

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE TLEMCCEN

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Biomathématiques et Modélisations

Stabilité Globale de l'Équilibre Intérieur d'un Modèle Structuré par Âge

Présenté par :
Assia Manel BENHAMMOU

Soutenu le :
17 Juin 2026

Devant le jury composé de :

M. T.M. Touaoula	Pr	Université de Tlemcen	Président
Mme. F.Z. Hathout	MCB	ESM-Tlemcen	Encadrante
M. I. Moyano	MCA	Université Côte d'Azur	Co-encadrant
M. S. E-H. Miri	Pr	Université de Tlemcen	Examineur
M. O. Boukarabila	MCA	Université de Tlemcen	Invité

Année Universitaire : 2025 – 2026

Remerciements

Avant toute chose, je rends grâce à Dieu, le Tout-Puissant, pour la force, la patience et la persévérance qu'Il m'a accordées tout au long de mon parcours universitaire. Grâce à Son aide bienveillante, j'ai pu mener ce projet à son terme.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Mohammed Tarik TOUAOULA**, Président du jury, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider cette soutenance. Je le remercie également pour les précieux enseignements qu'il m'a transmis durant mon cursus, lesquels ont grandement contribué à ma formation académique.

J'adresse ma plus vive reconnaissance à Madame **Fatima Zohra HATHOUT**, mon encadrante, pour sa grande disponibilité, ses conseils avisés et la confiance qu'elle m'a accordée. Son encadrement rigoureux et son soutien constant ont été déterminants dans l'aboutissement de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Ivan MOYANO**, co-encadrant de ce travail, pour son aide précieuse, ses remarques pertinentes et ses orientations scientifiques qui ont largement contribué à enrichir mes recherches.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Monsieur **Sofiane El-Hadi MIRI**, membre du jury, pour l'intérêt qu'il a porté à ce manuscrit et pour le temps consacré à son évaluation.

Je saisis cette occasion pour exprimer ma gratitude à Monsieur **Youssef Oussama BOUKARABILA** pour son soutien dans la réussite de ce Master international. En sa qualité de coordinateur du programme, son accompagnement et les efforts qu'il a déployés ont garanti le bon déroulement de cette expérience.

Dans le même sens, je salue l'implication de Monsieur **Michele ANCONA**, également coordinateur de ce Master international, pour son suivi tout au long du cursus. Ses démarches constantes pour faciliter les différentes étapes de la formation et optimiser le programme ont été indispensables à la réussite de notre promotion.

Toute ma reconnaissance va également à Monsieur **Ahmed ATTAR**, Directeur du laboratoire **LANLMA**, pour son accueil au sein du laboratoire et pour l'environnement de travail stimulant qu'il met à la disposition des étudiants de Master.

Enfin, j'associe à ces remerciements ma famille et mes amis pour leur soutien in-

défectible et leurs encouragements quotidiens. Leur affection et leur confiance ont été une source intarissable de motivation tout au long de cette aventure universitaire.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Outils mathématiques fondamentaux	3
1.1 Étude des équations différentielles ordinaires	3
1.1.1 Notions de stabilité et de géométrie du plan	4
1.2 Stabilité asymptotique locale et linéarisation	5
1.2.1 Critères de Routh-Hurwitz	5
1.3 Théorie des semi-flots et analyse en dimension infinie	7
1.3.1 Semi-flots et concepts de dissipation	7
1.3.2 Critères de compacité et décomposition des opérateurs	8
1.3.3 Persistance uniforme et outils d'analyse globale	8
2 Modèle de vaccination imparfaite par EDO	11
2.1 Introduction	11
2.2 Existence et unicité des solutions	13
2.3 Positivité et bornitude des solutions	14
2.4 Équilibres - Taux de reproduction de base	15
2.4.1 Équilibre trivial (Sans maladie)	15
2.4.2 Taux de reproduction de base	17
2.4.3 Équilibre positif (Endémique)	18
2.5 Stabilité locale des équilibres : Approche de linéarisation	20
2.5.1 Équilibre trivial	21
2.5.2 Équilibre endémique	22
2.6 Stabilité locale et globale des équilibres : Méthode directe de Lyapunov	23
2.6.1 Équilibre trivial	23
2.6.2 Équilibre endémique	26
2.7 Simulation numérique	31
2.7.1 Scénario 1 : Éradication de la maladie ($\mathcal{R}_0 \leq 1$)	32

2.7.2	Scénario 2 : Persistance de la maladie ($\mathcal{R}_0 > 1$)	32
3	Modèle de vaccination imparfaite structuré en âge	35
3.1	Introduction	35
3.2	Préliminaires	36
3.3	Équation intégrale de Volterra	38
3.4	Existence et unicité des solutions	42
3.5	Semi-flot	44
3.6	Attracteur global compact	48
3.7	Trajectoires totales	59
3.8	États stationnaires-Taux de reproduction de base	66
3.8.1	Équilibre sans maladie	66
3.8.2	Taux de reproduction de base	68
3.8.3	Équilibre endémique	69
3.9	Stabilité globale des équilibres	72
3.9.1	Équilibre sans maladie	74
3.9.2	Équilibre endémique	77
3.10	Simulation numérique	90
	Conclusion générale	93

Introduction générale

La modélisation mathématique est un outil fondamental dans l'étude des phénomènes complexes, en particulier dans le contexte des maladies infectieuses. Elle permet de traduire la réalité biologique en systèmes mathématiques analysables, ce qui aide à comprendre comment l'infection se propage au sein d'une population, à prévoir son évolution dans le temps, et à identifier les facteurs influençant la persistance ou l'éradication de la maladie dans une communauté donnée [2, 24].

Depuis le modèle de **Kermack-McKendrick (1927)**, les modèles épidémiologiques ont contribué à améliorer la compréhension de la propagation des maladies. Ils sont utilisés pour décrire les interactions entre différentes catégories de la population, telles que les individus susceptibles, infectés, rétablis ou vaccinés. Ce domaine a considérablement évolué grâce à l'introduction de facteurs plus réalistes, tels que les naissances, les décès, la période d'incubation et la structure par âge, ouvrant ainsi la voie au développement de modèles plus complexes et proches de la réalité [25, 14, 38, 33, 34, 27].

La vaccination est considérée comme l'une des stratégies les plus efficaces pour lutter contre les maladies infectieuses. Elle stimule le système immunitaire afin de produire une réponse protectrice contre l'agent pathogène, permettant ainsi à l'organisme de le reconnaître et de le combattre lors d'une exposition ultérieure. L'importance de la vaccination ne se limite pas à la protection individuelle, mais s'étend également à la protection collective, grâce à laquelle la probabilité de propagation de la maladie est réduite [2].

Malgré les grands avantages de la vaccination, certains vaccins peuvent ne pas atteindre une efficacité complète de 100%. Leur efficacité peut être influencée par le degré de réponse du système immunitaire, l'âge, l'état de santé, ainsi que les mutations de l'agent pathogène. De plus, certains virus comme le virus de la grippe et COVID-19 peuvent subir des changements génétiques continus, ce qui affecte l'efficacité des vaccins disponibles [16, 5]. Cela nécessite leur mise à jour périodique ou l'administration de doses de rappel. Ainsi, l'étude de la vaccination imparfaite est devenue l'un des sujets essentiels pour comprendre la persistance de certaines maladies malgré la disponibilité des vaccins [24, 29, 28, 9, 17].

Parmi les concepts fondamentaux dans l'étude des modèles épidémiologiques figure le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 , défini comme le nombre moyen de cas secondaires générés par un individu infecté dans une population entièrement susceptible [12, 13]. Si $\mathcal{R}_0 < 1$, la maladie tend à disparaître progressivement, tandis que si $\mathcal{R}_0 > 1$, elle est capable de se propager et de persister au sein de la population. Ce paramètre constitue un outil central dans l'analyse de la stabilité des points d'équilibre ainsi que dans l'évaluation de l'impact de la vaccination sur l'éradication ou la persistance de la maladie [39].

Dans ce cadre, notre travail s'inscrit dans l'étude d'un modèle mathématique épidémiologique visant à décrire la propagation d'une maladie infectieuse au sein d'une population soumise à une vaccination imparfaite. Ce travail s'inspire et s'appuie fondamentalement sur l'approche de F. Z. Hathout et T. M. Touaoula [21] concernant l'impact d'un vaccin à efficacité incomplète. Pour analyser cette dynamique, nous adoptons deux approches mathématiques complémentaires : les équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations aux dérivées partielles (EDP).

Dans la première partie, nous étudions un modèle EDO, considéré comme une approche simplifiée décrivant l'évolution des classes de population uniquement en fonction du temps. La population est divisée en trois catégories principales : les individus susceptibles, les individus vaccinés et les individus infectés. L'analyse de ce modèle porte sur la démonstration de la positivité et de la bornitude des solutions, le calcul du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 , ainsi que sur la détermination des points d'équilibre et l'étude de leur stabilité locale et globale à l'aide de fonctions de Lyapunov [33, 27].

Dans la deuxième partie, nous étudions un modèle EDP structuré en âge, considéré comme plus réaliste puisqu'il prend en compte explicitement l'influence de l'âge sur la dynamique de la maladie, sur l'efficacité de la vaccination ainsi que sur les taux de transition entre les différentes classes, complétant ainsi les analyses de la littérature [35, 30, 15, 18, 4, 6, 7, 8, 10, 1]. L'analyse de ce modèle repose sur des outils d'analyse fonctionnelle. Nous nous intéressons notamment à l'existence d'un attracteur global compact [31, 20], aux trajectoires totales, ainsi qu'à la détermination des états stationnaires, du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et de la persistance uniforme. Enfin, nous étudions la stabilité globale du système afin de caractériser son comportement asymptotique à long terme.

Chapitre 1

Outils mathématiques fondamentaux

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats essentiels concernant les équations différentielles ordinaires (EDO) et les systèmes dynamiques. Nous introduisons d'abord les concepts fondamentaux et le cadre théorique général de l'existence et de l'unicité des solutions, avant d'aborder l'étude de la stabilité locale et globale des points d'équilibre.

1.1 Étude des équations différentielles ordinaires

Définition 1.1.1. ([3]) Soit $t \in \mathbb{R}$ la variable représentant le temps, et soit x une fonction de t dérivable à valeurs réelles. Une équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre établit une relation entre x et sa dérivée première :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Lorsque la fonction f dépend explicitement du temps t , l'équation est dite **non autonome**. En revanche, si f ne dépend pas explicitement du temps, l'équation est dite **autonome** et s'écrit sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Dans la suite de ce travail, l'étude sera exclusivement consacrée aux équations et systèmes autonomes. On considère ainsi le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 1.1.2. ([11])(Fonction localement lipschitzienne) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonc-

tion continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à x si, pour tout $x_0 \in I$, il existe un voisinage $V \subset I$ de x_0 et une constante $K \geq 0$ tels que pour tous $x, y \in V$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Théorème 1.1.1. ([11])(*Théorème de Cauchy-Lipschitz*) Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et localement lipschitzienne. Alors, pour chaque condition initiale $x_0 \in I$, il existe un intervalle $J = [-r, r]$ (avec $r > 0$) tel que le problème de Cauchy (1.1) possède une unique solution maximale définie sur J .

1.1.1 Notions de stabilité et de géométrie du plan

Définition 1.1.3. ([3])(**Domaine positivement invariant**) Soit le système dynamique défini dans le plan par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

où $f, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est dit positivement invariant pour ce système si, pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in D$, la solution $(x(t), y(t))$ issue de ce point reste dans D pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.1.4. ([3])(**Domaine attractant du plan**) Un domaine D du plan est dit attractant s'il est borné et si toute trajectoire coupant sa frontière ∂D pénètre et reste à l'intérieur de D .

Définition 1.1.5. ([3])(**Points d'équilibre**) Un point d'équilibre du problème (1.1) (respectivement (1.2)) est une solution stationnaire pour laquelle le vecteur vitesse s'annule, c'est-à-dire $f(x^*) = 0$ (respectivement $f(x^*, y^*) = 0$ et $g(x^*, y^*) = 0$).

Définition 1.1.6. (**Équilibre stable**) On dit qu'un point d'équilibre x^* est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute donnée initiale x_0 vérifiant $|x_0 - x^*| < \alpha$, la solution $x(t)$ du problème de Cauchy (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie :

$$|x(t) - x^*| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Définition 1.1.7. (**Équilibre asymptotiquement stable**) On dit qu'un point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute

donnée initiale x_0 vérifiant $|x_0 - x^*| < \varepsilon$, la solution $x(t)$ vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

1.2 Stabilité asymptotique locale et linéarisation

Considérons à présent le système différentiel bidimensionnel non linéaire donné par (1.2). Afin d'examiner la stabilité locale d'un point d'équilibre (x^*, y^*) , nous introduisons le système linéarisé associé au voisinage de cet équilibre en utilisant les variables d'écart $u(t) = x(t) - x^*$ et $v(t) = y(t) - y^*$:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \dot{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v \end{cases}$$

Ce système linéaire peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où A désigne la matrice jacobienne du système évaluée à l'équilibre :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable lorsque toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne A ont une partie réelle strictement négative.

Dans la pratique, le calcul explicite des valeurs propres d'une matrice linéaire de grande dimension s'avère souvent complexe. C'est pourquoi nous introduisons des critères algébriques permettant de déterminer la stabilité sans calculer ces valeurs propres.

1.2.1 Critères de Routh-Hurwitz

Soit un système linéaire autonome de dimension n régi par :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

où $A = [a_{ij}]$ est la matrice des coefficients du système. En supposant que $\det A \neq 0$, l'origine est l'unique point d'équilibre du système. L'équation caractéristique associée à la matrice A est définie par le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, que l'on écrit sous la forme :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

On définit alors les déterminants de Hurwitz, notés H_k pour $k \in \{1, \dots, n\}$, construits de la manière suivante :

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

De façon générale, le déterminant d'ordre k est donné par :

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix}$$

où l'on pose $a_j = 0$ dès que $j > n$ ou $j < 0$. Le théorème de Routh-Hurwitz fournit la condition nécessaire et suffisante suivante :

L'équilibre est localement asymptotiquement stable si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $H_k > 0$.

Pour les dimensions d'usage fréquent ($n = 3$), ces conditions se simplifient explicitement :

— **En dimension 3** : L'équation caractéristique s'écrit $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$. Les conditions deviennent :

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{et} \quad a_1a_2 - a_3 > 0$$

1.3 Théorie des semi-flots et analyse en dimension infinie

L'étude des modèles de vaccination structurés par âge (EDP) nécessite l'introduction du cadre théorique des systèmes dynamiques en dimension infinie. Dans cette section, nous formalisons les notions de semi-flots, de compacité et de persistance, indispensables pour analyser l'existence d'attracteurs et le comportement asymptotique des solutions des chapitres suivants.

1.3.1 Semi-flots et concepts de dissipation

Définition 1.3.1. (Semi-flot associé à une EDO/EDP)

On appelle semi-flot de l'équation différentielle (1.1) à un instant $t \geq 0$, l'application continu $\Phi : \mathbb{R}^+X \rightarrow X$, notée aussi $\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$, qui vérifie les propriétés d'un système dynamique semi-flot :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t(x_0) = f(\Phi_t(x_0)), \\ \Phi_0(x_0) = x_0 \end{cases}$$

Définition 1.3.2. ([36])(Propriétés asymptotiques des semi-flots)

Soit $\Phi : J \subset \mathbb{R}U \rightarrow U$ un semi-flot continu.

- (i) Φ est appelé **point dissipatif** s'il existe un sous ensemble B de U qui attire tous les points dans U .
- (ii) Φ est appelé **asymptotiquement régulier(smooth)** si Φ est asymptotiquement compact sur chaque ensemble positivement invariant borné fermé .
- (iii) Φ est appelé **éventuellement borné** sur un ensemble $M \subset U$ si $\Phi(J_r M)$ est borné pour $J_r = J \cap [r, \infty)$ $r \in J$.

Théorème 1.3.1. ([36])(Existence d'un attracteur compact)

Soit Φ un semi-flot continu sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un attracteur global compact pour les ensembles bornés de X .
- (ii) Φ est point-dissipatif, éventuellement borné, et asymptotiquement lisse sur tout ensemble borné de X .

1.3.2 Critères de compacité et décomposition des opérateurs

En dimension infinie, les ensembles bornés, fermés ne sont pas nécessairement relativement compacts. Le théorème suivant donne une condition suffisante pratique pour prouver qu'un semi-flot est asymptotiquement lisse par décomposition.

Théorème 1.3.2. ([36]) *Le semi-flot $\Phi_t(x_0) : \mathbb{R}^+X \rightarrow X$ est asymptotiquement lisse s'il admet une décomposition de la forme $\Phi_t(x_0) = \widehat{\Phi}_t(x_0) + \widetilde{\Phi}_t(x_0)$, où :*

- (i) *Il existe une fonction continue $U : \mathbb{R}^+\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, \varepsilon) = 0$, et vérifiant $\|\widehat{\Phi}_t(x_0)\|_X \leq U(t, \varepsilon)$ dès que $\|x_0\|_X \leq \varepsilon$.*
- (ii) *Pour tout $t \geq 0$, l'opérateur $\widetilde{\Phi}_t(x_0)$ est complètement continu (compact).*

Le théorème classique suivant (Fréchet-Kolmogorov) est un outil fondamental pour caractériser la compacité forte dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^+)$, omniprésents dans les modèles structurés en âge.

Théorème 1.3.3. ([36])(*Théorème de Fréchet-Kolmogorov dans L^p*)

Supposons que $K \subset L^p(0, \infty)$ soit un ensemble fermé et borné avec $p \geq 1$. Ainsi, K a un compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

- (i) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty |g(x+h) - g(x)|^p dx = 0$ uniformément pour tout $g \in K$.
- (ii) $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_h^\infty |g(x)|^p dx = 0$ uniformément pour tout $g \in K$.

1.3.3 Persistance uniforme et outils d'analyse globale

Dans les modèles épidémiologiques, la persistance uniforme permet de garantir mathématiquement que la maladie ne s'éteint pas et reste endémique.

Définition 1.3.3. ([36])(**Persistance uniforme**)

Soit $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et positive jouant le rôle de fonction de distance à la frontière d'extinction. On dit que le semi-flot $\Phi_t(x)$ est **uniformément persistant** par rapport à ρ s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi_t(x)) \geq \varepsilon, \quad \forall x \in X \text{ tel que } \rho(x) > 0$$

L'inégalité de Jensen suivante est intensément exploitée lors du calcul des dérivées des fonctions de Lyapunov globales sous forme intégrale (modèles EDP).

Théorème 1.3.4. ([36])(*Inégalité de Jensen intégrale*)

Soit $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que :

0. Les fonctions g , $f \cdot g$ et $W(f) \cdot g$ appartiennent à $L^1(\Omega)$,

0. $g(x) \geq 0$ presque partout sur Ω ,

0. $\int_{\Omega} g(x) dx = 1$.

Alors, on a l'inégalité suivante :

$$W \left(\int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right) \leq \int_{\Omega} W(f(x))g(x) dx$$

Enfin, le résultat suivant étend le principe classique de LaSalle aux systèmes de dimension infinie possédant un attracteur global compact.

Théorème 1.3.5. ([36])(Principe d'invariance de LaSalle généralisé)

Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ X \rightarrow X$ un semi-flot continu, B un sous-ensemble invariant et compact dans X , et soit $W : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que pour toute trajectoire totale $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$, l'application temporelle $t \mapsto (W \circ \phi)(t)$ soit localement absolument continue et vérifie $\frac{d}{dt}(W \circ \phi) \leq 0$ presque partout (ou possède une dérivée à droite négative $\frac{d^+}{dt}(W \circ \phi) \leq 0$ sur \mathbb{R}). En outre, supposons que W soit constante sur un sous-ensemble $B_1 \subset B$ et que $\phi(\mathbb{R}) \subset B_1$ pour toute trajectoire totale vérifiant $\frac{d}{dt}(W \circ \phi) \equiv 0$. Alors $B = B_1$.

Chapitre 2

Modèle de vaccination imparfaite par EDO

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle épidémiologique basé sur les équations différentielles ordinaires (EDO), visant à décrire l'évolution temporelle de la propagation d'une maladie infectieuse au sein d'une population soumise à une vaccination imparfaite. La population est divisée en trois classes principales : les individus susceptibles S , vaccinés V et infectés I . Le modèle considéré est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A + (1 - \rho)kV(t) - (\mu_s + \delta)S(t) - \beta_s S(t)I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \delta S(t) + \rho kV(t) - (\mu_v + k)V(t) - \beta_v V(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = (\beta_s S(t) + \beta_v V(t))I(t) - (\mu_i + q)I(t), \end{cases} \quad t > 0, \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales associées $S(0) = S_0 > 0$, $V(0) = V_0 > 0$ et $I(0) = I_0 \geq 0$.

Dans ce système, $S(t)$, $V(t)$ et $I(t)$ représentent respectivement les effectifs des populations d'individus susceptibles, vaccinés (ou protégés) et infectés au cours du temps t .

Il convient de noter que la dynamique de la classe des individus rétablis, notée $R(t)$, n'est pas incluse dans le système (2.1). En effet, l'équation régissant cette variable est donnée par :

$$\frac{dR(t)}{dt} = qI(t) - \mu_r R(t), \quad t > 0$$

avec la condition initiale associée $R(0) = R_0 \geq 0$, où μ_r représente le taux de mortalité

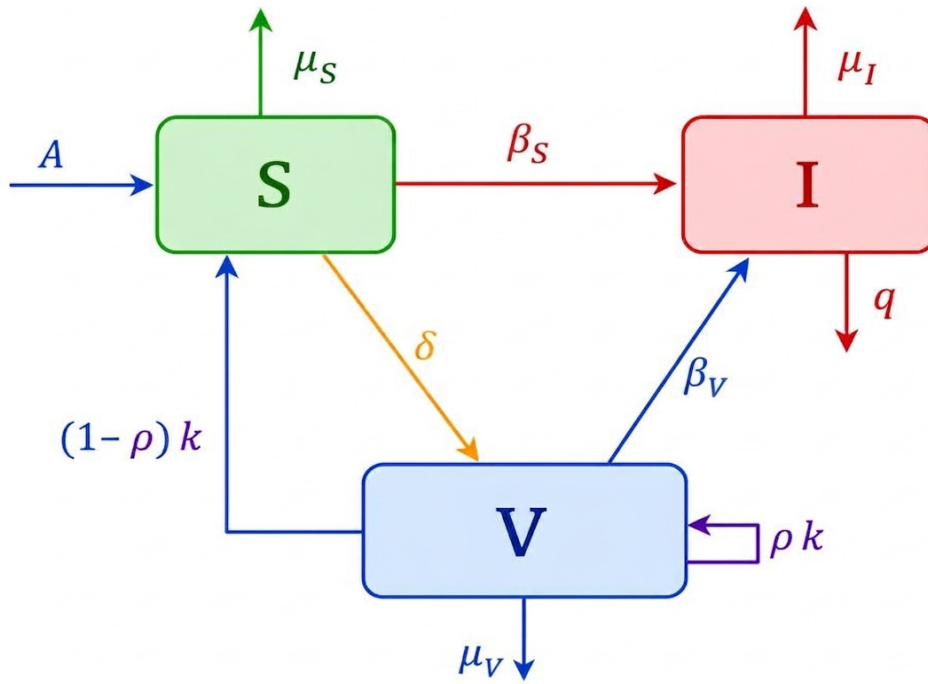


FIGURE 2.1: Diagramme du flux du système (2.1).

naturelle de cette classe. Étant donné que les variables $S(t)$, $V(t)$ et $I(t)$ sont totalement indépendantes de $R(t)$, cette dernière équation peut être omise de l'étude mathématique sans perte de généralité. Une fois le système réduit résolu, l'évolution de $R(t)$ peut être déduite de manière indépendante.

Dans le système (2.1), le paramètre A désigne le flux constant de recrutement dans la classe des susceptibles. Les paramètres μ_S, μ_V, μ_I sont les taux de mortalité de chaque compartiment. Le paramètre δ représente le taux de vaccination, k est le taux de perte de l'immunité vaccinale, et ρ est la probabilité pour un individu perdant son immunité d'être immédiatement réinjecté dans le processus de re-vaccination. Les paramètres β_S et β_V décrivent les taux de transmission de la maladie pour les susceptibles et les vaccinés, reflétant ainsi le caractère imparfait du vaccin si $\beta_V > 0$. Enfin, q désigne le taux de guérison ou de retrait de la classe infectée (voir la table 2.1 et la figure 2.1).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : Après avoir validé les propriétés mathématiques de base du modèle (existence, unicité et positivité des solutions), nous calculons le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 par la méthode de la matrice de prochaine génération [12]. Nous démontrons ensuite la stabilité globale de l'équilibre sans

TABLE 2.1: Interprétation biologique du modèle

$S(t)$	Densité des individus susceptibles à l'instant t
$V(t)$	Densité des individus vaccinés à l'instant t
$I(t)$	Densité des individus infectés et contagieux à l'instant t
A	Flux constant de recrutement
k	Taux de perte de vaccination
ρ	Probabilité de revenir dans la classe v
δ	Taux de vaccination
β_s	Taux de transmission pour les susceptibles
β_v	Taux de transmission pour les vaccinés
μ_s	Taux de mortalité (pour les susceptibles)
μ_v	Taux de mortalité (pour les vaccinés)
μ_I	Taux de mortalité (pour les infectés)
q	Taux de guérison

maladie (DFE) lorsque $\mathcal{R}_0 \leq 1$. Enfin, nous établissons les conditions d'existence de l'équilibre endémique positif lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, et nous prouvons sa stabilité globale à l'aide d'une fonction de Lyapunov globale appropriée structurée selon la méthode de Goh-Volterra [26].

