)=0;
13 %Vectors for system restrictions and control
14 lambda1 = zeros(1,M+1); lambda2 = zeros(1,M+1);
15 lambda3 = zeros(1,M+1); lambda4 = zeros(1,M+1);
16 lambda5=zeros(1,M+1);
17 U = zeros(1,M+1);
18 % Iterations of the method
19 while(test < 0)
20 oldS = S; oldI = I; oldC = C; oldA = A;oldE=E;
21 oldlambda1 = lambda1; oldlambda2 = lambda2;
22 oldlambda3 = lambda3; oldlambda4 = lambda4;
23 oldlambda5 = lambda5;
24 oldU = U;
25 %Forward Runge-Kutta iterations
26 for i = 1:M
27 auxS1 = Lambda-B*(I(i)+C(i)*nc+A(i)*na)*S(i)/N-mu*S(i)+theta*E(i)-S(i)*U(i);
28 auxI1 = B*(I(i)+C(i)*nc+A(i)*na)*S(i)/N-(phi+rho+mu)*I(i)+alpha*A(i)+w*C(i);
29 auxC1 =phi*I(i)-(alpha+mu)*A(i);
30 auxA1=rho*I(i)-(w+mu)*A(i);
31 auxE1= S(i)*U(i)-(mu+theta)*E(i);
32 % Second Runge-Kutta parameter
33 auxU = 0.5*(U(i)+U(i+1));
34 auxS = S(i)+h2*auxS1;

```

```

35 auxI = I(i)+h2*auxI1;
36 auxC = C(i)+h2*auxC1;
37 auxA = A(i)+h2*auxA1;
38 auxE = E(i)+h2*auxE1;
39 auxS2 = Lambda-B*(auxI+auxC*nc+auxA*na)*auxS/N-mu*auxS+theta*auxE-auxS*auxU;
40 auxI2 = B*(auxI+auxC*nc+auxA*na)*auxS/N-(phi+rho+mu)*auxI+alpha*auxA+w*auxC;
41 auxC2= phi*auxI-(alpha+mu)*auxA;
42 auxA2 = rho*auxI-(w+mu)*auxA;
43 auxE2=auxS*auxU-(mu+theta)*auxE;
44 % Third Runge-Kutta parameter
45 auxS = S(i) + h2 * auxS2;
46 auxI = I(i) + h2 * auxI2;
47 auxC = C(i) + h2 * auxC2;
48 auxA = A(i) + h2 * auxA2;
49 auxE = E(i) + h2 * auxE2;
50 auxS3 = Lambda-B*(auxI+auxC*nc+auxA*na)*auxS/N-mu*auxS+theta*auxE-auxS*auxU;
51 auxI3 = B*(auxI+auxC*nc+auxA*na)*auxS/N-(phi+rho+mu)*auxI+alpha*auxA+w*auxC;
52 auxC3= phi*auxI-(alpha+mu)*auxA;
53 auxA3 = rho*auxI-(w+mu)*auxA;
54 auxE3=auxS*auxU-(mu+theta)*auxE;
55 % Fourth Runge-Kutta parameter
56 auxS = S(i) + h*auxS3;
57 auxI = I(i) + h*auxI3;
58 auxC = C(i) + h*auxC3;
59 auxA = A(i) + h*auxA3;
60 auxE = E(i) + h*auxE3;
61 auxS4 = Lambda-B*(auxI+auxC*nc+auxA*na)*auxS/N-mu*auxS+theta*auxE-auxS*auxU;
62 auxI4 = B*(auxI+auxC*nc+auxA*na)*auxS/N-(phi+rho+mu)*auxI+alpha*auxA+w*auxC;
63 auxC4= phi*auxI-(alpha+mu)*auxA;
64 auxA4 = rho*auxI-(w+mu)*auxA;
65 auxE4=auxS*auxU-(mu+theta)*auxE;
66 % Runge-Kutta new approximation
67 S(i+1) = S(i) + h6*(auxS1 + 2*(auxS2 + auxS3) + auxS4);
68 I(i+1) = I(i) + h6*(auxI1 + 2*(auxI2 + auxI3) + auxI4);
69 C(i+1) = C(i) + h6*(auxC1 + 2*(auxC2 + auxC3) + auxC4);
70 A(i+1) = A(i) + h6*(auxA1 + 2*(auxA2 + auxA3) + auxA4);
71 E(i+1) = E(i) + h6*(auxE1 + 2*(auxE2 + auxE3) + auxE4);
72 end
73 for i = 1:M
74 j =M +2-i;
75 % Differential equations of the model
76 % First Runge-Kutta parameter
77 auxlambda11 =lambda1(j)*((B/N)*(I(j)+C(j)*nc+na*A(j))+mu+U(j))-...
78     lambda2(j)*(B/N)*(I(j)+ nc*C(j)+na*A(j))-lambda5(j)*U(j);
79 auxlambda21 =-w1+(B/N)*lambda1(j)*S(j)-lambda2(j)*((B/N)*S(j)-rho-phi-mu)
    -...
80     lambda3(j)*phi-lambda4(j)*rho;
81 auxlambda31 =(B/N)*lambda1(j)*nc*S(j)-lambda2(j)*((B/N)*nc*S(j)+w)+...
82     lambda3(j)*(w+mu);
83 auxlambda41 =(B/N)*lambda1(j)*na*S(j)-lambda2(j)*((B/N)*na*S(j)+alpha)+...
84     lambda4(j)*(alpha+mu);
85 auxlambda51 =-lambda1(j)*theta+lambda5(j)*(theta+mu);
86

```

