

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr BELKAÏD - TLEMCEM

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MATHS1 - ST

COURS ET SÉRIES D'EXERCICES CORRIGÉS

Adressé aux étudiants niveau : Licences (L 1)

Domaine : Sciences.

Filière : Sciences Techniques.

Spécialité : Mathématiques.

Établi Par :

RAHMOUN Amel

Année 2022.

Faculté des Sciences - Tidjani HADDAM

Tél: 043 21 63 70 / Tél&Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71

Site Web: www.fs.univ-tlemcen.dz

Email: vdrpg.facscience@gmail.com



FACULTÉ DES SCIENCES

Faculty of Sciences

كلية العلوم



Faculté des Sciences – Tidjani HADDAM

Tél: 043 21 63 70 / Tél&Fax: 043 21 63 68 / 043 21 63 71

Site Web: www.fs.univ-tlemcen.dz

Email: vdrpg.facscience@gmail.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements.

Louanges à Dieu (que son nom soit sanctifié dans les cieux et sur la terre), grâce à qui toutes les choses ce font, le présent tapuscrit ne fait pas exception...

J'exprime toute ma gratitude à :

***Mr Mssirdi Bachir
Mr Attar Ahmed
Mme Hakem Amel
Mr Kada Kloucha Mohammed
Mme Bibi Triki Samya***

Mes vifs remerciements sont aussi transmis à TOUS mes enseignants de toutes mes années d'apprentissage qui ont approfondis mes connaissances et forgé mon caractère.

Dédicace

Je dédie ce cours à mes deux enfants :

Moulay Rêda

Et

Fatiha Malek.

Introduction

Ce cours est destiné aux étudiants de première année universitaire de la filière sciences techniques, (ST). Il traite le module de mathématiques « Maths1 » avec le programme harmonisé du système LMD.

Il est le résultat de longues années d'enseignement de cours et de travaux dirigés dans la faculté des sciences de l'Université de Tlemcen.

Inspirée de ma propre expérience pédagogique, je l'ai écrit dans un langage simple, introduisant les notions théoriques par des exemples pratiques et donnant la priorité ultime à la pédagogie, quitte à faire gronder mes imminents professeurs de mathématiques !

Un minimum de phrases explique la procédure à suivre pour résoudre un exercice et des exemples multiples illustrent tous les cas possibles.

Mes défis étaient en premier lieu de simplifier les notions théoriques afin de rapprocher l'étudiant de cette filière – généralement, pas très intéressé par les mathématiques pures – de tout ce qui peut l'inciter à acquérir une réflexion logique. Puis en deuxième lieu, de donner -autant de fois que possible- les solutions des exercices proposés ! Car oh combien de fois j'étais déçue de ne pas trouver la solution d'un problème intéressant dans le livre que je tenais entre les mains.

Ce manuscrit suit le programme officiel harmonisé et est divisé en chapitres, chaque chapitre est constitué de plusieurs cours, suivi d'une série d'exercices pour fixer définitivement les idées, car un sage a dit un jour: "les méthodes sont les économies de la mémoire et les habitudes de l'esprit".

J'espère du fond du cœur que ce modeste travail pourra aider quiconque en difficulté dans les chapitres présentés.

Comme tout ce que produit un humain, ce bouquin est loin d'être parfait, mais son auteur reste esprit et cœur ouverts à toute remarque ou suggestion pouvant élever son niveau et / ou corriger ses erreurs.

Liste des Figures

	Page
Chapitre 2 Les ensembles, les relations et les applications	
<i>Fig.2.1: L'ensemble E.</i>	37
<i>Fig.2.2: $A \subset B$.</i>	39
<i>Fig.2.3: $A \cup B$.</i>	40
<i>Fig.2.4: $A \cap B$.</i>	41
<i>Fig.2.5: C_E^A.</i>	42
<i>Fig.2.6: $A \setminus B$.</i>	43
<i>Fig.2.7: $A \Delta B$.</i>	43
<i>Fig.2.8: $E \times F$.</i>	44
<i>Fig.2.9: Différence entre relation, fonction et application.</i>	50
<i>Fig.2.10: Graphe de $f(x) = x$.</i>	52
<i>Fig.2.11: Graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$.</i>	53
<i>Fig.2.12: Graphe de $\cos(x)$.</i>	53
<i>Fig.2.13: Différence entre application injective et non injective.</i>	57
<i>Fig.2.14: Différence entre application surjective et non surjective.</i>	59
<i>Fig.2.15: Une application bijective.</i>	61
<i>Fig.2.16 : L'application inverse.</i>	62
Chapitre 3 Les fonctions réelles à une variable réelle	
<i>Fig.3.1 : Une fonction périodique de période $T=2$.</i>	80
<i>Fig.3.2 : Fonction paire (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées), Fonction impaire (symétrie par rapport à l'origine O).</i>	81
<i>Fig.3.3 : Une fonction majorée par M et minorée par m.</i>	83
<i>Fig.3.4 : Deux fonctions monotones.</i>	85
<i>Fig.3.5 : Représentation d'une fonction continue et d'une fonction non continue.</i>	90
<i>Fig.3.6 : Les cas de non dérivabilité en un point.</i>	96
<i>Fig.3.7 : Deux fonctions réciproques sur le même repère (symétrie par rapport à la première bissectrice).</i>	104
<i>Fig.3.8: Une illustration du théorème de Rolle.</i>	105
<i>Fig.3.9 : Une illustration du théorème des accroissements finis.</i>	105
Chapitre 4 Application aux fonctions élémentaires	
<i>Fig.4.1 : Graphes de x^n avec différents exposants naturels.</i>	124
<i>Fig.4.2 : Graphes de x^{-n} avec différents exposants négatifs.</i>	125
<i>Fig.4.3 : Graphes de la fonction racine nième pour différentes valeurs de n.</i>	126
<i>Fig.4.4 : Graphes de la fonction puissance réelle pour différentes valeurs de a.</i>	127
<i>Fig.4.5 : Graphes des fonctions logarithmiques de base 2 et de base $1/2$.</i>	130
<i>Fig.4.6 : Graphe de $\ln x$.</i>	131
<i>Fig.4.7 : Graphes de a^x pour différentes valeurs de a.</i>	132
<i>Fig.4.8 : Graphes de e^x et $\ln x$ sur le même repère.</i>	134

Fig.4.9 : Quelques formes géométriques basiques.	135
Fig.4.10 : (a) Représentation de $\sinh$ et $\cosh$ sur une hyperbole.	135
(b) Une hyperbole sur un repère orthonormé.	
Fig.4.11 : Graphe de $\cosh$.	137
Fig.4.12 : (a) Graphe de $\sinh$.	138
(b) $\cosh$ et $\sinh$ sur le même graphe.	
Fig.4.13 : Graphe de $\tanh$.	139
Fig.4.14 : (a) Graphe de $\coth$.	140
(b) $\tanh$ et $\coth$ sur le même graphe.	
Fig.4.15 : Graphes de $\cosh$ et de argch .	144
Fig.4.16 : Graphe de $\sinh$ et argsh .	145
Fig.4.17 : Graphes de $\tanh$ et argth .	146
Fig.4.18 : Graphes de $\coth$ et de $\operatorname{argcoth}$.	148
Fig.4.19 : (a) Le cercle trigonométrique.	149
(b) Les axes principaux des fonctions trigonométriques.	
Fig.4.20 : Graphe de $\cos x$.	150
Fig.4.21 : Graphe de $\sin x$.	151
Fig.4.22 : Graphe de $\tan x$.	152
Fig.4.23 : Graphe de $\cot x$.	153
Fig.4.24 : L'arc de $\arccos$.	156
Fig.4.25 : Graphes de $\cos$ et de $\arccos$.	157
Fig.4.26 : L'arc de $\arcsin$.	158
Fig.4.27 : Graphes de $\sin$ et de $\arcsin$.	159
Fig.4.28 : L'arc de $\arctan$.	160
Fig.4.29 : Graphes de $\tan$ et de $\arctan$.	161
Fig.4.30 : L'arc de arccot .	162
Fig.4.31 : Graphes de $\cot$ et de arccot .	163
Fig.4.32 : Graphe de $f(x)$.	178
Fig.4.33 : Solution graphique de l'équation 1.	178
Fig.4.34 : Solution graphique de l'équation 2.	179
Fig.4.35 : Solution graphique de l'inéquation 1.	179
Fig.4.36 : Solution graphique de l'inéquation 2.	179

Chapitre 5 Développement limité

Fig.5.1 : Graphe de e^x et ses trois premières approximations.	192
Fig.5.2 : Graphe de $F(x)$, (Prolongement de $((\sin x)/x)$ à 0).	212

Table des Matières

1	Chapitre 1 Méthodes du raisonnement mathématique	5
1.1	Cours N°1 Éléments de logique mathématique	5
1.1.1	Valeurs de vérité et tableau de vérité	5
1.1.2	Négation d'une proposition	6
1.1.3	Les connecteurs propositionnels	6
1.1.4	Tautologie et contradiction	8
1.1.5	La réciproque et la contraposée d'une implication	9
1.1.6	Lois de Morgan	9
1.2	Cours N°2 Les quantificateurs logiques	12
1.2.1	Introduction	12
1.2.2	Le quantificateur universel $\forall$:	12
1.2.3	Le quantificateur existentiel $\exists$:	13
1.2.4	Négation des quantificateurs	14
1.2.5	Deux quantificateurs de même nature qui se suivent	15
1.2.6	Deux quantificateurs différents qui se suivent	15
1.3	Cours N°3 Méthodes de raisonnement mathématique	17
1.3.1	Raisonnement direct	17
1.3.2	Raisonnement par contraposition	17
1.3.3	Raisonnement par l'absurde	17
1.3.4	Raisonnement par contre-exemple	18
1.3.5	Raisonnement par récurrence	19
1.4	Série d'exercices N°1	21
1.5	Correction de la série d'exercices N°1	25
2	Chapitre 2 Les ensembles, les relations et les applications	37
2.1	Cours N°1 Théorie des ensembles	37
2.1.1	Définitions	37
2.1.2	Rappel des ensembles les plus importants	38
2.1.3	Opérations sur les ensembles	39
2.2	Cours N°2 Relation d'ordre, relation d'équivalence	45
2.2.1	Relation réflexive	45
2.2.2	Relation symétrique	45
2.2.3	Relation transitive	45
2.2.4	Relation antisymétrique	46
2.2.5	Relation d'équivalence	46
2.2.6	Relation d'ordre	47
2.3	Cours N°3 Applications injectives, surjectives, bijectives	50
2.3.1	Définition d'une application	50
2.3.2	Image directe	51

2.3.3	Image réciproque	54
2.3.4	Opérations sur les applications	55
2.3.5	Application injective	57
2.3.6	Application surjective	59
2.3.7	Application bijective	61
2.3.8	Application réciproque (ou inverse) d'une application bijective	62
2.4	Série d'exercices N°2	64
2.5	Correction de la série d'exercices N°2	67
3	Chapitre 3 Les fonctions réelles à une variable réelle	79
3.1	Cours N°1 Limite, continuité d'une fonction	79
3.1.1	Définitions et propriétés	79
3.1.2	Fonctions périodiques	80
3.1.3	Parité d'une fonction	80
3.1.4	Fonctions bornées	82
3.1.5	Monotonie d'une fonction	83
3.1.6	Les limites	85
3.1.7	Théorèmes importants pour calculer les limites	87
3.1.8	Continuité d'une fonction	90
3.1.9	Prolongement par continuité	91
3.1.10	Théorème des valeurs intermédiaires	93
3.2	Cours N°2 Dérivée et différentiabilité d'une fonction	95
3.2.1	Définitions	95
3.2.2	Propriétés	98
3.2.3	Dérivée de la fonction composée	98
3.2.4	Dérivées des fonctions usuelles	99
3.2.5	Dérivées d'ordre supérieur	100
3.2.6	Fonctions monotones et continues	101
3.2.7	Les fonctions réciproques	103
3.2.8	Théorèmes relatifs aux fonctions dérivables	105
3.3	Série d'exercices N°3	108
3.4	Correction de la série d'exercices N°3	111
4	Chapitre 4 Application aux fonctions élémentaires	124
4.1	Cours N°1 Fonctions puissances	124
4.1.1	Exposant entier naturel	124
4.1.2	Exposant entier négatif	125
4.1.3	Les racines énièmes	126
4.1.4	Exposant réel	128
4.2	Cours N°2 Fonctions logarithmiques	130

4.2.1	Fonctions logarithmiques de base a	130
4.2.2	Cas particulier : la fonction logarithmique Népérienne	131
4.3	Cours N°3 Fonctions exponentielles	133
4.3.1	Fonctions exponentielles de base a	133
4.3.2	Cas particulier: fonction exponentielle Népérienne	134
4.4	Cours N°4 Fonctions hyperboliques	136
4.4.1	Introduction	136
4.4.2	Fonction cosinus hyperbolique	137
4.4.3	Fonction sinus hyperbolique	138
4.4.4	Fonction tangente hyperbolique	139
4.4.5	Fonction cotangente hyperbolique	140
4.4.6	Relations entre les fonctions hyperboliques	141
4.5	Cours N°5 Fonctions hyperboliques inverses	143
4.5.1	Fonction argument cosinus hyperbolique	143
4.5.2	Fonction argument sinus hyperbolique	144
4.5.3	Fonction argument tangente hyperbolique	145
4.5.4	Fonction argument cotangente hyperbolique	147
4.5.5	Relations entre les fonctions hyperboliques et les fonctions hyperboliques inverses	148
4.6	Cours N°6 Fonctions trigonométriques	149
4.6.1	Le cercle trigonométrique	149
4.6.2	Fonction cosinus	149
4.6.3	Fonction sinus	150
4.6.4	Fonction tangente	151
4.6.5	Fonction cotangente	152
4.6.6	Relations entre les fonctions trigonométriques	154
4.7	Cours N°7 Fonctions trigonométriques inverses	156
4.7.1	Fonction arccosinus	156
4.7.2	Fonction arcsinus	158
4.7.3	Fonction arctangente	160
4.7.4	Fonction arcotangente	162
4.7.5	Relations entre les fonctions trigonométriques inverses	163
4.8	Série de TD N°4	165
4.9	Correction de la série de TD N°4	169
5	Chapitre 5 Développement limité	190
5.1	Formules de Taylor	190
5.1.1	Formule de Taylor-Young	190
5.1.2	Cas particulier : formule de Taylor-Young au voisinage de 0	191

5.2	Développement limité	192
5.2.1	Introduction	192
5.2.2	Définition	193
5.2.3	Relation entre DL et formule de Taylor-Young	193
5.2.4	Propriétés	194
5.2.5	Développement limité de quelques fonctions usuelles au voisinage de 0	195
5.2.6	Calculs sur les Dls	196
5.3	Applications	199
5.3.1	Valeurs approchées	199
5.3.2	Calculs des limites par les DLs	200
5.3.3	Équations de la tangente et des asymptotes et leurs positions par rapport à la courbe	201
5.4	Série de TD N°5	204
5.5	Correction de la série de TD N°5	206
6	Chapitre 6 Algèbre linéaire	216
6.1	Lois de compositions internes	216
6.2	Espaces vectoriels	216
6.2.1	Propriétés immédiates	217
6.3	Définitions et propriétés élémentaires	218
6.3.1	Vecteurs indépendants, familles liées	218
6.3.2	Sous-espaces vectoriels	218
6.3.3	Générateurs, bases et coordonnées	219
6.3.4	Théorème de la base incomplète	220
6.3.5	Dimension	220
6.3.6	Rang	221
6.4	Applications linéaires	221
6.4.1	Noyau	221
6.4.2	Image	221
6.4.3	Rang d'une application linéaire	222
6.4.4	Matrice associée à une application linéaire	222
6.4.5	Application linéaire associée à une matrice	224
6.5	Changement de base, matrice de passage	225
6.6	Série de TD N°6	227
6.7	Correction de la série de TD N°6	229

1 Chapitre 1 Méthodes du raisonnement mathématique

1.1 Cours N°1 Éléments de logique mathématique

Définition

On appelle proposition mathématique simple toute phrase p qu'on peut juger "vraie" ou "fausse" sans aucune ambiguïté et de manière intemporelle; il n'y a pas une troisième possibilité.

Exemples

p : " $1 \leq 2$ ", a : "le chat est un mammifère",
 q : " $0 > 3$ ", b : "4 est un entier impair",
 r : " x est un entier premier".

p est une proposition **vraie**, q une proposition **fausse**, r n'est pas une proposition, nous avons besoin de plus d'informations pour pouvoir juger la proposition r . Qu'en est-il de a et b ?

1.1.1 Valeurs de vérité et tableau de vérité

On pose "vraie" =1 et "faux"=0. 1 et 0 sont les **valeurs de vérité**.

Le **tableau de vérité** contient tous les cas possibles pour une, deux ou trois propositions.

Dans le cas d'une seule proposition le tableau de vérité contient seulement 2 cas:

p
1
0

Le nombre de possibilités dans le tableau de vérité dépend du nombre de propositions de la manière suivante:

$$\text{nb de possibilités} = (2)^{\text{nb de propositions}}$$

Donc dans le cas de 2 propositions nous avons 4 lignes dans le tableau et dans le cas de 3 propositions nous avons 8 lignes et ainsi de suite. Nous verrons cela plus en détails dans la suite.

1.1.2 Négation d'une proposition

On note $\bar{p}$ le contraire logique (ou la négation) de p , par exemple:

$\bar{a}$: "le chat n'est pas un mammifère", qui est fausse.

$\bar{b}$: "4 n'est pas un nombre impair", qui est vraie.

Le tableau de vérité donne:

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Remarque: La négation de la négation $\bar{\bar{p}}$ est p .

1.1.3 Les connecteurs propositionnels

À partir des propositions simples, on construit d'autres propositions dites composées, en utilisant les connecteurs suivants:

$\wedge$ et, $\vee$ ou, $\Rightarrow$ implique, $\Leftrightarrow$ équivaut (ou est équivalent à).

- **La conjonction "et":**

$p \wedge q$: "1 $\leq$ 2 **et** 0 $>$ 3". (Commutatif).

Règle 1 $p \wedge q$: est vraie si p et q sont vraies.

Notre exemple est donc faux.

- **La disjonction "ou" :**

$p \vee q$: "1 $\leq$ 2 **ou** 0 $>$ 3". (Commutatif).

Règle 2 $p \vee q$: est fausse si p et q sont fausses.

Notre exemple est donc vrai.

- **L'implication : " $\Rightarrow$ " : $p \Rightarrow q$:**

Là, p est l'hypothèse et q est la conclusion (ou la conséquence). (Non commutatif).

"Si 1 $\leq$ 2 **alors** 0 $>$ 3".

Règle 3 $p \Rightarrow q$: est fausse si p est vraie et q est fausse.

Notre exemple est donc faux.

- **L'équivalence " $\Leftrightarrow$ "** : $p \Leftrightarrow q$: " $1 \leq 2$ veut exactement dire que $0 > 3$ ".

Nous pouvons aussi lire : " $1 \leq 2$ **si et seulement si** $0 > 3$ ".
ou bien " $1 \leq 2$ **est équivalent à** $0 > 3$ ". (Commutatif).

Règle 4 $p \Leftrightarrow q$: est vraie si p et q ont la même valeur de vérité.

Notre exemple est donc faux

Voici sur le tableau de vérité un résumé des valeurs de vérité des propositions (ou phrases) composées:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Remarques importantes

1/ Il est important de savoir que $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{p} \vee q]$

2/ Il faut retenir que l'équivalence est une double implication ou bien une implication dans les deux sens, i.e.,¹ :

$$[(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

Exercice

Soit les deux propositions p : "Les chiens aboient", et q : "La caravane passe".

Traduire les phrases suivantes:

- (a) "Les chiens n'aboient pas".
- (b) "Si la caravane passe alors les chiens aboient".
- (c) "La caravane ne passe pas ou les chiens aboient".
- (d) "Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas".

Correction

(a): $\bar{p}$ (b): $q \Rightarrow p$ (c) $\bar{q} \vee p$ (d) $\bar{p} \wedge \bar{q}$

¹i.e = **id est** abréviation de l'expression en Latin qui signifie "c'est à dire que" et qui s'utilise encore couramment en mathématiques.

		(a)	(b)		(c)	(d)
p	q	$\bar{p}$	$q \Rightarrow p$	$\bar{q}$	$\bar{q} \vee p$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1

Cas de trois propositions

Exercice

Soit P, Q et R trois propositions, tracer le tableau de vérité de : $\bar{P}, (P \wedge Q) \vee R, \bar{P} \Rightarrow R, Q \iff \bar{P}$.

Correction

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \vee R$	$\bar{P}$	$\bar{P} \Rightarrow R$	$Q \iff \bar{P}$
1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0

1.1.4 Tautologie et contradiction

Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie et une contradiction est une proposition toujours fausse.

Exemple

Tracer le tableau de vérité de $(p \wedge \bar{p})$ puis de $(p \vee \bar{p})$. Conclure.

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
1	0	0	1
0	1	0	1

$(p \vee \bar{p})$ est une tautologie et $(p \wedge \bar{p})$ est une contradiction.

1.1.5 La réciproque et la contraposée d'une implication

- **La réciproque :** On appelle réciproque de $p \Rightarrow q$ l'implication $q \Rightarrow p$.

Exemple

p : "Je suis à Tlemcen", q : "Je suis en Algérie".

$p \Rightarrow q$: Si "je suis à Tlemcen" alors "je suis en Algérie", donc $p \Rightarrow q$ est vraie.

Par contre $q \Rightarrow p$ est la proposition si "je suis en Algérie" alors "je suis à Tlemcen", qui est fausse.

- **La contraposée :** On appelle contraposée de $p \Rightarrow q$ l'implication $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Dans l'exemple précédent, $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ est la phrase : si "je ne suis pas en Algérie" alors "je ne suis pas à Tlemcen" qui est vraie.

Remarque importante :

Il faut retenir que l'implication est équivalente à sa contraposée et non pas à sa réciproque, i.e:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

1.1.6 Lois de Morgan

C'est les lois qui nous donnent la négation des propositions composées par les connecteurs logiques.

Exercice

Montrer par le tableau de vérité les lois de Morgan suivantes:

1) $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$

2) $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

3) $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$

4) Pour trouver la négation de l'équivalence on utilise sa définition, (propriété page 7):

$[(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$. Puis on déduit $\overline{(p \Leftrightarrow q)}$.

Correction

1) $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$

			////////			////////	
p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2) $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

			////////			////////	
p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

3) $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$

			////////		////////	
p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Nous pouvons aussi se passer du tableau de vérité et procéder comme suit:

$$\begin{aligned}
 (p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \text{ (définition de } \Rightarrow) \\
 \text{Donc } \overline{(p \Rightarrow q)} &\Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee q)} \text{ (loi de Morgan)} \\
 \overline{(p \Rightarrow q)} &\Leftrightarrow (\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \\
 \overline{(p \Rightarrow q)} &\Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})
 \end{aligned}$$

4) $[(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

		////////			////////	
p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$[(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Trouver la négation de " $\Leftrightarrow$ " :

$$\begin{aligned}
 \text{Puisque } (p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)], \\
 \text{alors : } \overline{(p \Leftrightarrow q)} &\Leftrightarrow \overline{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]} \\
 &\Leftrightarrow \overline{(p \Rightarrow q)} \vee \overline{(q \Rightarrow p)} \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})
 \end{aligned}$$

Finalement on retient que:

$$\overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})].$$

1.2 Cours N°2 Les quantificateurs logiques

1.2.1 Introduction

Rappelons qu'un ensemble est un "espace" qui rassemble des éléments qui ont **tous** une caractéristique **commune**.

Exemple

X est l'ensemble de **tous** les entiers pairs compris entre 1 et 11.

a) Nous pouvons le définir par une liste: $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

b) Ou bien nous pouvons le définir en précisant la propriété (ou la caractéristique) commune: $X = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ est pair et } 1 < x < 11\}$.

Remarque $2 \in X$, mais $12 \notin X$.

Exemple introductif

On note $P(x)$ une proposition mathématique qui dépend de x . Par exemple $P(x) : "x > 1"$.

Si $x = 5$ la proposition $P(x)$ est vraie, si $x = 0$ la proposition est fausse.

Pour juger de la valeur de vérité d'une phrase mathématique qui dépend de x , nous devons avoir plus d'informations sur ce x , quelle est sa valeur? Ou plutôt quel est son domaine?

1.2.2 Le quantificateur universel $\forall$:

La phrase mathématique $(\forall x \in E, P(x))$ veut dire que la proposition mathématique $P(x)$ est vérifiée pour **TOUS** les x dans E **un à un**, elle est traduite par :

"Quelque soit l'élément x de E , x vérifie la proposition $P(x)$ ".

Ou bien,

"Pour tout élément x appartenant à E , x vérifie la proposition $P(x)$ ".

Ou bien,

"Pour chaque élément x dans E , x vérifie la proposition $P(x)$ ".

Si on veut montrer qu'une proposition du type $(\forall x \in E, P(x))$ est fausse alors il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Ce x bien précis qui nous fait voir que notre proposition est fausse est appelé un **contre-exemple** à la proposition $(\forall x \in E, \quad P(x))$. **On dit qu'on a utilisé ici un raisonnement par contre-exemple.**

Exemple

Montrer que la proposition suivante (p) est fausse

$$p : (\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 1).$$

Eh bien, un contre-exemple à la proposition (p) est $x = \frac{1}{2}$. C'est un nombre précis qui contredit notre phrase (p) , par conséquent elle est fausse.

Exemples

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad n < n + 1)$ proposition vraie,
- 2) $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ est pair})$ fausse, il suffit de prendre $n = 3$,
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq 1)$ fausse, il suffit de prendre $x = 2$,
- 4) $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0)$ vraie.

Traduction de 1): "Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}$, n est strictement plus petit que $n + 1$ ".

Attention: on ne mélange pas l'expression linguistique avec l'expression mathématique, on écrit soit tout en langue, soit tout en maths, mais on ne mélange pas les deux en même temps.