2.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 2.2.1. *Le modèle (2.1) admet une solution unique.*

Démonstration. Le système (2.1) peut également s'exprimer sous la forme :

$$Y'(t) = F(Y(t))$$

$$\text{avec } Y(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ V(t) \\ I(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(Y(t)) \\ f_2(Y(t)) \\ f_3(Y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + (1 - \rho)kV - \mu_s S - \delta S - \beta_s SI \\ \delta S - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI \\ \beta_s SI + \beta_v VI - \mu_I I - qI \end{pmatrix}$$

Puisque la fonction F est continue et localement lipschitzienne (les fonctions f_1, f_2, f_3 sont des fonctions polynomiales), d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (2.1) possède une solution unique.

2.3 Positivité et bornitude des solutions

Pour que le modèle de vaccination (2.1) soit biologiquement cohérent, il est essentiel de vérifier que les variables d'état (les populations S , V et I) restent positives et bornées au cours du temps.

Proposition 2.3.1. *Soit l'ensemble de validité biologique Ω défini par :*

$$\Omega = \left\{ (S, V, I) \in \mathbb{R}_+^3, \quad S + V + I \leq \frac{A}{\mu} \right\}$$

où $\mu = \min(\mu_S, \mu_V, \mu_I)$. Si Φ_t désigne le semi-flot associé au système (2.1), on a les propriétés suivantes :

- (i) Le cône positif \mathbb{R}_+^3 est **positivement invariant** (positivité des solutions).
- (ii) $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un point dissipatif. De plus, Ω attire tous les points dans \mathbb{R}_+^3 , et il est positivement invariant sous le semi-flot Φ_t .

Preuve. Affirmation (i) (Positivité) :

Montrons que le cône positif \mathbb{R}_+^3 est positivement invariant pour le système (2.1), c'est-à-dire que les solutions restent positives. Supposons par l'absurde qu'il existe un premier instant $t_1 = \inf\{t > 0 \mid (S(t), V(t), I(t)) \in \partial\mathbb{R}_+^3\}$. À cet instant, au moins l'une des variables s'annule sur la frontière. Examinons les trois cas possibles :

- **Cas 1 :** Si $S(t_1) = 0$ avec $V(t_1) > 0$ et $I(t_1) > 0$, alors la première équation du système donne $\dot{S}(t_1) = A + (1 - \rho)kV(t_1) > 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit tel que $S(t_1 - \varepsilon) < S(t_1) = 0$, ce qui contredit la définition de t_1 comme borne inférieure.
- **Cas 2 :** Si $V(t_1) = 0$ avec $S(t_1) > 0$ et $I(t_1) > 0$, la deuxième équation donne $\dot{V}(t_1) = \delta S(t_1) > 0$. De la même manière, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V(t_1 - \varepsilon) < 0$, ce qui est une contradiction.
- **Cas 3 :** Si $I(t_1) = 0$ avec $S(t_1) > 0$ et $V(t_1) > 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz d'unicité impose que si $I(t_1) = 0$, alors $I(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc la solution reste sur le bord.

Par conséquent, le cône positif \mathbb{R}_+^3 est rigoureusement positivement invariant.

Affirmation (ii) (Bornitude) :

Soit N définie par :

$$N(t) = S(t) + V(t) + I(t)$$

En dérivant N par rapport au temps t et en injectant les équations du système (2.1), nous obtenons :

$$\dot{N}(t) = A - \mu_s S - \mu_v V - \mu_I I - qI \leq A - \mu_s S - \mu_v V - \mu_I I$$

En posant $\mu = \min(\mu_s, \mu_v, \mu_I)$, l'inégalité se simplifie sous la forme :

$$\dot{N}(t) \leq A - \mu N(t) \quad (2.2)$$

En utilisant la méthode du facteur intégrant par la multiplication de (2.2) par $e^{\mu t}$, l'intégration sur l'intervalle $(0, t)$ donne explicitement :

$$N(t) \leq \left(N(0) - \frac{A}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{A}{\mu} \quad (2.3)$$

Il découle immédiatement de l'expression (2.3) que $N(t) \leq \max \left\{ N(0), \frac{A}{\mu} \right\}$. De plus, en prenant la limite supérieure lorsque $t \rightarrow +\infty$, nous trouvons :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{A}{\mu}$$

Ainsi, l'ensemble Ω est borné et attire toutes les trajectoires du système dans \mathbb{R}_+^3 . De surcroît, d'après (2.3), si $N(0) \leq \frac{A}{\mu}$, alors $N(t) \leq \frac{A}{\mu}$ pour tout $t \geq 0$, ce qui prouve l'invariance positive de Ω .

2.4 Équilibres - Taux de reproduction de base

Pour étudier le comportement du modèle SVI nous avons besoin de calculer ses points d'équilibres.

2.4.1 Équilibre trivial (Sans maladie)

Théorème 2.4.1. *Le système admet toujours un unique équilibre sans maladie $E^0 = (S^0, V^0, 0)$.*

Preuve. les équilibres du système (2.1) vérifient :

$$\begin{cases} A + (1 - \rho)kV - \mu_s S - \delta S - \beta_s SI = 0 \\ \delta S - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI = 0 \\ \beta_s SI + \beta_v VI - \mu_I I - qI = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

En situation sans infection, le nombre de personnes infectées est nul, c'est-à-dire $I^0 = 0$. En remplaçant dans (2.4) alors le système réduit donnée par :

$$\begin{cases} A + (1 - \rho)kV^0 - (\mu_s + \delta)S^0 = 0 \\ \delta S^0 - ((1 - \rho)k + \mu_v)V^0 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

D'après la deuxième équation de (2.5) on obtient :

$$V^0 = \frac{\delta}{(1 - \rho)k + \mu_v} S^0$$

Substituons maintenant dans la première équation :

$$A = [(\mu_s + \delta) - \frac{(1 - \rho)\delta k}{(1 - \rho)k + \mu_v}] S^0$$

\implies

$$S^0 = \frac{A((1 - \rho)k + \mu_v)}{(\mu_s + \delta)((1 - \rho)k + \mu_v) - (1 - \rho)k\delta}$$

Donc

$$S^0 = \frac{A((1 - \rho)k + \mu_v)}{\mu_v(\mu_s + \delta) + k\mu_s(1 - \rho)} > 0$$

Et par suite :

$$V^0 = \frac{\delta A}{\mu_v(\mu_s + \delta) + k\mu_s(1 - \rho)} > 0$$

Donc le système (2.1) admet un équilibre sans maladie $E^0 = (S^0, V^0, 0)$.

Nous pouvons à présent calculer le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 dans la section suivante :

2.4.2 Taux de reproduction de base

Le taux de reproduction de base, noté \mathcal{R}_0 , représente le nombre moyen de nouveaux cas générés par un individu infectieux introduit dans une population entièrement susceptible [12].

La méthode de la matrice de la prochaine génération (*Next Generation Matrix*) définit ce taux par :

$$\mathcal{R}_0 = r(FV^{-1})$$

où $r(FV^{-1})$ désigne le rayon spectral (la valeur propre maximale en module) de la matrice FV^{-1} .

D'après (2.4), l'évolution de la classe des infectés est donnée par :

$$\dot{I} = (\beta_s S + \beta_v V)I - (\mu_I + q)I$$

En appliquant la méthode, on pose :

$$\mathcal{F}(I) = (\beta_s S + \beta_v V)I \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(I) = (\mu_I + q)I$$

- \mathcal{F} : représente la production de nouveaux cas infectieux.
- \mathcal{V} : les sorties du compartiment infectieux dues à la guérison et à la mortalité.

Soient F et V les dérivées de \mathcal{F} et \mathcal{V} respectivement ,

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I}(E^0) = \beta_s S^0 + \beta_v V^0$$

$$V = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial I}(E^0) = \mu_I + q$$

et par suite on a

$$V^{-1} = \frac{1}{\mu_I + q}$$

Ainsi

$$FV^{-1} = \frac{\beta_s S^0 + \beta_v V^0}{\mu_I + q}$$

Dans ce cas la matrice étant scalaire on obtient directement :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{A[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v) + \delta\beta_v]}{(\mu_I + q)[\mu_v(\mu_s + \delta) + k\mu_s(1-\rho)]}$$

2.4.3 Équilibre positif (Endémique)

Théorème 2.4.2. *Si $\mathcal{R}_0 > 1$ alors il existe un unique équilibre positif (endémique) $E^* = (S^*, V^*, I^*)$.*

Preuve. D'après la troisième équation du système (2.4) on a :

$$I^*[\beta_s S^* + \beta_v V^* - (\mu_I + \rho)] = 0$$

comme $I^* > 0$, on divise l'équation par I^* on obtient :

$$\beta_s S^* + \beta_v V^* = \mu_I + \rho \quad (2.6)$$

la deuxième équation de (2.4) donne :

$$\delta S^* - ((1 - \rho)k + \mu_v)V^* - \beta_v V^* I^* = 0$$

Alors

$$S^* = \frac{(1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*}{\delta} V^*$$

En remplaçant S^* dans (2.6) on obtient :

$$\beta_s \left(\frac{(1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*}{\delta} V^* \right) + \beta_v V^* = \mu_I + \rho$$

\implies

$$V^* \left(\frac{\beta_s((1 - \rho)k + \mu_v) + \beta_s \beta_v I^*}{\delta} + \beta_v \right) = \mu_I + \rho$$

\implies

$$V^* \left(\frac{\beta_s((1 - \rho)k + \mu_v) + \delta \beta_v + \beta_s \beta_v I^*}{\delta} \right) = \mu_I + \rho$$

Donc

$$V^* = \frac{\delta(\mu_I + \rho)}{(\beta_s((1 - \rho)k + \mu_v) + \delta \beta_v + \beta_s \beta_v I^*)} := V^*(I^*).$$

La première équation de (2.4) donne :

$$A + (1 - \rho)kV^* - (\mu_s + \delta)S^* - \beta_s S^* I^* = 0$$

En remplaçant S^* dans cette équation, on obtient

$$A + (1 - \rho)kV^* - (\mu_s + \delta) \frac{(1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*}{\delta} V^* - \beta_s \frac{(1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*}{\delta} V^* I^* = 0$$

Puisque V^* dépend de I^* , on peut réécrire cette dernière équation sous la forme :

$$G(I^*) = 0 \quad (2.7)$$

avec

$$G(I^*) = A + [(1 - \rho)k - \frac{(\mu_s + \delta + \beta_s I^*)((1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*)}{\delta}] V^*(I^*)$$

on a

$$\begin{aligned} G(0) &= A + V^*(0) \left[(1 - \rho)k - (\mu_s + \delta) \frac{(1 - \rho)k + \mu_v}{\delta} \right] \\ &= A - \left[\frac{\delta(\mu_I + q)}{(\beta_s((1 - \rho)k + \mu_v) + \delta\beta_v)} \right] \left[\frac{\mu_s(1 - \rho)k + (\mu_s + \delta)\mu_v}{\delta} \right] \\ &= A - \frac{(\mu_I + q)(\mu_s(1 - \rho)k + (\mu_s + \delta)\mu_v)}{(\beta_s((1 - \rho)k + \mu_v) + \delta\beta_v)} \\ &= A \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque G est continue, $G(0) > 0$ car $\mathcal{R}_0 > 1$ et $\lim_{I^* \rightarrow +\infty} G(I^*) = -\infty$, on conclut donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins $I^* > 0$ vérifiant le problème (2.7).

Pour vérifier l'unicité de cette solution, il suffit de démontrer que la fonction G est

strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* . On calcul donc sa dérivée :

$$\begin{aligned}
 G'(I^*) &= -\frac{\delta(\mu_I + q)\beta_s\beta_v^2}{[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \delta\beta_v]^2} [(1-\rho)k \\
 &\quad - \frac{(\mu_s + \delta + \beta_s I^*)((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*)}{\delta}] - \frac{\delta(\mu_I + q)}{[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \delta\beta_v]} \\
 &\quad \left[\frac{\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \beta_v(\mu_s + \delta + \beta_s I^*)}{\delta} \right] \\
 &= -\frac{(\mu_I + q)\beta_s\beta_v[\delta(1-\rho)k - (\mu_s + \delta + \beta_s I^*)((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*)]}{[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \delta\beta_v]^2} \\
 &\quad - \frac{(\mu_I + q)[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \beta_v(\mu_s + \delta + \beta_s I^*)]}{[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \delta\beta_v]} \\
 &= -\frac{\mu_I + q}{[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \delta\beta_v]^2} [\beta_s\beta_v(1-\rho)k + \beta_s^2((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*)^2 \\
 &\quad + \delta\beta_v[\beta_s((1-\rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \beta_v(\mu_s + \delta + \beta_s I^*)]] < 0
 \end{aligned}$$

Cela implique que G est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Conclusion : Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le problème (2.7) possède une unique solution positive.

2.5 Stabilité locale des équilibres : Approche de linéarisation

Dans cette section, nous présentons l'étude de la stabilité locale des équilibres du système (2.1) par l'approche classique de linéarisation. Bien que la méthode des fonctions de Lyapunov (développée dans la section suivante) permette d'obtenir des résultats plus généraux, la linéarisation reste une alternative incontournable et systématique lorsque la construction d'une fonction de Lyapunov s'avère complexe ou impossible.

La matrice jacobienne associée au système est donnée par :

$$J(S, V, I) = \begin{pmatrix} -(\mu_s + \delta) - \beta_s I & (1-\rho)k & -\beta_s S \\ \delta & -(1-\rho)k - \mu_v - \beta_v I & -\beta_v V \\ \beta_s I & \beta_v I & \beta_s S + \beta_v V - (\mu_I + q) \end{pmatrix}$$

2.5.1 Équilibre trivial

Théorème 2.5.1. *Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie (DFE) E^0 est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{R}_0 < 1$. La matrice Jacobienne au point $E^0 = (S^0, V^0, I^0)$ devient

$$J_{E^0} = \begin{pmatrix} -(\mu_s + \delta) & (1 - \rho)k & -\beta_s S^0 \\ \delta & -(1 - \rho)k - \mu_v & -\beta_v V^0 \\ 0 & 0 & \beta_s S^0 + \beta_v V^0 - (\mu_I + q) \end{pmatrix}$$

On pose

$$D(\lambda) := \det(J_{E^0} - \lambda I_d)$$

Les valeurs propres sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique :

$$D(\lambda) = 0$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -(\mu_s + \delta) - \lambda & (1 - \rho)k & -\beta_s S^0 \\ \delta & -(1 - \rho)k - \mu_v - \lambda & -\beta_v V^0 \\ 0 & 0 & \beta_s S^0 + \beta_v V^0 - (\mu_I + q) - \lambda \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= (\beta_s S^0 + \beta_v V^0 - (\mu_I + q) - \lambda) \left[(-(\mu_s + \delta) - \lambda)(-(1 - \rho)k - \mu_v - \lambda) - (1 - \rho)k\delta \right] \\ &= (\lambda + (\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0)) \left[\lambda^2 + \lambda(\mu_s + \delta + (1 - \rho)k + \mu_v) \right. \\ &\quad \left. + (\mu_s + \delta)((1 - \rho)k + \mu_v) - (1 - \rho)k\delta \right] \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(\mu_s + \delta + (1 - \rho)k + \mu_v) + \lambda((\mu_s + \delta)((1 - \rho)k + \mu_v) - (1 - \rho)k\delta) \\ &\quad - \lambda^2(\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0) - \lambda(\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0)(\mu_s + \delta + (1 - \rho)k + \mu_v) \\ &\quad - (\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0)((\mu_s + \delta)((1 - \rho)k + \mu_v) - (1 - \rho)k\delta) \end{aligned}$$

En simplifiant, nous obtenons une équation de la forme :

$$D(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

Avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu_s + \delta + (1 - \rho)k + \mu_v + (\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0) \\ a_2 &= (\mu_s + \delta + (1 - \rho)k + \mu_v)(\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0) + \mu_s\mu_v + k\mu_s \\ a_3 &= (\mu_I + q)(1 - \mathcal{R}_0)(\mu_s\mu_v + k\mu_s) \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{R}_0 < 1$ on a : $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$ et $a_3 > 0$. Ainsi, toutes les conditions du critère de Routh–Hurwitz sont satisfaites. Par conséquent, l'équilibre sans maladie E^0 est localement asymptotiquement stable.

2.5.2 Équilibre endémique

Théorème 2.5.2. *Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors l'équilibre endémique E^* est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. La matrice Jacobienne au point $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ devient

$$J_{E^*} = \begin{pmatrix} -(\mu_s + \delta) - \beta_s I^* & (1 - \rho)k & -\beta_s S^* \\ \delta & -(1 - \rho)k - \mu_v - \beta_v I^* & -\beta_v V^* \\ \beta_s I^* & \beta_v I^* & 0 \end{pmatrix}$$

Pour étudier la stabilité locale de cet l'équilibre on calcul le polynôme caractéristique :

$$\det(J_{E^*} - \lambda I_d) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} -(\mu_s + \delta) - \beta_s I^* - \lambda & (1 - \rho)k & -\beta_s S^* \\ \delta & -(1 - \rho)k - \mu_v - \beta_v I^* - \lambda & -\beta_v V^* \\ \beta_s I^* & \beta_v I^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (-\mu_s - \delta - \beta_s I^* - \lambda)[\lambda((1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^* + \lambda) + \beta_v^2 I^* V^*] \\ & - k(1 - \rho)[- \lambda \delta + \beta_v \beta_s^2 V^* I^*] - \beta_s S^* [\delta \beta_v I^* + \beta_s I^* ((1 - \rho)k + \mu_v \\ & + \beta_v I^* + \lambda)] = 0 \\ \Leftrightarrow & -\lambda^3 - \lambda^2[(1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^* + \beta_s I^* + (\mu_s + \delta)] \\ & - \lambda[(\beta_s I^* + (\mu_s + \delta))((1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \beta_v^2 I^* V^*] \\ & - \beta_v^2 I^* V^* (\beta_s I^* + (\mu_s + \delta)) + \lambda \delta (1 - \rho)k - \beta_s \beta_v^2 I^* V^* (1 - \rho)k \\ & - \lambda \beta_s^2 S^* I^* - \beta_s^2 S^* I^* ((1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) - \beta_s \beta_v^2 \delta S^* I^* = 0 \end{aligned}$$

Après simplification, l'équation caractéristique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

avec

$$b_1 = (1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^* + \beta_s I^* + \mu_s + \delta$$

$$b_2 = (\beta_s I^* + \mu_s)((1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*)\delta\mu_v + \beta_v I^* \delta + \beta_s^2 S^* I^*$$

$$b_3 = \beta_v^2 I^* V^* (\beta_s I^* + \mu_s \delta) + k(1 - \rho)\beta_s \beta_v^2 I^* V^* + \beta_s^2 S^* I^* ((1 - \rho)k + \mu_v + \beta_v I^*) + \beta_s \beta_v^2 S^* I^*$$

On remarque que $b_1 > 0$ et $b_3 > 0$. De plus, on peut démontrer facilement que $b_1 b_2 - b_3 > 0$ car $\mathcal{R}_0 > 1$.

Conclusion : D'après critère de Routh–Hurwitz le point d'équilibre $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ est localement asymptotiquement stable.

2.6 Stabilité locale et globale des équilibres : Méthode directe de Lyapunov

2.6.1 Équilibre trivial

Dans cette section, nous employons la méthode directe de Lyapunov à l'aide des fonctions appropriées. Cette approche permet d'étudier directement, et de manière unifiée, la stabilité locale et globale des équilibres du système (2.1) sans avoir à passer par l'étape de linéarisation.

Théorème 2.6.1. *Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans maladie (DFE) E^0 est globalement asymptotiquement stable.*

Remarque 1. Pour que la fonction de Lyapunov soit bien définie, il doit exister des constantes strictement positives $c_1, c_2 > 0$ telles que :

$$\frac{S(t)}{S_0} \geq c_1 \quad \text{et} \quad \frac{V(t)}{V_0} \geq c_2, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Cela garantit que les termes logarithmiques restent mathématiquement valides.

Preuve. On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$W(t) = S - S^0 - S^0 \ln \left(\frac{S}{S^0} \right) + V - V^0 - V^0 \ln \left(\frac{V}{V^0} \right) + I.$$

On peut calculer la dérivée de

$$W_1(t) = S - S^0 - S^0 \ln \left(\frac{S}{S^0} \right).$$

On obtient ,

$$\begin{aligned} W_1'(t) &:= \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) \dot{S} \\ &= \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) (A + (1 - \rho)kV - (\mu_s + \delta)S - \beta_s SI) \\ &= \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) (-(1 - \rho)kV^0 + (\mu_s + \delta)S^0 + (1 - \rho)kV - \mu_s S - \delta S - \beta_s SI) \\ &= (1 - \rho)k(V - V^0) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) - \mu_s (S - S^0) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) - \delta (S - S^0) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) \\ &\quad - \beta_s SI \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) \\ &= (1 - \rho)k(V - V^0) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) - \mu_s \frac{(S - S^0)^2}{S} - \delta (S - S^0) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) \\ &\quad - \beta_s SI + \beta_s S^0 I. \end{aligned}$$

Maintenant, pour

$$W_2(t) := V - V^0 - V^0 \ln \left(\frac{V}{V^0} \right).$$

On a

$$\begin{aligned} W_2'(t) &= \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \dot{V} \\ &= \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) (\delta S - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI) \\ &= \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) (\delta S - \delta S^0 + \delta S^0 - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI) \\ &= \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) (\delta (S - S^0) + (1 - \rho)kV^0 + \mu_v V^0 + (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI) \\ &= \delta \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) (S - S^0) + (1 - \rho)kV^0 \left(1 - \frac{V}{V^0} \right) \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \\ &\quad + \mu_v V^0 \left(1 - \frac{V}{V^0} \right) \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) - \beta_v VI + -\beta_v V^0 I. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de $W_3(t) := I(t)$ est donnée par

$$W_3'(t) := \dot{I}(t) = \beta_s SI + \beta_v VI - (\mu_i + q)I$$

Finalement, puisque $W'(t) = W_1'(t) + W_2'(t) + W_3'(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} W'(t) &= -\mu_s \frac{(S - S^0)^2}{S} + (1 - \rho)kV^0 \left(\left(\frac{V}{V^0} - 1 \right) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) + \left(1 - \frac{V}{V^0} \right) \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \right) \\ &+ \underbrace{\delta S^0 \left(- \left(\frac{S}{S^0} - 1 \right) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) + \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \left(\frac{S}{S^0} - 1 \right) \right)}_{=B_1} \\ &+ \mu_v V^0 \left(\left(1 - \frac{V}{V^0} \right) \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \right) - \beta_s SI + \beta_s S^0 I - \beta_v VI + \beta_v V^0 I + \beta_s SI \\ &+ \beta_v VI - (\mu_i + q)I \end{aligned}$$

Développons l'expression B_1 comme suit :

$$\begin{aligned} B_1 &= \delta S^0 \left(- \left(\frac{S}{S^0} - 1 \right) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) + \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \left(\frac{S}{S^0} - 1 \right) \right) \\ &= \delta S^0 \left(- \frac{S}{S^0} + 1 + 1 - \frac{S^0}{S} + \frac{S}{S^0} - 1 - \frac{V^0 S}{V S^0} + \frac{V^0}{V} \right) \\ &= \delta S^0 \left(1 - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0 S}{V S^0} + \frac{V^0}{V} \right) \\ &= ((1 - \rho)kV^0 + \mu_v V^0) \left(1 - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0 S}{V S^0} + \frac{V^0}{V} \right) \end{aligned}$$

La substitution dans $W'(t)$ donne :

$$\begin{aligned} W'(t) &= -\mu_s \frac{(S - S^0)^2}{S} + (1 - \rho)kV^0 \underbrace{\left[\left(\frac{V}{V^0} - 1 \right) \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) + \left(1 - \frac{V}{V^0} \right) \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) \right]}_{=B_2} \\ &+ 1 - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0 S}{V S^0} + \frac{V^0}{V} \\ &+ \underbrace{\mu_v V^0 \left[\left(1 - \frac{V}{V^0} \right) \left(1 - \frac{V^0}{V} \right) + 1 - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0 S}{V S^0} + \frac{V^0}{V} \right]}_{=B_3} \\ &+ \underbrace{\beta_v V^0 I + \beta_s S^0 I - (\mu_i + q)I}_{=B_4} \end{aligned}$$

Maintenant, calculons les termes B_2, B_3 et B_4

$$\begin{aligned} B_2 &= (1-\rho)kV^0 \left(\frac{V}{V^0} - \frac{VS^0}{V^0S} - 1 + \frac{S^0}{S} + 1 - \frac{V^0}{V} - \frac{V}{V^0} + 1 + 1 - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0S}{VS^0} + \frac{V^0}{V} \right) \\ &= (1-\rho)kV^0 \left(2 - \frac{VS^0}{V^0S} - \frac{V^0S}{VS^0} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Comme $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, on pose $a = \frac{S^0V}{SV^0}$ et $b = \frac{1}{a} = \frac{V^0S}{VS^0}$. Ainsi, $2 - a - b \leq 0$.

$$\begin{aligned} B_3 &= \mu_v V^0 \left(\frac{V}{V^0} - \frac{S^0V}{SV^0} - 1 + \frac{S^0}{S} + 1 - \frac{V^0}{V} - \frac{V}{V^0} + 1 + 1 - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0S}{VS^0} + \frac{V^0}{V} \right) \\ &= \mu_v V^0 \left(3 - \frac{V}{V^0} - \frac{S^0}{S} - \frac{V^0S}{VS^0} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Comme $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, on prend $a = \frac{V}{V^0}$, $b = \frac{S^0}{S}$ et $c = \frac{V^0S}{VS^0}$. Cela implique que $3 - a - b - c \leq 0$.

$$\begin{aligned} B_4 &= \beta_v V^0 I + \beta_s S^0 I - (\mu_i + q)I \\ &= (\mu_i + q)I \left(\frac{\beta_s S^0 + \beta_v V^0}{\mu_i + q} - 1 \right) \\ &= (\mu_i + q)I (\mathcal{R}_0 - 1) \leq 0 \quad \text{car} \quad \mathcal{R}_0 \leq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$W'(t) \leq 0.$$

La fonction W est définie positive (**Goh, 1989**)[19], son seul minimum est le point $E^0 = (S^0, V^0, 0)$.