```

87 % Second Runge-Kutta parameter
88 auxU = 0.5 * (U(j) + U(j-1));
89 auxS = 0.5 * (S(j) + S(j-1));
90 auxI = 0.5 * (I(j) + I(j-1));
91 auxC = 0.5 * (C(j) + C(j-1));
92 auxA = 0.5 * (A(j) + A(j-1));
93 auxE = 0.5 * (E(j) + E(j-1));
94 auxlambda1 = lambda1(j) - h2 * auxlambda11;
95 auxlambda2 = lambda2(j) - h2 * auxlambda21;
96 auxlambda3 = lambda3(j) - h2 * auxlambda31;
97 auxlambda4 = lambda4(j) - h2 * auxlambda41;
98 auxlambda5 = lambda5(j) - h2 * auxlambda51;
99
100 auxlambda12 =auxlambda1*((B/N)*(auxI+auxC*nc+na*auxA)+mu+auxU)-...
101     auxlambda2*(B/N)*(auxI+ nc*auxC+na*auxA)-auxlambda5*auxU;
102 auxlambda22 =-w1+(B/N)*auxlambda1*auxS-auxlambda2*((B/N)*auxS-rho-phi-mu)
103     -...
104     auxlambda3*phi-auxlambda4*rho;
105 auxlambda32 =(B/N)*auxlambda1*nc*auxS-auxlambda2*((B/N)*nc*auxS+w)+...
106     auxlambda3*(w+mu);
107 auxlambda42 =(B/N)*auxlambda1*na*auxS-auxlambda2*((B/N)*na*auxS+alpha)+...
108     auxlambda4*(alpha+mu);
109 auxlambda52 =-auxlambda1*theta+auxlambda5*(theta+mu);
110
111 % Third Runge-Kutta parameter
112 auxlambda1 = lambda1(j) - h2 * auxlambda12;
113 auxlambda2 = lambda2(j) - h2 * auxlambda22;
114 auxlambda3 = lambda3(j) - h2 * auxlambda32;
115 auxlambda4 = lambda4(j) - h2 * auxlambda42;
116 auxlambda5 = lambda5(j) - h2 * auxlambda52;
117
118 auxlambda13 =auxlambda1*((B/N)*(auxI+auxC*nc+na*auxA)+mu+auxU)-...
119     auxlambda2*(B/N)*(auxI+ nc*auxC+na*auxA)-auxlambda5*auxU;
120 auxlambda23 =-w1+(B/N)*auxlambda1*auxS-auxlambda2*((B/N)*auxS-rho-phi-mu)
121     -...
122     auxlambda3*phi-auxlambda4*rho;
123 auxlambda33 =(B/N)*auxlambda1*nc*auxS-auxlambda2*((B/N)*nc*auxS+w)+...
124     auxlambda3*(w+mu);
125 auxlambda43 =(B/N)*auxlambda1*na*auxS-auxlambda2*((B/N)*na*auxS+alpha)+...
126     auxlambda4*(alpha+mu);
127 auxlambda53 =-auxlambda1*theta+auxlambda5*(theta+mu);
128
129 % Fourth Runge-Kutta parameter
130 auxU = U(j-1); auxS = S(j-1);
131 auxI = I(j-1); auxC = C(j-1);
132 auxA = A(j-1); auxE = E(j-1);
133
134 auxlambda1 = lambda1(j) - h * auxlambda13;
135 auxlambda2 = lambda2(j) - h * auxlambda23;
136 auxlambda3 = lambda3(j) - h * auxlambda33;
137 auxlambda4 = lambda4(j) - h * auxlambda43;
138 auxlambda5 = lambda5(j) - h * auxlambda53;
139
140 auxlambda14 =auxlambda1*((B/N)*(auxI+auxC*nc+na*auxA)+mu+auxU)-...
141     auxlambda2*(B/N)*(auxI+ nc*auxC+na*auxA)+auxlambda5*auxU;
142 auxlambda24 =-w1+(B/N)*auxlambda1*auxS-auxlambda2*((B/N)*auxS-rho-phi-mu)

```