1.2.3 Le quantificateur existentiel $\exists$:

La proposition $(\exists x \in E / \quad P(x))$ veut dire qu'il existe **au moins un (dans le sens un ou plusieurs mais certainement au moins un)** élément x dans E , qui vérifie la proposition $P(x)$, elle est traduite par :

"Il existe (au moins) un élément x de E , tel que, x vérifie la proposition $P(x)$ ".

Si nous voulons montrer qu'une proposition du type $(\exists x \in E / \quad P(x))$ est vraie alors il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vérifiée. Ce x bien précis qui nous fait voir que notre proposition est vraie est un **exemple direct, nous utilisons donc ici un raisonnement direct.**

Exemples

- 1) $(\exists n \in \mathbb{N} / n > n + 1)$ fausse,
- 2) $(\exists n \in \mathbb{N} / n \text{ est pair})$ vraie, il suffit de prendre $n = 2$,
- 3) $(\exists x \in \mathbb{R} / x < 1)$ vraie, il suffit de prendre $x = -1$,
- 4) $(\exists n \in \mathbb{N}^* / n < 1)$ fausse.

Traduction de 1): "Il existe au moins un entier naturel n dans $\mathbb{N}$ tel que, n est strictement plus grand que $n + 1$."

Remarque

Nous avons aussi les quantificateurs suivants:

*) ! : "**Il existe au plus**", qui veut dire il existe au plus un élément dans l'ensemble considéré qui vérifie la propriété énoncée. Mais il n'est pas très utilisé en mathématiques, on préfère souvent le remplacer par une expression linguistique.

*) $\exists!$: "**Il existe un et un seul**", qui assure l'**existence** et l'**unicité** d'un élément dans l'ensemble considéré qui vérifie la propriété énoncée.

1.2.4 Négation des quantificateurs

$$1) \overline{(\forall x \in E, p(x))} \Leftrightarrow \exists x \in E / \overline{p(x)}.$$

Exemple

$$\overline{(\forall n \in \mathbb{N}, n < n + 1)} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / n \geq n + 1.$$

$$2) \overline{(\exists x \in E / p(x))} \Leftrightarrow \forall x \in E, \overline{p(x)}.$$

Exemple

$$\overline{(\exists n \in \mathbb{N}^* / n \geq 1)} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n < 1.$$

Remarque

Ne pas oublier que : $\overline{(\leq)} \Leftrightarrow (>)$, $\overline{(\geq)} \Leftrightarrow (<)$ et $\overline{(\equiv)} \Leftrightarrow (\neq)$.

1.2.5 Deux quantificateurs de même nature qui se suivent

Dans ce cas, nous gardons les mêmes règles de réflexion et d'évaluation logique que la section plus haute.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$ vraie,
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq x + y$ fausse, il suffit de prendre $x = 1$ et $y = 0$,
- 3) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / nm \leq 18$ vraie, il suffit de prendre $n = m = 1$,
- 4) $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / n + m < 0$ fausse.

Traduction de 1) "Quelque soit x dans $\mathbb{R}$, quelque soit y dans $\mathbb{R}$, x et y vérifient $x + y = y + x$.

Traduction de 3) "Il existe n qui appartient à $\mathbb{N}$, il existe aussi au moins un m appartenant à $\mathbb{N}$, tel que $n.m$ est inférieur ou égale à 18.

1.2.6 Deux quantificateurs différents qui se suivent

1) Dans une proposition, quand le "quelque soit" est suivi par "il existe", cela veut dire que l'élément "qui doit exister" dépend de l'élément qui est "quelconque".

Exemples

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$

En l'occurrence ici : y dépend de x . Notre phrase a) est vraie.

Nous devons donner le y en fonction de x pour prouver la véracité de notre proposition.

Dans notre exemple, il suffit de prendre $y = |x| + 1$ par exemple.

Dans le cas où elle est fausse nous devons trouver un contre-exemple:

b) La phrase $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{x}$ est fausse, il suffit de prendre $x = 0$.

2) Quand "il existe" vient avant le "quelque soit", les choses changent...

Ici, l'élément qui "doit exister" est le même pour tous les autres éléments qui sont "quelconques", c'est à dire que là y est fixé, et tous les x doivent vérifier le reste de la phrase pour ce même y .

Exemples

$$a) \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$$

Notre exemple veut dire qu'il y a un y fixé pour lequel tous les réels lui sont inférieurs.

La phrase a) est donc fausse, il suffit de prendre $x = |y| + 1$.

$$b) \exists n \in \mathbb{N} / \forall m \in \mathbb{N}, m^2 \geq n$$

vrai, il suffit de prendre $n = 0$.

Remarque

Si on a du mal à juger la valeur de vérité d'une proposition, on essaye de voir sa négation, surtout pour les propositions qui commencent par $\exists$.

Exercice

Traduire les propositions suivantes, juger leur valeur de vérité puis donner leur négation:

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x + y > 0.$$

$$2) \exists n \in \mathbb{N} / \forall m \in \mathbb{N}, m^2 < n$$

Correction

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x + y > 0, \quad \text{vraie, il suffit de prendre } y = -x + 1.$$

$$\overline{1) \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0.}$$

$$2) \exists n \in \mathbb{N} / \forall m \in \mathbb{N}, m^2 < n, \quad \text{fausse, on peut prendre } m = n^2.$$

$$\overline{2) \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m^2 \geq n.}$$

Traduction de 1)

"Quelque soit x dans $\mathbb{R}$, il existe un y dans $\mathbb{R}$, tel que x et y vérifient $x + y > 0$.

Traduction de 2)

"Il existe au moins un entier naturel n tel que, pour tout entier naturel m , on a m^2 est strictement plus petit que n .

1.3 Cours N°3 Méthodes de raisonnement mathématique

1.3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple Montrer que si $a = b \Rightarrow \frac{a+b}{2} = b$ (facile).

1.3.2 Raisonnement par contraposition

Nous avons montré par le tableau de vérité que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$.

La proposition $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ est appelée **la contraposée** de la proposition $(p \Rightarrow q)$.

Puisqu'elles ont le même sens, au lieu de montrer $(p \Rightarrow q)$ on montre sa contraposée $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$, (pourvu qu'elle soit plus simple à monter quand même!).

Exemple

On veut montrer que : **Si** " n^2 est impair" **alors** " n est impair".

p : " n^2 est impair", q : " n est impair".

On veut donc montrer $(p \Rightarrow q)$, on va utiliser sa contraposée $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$.

$\bar{q}$: " n est pair", $\bar{p}$: " n^2 est pair". $\bar{q}$ est l'hypothèse, $\bar{p}$ est la conclusion.

$$\begin{array}{ll} \text{Si } "n \text{ est pair}" & \text{alors } \exists k \in \mathbb{N}/n = 2k. \\ \Rightarrow & n^2 = (2k)^2. \\ \Rightarrow & n^2 = 4k^2 = 2(2k^2). \\ \Rightarrow & \exists m (= 2k^2) \in \mathbb{N}/n^2 = 2m. \\ \Rightarrow & n^2 \text{ est pair.} \end{array}$$

On a montré que **Si** " n est pair", **alors** " n^2 est pair", qui veut **exactement dire** que **Si** " n^2 est impair" **alors** " n est impair".

1.3.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer p par l'absurde, on suppose que sa négation $\bar{p}$ est vraie. Après quelques pas de démonstration on tombe sur une phrase qui contredit l'hypothèse $\bar{p}$, (ou contredit la logique), donc l'hypothèse $\bar{p}$ est fausse, ce qui veut dire que p est vraie:

Le but: on veut montrer p .
$\rightarrow$ Hypothèse: on suppose $\bar{p}$.
$\rightarrow$ Démonstration $\rightarrow$ contradiction avec $\bar{p}$.
$\rightarrow$ Conclusion: $\bar{p}$ est fausse, donc p est vraie.

Exemples

1/ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0.$$

Supposons que: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$. Alors : $0 \leq x^2 = -1$!! C'est une contradiction logique. Notre supposition est donc fausse, ce qui fait que son contraire logique (sa négation) est vraie.

2/ Le but: on veut montrer $\bar{p}$: " $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ".

Pour montrer $\bar{p}$, supposons son contraire p : " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ".

$\rightarrow$ Hypothèse : p : " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ".

Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}^* / \sqrt{2} = \frac{n}{m} \text{ et } \text{pgcd}(n, m) = 1.$$

$\rightarrow$ Démonstration:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{n}{m} &\Rightarrow 2m^2 = n^2. \\
&\Rightarrow n^2 \text{ est pair, donc } n \text{ est pair, (la preuve se trouve dans la section plus haut).} \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k. \\
&\Rightarrow n^2 = 4k^2. \\
&\Rightarrow 2m^2 = 4k^2. \\
&\Rightarrow m^2 = 2k^2. \\
&\Rightarrow m^2 \text{ est pair, donc } m \text{ est pair.} \\
&\Rightarrow \text{pgcd}(n, m) = 2.
\end{aligned}$$

Donc $\text{pgcd}(n, m) = 2$

C'est une contradiction avec l'hypothèse $\text{pgcd}(n, m) = 1$!

$\rightarrow$ Conclusion:

" $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ " est fausse, donc " $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ " est vraie.

1.3.4 Raisonnement par contre-exemple

Si on veut montrer qu'une proposition du type $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour

montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Ce x bien précis qui nous fait voir que notre proposition est fausse est appelé un **contre-exemple** à la proposition $(\forall x \in E, P(x))$.

Exemple

Montrer que la proposition suivante est fausse $p : (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0)$.

Démonstration:

Un contre-exemple pour la proposition (p) est $x = 0$. C'est un nombre précis qui contredit notre phrase (P), par conséquent, elle est fausse.

1.3.5 Raisonnement par récurrence

On utilise la récurrence pour montrer des énoncés comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

On passe par 3 étapes:

1/Vérification :

On doit vérifier que $p(0)$ est vraie, ($p(1)$ si on travaille dans $\mathbb{N}^*$).

2/Hérédité

On suppose que $p(n)$ est vraie pour n fixé et on utilise $p(n)$ pour démontrer que $p(n+1)$ est vraie aussi.

3/Conclusion:

On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Exemple

montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (4^n - 1)$ est divisible par 3.

1/Vérification :

Pour $n = 1$, on a $p(1)$: $(4^1 - 1) = 3$, 3 est divisible par 3, donc $p(1)$ est vraie.

2/Hérédité :

On suppose que $p(n)$ est vraie: $(4^n - 1)$ est divisible par 3.

Donc $\exists k \in \mathbb{N}/(4^n - 1) = 3k \dots (1)$.

Pour $p(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(4^{n+1} - 1) &= (4 \cdot (4^n) - 1). \\
(1) &\Leftrightarrow (4^n) = 3k + 1. \\
&= (4 \cdot (3k + 1) - 1). \\
&= 12k + 4 - 1. \\
&= 12k + 3. \\
&= 3(4k + 1). \\
\exists k' &= (4k + 1) \in \mathbb{N} / (4^{n+1} - 1) = 3k'. \\
\text{Donc } (4^{n+1} - 1) &\text{ est divisible par 3.}
\end{aligned}$$

Ce qui fait que $p(n + 1)$ est vraie.

3/**Conclusion:**

$\forall n \in \mathbb{N}^*, (4^n - 1)$ est divisible par 3.

1.4 Série d'exercices N°1

Exercice 1

Écrire sous forme de propositions **composées** les énoncés suivants et donner leurs négations:

1. 7 est un entier pair et premier.
2. Le soleil ne brille pas et la terre est ronde.
3. Oran est une ville Algérienne ou $6 = 3 + 1$.
4. Si Omar joue à la flûte, alors il joue à la guitare.
5. x est un entier pair veut exactement dire que x divise 2.

Exercice 2

Soit P une proposition. En dressant la table de vérité, montrer que la proposition $P \wedge \overline{P}$ est une contradiction et que la proposition $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.

Exercice 3

Soient P, Q deux propositions quelconques.

1. Construire la table de vérité de la proposition suivante:

$$\overline{(P \vee Q)} \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

2. Montrer les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} a) \quad & (P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \vee Q) \\ b) \quad & (P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \quad (\text{la contraposée}) \end{aligned}$$

Exercice 4

Soient les trois propositions suivantes: p : "Je pars", q : "Tu restes", r : "Il n'y a personne".

Traduire les formules logiques suivantes en Français, puis tracer leur tableau de vérité correspondant:

$$(a) \quad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r. \qquad (b) \quad (\overline{p} \vee \overline{q}) \Rightarrow \overline{r}.$$

Exercice 5

Sans utiliser le tableau de vérité...

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{l} a) \quad [P \Rightarrow (Q \wedge \overline{R})] \vee (Q \vee R) \\ b) \quad [\overline{P} \vee (Q \wedge \overline{R})] \vee (Q \vee R) \end{array}$$

2. Juger de la valeur de vérité de la propositions suivante :

$$[(P \Rightarrow \overline{Q}) \wedge (P \wedge Q) \wedge \overline{R}] \Rightarrow (R \wedge Q)$$

Exercice 6

Trois personnes, x, y et z sont convoquées devant un juge pour un crime commis dans le village, voici leurs déclarations:

x déclare : "z est coupable et y est innocent".

y déclare : "Je suis innocent, mais au moins l'un des deux autres est coupable".

z déclare : "Si x est coupable, alors y est coupable aussi".

Nous posons p, q et r les propositions suivantes (x est innocent), (y est innocent), (z est innocent).

1. Exprimer les déclarations des trois accusés en fonction des propositions simples p, q et r, puis donner leur tableau de vérité.
2. Supposons qu'ils sont tous innocents, qui est ce qui a menti dans sa déclaration?
3. Supposons qu'ils ont tous dit la vérité dans leurs déclarations, qui est innocent et qui est coupable?
4. Supposons que les innocents ont dit la vérité et que les coupables ont menti, alors qui est innocent et qui est coupable?
5. Est-il possible que les innocents ont menti et que les coupables ont dit la vérité?

Exercice 7

Écrire à l'aide des quantificateurs logiques les phrases suivantes, juger leur valeur de vérité, puis écrire leur négation.

- Le carré de tout nombre réel est positif.

- Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1.
- Pour tout entier naturel x , il existe un entier naturel y tel que, pour tout entier naturel z , la relation $z < x$ implique la relation $z < x + y$.

Exercice 8

1/ L'implication suivante est-elle vraie ou fausse? Donner sa négation et sa contraposée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x < 0 \Rightarrow x \leq x^2]$$

2/ Soient les propositions suivantes:

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0. \quad (b) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$$

Les propositions (a), (b) sont-elles vraies ou fausses? Donner leurs négations.

3/ Écrire la négation, la réciproque et la contraposée de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / \quad x \leq 0 \Rightarrow y > 2.$$

Exercice 9

1. Montrer par l'absurde que

a)

$$\forall a, b \geq 0, \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

b) Soit n un entier naturel. Montrer que tout entier de la forme $(4n+3)$ n'est pas un carré parfait.

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = 3x + 2$. Montrer que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Montrer que la proposition suivante est fausse:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (6n-1) \text{ est un entier premier.}$$

4. Montrer par récurrence que

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, (4^n + 6n - 1) \text{ est un multiple de } 9.$$

$$b) \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 10

1/ Montrer que tout entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.

2/Montrer maintenant par contraposition que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

Si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

1.5 Correction de la série d'exercices N°1

Exercice 1

Écrire sous forme de propositions **composées** les énoncés suivants et donner leurs négations:

1. 7 est un entier pair et premier.

On pose p : "7 est un entier pair", q : "7 est un nombre premier", on trouve (1): $p \wedge q$.

Donc

$$\overline{(1)} : \overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}.$$

"7 n'est pas un entier pair ou 7 n'est pas un entier premier".

Mais comme le contraire de "pair" c'est "impair" et vice versa, on peut dire:

$\overline{(1)}$: "7 est un entier impair ou 7 n'est pas un entier premier".

2. Le soleil ne brille pas et la terre est ronde.

On pose p : "Le soleil brille", q : "la terre est ronde", on trouve (2): $\bar{p} \wedge q$.

Donc

$$\overline{(2)} : \overline{(\bar{p} \wedge q)} \Leftrightarrow p \vee \bar{q}.$$

"Le soleil brille ou la terre n'est pas ronde".

3. Oran est une ville Algérienne ou $6 = 3 + 1$.

On pose p : "Oran est une ville Algérienne", q : " $6 = 3 + 1$ ", on trouve (3): $p \vee q$.

Donc

$$\overline{(3)} : \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}.$$

"Oran n'est pas une ville Algérienne et $6 \neq 3 + 1$ ".

4. Si Omar joue à la flûte, alors il joue à la guitare.

On pose p : " Omar joue à la flûte ", q : "il joue à la guitare", on trouve (4): $p \Rightarrow q$.

$$\overline{(4)} : \overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q},$$

"Omar joue à la flûte mais il ne joue pas à la guitare".

5. x est un entier pair veut exactement dire que x divise 2.

On pose p : " x est un entier pair ", q : " x divise 2", on trouve (5): $p \Leftrightarrow q$.

$$\overline{(5)} : \overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})],$$

$[(x \text{ est un entier pair et } x \text{ ne divise pas } 2) \text{ ou bien } (x \text{ divise } 2 \text{ et } x \text{ n'est pas un entier pair})]$.

Exercice 2

Soit P une proposition. En dressant la table de vérité, montrer que la proposition $P \wedge \bar{P}$ est une contradiction et que la proposition $P \vee \bar{P}$ est une tautologie.

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
1	0	0	1
0	1	0	1

Exercice 3

Soient P, Q deux propositions quelconques.

1. Construire la table de vérité de la proposition suivante:

$$\overline{(P \vee Q)} \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

			////////			////////	
p	q	$p \vee q$	$\bar{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$(\bar{p \vee q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1

2. Montrer les équivalences suivantes:

a) $(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \vee Q)$

		////////			////////	
p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$(p \Rightarrow q) \iff (\bar{p} \vee q)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

b) $(p \Rightarrow q) \iff (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ (la contraposée)

		////////			////////	
p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	$(p \Rightarrow q) \iff (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Exercice 4

Soient les trois propositions suivantes: p : " Je pars", q : "Tu restes", r : "Il n'y a personne".

Traduire les formules logiques suivantes en Français, puis tracer leur tableau de vérité correspondant:

(a) $(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow r$.

(a) Si je pars et que tu ne restes pas, alors il n'y a personne !

p	q	r	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow r$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

(b) $(\bar{p} \vee \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$.

(b) Si je ne pars pas ou que tu ne restes pas, alors il y a quelqu'un !

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\bar{r}$	$(\bar{p} \vee \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

Exercice 5

1. Sans utiliser la table de vérité...
2. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} a) & [P \Rightarrow (Q \wedge \bar{R})] \vee (Q \vee R) \\ b) & [\bar{P} \vee (Q \wedge \bar{R})] \vee (Q \vee R) \end{aligned}$$

Nous remarquons que les deux propositions a) et b) ont un terme commun qui est $\vee(Q \vee R)$. Il suffit donc de montrer l'équivalence entre les deux premiers termes : $[P \Rightarrow (Q \wedge \bar{R})]$ et $[\bar{P} \vee (Q \wedge \bar{R})]$.

Nous avons vu dans le cours que $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\bar{A} \vee B]$ donc $[P \Rightarrow (Q \wedge \bar{R})] \Leftrightarrow [\bar{P} \vee (Q \wedge \bar{R})]$. CQFD.

3. Juger de la valeur de vérité de la proposition suivante :

$$[(P \Rightarrow \bar{Q}) \wedge (P \wedge Q) \wedge \bar{R}] \Rightarrow (R \wedge Q)$$

Cette proposition est une implication. Le seul cas où elle est fausse, c'est quand la première est vraie et la seconde est fausse. Est-ce que ce cas est possible?

Posons (A): $[(P \Rightarrow \bar{Q}) \wedge (P \wedge Q) \wedge \bar{R}]$. (A) est-elle vraie?

Eh bien, (A) est une conjonction, elle est vraie si les trois propositions $(P \Rightarrow \bar{Q})$, $(P \wedge Q)$, $\bar{R}$ sont toutes vraies en même temps.

Or, on remarque que $(P \Rightarrow \bar{Q})$ est en fait équivalente à $\bar{P} \vee \bar{Q}$

On a donc

$$\begin{aligned}(A) &\Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q}) \wedge (P \wedge Q) \wedge \overline{R} \\ &\Leftrightarrow (\overline{P \wedge Q}) \wedge (P \wedge Q) \wedge \overline{R}\end{aligned}$$

Nous avons donc une contradiction: $(\overline{P \wedge Q}) \wedge (P \wedge Q)$ qui est toujours fausse. Donc quelque soit la valeur de vérité de $\overline{R}$, la conjonction totale (A) est fausse. Au final, notre implication est toujours vraie.

Exercice 6

Trois personnes, x, y et z sont convoquées devant un juge pour un crime commis dans le village, voici leurs déclarations:

x déclare : "z est coupable et y est innocent".

y déclare : "Je suis innocent, mais l'un des deux autres est coupable".

z déclare : "Si x est coupable, alors y est coupable aussi".

Notons p, q et r les propositions suivantes (x est innocent), (y est innocent), (z est innocent).

1. Exprimer les déclarations des trois accusés en fonction des propositions simples p, q et r, puis donner leur tableau de vérité.

$$x : \overline{r} \wedge q, \quad y : q \wedge (\overline{p} \vee \overline{r}), \quad z : \overline{p} \Rightarrow \overline{q}$$

						x		y	z
p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{r}$	$\overline{r} \wedge q$	$\overline{p} \vee \overline{r}$	$q \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})$	$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1

2. Supposons que x, y et z sont tous innocents, qui-est ce qui a menti dans sa déclaration?

Le cas où ils sont tous innocents correspond à la première ligne du tableau, en examinant la valeur de vérité des déclarations on se rend compte que x et y ont menti.

3. Supposons que x, y et z ont tous dit la vérité dans leurs déclarations, qui est innocent et qui est coupable?

Le cas où ils ont tous dit la vérité correspond au cas de toutes les déclarations vraies, ce qui est représenté par la deuxième ligne sur le tableau, et là nous pouvons voir que x et y sont innocents mais z est coupable.

4. Supposons que les innocents ont dit la vérité et que les coupables ont menti, alors qui est innocent et qui est coupable?

Ce cas correspond à une concordance entre les valeurs de vérité des propositions simples et de leurs déclarations, ce qui est représenté par l'avant dernière ligne du tableau, ce qui donne que x et y sont coupables et z est innocent.

5. Est-il possible que les innocents ont menti et que les coupables ont dit la vérité?

Ce cas correspond à une discordance entre (toutes) les propositions simples et leurs déclarations, ce qui n'est représenté dans aucun cas dans le tableau, donc, non, il n'est pas possible que les innocents aient menti et que les coupables aient dit la vérité.

Exercice 7

Écrire à l'aide des quantificateurs logiques les phrases suivantes, juger leur valeur de vérité, puis écrire leur négation.

- Le carré de tout nombre réel est positif.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

C'est vrai, négation :

$$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 < 0.$$

- Pour chaque réel, on peut trouver un entier naturel tel que leur produit soit strictement plus grand que 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / (x.n) > 1.$$

C'est faux, il suffit de prendre $x = 0$, négation :

$$\exists x \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, (x.n) \leq 1.$$

- Pour tout entier naturel x , il existe un entier naturel y tel que, pour tout entier naturel z , la relation $z < x$ implique la relation $z < x + y$.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} / \forall z \in \mathbb{N} \quad z < x \Rightarrow z < x + y.$$

C'est vrai, il suffit de prendre $y = x$.

Négation :

$$\exists x \in \mathbb{N} / \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N} / (z < x) \wedge (z \geq x + y).$$

Exercice 8

1/ L'implication suivante est-elle vraie ou fausse? Donner sa négation et sa contraposée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x < 0 \Rightarrow x \leq x^2]$$

L'implication est vraie.

Négation :

$$\exists x \in \mathbb{R} / (x < 0) \wedge (x > x^2).$$

Contraposée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [(x > x^2) \Rightarrow (x > 0)]$$

2/ Soient les propositions suivantes:

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0. \quad (b) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$$

Les propositions (a), (b) sont-elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

(a) est fausse, il suffit de prendre x et y tous les deux positifs, par exemple $x = 1$ et $y = 2$.

$$\overline{(a)} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$$

(b) est vraie, il suffit de prendre $x = -1$ par exemple.

$$\overline{(b)} : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \leq x.$$

3/ Écrire la négation, la réciproque puis la contraposée de la proposition suivante :

$$(p) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / \quad x \leq 0 \Rightarrow y > 2.$$

Négation :

$$\overline{(p)} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq 0) \wedge y \leq 2$$

Réciproque:

$$(R) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / \quad y > 2 \Rightarrow x \leq 0$$

Contraposée :

$$(C) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / \quad y \leq 2 \Rightarrow x > 0$$

Exercice 9

1. Montrer par l'absurde que

a)

$$\forall a, b \geq 0, \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

L'absurde consiste à supposer le contraire de la proposition à démontrer et tomber sur une contradiction.

Supposons donc le contraire de notre implication : rappelons que $(\overline{p \Rightarrow q}) \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

Soient a et $b \geq 0$ tels que $(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}) \wedge a \neq b$.

Si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a + a^2 = b + b^2$ donc $a - b + a^2 - b^2 = 0$ ce qui fait que:

$$(a - b)(1 + a + b) = 0.$$

$$\text{Donc soit } a = b, \text{ soit } a + b = -1$$

Mais comme $a \neq b$ (par l'hypothèse de l'absurde), la seule possibilité c'est que $a + b = -1$, ce qui est impossible puisque les deux nombres a et b sont positifs.

b) Soit n un entier naturel. Montrer que tout nombre de la forme $(4n + 3)$ n'est pas un carré parfait.