A présent, $W'(t) = 0$ implique que $S = S^0$, $V = V^0$ et $I = 0$. Donc l'ensemble invariant vérifiant $W'(t) = 0$ contient seulement E^0 . D'après le principe de Lasalle E^0 est globalement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

2.6.2 Équilibre endémique

Théorème 2.6.2. *Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors l'équilibre endémique E^* est globalement asymptotiquement stable.*

Remarque 2. Pour que la fonction de Lyapunov soit bien définie, il doit exister des

constantes strictement positives $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles que :

$$\frac{S(t)}{S^*} \geq c_1 \quad \text{et} \quad \frac{V(t)}{V^*} \geq c_2 \quad \text{et} \quad \frac{I(t)}{I^*} \geq c_3, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Cela garantit que les termes logarithmiques restent mathématiquement valides.

Preuve. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$L(t) = S(t) - S^* - S^* \ln \left(\frac{S(t)}{S^*} \right) + V(t) - V^* - V^* \ln \left(\frac{V(t)}{V^*} \right) + I(t) - I^* - I^* \ln \left(\frac{I(t)}{I^*} \right)$$

On peut calculer la dérivée de

$$L_1(t) := S(t) - S^* - S^* \ln \left(\frac{S(t)}{S^*} \right)$$

On obtient,

$$\begin{aligned} L_1'(t) &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \dot{S} \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (A + (1 - \rho)kV - \mu_s S - \delta S - \beta_s SI) \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (\mu_s S^* - \delta S^* - \beta_s S^* I^* - (1 - \rho)kV^* + (1 - \rho)kV - \mu_s S - \delta S - \beta_s SI) \\ &= \mu_s \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (S^* - S) + \delta \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (S^* - S) + \beta_s \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (S^* I^* - SI) \\ &\quad + (1 - \rho)k \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (V - V^*) \\ &= -\mu_s \frac{(S - S^*)^2}{S} - \delta \frac{(S - S^*)^2}{S} + \beta_s S^* I^* \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) \left(1 - \frac{SI}{S^* I^*} \right) \\ &\quad + (1 - \rho)k \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (V - V^*) \end{aligned}$$

Maintenant, pour

$$L_2(t) := V(t) - V^* - V^* \ln \left(\frac{V(t)}{V^*} \right)$$

on a

$$\begin{aligned}
 L_2'(t) &= \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \dot{V} \\
 &= \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (\delta S - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI) \\
 &= \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (\delta - \delta S^* + \delta S^* S - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI) \\
 &= \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (\delta(S - S^*) + (1 - \rho)kV^* + \mu_v V^* + \beta_v V^* I^* - (1 - \rho)kV - \mu_v V - \beta_v VI) \\
 &= \delta \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (S - S^*) + (1 - \rho)k(V^* - V) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) + \mu_v (V^* - V) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \\
 &\quad + \beta_v (V^* I^* - VI) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \\
 &= \delta \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (S - S^*) + (1 - \rho)k(V^* - V) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) - \mu_v \frac{(V - V^*)^2}{V} \\
 &\quad + \beta_v V^* I^* \left(1 - \frac{VI}{V^* I^*}\right) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de

$$L_3(t) := I(t) - I^* - I^* \ln\left(\frac{I(t)}{I^*}\right),$$

est donnée par

$$\begin{aligned}
 L_3'(t) &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \dot{I} \\
 &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (\beta_s SI + \beta_v VI - (\mu_i + q)I) \\
 &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (\beta_s SI + \beta_v VI - \beta_s S^* I - \beta_v V^* I) \\
 &= \beta_s \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (SI - S^* I^*) + \beta_v \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (VI - V^* I^*) \\
 &= \beta_s S^* I^* \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right) + \beta_v V^* I^* \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{VI}{V^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right)
 \end{aligned}$$

Finalement, puisque $L = L_1 + L_2 + L_3$, on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) &= -\mu_s \frac{(S-S^*)^2}{S} - \delta \frac{(S-S^*)^2}{S} + \beta_s S^* I^* \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(1 - \frac{SI}{S^* I^*}\right) \\
&+ (1-\rho)k \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (V - V^*) + \delta \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (S - S^*) \\
&+ (1-\rho)k (V^* - V) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) - \mu_v \frac{(V - V^*)^2}{V} + \beta_v V^* I^* \left(1 - \frac{VI}{V^* I^*}\right) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \\
&+ \beta_s S^* I^* \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right) + \beta_v V^* I^* \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{VI}{V^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right)
\end{aligned}$$

On simplifie maintenant

$$\begin{aligned}
L'(t) &= -\mu_s \frac{(S-S^*)^2}{S} + \delta \left(-\frac{(S-S^*)^2}{S} + \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (S - S^*)\right) \\
&+ (1-\rho)k \left(\left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (V - V^*) + (V - V^*) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right)\right) - \mu_v \frac{(V - V^*)^2}{V} \\
&+ \beta_v V^* I^* \left(\left(1 - \frac{VI}{V^* I^*}\right) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{VI}{V^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right)\right) \\
&+ \beta_s S^* I^* \left(\left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right) + \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(1 - \frac{SI}{S^* I^*}\right)\right)
\end{aligned}$$

Le développement du deuxième terme de L' donne :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \delta \left(-\frac{(S-S^*)^2}{S} + \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (S - S^*)\right) \\
&= \delta \left(- (S - S^*) \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) + (S - S^*) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right)\right) \\
&= \delta S^* \left(-\left(\frac{S}{S^*} - 1\right) \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) + \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \left(\frac{S}{S^*} - 1\right)\right) \\
&= \delta S^* \left(-\frac{S}{S^*} + 1 + 1 - \frac{S^*}{S} + \frac{S}{S^*} - 1 - \frac{V^* S}{VS^*} + \frac{V^*}{V}\right) \\
&= \delta S^* \left(1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^* S}{VS^*} + \frac{V^*}{V}\right) \\
&= ((1-\rho)kV^* + \mu_v V^* + \beta_v V^* I^*) \left(1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^* S}{VS^*} + \frac{V^*}{V}\right) \\
&= (1-\rho)kV^* \left(1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^* S}{VS^*} + \frac{V^*}{V}\right) + \mu_v V^* \left(1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^* S}{VS^*} + \frac{V^*}{V}\right) \\
&+ \beta_v V^* I^* \left(1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^* S}{VS^*} + \frac{V^*}{V}\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant A_1 par cette expression dans $L'(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
L'(t) &= -\mu_s \frac{(S - S^*)^2}{S} \\
&+ \underbrace{(1 - \rho)kV^* \left(\left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(\frac{V}{V^*} - 1\right) + \left(1 - \frac{V}{V^*}\right) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) + 1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} + \frac{V^*}{V} \right)}_{=A_2} \\
&+ \underbrace{\mu_v V^* \left(- \left(\frac{V}{V^*} - 1\right) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) + 1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} + \frac{V^*}{V} \right)}_{=A_3} \\
&+ \underbrace{\beta_v V^* I^* \left(\left(1 - \frac{VI}{V^* I^*}\right) \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{VI}{V^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right) + 1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} + \frac{V^*}{V} \right)}_{=A_4} \\
&+ \underbrace{\beta_s S^* I^* \left(\left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*}\right) + \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(1 - \frac{SI}{S^* I^*}\right) \right)}_{=A_5}
\end{aligned}$$

On développe à présent chaque terme :

$$\begin{aligned}
A_2 &= (1 - \rho)kV^* \left(\frac{V}{V^*} - 1 - \frac{S^*V}{SV^*} + \frac{S^*}{S} + 1 - \frac{V^*}{V} - \frac{V}{V^*} + 1 + 1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} + \frac{V^*}{V} \right) \\
&= (1 - \rho)kV^* \left(2 - \frac{S^*V}{SV^*} - \frac{V^*S}{VS^*} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

Comme $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{ab}$, on pose $a = \frac{S^*V}{SV^*}$ et $b = \frac{1}{a} = \frac{V^*S}{VS^*}$. Ainsi, $2 - a - b \leq 0$.

et

$$\begin{aligned}
A_3 &= \mu_v V^* \left(-\frac{V}{V^*} + 1 + 1 - \frac{V^*}{V} + 1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} + \frac{V^*}{V} \right) \\
&= \mu_v V^* \left(3 - \frac{V^*S}{VS^*} - \frac{V}{V^*} - \frac{S^*}{S} \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, on prend $a = \frac{V^*S}{VS^*}$, $b = \frac{V}{V^*}$ et $c = \frac{S^*}{S}$. Cela implique que $3 - a - b - c \leq 0$.

$$\begin{aligned}
A_4 &= \beta_v V^* I^* \left(1 - \frac{V^*}{V} - \frac{VI}{V^* I^*} + \frac{I}{I^*} + \frac{VI}{V^* I^*} - \frac{I}{I^*} - \frac{V}{V^*} + 1 + 1 - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} + \frac{V^*}{V} \right) \\
&= \beta_v V^* I^* \left(3 - \frac{V}{V^*} - \frac{S^*}{S} - \frac{V^*S}{VS^*} \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_5 &= \beta_s S^* I^* \left(\frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*} - \frac{S}{S^*} + 1 + 1 - \frac{SI}{S^* I^*} - \frac{S^*}{S} + \frac{I}{I^*} \right) \\ &= \beta_s S^* I^* \left(2 - \frac{S}{S^*} - \frac{S^*}{S} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve

$$L'(t) \leq 0$$

La fonction L est définie positive son seul minimum est le point $E^* = (S^*, V^*, I^*)$. Comme auparavant $L'(t) = 0$ implique que $S = S^*$, $V = V^*$ et $I = I^*$. Donc le plus grand ensemble invariant M est réduit à l'équilibre E^* . D'après le principe de Lasalle E^* est globalement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 > 1$.

2.7 Simulation numérique

Dans cette section, nous validons numériquement les résultats théoriques établis précédemment concernant la stabilité globale des équilibres. Les valeurs des paramètres démographiques et épidémiologiques utilisées pour ces simulations sont synthétisées dans le Tableau 2.2.

TABLE 2.2: Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations numériques.

Paramètre	Valeur	Interprétation biologique
A	10	Flux constant de recrutement
k	0.01	Taux de perte de la protection vaccinale
ρ	0.95	Probabilité de re-vaccination immédiate
δ	0.05	Taux de vaccination des susceptibles
μ_s	0.02	Taux de mortalité naturelle des susceptibles
μ_v	0.02	Taux de mortalité naturelle des vaccinés
μ_i	0.03	Taux de mortalité naturelle des infectés
q	0.2	Taux de guérison des infectés

Pour l'ensemble de ces simulations, les profils temporels des populations sont évalués à partir des conditions initiales suivantes, représentant une population où la maladie est initialement introduite :

$$S(0) = 200, \quad V(0) = 100, \quad I(0) = 50$$

Nous explorons ci-dessous les deux scénarios épidémiologiques fondamentaux dictés par la valeur du taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 .

2.7.1 Scénario 1 : Éradication de la maladie ($\mathcal{R}_0 \leq 1$)

Dans le premier cas, illustré par la Figure 2.2, nous choisissons les taux de transmission des individus susceptibles et vaccinés respectivement égaux à $\beta_s = 0.0003$ et $\beta_v = 0.0002$. Le calcul explicite du taux de reproduction de base donne un indice $\mathcal{R}_0 = 0.575 < 1$.

Comme le montre graphiquement la Figure 2.2, la densité de la population infectée $I(t)$ s'éteint rapidement et converge vers zéro. Parallèlement, les compartiments des individus sains $S(t)$ et vaccinés $V(t)$ se stabilisent vers leurs valeurs stationnaires de l'équilibre sans maladie (DFE). Cette simulation confirme numériquement le résultat de stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans maladie lorsque le seuil épidémique reste inférieur à l'unité.

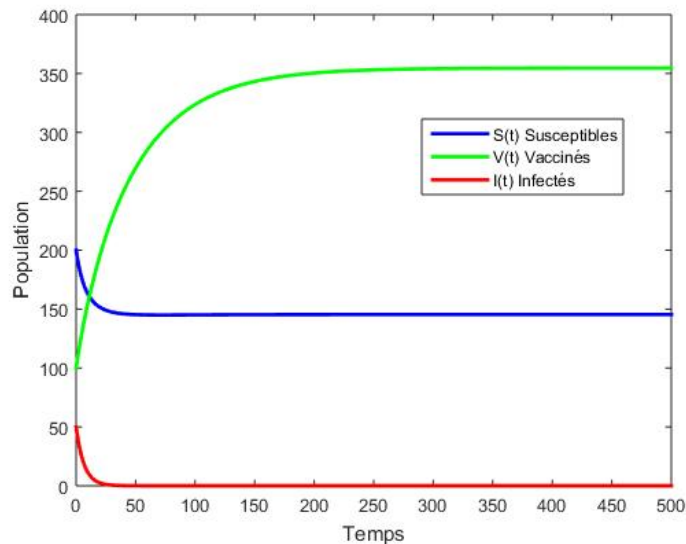


FIGURE 2.2: Évolution temporelle des compartiments $S(t)$, $V(t)$ et $I(t)$ illustrant la stabilité globale de l'équilibre sans maladie lorsque $\mathcal{R}_0 = 0.575 < 1$.

2.7.2 Scénario 2 : Persistance de la maladie ($\mathcal{R}_0 > 1$)

Dans le second cas, présenté dans la Figure 2.3, nous augmentons l'intensité des contacts infectieux en fixant $\beta_s = 0.0008$ et $\beta_v = 0.0007$. Cette configuration conduit à un taux de reproduction de base supérieur au seuil critique, avec $\mathcal{R}_0 = 1.662 > 1$.

L'observation des trajectoires temporelles montre que la maladie ne s'éteint pas. Après une phase de fluctuations initiales induite par l'introduction des infectés, la courbe rouge $I(t)$ se maintient à un niveau strictement positif. Les trois compartiments du système finissent par converger vers un état stationnaire permanent stable.

Cette persistance confirme visuellement le théorème de stabilité asymptotique globale de l'équilibre endémique positif, prouvant que la vaccination imparfaite s'avère ici insuffisante pour éradiquer la transmission en raison d'un taux de contact trop élevé.

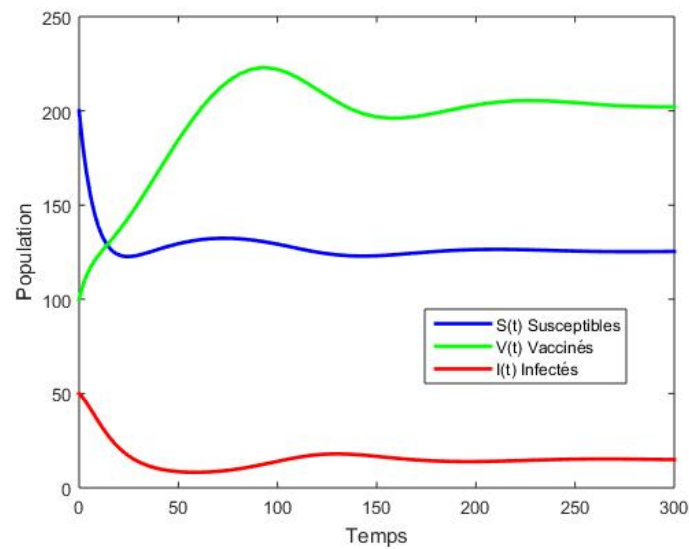


FIGURE 2.3: Évolution temporelle des compartiments $S(t)$, $V(t)$ et $I(t)$ illustrant la convergence et la stabilité globale de l'équilibre endémique lorsque $\mathcal{R}_0 = 1.662 > 1$.

Chapitre 3

Modèle de vaccination imparfaite structuré en âge

3.1 Introduction

Pour capturer l'hétérogénéité épidémiologique liée au temps, nous introduisons dans ce chapitre la structure en âge. Contrairement au modèle homogène par EDO, les densités de population dépendent désormais du temps t et de la variable d'âge a . Il convient de souligner qu'ici, l'âge ne représente pas l'âge biologique global des individus, mais plutôt la période passée (le temps de résidence) au sein de chaque compartiment spécifique : l'âge de susceptibilité pour la classe s , l'âge de vaccination (durée depuis l'injection) pour la classe v , et l'âge d'infection pour la classe i .

La dynamique de transmission de la maladie, sous l'effet d'une vaccination imparfaite, est modélisée par le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) hyperbo-

liques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial s(t,a)}{\partial a} = -(\mu_s(a) + \delta(a))s(t,a) - \beta_s(a)s(t,a)J(t), \\ \frac{\partial v(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,a)}{\partial a} = -(\mu_v(a) + k(a))v(t,a) - \beta_v(a)v(t,a)J(t), \\ \frac{\partial i(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t,a)}{\partial a} = -(\mu_i(a) + q(a))i(t,a), \\ s(t,0) = A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t,a)da, \\ v(t,0) = \int_0^\infty \delta(a)s(t,a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t,a)da, \\ i(t,0) = J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da, \\ J(t) = \int_0^\infty \theta(a)i(t,a)da. \end{array} \right. \quad t > 0, \quad a > 0, \quad (3.1)$$

Avec des conditions initiales :

$$s(0, \cdot) = \bar{s}(\cdot) \in L^1_+(\mathbb{R}^+), \quad v(0, \cdot) = \bar{v}(\cdot) \in L^1_+(\mathbb{R}^+), \quad i(0, \cdot) = \bar{i}(\cdot) \in L^1_+(\mathbb{R}^+).$$

Les variables d'état $s(t, a)$, $v(t, a)$ et $i(t, a)$ représentent respectivement les densités de populations des individus susceptibles, vaccinés et infectés au temps t et selon leur âge respectif a .

De la même manière que pour le modèle EDO, la dynamique de la classe des individus rétablis structurés par âge, notée $r(t, a)$, est omise de l'étude du système (3.1). En effet, aucune des autres équations ne dépend de la variable $r(t, a)$. Cette variable se découple donc complètement du reste du système et son évolution peut être déterminée de manière indépendante après la résolution du système réduit.

Le mécanisme de transfert entre ces compartiments ainsi que l'impact de la perte d'immunité sont illustrés par le diagramme de flux présenté dans la Figure 3.1.

L'interprétation biologique détaillée de l'ensemble des variables, des fonctions d'âge et des paramètres du modèle est synthétisée dans le Tableau 3.1.

3.2 Préliminaires

Nous supposons que :

(H₁) Tous les paramètres mentionnés dans le modèle (3.1) sont positifs. Nous suppo-

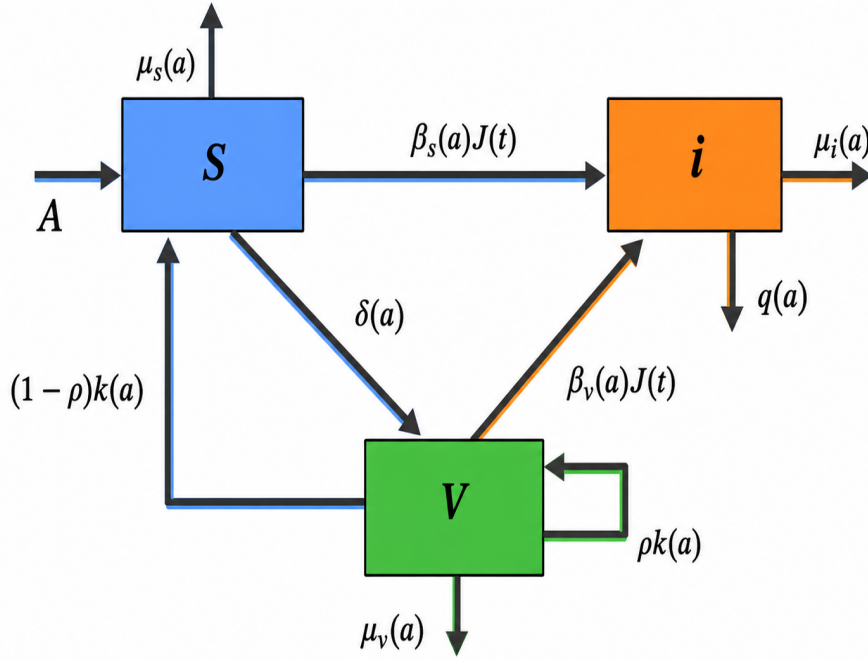


FIGURE 3.1: Diagramme du flux du système (3.1).

sons également que $\mu_s, \mu_v, \mu_i, q, \theta \in L_+^\infty(\mathbb{R}^+) \setminus \{0_{L^\infty}\}$. De plus

$$M := \min \left\{ \operatorname{ess\,inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_s(a)\}, \operatorname{ess\,inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_v(a)\}, \operatorname{ess\,inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_i(a)\} \right\} > 0.$$

(H₂) δ, k, β_s et β_v sont des fonctions positives, bornées et lipschitziennes sur \mathbb{R}^+ , avec $\beta_s, \beta_v \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

De plus, nous fixons l'espace fonctionnel associé au système (3.1)

$$X_+ := L_+^1(\mathbb{R}^+) L_+^1(\mathbb{R}^+) L_+^1(\mathbb{R}^+),$$

qui est le cône positif de

$$X := L^1(\mathbb{R}^+) L^1(\mathbb{R}^+) L^1(\mathbb{R}^+),$$

muni de la norme

$$\|(s(t, \cdot), v(t, \cdot), i(t, \cdot))\|_X = \int_0^\infty |s(t, a)| da + \int_0^\infty |v(t, a)| da + \int_0^\infty |i(t, a)| da.$$

TABLE 3.1: Interprétation biologique des variables, fonctions et paramètres du modèle EDP.

Composante	Interprétation biologique
$s(t, a)$	Densité des individus susceptibles au temps t selon leur âge de susceptibilité a .
$v(t, a)$	Densité des individus vaccinés au temps t selon leur âge de vaccination a .
$i(t, a)$	Densité des individus infectés au temps t selon leur âge d'infection a .
$J(t)$	Force totale d'infection (ou charge infectieuse globale) au sein de la population.
A	Flux constant de recrutement (nouveaux arrivants) dans la classe des susceptibles à l'âge $a = 0$.
$\mu_s(a), \mu_v(a), \mu_i(a)$	Taux de mortalité dépendants de l'âge passé dans chaque compartiment.
$\delta(a)$	Taux de vaccination dépendant de l'âge de susceptibilité.
$k(a)$	Taux de perte de la protection vaccinale dépendant de l'âge de vaccination.
ρ	Probabilité pour un individu perdant son immunité d'être immédiatement réinjecté dans le processus de re-vaccination (à l'âge de vaccination $a = 0$).
$\beta_s(a), \beta_v(a)$	Taux de transmission de la maladie dépendants respectivement de l'âge de susceptibilité et de l'âge de vaccination.
$\theta(a)$	Taux d'infectiosité spécifique d'un individu infecté en fonction de son âge d'infection.
$q(a)$	Taux de guérison (ou de retrait) des individus infectés en fonction de leur âge d'infection.