```

138     -...
139     auxlambda3*phi-auxlambda4*rho;
140 auxlambda34 =(B/N)*auxlambda1*nc*auxS-auxlambda2*((B/N)*nc*auxS+w)+...
141     auxlambda3*(w+mu);
142 auxlambda44 =(B/N)*auxlambda1*na*auxS-auxlambda2*((B/N)*na*auxS+alpha)+...
143     auxlambda4*(alpha+mu);
144 auxlambda54 =-auxlambda1*theta+auxlambda5*(theta+mu);
145 % Runge-Kutta new approximation
146 lambda1(j-1) = lambda1(j) - h6 * (auxlambda11 +...
147     2 * (auxlambda12 + auxlambda13) + auxlambda14);
148 lambda2(j-1) = lambda2(j) - h6 * (auxlambda21 +...
149     2 * (auxlambda22 + auxlambda23) + auxlambda24);
150 lambda3(j-1) = lambda3(j) - h6 * (auxlambda31 +...
151     2 * (auxlambda32 + auxlambda33) + auxlambda34);
152 lambda4(j-1) = lambda4(j) - h6 * (auxlambda41 + ...
153     2 * (auxlambda42 + auxlambda43) + auxlambda44);
154 lambda5(j-1) = lambda5(j) - h6 * (auxlambda51 + ...
155     2 * (auxlambda52 + auxlambda53) + auxlambda54);
156 end
157 % New vector control
158 for i = 1:M+1
159 vAux(i) = (1/2*w2)*(lambda1(i)-lambda5(i))*S(i);
160 auxU = min([max([0.0 vAux(i)]) 1]);
161 U(i) = 0.5*(auxU + oldU(i));
162 end
163 temp1 = deltaError * sum(abs(S)) - sum(abs(oldS - S));
164 temp2 = deltaError * sum(abs(I)) - sum(abs(oldI - I));
165 temp3 = deltaError * sum(abs(C)) - sum(abs(oldC - C));
166 temp4 = deltaError * sum(abs(A)) - sum(abs(oldA - A));
167 temp5 = deltaError * sum(abs(E)) - sum(abs(oldE - E));
168 temp6 = deltaError * sum(abs(U)) - sum(abs(oldU - U));
169 temp7 = deltaError * sum(abs(lambda1)) - sum(abs(olddlambd1 - lambda1));
170 temp8 = deltaError * sum(abs(lambda2)) - sum(abs(olddlambd2 - lambda2));
171 temp9 = deltaError * sum(abs(lambda3)) - sum(abs(olddlambd3 - lambda3));
172 temp10 = deltaError * sum(abs(lambda4)) - sum(abs(olddlambd4 - lambda4));
173 temp11 = deltaError * sum(abs(lambda5)) - sum(abs(olddlambd5 - lambda5));
174 test = min([temp1 temp2 temp3 temp4 temp5 temp6 temp7 temp8...
175     temp9 temp10 temp11 ]);
176 end

```

Listing 5.2 – Code 2 pour le modèle du HIV avec la PrEP du système 2.1.



# Bibliographie

- [1] P. AUGER, C. LETT, J. C. POGGIALE, *Modélisation mathématique en écologie*, IRD Éditions, Dunod, 2010.
- [2] F. CLARKE, *Functional analysis, Calculus of variations and optimal control*. Springer, London, 2013.
- [3] W. H. FLEMING, R. W. RISHEL, *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [4] J. GHOSH, B. SAHOO, S. PORIA, Prey-predator dynamics with prey refuge providing additional food to predator. *Chaos Solitons Fractals*. 96, 110–119 (2017).
- [5] V. KUMAR, J. DHAR, H. S. BHATTI, H. SINGH, Plant-pest-natural enemy dynamics with disease in pest and gestation delay for natural enemy, *J. Math. Comput. Sci.* 7 (5) (2017) 948–965.
- [6] S. LENHART, J. T. WORKMAN, *Optimal control applied to biological models*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.
- [7] D. S. MANDAL, A. CHEKROUN, S. SMANTA, J. CHATTOPADHYAY, A mathematical study of a crop-pest–natural enemy model with Z-type control, *Mathematics and Computers in Simulation*, 187, 468-488 (2021).
- [8] E. A. MARTIN, B. REINEKING, B. SEO, I. STEFFAN-DEWENTER, Natural enemy interactions constrain pest control in complex agricultural landscapes, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 110 (14) (2013) 5534–5539.
- [9] R. M. NEILAN, S. LENHART, An introduction to optimal control with an application in disease modeling, *DIMACS Series. Discrete Math.* 75, 67-81 (2010).
- [10] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE, AND E. F. MISCHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, Wiley, 1962.
- [11] A. SHA, D. S. MANDAL, A. CHEKROUN, Impact of Prey Refuge in a Diffusive Prey Predator Model with Prey Harvesting, Mutually Interfering Predator and Additional Food for Predator, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, (2023).

- [12] H. SMITH, An Introduction To Delay Differential Equations with Applications To the Life Sciences, in : Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2011.
- [13] C. J. SILVA, D. F. M. TORRES, Modeling and optimal control of HIV/AIDS prevention through PREP. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 11 (1), 119–141, 2017.