Supposons qu'il existe au moins un $n \in \mathbb{Z} / (4n + 3)$ soit un carré parfait i.e, $\exists a \in \mathbb{N} / (4n + 3) = a^2$

$$\begin{aligned}
(4n+3) &= a^2 \\
\Rightarrow n &= \frac{a^2-3}{4} \\
n &= \frac{a^2}{4} - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Si a est pair, il est clair que n n'est pas naturel, si a est impair, on aura:
 $\exists k \in \mathbb{N} / a = 2k+1$ donc $n = \frac{k^2+2k+1}{4} - \frac{3}{4}$,

Donc $n = \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$, il est clair que n n'est pas naturel dans ce cas non plus.

Dans les deux cas nous avons une contradiction.

Remarque:

On aurait pu procéder sans utiliser l'absurde, il suffit de voir que pour n'importe quel entier n , le reste de la division de n par 4, appelons le r , $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ donc le reste de la division de n^2 par 4 $\in \{0, 1\}$. On écrit :

$$n^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{4} \quad (\equiv \text{ opération de congruence}).$$

Et comme

$$(4n+3) \equiv 3 \pmod{4},$$

alors $(4n+3)$ ne peut pas être un carré parfait.

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = 3x + 2$. Montrer que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

On procède par contraposée, si (p): $x_1 \neq x_2$ et (q) $f(x_1) \neq f(x_2)$ alors on veut montrer que $p \Rightarrow q$.

Par la contraposée, il suffit de montrer que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

CQFD².

3. Montrer que la proposition suivante est fausse:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (6n-1) \text{ est un entier premier.}$$

²CQFD = Ce Qu'il fallait démontrer.

On procède par contre-exemple, on remarque que pour $n = 6$, $(6n - 1) = 35$, qui n'est pas un entier premier.

Ce qui contredit notre proposition, d'où sa fausseté.

4. Montrer par récurrence que

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(4^n + 6n - 1)$ est un multiple de 9.

1/Vérification

Pour $n = 0$, on a $p(0)$: $(4^0 + 6(0) - 1) = 0$, 0 est divisible par 9, donc $p(0)$ est vraie.

2/Hérédité

On suppose que $p(n)$ est vraie pour n fixé: $(4^n + 6n - 1)$ est divisible par 9, et montrons que $p(n + 1)$ est aussi vraie, i.e que $(4^{n+1} + 6(n + 1) - 1)$ est aussi divisible par 9.

Si $(4^n + 6n - 1)$ est divisible par 9, alors $\exists k \in \mathbb{N}/(4^n + 6n - 1) = 9k \dots (1)$

Pour $p(n + 1)$:

$$\begin{aligned} (4^{n+1} + 6(n + 1) - 1) &= (4 \cdot (4^n) + 6n + 6 - 1) \\ &= (4 \cdot (9k - 6n + 1) + 6n + 6 - 1) \\ &= (4 \cdot 9k - 3 \cdot 6n + 9) \\ &= 9(4k - 2n + 1) \\ \text{Donc } \exists k' &= (4k - 2n + 1) \in \mathbb{N}/(4^{n+1} + 6n - 1) = 9k'. \\ \text{Par suite, } &(4^{n+1} + 6n - 1) \text{ est divisible par 9.} \end{aligned}$$

Ce qui fait que $p(n + 1)$ est vraie.

3/Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(4^n + 6n - 1)$ est divisible par 9.

$$\text{b) } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

1/Vérification

Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 k(k+1)(k+2) = 6$, et $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) = 6$, donc $p(1)$ est vraie.

2/Hérédité

On suppose que $p(n)$ est vraie pour n fixé:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

et montrons que $p(n+1)$ est aussi vraie.

Pour $p(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)?$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n+1)(n+2)(n+3) \left[\frac{1}{4}n + 1 \right] \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).\end{aligned}$$

Ce qui fait que $p(n+1)$ est vraie.

3/Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

1/Vérification

Pour $n = 1$, on a $p(1)$: $\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = -1$, et $\frac{(-1)^1(2(1)+1)-1}{4} = -1$, donc $p(1)$ est vraie.

2/Hérédité

On suppose que $p(n)$ est vraie pour n fixé: $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ et montrons que $p(n+1)$ est aussi vraie.

$$\text{Pour } p(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}?$$

On a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{(n+1)}(n+1) \\
 &= \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4} + (-1)^{(n+1)}(n+1) \\
 &= \frac{(-1)^n}{4} [(2n+1) - 4(n+1)] - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{(-1)^n}{4} [-2n-3] - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} (2n+3) - 1}{4}
 \end{aligned}$$

Ce qui fait que $p(n+1)$ est vraie.

3/Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 10

1/ Montrer que tout entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.

Soit n un entier impair, $\exists s \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2s + 1$, puisque s est un entier naturel, il peut être pair ou impair, donc $\exists k \in \mathbb{N} / s = 2k + 1$ ou bien $s = 2k$ (rappelons que 0 peut très bien être considéré comme un entier et pair en plus !).

Dans ce cas, $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.

2/Montrer maintenant par contraposition que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

Si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par contraposition, nous allons montrer que si n est impair alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

$$\begin{aligned}
 n \text{ impair} &\Rightarrow n = 4k + r \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{1, 3\} \\
 (n^2 - 1) &= 16k^2 + 8kr + (r^2 - 1) \text{ et } (r^2 - 1) \in \{0, 8\}
 \end{aligned}$$

Ce qui fait que $[(n^2 - 1) = 16k^2 + 8kr]$ ou bien $[(n^2 - 1) = 16k^2 + 8kr + 8]$. Dans les deux cas $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

2 Chapitre 2 Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Cours N°1 Théorie des ensembles

2.1.1 Définitions

Un ensemble est un "espace" qui rassemble des éléments qui ont **tous** une propriété **commune**.

Exemples

1) E est l'ensemble de **tous** les entiers pairs compris entre 1 et 11.

a) Définition par la liste: $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

En définissant un ensemble par la liste de ses éléments, l'ordre de citation des éléments n'est pas important mais on ne peut pas répéter le même élément.

b) Définition par la propriété ou la caractéristique commune:

$$E = \{x/x \text{ est pair et } 1 < x < 11\}.$$

c) Diagramme de Venn

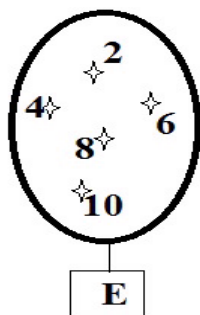


Fig.2.1: L'ensemble E .

Remarque $2 \in E$, mais $12 \notin E$. On lit 2 appartient à E et 12 n'appartient pas à E .

2.1.2 Rappel des ensembles les plus importants

1) L'ensemble vide, noté $\{\}$, ou bien $\emptyset$. Il ne contient aucun élément.

2) L'ensemble des entiers naturels:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Et l'ensemble des entiers naturels non nuls:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

3) L'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Et l'ensemble des entiers relatifs non nuls:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}.$$

4) L'ensemble des rationnels:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} / n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Par exemple : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Et l'ensemble des rationnels non nuls:

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

5) L'ensemble des réels: C'est tout simplement l'ensemble de tous les nombres, qu'ils soient naturels, relatifs, rationnels ou irrationnels.

$$\mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{Q}, \text{ ou bien } x \text{ est un nombre irrationnel}\}.$$

Rappel

Un nombre réel est irrationnel si et seulement si son développement décimal propre n'est pas périodique. Par exemple, π , $\sqrt{2}$ et e .

Et l'ensemble des réels non nuls:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2.1.3 Opérations sur les ensembles

Nous allons apprendre les opérations sur les ensembles par l'exemple suivant, soit :

$$E = \{1, 2, 3, 4\}; \quad F = \{1, 2\}; \quad G = \{2, 3\}.$$

Le Cardinal

- On dit que l'ensemble E est fini si le nombre d'éléments de E est fini.

Soit A un ensemble fini,

On note par $\text{card}(A)$ et on lit cardinal de A le nombre des éléments de A .

Dans notre exemple, $\text{card}(E) = 4$; $\text{card}(F) = 2$.

L'inclusion

- On note $A \subset B$ et on lit A inclus dans B . On dit aussi que A est une partie de B ou que A est un sous-ensemble de B .

A est inclus dans B quand tout élément de A se trouve aussi dans B .

On dit alors que A est un sous ensemble de B .

$$A \subset B \Leftrightarrow [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)].$$

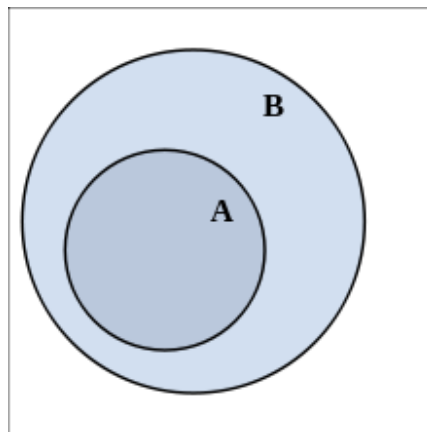


Fig.2.2: $A \subset B$.

- Dans notre exemple, on peut voir que $F \subset E$ mais que $E \not\subset F$.

Remarques

1/ L'ensemble vide est inclut dans TOUS les ensembles.

2/

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

L'égalité

- Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. Nous montrons souvent l'égalité des ensembles en montrant une double inclusion, c'est-à-dire :

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

L'ensemble des parties de A

- Noté $P(A)$, c'est l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de A , par exemple $P(F) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, F\}$. Il contient toujours $\emptyset$ et A et nous pouvons conclure son cardinal grâce au cardinal de A par la formule suivante³:

$$\text{card}[P(A)] = 2^{\text{card}(A)}.$$

L'union

- Notée $A \cup B$, c'est l'ensemble qui rassemble tous les éléments qu'ils soient dans A ou dans B .

$$A \cup B = \{x / (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

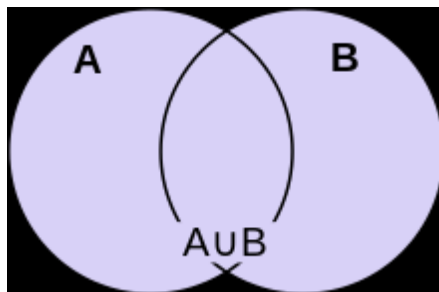


Fig.2.3: $A \cup B$.

³Cette formule est vraie quand l'ensemble A est fini.

- Dans notre exemple $F \cup G = \{1, 2, 3\}$.

L'union vérifie les propriétés suivantes:

- *) $A \cup B = B \cup A$ (commutative).
- *) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associative).

L'intersection

- Notée $A \cap B$, c'est l'ensemble qui rassemble les éléments qui se trouvent dans A et dans B en même temps.

$$A \cap B = \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

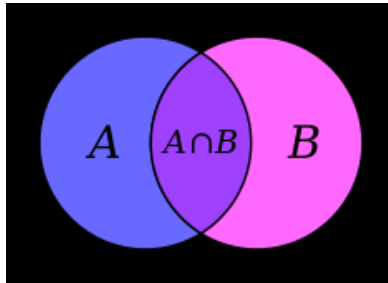


Fig.2.4: $A \cap B$.

- Dans notre exemple $F \cap G = \{2\}$.

L'intersection vérifie les propriétés suivantes:

- *) $A \cap B = B \cap A$ (commutative).
- *) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associative).

Remarques

1/ Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

2/ L'intersection et l'union sont distributives l'une sur l'autre, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Exercice d'application

1/ Montrer que:

$$[(A \cap B) = A] \Rightarrow A \subset B.$$

Soit $x \in A$, comme $A = (A \cap B)$ alors $x \in (A \cap B)$ donc $x \in B$. D'où l'inclusion.

2/ Montrer que:

$$[(A \cup B) = B] \Rightarrow A \subset B.$$

Soit $x \in A$, donc $x \in (A \cup B)$ et comme $B = (A \cup B)$ donc $x \in B$. D'où l'inclusion.

Le complémentaire

- On détermine le complémentaire d'un ensemble A toujours par rapport à un autre ensemble E qui contient A . Il est noté $\overline{A}$ ou bien C_E^A c'est l'ensemble de tous les éléments qui se trouvent dans E mais pas dans A .

Quand $A \subset E$, alors $\overline{A} = C_E^A = \{x / (x \in E) \wedge (x \notin A)\}$.

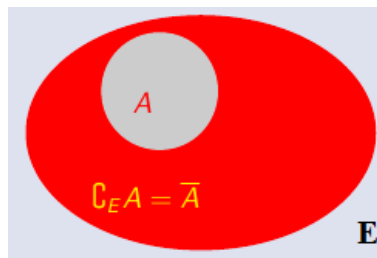


Fig.2.5: C_E^A .

- Dans notre exemple, comme $F \subset E$ et $G \subset E$, alors $\overline{F} = C_E^F = \{3, 4\}$ et $\overline{G} = C_E^G = \{1, 4\}$.

Le complémentaire vérifie les propriétés suivantes:

- *) $\overline{\overline{A}} = A$.
- *) $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$.

• Les Lois de Morgan

Les relations entre l'union, l'intersection et le complémentaire sont connues comme **les lois de Morgan**.

Elles sont données comme suit:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}. \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

La différence

- On écrit $A \setminus B$ et on lit A moins B .

C'est l'ensemble de tous les éléments qui se trouvent dans A mais pas dans B :

$$A \setminus B = \{x / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

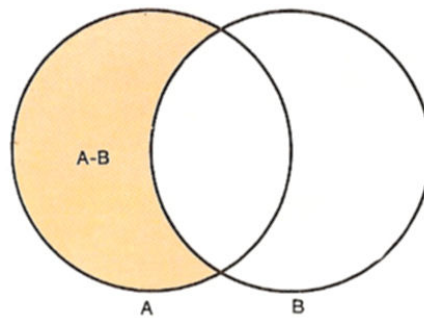


Fig.2.6: $A \setminus B$.

- Dans notre exemple $F \setminus G = \{1\}$ et $G \setminus F = \{3\}$.

On voit bien que $F \setminus G \neq G \setminus F$.

La différence vérifie les propriétés suivantes:

*) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

*) $A \setminus B \neq B \setminus A$ (non commutative).

La différence symétrique

- On écrit $A \Delta B$ et on lit A delta B , l'ensemble des éléments qui se trouvent soit dans A soit dans B mais pas dans les deux en même temps. On a :

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

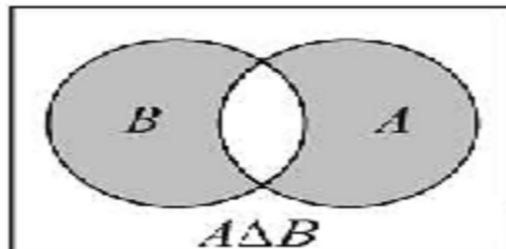


Fig.2.7: $A \Delta B$.

- Dans notre exemple $F \Delta G = \{1, 3\}$.

La différence symétrique vérifie:

*) $A \Delta B = B \Delta A$ (commutative).

Le produit cartésien

- Noté $A \times B$, c'est l'ensemble de tous les couples (x, y) possibles où $(x \in A)$ et $(y \in B)$.

$$A \times B = \{(x, y) / (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a, b, c\}$ alors:

E \ F	a	b	c
1	(1 ; a)	(1 ; b)	(1 ; c)
2	(2 ; a)	(2 ; b)	(2 ; c)
3	(3 ; a)	(3 ; b)	(3 ; c)
4	(4 ; a)	(4 ; b)	(4 ; c)

Fig.2.8: $E \times F$.

- Dans notre exemple $F \times G = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

Le produit cartésien n'est pas commutatif, c'est-à-dire que:

$A \times B \neq B \times A$, car $(x, y) \neq (y, x)$.

Attention: ne pas confondre le couple (x, y) avec l'ensemble $\{x, y\}$.

2.2 Cours N°2 Relation d'ordre, relation d'équivalence

Définition

Une **relation** entre les éléments de deux ensembles E et F est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire une collection de couples (x, y) qui vérifient une certaine propriété entre eux. On dit que x est en relation avec y , on écrit: $x\mathfrak{R}y$.

Une relation est parfois appelée correspondance entre les deux ensembles.

Dans le cas particulier où $E = F$, on dit que la relation est **binaire sur E (ou dans E)**.

Exemple

2/ $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ est le sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient $x^2 = y^2$.

2.2.1 Relation réflexive

Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire sur E . $\mathfrak{R}$ est dite réflexive si tout élément de E est en relation avec lui-même, i.e.

$$\forall x \in E, \quad x\mathfrak{R}x.$$

2.2.2 Relation symétrique

$\mathfrak{R}$ est dite symétrique si:

$$\forall x, y \in E, (x\mathfrak{R}y) \Rightarrow (y\mathfrak{R}x).$$

2.2.3 Relation transitive

$\mathfrak{R}$ est dite transitive si:

$$\forall x, y, z \in E, \left\{ \begin{array}{l} (x\mathfrak{R}y) \\ (y\mathfrak{R}z) \end{array} \right\} \Rightarrow (x\mathfrak{R}z).$$

2.2.4 Relation antisymétrique

$\mathfrak{R}$ est dite antisymétrique si:

$$\forall x, y \in E, \left\{ \begin{array}{l} (x\mathfrak{R}y) \\ (y\mathfrak{R}x) \end{array} \right\} \Rightarrow (x = y).$$

2.2.5 Relation d'équivalence

Définition

$\mathfrak{R}$ est dite relation d'équivalence si et seulement si, elle est réflexive, symétrique et transitive à la fois, (RST).

Exemple

Montrer que la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ est une relation d'équivalence.

- Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = x^2$ alors $(x\mathfrak{R}x)$ donc $\mathfrak{R}$ est réflexive.
- Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x\mathfrak{R}y)$ alors $x^2 = y^2$ ce qui fait que $y^2 = x^2$ donc $(y\mathfrak{R}x)$, On conclut que $\mathfrak{R}$ est symétrique.
- Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} (x\mathfrak{R}y) \\ (y\mathfrak{R}z) \end{array} \right\}$ alors $\left\{ \begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ y^2 = z^2 \end{array} \right\}$, ce qui fait que $x^2 = z^2$.
Donc $(x\mathfrak{R}z)$. On conclut que $\mathfrak{R}$ est transitive.
- La relation $\mathfrak{R}$ définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ est RST. C'est donc une relation d'équivalence.

Remarque $\mathfrak{R}$ n'est pas antisymétrique car:

$$\text{Soit } x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} (x\mathfrak{R}y) \\ (y\mathfrak{R}x) \end{array} \right\} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ y^2 = x^2 \end{array} \right\}$$

Ce qui fait que $x^2 - y^2 = 0$ donc $(x = y)$, ou bien $(x = -y)$.

Nous avons deux solutions possibles, on conclut que $\mathfrak{R}$ n'est pas antisymétrique.

Ou alors, pour montrer l'antisymétrie, nous pouvons donner un contre-exemple, comme suit:

$$2^2 = (-2)^2 \text{ pourtant } 2 \neq (-2)!$$

Classes d'équivalence

Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur E , soit $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence** de l'élément x et on note $\bar{x}$ ou bien $\dot{x}$, l'ensemble de tous les éléments y qui sont en relation avec x .

$$\dot{x} = \{y \in E / (x\mathfrak{R}y)\}$$

Exemple

Trouver la classe d'équivalence d'un élément x par la relation $\mathfrak{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \{y \in E / (x\mathfrak{R}y)\} \\ &= \{y \in E / x^2 = y^2\} \\ \text{On a} \quad &: x^2 = y^2 \Rightarrow y = x \text{ ou bien } y = -x \\ \text{donc } \dot{x} &= \{x, -x\}\end{aligned}$$

Remarque importante

Quand un élément a appartient à la classe d'équivalence d'un autre élément x , alors ces deux éléments ont la même classe d'équivalence, i.e.

$$a \in \dot{x} \Leftrightarrow \dot{a} = \dot{x}$$

2.2.6 Relation d'ordre

Définition

$\mathfrak{R}$ est dite relation d'ordre si et seulement si, elle est réflexive, anti-symétrique et transitive à la fois. (RAT).

Remarque : Quand $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre et que $(x\mathfrak{R}y)$, on dit que x et y sont comparables par la relation $\mathfrak{R}$.

Exemples

1/ La relation $\mathfrak{R}$ définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ n'est pas anti-symétrique. Elle n'est donc pas une relation d'ordre.

2/ On muni $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\prec$ définie par :

$$(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$$

Vérifions que $\prec$ est bien une relation d'ordre:

- $\prec$ est réflexive parce que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq x) \wedge (y \leq y)$

Ce qui fait que $(x, y) \prec (x, y)$.

- $\prec$ est antisymétrique parce que, si $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ sont tels que

$$\begin{cases} (x, y) \prec (x', y') \\ (x', y') \prec (x, y) \end{cases}, \text{ alors } \begin{cases} (x \leq x') \wedge (y \leq y') \\ (x' \leq x) \wedge (y' \leq y) \end{cases}$$

Ce qui fait que $\begin{cases} (x = x') \\ (y = y') \end{cases}$ ou alors $(x, y) = (x', y')$.

- $\prec$ est transitive parce que, si $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ tels que:

$$\begin{cases} (x, y) \prec (x', y') \\ (x', y') \prec (x'', y'') \end{cases}, \text{ alors } \begin{cases} (x \leq x') \wedge (y \leq y') \\ (x' \leq x'') \wedge (y' \leq y'') \end{cases}$$

Ce qui fait que $\begin{cases} (x \leq x'') \\ (y \leq y'') \end{cases}$ ou alors $(x, y) \prec (x'', y'')$.

Ordre total et ordre partiel

Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre sur E .

On dit que E est totalement ordonné par $\mathfrak{R}$ ou bien que l'ordre est total sur E si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \text{ soit } (x \mathfrak{R} y), \text{ soit } (y \mathfrak{R} x).$$

C'est-à-dire que n'importe quels deux éléments de E sont toujours comparables par la relation $\mathfrak{R}$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si nous pouvons trouver deux éléments x et y de E qui ne sont pas comparables i.e. ni $(x \mathfrak{R} y)$, ni $(y \mathfrak{R} x)$, alors on dit que l'ordre est partiel sur E , ou que E est partiellement ordonné.

Exemple

$\mathbb{R}^2$ n'est pas totalement ordonné par la relation $\prec$ définie par :

$$(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$$

Parce que $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ on n'a pas forcément $(x, y) \prec (x', y')$, ou $(x', y') \prec (x, y)$.

Il suffit de prendre les couples $(1, 0), (-1, 2)$ comme contre-exemple:

Puisque $1 \not\leq (-1)$ alors $(1, 0) \not\prec (-1, 2)$ et comme $2 \not\leq 0$ alors $(-1, 2) \not\prec (1, 0)$.

Nous avons trouvé deux couples dans $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas comparables par $\prec$, donc l'ordre n'est pas total.

Question

Montrer que la relation définie par $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow x \leq y$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

Exercice

1/ La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique? Réflexive? Transitive? Antisymétrique?

Est-ce qu'elle est une relation d'équivalence? D'ordre?

2/ Qu'en est-il de la relation de parallèlement?

Correction

1/ L'orthogonalité n'est pas réflexive puisqu'une droite n'est pas orthogonale sur elle-même.

Elle est par contre symétrique puisque si $(\Gamma) \perp (\Delta)$ alors $(\Delta) \perp (\Gamma)$.

Elle n'est pas transitive, car, si $(\Gamma) \perp (\Delta)$ et $(\Delta) \perp (\Omega)$ alors $(\Gamma) \parallel (\Omega)$.

Elle n'est pas antisymétrique non plus, puisque, si $(\Gamma) \perp (\Delta)$ et $(\Delta) \perp (\Gamma)$ alors (Γ) est forcément différent de (Δ) .

Par conséquent, l'orthogonalité n'est ni une relation d'équivalence, ni une relation d'ordre.

2/ Il est très facile de montrer que le parallèlement est une relation d'équivalence et non pas d'ordre.

2.3 Cours N°3 Applications injectives, surjectives, bijectives

2.3.1 Définition d'une application

Définition 1

On appelle **fonction** d'un ensemble E dans un ensemble F toute correspondance (ou relation) entre eux qui fait correspondre à chaque élément de E **au plus** un élément de F .

Elle est généralement notée:

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

E est appelé **ensemble de départ**, F est dit **ensemble d'arrivée**, x est appelé **antécédent** de y et y est dit l'**image** de x .

Définition 2

On appelle **domaine de définition** D_f de la fonction f , l'ensemble des éléments $x \in E$ qui ont une image y . (Elle sera unique).

Définition 3

Le graphe d'une fonction f de E dans F est le sous-ensemble G du produit cartésien $E \times F$ formé par les couples d'éléments liés par la correspondance :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y) \in E \times F / y = f(x)\} . \\ &= \{(x, f(x)) / x \in E\} . \end{aligned}$$

Définition 4

On appelle **application** toute fonction dont l'ensemble de départ est **includ ou égal** à l'ensemble de définition. On écrit par exemple:

$$\begin{aligned} f : D_f &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi utiliser la définition suivante:
 f est une application si et seulement si:

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F / y = f(x).$$

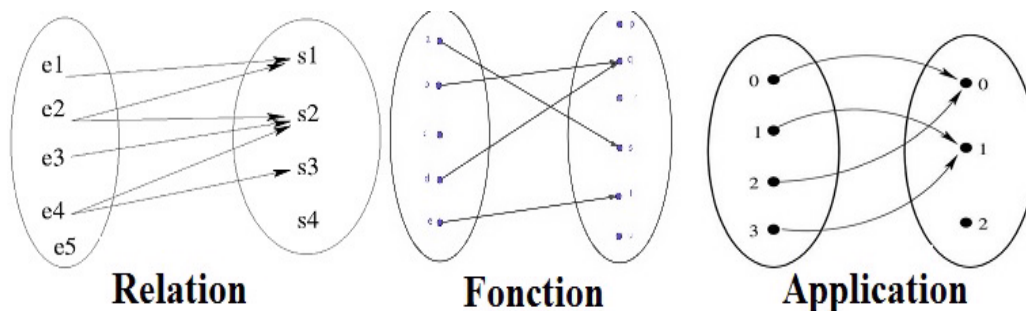


Fig.2.9 : Différence entre relation, fonction et application.