3.3 Équation intégrale de Volterra

Par la méthode des caractéristiques [40], le système d'EDP (3.1) peut être exprimé sous forme d'équation intégrale de Volterra de la manière suivante :

$$s(t, a) = \begin{cases} s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a), & t > a \geq 0, \\ \bar{s}(a-t)\frac{\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)}{\pi_s(a-t)\Gamma_s(t-a, a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Gamma_s(t, a) = \exp\left\{-\int_0^a \beta_s(\sigma)J(t+\sigma)d\sigma\right\}, \quad \pi_s(a) = \exp\left\{-\int_0^a (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma))d\sigma\right\},$$

$$v(t, a) = \begin{cases} v(t-a, 0)\pi_v(a)\Gamma_v(t-a, a), & t > a \geq 0, \\ \bar{v}(a-t)\frac{\pi_v(a)\Gamma_v(t-a, a)}{\pi_v(a-t)\Gamma_v(t-a, a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Où

$$\Gamma_v(t, a) = \exp\left\{-\int_0^a \beta_v(\sigma)J(t+\sigma)d\sigma\right\}, \quad \pi_v(a) = \exp\left\{-\int_0^a (\mu_v(\sigma) + k(\sigma))d\sigma\right\}.$$

On a aussi

$$i(t, a) = \begin{cases} i(t-a, 0)\pi_i(a), & t > a \geq 0, \\ \bar{i}(a-t)\frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$\pi_i(a) = \exp\left\{-\int_0^a (\mu_i(\sigma) + q(\sigma))d\sigma\right\}.$$

Preuve. Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial s(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial s(t, a)}{\partial a} = -(\mu_s(a) + \delta(a))s(t, a) - \beta_s(a)s(t, a)J(t), & t > 0 \quad a > 0, \\ s(t, 0) = A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t, a)da, & t > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec la condition initiale

$$s(0, \cdot) = \bar{s}(\cdot) \quad (3.6)$$

Supposons que $s(t, a)$ soit une solution du problème (3.5)–(3.6), suffisamment régulière; les courbes caractéristiques associées à l'équation (3.5) sont alors les droites définies par $a - t = c$, où c est une constante. Soient $c \in \mathbb{R}^+$ et

$$Y_c(t) := s(t, t+c) \quad t \geq t_c$$

avec

$$t_c = \max\{0, -c\}.$$

La fonction Y_c est appelée fonction de cohorte associée à l'âge c ; elle permet de suivre au cours du temps les individus qui avaient initialement l'âge c . À partir du système (3.5) on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dY_c(t)}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h, t+c+h) - s(t, t+c)}{h} \\
&= Ds(t, t+c) \\
&= -(\mu_s(t+c) + \delta(t+c) + \beta_s(t+c)J(t))s(t, t+c) \\
&= -(\mu_s(t+c) + \delta(t+c) + \beta_s(t+c)J(t))Y_c(t), \quad t \geq t_c
\end{aligned}$$

On a obtenu une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 pour résoudre facilement posons $Y_c := Y_c(t)$.quelque soit $t \geq t_c$ on a :

$$\frac{dY_c}{dt} = -(\mu_s(t+c) + \delta(t+c) + \beta_s(t+c)J(t))Y_c,$$

Ce qui implique pour $Y_c \neq 0$

$$\frac{dY_c}{Y_c} = -(\mu_s(t+c) + \delta(t+c) + \beta_s(t+c)J(t))dt,$$

En intégrant cette équation

$$\int_{Y_c(t_c)}^{Y_c(t)} \frac{dN}{N} = - \int_{t_c}^t (\mu_s(N+c) + \delta(N+c) + \beta_s(N+c)J(N))dN,$$

$$[\ln N]_{Y_c(t_c)}^{Y_c(t)} = - \int_{t_c}^t (\mu_s(N+c) + \delta(N+c) + \beta_s(N+c)J(N))dN,$$

$$\ln \frac{Y_c(t)}{Y_c(t_c)} = - \int_{t_c}^t (\mu_s(N+c) + \delta(N+c) + \beta_s(N+c)J(N))dN,$$

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{Y_c(t)}{Y_c(t_c)} = \exp\left\{- \int_{t_c}^t (\mu_s(N+c) + \delta(N+c) + \beta_s(N+c)J(N))dN\right\},$$

Finalement

$$Y_c(t) = Y_c(t_c) \exp\left\{- \int_{t_c}^t (\mu_s(N+c) + \delta(N+c) + \beta_s(N+c)J(N))dN\right\},$$

nous considérons le changement de variable $\sigma = N + c$, on a

$$Y_c(t) = Y_c(t_c) \exp\left\{-\int_{t_c+c}^{t+c} (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma - c))d\sigma\right\},$$

Si l'on pose $c = a - t$ avec $a < t$ alors $t_c = \max\{0; -c\} = -c$, et

$$Y_c(t) = Y_c(-c) \exp\left\{-\int_0^{t+c} (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma - c))d\sigma\right\}, \quad t \geq -c$$

la substitution de $Y_c(t)$ par $s(t,a)$ donne

$$\begin{aligned} s(t,a) &= s(-c,0) \exp\left\{-\int_0^{t+c} (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma - c))d\sigma\right\}, \\ &= s(t-a,0) \exp\left\{-\int_0^a (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma + t - a))d\sigma\right\}, \quad a < t \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de $s(t,0)$ dans le système (3.5), on obtient que, pour tout $a < t$, on a

$$s(t,a) = (A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(\sigma)v(t-a,\sigma)d\sigma) \exp\left\{-\int_0^a (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma + t - a))d\sigma\right\},$$

Pour simplifier, on note

$$\Gamma_s(t,a) = \exp\left\{-\int_0^a \beta_s(\sigma)J(t+\sigma)d\sigma\right\},$$

et

$$\pi_s(a) = \exp\left\{-\int_0^a (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma))d\sigma\right\},$$

et donc devient

$$s(t,a) = (A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(\sigma)v(t-a,\sigma)da) \pi_s(a) \Gamma_s(t-a,a), \quad (3.7)$$

Par contre, si l'on pose $c = a - t$ avec $a \geq t$ il suit que $t_c = \max\{0; -c\} = 0$, ce qui donne

$$Y_c(t) = Y_c(0) \exp\left\{-\int_c^{t+c} (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma - c))d\sigma\right\}, \quad t \geq 0$$

En utilisant la condition initiale, on arrive à

$$s(t, a) = \bar{s}(a-t) \exp\left\{-\int_{a-t}^a (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma+t-a))d\sigma\right\}, \quad a \geq t \geq 0$$

On en déduit que

$$s(t, a) = \bar{s}(a-t) \frac{\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)}{\pi_s(a-t)\Gamma_s(t-a, a-t)}, \quad a \geq t \geq 0 \quad (3.8)$$

Combinant les formules (3.8), (3.7) on obtient

$$s(t, a) = \begin{cases} s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a), & t > a \geq 0, \\ \bar{s}(a-t) \frac{\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)}{\pi_s(a-t)\Gamma_s(t-a, a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

En appliquant la même procédure sur les problèmes

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, a)}{\partial a} = -(\mu_v(a) + k(a))v(t, a) - \beta_v(a)v(t, a)J(t), & t > 0, \quad a > 0, \\ v(t, 0) = \int_0^\infty \delta(a)s(t, a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t, a)da, & t > 0, \\ v(0, \cdot) = \bar{v}(\cdot) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu_i(a) + q(a))i(t, a), & t > 0, \quad a > 0, \\ i(t, 0) = J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t, a) + \beta_v(a)v(t, a))da, & t > 0, \\ i(0, \cdot) = \bar{i}(\cdot) \end{cases}$$

On obtient les formules (3.3), (3.4).

3.4 Existence et unicité des solutions

Théorème 3.4.1. *Soit $x_0 = (\bar{s}(\cdot), \bar{v}(\cdot), \bar{i}(\cdot)) \in X_+$. Alors, il existe une solution unique et positive $(s(\cdot), v(\cdot), i(\cdot)) \in [C([0, T], L^1(\mathbb{R}^+))]^3$ pour le système (3.1).*

Preuve. Afin de surmonter la non-linéarité quadratique globale du terme de transmission et d'assurer le caractère globalement lipschitzien nécessaire à l'application du principe de contraction de Banach, nous introduisons la fonction de troncature

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq C_F, \\ C_F, & \text{si } x > C_F \end{cases} \quad (3.9)$$

où $C_F > 0$ est une constante de saturation fixée arbitrairement grande. La fonction F est visiblement de classe 1-Lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Pour tout $T > 0$, nous définissons l'espace de Banach \tilde{X} muni de sa norme de produit L^1 par :

$$\tilde{X} := [C([0, T], L^1(\mathbb{R}^+))]^3, \quad \|(s, v, i)\|_{\tilde{X}} = \|s\|_1 + \|v\|_1 + \|i\|_1$$

Considérons alors le problème auxiliaire tronqué suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial s(t, a)}{\partial a} = -(\mu_s(a) + \delta(a))s(t, a) - \beta_s(a)s(t, a)F(J(t)), \\ \frac{\partial v(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, a)}{\partial a} = -(\mu_v(a) + k(a))v(t, a) - \beta_v(a)v(t, a)F(J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu_i(a) + q(a))i(t, a), \\ s(t, 0) = A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t, a) da, \\ v(t, 0) = \int_0^\infty \delta(a)s(t, a) da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t, a) da, \\ i(t, 0) = F(J(t)) \int_0^\infty (\beta_s(a)F(s(t, a)) + \beta_v(a)F(v(t, a))) da, \\ J(t) = \int_0^\infty \theta(a)i(t, a) da. \end{array} \right.$$

Par intégration le long des lignes de caractéristiques, le système tronqué (3.4) se reformule sous la forme d'un problème de point fixe $(s, v, i)^T = Q_F(s, v, i)$. Nous construisons la suite des approximations successives de Picard définie par

$$(s^{n+1}, v^{n+1}, i^{n+1})^T = Q_F(s^n, v^n, i^n)$$

.

Pour prouver la convergence, estimons la différence entre deux itérations consécu-

tives dans \tilde{X} :

$$\begin{aligned} \|(s^{n+2} - s^{n+1}, v^{n+2} - v^{n+1}, i^{n+2} - i^{n+1})\|_{\tilde{X}} &= \int_0^\infty |s^{n+2} - s^{n+1}| da + \int_0^\infty |v^{n+2} - v^{n+1}| da \\ &+ \int_0^\infty |i^{n+2} - i^{n+1}| da \end{aligned}$$

En s'inspirant des techniques de majoration par caractéristiques détaillées dans la thèse [22], l'estimation globale de la différence se résume directement à

$$\|(s^{n+2} - s^{n+1}, v^{n+2} - v^{n+1}, i^{n+2} - i^{n+1})\|_{\tilde{X}} \leq T \cdot C^* \|(s^{n+1} - s^n, v^{n+1} - v^n, i^{n+1} - i^n)\|_{\tilde{X}}$$

En choisissant $T > 0$ suffisamment petit tel que

$$q = T \cdot C^* < 1,$$

l'opérateur Q_F est une contraction stricte sur l'espace de Banach \tilde{X} . En vertu du **Théorème du point fixe de Banach**, la suite de Picard converge vers une solution unique **locale** du système tronqué (3.4). Par extension successive sur les intervalles $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$...etc, cette solution unique est globale sur \mathbb{R}^+ . Enfin, on choisit la constante de troncature C_F appropriée pour avoir $F(J) = J$, $F(s) = s$ et $F(v) = v$, ce qui prouve que la solution du problème tronqué (3.4) est l'unique solution exacte du système d'EDP structuré d'origine (3.1).

3.5 Semi-flot

Considérons le semi-flot continu $\Phi(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$ défini par $\Phi_t(x_0) = (s(t, \cdot), v(t, \cdot), i(t, \cdot))$ où $t \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \in X_+$, et (s, v, i) est une solution du système (3.1) Définissons l'ensemble

$$\mathbb{E}_M = \left\{ (s, v, i) \in X_+ : \int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da \leq \frac{A}{M} \right\}.$$

Nous énonçons à présent quelques propriétés de l'ensemble \mathbb{E}_M ainsi que du semi-flot $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dans la proposition suivante

Proposition 3.5.1. *Soit Φ_t le semi-flot associé au système, alors on a les propriétés suivantes*

- (i) $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un point dissipatif. De plus, \mathbb{E}_M attire tous les points dans X_+ .
- (ii) $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathbb{E}_M$ pour tout $t \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{E}_M$.

Preuve. Nous démontrons successivement les affirmations suivantes

propriété (i) On rappelle que Φ_t est dit dissipatif s'il existe un sous-ensemble $B \subset X_+$ qui attire toutes les trajectoires de X_+ . Nous cherchons donc un tel ensemble B et nous montrerons qu'il s'identifie à l'ensemble \mathbb{E}_M . Soit $\Phi_t(x_0) = (s(t, \cdot), v(t, \cdot), i(t, \cdot))$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $x_0 \in X_+$, où (s, v, i) est solution du système (3.1),

Ainsi,

$$\|(s(t, \cdot), v(t, \cdot), i(t, \cdot))\|_X = \int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da.$$

La méthode employée consiste à dériver l'expression précédente par rapport à t , mais, afin d'éviter de dériver directement la norme

On note

$$N(t) := \int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da.$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t, a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) da.$$

Il reste à exprimer chaque terme explicitement.

1-Estimation de $\frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da$: En utilisant (3.2), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s(t, a) da &= \int_0^t s(t, a) da + \int_t^\infty s(t, a) da. \\ &= \int_0^t s(t-a, 0) \pi_s(a) \Gamma_s(t-a, a) da + \int_t^\infty \bar{s}(a-t) \frac{\pi_s(a) \Gamma_s(t-a, a)}{\pi_s(a-t) \Gamma_s(t-a, a-t)} da. \end{aligned}$$

Considérons le changement de variable $\tilde{a} = t - a$ dans la première intégrale et $\tilde{a} = a - t$ pour la deuxième, on obtient

$$\int_0^\infty s(t, a) da = \int_0^t s(\tilde{a}, 0) \pi_s(t-\tilde{a}) \Gamma_s(\tilde{a}, t-\tilde{a}) d\tilde{a} + \int_0^\infty \bar{s}(\tilde{a}) \frac{\pi_s(t+\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, t+\tilde{a})}{\pi_s(\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, \tilde{a})} d\tilde{a}.$$

En dérivant par rapport à t .

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da = \frac{d}{dt} \int_0^t s(\tilde{a}, 0) \pi_s(t-\tilde{a}) \Gamma_s(\tilde{a}, t-\tilde{a}) d\tilde{a} + \frac{d}{dt} \int_0^\infty \bar{s}(\tilde{a}) \frac{\pi_s(t+\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, t+\tilde{a})}{\pi_s(\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, \tilde{a})} d\tilde{a}.$$

Ce qui implique,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da = s(t, 0) + \int_0^t s(\tilde{a}, 0) \frac{d}{dt} \pi_s(t - \tilde{a}) \Gamma_s(\tilde{a}, t - \tilde{a}) d\tilde{a} + \int_0^\infty \bar{s}(\tilde{a}) \frac{d}{dt} \frac{\pi_s(t + \tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, t + \tilde{a})}{\pi_s(\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, \tilde{a})} d\tilde{a}. \quad (3.10)$$

Après un simple calcul, on obtient

$$\frac{d}{dt} \pi_s(t - \tilde{a}) \Gamma_s(\tilde{a}, t - \tilde{a}) = -(\mu_s(t - \tilde{a}) + \delta(t - \tilde{a}) \beta_s(t - \tilde{a}) J(t)) \pi_s(t - \tilde{a}) \Gamma_s(\tilde{a}, t - \tilde{a}).$$

Et on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi_s(t + \tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, t + \tilde{a})}{\pi_s(\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, \tilde{a})} = -(\mu_s(\tilde{a} - t) + \delta(\tilde{a} - t) \beta_s(\tilde{a} - t) J(t)) \frac{\pi_s(t + \tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, t + \tilde{a})}{\pi_s(\tilde{a}) \Gamma_s(-\tilde{a}, \tilde{a})}.$$

Après substitution de ces deux quantités dans l'équation (3.10) et en appliquant les changements de variables $a = t - \tilde{a}$ au deuxième terme et $a = t + \tilde{a}$ au troisième terme, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da &= s(t, 0) - \int_0^t s(t - a, 0) (\mu_s(a) + \delta(a) + \beta_s(a) J(t)) \pi_s(a) \Gamma_s(t, a) da \\ &\quad - \int_t^\infty \bar{s}(a - t) (\mu_s(a) + \delta(a) + \beta_s(a) J(t)) \frac{\pi_s(a) \Gamma_s(t - a, a)}{\pi_s(a - t) \Gamma_s(t - a, a - t)} da. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da = - \int_0^\infty (\mu_s(a) + \delta(a)) s(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da + s(t, 0). \quad (3.11)$$

À partir de cette dernière expression et des hypothèses mentionnées ci-dessus (on a $M := \min \left\{ \text{ess inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_s(a)\}, \text{ess inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_v(a)\}, \text{ess inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_i(a)\} \right\} > 0$) conduit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da &\leq - \text{ess inf}_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_s(a)\} \int_0^\infty s(t, a) da - \int_0^\infty \delta(a) s(t, a) da \\ &\quad - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da + A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a) v(t, a) da \\ &\leq -M \int_0^\infty s(t, a) da - \int_0^\infty \delta(a) s(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da \\ &\quad + A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a) v(t, a) da \end{aligned}$$

2-Estimation de $\frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t, a) da$: Selon le même procédé que pour la première esti-

mation et en utilisant (3.3) il ressort que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t, a) da &= - \int_0^\infty (\mu_v(a) + k(a) - \beta_v(a)J(t))v(t, a) da + v(t, 0) \\
 &= - \int_0^\infty (\mu_v(a) + k(a) - \beta_v(a)J(t))v(t, a) da + \int_0^\infty \delta(a)s(t, a) da \\
 &\quad + \rho \int_0^\infty k(a)v(t, a) da \\
 &\leq -ess \inf_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_v(a)\} \int_0^\infty v(t, a) da - \int_0^\infty \beta_v(a)J(t)v(t, a) da \\
 &\quad - (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t, a) da + \int_0^\infty \delta(a)s(t, a) da \\
 &\leq -M \int_0^\infty v(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_v(a)v(t, a) da - (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t, a) da \\
 &\quad + \int_0^\infty \delta(a)s(t, a) da
 \end{aligned}$$

3-Estimation de $\frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) da$: De manière parallèle et en recourant à (3.4) on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) da &= - \int_0^\infty (\mu_i(a) + q(a))i(t, a) da + i(t, 0) \\
 &\leq -ess \inf_{a \in \mathbb{R}_+} \{\mu_i(a)\} \int_0^\infty i(t, a) da - \int_0^\infty q(a)i(t, a) da + J(t) \int_0^\infty \beta_s(a)s(t, a) da \\
 &\quad + J(t) \int_0^\infty \beta_v(a)v(t, a) da \\
 &\leq -M \int_0^\infty i(t, a) da - \int_0^\infty q(a)i(t, a) da + J(t) \int_0^\infty \beta_s(a)s(t, a) da \\
 &\quad + J(t) \int_0^\infty \beta_v(a)v(t, a) da
 \end{aligned}$$

En regroupant les estimations antérieures, il en résulte l'inégalité suivante.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da &+ \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t, a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) da \\
 &\leq A - M \left[\int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da \right] - \int_0^\infty q(a)i(t, a) da \\
 &\leq A - M \left[\int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da \right]
 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d}{dt} N(t) \leq A - MN(t), \quad t \geq 0.$$

Pour $t \geq 0$, on peut réécrire de la manière suivante

$$\frac{d}{dt}N(t) + MN(t) \leq A$$

En multipliant l'inégalité précédente par le facteur intégrant e^{Mt} en intégrant sur $(0, t)$, après un simple calcul, on obtient

$$N(t) \leq \frac{A}{M} + e^{-Mt}\left(N(0) - \frac{A}{M}\right), \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Remarquons que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{A}{M}$$

En conclusion, il existe un ensemble $B = \mathbb{E}_M$ qui attire tous les points de X_+ .

propriété (ii) : Pour démontrer que l'ensemble \mathbb{E}_M est positivement invariant nous appliquons ici les mêmes raisonnements que ceux employés précédemment pour **propriété (i)** et soit $N(0) \in \mathbb{E}_M$ alors

$$N(0) \leq \frac{A}{M}$$

D'après (3.12) on trouve

$$N(t) \leq \frac{A}{M}, \quad t \geq 0.$$

ce qui implique que $N(t) \in \mathbb{E}_M$ pour tout $t \geq 0$.

3.6 Attracteur global compact

Nous abordons à présent l'étude de la compacité asymptotique du système. La proposition énoncée ci-dessous jouera un rôle essentiel dans la démonstration de l'existence d'un attracteur compact global.

Considérons les fonctions suivantes

$$\bar{V}_k(t) = \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma,$$

$$\bar{S}_\delta(t) = \int_0^\infty \delta(\sigma)s(t, \sigma)d\sigma,$$

$$\bar{I}_\beta(t) = \int_0^\infty \beta(\sigma)s(t, \sigma)d\sigma.$$

Proposition 3.6.1. *Les fonctions \bar{V}_k , \bar{S}_δ et \bar{I}_β sont Lipschitzienne sur \mathbb{R}^+ .*

Preuve. Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \bar{V}_k(t+h) - \bar{V}_k(t) &= \int_0^\infty k(\sigma)v(t+h, \sigma)d\sigma - \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma, \\ &= \int_0^h k(\sigma)v(t+h, \sigma)d\sigma + \int_h^\infty k(\sigma)v(t+h, \sigma)d\sigma - \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma \\ &= \int_0^h k(\sigma)v(t+h-\sigma, 0)\Gamma_v(t+h-\sigma, \sigma)\pi_v(\sigma)d\sigma + \int_h^\infty k(\sigma)v(t+h, \sigma)d\sigma \\ &\quad - \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

$$\text{On a } v(t, 0) = \int_0^\infty \delta(\sigma)s(t, \sigma)d\sigma + \rho \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma,$$

$$\text{puisque } \int_0^\infty \delta(\sigma)s(t, \sigma)d\sigma \leq \frac{\|\delta\|_\infty A}{M} \quad \text{et} \quad \rho \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma \leq \rho \frac{\|k\|_\infty A}{M}$$

et $\Gamma_v(t, a)\pi_v(a) \leq 1$ on obtient

$$\begin{aligned} |\bar{V}_k(t+h) - \bar{V}_k(t)| &\leq \|k\|_\infty h (\|\delta\|_\infty + \rho \|k\|_\infty) \frac{A}{M} + \int_0^\infty k(\sigma+h)v(t+h, \sigma+h)d\sigma \\ &\quad - \int_0^\infty k(\sigma)v(t, \sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Déterminons la quantité $v(t+h, \sigma+h)$:

Si $t > \sigma$, en utilisant (3.3) on obtient

$$\begin{aligned}
v(t+h, \sigma+h) &= v(t+h-(\sigma+h), 0) \pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t+h-(\sigma+h), \sigma+h) \\
&= v(t-\sigma, 0) \pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h) \\
&= \frac{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)}{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)} v(t-\sigma, 0) \pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h) \\
&= v(t, \sigma) \frac{\pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h)}{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)}.
\end{aligned}$$

Si $t < \sigma$, selon (3.3)

$$\begin{aligned}
v(t+h, \sigma+h) &= \bar{v}(\sigma+h-(t+h)) \frac{\pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t+h-(\sigma+h), \sigma+h)}{\pi_v(\sigma+h-(t+h)) \Gamma_v(t+h-(\sigma+h), \sigma+h-(t+h))} \\
&= \bar{v}(\sigma-t) \frac{\pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h)}{\pi_v(\sigma-t) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma-t)} \\
&= \frac{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)}{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)} \bar{v}(\sigma-t) \frac{\pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h)}{\pi_v(\sigma-t) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma-t)} \\
&= v(t, \sigma) \frac{\pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h)}{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)}.
\end{aligned}$$

Dans les deux situations, on aboutit au résultat suivant

$$v(t+h, \sigma+h) = \frac{\pi_v(\sigma+h) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h)}{\pi_v(\sigma) \Gamma_v(t-\sigma, \sigma)} v(t, \sigma).$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
 |\bar{V}_k(t+h) - \bar{V}_k(t)| &\leq \|k\|_\infty h(\|\delta\|_\infty + \rho \|k\|_\infty) \frac{A}{M} + \int_0^\infty k(\sigma+h) \frac{\pi_v(\sigma+h)\Gamma_v(t-\sigma, \sigma+h)}{\pi_v(\sigma)\Gamma_v(t-\sigma, \sigma)} v(t, \sigma) d\sigma \\
 &\quad - \int_0^\infty k(\sigma) v(t, \sigma) d\sigma \\
 &\leq \|k\|_\infty h(\|\delta\|_\infty + \rho \|k\|_\infty) \frac{A}{M} + \int_0^\infty |k(\sigma+h) e^{-\int_\sigma^{\sigma+h} (\mu_v(\xi) + \delta(\xi) + \beta_v(\xi)) J(t-\sigma+\xi) d\xi} \\
 &\quad - k(\sigma)| v(t, \sigma) d\sigma, \\
 &\leq \|k\|_\infty h(\|\delta\|_\infty + \rho \|k\|_\infty) \frac{A}{M} + \int_0^\infty |k(\sigma+h) - k(\sigma)| v(t, \sigma) d\sigma \\
 &\quad + \int_0^\infty k(\sigma+h) |e^{-\int_\sigma^{\sigma+h} (\mu_v(\xi) + \delta(\xi) + \beta_v(\xi)) J(t-\sigma+\xi) d\xi} - 1| v(t, \sigma) d\sigma, \\
 &\leq \|k\|_\infty h(\|\delta\|_\infty + \rho \|k\|_\infty) \frac{A}{M} + \int_0^\infty |k(\sigma+h) - k(\sigma)| v(t, \sigma) d\sigma \\
 &\quad + \int_0^\infty k(\sigma+h) (1 - e^{-h(\|\mu_v\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_v\|_\infty \|\theta\| A/M)}) v(t, \sigma) d\sigma,
 \end{aligned}$$

Puisque k est L-Lipschitzienne et $e^{-h(\|\mu_v\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_v\|_\infty \|\theta\| A/M)} \geq 1 - h(\|\mu_v\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_v\|_\infty \|\theta\| A/M)$. Alors

$$|\bar{V}_k(t+h) - \bar{V}_k(t)| \leq Dh,$$

où $D = [\|k\|_\infty(\|\delta\|_\infty + \rho \|k\|_\infty) + \|k\|_\infty(\|\mu_v\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_v\|_\infty \|\theta\| A/M) + L]A/M$.

Par un raisonnement analogue, on établit que les fonctions $\bar{S}_\delta(t)$ et $\bar{I}_\beta(t)$ sont elles aussi lipschitziennes.

Théorème 3.6.1. *Le semi-flot $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ engendré par le système (3.1) est asymptotiquement smooth (asymptotiquement régulier). De plus, $\Phi_t(x_0)$ a un attracteur compact B restreint à X_+ . De plus, B attire tous les ensembles bornés de X_+ .*

Preuve. La première étape consiste à démontrer que le semi-flot engendré par (3.1) est asymptotiquement régulier. Nous divisons le semi-flot $\Phi_t(x_0)$ en deux parties de la manière suivante : $\Phi_t(x_0) = \hat{\Phi}_t(x_0) + \tilde{\Phi}_t(x_0)$ avec

$$\hat{\Phi}_t(x_0) := (x(t, \cdot), y(t, \cdot), z(t, \cdot)) \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_t(y_0) := (\tilde{x}(t, \cdot), \tilde{y}(t, \cdot), \tilde{z}(t, \cdot)),$$

où

$$x(t,a) := \begin{cases} 0, & t > a \geq 0; \\ s(t,a), & a \geq t \geq 0 \end{cases} \quad y(t,a) := \begin{cases} 0, & t > a \geq 0 \\ v(t,a), & a \geq t \geq 0 \end{cases},$$

$$z(t,a) := \begin{cases} 0, & t > a \geq 0; \\ i(t,a), & a \geq t \geq 0 \end{cases},$$

et

$$\tilde{x}(t,a) := \begin{cases} s(t,a), & t > a \geq 0; \\ 0, & a \geq t \geq 0 \end{cases} \quad \tilde{y}(t,a) := \begin{cases} v(t,a), & t > a \geq 0 \\ 0, & a \geq t \geq 0 \end{cases},$$

$$\tilde{z}(t,a) := \begin{cases} i(t,a), & t > a \geq 0, \\ 0, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

Pour démontrer que le semi-flot $\Phi_t(x_0)$ est asymptotiquement régulier tous d'abord il faut vérifier que il existe une fonction continue $U : \mathbb{R}^+ \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $U(t, \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ et $\|\widehat{\Phi}_t(x_0)\|_X \leq U(t, \varepsilon)$ si $\|x_0\|_X \leq \varepsilon$ (voir la propriété (i) du théorème(1.3.2)).

Remplaçons les formules (3.2), (3.3) et (3.4) dans les expressions de x,y et z

$$x(t,a) = \begin{cases} 0 & t > a \geq 0, \\ \bar{s}(a-t) \frac{\pi_s(a) \Gamma_s(t-a,a)}{\pi_s(a-t) \Gamma_s(t-a,a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

$$y(t,a) = \begin{cases} 0 & t > a \geq 0, \\ \bar{v}(a-t) \frac{\pi_v(a) \Gamma_v(t-a,a)}{\pi_v(a-t) \Gamma_v(t-a,a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

$$z(t,a) = \begin{cases} 0 & t > a \geq 0, \\ \bar{i}(a-t) \frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a-t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

Calculons $\|\widehat{\Phi}_t(x_0)\|_X$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\widehat{\Phi}_t(x_0)\|_X &= \int_0^\infty x(t,a)da + \int_0^\infty y(t,a)da + \int_0^\infty z(t,a)da, \\ &= \int_t^\infty \bar{s}(a-t) \frac{\pi_s(a)\Gamma_s(t-a,a)}{\pi_s(a-t)\Gamma_s(t-a,a-t)} da + \int_t^\infty \bar{v}(a-t) \frac{\pi_v(a)\Gamma_v(t-a,a)}{\pi_v(a-t)\Gamma_v(t-a,a-t)} da,\end{aligned}$$

nous considérons le changement de variable $\eta = a - t$, on a

$$\begin{aligned}\|\widehat{\Phi}_t(x_0)\|_X &= \int_0^\infty \bar{s}(\eta) \frac{\pi_s(t+\eta)\Gamma_s(-\eta,t+\eta)}{\pi_s(\eta)\Gamma_s(-\eta,\eta)} d\eta + \int_0^\infty \bar{v}(\eta) \frac{\pi_v(t+\eta)\Gamma_v(-\eta,t+\eta)}{\pi_v(\eta)\Gamma_v(-\eta,\eta)} d\eta \\ &\quad + \int_0^\infty \bar{i}(\eta) \frac{\pi_i(t+\eta)}{\pi_i(\eta)} d\eta, \\ &= \int_0^\infty \bar{s}(\eta) \exp\left\{-\int_\eta^{t+\eta} (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma) + \beta_s(\sigma)J(\sigma-\eta)) d\sigma\right\} d\eta \\ &\quad + \int_0^\infty \bar{v}(\eta) \exp\left\{-\int_\eta^{t+\eta} (\mu_v(\sigma) + k(\sigma) + \beta_v(\sigma)J(\sigma-\eta)) d\sigma\right\} d\eta \\ &\quad + \int_0^\infty \bar{i}(\eta) \exp\left\{-\int_\eta^{t+\eta} (\mu_i(\sigma) + q(\sigma)) d\sigma\right\} d\eta \\ &\leq e^{-Mt} \left(\int_0^\infty \bar{s}(\eta) d\eta + \int_0^\infty \bar{v}(\eta) d\eta + \int_0^\infty \bar{i}(\eta) d\eta \right) \\ &= e^{-Mt} \|x_0\|_X \\ &\leq \varepsilon e^{-Mt} \doteq U(t, \varepsilon),\end{aligned}$$

Alors

$$\|\widehat{\Phi}_t(x_0)\|_X \leq U(t, \varepsilon) \quad \text{avec} \quad U(t, \varepsilon) = \varepsilon e^{-Mt},$$

on conclut que $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, \varepsilon) = 0$.

Par suite il reste vérifie que pour $t \geq 0$, $\tilde{\Phi}_t(x_0)$ est complètement continue (la propriété (ii) du théorème(1.3.2))

$$\tilde{x}(t, a) := \begin{cases} s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a), & t > a \geq 0 \\ 0, & a \geq t \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{y}(t, a) := \begin{cases} v(t-a, 0)\pi_v(a)\Gamma_v(t-a, a), & t > a \geq 0 \\ 0, & a \geq t \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{z}(t, a) := \begin{cases} i(t-a, 0)\pi_i(a), & t > a \geq 0, \\ 0, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

Pour $h \in (0, t)$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{x}(t, a+h) - \tilde{x}(t, a)| da &= \int_0^t |s(t, a+h) - s(t, a)| da, \\ &= \int_0^{t-h} |s(t-a-h, 0)\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) \\ &\quad - s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t, a)| da + \int_{t-h}^t |s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t, a)| da. \end{aligned}$$

quand $h \rightarrow 0$ on a le dernier terme converge vers zéro.

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{x}(t, a+h) - \tilde{x}(t, a)| da &= \int_0^t |s(t, a+h) - s(t, a)| da, \\ &= \int_0^{t-h} |s(t-a-h, 0)\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) \\ &\quad - s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t, a)| da \end{aligned}$$

Recherchons une estimation de cette dernière. Pour cela, posons

$$\begin{aligned}
 I_h &= \int_0^{t-h} |s(t-a-h, 0)\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) - s(t-a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da \\
 &= \int_0^{t-h} |(A + (1-\rho)\bar{v}_k(t-a-h))\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) \\
 &\quad - (A + (1-\rho)\bar{v}_k(t-a))\pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da, \\
 &\leq \int_0^{t-h} A |\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da \\
 &\quad + \int_0^{t-h} (1-\rho) |\bar{v}_k(t-a-h) - \bar{v}_k(t-a)| \pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) da \\
 &\quad + \int_0^{t-h} (1-\rho)\bar{v}_k(t-a) |\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da, \\
 &\leq \int_0^{t-h} (A + (1-\rho)\bar{v}_k(t-a)) |\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da \\
 &\quad + \int_0^{t-h} (1-\rho) |\bar{v}_k(t-a-h) - \bar{v}_k(t-a)| \pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) da.
 \end{aligned}$$

Comme $\bar{v}_k(t) \leq \|k\|_\infty A/M$ et $\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) \leq e^{-Ma}$ pour tout $t \geq 0$ et $a \geq 0$ donc

$$\begin{aligned}
 I_h &\leq (A + (1-\rho)\|k\|_\infty A/M) \int_0^{t-h} |\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da \\
 &\quad + (1-\rho) \int_0^{t-h} |\bar{v}_k(t-a-h) - \bar{v}_k(t-a)| e^{-Ma} da.
 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'estimer chaque terme.

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-h} |\pi_s(a+h)\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \pi_s(a)\Gamma_s(t-a, a)| da &\leq \int_0^{t-h} |\pi_s(a+h) - \pi_s(a)| \\
&\quad \Gamma_s(t-a-h, a+h) da \\
&+ \int_0^{t-h} \pi_s(a) |\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \Gamma_s(t-a, a)| da, \\
&\leq \int_0^{t-h} |\pi_s(a+h) - \pi_s(a)| da \\
&+ \int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \Gamma_s(t-a, a)| da.
\end{aligned}$$

Il reste enfin à démontrer que, lorsque h tend vers zéro, les deux derniers termes convergent effectivement vers zéro.

La fonction π_s étant décroissante, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-h} |\pi_s(a+h) - \pi_s(a)| da &= \int_0^{t-h} (\pi_s(a) - \pi_s(a+h)) da, \\
&= \int_0^{t-h} \pi_s(a) da - \int_h^t \pi_s(a) da \\
&= \int_0^{t-h} \pi_s(a) da - \int_h^t \pi_s(a) da + \int_0^h \pi_s(a) da - \int_0^h \pi_s(a) da \\
&= \int_0^h \pi_s(a) da - \int_{t-h}^t \pi_s(a) da, \\
&\leq \int_0^h \pi_s(a) da \leq h.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \Gamma_s(t-a, a)| da &= \int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \Gamma_s(t-a, a) + \Gamma_s(t-a, a+h) \\
 &- \Gamma_s(t-a, a+h)| da \\
 &\leq \int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a, a+h) - \Gamma_s(t-a, a)| da \\
 &+ \int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \Gamma_s(t-a, a+h)| da
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne le premier terme, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a, a+h) - \Gamma_s(t-a, a)| da &= \int_0^{t-h} (\Gamma_s(t-a, a) - \Gamma_s(t-a, a+h)) da \\
 &= \int_0^{t-h} \Gamma_s(t-a, a) da - \int_0^{t-h} \mathcal{Q}(t-a, a+h) da \\
 &= \int_0^{t-h} \Gamma_s(t-a, a) da - \int_h^t \Gamma_s(t-a, a) da \\
 &= \int_0^{t-h} \Gamma_s(t-a, a) da - \int_h^t \Gamma_s(t-a, a) da + \int_0^h \Gamma_s(t-a, a) da \\
 &- \int_0^h \Gamma_s(t-a, a) da \\
 &= \int_0^h \Gamma_s(t-a, a) da - \int_{t-h}^t \Gamma_s(t-a, a) da \\
 &\leq \int_0^h \Gamma_s(t-a, a) da \leq h
 \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-h} |\Gamma_s(t-a-h, a+h) - \Gamma_s(t-a, a+h)| da &= \int_0^{t-h} \left| e^{-\int_0^{a+h} \beta_s(z) J(t-a-h+z) dz} \right. \\
&\quad \left. - e^{-\int_0^{a+h} \beta_s(z) J(t-a+z) dz} \right| da \\
&= \int_0^{t-h} \left| e^{-\int_{t-a-h}^t \beta_s(m-t+a+h) J(m) dm} \right. \\
&\quad \left. - e^{-\int_{t-a}^{t+h} \beta_s(m-t+a) J(m) dm} \right| da
\end{aligned}$$

Ce terme s'annule lorsque $h \rightarrow 0$, étant donné que β_s est Lipschitzienne (voir Préliminaires).

Le premier terme de I_h vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
(A + (1-\rho) \|k\|_\infty A/M) \int_0^{t-h} |\pi_s(a+h) \Gamma_s(t-a-h, a+h) - \pi_s(a) \Gamma_s(t-a, a)| da \\
\leq 2h(A + (1-\rho) \|k\|_\infty A/M). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Estimons le deuxième terme de I_h

$$\begin{aligned}
(1-\rho) \int_0^{t-h} |\bar{v}_k(t-a-h) - \bar{v}_k(t-a)| e^{-Ma} da &\leq (1-\rho) \frac{Dh}{M} (1 - e^{-M(t-h)}), \\
&\leq (1-\rho) \frac{Dh}{M}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Finalement, d'après (3.13) et (3.14),

$$\int_0^\infty |\tilde{x}(t, a+h) - \tilde{x}(t, a)| da \leq \left(2(A + (1-\rho) \|k\|_\infty A/M) + (1-\rho) \frac{D}{M} \right) h.$$

De manière analogue, on établit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^\infty |\tilde{y}(t, a+h) - \tilde{y}(t, a)| da \leq Ch,$$

et

$$\int_0^\infty |\tilde{z}(t, a+h) - \tilde{z}(t, a)| da \leq Ch.$$

3.7 Trajectoires totales

Proposition 3.7.1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, le système définissant les trajectoires totales du modèle (3.1) est le suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t, a) = s(t - a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t - a, a), \\ \Gamma_s(t, a) = \exp \left\{ - \int_0^a \beta_s(\sigma)J(t + \sigma)d\sigma \right\}, \\ v(t, a) = v(t - a, 0)\pi_v(a)\Gamma_v(t - a, a), \\ \Gamma_v(t, a) = \exp \left\{ - \int_0^a \beta_v(\sigma)J(t + \sigma)d\sigma \right\}, \\ i(t, a) = i(t - a, 0)\pi_i(a), \\ J(t) = \int_0^\infty \theta(a)i(t, a)da, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

où $s(t, 0)$, $v(t, 0)$ et $i(t, 0)$ sont définies dans (3.1).

Preuve. Soit ϕ une trajectoire totale, c'est-à-dire une fonction satisfaisant $\phi(t + r) = \Phi(t, \phi(r))$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 0$. Fixons à présent un $r \in \mathbb{R}$ choisi de manière arbitraire.

Nous introduisons à présent la notation suivante.

$$\Gamma_s^r(t, a) = \Gamma_s(t + r, a); \quad J_r(t) = J(t + r);$$

$$s_r(t, a) = s(t + r, a); \quad v_r(t, a) = v(t + r, a); \quad i_r(t, a) = i(t + r, a)$$

Par conséquent, les conditions initiales

$$s_r(0, \cdot) = s(r, \cdot) = \bar{s}_r(\cdot), \quad v_r(0, \cdot) = v(r, \cdot) = \bar{v}_r(\cdot), \quad i_r(0, \cdot) = i(r, \cdot) = \bar{i}_r(\cdot)$$

Donc par la définition du semi-flot on a

$$\phi(r + t) = (s_r(t, \cdot), v_r(t, \cdot), i_r(t, \cdot)) = \Phi(t, \phi(r)) = \Phi(t, (s(r, \cdot), v(r, \cdot), i(r, \cdot)))$$

D'après les équations (3.2), (3.3) et (3.4)

$$s_r(t, a) = s(t + r, a) = \begin{cases} s(t + r - a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t + r - a, a), & t > a \geq 0, \\ s(r, a - t)\frac{\pi_s(a)\Gamma_s(t + r - a, a)}{\pi_s(a - t)\Gamma_s(t + r - a, a - t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

$$v_r(t, a) = v(t + r, a) = \begin{cases} v(t + r - a, 0)\pi_v(a)\Gamma_v(t + r - a, a), & t > a \geq 0, \\ v(r, a - t)\frac{\pi_v(a)\Gamma_v(t + r - a, a)}{\pi_v(a - t)\Gamma_v(t + r - a, a - t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

$$i_r(t, a) = i(t + r, a) = \begin{cases} i(t + r - a, 0)\pi_i(a), & t > a \geq 0, \\ i(r, a - t)\frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a - t)}, & a \geq t \geq 0, \end{cases}$$

Considérons le changement de variable $w = t + r$ ce qui implique que $t = w - r$ Pour $w \geq r$ on obtient

$$s(w, a) = \begin{cases} s(w - a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(w - a, a), & w - r > a, \\ s(r, a - w + r)\frac{\pi_s(a)\Gamma_s(w - a, a)}{\pi_s(a - w + r)\Gamma_s(w - a, a - w + r)}, & a \geq w - r, \end{cases}$$

$$v(w, a) = \begin{cases} v(w - a, 0)\pi_v(a), & w - r > a, \\ v(r, a - w + r)\frac{\pi_v(a)\Gamma_v(w - a, a)}{\pi_v(a - w + r)\Gamma_v(w - a, a - w + r)}, & a \geq w - r, \end{cases}$$

$$i(w, a) = \begin{cases} i(w - a, 0)\pi_i(a), & w - r > a, \\ i(r, a - w + r)\frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a - w + r)}, & a \geq w - r, \end{cases} \quad (3.16)$$

Comme $J_r(t) = J(t+r)$ avec le même changement de variable, nous avons

$$J(w) = \int_0^\infty \theta(a) i(w, a) da$$

Substituons $i(w, a)$ par les formules de (3.16)

$$J(w) = \int_0^{w-r} \theta(a) i(w-a, 0) \pi_i(a) da + \int_{w-r}^\infty \theta(a) i(r, a-w+r) \frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a-w+r)} da$$

La propriété est vérifiée pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $w \geq r$. En laissant ensuite r tendre vers $-\infty$ On en déduit que la propriété est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$.

Lemme 3.7.1. Pour tout $x_0 := (\bar{s}(\cdot), \bar{v}(\cdot), \bar{i}(\cdot)) \in \mathbf{B}$, $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ nous avons

(1)

$$\int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da \leq \frac{A}{M}.$$

(2)

$$J(t) \leq \|\theta\|_\infty \frac{A}{M},$$

$$(3) \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty s(t, a) da \geq \frac{A}{\|\mu_s\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_s\|_\infty \|\theta\|_\infty \frac{A}{M}}.$$

(4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$\begin{aligned} s(t, a) &\geq c_1 \pi_s(a), \\ v(t, a) &\geq c_2 \pi_v(a), \end{aligned}$$

Preuve. Tout d'abord, commençons par établir l'estimation (1).

On note

$$N(t) := \int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da.$$

En dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\frac{d}{dt} N(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t, a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) da.$$

Effectuons maintenant le calcul de chaque terme.

Nous avons

$$\int_0^\infty s(t, a) da = \int_0^\infty s(t-a, 0) \pi_s(a) \Gamma_s(t-a, a) da$$

Nous considérons le changement de variable $\sigma = t - a$, on obtient

$$\int_0^\infty s(t, a) da = \int_{-\infty}^t s(\sigma, 0) \pi_s(t - \sigma) \Gamma_s(\sigma, t - \sigma) d\sigma$$

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale et la règle d'intégration de Leibniz, on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da = s(t, 0) + \int_{-\infty}^t s(\sigma, 0) \frac{d}{dt} \pi_s(t - \sigma) \Gamma_s(\sigma, t - \sigma) d\sigma$$

Calculons le terme $\frac{d}{dt} \pi_s(t - \sigma) \Gamma_s(\sigma, t - \sigma)$:

$$\frac{d}{dt} \pi_s(t - \sigma) \Gamma_s(\sigma, t - \sigma) = -(\mu_s(t - \sigma) + \delta(t - \sigma) \beta_s(t - \sigma) J(t)) \pi_s(t - \sigma) \Gamma_s(\sigma, t - \sigma).$$

Revenons maintenant à la variable $a = t - \sigma$,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da = s(t, 0) + \int_0^\infty s(t - a, 0) [-(\mu_s(a) + \delta(a) + \beta_s(a) J(t))] \pi_s(a) \Gamma_s(t, a) da$$

Si $a \geq 0$ on a $s(t, a) = s(t - a, 0) \pi_s(a) \Gamma_s(t - a, a)$ donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da &= s(t, 0) + \int_0^\infty s(t, a) [-(\mu_s(a) + \delta(a) + \beta_s(a) J(t))] da \\ &= s(t, 0) - \int_0^\infty (\mu_s(a) + \delta(a)) s(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da \\ &= A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a) v(t, a) da - \int_0^\infty (\mu_s(a) + \delta(a)) s(t, a) da \\ &\quad - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da \\ &\leq -M \int_0^\infty s(t, a) da - \int_0^\infty \delta(a) s(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da + A \\ &\quad + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a) v(t, a) da. \end{aligned}$$

Pour les deux termes qui restent, on utilise la même méthode.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t, a) da &= v(t, 0) + \int_0^\infty v(t, a) [-(\mu_v(a) + k(a) - \beta_v(a) J(t))] da \\ &= \int_0^\infty \delta(a) s(t, a) da + \rho \int_0^\infty k(a) v(t, a) da - \int_0^\infty (\mu_v(a) + k(a)) v(t, a) da \\ &\quad + J(t) \int_0^\infty \beta_v(a) v(t, a) da \\ &\leq -M \int_0^\infty v(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_v(a) v(t, a) da - (1 - \rho) \int_0^\infty k(a) v(t, a) da \\ &\quad + \int_0^\infty \delta(a) s(t, a) da. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t,a) da &= i(t,0) - \int_0^\infty (\mu_i(a) + q(a))i(t,a) da \\ &\leq -M \int_0^\infty i(t,a) da - \int_0^\infty q(a)i(t,a) da + J(t) \int_0^\infty \beta_s(a)s(t,a) da \\ &\quad + J(t) \int_0^\infty \beta_v(a)v(t,a) da \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t,a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t,a) da + \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t,a) da \\ \leq A - M \left[\int_0^\infty s(t,a) da + \int_0^\infty v(t,a) da + \int_0^\infty i(t,a) da \right] \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} N(t) \leq A - MN(t)$$

Considérons $t \geq r$ avec $r \in \mathbb{R}$,

$$N'(t) + MN(t) \leq A \tag{3.17}$$

On multiplie l'inégalité (3.17) par le facteur intégrant $e^{M(t-r)}$. Nous obtenons

$$(N(t)e^{M(t-r)})' \leq Ae^{M(t-r)}$$

En intégrant entre (r,t), on obtient

$$N(t)e^{M(t-r)} - N(r) \leq \frac{A}{M} [e^{M(t-r)} - 1]$$

En multipliant l'inégalité précédente par e^{Mr} :

$$N(t)e^{Mt} \leq N(r)e^{Mr} + \frac{A}{M} [e^{Mt} - e^{Mr}]$$

Lorsque $r \rightarrow -\infty$, il en résulte que

$$N(t) \leq \frac{A}{M} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Passons à la démonstration de l'estimation (2) :