Remarques

1/ $\exists!$ est le quantificateur "**il existe au plus un élément**". Il n'est pas très utilisé en mathématiques, On préfère souvent le remplacer par une expression linguistique. Associé à $\exists$ (il existe au moins), le quantificateur $\exists!$ veut dire (et se lit) il existe un et un seul, (voir chapitre 1, section les quantificateurs logiques).

2/ Nous pouvons reconnaître une application facilement: c'est une fonction définie sur son ensemble de départ, ou bien, démarre d'un ensemble où elle est entièrement définie (i.e $E \subset D_f$).

3/ Toute application est une fonction, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemples

1/

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$

2/ L'application **identité** notée Id et définie par :

$$Id : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto f(x) = x.$$

2.3.2 Image directe

Soit $A \subset E$, on appelle image directe de A par f l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\} \subset F.$$

C'est-à-dire que:

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A / y = f(x).$$

Remarque : l'image directe est un sous ensemble de l'ensemble d'arrivée.

Exemples

a/

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

- Trouver l'image directe de la partie $A = \{-1, 1, -2, 2, -3\}$.

Eh bien, on rassemble les images de tous les éléments de A dans l'ensemble $f(A)$ donc $f(A) = \{1, 2, 3\}$.

- Trouver l'image directe de $[-1, 1]$.

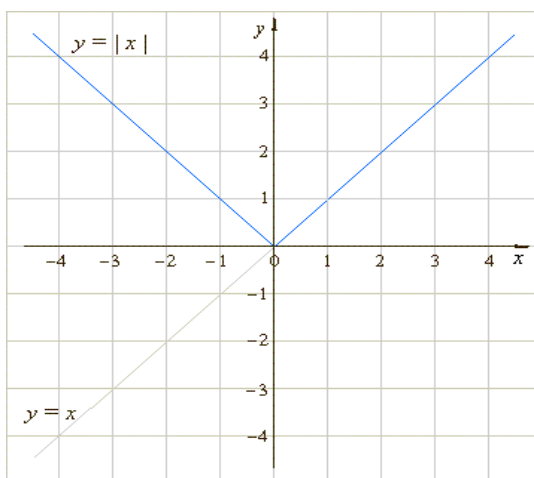


Fig.2.10 : Graphe de : $f(x) = |x|$.

Donc : $f([-1, 1]) = [0, 1]$.

Remarque

Il n'est pas nécessaire de tracer le graphe de la fonction, nous pouvons trouver les images directes à partir du tableau de variation par exemple.

- Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, y = |x| \geq 0$ alors $y \in \mathbb{R}^+$, ce qui fait que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

b/

$$g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}.$$

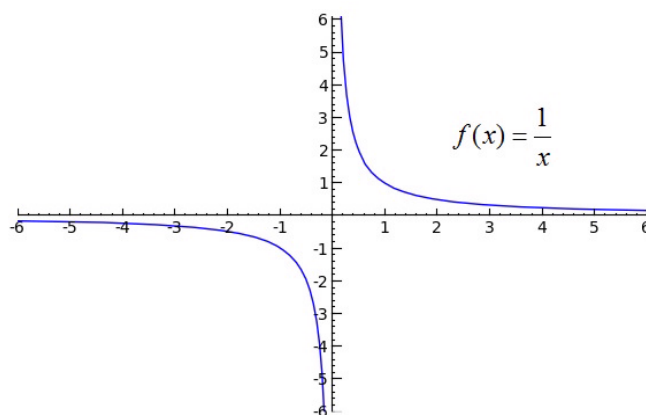


Fig.2.11 : Graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Trouver l'image directe de $\mathbb{R}^*$

$$g(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*.$$

- Trouver l'image directe de $]0, 1]$

$$g(]0, 1]) = [1, +\infty[.$$

c/

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = \cos x.$$

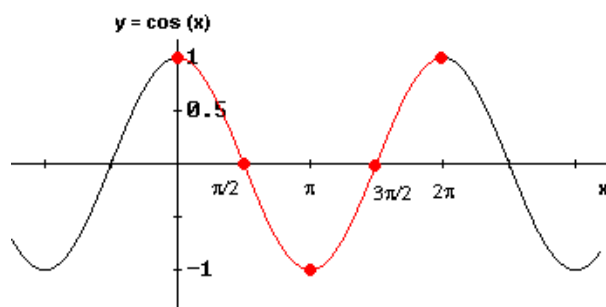


Fig.2.12 : Graphe de $\cos x$.

- Trouver l'image directe de $\mathbb{R}$.
 $h(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
- Trouver l'image directe de $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 $h([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$.

2.3.3 Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$, on appelle image réciproque de B par l'application f l'ensemble:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$

C'est-à-dire

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Remarque : L'image réciproque est un sous-ensemble de l'ensemble de départ.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \quad & [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

- Trouver l'image réciproque de la partie $B = \{1, 0\}$.

Eh bien, on rassemble tous les antécédents possibles de chaque élément de B dans l'ensemble $f^{-1}(B)$ et ceci en résolvant l'équation $y = f(x)$.

On a $1 = |x| \Rightarrow (x = 1) \vee (x = -1)$ et puis $0 = |x| \Rightarrow x = 0$, donc $f^{-1}(B) = \{-1, 1, 0\}$.

- Même question pour $C = \{5\}$.

$$5 = |x| \Rightarrow (x = 5) \vee (x = -5).$$

Là, puisque les antécédents possibles de 5 qui sont (-5) et 5 n'appartiennent pas à l'ensemble de définition de notre application alors $f^{-1}(C) = \emptyset$.

- Trouver l'image réciproque de $[0, 4]$.

$$f^{-1}([0, 4]) = [-1, 2].$$

2.3.4 Opérations sur les applications

Égalité

Deux applications sont égales si et seulement si :

1/ Elles ont le même ensemble de départ.

2/ Elles ont le même ensemble d'arrivée et...

3/ $\forall x \in E, f(x) = g(x)$. On écrit alors $f \equiv g$ et on lit f est identiquement égale à g .

Composition

Soit les deux applications:

$$\begin{array}{lcl} f : E_1 \rightarrow F_1 & & g : E_2 \rightarrow F_2 \\ x \mapsto f(x) & \text{et} & x \mapsto g(x) \end{array} .$$

Quand $g(E_2) \subset E_1$ nous pouvons alors définir l'application composée de f par g :

$$\begin{array}{lcl} E_2 \xrightarrow{g} g(E_2) \subset E_1 & \xrightarrow{f} & F_1 \\ x \mapsto & g(x) \mapsto & f(g(x)). \end{array}$$

Donc:

$$\begin{array}{lcl} (f \circ g) : E_2 \rightarrow F_1 \\ x \mapsto f(g(x)) \end{array} .$$

De même, quand $f(E_1) \subset E_2$ nous pouvons alors définir l'application composée de g par f :

$$\begin{array}{lcl} E_1 \xrightarrow{f} f(E_1) \subset E_2 & \xrightarrow{g} & F_2 \\ x \mapsto & f(x) \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Donc:

$$\begin{array}{lcl} (g \circ f) : E_1 \rightarrow F_2 \\ x \mapsto g(f(x)). \end{array}$$

Remarque

Il est impératif de préciser l'**ensemble de départ**, l'**ensemble d'arrivée** et l'**expression de l'application composée** pour avoir une réponse à la question de la composition entre deux applications.

Exemple

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 & \text{et} & x \mapsto g(x) = x + 1 \end{array} .$$

Alors on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc les deux compositions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ sont possibles,

$$\begin{array}{lcl} f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(g(x)) = x^2 + 1 & \text{et} & x \mapsto g(f(x)) = (x + 1)^2 \end{array} .$$

Remarque importante Il est clair que $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ en général.

Exercice

On donne

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & & g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto f(n) = 2n & \text{et} & n \mapsto g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} .$$

Trouver, si c'est possible $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$.

Correction

On a $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ et $g(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ donc les deux compositions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ sont possibles.

$$\begin{array}{lcl} f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & & \\ n \mapsto f(g(n)) = \begin{cases} 2 \left(\frac{n}{2} \right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 \left(\frac{n+1}{2} \right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n + 1) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcl} g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & & \\ n \mapsto g(f(n)) = \frac{(2n)}{2} = n & \text{car } (2n) \text{ est pair.} & \end{array} .$$

2.3.5 Application injective

Soit f l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

f est dite injective sur E ssi :

$$\forall y \in F, !x \in E / y = f(x),$$

i.e. tout élément de F admet au plus un (c'est-à-dire un ou zéro) antécédent dans E . Le cas d'un y qui a deux antécédents (ou plus) est refusé.

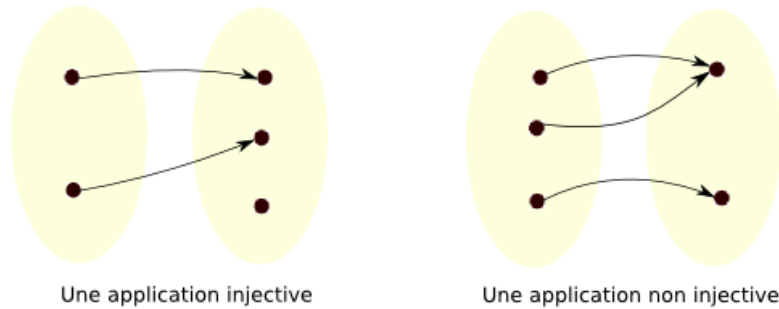


Fig.2.13 : Différence entre application injective et non injective.

Une autre caractérisation des applications injectives est la suivante:

$$(P) : \forall x_1, x_2 \in E, (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

En pratique, nous utilisons la contraposée de l'implication (P) plus haut pour démontrer qu'une application est injective:

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Ou alors le contraire de (P) pour montrer qu'une application n'est **PAS** injective sur E :

$$(\overline{P}) : \exists x_1, x_2 \in E / (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2)).$$

Exemples

Étudier l'injectivité des applications suivantes :

1/

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto f(x) = 2x & x \mapsto g(x) = |x| \end{array} \quad .$$
$$\begin{array}{ll} h : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} & k : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) = \sin x & x \mapsto k(x) = \sin x \end{array} \quad .$$

2/

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 6 \end{array} \quad .$$

Correction

1/ Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow (x_1 = x_2)$, donc f est injective sur $\mathbb{R}$.
- $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ sur $\mathbb{R}$, deux solutions s'offrent à nous : $(x_1 = x_2)$ ou bien $(x_1 = -x_2)$ donc g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer la non injectivité, nous pouvons aussi procéder en utilisant $(\overline{P})$, c'est-à-dire en donnant un exemple. On voit bien que $-2 \neq 2$ mais que $g(-2) = g(2) = 2$. Nous avons donc la même image pour deux antécédents différents, voilà pourquoi g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

- De la même manière, sur $[0, \pi]$ nous avons: $(0 \neq \pi)$ pourtant $h(0) = h(\pi) = 0$. h n'est pas injective sur $[0, \pi]$.
- Maintenant, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
Soit $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ / $k(x_1) = k(x_2) \Rightarrow \sin x_1 = \sin x_2 \Rightarrow (x_1 = x_2)$. k est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2/

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ / $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 6 = 2x_2 + 6 \Rightarrow (x_1 = x_2)$, donc f est injective sur $\mathbb{R}$.

2.3.6 Application surjective

Soit f l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

f est dite surjective sur E ssi:

$$(Q) : \forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x).$$

i.e. tout élément de F admet au moins un (c'est-à-dire un ou plus) antécédent dans E . Le cas d'un y qui n'a aucun antécédent est refusé.

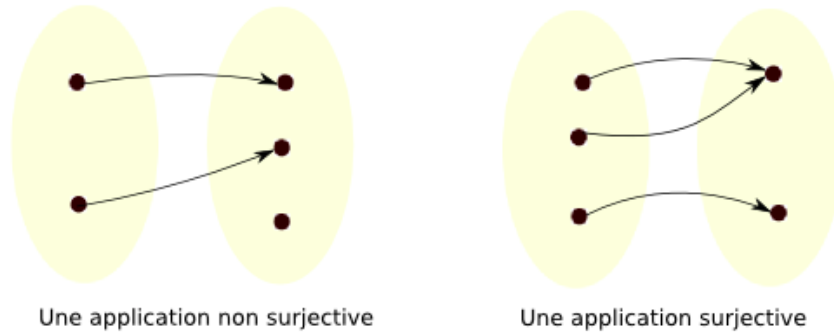


Fig.2.14 : Différence entre application surjective et non surjective.

Une autre caractérisation des applications surjectives est la suivante:

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f(E) = F.$$

i.e. f est surjective quand l'image de E par f est l'ensemble d'arrivée tout entier (au lieu d'être seulement incluse dans l'ensemble d'arrivée).

En pratique, pour démontrer qu'une application est surjective, nous devons trouver le x en fonction de y puis vérifier que l'expression en y est bien définie sur tout l'ensemble d'arrivée (*i.e.* l'ensemble des y).

Ou, d'une manière équivalente, pour montrer qu'une application n'est **PAS** surjective nous devons montrer:

$$(\overline{Q}) : \exists y \in F, \forall x \in E / y \neq f(x).$$

C'est-dire que nous devons trouver un élément y de l'ensemble d'arrivée qui n'a AUCUN antécédent x dans l'ensemble de départ.

Exemples

Étudier la surjectivité des applications suivantes :

1/

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = e^x & x \mapsto g(x) = e^x \end{array} .$$

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} & k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto h(x) = \frac{1}{x} & x \mapsto k(x) = |x| \end{array} .$$

2/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = 2x + 6.$

Correction

1/

- Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = e^x \Rightarrow \ln y = \ln(e^x)$ (car $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$),
 $\Rightarrow \ln y = x$ qui est bien défini sur $\mathbb{R}$, donc f est surjective.
- Par contre, il suffit de prendre $y = 0$ (ou $y < 0$) pour que l'équation $y = e^x$ n'admette pas de solution (car $e^x > 0$), ce qui fait que g n'est **pas** surjective.

Remarque

Sur ces quelques exemples, on voit qu'il est toujours possible de transformer une application non surjective en une surjection à condition de restreindre son ensemble d'arrivée.

- Pour h , l'équation $y = \frac{1}{x}$ n'admet pas de solution non plus pour $y = 0$ elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$, ce qui fait que h n'est **pas** surjective.
- Nous avons: $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad y = |x| \Rightarrow x = y$ ou bien $x = -y$, effectivement nous avons deux solutions, (ce qui n'est pas du tout contre indiqué pour la surjectivité), donc k est surjective.

2/

Sur $\mathbb{R}$, si $y = 2x + 6$ alors $x = \frac{y-6}{2}$ qui est bien définie sur tout $\mathbb{R}$, donc f est surjective.

Remarque

Nous pouvons aussi montrer la surjection en montrant que $f(E) = F$, mais nous allons garder cette méthode pour les prochains chapitres.

2.3.7 Application bijective

Soit f l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

f est dite bijective sur E ssi:

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x),$$

i.e. tout élément de F admet un et un seul antécédent dans E .

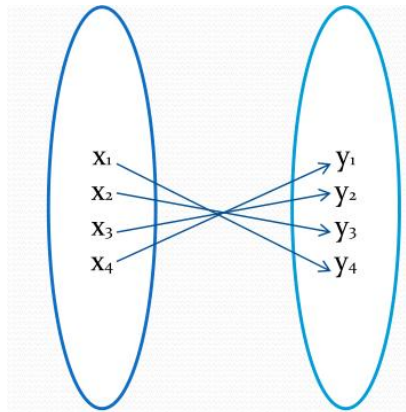


Fig.2.15 : Une application bijective.

Une autre caractérisation des applications bijectives est la suivante:

f est dite bijective si et seulement si, elle est injective et surjective à la fois. C'est cette propriété que nous utilisons généralement dans la pratique pour montrer qu'une application est bijective.

Remarque

Quand f est bijective, on a $f(E) = F$.

Exemple

Que pouvons-nous conclure pour l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 6 \quad ?$$

D'après ce qui précède, la fonction f est injective et surjective à la fois, elle est donc bijective sur $\mathbb{R}$.

Remarque importante

Les caractéristiques d'une application (injective, surjective et bijective) dépendent vraiment des ensembles de départ et d'arrivée beaucoup plus que de l'application elle-même. Étudier l'exemple suivant pour s'en convaincre:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto f(x) = \cos x \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \cos x \quad .$$

2.3.8 Application réciproque (ou inverse) d'une application bijective

Toute application bijective admet une application réciproque, dite aussi application inverse, notée par f^{-1} et est définie comme suit :

$$\text{Si } f : E \rightarrow F \quad \text{alors } f^{-1} : F \rightarrow E \\ x \mapsto y = f(x) \quad \text{et} \quad y \mapsto x = f^{-1}(y) \quad .$$

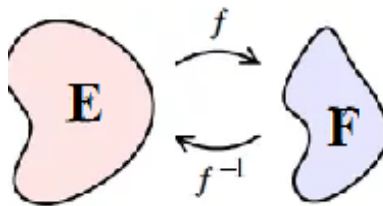


Fig.2.16 : L'application inverse.

Elle vérifie :

$$f^{-1}(f(E)) = E \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(F)) = F,$$

$$2/ \forall y \in F, (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

3/ Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta) : y = x$.

Exemple

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \frac{y-6}{2}. \end{aligned}$$

Mais comme les variables x et y sont muettes (c'est-à-dire interchangeables sans aucune influence sur la signification), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f^{-1}(x) = \frac{x-6}{2}. \end{aligned}$$

Remarques

1/ Ne pas confondre la réciproque d'une application bijective f^{-1} , qui est une **application** et qu'on ne peut définir QUE si l'application est bijective, avec l'image réciproque d'une partie donnée de l'ensemble de départ, $f^{-1}(B)$, qui est un **ensemble** et qu'on peut toujours trouver.

2/ Ne pas confondre non plus la notation f^{-1} qui est juste un symbole pour désigner l'application inverse (c'est donc une **application**) avec $f^{-1}(x)$ qui est des fois utilisé pour vouloir dire puissance -1 , c'est-à-dire $\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \neq f^{-1}(x)$, i.e. $\frac{1}{f(x)}$ est en l'occurrence un **nombre**.

2.4 Série d'exercices N°2

Exercice 1

Considérons les ensembles suivants:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7\}.$$

1. Donner $A \cup B$, puis $\text{card}(A \cup B)$.
2. Donner $A \cap B$. Comment appelle-t-on les ensembles A et B dans ce cas?
3. $C = \{2, 6\}$. Calculer le complémentaire $\complement_A^C = \overline{C}$, puis donner l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\overline{C})$.
4. $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Calculer $C \setminus D$ puis $D \setminus C$.
5. Calculer $C \Delta D$ par deux méthodes différentes.

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un ensemble E :

- 1) Démontrer les lois de Morgan:

$$a) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$b) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- 2) Montrer que:

$$(A \subset B) \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

- 3) Montrer que

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \\ (A \cap B) &= (A \cup B) \Rightarrow A = B. \end{aligned}$$

Exercice 3

- 1/ Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence:

a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$ sur $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 14, 17\}$, puis trouver les classes d'équivalence possibles.

b) $(x, y)\mathfrak{R}(x', y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, puis trouver les classes d'équivalence des éléments $(1, 2)$ et $(-1, 2)$.

2/ Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre:

a) $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}/a = k.b$ sur $\mathbb{N}$. Est-ce que cet ordre est total ou partiel?

b) $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a < b + 1$ sur $\mathbb{Z}$.

3/ On définit la relation suivante: $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow a \leq b + 1$ sur $\mathbb{Z}$.

Vérifier que $(0\mathcal{L}1) \wedge (1\mathcal{L}0)$. Que pouvez-vous en conclure?

Exercice 4

Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et a, b, c et d des réels non nuls donnés et soit f une fonction définie par:

$$f : A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) = \frac{ax + c}{bx + d}.$$

Trouver A et B ainsi que a, b, c et d pour que f soit :

1/ Une application, 2/ Une application injective, 3/ Une application surjective, 4/ Une application bijective.

Exercice 5

Soit les deux applications :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 5 \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1/ Répondez par vrai ou faux en justifiant, avons-nous:

a) $f(\{0\}) = 5$, $f(\{0\}) = \{5\}$, b) $0 \in f^{-1}(\{5\})$ c) $f^{-1}(\{5\}) = \{0, 5\}$.
d) $g^{-1}(\{1\}) = \{3\}$ c) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

2/ Déterminer $f([0, 1])$, $f^{-1}([5, 7])$, $f(\mathbb{R})$, $g([-4, -1])$, $g([-2, -1])$, $g([-4, -1] \cap [-2, -1])$.

3/ Déterminer $g^{-1}([-4, -1])$, $g^{-1}([0, 4])$, $g^{-1}([1, +\infty[)$,

Exercice 6

Soit les deux applications :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 1 & x \mapsto g(x) = x^2 + 1 \end{array} .$$

- 1/ Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f puis de g .
- 2/ Préciser $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$ si c'est possible.

Exercice 7

Soit les deux applications :

$$\begin{array}{ll} f :]2, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[& g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} & x \mapsto g(x) = \cos x \end{array} .$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f puis de g .
Pour les applications bijectives, préciser leurs réciproques.

Exercice 8

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit l'application : $x \mapsto f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

- 1/ f est-elle injective?
- 2/ Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2$. f est-elle surjective sur $\mathbb{R}$?

3/ Soit F l'application :

$$\begin{array}{ll} F : [1, +\infty[\rightarrow]0, 2] \\ x \mapsto F(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} . \end{array}$$

Montrer que F est une bijection sur $]0, 2]$.

2.5 Correction de la série d'exercices N°2

Exercice 1

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$$

1. $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7\}$, $\text{card}(A \cup B) = 9$.
2. $A \cap B = \emptyset$, A et B sont disjoints.
3. $C = \{2, 6\}$, $\mathcal{C}_A^C = \overline{C} = \{0, 4, 8\}$, puis $P(\overline{C}) = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{8\}, \{0, 4\}, \{0, 8\}, \{4, 8\}, \overline{C}\}$.
4. $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $C \setminus D = \{6\}$ puis $D \setminus C = \{1, 3, 4\}$.
5. $C \Delta D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C) = \{6\} \cup \{1, 3, 4\} = \{6, 1, 3, 4\}$
Ou bien $C \Delta D = (C \cup D) \setminus (C \cap D) = \{1, 2, 3, 4, 6\} \setminus \{2\} = \{6, 1, 3, 4\}$

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un ensemble E :

1) Démontrer les lois de Morgan:

$$a) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$b) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

a) Soit $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A)$ ou bien $(x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A})$ ou bien $(x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

(Nous avons des équivalences donc nous pouvons très bien faire le chemin inverse d'où la double inclusion).

b) Soit $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A)$ et $(x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A})$ et $(x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

(Nous avons des équivalences donc nous pouvons très bien faire le chemin inverse d'où la double inclusion).

2) Montrer que:

$$(A \subset B) \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Soit $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \notin B$ et comme $A \subset B$ alors $x \notin A$. On en déduit que $x \in \overline{A}$. D'où l'inclusion.

3) Montrer que

$$a) (A \cap B) = (A \cup B) \Rightarrow A = B.$$

a) Pour montrer a) on montre la double inclusion:

Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ mais comme $(A \cap B) = (A \cup B)$ alors $x \in (A \cap B)$ ce qui fait que $x \in B$ donc $A \subset B$.

De même pour $x \in B$, donc $B \subset A$. La double inclusion nous mène à l'égalité.

b) Pour montrer b) on montre la double inclusion:

- Soit $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ ou $x \in C$ donc $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $x \in C$.

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup C$ et $x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$ ce qui fait que $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. D'où la première inclusion.

- Soit $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$ donc $(x \in A \text{ ou } x \in C)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in C)$.

Si $x \in C$ alors $x \in (A \cap B) \cup C$.

Si $x \notin C$ alors forcément $x \in A$ et $x \in B$ ce qui fait que $x \in (A \cap B)$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

Dans les deux cas $x \in (A \cap B) \cup C$. D'où la deuxième inclusion.

Exercice 3 (Indications pour la solution)

1/ Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence:

a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$ sur $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 14, 17\}$, puis trouver les classes d'équivalence possibles.

$\mathcal{R}$ relation Réflexive et symétrique, facile.

Transitive : soit trois éléments de $x, y, z \in E$ tels que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \\ \frac{y+z}{2} \in \mathbb{N} \end{cases} \iff \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} \in \mathbb{N}. \\ &\iff \frac{x+2y+z}{2} \in \mathbb{N}. \\ &\iff \frac{x+z}{2} + y \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $x, y, z \in E \subset \mathbb{N}$, alors $\frac{x+z}{2} \in \mathbb{N}$ ce qui fait que : $x\mathfrak{R}z$.

La relation $\mathfrak{R}$ est transitive.

Classe d'équivalence

$\dot{1} = \{x \in E/x\mathfrak{R}1\} = \{1, 3, 5, 17\}$ de même $\dot{2} = \{x \in E/x\mathfrak{R}2\} = \{2, 8, 14\}$.

Comme $\dot{1} \cup \dot{2} = E$ alors, il n'y a pas d'autres classes d'équivalence possibles.

b) $(x, y)\mathfrak{R}(x', y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, puis trouver les classes d'équivalence des éléments $(1, 2)$ et $(-1, 2)$.