On a

$$J(t) = \int_0^\infty \theta(a) i(t, a) da,$$

ce qui implique que

$$J(t) \leq \|\theta\|_\infty \int_0^\infty i(t, a) da$$

Selon l'estimation (1) :

$$\int_0^\infty s(t, a) da + \int_0^\infty v(t, a) da + \int_0^\infty i(t, a) da \leq \frac{A}{M}.$$

Alors

$$\int_0^\infty i(t, a) da \leq \frac{A}{M}.$$

Finalement, on obtient

$$J(t) \leq \|\theta\|_\infty \frac{A}{M}.$$

Estimation(3) : D'après l'équation (3.11) nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t, a) da &= - \int_0^\infty (\mu_s(a) + \delta(a)) s(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da + A \\ &\quad + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a) v(t, a) da \\ &\geq - \int_0^\infty (\mu_s(a) + \delta(a)) s(t, a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) s(t, a) da + A \\ &\geq A - \left(\|\mu_s\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_s\|_\infty \|\theta\|_\infty \frac{A}{M} \right) \int_0^\infty s(t, a) da. \end{aligned}$$

D'après la méthode de fluctuations (voir Proposition A.10 [36]), il existe une suite (t_k) telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^\infty s(t_k, a) da = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty s(t, a) da = S_\infty$$

et

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s(t_n, a) da = 0.$$

Alors

$$0 \geq A - \left(\|\mu_s\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_s\|_\infty \|\theta\|_\infty \frac{A}{M} \right) S_\infty$$

ce qui implique que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty s(t, a) da \geq \frac{A}{\|\mu_s\|_\infty + \|\delta\|_\infty + \|\beta_s\|_\infty \|\theta\|_\infty \frac{A}{M}}.$$

Nous passons maintenant à la démonstration de la Propriété (4) :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, on a

$$s(t, a) = s(t - a, 0)\pi_s(a)\Gamma_s(t - a, a)$$

et comme

$$s(t, 0) = A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t, a)da$$

Alors

$$s(t, a) = (A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v(t - a, a)da)\pi_s(a)\Gamma_s(t - a, a)$$

Quand tous les termes sont positifs nous avons :

$$s(t, a) \geq A\pi_s(a)\Gamma_s(t - a, a)$$

En substituant $\Gamma_s(t - a, a)$ par son expression

$$s(t, a) \geq A\pi_s(a) \exp \left\{ - \int_0^a \beta_s(\sigma)J(t - a + \sigma)d\sigma \right\}$$

D'après la Propriété (2) on a $J(t) \leq \|\theta\|_\infty \frac{A}{M}$ Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s(t, a) \geq A \exp \left\{ - \|\theta\|_\infty \frac{A}{M} \int_0^\infty \beta_s(\xi)d\xi \right\} \pi_s(a). \quad (3.18)$$

Finalement,

$$s(t, a) \geq c_1 \pi_s(a). \quad \text{avec} \quad c_1 = A \exp \left\{ - \|\theta\|_\infty \frac{A}{M} \int_0^\infty \beta_s(\xi)d\xi \right\}$$

De la même manière, on démontre qu'il existe une constante c_2 telle que

$v(t, a) \geq c_2 \pi_v(a)$, Nous avons

$$v(t, a) = v(t - a, 0)\pi_v(a)\Gamma_v(t - a, a), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0$$

et

$$v(t, 0) = \int_0^\infty \delta(a)s(t, a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t, a)da$$

Alors

$$\begin{aligned} v(t, a) &= \left(\int_0^\infty \delta(a)s(t - a, a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t - a, a)da \right) \pi_v(a)\Gamma_v(t - a, a), \\ &\geq \left(\int_0^\infty \delta(a)s(t - a, a)da \right) \pi_v(a)\Gamma_v(t - a, a) \end{aligned}$$

Selon (3.18) nous avons

$$\int_0^\infty \delta(a)s(t-a,a)da \geq c_1 \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da$$

on peut alors écrire

$$v(t,a) \geq \left(c_1 \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da \right) \pi_v(a) \exp \left\{ - \int_0^a \beta_v(\sigma)J(t-a+\sigma)d\sigma \right\}$$

étant donné que l'on a $J(t) \leq \|\theta\|_\infty \frac{A}{M}$, alors

$$v(t,a) \geq \left(c_1 \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da \right) \exp \left\{ - \|\theta\|_\infty \frac{A}{M} \int_0^\infty \beta_v(\xi)d\xi \right\} \pi_v(a)$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une constante positive

$$c_2 = \left(c_1 \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da \right) \exp \left\{ - \|\theta\|_\infty \frac{A}{M} \int_0^\infty \beta_v(\xi)d\xi \right\} \text{ telles que } v(t,a) \geq c_2 \pi_v(a).$$

3.8 États stationnaires-Taux de reproduction de base

3.8.1 Équilibre sans maladie

Théorème 3.8.1. *Le système (3.1) admet toujours un équilibre sans maladie $E_0 = (s_0(a), v_0(a), 0)$, avec*

$$\begin{cases} s_0(a) = s_0(0)\pi_s(a), \\ v_0(a) = v_0(0)\pi_v(a), \quad a > 0, \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} s_0(0) = A + (1 - \rho)v_0(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da, \\ v_0(0) = \frac{A \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da}{1 - \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da - ((1 - \rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da + \rho)}. \end{cases}$$

Preuve. L'équilibre $E_0 = (s_0(a), v_0(a), 0)$ satisfait le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_0(a)}{da} = -(\mu_s(a) + \delta(a))s_0(a), \\ \frac{dv_0(a)}{da} = -(\mu_v(a) + k(a))v_0(a), \\ s_0(0) = A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v_0(a)da, \\ v_0(0) = \int_0^\infty \delta(a)s_0(a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v_0(a)da, \end{array} \right. \quad a > 0, \quad (3.19)$$

qui admet les solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0(a) = s_0(0) \exp \left\{ - \int_0^a (\mu_s(\sigma) + \delta(\sigma)) d\sigma \right\}, \\ v_0(a) = v_0(0) \exp \left\{ - \int_0^a (\mu_v(\sigma) + k(\sigma)) d\sigma \right\}. \end{array} \right.$$

Afin de déterminer les expressions de $s_0(0)$ et $v_0(0)$, on utilise les équations de (3.19), on obtient donc

$$\begin{aligned} v_0(0) &= \int_0^\infty h(a)s_0(0)\pi_s(a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v_0(0)\pi_v(a)da \\ &= \left(A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v_0(a)da \right) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da + \rho v_0(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da \\ &= \left(A + (1 - \alpha)v_0(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da \right) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da + \rho v_0(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$v_0(0) = \frac{A \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da}{1 - \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da((1 - \rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da + \rho)}$$

on déduit que

$$s_0(0) = A \left[1 + \frac{(1 - \rho) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da}{1 - \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)da((1 - \rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)da + \rho)} \right]$$

Maintenant, on vérifie que $v_0(0)$ est strictement positif. Il suffit donc de montrer que le dénominateur est strictement positif c'est-à-dire

$$\int_0^{\infty} k(a)\pi_v(a)da((1-\rho)\int_0^{\infty}\delta(a)\pi_s(a)da+\rho) < 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} k(a)\pi_v(a)da &= \int_0^{\infty} k(a)\exp\left\{-\int_0^a(\mu_v(\sigma)+k(\sigma))d\sigma\right\}da \\ &\leq \int_0^{\infty} k(a)\exp\left\{-\int_0^a k(\sigma)d\sigma\right\}da\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} k(a)\pi_v(a)da &\leq -\left[\exp\left\{-\int_0^a k(\sigma)d\sigma\right\}\right]_0^{\infty}, \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_0^{\infty} k(\sigma)d\sigma\right\}, \\ &< 1\end{aligned}$$

De même, on a

$$\int_0^{\infty}\delta(a)\pi_s(a)da < 1$$

Alors

$$\int_0^{\infty} k(a)\pi_v(a)da((1-\rho)\int_0^{\infty}\delta(a)\pi_s(a)da+\rho) < (1-\rho)+\rho = 1$$

Ce qui implique

$$v_0(0) > 0$$

3.8.2 Taux de reproduction de base

On peut définir le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 du modèle (3.1) par :

$$\mathcal{R}_0 = \int_0^{\infty}\theta(a)\pi_i(a)da\int_0^{\infty}(\beta_s(a)s_0(a)+\beta_v(a)v_0(a))da.$$

Notons que

$$\mathcal{R}_0 = \tilde{\mathcal{R}}_0 + \int_0^{\infty}\theta(a)\pi_i(a)da\int_0^{\infty}\beta_v(a)v_0(a)da.$$

où

$$\tilde{\mathcal{R}}_0 = \int_0^\infty \theta(a)\pi_i(a)da \int_0^\infty \beta_s(a)s_0(a)da$$

est le nombre de reproduction de base du modèle (1.1) dans [23] et ainsi,

$$\mathcal{R}_0 > \tilde{\mathcal{R}}_0$$

Mathématiquement, cet écart provient directement de la sensibilité des vaccinés face au virus, modélisée par le terme $\beta_v(a)v(t,a)J(t)$ dans le système (3.1), un terme totalement absent dans le cas d'une vaccination parfaite.

Biologiquement, cette formulation montre que l'imperfection du vaccin crée une double vulnérabilité : d'une part, les vaccinés peuvent être infectés à tout âge via le taux de contact $\beta_v(a)$, et d'autre part, ils perdent leur immunité au cours du temps au taux $k(a)$, alimentant ainsi le flux des nouveau-nés susceptibles $s(t,0)$. Épidémiologiquement, la présence du réservoir actif $\beta_v(a)v_0(a)$ augmente le potentiel de transmissibilité globale et rehausse le seuil d'immunité collective. Pour la santé publique, cela prouve qu'une forte couverture vaccinale initiale est insuffisante si le vaccin laisse persister une susceptibilité résiduelle : il devient alors indispensable d'administrer des doses de rappel pour minimiser la force d'infection chez les vaccinés et abaisser le \mathcal{R}_0 sous le seuil critique de 1.

3.8.3 Équilibre endémique

Dans cette section, nous étudions l'existence d'un équilibre endémique positif pour le modèle (3.1) lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$. Cet état stationnaire satisfait le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^*(a)}{da} = -(\mu_s(a) + \delta(a))s^*(a) - \beta_s(a)s^*(a)J^*, \\ \frac{dv^*(a)}{da} = -(\mu_v(a) + k(a))v^*(a) - \beta_v(a)v^*(a)J^*, \\ \frac{di^*(a)}{da} = -(\mu_i(a) + q(a))i^*(a), \\ s^*(0) = A + (1 - \rho) \int_0^\infty k(a)v^*(a)da, \\ v^*(0) = \int_0^\infty \delta(a)s^*(a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v^*(a)da, \\ i^*(0) = J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da, \\ J^* = \int_0^\infty \theta(a)i^*(a)da, \end{array} \right. \quad a > 0, \quad (3.20)$$

La solution de (3.20) est donnée par

$$\begin{cases} s^*(a) = s^*(0)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma}, \\ v^*(a) = v^*(0)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma}, \\ i^*(a) = i^*(0)\pi_i(a), \end{cases} \quad a > 0. \quad (3.21)$$

Théorème 3.8.2. *Si $\mathcal{R}_0 > 1$, Il existe un unique équilibre positif noté $E^* = (s^*(a), v^*(a), i^*(a))$.*

Preuve. À partir des équations (3.20) et (3.21) nous avons

$$\begin{aligned} v^*(0) &= s^*(0) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} da + \rho v^*(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma} da \\ &= \left(A + (1 - \rho)v^*(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma} da \right) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} da \\ &+ \rho v^*(0) \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma} da, \end{aligned}$$

il résulte que

$$v^*(0) = \frac{A \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} da}{1 - \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma} da \left((1 - \rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} da + \rho \right)} \quad (3.22)$$

Ensuite, supposons que $i^*(0) > 0$. En utilisant l'expression de J^* dans (3.20). On a

$$i^*(0) = J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da,$$

ce qui implique que

$$i^*(0) = \int_0^\infty \theta(a)i^*(a)da \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da,$$

En utilisant les expressions de $s^*(a)$, $v^*(a)$ et $i^*(0)$ donnée dans (3.21), on obtient

$$i^*(0) = i^*(0) \int_0^\infty \theta(a)\pi_i(a)da \int_0^\infty \left(\beta_s(a)s^*(0)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} + \beta_v(a)v^*(0)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma} \right) da,$$

en divisant la dernière expression par $i^*(0)$, on en déduit que

$$1 = \int_0^\infty \theta(a)\pi_i(a)da \int_0^\infty \left(\beta_s(a)s^*(0)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} + \beta_v(a)v^*(0)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma} \right) da,$$

À partir de l'expression de $s^*(0)$ dans (3.20), nous avons

$$1 = \tilde{\theta} \int_0^\infty \left(\beta_s(a) (A + (1 - \rho) \tilde{k} v^*(0)) \pi_s(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} + \beta_v(a) v^*(0) \pi_v(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} \right) da. \quad (3.23)$$

avec

$$\tilde{k} := \int_0^\infty k(a) \pi_v(a) e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma) d\sigma} da,$$

$$\tilde{\beta}_{s,v}(a) := \int_0^a \beta_{s,v}(\sigma) d\sigma,$$

$$\tilde{\theta} := \int_0^\infty \theta(a) \pi_i(a) da.$$

En remplaçant maintenant $v^*(0)$ par son expression (3.22).

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{\theta} \int_0^\infty A \beta_s(a) \pi_s(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da \\ &+ \tilde{\theta} \int_0^\infty \left((1 - \rho) \beta_s(a) \pi_s(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} \int_0^\infty k(a) \pi_v(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} da + \beta_v(a) \pi_v(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} \right) \\ &\quad \frac{A \int_0^\infty \delta(a) \pi_s(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da}{1 - \int_0^\infty k(a) \pi_v(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} da \left((1 - \rho) \int_0^\infty \delta(a) \pi_s(a) e^{-i^*(0) \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da + \rho \right)} da \\ &=: G(i^*(0)). \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on pose $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$ avec

$$G_1(x) = \tilde{\theta} \int_0^\infty A \beta_s(a) \pi_s(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da$$

et

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \tilde{\theta} \int_0^\infty \left((1 - \rho) \beta_s(a) \pi_s(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} \int_0^\infty k(a) \pi_v(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} da + \beta_v(a) \pi_v(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} \right) \\ &\quad \frac{A \int_0^\infty \delta(a) \pi_s(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da}{1 - \int_0^\infty k(a) \pi_v(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_v(a)} da \left((1 - \rho) \int_0^\infty \delta(a) \pi_s(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da + \rho \right)} da \end{aligned}$$

La dérivée de G est exprimée par : où

$$G'(x) = G'_1(x) + G'_2(x)$$

$$G'_1(x) = -\tilde{\theta} \int_0^\infty A \beta_s(a) \pi_s(a) \tilde{\beta}_s(a) e^{-x \tilde{\theta} \tilde{\beta}_s(a)} da < 0$$

Et

$$\begin{aligned}
G'_2(x) &= -\tilde{\theta} \int_0^\infty [(\tilde{\theta}(1-\rho)\beta_s(a)\pi_s(a)\tilde{\beta}_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} da \\
&\quad + \tilde{\theta}(1-\rho)\beta_s(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)\tilde{\beta}_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} da + \tilde{\theta}\beta_v(a)\pi_v(a)\tilde{\beta}_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} \\
&\quad \frac{A \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} da}{1 - \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} da \left((1-\rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} da + \rho \right)} da \\
&\quad + \frac{(1-\rho)\beta_s(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} da + \beta_v(a)\pi_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} \\
&\quad \left(1 - \int_0^\infty k(a)\pi_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} da \left((1-\rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} da + \rho \right) \right)^2} \\
&\quad A\tilde{\theta}(1-\rho) \left(\int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)\tilde{\beta}_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} da \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} da \left(\int_0^\infty k(a)\pi_v(a)\tilde{\beta}_v(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_v(a)} da \right) \left((1-\rho) \int_0^\infty \delta(a)\pi_s(a)e^{-x\tilde{\theta}\tilde{\beta}_s(a)} da + \rho \right) \right) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $G'(x) < 0$ sur $(0, \infty)$. Alors la fonction G est décroissante. De plus, on a $G(0) = \mathcal{R}_0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$. On déduit que le problème (3.23) possède une unique solution positive si $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.9 Stabilité globale des équilibres

Avant d'étudier la stabilité globale des équilibres, nous présentons le lemme suivant afin de simplifier le calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov.

Lemme 3.9.1. Soient (s_1, v_1, i_1) et (s_2, v_2, i_2) deux solutions positives des trajectoires totales pour $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$.

Posons

$$W_s(t) = \int_0^\infty \phi(a) H\left(\frac{s_1(t, a)}{s_2(t, a)}\right) da, \quad W_v(t) = \int_0^\infty \phi(a) H\left(\frac{v_1(t, a)}{v_2(t, a)}\right) da,$$

$$W_i(t) = \int_0^\infty \phi(a) H\left(\frac{i_1(t, a)}{i_2(t, a)}\right) da, \quad W_i(t) = \int_0^\infty \phi(a) i_1(t, a) da,$$

Où $\phi, \phi' \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et H est une fonction continument différentiable. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_s(t) &= \phi(0)H\left(\frac{s_1(t,0)}{s_2(t,0)}\right) + \int_0^\infty \phi'(a)H\left(\frac{s_1(t,a)}{s_2(t,a)}\right)da \\ &+ \left(J_2(t) - J_1(t)\right) \int_0^\infty \phi(a)\beta_s(a)\frac{s_1(t,a)}{s_2(t,a)}H'\left(\frac{s_1(t,a)}{s_2(t,a)}\right)da, \end{aligned} \quad (3.24)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_v(t) &= \phi(0)H\left(\frac{v_1(t,0)}{v_2(t,0)}\right) + \int_0^\infty \phi'(a)H\left(\frac{v_1(t,a)}{v_2(t,a)}\right)da \\ &+ \left(J_2(t) - J_1(t)\right) \int_0^\infty \phi(a)\beta_v(a)\frac{v_1(t,a)}{v_2(t,a)}H'\left(\frac{v_1(t,a)}{v_2(t,a)}\right)da, \end{aligned} \quad (3.25)$$

De plus, on a

$$\frac{d}{dt}W_i(t) = \phi(0)H\left(\frac{i_1(t,0)}{i_2(t,0)}\right) + \int_0^\infty \phi'(a)H\left(\frac{i_1(t,a)}{i_2(t,a)}\right)da. \quad (3.26)$$

et

$$\frac{d}{dt}W_i(t) = \phi(0)i_1(t,0) + \int_0^\infty \left(\phi'(a) - (\mu_i(a) + q(a))\phi(a)\right)i_1(t,a)da. \quad (3.27)$$

Preuve. Considérons le changement de variable suivant : $\alpha = t - a$ et d'après (3.15)

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_s(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty \phi(a)H\left(\frac{s_1(t-a,0)\Gamma_s^1(t-a,a)}{s_2(t-a,0)\Gamma_s^2(t-a,a)}\right)da, \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \phi(t-\alpha)H\left(\frac{s_1(\alpha,0)\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{s_2(\alpha,0)\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)d\alpha, \\ &= \phi(0)H\left(\frac{s_1(t,0)}{s_2(t,0)}\right) + \int_{-\infty}^t \phi'(t-\alpha)H\left(\frac{s_1(\alpha,0)\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{s_2(\alpha,0)\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)d\alpha \\ &+ \int_{-\infty}^t \phi(t-\alpha)H'\left(\frac{s_1(\alpha,0)\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{s_2(\alpha,0)\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)\frac{s_1(\alpha,0)}{s_2(\alpha,0)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)d\alpha. \\ &= \phi(0)H\left(\frac{s_1(t,0)}{s_2(t,0)}\right) + \int_{-\infty}^t \phi'(t-\alpha)H\left(\frac{s_1(\alpha,0)\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{s_2(\alpha,0)\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)d\alpha \\ &+ \int_{-\infty}^t \phi(t-\alpha)H'\left(\frac{s_1(\alpha,0)\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{s_2(\alpha,0)\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)\frac{s_1(\alpha,0)}{s_2(\alpha,0)}\left((J_2(t) - J_1(t))\beta(t-\alpha)\frac{\Gamma_s^1(\alpha,t-\alpha)}{\Gamma_s^2(\alpha,t-\alpha)}\right)d\alpha. \end{aligned}$$

posant $a = t - \alpha$, on obtient (3.24). De la même façon, on prouve (3.25), (3.26) et (3.27).

3.9.1 Équilibre sans maladie

Théorème 3.9.1. *Supposons que $\mathcal{R}_0 \leq 1$. L'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable dans X_+ .*

Lemme 3.9.2. *Pour tout $x_0 \in X_+$, $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, il existe des constantes strictement positives h_1 , h_2 et h_3 telles que*

$$\frac{s(t, a)}{s_0(a)} \geq h_1, \quad \frac{v(t, a)}{v_0(a)} \geq h_2, \quad \frac{i(t, a)}{i_0(a)} \geq h_3.$$

Preuve. Considérons la fonction $H(x) = x - \ln(x) - 1$ et on définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$W(t) := \int_0^\infty s_0(a) H\left(\frac{s(t, a)}{s_0(a)}\right) da + \int_0^\infty \phi_2(a) i(t, a) da + \int_0^\infty v_0(a) H\left(\frac{v(t, a)}{v_0(a)}\right) da,$$

avec

$$\phi_2(a) \pi_i(a) = 1 - \int_0^\infty (\beta_s(a) s_0(a) + \beta_v(a) v_0(a)) da \int_0^a \theta(\sigma) \pi_i(\sigma) d\sigma,$$

Remarquons que l'on a $\phi_2(a) \geq 0$ si $\mathcal{R}_0 \leq 1$. On a pour la dérivée de ϕ_2 .

$$\phi_2'(a) - (\mu_i(a) + q(a)) \phi_2(a) = -\theta(a) \int_0^\infty (\beta_s(a) s_0(a) + \beta_v(a) v_0(a)) da \quad (3.28)$$

Soit $\phi(t) = (s(t, \cdot), v(t, \cdot), i(t, \cdot))$ une trajectoire totale dans \mathbf{B} . On calcule la dérivée de

$$W_1(\phi(t)) =: W_1(t) = \int_0^\infty H\left(\frac{s(t, a)}{s_0(a)}\right) s_0(a) da, \quad W_2(\phi(t)) =: W_2(t) = \int_0^\infty \phi_2(a) i(t, a) da,$$

et $W_3(\phi(t)) =: W_3(t) = \int_0^\infty v_0(a) H\left(\frac{v(t, a)}{v_0(a)}\right) da.$

En appliquant le Lemme (3.9.1), on obtient

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= s_0(0) H\left(\frac{s(t, 0)}{s_0(0)}\right) + \int_0^\infty s_0'(a) H\left(\frac{s(t, a)}{s_0(a)}\right) da \\ &+ J(t) \int_0^\infty s_0(a) \beta_s(a) \frac{s(t, a)}{s_0(a)} H'\left(\frac{s(t, a)}{s_0(a)}\right) da \end{aligned}$$

Étant donné que $H'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= s_0(0)H\left(\frac{s(t,0)}{s_0(0)}\right) - \int_0^\infty \left(\mu_s(a) + \delta(a)\right)s_0(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s_0(a)}\right)da \\ &\quad - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a)s(t,a)da + J(t) \int_0^\infty \beta_s(a)s_0(a)da, \end{aligned}$$

La dérivée de $W_2(t)$ (d'après (3.27)) :

$$\begin{aligned} W_2'(t) &= i(t,0)\phi_2(0) + \int_0^\infty \left(\phi_2'(a) - (\gamma_i(a) + \mu(a))\phi_2(a)\right)i(t,a)da, \\ &= i(t,0) - J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s_0(a) + \beta_v(a)v_0(a))da, \\ &= J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a))da - J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s_0(a) + \beta_v(a)v_0(a))da. \end{aligned}$$

La dérivée de $W_3(t)$: (d'après (3.25))

$$\begin{aligned} W_3'(t) &= v_0(a)H\left(\frac{v(t,0)}{v_0(0)}\right) + \int_0^\infty v_0'(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right)da \\ &\quad + J(t) \int_0^\infty v_0(a)\beta_v(a)\frac{v(t,a)}{v_0(a)}H'\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right)da \end{aligned}$$

Comme $H'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Alors

$$\begin{aligned} W_3'(t) &= v_0(0)H\left(\frac{v(t,0)}{v_0(0)}\right) - \int_0^\infty \left(\mu_v(a) + k(a)\right)v_0(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right)da \\ &\quad - J(t) \int_0^\infty \beta_v(a)v(t,a)da + J(t) \int_0^\infty \beta_v(a)v_0(a)da, \end{aligned}$$