$\mathfrak{R}$ relation réflexive et symétrique... Facile

Transitive : soit les couples $(x, y), (x', y')(x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (x, y)\mathfrak{R}(x', y') \\ (x', y')\mathfrak{R}(x'', y'') \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xy' - x'y = 0 \\ x'y'' - x''y' = 0 \end{array} \right. \dots (*) \\ \Leftrightarrow & \quad x' = \frac{xy'}{y} \quad (\text{remarquez que } y \in \mathbb{N}^*) \\ & \text{Donc } \frac{xy'}{y}y'' - x''y' = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{xy'}{y}y'' - x''y' = 0 \Leftrightarrow xy'y'' - x''y'y = 0 \Leftrightarrow y'(xy'' - x''y) = 0.$$

Comme $y' \in \mathbb{N}^*$ on aura $(xy'' - x''y) = 0$. Ce qui fait que $(x, y)\mathfrak{R}(x'', y'')$.

$$\begin{aligned} \widehat{(1, 2)} &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/(1, 2)\mathfrak{R}(x, y)\} \\ \widehat{(1, 2)} &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/y - 2x = 0\} \\ \widehat{(1, 2)} &= \{(x, 2x) \text{ avec } x \in \mathbb{N}^*\} \\ &\quad \text{ou bien} \\ \widehat{(1, 2)} &= \{x(1, 2) \text{ avec } x \in \mathbb{N}^*\}. \end{aligned}$$

Par le même processus, on aura:

$$\begin{aligned} \widehat{(-1, 2)} &= \{(x, -2x) \text{ on doit imposer } x \in \mathbb{Z}_-^* \text{ pour assurer que } (-2x) \in \mathbb{N}^*\}. \\ &\quad \text{Donc} \\ \widehat{(-1, 2)} &= \{x(1, -2) \text{ avec } x \in \mathbb{Z}_-^*\}. \end{aligned}$$

2/ Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre:

a) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}/a = k.b$ sur $\mathbb{N}$. Est-ce que cet ordre est total ou partiel?

$\mathcal{R}$ relation réflexive et Transitive... Facile.

Antisymétrique:

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}a \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N}/a = k_1.b \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}/b = k_2.a \end{cases} \Rightarrow a = k_1 k_2 a \Rightarrow k_1 k_2 = 1.$$

Comme $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, la seule possibilité c'est que $k_1 = k_2 = 1$ donc $a = b$.

Il suffit de prendre $a = 2, b = 3$ pour voir que ni $a\mathcal{R}b$ ni $b\mathcal{R}a$ ce qui fait que cet ordre est partiel.

b) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b + 1$ sur $\mathbb{Z}$.

$\mathcal{R}$ relation réflexive... Facile.

Antisymétrique:

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}a \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < b + 1 \\ b < a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$$

Transitive:

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}c \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < b + 1 \\ b < c + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Leftrightarrow a \leq c \Leftrightarrow a < c + 1, \text{ donc } a\mathcal{R}c.$$

3/ On définit la relation suivante: $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow a \leq b + 1$ sur $\mathbb{Z}$.

Vérifier que $(0\mathcal{L}1) \wedge (1\mathcal{L}0)$. Que pouvez-vous en conclure?

Vérification facile.

Conclusion

Puisque $(0\mathcal{L}1) \wedge (1\mathcal{L}0)$ et que $0 \neq 1$ alors la relation $\mathcal{L}$ n'est pas antisymétrique, elle n'est par conséquent pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 4

Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et a, b, c et d des réels non nuls donnés et soit f une fonction définie par:

$$f : A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) = \frac{ax + c}{bx + d}.$$

Déterminer A et B ainsi que a, b, c et d pour que f soit :

1/ Une application:

Une application est une fonction définie sur tout son domaine de départ :

$$D_f = A.$$

Comme

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / bx + d \neq 0\},$$

alors,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{b} \right\}, (b \neq 0).$$

Donc

$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{b} \right\}.$$

f application $\Leftrightarrow a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, A = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{b} \right\}, B = \mathbb{R}.$

2/ Une application injective:

Soit $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{ax_1 + c}{bx_1 + d} = \frac{ax_2 + c}{bx_2 + d}$$

$$\Rightarrow (ad - bc)(x_1 - x_2) = 0.$$

Pour que f soit injective, il faut que la solution de cette équation soit $(x_1 - x_2) = 0$ et non pas $(ad - bc) = 0$, donc il faut que $(ad - bc) \neq 0$, ou que $a \neq \frac{bc}{d}$ ($d \neq 0$) par exemple.

3/ Une application surjective:

$$\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)??$$

$$y = \frac{ax+c}{bx+d} \Rightarrow (yb-a)x = c-dy.$$

Nous devons imposer $(yb-a) \neq 0$ pour avoir $x = \frac{c-dy}{(yb-a)}$ qui est bien définie, donc $y \neq \frac{a}{b}$.

Il faut alors que:

$$B = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{b} \right\}.$$

4/ Une application bijective:

Pour avoir une application bijective, toutes les conditions précédentes doivent être vérifiées en même temps, donc on doit avoir :

$$(A = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{b} \right\}) \wedge (a \neq \frac{bc}{d}) \wedge (B = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{b} \right\}).$$

On écrit:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{b} \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{b} \right\} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{ax+c}{bx+d} \text{ avec } (a \neq \frac{bc}{d}). \end{aligned}$$

Exercice 5

Soit les deux applications :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x+5 & x &\mapsto g(x) = \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

1/ Répondez par vrai ou faux:

On commence par tracer le tableau de variations de f et de g pour faciliter la réponse aux questions:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$
	$\nearrow$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		
	1		
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$
	0		

a) $f(\{0\}) = 5$, *faux* (l'image d'un ensemble est un ensemble) $f(\{0\}) = \{5\}$, *vrai* b) $0 \in f^{-1}(\{5\})$ *vrai*
c) $f^{-1}(\{5\}) = \{0, 5\}$

On résout l'équation $2x + 5 = 5$, on trouve la seule solution est $x = 0$.
Donc $f^{-1}(\{5\}) = \{0, 5\}$ *faux*.

d) $g^{-1}(\{1\}) = \{3\}$ *faux* c) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ *vrai*.

2/ Déterminer $f([0, 1])$, $f^{-1}([5, 7])$, $f(\mathbb{R})$, $g([-4, -1])$,
 $g([-2, -1])$, $g([-4, -1] \cap [-2, -1])$.

$$f([0, 1]) = [5, 7], f^{-1}([5, 7]) = [0, 1], f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

$$g([-4, -1]) = \left[\frac{1}{17}, \frac{1}{2}\right], g([-2, -1]) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right].$$

$$g([-4, -1] \cap [-2, -1]) = g([-2, -1]) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right].$$

3/ Déterminer $g^{-1}([-4, -1])$, $g^{-1}([0, 4])$, $g^{-1}([1, +\infty[)$,

$$g^{-1}([-4, -1]) = \emptyset, g^{-1}([0, 4]) = g^{-1}([0, 1]) = \mathbb{R},$$

$$g^{-1}([1, +\infty[) = g^{-1}(\{1\}) = \{0\}.$$

Exercice 6

Soit les deux applications :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 1 & x \mapsto g(x) = x^2 + 1 \end{array}.$$

1/ Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f puis de g .

Injectivité?

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Donc f est injective sur $\mathbb{R}$.

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(La solution $x_1 = -x_2$ est refusée puisqu'on travaille sur $\mathbb{R}^+$). Donc g est injective sur $\mathbb{R}^+$.

Surjectivité?

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / y = f(x) \quad y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}.$$

L'expression $\frac{y-1}{2}$ est bien définie sur tout $\mathbb{R}$. Donc f est surjective sur $\mathbb{R}$.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+ / y = g(x)$$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$, nous voyons bien que si $y - 1 < 0$ cette équation n'admet pas de solutions, (par exemple prendre $y = 0$). Donc g n'est pas surjective sur $\mathbb{R}^+$.

Bijektivité?

f est bijective sur $\mathbb{R}$, mais g ne l'est pas sur $\mathbb{R}^+$.

2/ Préciser $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$ si c'est possible.

On a : $x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$. Donc $g(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}$.
Donc on a :

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{g} [1, +\infty[\subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

La composition $(f \circ g)$ est possible :

$$(f \circ g) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(g(x)) = 2(x^2 + 1) + 1 = 2x^2 + 3.$$

Mais $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ qui n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^+$, donc la composition $(g \circ f)$ est impossible.

Exercice 7

Soit les deux applications : $f :]2, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $x \mapsto g(x) = \cos x$.

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f puis de g .

Injectivité?

Soit

$$x_1, x_2 \in]2, +\infty[, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{\sqrt{x_1^2 - 4}} = \frac{2x_2}{\sqrt{x_2^2 - 4}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x_1^2(x_2^2 - 4) &= 4x_2^2(x_1^2 - 4) \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Donc $x_1 = x_2$ ou bien $x_1 = -x_2$.

Mais dans ce dernier cas, si $x_1 \in]2, +\infty[$ on aura $x_2 \in]-\infty, -2[$ ce qui est refusé.

Finalement, nous n'avons qu'une seule solution acceptable $x_1 = x_2$. Donc f est injective sur $]2, +\infty[$.

Pour g , nous voyons facilement que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$.

$\exists x_1 = \frac{\pi}{2}, \exists x_2 = \frac{-\pi}{2}$ qui vérifient $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$.

Nous avons deux antécédents différents qui ont la même image. Donc g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Surjectivité?

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall y \in]2, +\infty[, \exists x \in [2, +\infty[/ y = f(x).$$

$$\text{Soit } y > 2 \text{ tel que } y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-4y^2}{4 - y^2}}.$$

Après étude du signe de $\frac{-4y^2}{4 - y^2}$, on voit bien que l'expression $\sqrt{\frac{-4y^2}{4 - y^2}}$ est bien définie sur $]2, +\infty[$. Donc f est surjective.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / y = g(x)?? \quad y = \cos x.$$

Nous savons bien que $-1 \leq \cos x \leq 1$, il suffit de prendre $y = 2$ par exemple pour que le x n'existe pas !

$$\exists y = 2 \in \mathbb{R}, \nexists x \in \mathbb{R} : \cos x = 2.$$

Donc g n'est pas surjective.

Bijektivité?

f est bijective sur $]2, +\infty[$, mais g ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.
Pour les applications bijectives, préciser la réciproque:

$$\begin{aligned} f^{-1} :]2, +\infty[&\rightarrow]2, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{\frac{4x^2}{x^2 - 4}}. \end{aligned}$$

Exercice 8

Soit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

1/ f est-elle injective?

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R} / f(x_1) = f(x_2) :$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{4x_2}{x_2^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x_1 (x_2^2 + 1) = x_2 (x_1^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) [1 - x_1 x_2] = 0.$$

Nous avons deux solutions possibles, $x_1 = x_2$ et $1 = x_1 x_2$ toutes les deux sont acceptées, donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

2/ Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2$. f est-elle surjective sur $\mathbb{R}$?

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2 &= \frac{-2(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 0 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &\leq 2. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $y = 3$ par exemple pour que $f^{-1}(3)$ n'existe pas.

Par conséquent, f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

3/ Soit l'application :

$$F : [1, +\infty[\rightarrow]0, 2] \\ x \mapsto F(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

- F est injective parce que la deuxième solution de l'équation $[1 - x_1x_2] = 0$ qui est $x_1 = \frac{1}{x_2}$ (remarquons que là x_1 et x_2 sont $\neq 0$), est refusée, sauf quand $x_1 = x_2 = 1$. Nous avons finalement une seule solution $x_1 = x_2$. F est donc injective.

- F est surjective?? Avons-nous

$$\forall y \in]0, 2], \exists x \in [1, +\infty[/ y = f(x) \quad ??$$

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0, \quad \Delta = 16 - 4y^2 \\ \Rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y} \text{ ou bien } x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - y^2}}{y}.$$

Pour $x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y}$, l'expression $\frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y}$ est bien définie sur $]0, 2]$ et, comme $\sqrt{4 - y^2} \geq 0$ alors $2 + \sqrt{4 - y^2} \geq 2$. En même temps, $0 < y \leq 2$ donc $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$.

Ce qui fait que : $\left(\frac{1}{y}\right)(2 + \sqrt{4 - y^2}) \geq 2\left(\frac{1}{2}\right)$ ou alors : $\frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y} \geq 1$.

Donc $x_1 \in [1, +\infty[$, c'est une solution acceptée.

Par contre, pour $x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - y^2}}{y}$, nous devons étudier le signe de $(x_2 - 1)$:

$$x_2 - 1 = \frac{2 - \sqrt{4 - y^2}}{y} - 1 \\ = \frac{2 - y - \sqrt{4 - y^2}}{y}.$$

Le y étant positif, il nous reste à voir le signe de $2 - y - \sqrt{4 - y^2}$:
Supposons que:

$$\begin{aligned} 2 - y - \sqrt{4 - y^2} &< 0 \\ \Rightarrow 2 - y &< \sqrt{4 - y^2}. \end{aligned}$$

Et comme $2 - y \geq 0$, nous pouvons passer au carré. On trouve:

$$\begin{aligned} (2 - y)^2 &< \left(\sqrt{4 - y^2}\right)^2 \\ \Rightarrow -4y + 2y^2 &< 0. \end{aligned}$$

Qui est toujours vraie lorsque $y \in]0, 2]$. Finalement notre supposition est toujours vraie, donc $x_2 - 1 < 0$ i.e. $x_2 < 1$.

La solution x_2 est refusée, il y a finalement une seule solution. Donc f est surjective sur $[1, +\infty[$.

- Au final, f est surjective et bijective sur $[1, +\infty[$, elle est donc bijective sur $[1, +\infty[$.

3 Chapitre 3 Les fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Cours N°1 Limite, continuité d'une fonction

3.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1

Nous avons déjà donné la définition d'une fonction au chapitre précédent, On appelle **fonction** d'un ensemble E dans un ensemble F toute relation entre eux qui fait correspondre à chaque élément de E **au plus** un élément de F .

Généralement notée:

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

E est appelé **ensemble de départ**, F est dit **ensemble d'arrivée**, x est appelé **antécédent** de y (ou **variable muette**) et $y = f(x)$ est dit **image** de x par la fonction f .

Quand E et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on dit que la fonction est réelle ou à valeurs réelles d'une variable réelle.

Dans tout ce qui suit, E et $F \subset \mathbb{R}$.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Définition 2

On appelle **domaine de définition** D_f de la fonction f , l'ensemble des éléments $x \in E$ dont l'image y existe, (elle est unique).

Dans notre exemple plus haut $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

Exemples

$$\begin{array}{ll} x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} & D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*. \\ x \mapsto g(x) = \ln x & D_g = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = \mathbb{R}_+^*. \\ x \mapsto h(x) = \cos x & D_h = \mathbb{R}. \end{array}$$

3.1.2 Fonctions périodiques

f est dite périodique sur E ssi:

$$\exists T > 0 / \quad x \in E \Rightarrow (x + T) \in E \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Le plus petit $T > 0$ qui vérifie cette relation est appelé la période de f .

Exemples

On a

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x$ Donc $\cos$ est périodique de période 2π .

$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(x + \pi) = \tan x$ Donc $\tan$ est périodique de période π .

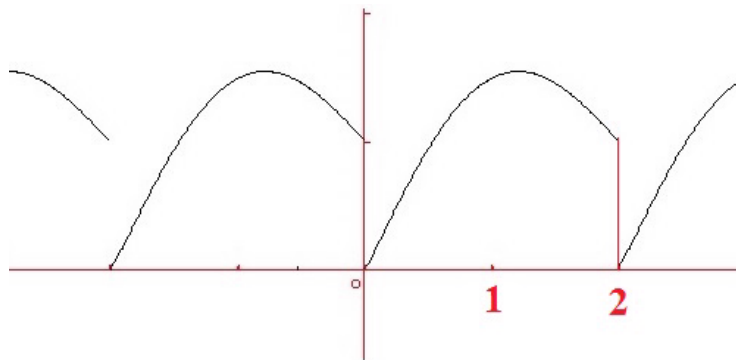


Fig.3.1 : Une fonction périodique de période $T=2$.

3.1.3 Parité d'une fonction

Soit une f fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 (i.e. si $x \in D_f$ alors $(-x) \in D_f$):

- f est dite paire ssi:

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x).$$

Remarque

f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemples

$$\begin{array}{lll} 1/ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ & 2/ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ & 3/ h : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto f(x) = x^2 & x \mapsto g(x) = |x| & x \mapsto h(x) = \cos x \end{array} .$$

- f est dite impaire ssi:

$$\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x).$$

Remarque

f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples

$$\begin{array}{lll} 1/ f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} & 2/ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & 3/ h : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} & x \mapsto g(x) = x^3 & x \mapsto h(x) = \sin x \end{array} .$$

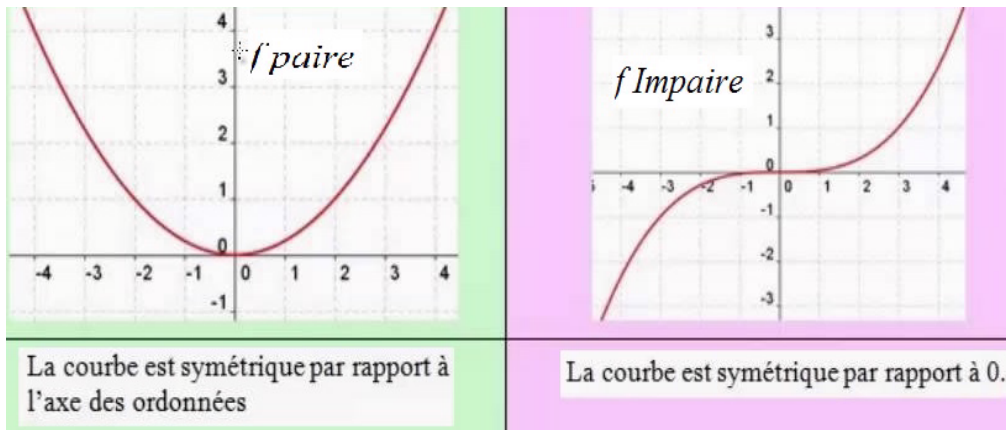


Fig.3.2 : Fonction paire (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées),
Fonction impaire (symétrie par rapport à l'origine O).

3.1.4 Fonctions bornées

- f est dite majorée ssi:

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, f(x) \leq M.$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On a: $\forall x \in [1, +\infty[, \frac{1}{x} \leq 1$, on dit que f est majorée par 1.

- f est dite minorée ssi:

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, m \leq f(x).$$

Exemple

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = e^x. \end{aligned}$$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < e^x$, on dit que g est strictement minorée par 0.

- f est dite bornée ssi:

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, m \leq f(x) \leq M.$$

Ou bien,

$$\exists A > 0 / \forall x \in D_f, m \leq |f(x)| \leq A.$$

C'est-à-dire que f est bornée ssi elle est minorée et majorée en même temps.

Exemple

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \sin x. \end{aligned}$$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$. On dit que h est majorée par 1 et minorée par (-1) .

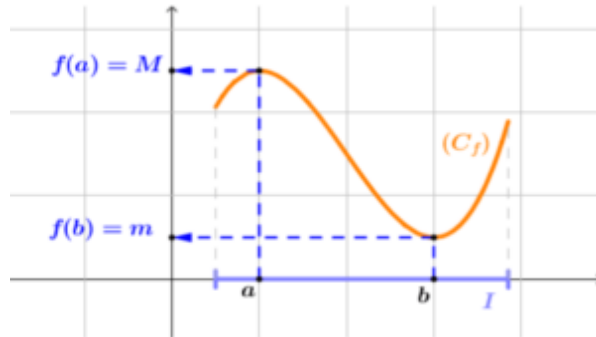


Fig.3.3 : Une fonction majorée par M et minorée par m .

3.1.5 Monotonie d'une fonction

- f est dite constante ssi:

$$\forall x, y \in D_f, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) = f(y)).$$

Ou bien,

$$\exists a \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, f(x) = a.$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1. \end{aligned}$$

On écrit aussi $f \equiv 1$ et on lit f est identiquement égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

- f est dite croissante ssi:

$$\forall x, y \in D_f, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y)).$$

Si l'inégalité plus haut est stricte, on dit que f est strictement croissante.

Exemple

Montrer que la fonction suivante est croissante:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^* / (x \leq y)$

On a:

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - f(y) &= \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{x - y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mais puisque } (x \leq y) \text{ alors } \frac{x - y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} &\leq 0. \\ \text{Donc } f(x) - f(y) &\leq 0.\end{aligned}$$

- f est dite décroissante ssi:

$$\forall x, y \in D_f, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y)).$$

Si l'inégalité plus haut est stricte, on dit que f est strictement décroissante.

Exemple

Montrer que la fonction suivante est décroissante:

$$\begin{aligned}g: \mathbb{R}^- &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = x^2.\end{aligned}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^- / (x \leq y)$

On a:

$$\begin{aligned}g(x) - g(y) &= x^2 - y^2 \\ &= (x - y)(x + y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mais puisque } (x \leq y) \text{ alors } (x - y) &\leq 0. \\ \text{et puisque } x, y \in \mathbb{R}^- \text{ alors } (x + y) &\leq 0. \\ \text{Ce qui fait que } (x - y)(x + y) &\geq 0 \\ \text{Donc } g(x) - g(y) &\geq 0.\end{aligned}$$

- f est dite monotone sur un intervalle I ssi, elle ne change **PAS** sa monotonie sur cet intervalle, c'est-à-dire, elle reste toujours croissante ou bien toujours décroissante sur tout l'intervalle, sans jamais changer son sens de variations.

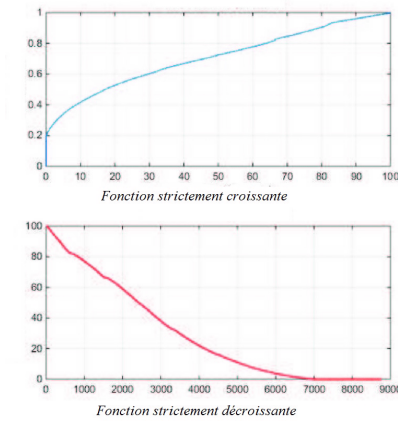


Fig.3.4 : Deux fonctions monotones.

3.1.6 Les limites

Définition

Soient a et l des réels et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f admet l pour limite en a ou que f tend vers l quand x tend vers a , ssi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 / \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Remarque

La limite, quand elle existe, elle est unique et est égale à la limite à droite comme à la limite à gauche. i.e.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} a} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} a} f(x) = l.$$

C'est-à-dire que, au cas où nous avons une limite à droite d'une fonction différente de sa limite à gauche au même point alors la fonction n'admet pas de limite en ce point.

Exemple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 5x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Nous voyons bien que
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4 \end{cases} .$$

Donc cette fonction n'admet pas de limite en 0.

Les formes indéterminées

Nous comptons sept formes indéterminées qui sont:

$$\left[\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} & \infty \times 0 & +\infty - \infty & 0^0 & 1^\infty & \infty^0 \\ \hline \end{array} \right] .$$

Quelques limites usuelles

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = 0$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0^+$

Propriétés

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, (l et l' sont des limites finies).

On a les propriétés suivantes:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + l'.$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x).g(x)) = l.l'.$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l}{l'}$ (pourvu que l' soit différente de 0 bien sûr).
4. **Très important** : si les conditions de composition entre f et g sont vérifiées alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = l$.
5. Si $\forall x \in (D_f \cap D_g), f(x) \leq g(x)$ alors $l \leq l'$.
6. Si $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, f(x) \leq M$ alors $l \leq M$ et de même,
Si $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, m \leq f(x)$ alors $m \leq l$.

3.1.7 Théorèmes importants pour calculer les limites

Théorème 1

Soit f une fonction bornée et g une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Exemple

$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$ et $\cos$ est une fonction bornée, (majorée par 1 et minorée par -1).

Théorème 2 Règle de l'Hôpital (ou l'Hospital)

⁴Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a . On suppose que f et g sont dérivables sur $I - \{a\}$ et que $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq a$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$ existe ou est infinie, alors:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right).$$

Exemple

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$.

⁴1/ Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital est un mathématicien français, à ne pas confondre donc avec l'hôpital où on traite les malades !

Il suffit d'appliquer la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{1} \right) = 1.$$

Théorème 3 Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f , G_1 et G_2 trois fonctions telles que :

$$\lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} G_1(x) = \lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} G_2(x) = l \text{ (finie)}.$$

Et :

$$\forall x, G_1(x) \leq f(x) \leq G_2(x).$$

Alors:

$$\lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} f(x) = l.$$

Exemple

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0$.

Il suffit d'appliquer théorème d'encadrement. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1. \\ (\text{Au voisinage de } +\infty) \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0$.

Théorème 4 Théorème de comparaison

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f , G_1 et G_2 trois fonctions

- Si $\forall x, G_1(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} G_1(x) = +\infty$

Alors:

$$\lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} f(x) = +\infty.$$

- Si $\forall x, f(x) \leq G_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} G_2(x) = -\infty$

Alors:

$$\lim_{x \rightarrow a(\text{ou } \infty)} f(x) = -\infty.$$

Exemple

- Déterminer par comparaison, la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = n^2 - (-1)^n, (n \in \mathbb{N}).$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad & (-1)^n \leq 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad & -(-1)^n \geq -1. \end{aligned}$$

Donc:

$$n^2 - 1 \leq n^2 - (-1)^n.$$

Mais comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

- Trouver : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin x)$.

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sin x &\leq 1. \\ \text{Donc } \sin x + x &\leq 1 + x. \end{aligned}$$

Mais comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x) = -\infty$ alors par le théorème de comparaison:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3.1.8 Continuité d'une fonction

Rappel de quelques Définitions et propriétés Soit f une fonction définie en un point x_0 .

1. On dit que f est continue à droite de x_0 ssi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

2. On dit que f est continue à gauche de x_0 ssi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0).$$

3. On dit que f est continue en x_0 ssi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

4. f est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ssi elle est continue en tout point (i.e. en chaque point) de I .
5. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors, $(f + g)$, $(f \cdot g)$, $(a \cdot f)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)$ avec $g(x) \neq 0$ le sont aussi.
6. Les fonctions élémentaires (ou usuelles) comme les polynômes et les fonctions sinus ($x \rightarrow \sin x$), cosinus ($x \rightarrow \cos x$), exponentielles ($x \rightarrow e^x$) sont continues sur tout $\mathbb{R}$. La fonction logarithmique ($x \rightarrow \ln x$) est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction racine carrée ($x \rightarrow \sqrt{x}$) est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$...etc.
7. Soit f et g deux fonctions, si f est continue en x_0 et g est continue au point $f(x_0)$, alors $(g \circ f)$ est continue au point x_0 . Nous pouvons conclure que si f est continue sur un intervalle $I \subset J$ et g est continue sur un intervalle $J \subset K$ alors $(f \circ g)$ est continue sur I .
8. Pour faciliter la compréhension, on dit qu'une fonction est continue si on peut "tracer son graphe sans lever la main" !

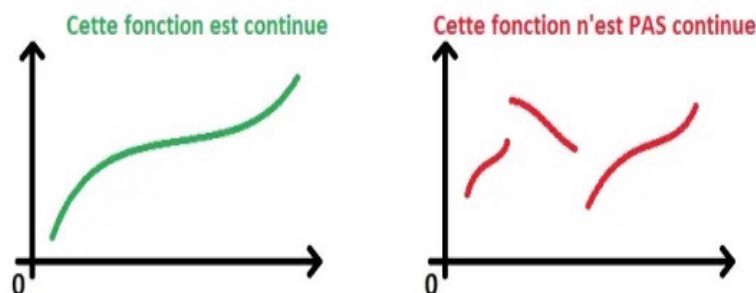


Fig.3.5 : Représentation d'une fonction continue et d'une fonction non continue.

Exemple

Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

) Comme f est le produit de deux fonctions élémentaires $\sin x$ et $\frac{1}{x}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$ aussi.

Étudions maintenant la continuité au point 0:

Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= 1 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Alors f est continue en 0.

Conclusion: f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

3.1.9 Prolongement par continuité

Théorème

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est donc **pas** définie en a .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ **existe** et est **finie**, alors on dit que f est **prolongeable par continuité** au point a .

Nous pouvons prolonger f par continuité en a en posant une nouvelle fonction $\tilde{f}$ que nous allons définir comme suit:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \alpha & \text{si } x = a \end{cases} . \end{aligned}$$

$\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a .

Exemples

Est-ce que les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité? Si oui, donner leurs prolongements.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x} , & x &\mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} & k : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} & l : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) , & x &\mapsto k(x) = \frac{1}{x^2} , & x &\mapsto l(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) . \end{aligned}$$

Correction

- Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f est bien définie et continue. Le seul point où f n'est pas définie c'est $a = 0$, nous devons donc étudier la possibilité du prolongement par continuité en ce point.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ alors oui, f est **prolongeable par continuité** au point 0.

Son prolongement est donné par la fonction $\tilde{f}$ suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

- Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction g est bien définie et continue.

Mais puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ c'est-à-dire que nous avons une limite à droite différente de la limite à gauche au point 0 alors non, g est n'est **pas prolongeable par continuité** au point 0.

- Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction h est bien définie et continue.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right]$ n'existe pas alors non, h est n'est **pas prolongeable par continuité** au point 0.

- Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction k est bien définie et continue.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$, c'est-à-dire que la limite est infinie alors non, k est n'est **pas prolongeable par continuité** au point 0.

- Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction l est bien définie et continue.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0$ car nous avons le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.

Alors l est **prolongeable par continuité** au point 0.

Son prolongement est donné par la fonction $\tilde{l}$ suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{l}: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tilde{l}(x) = \begin{cases} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

3.1.10 Théorème des valeurs intermédiaires

Pour trouver les racines des équations de la forme $f(x) = 0$, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires suivant:

Théorème

- Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $f(a).f(b) < 0$ alors $\exists \alpha \in]a, b[/ f(\alpha) = 0$.

Si de plus, f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors α est unique dans $]a, b[$.

- Nous pouvons remplacer $f(a)$ et $f(b)$ par des limites adéquates.
- Si nous avons une équation du type $f(x) = k \Leftrightarrow f(x) - k = 0$, on pose $g(x) = f(x) - k$.

Exemples

1/ Montrer que la fonction $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ admet au moins une racine dans $[0, 10]$.

Nous pouvons considérer l'intervalle $[0, \pi^2] \subset [0, 10]$.

$\sqrt{\dots}$ et $\cos$ sont continues sur $[0, \pi^2]$ et f est continue sur $[0, \pi^2]$ comme composée de deux fonctions continues.

Ensuite on a: $f(0) = 1, f(\pi^2) = -1$ ce qui fait que $f(0) \cdot f(\pi^2) < 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'**au moins** une solution de l'équation $\cos(\sqrt{x}) = 0$.

2/ Montrer que l'équation $x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Donc $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = -\infty < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

3/ Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nous pouvons considérer la fonction $g(x) = \cos x - x$.

Si $\cos x = x$ alors $g(x) = 0$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a: $g(0) = 1, g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ ce qui fait que $g(0) \cdot g(\frac{\pi}{2}) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.2 Cours N°2 Dérivée et différentiabilité d'une fonction

3.2.1 Définitions

Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Et soit $x_0 \in I$, tel que f soit continue au point x_0 .

1. On appelle **accroissement fini** ou **taux de croissance** entre x et x_0 de la fonction f , la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

On dit que f est dérivable au point x_0 s'il existe un nombre réel unique α tel que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

Ou bien:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

i.e $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite en x_0 .

Cette limite doit **exister** et être **finie** pour conclure la dérivabilité de la fonction au point x_0 .

On dit alors que α est le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 , ou plus simplement la dérivée de f au point x_0 .

On écrit:

$$\alpha = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0).$$

2. On peut aussi utiliser le changement de variables $h = (x - x_0)$, qui peut servir pour calculer des limites plus ardues, on aura alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha.$$

3. On dit que la fonction est dérivable sur tout I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .
4. Si une fonction $y = f(x)$ est dérivable en tout point d'un intervalle I , on définit la **différentielle** df de cette fonction par : $df = f'(x)\Delta x$ où Δx est un accroissement arbitraire de la variable x . Par exemple, si $f(x) = x$, on a : $df = 1\Delta x$. Dans ce cas, la différentielle df de la fonction devient un accroissement arbitraire de la variable x qu'on note dx . D'où $df = f'(x)dx$.

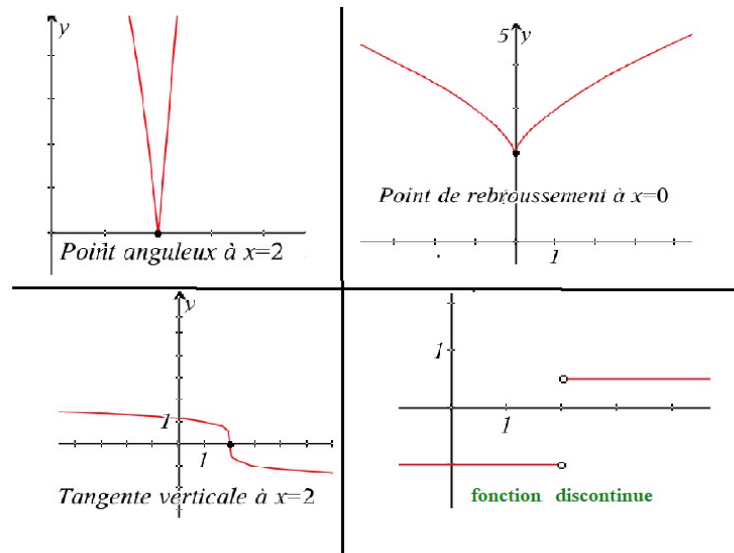


Fig.3.6 : Les cas de non dérivabilité en un point.

Exemples

1/ Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}.$$

On a

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\sin \alpha - \sin \beta) = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

Donc:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).\end{aligned}$$

Et puisque $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y}\right) = 1$ alors

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \\ &= \cos(x_0).\end{aligned}$$

Le x_0 étant quelconque, cela fait que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos x.$$

2/ Calculer la dérivée de $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant le changement de variables:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h}.$$

On a:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\cos \alpha + \cos \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Donc:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0) \cos h - \sin(x_0) \sin h - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x_0) \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin(x_0) \frac{\sin h}{h} \right].\end{aligned}$$

Et puisque $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\cos y - 1}{y}\right) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h}\right) = 1$ alors:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\sin(x_0).$$

Le x_0 étant quelconque, cela fait que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin x.$$

Théorème

Si f est dérivable en x_0 alors, elle est continue en x_0 .

Nous rencontrons souvent ce théorème sous sa forme contraposée, comme suit:

Si f n'est pas continue en x_0 alors, elle n'est pas dérivable en x_0 .

3.2.2 Propriétés

Soit les deux fonctions $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toutes les deux dérivables au point $x_0 \in I$, alors:

- $(f + g)$ est aussi dérivable au point x_0 et

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

- $\forall a \in \mathbb{R}, (af)$ est aussi dérivable au point x_0 et

$$(af)'(x_0) = af'(x_0).$$

- $(f.g)$ est aussi dérivable au point x_0 et

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

- $\left(\frac{f}{g}\right)$ est aussi dérivable au point x_0 (avec $g(x) \neq 0, \forall x$) et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

3.2.3 Dérivée de la fonction composée

Soit les deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$, alors:

Si f est dérivable au point x_0 et g est dérivable au point $f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est dérivable au point x_0 et on a:

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'[f(x_0)].$$

Exemple

$$\sin'(-x) = -\cos(-x).$$

3.2.4 Dérivées des fonctions usuelles

Dérivées des fonctions puissances.	
Cas particulier	Généralisation
$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R}^*)$	$[f^n(x)]' = n.f'(x).[f^{n-1}(x)]$
Exemple important: $(\sqrt{x})' = \left((x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Dérivées des fonctions trigonométriques	
Cas particulier	Généralisation
$\sin'(x) = \cos x$	$\sin'[f(x)] = f'(x) \cos[f(x)]$
$\cos'(x) = -\sin x$	$\cos'[f(x)] = -f'(x) \sin[f(x)]$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan'[f(x)] = 1 + \tan^2(f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$
$\cot g'(x) = 1 + \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\cot g'[f(x)] = 1 + \cot^2(f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sin^2[f(x)]}$

Dérivées des fonctions trigonométriques inverses	
Cas particulier	Généralisation
$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin'[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos'[f(x)] = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan'[f(x)] = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$\operatorname{arccot} g'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} g'[f(x)] = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Dérivées des fonctions hyperboliques	
Cas particulier	Généralisation
$sh'(x) = ch(x)$	$sh'[f(x)] = f'(x) ch[f(x)]$
$ch'(x) = sh(x)$	$ch'[f(x)] = f'(x) sh[f(x)]$
$th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$	$th'[f(x)] = f'(x) [1 - th^2(f(x))] = \frac{f'(x)}{ch^2(f(x))}$
$coth'(x) = 1 - \cot h^2(x) = \frac{-1}{sh^2(x)}$	$coth'[f(x)] = f'(x) [1 - \cot h^2(f(x))] = \frac{-f'(x)}{sh^2(f(x))}$

Dérivées des fonctions hyperboliques inverses	
Cas particulier	Généralisation
$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$	$\operatorname{argch}'[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$
$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$	$\operatorname{argsh}'[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + 1}}$
$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}; (x < 1)$	$\operatorname{argth}'[f(x)] = \frac{f'(x)}{1 - [f(x)]^2}$
$\operatorname{argcoth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}; (x > 1)$	$\operatorname{argcoth}'[f(x)] = \frac{f'(x)}{1 - [f(x)]^2}$

Dérivées des fonctions logarithmiques	
Cas particulier	Généralisation
$\ln' x = \frac{1}{x}$	$\ln'[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log'_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ ($a > 0, \neq 1$)	$\log'_a [f(x)] = \frac{1}{\ln a} \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$ ($a > 0, \neq 1$)

Dérivées des fonctions exponentielles	
Cas particulier	Généralisation
$(e^x)' = e^x$	$(e^{[f(x)]})' = (f'(x)) \cdot e^{[f(x)]}$
$(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$ ($a > 0, \neq 1$)	$(a^{[f(x)]})' = (\ln a) \cdot (f'(x)) \cdot a^{[f(x)]}$ ($a > 0, \neq 1$)

3.2.5 Dérivées d'ordre supérieur

Définition

On définit la dérivée énième de la fonction f , dite aussi dérivée d'ordre n , la fonction obtenue après n dérivations successives de la fonction f .

Elle est notée par $f^{(n)}$:

$$\begin{cases} f^{(0)} \equiv f \\ f^{(k)} \equiv [f^{(k-1)}]' \quad , k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Exemple

Trouver une formule récurrente pour calculer $f^{(n)}$ avec $f(x) = \cos x$.

On a :

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = f(x) = \cos x \\ f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x \\ f^{(3)}(x) = \sin x \end{cases},$$

Donc:

$$\begin{cases} f^{(4k)}(x) = f(x) = \cos x \\ f^{(4k+1)}(x) = -\sin x \\ f^{(4k+2)}(x) = -\cos x \\ f^{(4k+3)}(x) = \sin x \end{cases}, k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Remarque Nous pouvons démontrer la formule (*) plus haut par récurrence.

3.2.6 Fonctions monotones et continues

Monotonie

La monotonie est le sens de variation de la fonction.

Soit la fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur tout l'intervalle I , alors:
Si $\forall x \in I$:

- $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .
- $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
- $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I .
- $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .
- $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

On dit que la fonction est monotone (respectivement strictement monotone) ssi elle est croissante (respectivement strictement croissante), ou bien décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

Théorèmes Soit la fonction:

$$f : I \subset D_f \rightarrow F \\ x \mapsto f(x).$$

- 1/ Si f est strictement monotone sur I , alors elle est injective sur I .
- 2/ Si f est **continue** sur I et $f(I) = F$ alors elle est surjective sur I .
- 3/ Si les conditions 1/ et 2/ plus haut sont vérifiées en même temps, c'est-à-dire que f est strictement monotone et continue sur I , alors f est bijective sur I .

Exemple

Soit la fonction:

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \ln x.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x}.$$

On trace le tableau de variation:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1/ On voit bien que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle est donc injective sur $]0, +\infty[$.

2/ f est continue sur $]0, +\infty[$. Puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc grâce aux limites, nous pouvons conclure que $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$. Ce qui fait que f est surjective sur $]0, +\infty[$.

3/ Par 1/ et 2/ f est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

3.2.7 Les fonctions réciproques

Dans le cas où une fonction donnée:

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

est bijective, alors elle admet une fonction réciproque (ou inverse):

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ x &\mapsto f^{-1}(x). \end{aligned}$$

Qui vérifie :

$$1/ f(E) = F \text{ et } f^{-1}(F) = E.$$

$$2/ \forall x \in F, (f \circ f^{-1})(x) = x \text{ et } \forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Exemple

Dans la section précédente, nous avons convenu que la fonction:

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln x. \end{aligned}$$

est une bijection, nous pouvons désormais définir sa fonction inverse:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = e^x. \end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f^{-1})(x) = \ln(e^x) = x$$

et

$$\forall x \in]0, +\infty[, (f^{-1} \circ f)(x) = e^{\ln x} = x.$$

Propriétés de la fonction inverse

- f^{-1} a exactement la même monotonie que f , par exemple si f est croissante alors f^{-1} l'est aussi.
- Puisque f est continue alors f^{-1} l'est aussi.
- Les graphes d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice : $(\Delta) : y = x$.
- Nous pouvons tirer l'expression de la dérivée de la fonction réciproque grâce à la dérivée de la fonction primaire et la fonction réciproque elle-même, comme suit :

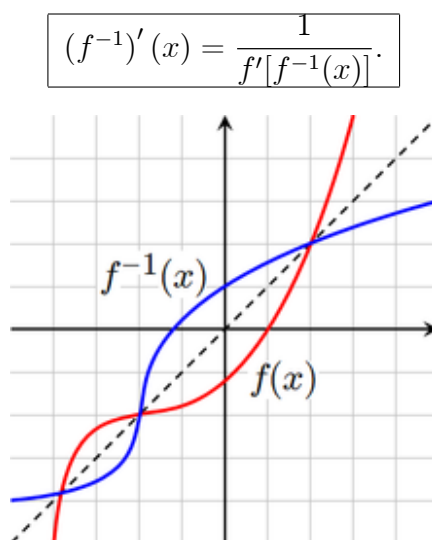


Fig.3.7 : Deux fonctions réciproques sur le même repère (symétrie par rapport à la première bissectrice).

Exemple

Pour $f(x) = \ln(x)$, en appliquant la formule ci-dessus, on trouve $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.

Effectivement, nous savons que $(f^{-1})(x) = e^x$ et $(f^{-1})'(x) = e^x$.

Remarque

Cette formule est très utile quand on ne dispose pas de l'expression de la fonction réciproque en tout point, sauf en un point bien précis. Nous l'appliquons alors pour connaître la valeur de la dérivée de la fonction réciproque en ce point.

3.2.8 Théorèmes relatifs aux fonctions dérivables

Avant d'énoncer le théorème des accroissements finis, rappelons le théorème de Rolle:

Théorème 1 : théorème de Rolle Soit $a, b \in \mathbb{R}/a < b$.

Soit une fonction donnée:

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Telle que :

- 1/ f est continue sur $[a, b]$.
- 2/ f est dérivable sur $]a, b[$.
- 3/ $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in]a, b[/ f'(c) = 0$.

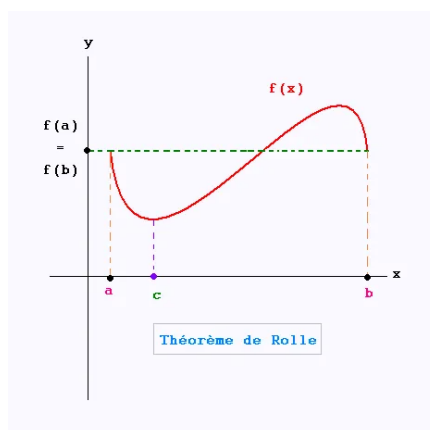


Fig.3.8: Une illustration du théorème de Rolle.

Théorème 2: théorème des accroissements finis Soit $a, b \in \mathbb{R}/a < b$.

Soit une fonction donnée:

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Telle que :

- 1/ f est continue sur $[a, b]$.
- 2/ f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[/ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

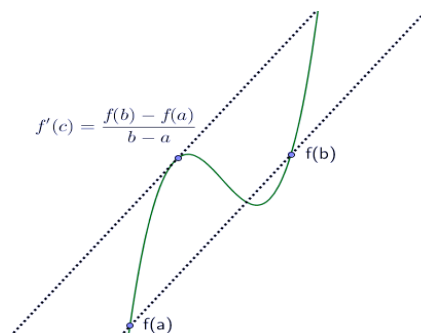


Fig.3.9 : Une illustration du théorème des accroissements finis.

Applications

1/ Appliquer le théorème de Rolle à la fonction:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

pour démontrer le théorème des accroissements finis.

Correction

La fonction F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, de dérivée:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De plus, $F(a) = F(b) = f(a)$.

Le théorème de Rolle implique alors l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$F'(c) = 0. \text{ C'est-à-dire, } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2/ Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que:

$$f(x) - f(x + 1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}.$$

Correction

Puisque la fonction f est continue sur $[x, x + 1]$ et dérivable sur $]x, x + 1[$, ($x > 0$), on applique le théorème des accroissements finis, on trouve:

$$\exists c \in]x, x+1[/ f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}}.$$

Donc,

$$\exists c \in]x, x+1[/ -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}} = f(x+1) - f(x).$$

Ou, de manière équivalente :

$$\exists c \in]x, x+1[/ \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}} = f(x) - f(x+1).$$

3.3 Série d'exercices N°3

Exercice 1

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, g(x) = \ln(x^2-1), h(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\ln x}, k(x) = \frac{\ln(\ln(x-1))}{x}.$$

Exercice 2

Étudier la parité de la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Exercice 3

1/ Calculer la limite suivante :

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} \right].$$

2/ Soit la fonction $f(x) = -x^2 - x \sin x$
Montrer que

$$\forall x < 0, \quad f(x) \leq -x(x+1).$$

Puis conclure $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3/ Soit la fonction $g(x) = x + \frac{\cos x}{x}$. Montrer que:

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{1}{x} \leq g(x).$$

Puis conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

4/ Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x^2 + 3\sqrt{2}x + \frac{1}{x - \sin x} \right].$$

Exercice 4

1/ Soit les fonctions suivantes:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad , \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

Discuter de la continuité au point 0.

2/ Soit les fonctions suivantes:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |\sin x| \quad , \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

Discuter de la dérivabilité au point 0 pour f et au point 1 pour g .

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x \ln x - x$, $x > 1$.

1. f est-elle continue sur $]1, +\infty[$?
2. f est-elle dérivable sur $]1, +\infty[$? Si oui, calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que $f:]1, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ est une bijection.
5. Résoudre dans $]1, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.
6. Déterminer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 6

Trouver le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ s'il existe, pour les fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\} .$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\} .$$

Exercice 7

Calculer la dérivée n ème de la fonction suivante en fonction de n , où $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 8

On considère l'équation suivante:

$$x^4 - \lambda x^2 + 1 = 0. \quad ((E))$$

Où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Donner le nombre de solutions de l'équation (E) en fonction du paramètre λ .
2. Écrire l'équation (E) sous la forme $f(x) = \lambda$, en précisant la fonction f .
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, retrouver les résultats de la première question.

Exercice 9

On définit la fonction f par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que sur $[0, 2]$ la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis.
2. Déterminer tous les nombres $c \in]0, 2[$ tels que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

3.4 Correction de la série d'exercices N°3

Exercice 1

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes:

•

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}.$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / (5-2x \neq 0) \wedge \frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \right\}$$

$$D_f = \left[\frac{-2}{3}, \frac{5}{2} \right[.$$

•

$$g(x) = \ln(x^2 - 1).$$

$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} / (x^2 - 1) > 0 \}$$

$$D_g =] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[.$$

•

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 5}}{\ln x}.$$

$$D_h = \{ x \in \mathbb{R} / (x > 0) \wedge (\ln x \neq 0) \wedge x^2 - 2x - 3 \geq 0 \}$$

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$D_h = [3, +\infty[.$$

•

$$k(x) = \frac{\ln(\ln(x-1))}{x}.$$

$$\begin{aligned}
D_k &= \{x \in \mathbb{R} / (x - 1 > 0) \wedge (x \neq 0) \wedge \ln(x - 1) > 0\} \\
\ln(x - 1) > 0 &\Rightarrow x - 1 > e^0 \Rightarrow x > 2 \\
D_k &=]2, +\infty[.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Étudier la parité de la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

On commence d'abord par déterminer le domaine de définition:

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / (x + 1 \neq 0) \wedge \frac{x-1}{x+1} > 0\right\} \\
D_f &=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.
\end{aligned}$$

D_f est symétrique par rapport à 0.

Et:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{2}{3}(-x) + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) \\
&= -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est impaire.

Exercice 3

1/ Calculer la limite suivante :

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} \right].$$

Nous avons que x tend vers un réel et une FI du type $\frac{0}{0}$, on utilise la formule de l'hôpital :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{1} \right] \\
A &= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

2/ Soit la fonction $f(x) = -x^2 - x \sin x$.

Montrer que

$$\forall x < 0, \quad f(x) \leq -x(x + 1).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x &< 0, \quad \sin x \leq 1 \\
\Rightarrow \forall x < 0, \quad -x \sin x &\leq -x \\
\Rightarrow \forall x < 0, \quad -x^2 - x \sin x &\leq -x^2 - x.
\end{aligned}$$

Donc:

$$\forall x < 0, \quad f(x) \leq -x(x + 1).$$

Conclure $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Puisque:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x(x + 1) = -\infty.$$

Alors, par le lemme de comparaison, on trouve:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3/ Soit la fonction $g(x) = x + \frac{\cos x}{x}$

Montrer que

$$\forall x > 0, \quad g(x) \geq x - \frac{1}{x}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x &> 0, & -1 &\leq \cos x \\
\Rightarrow \forall x > 0, & \frac{-1}{x} &\leq \frac{\cos x}{x} \\
\Rightarrow \forall x > 0, & x - \frac{1}{x} &\leq x + \frac{\cos x}{x}.
\end{aligned}$$

Donc:

$$\forall x > 0, \quad g(x) \geq x - \frac{1}{x}.$$

Conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ alors, par le théorème de comparaison, on trouve:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

4/ Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x^2 + 3\sqrt{2}x + \frac{1}{x - \sin x} \right].$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3\sqrt{2}x) = +\infty$

Puis,

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \sin x \leq 1. \\
\Rightarrow -1 &\leq -\sin x \leq 1 \\
\Rightarrow x - 1 &\leq x - \sin x \leq x + 1 \\
\Rightarrow \frac{1}{x + 1} &\leq \frac{1}{x - \sin x} \leq \frac{1}{x - 1}.
\end{aligned}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$ alors, par le théorème d'encadrement on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sin x} = 0.$$

Ce qui fait que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x^2 + 3\sqrt{2}x + \frac{1}{x - \sin x} \right] = +\infty.$$

Exercice 4

- Pour:

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

f n'est pas définie à gauche de 0, elle n'est par conséquent pas continue à gauche de 0.

On a par la règle de l'Hôpital :

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left[\frac{\frac{1}{1+x}}{1} \right] = 1 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Donc, f est continue à droite de 0.

•

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = 0 \quad (\text{limite usuelle}).$$

Alors, oui, g est continue au point 0.

2/

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |\sin x|.$$

On a

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \xrightarrow{>} 0 \\ -\sin x & \text{si } x \xrightarrow{<} 0 \end{cases}.$$

Donc:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.\end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable au point 0.

•

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Par l'Hôpital deux fois :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \pi^2 [\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)] \\ &= \pi^2.\end{aligned}$$

Finalement, g est dérivable au point 1 et $g'(1) = \pi^2$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x \ln x - x$, $x > 1$.

1. f est-elle continue sur $]1, +\infty[$?

f est continue comme somme et produit de fonctions élémentaires continues sur $]1, +\infty[$.

2. f est-elle dérivable sur $]1, +\infty[$? Si oui, calculer sa dérivée.

Par le même argument, f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

3. Dresser le tableau de variations de f .

On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln x - 1)] = +\infty$.