Comme $W' = W_1' + W_2' + W_3'$, on obtient

$$\begin{aligned} W'(t) &= s_0(0)H\left(\frac{s(t,0)}{s_0(0)}\right) - \int_0^\infty \left(\mu_s(a) + \delta(a)\right)s_0(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s_0(a)}\right)da \\ &\quad + v_0(a)H\left(\frac{v(t,0)}{v_0(0)}\right) - \int_0^\infty \left(\mu_v(a) + k(a)\right)v_0(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right)da \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} H\left(\frac{s(t,0)}{s_0(0)}\right) &= H\left(\frac{A + (1-\rho) \int_0^\infty k(a)v(a,t)da}{s_0(0)}\right) \\ &= H\left(\frac{A}{s_0(0)} + \frac{(1-\rho) \int_0^\infty k(a)v_0(a)da}{s_0(0)} \frac{\int_0^\infty k(a)v(a,t)da}{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}\right) \end{aligned}$$

Puis que H est convexe et $\frac{A}{s_0(0)} + \frac{(1-\rho) \int_0^\infty k(a)v_0(a)da}{s_0(0)} = 1$, alors

$$H\left(\frac{s(t,0)}{s_0(0)}\right) \leq \frac{A}{s_0(0)} \underbrace{H(1)}_{=0} + \frac{(1-\rho) \int_0^\infty k(a)v_0(a)da}{s_0(0)} H\left(\frac{\int_0^\infty k(a)v_0(a) \frac{v(t,a)}{v_0(a)} da}{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}\right).$$

D'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} H\left(\frac{s(t,0)}{s_0(0)}\right) &\leq \frac{(1-\rho)}{s_0(0)} \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right) k(a)v_0(a)da \\ H\left(\frac{v(t,0)}{v_0(0)}\right) &= H\left(\frac{\int_0^\infty \delta(a)s(t,a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t,a)da}{v_0(0)}\right), \\ &= H\left(\frac{\int_0^\infty \delta(a)s_0(a)da}{v_0(0)} \frac{\int_0^\infty \delta(a)s(t,a)da}{\int_0^\infty \delta(a)s_0(a)da} + \rho \frac{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}{v_0(0)} \frac{\int_0^\infty k(a)v(t,a)da}{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}\right), \end{aligned}$$

Comme H est convexe et $\frac{\int_0^\infty \delta(a)s_0(a)da}{v_0(0)} + \frac{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}{v_0(0)} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} H\left(\frac{v(t,0)}{v_0(0)}\right) &\leq \frac{\int_0^\infty \delta(a)s_0(a)da}{v_0(0)} H\left(\frac{\int_0^\infty \delta(a)s_0(a) \frac{s(t,a)}{s_0(a)} da}{\int_0^\infty \delta(a)s_0(a)da}\right) \\ &+ \rho \frac{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}{v_0(0)} H\left(\frac{\int_0^\infty k(a)v_0(a) \frac{v(t,a)}{v_0(a)} da}{\int_0^\infty k(a)v_0(a)da}\right), \\ &\leq \frac{1}{v_0(0)} \int_0^\infty \delta(a)s_0(a) H\left(\frac{s(t,a)}{s_0(a)}\right) da + \frac{\rho}{v_0(0)} \int_0^\infty k(a)v_0(a) H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right) da. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 W'(t) &\leq (1 - \rho) \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right) k(a)v_0(a)da - \int_0^\infty \left(\mu_s(a) + \delta(a)\right) s_0(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s_0(a)}\right) da \\
 &+ \int_0^\infty \delta(a)s_0(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s_0(a)}\right) da + \rho \int_0^\infty k(a)v_0(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right) da \\
 &- \int_0^\infty \left(\mu_v(a) + k(a)\right) v_0(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right) da \\
 &\leq - \int_0^\infty \left(\mu_s(a) + \delta(a)\right) s_0(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s_0(a)}\right) da - \int_0^\infty \mu_v(a)v_0(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v_0(a)}\right) da \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

Si $W'(t) = 0$ alors $s(t,a) = s_0(a)$ et $v(t,a) = v_0(a)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$. En utilisant la première équation du système (3.1), on obtient $J(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Alors le plus grand ensemble invariant vérifiant $W'(t) = 0$ contient seulement $E_0 = (s_0(a), v_0(a), 0)$. Donc, si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, l'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable

3.9.2 Équilibre endémique

Persistence uniforme

Afin de garantir la bonne définition de la fonction de Lyapunov obtenue dans la section suivante, nous démontrons un résultat de persistance.

Pour $x_0 = (\bar{s}(a), \bar{v}(a), \bar{i}(a)) \in X_+$, on définit une fonction continue $P : X_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$P(x_0) = \int_0^\infty \theta(a)\bar{i}(a)da$$

On définit ainsi les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
 X^0 &= \left\{ (\bar{s}(a), \bar{v}(a), \bar{i}(a)) \in X_+; \int_0^\infty \theta(a)\bar{i}(a)da > 0 \right\} \\
 \partial X^0 &= \left\{ (\bar{s}(a), \bar{v}(a), \bar{i}(a)) \in X_+; \int_0^\infty \theta(a)\bar{i}(a)da = 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous écrivons : $X_+ = X^0 \cup \partial X^0$. On note aussi

$$L_\partial = \{x_0 \in \partial X^0; \Phi_t(x_0) \in \partial X^0, \text{ pour tout } t \geq 0\}.$$

Lemme 3.9.3. *Le sous-ensemble X^0 est positivement invariant sous le semi-flot $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$. De plus, l'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable pour le semi-flot $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ restreint à L_∂ .*

Preuve. Pour $x_0 = (\bar{s}(a), \bar{v}(a), \bar{i}(a)) \in X^0$, on a

$$J(t) = \int_0^\infty \theta(a) i(t, a) da.$$

Selon (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^t \theta(a) i(t-a, 0) \pi_i(a) da + \int_t^\infty \theta(a) \frac{\pi_i(a)}{\pi_i(a-t)} \bar{i}(a-t) da \\ &= \int_0^t \theta(a) i(t-a, 0) \pi_i(a) da + \int_0^\infty \theta(a+t) \frac{\pi_i(a+t)}{\pi_i(a)} \bar{i}(a) da \\ &= \int_0^t \theta(a) \pi_i(a) J(t-a) \int_0^\infty (\beta_s(\sigma) s(t-a, \sigma) + \beta_v(\sigma) v(t-a, \sigma)) d\sigma da \\ &\quad + \int_0^\infty \theta(a+t) \frac{\pi_i(a+t)}{\pi_i(a)} \bar{i}(a) da. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pour $x_0 \in X^0$, on a $\int_0^\infty \theta(a) \bar{i}(a) da > 0$. À partir du Corollaire B.6 dans [36], on obtient $J(t) > 0$ pour tout $t > b$, avec $b > 0$. On remarque qu'à ce moment $J(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Dans le cas contraire, il existe $0 < t_1 \leq b$ tel que $J(t_1) = 0$ et $J(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < t_1$, ce qui est en contradiction avec (3.29). Alors X^0 est positivement invariant.

Il reste à établir que l'unique équilibre dans L_∂ est E_0 et qu'il est globalement asymptotiquement stable. Pour cela, supposons que $x_0 \in L_\partial$, alors $J(t) = 0$. Donc le modèle (3.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial s(t, a)}{\partial a} = -(\mu_s(a) + \delta(a))s(t, a), \quad t > 0, \\ \frac{\partial v(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, a)}{\partial a} = -(\mu_v(a) + k(a))v(t, a), \quad t > 0, \quad a > 0, \\ s(t, 0) = A + (1 - \alpha) \int_0^\infty k(a)v(t, a) da, \quad t > 0, \\ v(t, 0) = \int_0^\infty \delta(a)s(t, a) da + \alpha \int_0^\infty k(a)v(t, a) da, \quad t > 0, \end{array} \right.$$

qui possède un unique équilibre $(s_0(a), v_0(a))$. Pour montrer qu'il est globalement stable dans L_∂ , on applique les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème (3.9.1), mais dans la fonction de Lyapunov en prenant $\phi_2(a) = 0$ pour tout $a > 0$.

Théorème 3.9.2. *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. Le semi-flot $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ est uniformément persistant par rapport à $(X^0, \partial X^0)$. De plus, il existe un sous-ensemble compact \mathbf{B}_1 de X^0 qui est un attracteur global pour $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dans X^0 .*

Preuve. Pour établir la persistance uniforme, il est nécessaire de vérifier les conditions du Théorème 3 dans [37]. Dans un premier temps, on observe que la fonction P constitue une distance généralisée pour le semi-flot Φ_t , c'est-à-dire qu'on a $P(\Phi_t(x_0)) > 0$ pour tout $t > 0$ étant donné qu'on a $P(x_0) > 0$ dès que $x_0 \in X^0$ et $P(x_0) = 0$ dès que $x_0 \in \partial X^0$.

(C1) Φ possède un attracteur global \mathbf{B} (d'après le Théorème (3.6.1)).

(C2) D'après le Lemme (3.9.3), on a $\Phi_t(X^0) \subseteq X^0$ et $(x_0) = \{E_0\}$ pour tout $x_0 \in L_\partial$, où (x_0) est l'ensemble oméga-limite de l'orbite $\gamma^+(x_0) := \bigcup_{t \geq 0} \{\Phi_t(x_0)\}$. Alors E_0 est isolé dans X_+ . De plus, il n'y a pas de cycle dans L_∂ de $\{E_0\}$ vers $\{E_0\}$. Passons maintenant à la démonstration du fait que :

$$W^s(E_0) \cap P^{-1}((0, \infty)) = \emptyset,$$

où $W^s(E_0)$ est la variété stable donnée par $W^s(E_0) = \left\{ x_0 \in X_+ : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x_0) = E_0 \right\}$.

Par contradiction, supposons qu'il existe $\tilde{x} := (\tilde{s}(0, a), \tilde{v}(0, a), \tilde{i}(0, a)) \in X^0$ tel que :

$$\Phi_t(\tilde{x}) \longrightarrow E_0, \quad \text{quand } t \longrightarrow +\infty, \quad (3.30)$$

où $\Phi_t(\tilde{x}) = (\tilde{s}(t, a), \tilde{v}(t, a), \tilde{i}(t, a))$. Alors :

$$\int_0^\infty |\tilde{s}(t, a) - s_0(a)| da \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty, \quad (3.31)$$

et

$$\int_0^\infty |\tilde{v}(t, a) - v_0(a)| da \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty, \quad (3.32)$$

et

$$\int_0^\infty |\tilde{i}(t, a)| da \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (3.33)$$

Comme β_s, β_v et θ sont bornées, en multipliant (3.31) par $|\beta_s(a)|$, (3.32) par $|\beta_v(a)|$ et (3.33) par $|\theta(a)|$, on obtient :

$$\int_0^\infty |\beta_s(a) \tilde{s}(t, a) - \beta_s(a) s_0(a)| da \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

$$\int_0^{\infty} |\beta_v(a)\tilde{v}(t,a) - \beta_v(a)v_0(a)|da \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

et

$$\int_0^{\infty} |\theta(a)\tilde{i}(t,a)|da \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire :

$$J(t) \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Par la définition de la limite :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, on a :

$$-\varepsilon < \int_0^{\infty} (\beta_s(a)\tilde{s}(t,a) - \beta_s(a)s_0(a))da < \varepsilon$$

ce qui donne :

$$\int_0^{\infty} \beta_s(a)\tilde{s}(t,a)da > \int_0^{\infty} \beta_s(a)(s_0(a) - \varepsilon)da. \quad (3.34)$$

De même, on a :

$$\int_0^{\infty} \beta_v(a)\tilde{v}(t,a)da > \int_0^{\infty} \beta_v(a)(v_0(a) - \varepsilon)da, \quad (3.35)$$

et on a :

$$J(t) \leq \varepsilon.$$

En substituant (3.34) et (3.35) dans (3.1) et en utilisant le principe de comparaison, on obtient :

$$\hat{i}(t,a) \leq \tilde{i}(t,a), \quad (3.36)$$

et

$$\hat{J}(t) \leq \tilde{J}(t) < \varepsilon,$$

Où $\hat{i}(t,a)$ vérifie le système suivant pour tout $t \geq T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{i}(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{i}(t,a)}{\partial a} = -(\mu_i(a) + q(a))\hat{i}(t,a), \quad t > T, \quad a > 0, \\ \hat{i}(t,0) = \hat{J}(t) \int_0^{\infty} (\beta_s(a)(s_0(a) - \varepsilon) + \beta_v(a)(v_0(a) - \varepsilon)) da, \quad t > T, \\ \hat{J}(t) = \int_0^{\infty} \theta(a)\hat{i}(t,a)da, \\ \hat{i}(T, \cdot) = \tilde{i}(T, \cdot). \end{array} \right.$$

Étant donné que $\mathcal{R}_0 > 1$, pour un $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une constante $\alpha_\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$\int_0^\infty \theta(a) \pi_i(a) e^{-\alpha_\varepsilon a} da \int_0^\infty \left(\beta_s(a)(s_0(a) - \varepsilon) + \beta_v(a)(v_0(a) - \varepsilon) \right) da = 1.$$

On définit le problème suivant :

$$\begin{cases} W_i'(a) = \left(\mu_i(a) + q(a) + \alpha_\varepsilon \right) W_i(a) - \beta_\varepsilon \theta(a), & a > 0, \\ W_i(0) = 1, \end{cases} \quad (3.37)$$

où

$$\beta_\varepsilon = \int_0^\infty \left(\beta_s(a)(s_0(a) - \varepsilon) + \beta_v(a)(v_0(a) - \varepsilon) \right) da.$$

Alors, le problème (3.37) admet une unique solution bornée :

$$W_i(a) = \beta_\varepsilon \int_a^\infty \theta(\sigma) e^{-\int_a^\sigma (\mu_i(\eta) + q(\eta) + \alpha_\varepsilon) d\eta} d\sigma. \quad (3.38)$$

En multipliant (3.38) par $\hat{i}(t, a)$, puis en intégrant sur $(0, \infty)$ et en utilisant le Lemme (3.9.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \hat{i}(t, a) W_i(a) da &= \hat{i}(t, 0) W_i(0) + \int_0^\infty \left(W_i'(a) - (\mu_i(a) + q(a)) W_i(a) \right) \hat{i}(t, a) da, \\ &= \hat{i}(t, 0) + \alpha_\varepsilon \int_0^\infty \hat{i}(t, a) W_i(a) da - \hat{i}(t, 0), \\ &= \alpha_\varepsilon \int_0^\infty \hat{i}(t, a) W_i(a) da. \end{aligned}$$

La solution est donnée par :

$$\int_0^\infty \hat{i}(t, a) W_i(a) da = e^{\alpha_\varepsilon(t-T)} \int_0^\infty \hat{i}(T, a) W_i(a) da.$$

Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \hat{i}(t, a) W_i(a) da = +\infty.$$

Par ailleurs, comme W_i est bornée et $\hat{i}(t, a) \leq \tilde{i}(t, a)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \hat{i}(t, a) W_i(a) da &\leq \int_0^\infty \tilde{i}(t, a) W_i(a) da, \\ &\leq \|W_i\|_\infty \int_0^\infty \tilde{i}(t, a) da, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $\int_0^\infty \tilde{i}(t, a) da$ est uniformément bornée. Ainsi, $W^s(E_0) \cap P^{-1}((0, \infty)) = \emptyset$.

Finalement, le semi-flot $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ est uniformément persistant. D'après le Théorème 3.8 dans [32], il existe un ensemble compact \mathbf{B}_1 de X^0 qui est un attracteur global pour $\{\Phi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dans X^0 .

Lemme 3.9.4. *Pour tout $x_0 \in \mathbf{B}_1$, $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, il existe des constantes positives q_1 , q_2 et q_3 telles que :*

$$\frac{s(t, a)}{s^*(a)} > q_1, \quad \frac{v(t, a)}{v^*(a)} > q_2, \quad \frac{i(t, a)}{i^*(a)} > q_3.$$

Preuve. On a

$$\frac{s(t, a)}{s^*(a)} = \frac{s(t, a)}{s^*(0) \pi_s(a) e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma) d\sigma}}$$

D'après le Lemme (3.7.1), on obtient

$$\frac{s(t, a)}{s^*(a)} \geq \frac{c_1}{s^*(0)} := q_1$$

De même

$$\frac{v(t, a)}{v^*(a)} = \frac{v(t, a)}{v^*(0) \pi_v(a) e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma) d\sigma}} \geq \frac{c_2}{v^*(0)} := q_2.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{i(t, a)}{i^*(a)} &= \frac{i(t-a, 0)\pi_i(a)}{i^*(a)} \\
 &= \frac{P(t-a)\pi_i(a) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t, a) + \beta_v(a)v(t, a))da}{i^*(0)\pi_i(a)}, \\
 &= \frac{P(t-a)\pi_i(a) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t, a) + \beta_v(a)v(t, a))da}{i^*(0)\pi_i(a) \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a))da}, \\
 &= \frac{P(t-a)\pi_i(a) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t, a) + \beta_v(a)v(t, a))da}{i^*(0)\pi_i(a) \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(0)\pi_s(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_s(\sigma)d\sigma} + \beta_v(a)v^*(0)\pi_v(a)e^{-J^* \int_0^a \beta_v(\sigma)d\sigma})da}, \\
 &> \frac{P(t-a) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t, a) + \beta_v(a)v(t, a))da}{i^*(0) \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(0)\pi_s(a) + \beta_v(a)v^*(0)\pi_v(a))da}.
 \end{aligned}$$

D'après la propriété 4 du lemme (3.7.1) on a $s(t, a) \geq c_1\pi_s(a)$ et $v(t, a) \geq c_2\pi_v(a)$. Par conséquence,

$$\begin{aligned}
 \frac{i(t, a)}{i^*(a)} &> \frac{P(t-a)}{i^*(0)} \left(\frac{c_1 \int_0^\infty \beta_s(a)\pi_s(a)da + c_2 \int_0^\infty \beta_v(a)\pi_v(a)da}{s^*(0) \int_0^\infty (\beta_s(a)\pi_s(a) + v^*(0) \int_0^\infty \beta_v(a)\pi_v(a))da} \right) \\
 &> \frac{P(t-a)}{i^*(0)} \left(\frac{c_1\alpha + c_2\gamma}{s^*(0)\alpha + v^*(0)\gamma} \right) \\
 &= \frac{P(t-a)}{i^*(0)} \left(\frac{c_1\alpha}{s^*(0)\alpha + v^*(0)\gamma} + \frac{c_2\gamma}{s^*(0)\alpha + v^*(0)\gamma} \right) \\
 &= \frac{P(t-a)}{i^*(0)} \left(\frac{1}{\frac{s^*(0)\alpha + v^*(0)\gamma}{c_1\alpha}} + \frac{1}{\frac{s^*(0)\alpha + v^*(0)\gamma}{c_2\gamma}} \right) \\
 &= \frac{P(t-a)}{i^*(0)} \left(\frac{1}{\frac{s^*(0)}{c_1} + \frac{v^*(0)}{c_2} \frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{1}{s^*(0) \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{v^*(0)}{c_2}} \right) > 0
 \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \int_0^\infty \beta_s(a)\pi_s(a)da, \quad \gamma = \int_0^\infty \beta_v(a)\pi_v(a)da.$$

Stabilité globale

Théorème 3.9.3. *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. L'équilibre endémique E^* est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbf{B}_1 \subset X^0$.*

Preuve. On définit $H(x) = x - \ln(x) - 1$ et on définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$W(t) = \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \phi_s(a) da + \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) \phi_v(a) da + \int_0^\infty H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right) \phi_i(a) da$$

$$\text{avec} \quad \phi_s(a) = \frac{s^*(a)}{i^*(0)}, \quad \phi_v(a) = \frac{v^*(a)}{i^*(0)}, \quad \phi_i(a) = \frac{\int_a^\infty \theta(s) i^*(s) ds}{\int_0^\infty \theta(a) i^*(a) da}, \quad a \geq 0$$

Remarquons que les fonctions ϕ_s , ϕ_v et ϕ_i Vérifient les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \phi'_s(a) = -(\mu_s(a) + \delta(a) + \beta_s(a)J^*) \frac{s^*(a)}{i^*(0)}, \\ \phi_s(0) = \frac{s^*(0)}{i^*(0)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \phi'_v(a) = -(\mu_v(a) + k(a) + \beta_v(a)J^*) \frac{v^*(a)}{i^*(0)}, \\ \phi_v(0) = \frac{v^*(0)}{i^*(0)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi'_i(a) = -\frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^\infty \theta(a) i^*(a) da}, \\ \phi_i(0) = 1 \end{cases}$$

Définir

$$W_s(t) := \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \phi_s(a) da, \quad W_v(t) := \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) \phi_v(a) da,$$

$$W_i(t) := \int_0^\infty H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right) \phi_i(a) da.$$

On établit les dérivées de $W_s(t)$, $W_v(t)$ et $W_i(t)$: (En utilisant le Lemme (3.9.1))

$$\begin{aligned} W'_s(t) &= \phi_s(0) H\left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \phi'_s(a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) \phi_s(a) \frac{s(t,a)}{s^*(a)} H'\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) da \\ &+ J^* \int_0^\infty \beta_s(a) \phi_s(a) \frac{s(t,a)}{s^*(a)} H'\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) da \\ &= \phi_s(0) H\left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \phi'_s(a) da - J(t) \int_0^\infty \beta_s(a) \phi_s(a) \left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)} - 1\right) \\ &+ J^* \int_0^\infty \beta_s(a) \phi_s(a) \left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)} - 1\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 W'_v(t) &= \phi_v(0)H\left(\frac{v(t,0)}{v^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)\phi'_v(a)da \\
 &\quad - J(t)\int_0^\infty \beta_v(a)\phi_v(a)\frac{v(t,a)}{v^*(a)}H'\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)da \\
 &\quad + J^*\int_0^\infty \beta_v(a)\phi_v(a)\frac{v(t,a)}{v^*(a)}H'\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)da \\
 &= \phi_v(0)H\left(\frac{v(t,0)}{v^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)\phi'_v(a)da \\
 &\quad - J(t)\int_0^\infty \beta_v(a)\phi_v(a)\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)} - 1\right) \\
 &\quad + J^*\int_0^\infty \beta_v(a)\phi_v(a)\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)} - 1\right)
 \end{aligned}$$

et

$$W'_i(t) = \phi_i(0)H\left(\frac{i(t,0)}{i^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right)\phi'_i(a)da$$

L'addition de $W'_s(t)$ et $W'_v(t)$ donne

$$\begin{aligned}
 W'_s(t) + W'_v(t) &= \phi_s(0)H\left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right)\phi'_s(a)da + \phi_v(0)H\left(\frac{v(t,0)}{v^*(0)}\right) \\
 &\quad + J^*\int_0^\infty \left(\beta_s(a)\phi_s(a)\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) + \beta_v(a)\phi_v(a)\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)\right)da \\
 &\quad - J^*\int_0^\infty (\beta_s(a)\phi_s(a) + \beta_v(a)\phi_v(a))da + J(t)\int_0^\infty (\beta_s(a)\phi_s(a) + \beta_v(a)\phi_v(a))da \\
 &\quad - J(t)\int_0^\infty \left(\beta_s(a)\phi_s(a)\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) + \beta_v(a)\phi_v(a)\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)\right)da \\
 &\quad + \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)\phi'_v(a)da
 \end{aligned}$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned} J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)\phi_s(a) + \beta_v(a)\phi_v(a)) da &= J(t) \int_0^\infty \left(\beta_s(a) \frac{s^*(a)}{i^*(0)} + \beta_v(a) \frac{v^*(a)}{i^*(0)} \right) da \\ &= \frac{J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da}{J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} \\ &= \frac{J(t)}{J^*}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(t) \int_0^\infty \left(\beta_s(a)\phi_s(a) \left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)} \right) + \beta_v(a)\phi_v(a) \left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)} \right) \right) da \\ = \frac{J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da}{J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} \end{aligned}$$

$$J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)\phi_s(a) + \beta_v(a)\phi_v(a)) da = \frac{J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da}{J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} = 1,$$

$$J^* \int_0^\infty \left(\beta_s(a)\phi_s(a) \left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)} \right) + \beta_v(a)\phi_v(a) \left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)} \right) \right) da = \frac{\int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da}.$$

et

$$\begin{aligned} H \left(\frac{i(t,0)}{i^*(0)} \right) &= H \left(\frac{J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da}{J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} \right) \\ &= \frac{J(t) \int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da}{J^* \int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} \\ &\quad - \ln \frac{J(t)}{J^*} - \ln \frac{\int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} - 1, \end{aligned}$$