Puis, $f'(x) = \ln x > 0$ sur $]1, +\infty[$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	$\parallel$	$\nearrow$	$+\infty$
	$\parallel$		
	$\parallel_{-1}$		

4. Montrer que $f :]1, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ est une bijection.

f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, elle est donc injective. Et puis, elle est continue sur $]1, +\infty[$ et $f(]1, +\infty[) =]-1, +\infty[$ alors elle est surjective. Finalement f est une bijection de $]1, +\infty[$ vers $] -1, +\infty[$.

5. Résoudre dans $]1, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(\ln x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ (refusé) ou bien } x = e \\ \Leftrightarrow S &= \{e\}. \end{aligned}$$

6. Déterminer $(f^{-1})'(0)$.

Puisque $f(e) = 0$, alors $f^{-1}(0) = e$. Donc, on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \\ &= \frac{1}{\ln(e)} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 6

Trouver le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ s'il existe, pour les fonctions suivantes:

•

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Puisque,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{2}{x^3 + 1} \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{2}{x^3 + 1} \right) = -\infty$$

Alors f n'admet pas de prolongement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

On a:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-6}{x^2 - x + 1} \\ &= -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Donc g admet un prolongement par continuité au point (-1) , donné par:

$$\begin{aligned} \tilde{g}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ -\frac{7}{3} & \text{si } x = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Exercice 7

Calculer la dérivée n ème de la fonction suivante en fonction de n , où $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = \frac{1}{1-x} \\ f^{(1)}(x) &= f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f^{(2)}(x) &= f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2 \times 3}{(1-x)^4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Remarque Nous pouvons établir la relation plus haut par récurrence.

Exercice 8

On considère l'équation suivante:

$$x^4 - \lambda x^2 + 1 = 0. \quad (\text{E})$$

Où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Donner le nombre de solutions de l'équation (E) en fonction du paramètre λ .

(Facile) :

$$y^2 - \lambda y + 1 = 0, \Delta = (\lambda^2 - 4), y_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}, s = y_1 + y_2 = \lambda.$$

- *) Si $\lambda = 2$, nous avons deux solutions.
- *) Si $\lambda \in]2, +\infty[$, nous avons quatre solutions.
- *) Si $\lambda \in]-\infty, 2[$, nous n'avons aucune solution.

2. Écrire l'équation (E) sous la forme $f(x) = \lambda$, en précisant la fonction f .

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \\ \Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} &= \lambda \text{ (Remarquons que si } x = 0, \text{ l'équation (E) est impossible).} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}. \end{aligned}$$

3. Dresser le tableau de variations de f . (Nous pouvons utiliser la parité et travailler seulement sur $]0, +\infty[$).

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^2} = +\infty$. Et puis: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

Ensuite : $f'(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		2		2	

4. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, retrouver les résultats de la première question:

Remarquons d'abord que:

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} - \lambda = 0.$$

C'est-à-dire que les solutions de (E) sont aussi les solutions de l'équation $:\frac{x^4 + 1}{x^2} - \lambda = 0$.

Remarque

Quand $x = 0$, (E) est impossible mais aussi $\frac{x^4 + 1}{x^2} - \lambda = 0$!

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \lambda \\ &= \frac{x^4 + 1}{x^2} - \lambda. \end{aligned}$$

Dont voici le tableau de variations:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$\parallel$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$2 - \lambda$	$+\infty$	$2 - \lambda$	$+\infty$

- -/ Sur $]1, +\infty[$

Si $\lambda \in]2, +\infty[$ $(2 - \lambda) < 0$, donc $F(1) < 0$. Or, sur l'intervalle $]1, +\infty[$ f est strictement croissante vers $+\infty$. Donc

$$\exists x_0 \in]1, +\infty[/ F(x_0) > 0.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[1, x_0]$, pour avoir une racine de l'équation $F(x) = 0$.

-/ Le même argument s'applique sur les intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $] 0, 1[$. Nous finissons donc avec quatre racines sur $\mathbb{R}$.

- -/ Sur $]1, +\infty[$

Si $\lambda \in]-\infty, 2[$ $(2 - \lambda) > 0$. Dans ce cas, $\forall x \in]1, +\infty[/ F(x) > 0$.

Nous ne pourrions pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires vu que sa deuxième hypothèse ne sera jamais vérifiée. Il n'existe par conséquent aucune solution à notre équation.

-/ Pareil pour les autres intervalles.

- Si $\lambda = 2$, nous avons deux solutions qui sont 1 et (-1) .

Exercice 9

On définit la fonction f par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que, sur $[0, 2]$ la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis:

Sur $[0, 1[$, $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ elle est continue et dérivable.

Sur $]1, 2]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ elle est continue et dérivable. (Remarquons que $0 \notin]1, 2]$!).

Il nous reste à vérifier la continuité et la dérivabilité au point $a = 1$:

$$f(1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1.$$

Ce qui fait que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$.

Donc f est bien continue au point $a = 1$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x}{-2} = -1. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable au point $a = 1$ et $f'(1) = -1$.

Finalement, f vérifie les conditions du théorème des accroissements finis, nous pouvons conclure que:

$$\exists c \in]0, 2[/$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

Ou alors : $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

2. Déterminer tous les nombres $c \in]0, 2[$ tels que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

On a : $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$.

Comme $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ alors,

$$\begin{aligned}
f(2) - f(0) &= 2f'(c) \\
\Leftrightarrow f'(c) &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{-1}{2} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} -c = \frac{-1}{2} & \text{pour } c \leq 1 \\ \frac{-1}{c^2} = \frac{-1}{2} & \text{pour } c > 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} & \text{pour } c \leq 1 \\ c^2 = 2 & \text{pour } c > 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ c = \sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous avons deux nombres qui vérifient $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ ce sont :

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c_2 = \sqrt{2}.$$

4 Chapitre 4 Application aux fonctions élémentaires

4.1 Cours N°1 Fonctions puissances

Ce sont des fonctions qui s'écrivent sous la forme $f : x \rightarrow f(x) = x^a$, où a est appelé exposant de la fonction puissance.

Leurs natures (et donc leurs études) dépendent largement du nombre a .

4.1.1 Exposant entier naturel

a) Définition

Si $a = n \in \mathbb{N}$, nous sommes face à un monôme. Dans ce cas le domaine de définition est $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^n. \end{aligned}$$

b) Propriétés

1. Si n est pair la fonction x^n est paire et si n est impair la fonction est impaire.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, f(1) = 1, f(0) = 0$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
5. Si $n < m$, alors $\forall x \in]0, 1[, x^m < x^n$ et $\forall x > 1, x^n < x^m$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par contre, sur $] -\infty, 0[$ la monotonie de f dépend de la parité de n , comme suit :

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{strictement décroissante} & \text{si } n \text{ est pair.} \\ \text{strictement croissante} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

c) Graphe

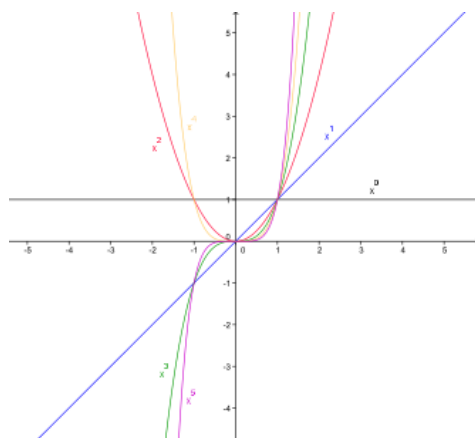


Fig.4.1 : Graphes de x^n avec différents exposants naturels.

d) Dérivée

La fonction puissance naturelle est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad | \quad [f^n(x)]' = n \cdot f'(x) \cdot [f^{n-1}(x)]}.$$

4.1.2 Exposant entier négatif

a) Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction puissance à exposant négatif sur $\mathbb{R}^*$ comme suit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}. \end{aligned}$$

b) Propriétés

1. Si n est pair la fonction x^n est paire et si n est impair la fonction est impaire.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, f(1) = 1$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- 4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

5. Si $n < m$, alors $\forall x \in]0, 1[$, $x^{-n} < x^{-m}$ et $\forall x > 1$, $x^{-m} < x^{-n}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Par contre, sur $] -\infty, 0[$ la monotonie de f dépend de la parité de n , comme suit :

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{strictement croissante} & \text{si } n \text{ est pair.} \\ \text{strictement décroissante} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

c) Graphe

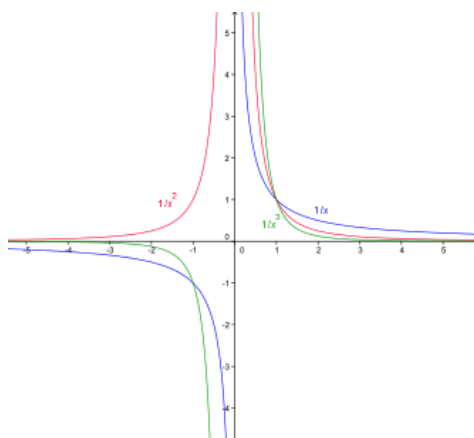


Fig.4.2 : Graphes de x^{-n} avec différents exposants négatifs.

d) Dérivée

La fonction à exposant naturel négatif est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme suit:

$$\boxed{(x^{-n})' = -n \cdot x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad \left| \quad [f^{-n}(x)]' = \frac{-n \cdot f'(x)}{f^{n+1}(x)} \right.}.$$

4.1.3 Les racines énièmes

a) Définition

Reprenons la fonction à exposant naturel $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^n. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier les propriétés de cette fonction pour conclure que c'est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ si n est pair et de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ si n est impair.

Elle admet donc une fonction réciproque notée f^{-1} qui est elle-même une fonction puissance :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \text{ (ou } [0, +\infty[) \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } [0, +\infty[)$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

b) Propriétés

Les propriétés de la fonction racine énième découlent des théorèmes sur les fonctions inverses:

1. Elle est continue sur son domaine de définition ($\mathbb{R}$ si n est impair ou $[0, +\infty[$ si n est pair).
2. Strictement croissante sur son domaine de définition.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

c) Graphe

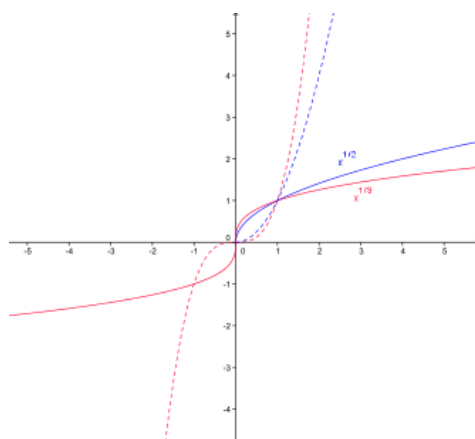


Fig.4.3 : Graphes de la fonction racine énième pour différentes valeurs de n .

d) Dérivée

La fonction racine énième est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R}_+^*$), mais n'est pas dérivable en 0, comme suit:

$$(n \in \mathbb{N}^*), \quad \boxed{\left(\sqrt[n]{x} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{x} x^{\frac{1}{n}} \quad \left| \quad \left[\sqrt[n]{f(x)} \right]' = \frac{1}{n} \frac{f'(x)}{f(x)} [f(x)]^{\frac{1}{n}}. \right.}$$

4.1.4 Exposant réel

a) Définition

Nous pouvons généraliser les fonctions puissances à un exposant réel en prenant $x > 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

b) Propriétés

1. Selon les valeurs de α , elle est parfois prolongeable par continuité en 0.
2. Selon les valeurs de α , le prolongement peut (ou non) être dérivable en 0.
3. Le sens de variation dépend du signe de α .

Nous résumons toutes ces propriétés sur le tableau suivant:

Valeurs de α	Prolongeable en 0	Dérivable en 0
$\alpha < 0$	Non	Non
$\alpha = 0$	Oui	Oui
$0 < \alpha < 1$	Oui	Non
$\alpha \geq 1$	Oui	Oui

c) Graphe

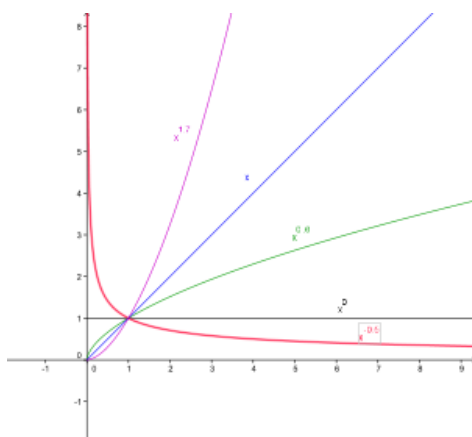


Fig.4.4:Graphes de la fonction puissance réelle pour différentes valeurs de α .

d) Dérivée

La fonction puissance réelle est généralement dérivable sur $]0, +\infty[$, comme suit :

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad | \quad [f^\alpha(x)]' = \alpha \cdot f'(x) \cdot [f^{\alpha-1}(x)]}.$$

4.2 Cours N°2 Fonctions logarithmiques

4.2.1 Fonctions logarithmiques de base a

Soit a une constante strictement supérieure à 0 et différente de 1 : $(a > 0, a \neq 1)$,

On pose dorénavant $I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et on suppose donc que $a \in I$.

a) Définition

On appelle fonction logarithmique de base a l'unique fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et notée $\log_a$ qui vérifie:

$\forall x, y \in]0, +\infty[, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, et $\log_a(a) = 1$. On écrit:

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \log_a(x). \end{aligned}$$

b) Propriétés

Remarquons que:

1. $\log_a(x)$ n'est défini que si $x > 0$.
2. $\forall a \in I, f(1) = 0$.
3. f est continue sur $]0, +\infty[$.
4. Si $a > 1$ alors f est strictement croissante et:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Par contre, si $0 < a < 1$ alors f est strictement décroissante et:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Remarque

On note $\log = \log_{10}$ la fonction logarithmique de base 10 qu'on appelle aussi logarithme décimale.

c) Graphe

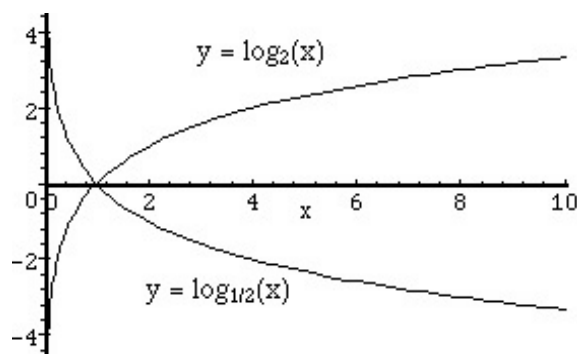


Fig.4.5 : Graphes des fonctions logarithmiques de base 2 et de base 1/2.

4.2.2 Cas particulier : la fonction logarithmique Népérienne

a) Définition

Lorsque $a = e = 2.718\dots$, nous sommes face à la fonction logarithmique Népérienne, $\log_e \equiv \ln$.

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln x. \end{aligned}$$

Il faut remarquer (et apprendre) que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

C'est-à-dire que la fonction logarithmique de base a peut toujours être ramenée à une fonction logarithmique Népérienne. Voilà pourquoi nous allons insister sur le log de base e , ($\log_e \equiv \ln$).

b) Propriétés

On a :

$$\begin{aligned} \text{Si } x &\in]0, 1[\quad \text{alors} \quad \ln x < 0. \\ \text{Si } x &\in]1, +\infty[\quad \text{alors} \quad \ln x > 0. \end{aligned}$$

$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1.$	
$\forall x, y \in]0, +\infty[\quad \ln(x.y) = \ln x + \ln y.$	
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y,$	par exemple : $\ln \left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$
$\ln (x)^y = y \ln x,$	par exemple : $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x.$

c) Graphe

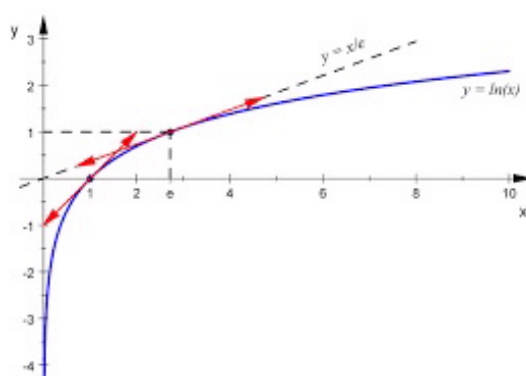


Fig.4.6 : Graphe de $\ln x$.

d) Dérivée

La fonction logarithmique de base a est dérivable sur tout $]0, +\infty[$ comme suit:

$$\left(\log_a(x) \right)' = \frac{1}{(\ln a)} \cdot \left(\frac{1}{x} \right) \quad \left| \quad \left(a^{[f(x)]} \right)' = \frac{1}{(\ln a)} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right.$$

Et la dérivée de la fonction logarithmique Népérienne est:

$$\left(\ln x \right)' = \left(\frac{1}{x} \right) \quad \left| \quad \left(\ln [f(x)] \right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \right.$$

f) $\ln$ est une bijection

La fonction logarithmique Népérienne est continue sur $]0, +\infty[$.

Et comme $e > 1$, alors $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, alors $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Elle admet alors une fonction réciproque. C'est la fonction exponentielle Népérienne, (que nous allons détailler par la suite).

4.3 Cours N°3 Fonctions exponentielles

4.3.1 Fonctions exponentielles de base a

Soit $a \in I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

a) Définition

On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction définie par:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = a^x. \end{aligned}$$

Elle vérifie $f(0) = 1$.

b) Propriétés

Remarquons que:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, a^x > 0$.
2. $\forall a \in I, f(0) = 1, f(1) = a$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Si $a > 1$ alors f est strictement croissante et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Par contre, si $a < 1$ alors f est strictement décroissante et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

c) Graphe

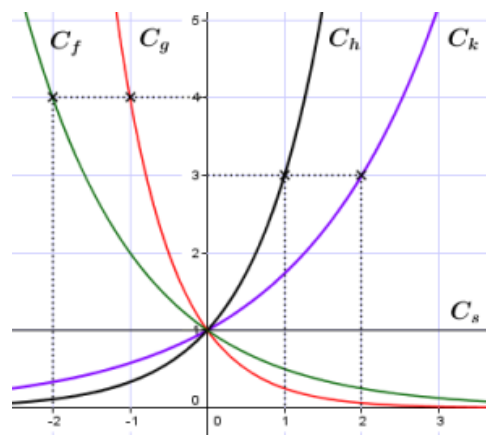


Fig.4.7 : Graphes de a^x pour différentes valeurs de a .
(C_s) : $a = 1$, (C_f) : $a = \frac{1}{2}$, (C_g) : $a = \frac{1}{4}$, (C_h) : $a = 3$, (C_k) : $a = \sqrt{3}$.

d) Dérivée

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\boxed{(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x \quad \left| \quad \left(a^{[f(x)]}\right)' = (\ln a) \cdot [f'(x)] \cdot a^{[f(x)]} \right.}.$$

4.3.2 Cas particulier: fonction exponentielle Népérienne

a) Définition

Lorsque $a = e = 2.718\dots$, nous sommes face à la fonction exponentielle Népérienne.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = e^x. \end{aligned}$$

Il faut remarquer (et apprendre) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}.$$

C'est-à-dire que la fonction exponentielle de base a peut toujours être ramenée à une fonction exponentielle Népérienne. Voilà pourquoi nous allons insister sur l'expo de base e .

b) Propriétés

On a :

$e^0 = 1, \quad e^1 = e = 2.71\dots$	$\forall x \in D_u, \quad e^{u(x)} > 0.$
$e^{(\ln x)} = x, \quad (x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(e^y) = y.$	
$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$	
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y},$	par exemple : $\left(\frac{1}{e^y} = e^{-y}\right),$
$(e^x)^y = e^{xy},$	par exemple : $\left(\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}\right)$

c) Graphe

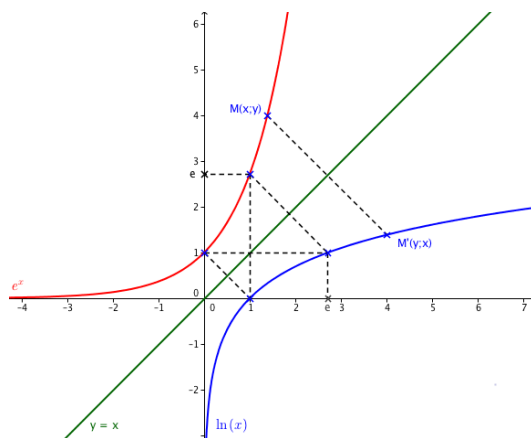


Fig.4.8 : Graphes de e^x et $\ln x$ sur le même repère.

d) Dérivée

$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad \left(e^{[f(x)]} \right)' = [f'(x)] \cdot e^{[f(x)]} .}$$

f) e^x est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.

e^x est continue sur $\mathbb{R}$. Et comme $e > 1$, alors $f(x) = e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, alors $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$. Elle admet une fonction réciproque. C'est le logarithme Népérien.

4.4 Cours N°4 Fonctions hyperboliques

4.4.1 Introduction

Rappelons les formes géométriques basiques suivantes:

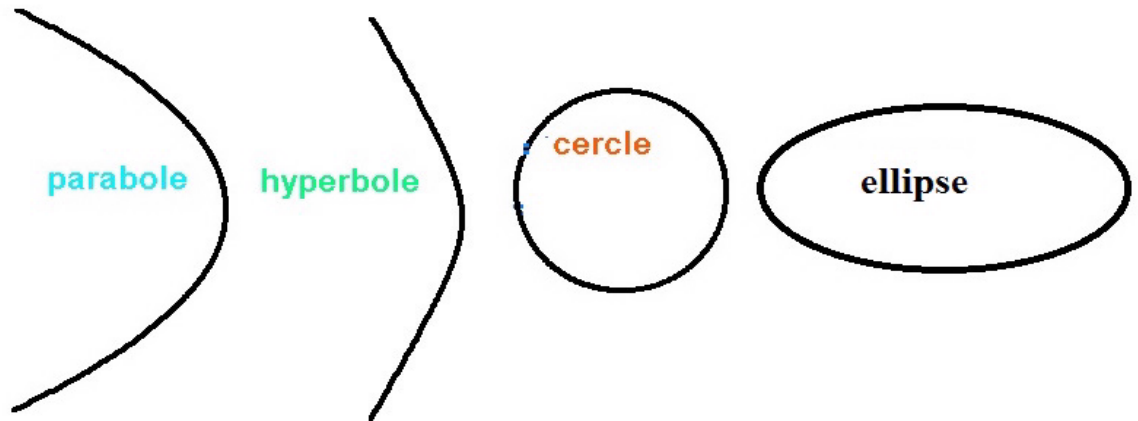


Fig.4.9 : Quelques formes géométriques basiques.

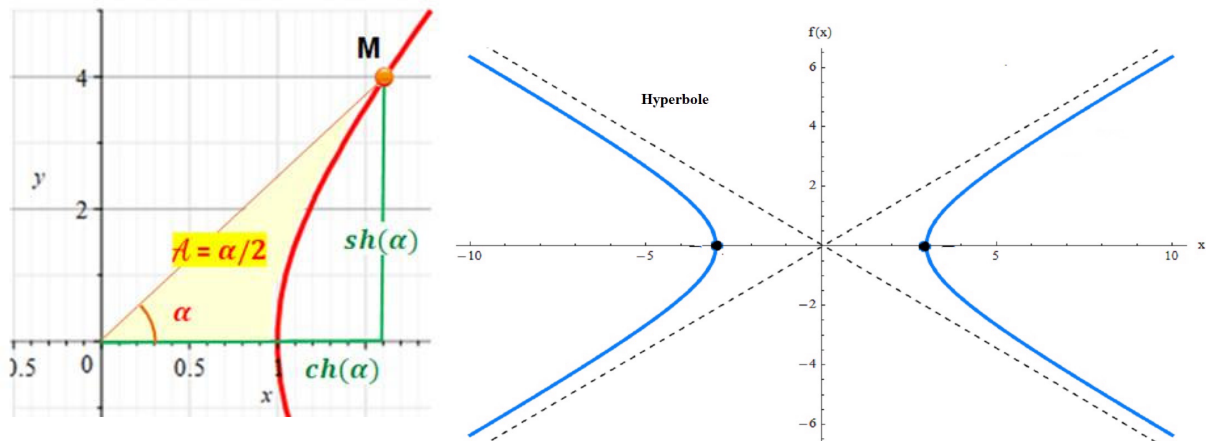


Fig.4.10 : (a) Représentation de sh et ch sur une hyperbole.
(b) Une hyperbole sur un repère orthonormé.

Par analogie aux fonctions circulaires $\sin$ et $\cos$ qui constituent une paramétrisation du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, les fonctions qui vont suivre sont appelées hyperboliques car elles constituent une paramétrisation de l'hyperbole d'équation : $x^2 - y^2 = 1$.

4.4.2 Fonction cosinus hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction cosinus hyperbolique, notée ch (ou $cosh$):

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

b) Propriétés

ch est:

1. Paire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, ch(-x) = ch(x)$.
2. Continue sur $\mathbb{R}$, $ch(0) = 1$, et $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ch(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ch(x)}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ch(x)}{x} = -\infty$.
4. ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
5. ch constitue une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions paires, le graphe de ch est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

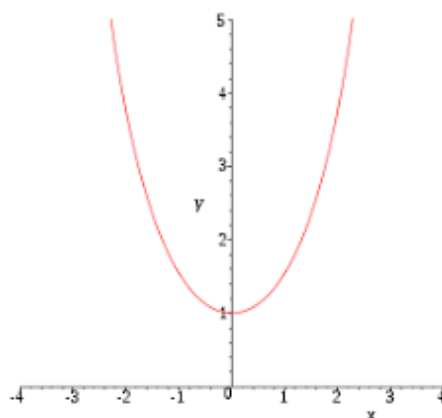


Fig.4.11 : Graphe de ch .

d) Dérivée

ch est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, comme suit:

$$\boxed{ch'(x) = sh(x); \quad ch'[f(x)] = f'(x)sh[f(x)]}.$$

(Voir la définition de la fonction sh dans la section qui suit).