Puisque $W'(t) = W'_s(t) + W'_v(t) + W'_i(t)$. Donc

$$\begin{aligned} W'(t) &= \phi_s(0)H \left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)} \right) + \int_0^\infty H \left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)} \right) \phi'_s(a) da + \phi_v(0)H \left(\frac{v(t,0)}{v^*(0)} \right) \\ &\quad + \int_0^\infty H \left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)} \right) \phi'_v(a) da + \int_0^\infty H \left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)} \right) \phi'_i(a) da \\ &\quad + H \left(\frac{\int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a)) da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} \right) + H \left(\frac{J(t)}{J^*} \right) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$H\left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)}\right) = H\left(\frac{A}{s^*(0)} \cdot 1 + \frac{(1-\rho) \int_0^\infty k(a)v^*(a)da}{s^*(0)} \frac{\int_0^\infty k(a)v(t,a)da}{\int_0^\infty k(a)v^*(a)da}\right).$$

Comme H est convexe et $\frac{A}{s^*(0)} + \frac{(1-\rho) \int_0^\infty k(a)v^*(a)da}{s^*(0)} = 1$ alors ,

$$H\left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)}\right) \leq \frac{A}{s^*(0)} \underbrace{H(1)}_{=0} + \frac{(1-\rho) \int_0^\infty k(a)v^*(a)da}{s^*(0)} H\left(\frac{\int_0^\infty k(a)v^*(a) \frac{v(t,a)}{v^*(a)} da}{\int_0^\infty k(a)v^*(a)da}\right).$$

Par l'inégalité de Jensen, cette dernière inégalité conduit à

$$H\left(\frac{s(t,0)}{s^*(0)}\right) \leq \frac{(1-\rho)}{s^*(0)} \int_0^\infty k(a)v^*(a) H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) da.$$

$$\begin{aligned} H\left(\frac{v(t,0)}{v^*(0)}\right) &= H\left(\frac{\int_0^\infty \delta(a)s(t,a)da + \rho \int_0^\infty k(a)v(t,a)da}{v^*(0)}\right), \\ &= H\left(\frac{\int_0^\infty \delta(a)s^*(a)da}{v^*(0)} \frac{\int_0^\infty \delta(a)s(t,a)da}{\int_0^\infty \delta(a)s^*(a)da} + \rho \frac{\int_0^\infty k(a)v^*(a)da}{v^*(0)} \frac{\int_0^\infty k(a)v(t,a)da}{\int_0^\infty k(a)v^*(a)da}\right), \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} H\left(\frac{v(t,0)}{v^*(0)}\right) &\leq \frac{\int_0^\infty \delta(a)s^*(a)da}{v^*(0)} H\left(\frac{\int_0^\infty \delta(a)s^*(a) \frac{s(t,a)}{s^*(a)} da}{\int_0^\infty \delta(a)s^*(a)da}\right) \\ &+ \rho \frac{\int_0^\infty k(a)v^*(a)da}{v^*(0)} H\left(\frac{\int_0^\infty k(a)v^*(a) \frac{v(t,a)}{v^*(a)} da}{\int_0^\infty k(a)v^*(a)da}\right), \\ &\leq \frac{1}{v^*(0)} \int_0^\infty \delta(a)s^*(a) H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) da + \frac{\rho}{v^*(0)} \int_0^\infty k(a)v^*(a) H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) da. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) &= H\left(\frac{\int_0^\infty \theta(a)i(t,a)da}{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)da}\right) = H\left(\frac{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)\frac{i(t,a)}{i^*(a)}da}{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)da}\right) \\
&\leq \frac{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right)da}{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)da}. \\
H\left(\frac{\int_0^\infty (\beta_s(a)s(t,a) + \beta_v(a)v(t,a))da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a))da}\right) &\leq \frac{\int_0^\infty \beta_s(a)s^*(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right)da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a))da} \\
&\quad + \frac{\int_0^\infty \beta_v(a)v^*(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a))da}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
W'(t) &\leq \phi_s(0) \left(\frac{(1-\rho)}{s^*(0)} \int_0^\infty k(a)v^*(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)da \right) \\
&\quad + \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \phi'_s(a)da + \phi_v(0) \left[\frac{1}{v^*(0)} \int_0^\infty \delta(a)s^*(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right)da \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho}{v^*(0)} \int_0^\infty k(a)v^*(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)da \right] + \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) \phi'_v(a)da + \int_0^\infty H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right) \phi'_i(a)da \\
&\quad + \frac{\int_0^\infty \beta_s(a)s^*(a)H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right)da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a))da} + \frac{\int_0^\infty \beta_v(a)v^*(a)H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right)da}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a))da} \\
&\quad + \frac{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right)da}{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a)da}
\end{aligned}$$

Suite à une simplification, on obtient

$$\begin{aligned}
 W'(t) &\leq \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \left(\phi'_s(a) + \frac{\beta_s(a)s^*(a)}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} + \frac{\phi_v(0)}{v^*(0)} \delta(a)s^*(a) \right) da \\
 &+ \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) \left(\phi'_v(a) + \frac{\beta_v(a)v^*(a)}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} + \tau k(a)v^*(a) \right) da \\
 &+ \int_0^\infty H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right) \underbrace{\left(\phi'_i(a) + \frac{\theta(a)i^*(a)}{\int_0^\infty \theta(a)i^*(a) da} \right)}_{=0} da.
 \end{aligned}$$

Avec

$$\tau = \rho \frac{\phi_v(0)}{v^*(0)} + (1-\rho) \frac{\phi_s(0)}{s^*(0)} = \rho \frac{1}{v^*(0)} \frac{v^*(0)}{i^*(0)} + (1-\rho) \frac{1}{i^*(0)} = \frac{1}{i^*(0)},$$

$$W'(t) \leq \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) L(a) da + \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) M(a) da.$$

$$\text{où } \begin{cases} L(a) := \phi'_s(a) + \frac{\beta_s(a)s^*(a)}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} + \frac{\phi_v(0)}{v^*(0)} \delta(a)s^*(a), \\ M(a) := \phi'_v(a) + \frac{\beta_v(a)v^*(a)}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} + \frac{k(a)v^*(a)}{i^*(0)}. \end{cases}$$

En remplaçant $\phi'_s(a)$ par son expression dans $L(a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 L(a) &= -\frac{s^*(a)}{i^*(0)} (\mu_s(a) + \delta(a) + \beta_s(a)J^*) \\
 &+ \frac{\beta_s(a)s^*(a)}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} + \frac{\phi_v(0)}{v^*(0)} \delta(a)s^*(a) \\
 &= -\frac{1}{i^*(0)} \mu_s(a)s^*(a) + \delta(a)s^*(a) \left(\frac{\phi_v(0)}{v^*(0)} - \frac{1}{i^*(0)} \right) \\
 &+ \beta_s(a)s^*(a) \left(\frac{1}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} - \frac{J^*}{i^*(0)} \right),
 \end{aligned}$$

En employant les équations de $i^*(0)$ et $\phi_v(0)$, on déduit

$$\frac{1}{\int_0^\infty (\beta_s(a)s^*(a) + \beta_v(a)v^*(a)) da} - \frac{J^*}{i^*(0)} = 0.$$

et

$$\frac{\phi_v(0)}{v^*(0)} - \frac{1}{i^*(0)} = \frac{1}{v^*(0)} \frac{v^*(0)}{i^*(0)} - \frac{1}{i^*(0)} = 0.$$

Alors

$$L(a) = -\frac{1}{i^*(0)} \mu_s(a) s^*(a)$$

De même, en remplaçant $\phi_v'(a)$ par son expression dans $M(a)$, on obtient

$$\begin{aligned} M(a) &= \phi_v'(a) + \frac{\beta_v(a) v^*(a)}{\int_0^\infty (\beta_s(a) s^*(a) + \beta_v(a) v^*(a)) da} + \frac{k(a) v^*(a)}{i^*(0)}, \\ &= -\mu_v(a) \frac{v^*(a)}{i^*(0)}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} W'(t) &\leq -\frac{1}{i^*(0)} \int_0^\infty H\left(\frac{s(t,a)}{s^*(a)}\right) \mu_s(a) s^*(a) da - \frac{1}{i^*(0)} \int_0^\infty H\left(\frac{v(t,a)}{v^*(a)}\right) \mu_v(a) v^*(a) da, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Remarquons que si $\frac{d}{dt}W(t) = 0$ alors $s(t,a) = s^*(a)$ et $v(t,a) = v^*(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, quand on remplace dans la première équation de (3.1), on conclut que $J(t) = J^*$ et donc $i(t,0) = i^*(0)$. Par conséquent, $i(t,a) = i^*(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$. Alors le plus grand ensemble invariant vérifiant $\frac{d}{dt}W(t) = 0$ est $\{(s^*(a), v^*(a), i^*(a))\}$.

3.10 Simulation numérique

En utilisant le jeu de paramètres issu de [23], les simulations numériques valident la dynamique de seuil démontrée dans la partie théorique. Lorsque le taux de reproduction de base est inférieur à un ($\mathcal{R}_0 = 2.7222 \cdot 10^{-8} < 1$), l'infection s'éteint systématiquement, ce qui confirme la stabilité globale de l'équilibre sans maladie (Figure 3.2). À l'inverse, lorsque ce taux dépasse un ($\mathcal{R}_0 = 7.0118 > 1$), la maladie persiste et converge vers un état endémique positif au sein de la population (Figure 3.3). Ces trajectoires graphiques illustrent l'impact des paramètres épidémiologiques face aux défis complexes d'une vaccination imparfaite.

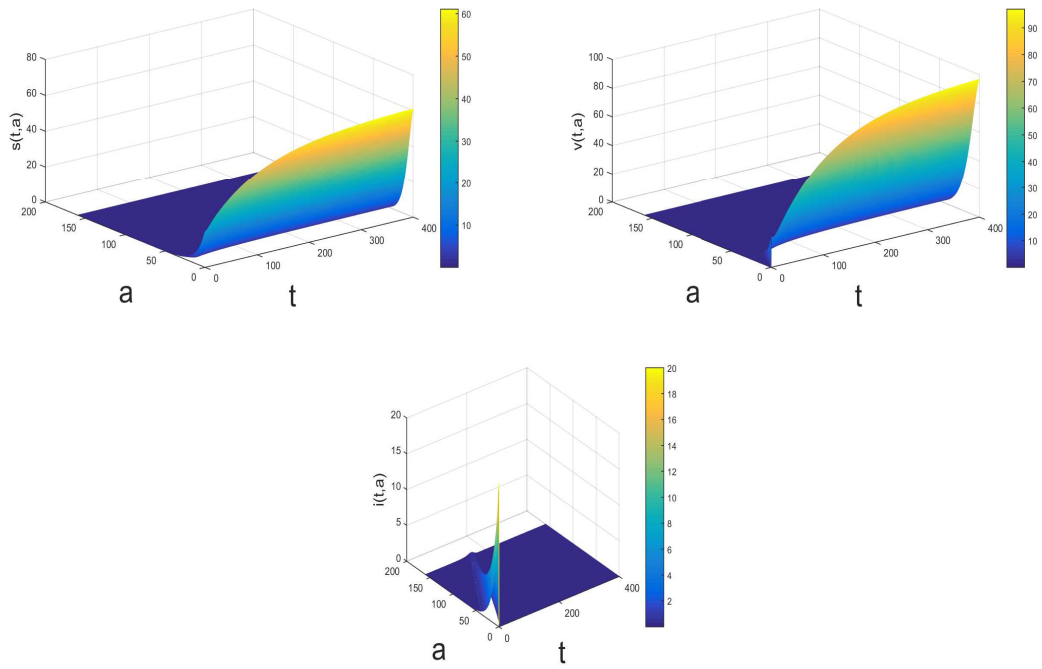


FIGURE 3.2: Stabilité globale de l'équilibre trivial où $\mathcal{R}_0 = 2.722210^{-8} < 1$.

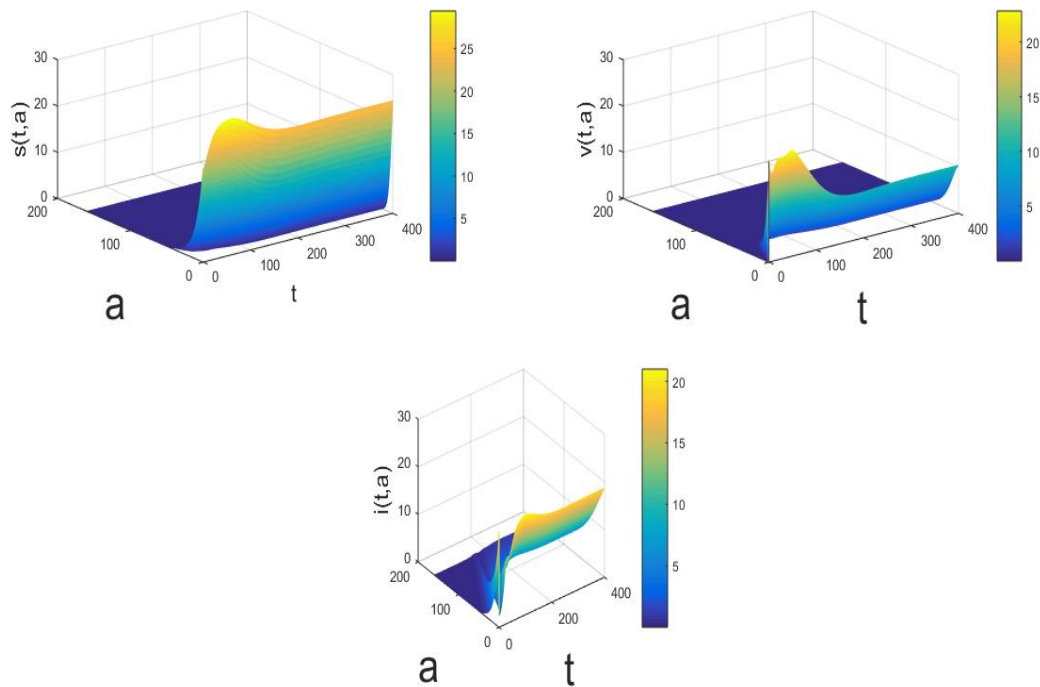


FIGURE 3.3: Stabilité globale de l'équilibre endémique où $\mathcal{R}_0 = 7.0118 > 1$.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié et comparé deux approches mathématiques pour comprendre la propagation d'une maladie lorsque le vaccin utilisé n'est pas parfait. Cette étude montre comment la théorie mathématique rigoureuse permet de valider des observations biologiques.

Dans la première partie, le modèle basé sur les équations différentielles ordinaires (EDO) a servi de base à notre étude temporelle. Sur le plan mathématique, nous avons d'abord prouvé que les solutions restent positives et bornées, ce qui garantit la cohérence biologique du modèle. Ensuite, nous avons utilisé la méthode de la matrice de prochaine génération pour calculer le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 . Grâce à la construction de fonctions de Lyapunov, nous avons démontré mathématiquement la stabilité globale des équilibres. Les simulations numériques ont parfaitement confirmé cette théorie : la maladie s'éteint si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et persiste si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dans la deuxième partie, le modèle basé sur les équations aux dérivées partielles (EDP) structurées en âge a permis d'approcher de plus près la réalité biologique. L'introduction de la variable de l'âge change complètement le cadre mathématique : on passe d'un espace de dimension finie à un espace de dimension infinie. Pour étudier ce système complexe, nous avons fait appel à des outils puissants d'analyse fonctionnelle. Nous avons démontré l'existence d'un attracteur global compact pour suivre le comportement des solutions à long terme, et nous avons utilisé la théorie de la persistance uniforme pour prouver mathématiquement que la maladie se maintient de manière durable dans la population lorsque les conditions épidémiques sont réunies.

En conclusion, ces deux approches se complètent. Le modèle EDO offre une analyse mathématique directe, claire et plus facile à calculer. Le modèle EDP, bien que beaucoup plus difficile à résoudre théoriquement, est indispensable pour intégrer des détails biologiques réels comme le déclin de l'immunité au cours du temps. L'alliance de ces deux théories mathématiques fournit un outil robuste pour aider à planifier les campagnes de vaccination et anticiper l'impact des doses de rappel.

Bibliographie

- [1] M. Adimy, A. Chekroun, C. P. Ferreira, *Global dynamics of a differential-difference system : a case of Kermack-McKendrick SIR model with age-structured protection phase*, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 17(2) (2020), 1329–1354.
- [2] R. M. Anderson, R. M. May, *Infectious Diseases of Humans : Dynamics and Control*, Oxford University Press, 1991.
- [3] P. Auger, C. Lett, J.-C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*, Éditions Dunod, Paris, 2010.
- [4] S. Bentout, T. M. Touaoula, *Global analysis of an infection age model with a class of nonlinear incidence rates*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 434(2) (2016), 1211–1239.
- [5] S. Bentout, A. Tridane, S. Djilali, T. M. Touaoula, *Age-structured Modeling of COVID-19 Epidemic in the USA, UAE and Algeria*, *Alexandria Engineering Journal*, 59(6) (2020), 4493–4503, <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.08.053>.
- [6] I. Boudjema, T. M. Touaoula, *Global stability of an infection and vaccination age-structured model with general nonlinear incidence*, *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018 (2018), 1–21, <https://doi.org>.
- [7] C. J. Browne, S. S. Pilyugin, *Global analysis of age-structured within-host virus model*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 18(8) (2013), 1999–2017.
- [8] L. M. Cai, M. Martcheva, X. Z. Li, *Epidemic models with age of infection, indirect transmission and incomplete treatment*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 18(9) (2013), 2239–2265.
- [9] L. M. Cai, C. Modnak, J. Wang, *An age-structured model for cholera control with vaccination*, *Applied Mathematics and Computation*, 299 (2017), 127–140.
- [10] C. Castillo-Chavez, H. W. Hethcote, V. Andreasen, S. A. Levin, W. M. Liu, *Epidemiological models with age structure, proportionate mixing and cross-immunity*, *Journal of Mathematical Biology*, 27(3) (1989), 240–260.

- [11] R. Chill, *Equations différentielles et stabilité*, Université de Metz, 2006, vol. 19.
- [12] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, J. A. J. Metz, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, *Journal of Mathematical Biology*, 28(4) (1990), 365–382.
- [13] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, Chichester, UK (2000).
- [14] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, T. Britton, *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*, Princeton University Press, 2012.
- [15] S. Djilali, T. M. Touaoula, S. E. Miri, *A Heroin Epidemic Model : Very General Non Linear Incidence, Treat-Age, and Global Stability*, *Acta Applicandae Mathematicae*, 151(1) (2017), 113–134.
- [16] S. Djilali, B. Ghanbari, *Coronavirus pandemic : A predictive analysis of the peak outbreak epidemic in South Africa, Turkey, and Brazil*, *Chaos, Solitons and Fractals*, 138 (2020), 109971.
- [17] Z. Feng, Y. Feng, J. W. Glasser, *Influence of demographically-realistic mortality schedules on vaccination strategies in age-structured models*, *Theoretical Population Biology*, 132 (2020), 24–32.
- [18] M. N. Frioui, T. M. Touaoula, B. Ainseba, *Global dynamics of an age-structured model with relapse*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 25(6) (2020), 2245–2270.
- [19] B. S. Goh, *Management and analysis of biological populations*, Elsevier, Amsterdam (1989).
- [20] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI (1988).
- [21] F. Z. Hathout, T. M. Touaoula, *The impact of imperfect vaccination on infectious disease transmission in an age-structured population*, *International Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 6(1) (2018), 45–62.
- [22] F. Z. Hathout, *Étude mathématique d'une classe de modèles couplés, différences-différentiels*, Thèse de doctorat, Université Aboubekr Belkaïd - Tlemcen, 2018.
- [23] F. Z. Hathout, T. M. Touaoula, S. Djilali, *Mathematical analysis of a triple age dependent epidemiological model including a protection strategy*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 27(12) (2022), 6955–6978.

-
- [24] M. J. Keeling, P. Rohani, *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*, Princeton University Press, 2008.
- [25] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, *Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 115(772) (1927), 700–721.
- [26] A. Korobeinikov, *Lyapunov functions for SIR and SEIR epidemic models*, Applied Mathematics Letters, 15(8) (2002), 955–960.
- [27] A. Korobeinikov, *Lyapunov functions and global stability for SIR and SIRS epidemiological models with non-linear transmission*, Bulletin of Mathematical Biology, 68(3) (2006), 615–626.
- [28] F. M. G. Magpantay, M. A. Riolo, M. D. De Celles, *Epidemiological consequences of imperfect vaccines for immunizing infections*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 74(6) (2014), 1810–1830.
- [29] F. M. G. Magpantay, M. A. Riolo, M. Domenech De Celles, A. A. King, P. Rohani, *Epidemiological consequences of imperfect vaccines for immunizing infections*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 74(6) (2014), 1810–1830.
- [30] P. Magal, C. C. McCluskey, G. F. Webb, *Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model*, Applicable Analysis, 89(7) (2010), 1109–1140.
- [31] P. Magal, H. R. Thieme, *Eventual compactness for a semiflow generated by an age-structured models*, Communications on Pure and Applied Analysis, 3(4) (2003), 695–727.
- [32] P. Magal, X.-Q. Zhao, *Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 37(1) (2005), 251–275.
- [33] C. C. McCluskey, *Global stability for an SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence*, Mathematical Biosciences and Engineering, 7(4) (2010), 837–850.
- [34] C. C. McCluskey, *Complete global stability for an SIR epidemic model with delay-distributed or discrete*, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 11(1) (2010), 55–59.
- [35] C. C. McCluskey, *Global stability for an SEI epidemiological model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes*, Mathematical Biosciences and Engineering, 9(4) (2012), 819–841.

- [36] H. L. Smith, H. R. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 118, American Mathematical Society (2011).
- [37] H. L. Smith, X.-Q. Zhao, *Robust persistence for semidynamical systems*, *Nonlinear Analysis*, 47(9) (2001), 6169–6179.
- [38] Y. Takeuchi, W. Ma, E. Beretta, *Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times*, *Nonlinear Analysis*, 42(6) (2000), 931–947.
- [39] P. Van den Driessche, J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, *Mathematical Biosciences*, 180(1-2) (2002), 29–48.
- [40] G. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, New York (1985).

Résumé

Ce mémoire de Master examine la propagation d'une maladie infectieuse sous l'effet d'une vaccination imparfaite à travers deux approches mathématiques. La première partie analyse un modèle d'équations différentielles ordinaires (EDO) en fonction du temps, validant la dynamique de seuil via le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 et des fonctions de Lyapunov. La deuxième partie approfondit l'étude avec des équations aux dérivées partielles (EDP) structurées en âge. En utilisant des outils d'analyse fonctionnelle, nous démontrons l'existence d'un attracteur global compact et la persistance uniforme de la maladie. Les simulations numériques confirment les résultats théoriques, montrant l'extinction de l'infection si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et sa persistance si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Mots-clés : Modèle épidémiologique, Vaccination imparfaite, EDO, EDP structurée en âge, Stabilité globale, Attracteur compact.

Abstract

This Master's thesis investigates the spread of an infectious disease under the influence of imperfect vaccination using two mathematical approaches. The first part analyzes a time-dependent ordinary differential equations (ODE) model, validating the threshold dynamics through the basic reproduction number \mathcal{R}_0 and Lyapunov functions. The second part extends the study to age-structured partial differential equations (PDE). Applying functional analysis tools, we establish the existence of a compact global attractor and the uniform persistence of the disease. Numerical simulations support the theoretical findings, showing disease extinction when $\mathcal{R}_0 \leq 1$ and its persistence when $\mathcal{R}_0 > 1$.

Keywords: Epidemiological model, Imperfect vaccination, ODE, Age-structured PDE, Global stability, Compact attractor.

ملخص

تدرس مذكرة الماستر هذه انتشار مرض معدٍ تحت تأثير تلقيح غير كامل (غير فعال تماماً) باستخدام نهجين رياضيين. يحلل الجزء الأول نموذجاً يعتمد على المعادلات التفاضلية العادية بدلالة الزمن، حيث تم التحقق من ديناميكية العتبة عبر حساب عدد التكاثر الأساسي \mathcal{R}_0 وباستخدام دالات ليابونوف. أما الجزء الثاني فيتعمق في الدراسة من خلال المعادلات التفاضلية الجزئية المهيكلة حسب العمر. وباستخدام أدوات التحليل الدالي، قمنا بإثبات وجود جاذب شمولي

مدمج والاستمرار المنتظم للمرض. في الأخير، تؤكد المحاكاة العددية النتائج النظرية، مظهرة اختفاء العدوى إذا كان $\mathcal{R}_0 \leq 1$ واستمرارها إذا كان $\mathcal{R}_0 > 1$. الكلمات المفتاحية: نموذج وبائي، تلقيح غير كامل، معادلات تفاضلية عادية، معادلات تفاضلية جزئية مهيكلة حسب العمر، استقرار كلي، جاذب مدمج.