4.4.3 Fonction sinus hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction sinus hyperbolique, notée sh (ou $\sinh$):

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

b) Propriétés

sh est:

1. Impaire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, sh(-x) = -sh(x)$.
2. Continue sur $\mathbb{R}, sh(0) = 0$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, sh(x) > 0, \forall x \in]-\infty, 0[, sh(x) < 0.$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{sh(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{sh(x)}{x} = +\infty.$$

4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. sh constitue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions impaires, le graphe de ch est symétrique par rapport à l'origine.

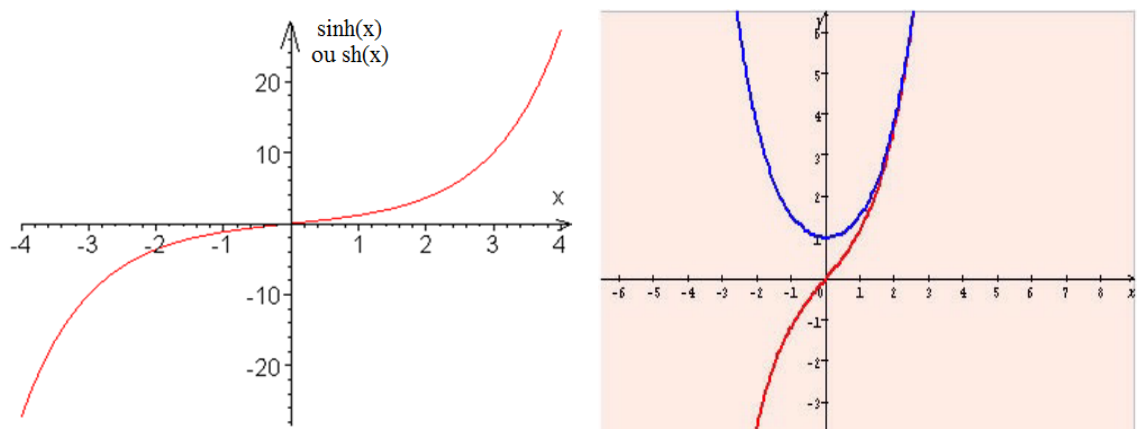


Fig.4.12 : (a) Graphe de sh . (b) ch et sh sur le même graphe.

d) Dérivée

sh est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, comme suit:

$$\boxed{sh'(x) = ch(x); \quad sh'[f(x)] = f'(x)ch[f(x)]}.$$

4.4.4 Fonction tangente hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction tangente hyperbolique, notée th (ou $tanh$):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$$

$$x \mapsto f(x) = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

b) Propriétés

Elle est:

1. Impaire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, th(-x) = -th(x)$.
2. Continue sur $\mathbb{R}, th(0) = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} th(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} th(x) = -1$.
4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. th constitue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions impaires, le graphe de th est symétrique par rapport à l'origine.

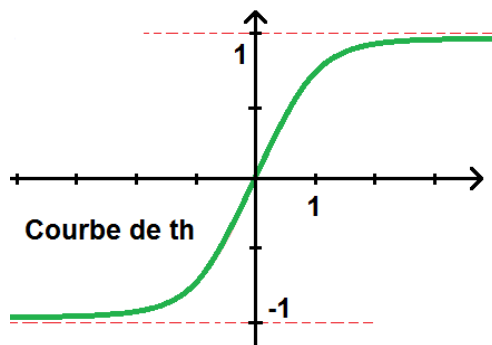


Fig.4.13 : Graphe de th .

d) Dérivée

th est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, comme suit:

$th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)};$	$th'[f(x)] = f'(x) [1 - th^2(f(x))] = \frac{f'(x)}{ch^2(f(x))}$
---	---

4.4.5 Fonction cotangente hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction cotangente hyperbolique, notée $coth$ (ou $cotanh$):

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow]-\infty - 1[\cup]1, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = coth(x) = \frac{1}{th(x)} = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

b) Propriétés

Elle est:

1. Impaire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^*, coth(-x) = -coth(x)$.
2. Continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \coth(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \coth(x) = -1,$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \coth(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \coth(x) = -\infty.$
4. Strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\coth$ constitue une bijection de $\mathbb{R}^*$ vers $]-\infty - 1[\cup]1, +\infty[.$

c) Graphe

Comme toutes les fonctions impaires, le graphe de $\coth$ est symétrique par rapport à l'origine.

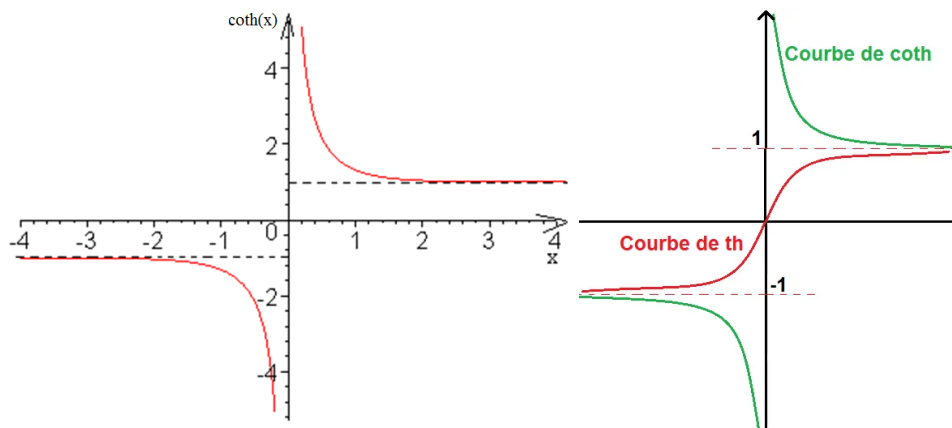


Fig.4.14 : (a) Graphe de $\coth$. (b) th et $\coth$ sur le même graphe.

d) Dérivée

$\coth$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, comme suit:

$\coth'(x) = 1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2(x)};$	$\coth'[f(x)] = f'(x) [1 - \coth^2(f(x))] = \frac{-f'(x)}{\operatorname{sh}^2(f(x))}.$
---	--

4.4.6 Relations entre les fonctions hyperboliques

On a les relations suivantes :

1/

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) > \operatorname{sh}(x).$$

2/

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, th(x) &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \\ \forall x \in \mathbb{R}, ch(s) + sh(x) &= e^x. \\ \forall x \in \mathbb{R}, ch(s) - sh(x) &= e^{-x}.\end{aligned}$$

3/

$$\begin{aligned}ch(a+b) &= ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b). \\ sh(a+b) &= sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b). \\ th(a+b) &= \frac{th(a) + th(b)}{1 + th(a)th(b)}.\end{aligned}$$

4/

$$\begin{aligned}ch(2x) &= ch^2(x) + sh^2(x) = 1 + 2sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1. \\ sh(2x) &= 2sh(x)ch(x). \\ th(2x) &= \frac{2th(x)}{1 + th^2(x)}.\end{aligned}$$

5/ $\forall x \in \mathbb{R}$, si on pose $t = th\left(\frac{x}{2}\right)$, on trouve alors:

$$ch(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, sh(x) = \frac{2t}{1-t^2}, th(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

6/

$$\begin{aligned}ch(a+b) + ch(a-b) &= 2ch(a)ch(b). \\ ch(a+b) - ch(a-b) &= 2sh(a)sh(b). \\ sh(a+b) + sh(a-b) &= 2sh(a)ch(b). \\ sh(a+b) - sh(a-b) &= 2ch(a)sh(b).\end{aligned}$$

7/

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (ch(x) + sh(x))^n = ch(nx) + sh(nx).$$

4.5 Cours N°5 Fonctions hyperboliques inverses

4.5.1 Fonction argument cosinus hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{ch}(x). \end{aligned}$$

Nous avons déjà convenu que la restriction de ch à cette fonction à $[0, +\infty[$ est une bijection.

Elle admet une fonction réciproque, que nous notons par

$$\begin{aligned} f^{-1} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \operatorname{argch}(x). \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. Continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
3. Strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
4. argch constitue une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions réciproques, les graphes de ch et argch sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

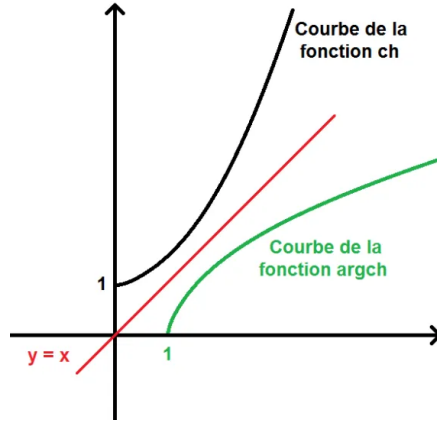


Fig.4.15 : Graphes de ch et de $argch$.

d) Dérivée

$argch$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, comme suit:

$argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$	$argch'[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}.$
---	---

4.5.2 Fonction argument sinus hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = sh(x). \end{aligned}$$

Elle constitue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque, que nous notons par:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \arg sh(x). \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. Impaire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \arg sh(-x) = -\arg sh(x).$

2. Continue sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \arg sh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $argsh$ constitue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions réciproques, les graphes de sh et $argsh$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

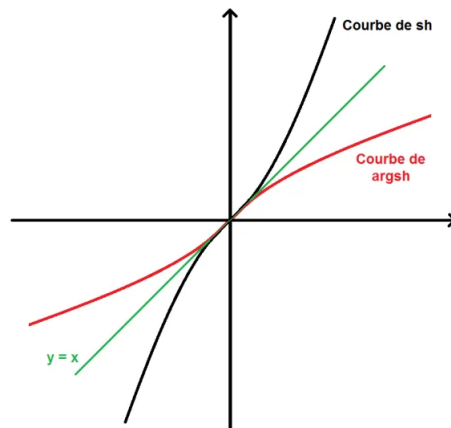


Fig.4.16 : Graphe de sh et $argsh$.

d) Dérivée

$argsh$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, comme suit:

$\arg sh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$	$\arg sh'[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + 1}}.$
---	---

4.5.3 Fonction argument tangente hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\\ x \mapsto f(x) = th(x).$$

Puisque th constitue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$, elle admet alors une fonction réciproque notée par:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad] -1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \arg th(x). \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. Impaire i.e. $] -1, 1[, \arg th(-x) = -\arg th(x)$.
2. Continue sur $] -1, 1[$.
3. $\forall x \in] -1, 1[, \arg th(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.
4. Strictement croissante sur $] -1, 1[$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions réciproques, les graphes de th et $argth$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

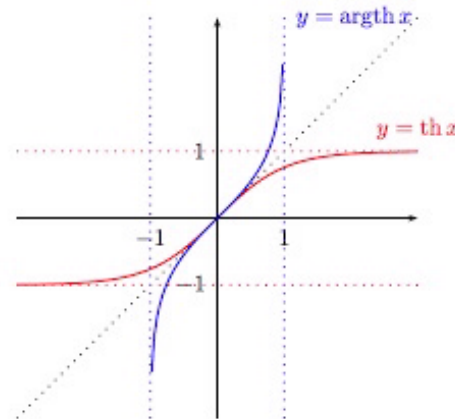


Fig.4.17 : Graphes de th et $argth$.

d) Dérivée

$argth$ est dérivable sur $] -1, 1[$, comme suit:

$\arg th'(x) = \frac{1}{1-x^2};$	$\arg th'[f(x)] = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$
----------------------------------	---

4.5.4 Fonction argument cotangente hyperbolique

a) Définition

On considère la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow]-\infty - 1[\cup]1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \coth(x). \end{aligned}$$

Puisque $\coth$ constitue une bijection de $\mathbb{R}^*$ vers $]-\infty - 1[\cup]1, +\infty[$, elle admet une fonction réciproque définie par:

$$\begin{aligned} f^{-1} :]-\infty - 1[\cup]1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \operatorname{argcoth}(x). \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. Impaire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argcoth}(-x) = -\operatorname{argcoth}(x)$.
2. Continue sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \operatorname{argcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$.
4. Strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions réciproques, les graphes de $\coth$ et $\operatorname{argcoth}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

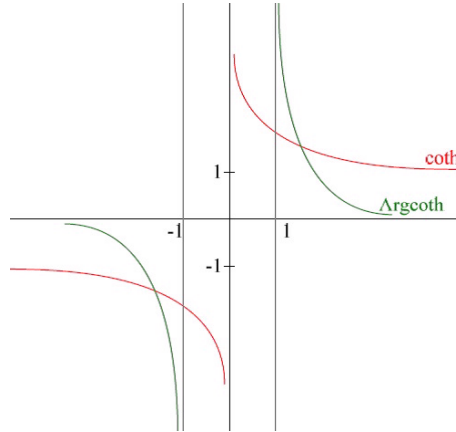


Fig.4.18 : Graphes de $\coth$ et de $\operatorname{argcoth}$.

d) Dérivée

$\operatorname{argcoth}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, comme suit:

$\operatorname{argcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2};$	$\operatorname{argcoth}'[f(x)] = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}.$
---	---

4.5.5 Relations entre les fonctions hyperboliques et les fonctions hyperboliques inverses

1) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$:

$sh(\operatorname{argcoth} h(x)) = \frac{ x }{x\sqrt{x^2-1}}.$	$ch(\operatorname{argcoth} h(x)) = \frac{ x }{\sqrt{x^2-1}}.$
$\coth(\operatorname{argcoth} h(x)) = x.$	$th(\operatorname{argcoth} h(x)) = \frac{1}{x}.$

4.6 Cours N°6 Fonctions trigonométriques

4.6.1 Le cercle trigonométrique

C'est un cercle centré à l'origine d'un repère orthonormé, dont le rayon est égal à l'unité. Il est orienté positivement à l'encontre des aiguilles d'une montre.

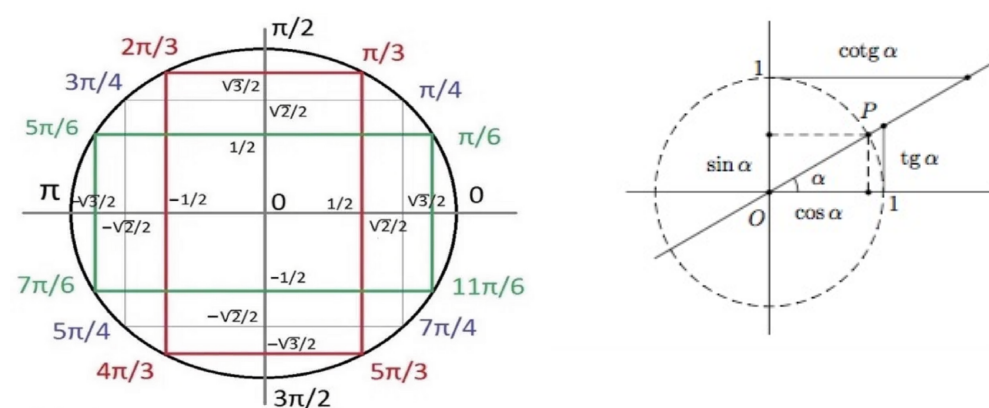


Fig.4.19 : (a) Le cercle trigonométrique.

(b) Les axes principaux des fonctions trigonométriques.

4.6.2 Fonction cosinus

a) Définition

On considère la fonction:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto f(x) = \cos x.$$

b) Propriétés

Elle est:

1. 2π - périodique i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2k\pi) = \cos x$. ($k \in \mathbb{Z}$).
2. Paire i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.
3. Continue sur $\mathbb{R}$.
4. Strictement décroissante sur le domaine $[0, \pi]$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions paires, le graphe de $\cos$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

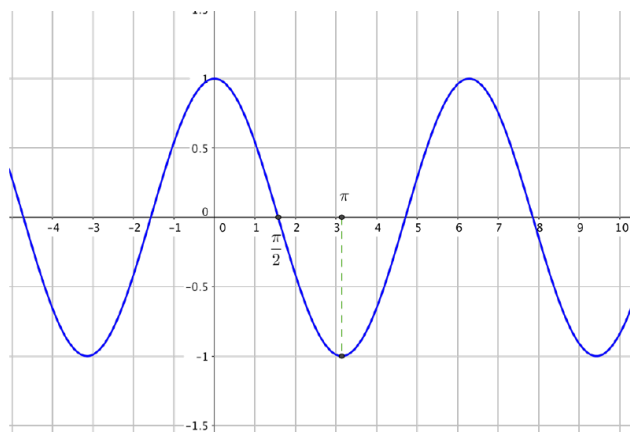


Fig.4.20 : Graphe de $\cos x$.

d) Dérivée

$\cos$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, comme suit:

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin x; \quad \cos'[f(x)] = -f'(x) \sin[f(x)]}.$$

4.6.3 Fonction sinus

a) Définition

On considère la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \sin x. \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. 2π – *périodique* i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2k\pi) = \sin x. \quad (k \in \mathbb{Z}).$
2. *Impaire* i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x.$
3. Continue sur $\mathbb{R}.$

4. Strictement croissante sur le domaine $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Graphe

Comme toutes les fonctions impaires, le graphe de $\sin$ est symétrique par rapport à l'origine.

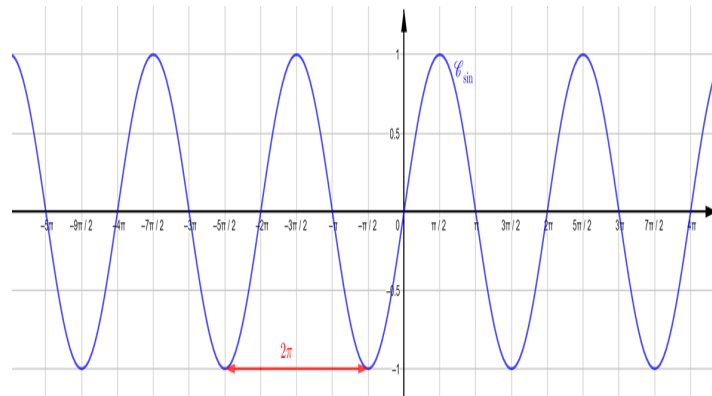


Fig.4.21 : Graphe de $\sin x$.

d) Dérivée

$\sin$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, comme suit:

$$\boxed{\sin'(x) = \cos x; \quad \sin'[f(x)] = f'(x) \cos[f(x)]}.$$

4.6.4 Fonction tangente

a) Définition

On pose

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Elle est définie seulement sur les points où le $\cos$ ne s'annule pas:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Donc } D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} / x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\begin{aligned} f : D_{\tan} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \tan x. \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. π – *périodique* i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(x + k\pi) = \tan x. \quad (k \in \mathbb{Z}).$
2. Impaire i.e. $\forall x \in D_{\tan}, \tan(-x) = -\tan x.$
3. Continue sur $D_{\tan}.$
4. Strictement croissante sur le domaine $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$

c) Graphe

Comme toutes les fonctions impaires, le graphe de $\tan$ est symétrique par rapport à l'origine.

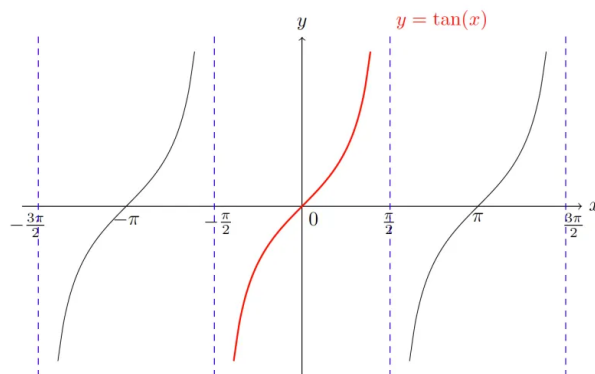


Fig.4.22 : Graphe de $\tan x.$

d) Dérivée

$\tan$ est dérivable sur $D_{\tan}$, comme suit:

$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)};$	$\tan'[f(x)] = f'(x)[1 + \tan^2(f(x))] = \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}.$
--	---

4.6.5 Fonction cotangente

a) Définition

On pose

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$$

Elle est définie seulement sur les points où le $\sin$ ne s'annule pas:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = (k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Donc } D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / x = (k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} f : D_{\cot} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cot x. \end{aligned}$$

b) Propriétés

Elle est:

1. π - *périodique* i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \cot(x + k\pi) = \cot x. \quad (k \in \mathbb{Z}).$
2. Impaire i.e. $\forall x \in D_{\cot}, \cot(-x) = -\cot x.$
3. Continue sur $D_{\cot}.$
4. Strictement décroissante sur le domaine $]0, \pi[.$

c) Graphe

Comme toutes les fonctions impaires, le graphe de $\cot$ est symétrique par rapport à l'origine.

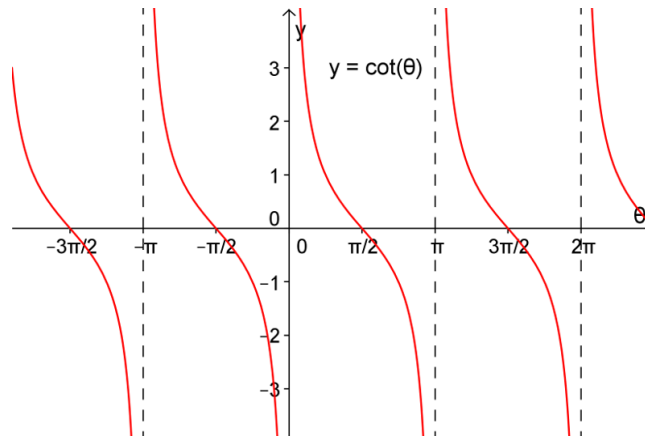


Fig.4.23 : Graphe de $\cot x$.

d) Dérivée

$\cot$ est dérivable sur $D_{\cot}$, comme suit:

$\cot'(x) = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2(x)};$	$\cot'[f(x)] = -f'(x)[1 + \cot^2(f(x))] = \frac{-f'(x)}{\sin^2[f(x)]}.$
--	---

4.6.6 Relations entre les fonctions trigonométriques

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$	$\pi = 3,1415\dots$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$	$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x.$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$ $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$	
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$	
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$	

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$	$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$ $\sin \alpha \sin \beta = \frac{-1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$
$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$	
$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$	
$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta.$	

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$	$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$	$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$	$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$ $= 2 \cos^2 x - 1.$ $= 1 - 2 \sin^2 x.$	$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$
$\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}.$	$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$	$\tan(3x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{3 \tan^2 x}.$

$\sin(-x) = -\sin x.$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin x.$
$\cos(-x) = \cos x.$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos x.$
$\tan(-x) = -\tan x.$	$\tan(x + k\pi) = \tan x.$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x.$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x.$

$\sin(\pi - x) = \sin x.$	$\sin(\pi + x) = -\sin x.$
$\cos(\pi - x) = -\cos x.$	$\cos(\pi + x) = -\cos x.$
$\tan(\pi - x) = -\tan x.$	$\tan(\pi + x) = \tan x.$

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = -\alpha + k\pi \end{cases}$	
$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$	$(k \in \mathbb{Z}).$
$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$	
$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \sin(3x) \cos x = \sin(4x) + \sin(2x).$	
$\forall x \in D_{\tan}, \sin x \leq x \leq \tan x.$	

4.7 Cours N°7 Fonctions trigonométriques inverses

4.7.1 Fonction arccosinus

On considère la fonction:

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos x. \end{aligned}$$

Sur $[0, \pi]$, elle est continue et strictement décroissante mais elle n'est pas paire car son intervalle de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

En plus, $f([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Elle est donc bijective et admet une fonction réciproque, que nous notons par arccos:

a) Définition

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \arccos x. \end{aligned}$$

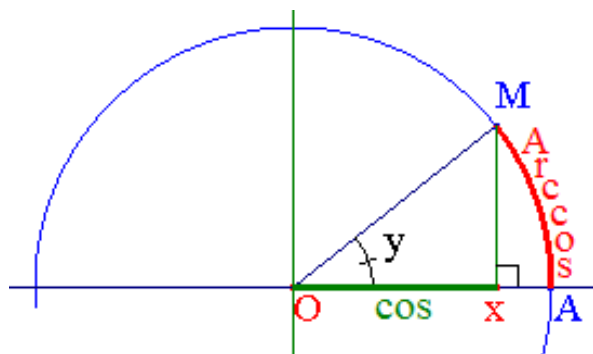


Fig.4.24 : L'arc de arccos.

$\arccos(x)$ est l'unique arc entre 0 et π dont le cosinus est x .

b) Propriétés

arccos vérifie:

1. $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos x) = x$.
2. $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$.
3. $\forall x \in [-1, 1], y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$.

4. Elle est continue, strictement décroissante et bijective.

Exemples

$$\begin{aligned}\cos(\arccos \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} \text{ car } \frac{1}{2} \in [-1, 1]. \\ \arccos(\cos \frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2} \text{ car } \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]. \\ \arccos(\cos \frac{5\pi}{4}) &= ?\end{aligned}$$

Puisque $\frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi]$, nous devons chercher un $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos x$.

Grâce au cercle trigonométrique, nous pouvons voir que $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4}$ et que $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$.

Donc $\arccos(\cos \frac{5\pi}{4}) = \arccos(\cos \frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$.

c) Graphe

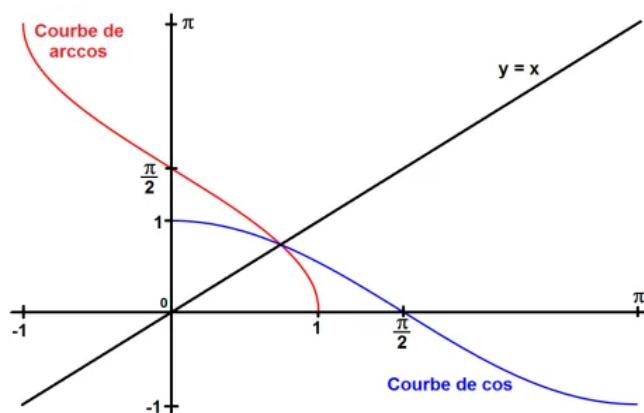


Fig.4.25 : Graphes de $\cos$ et de $\arccos$.

d) Dérivée

$\arccos$ n'est pas dérivable sur tout $[-1, 1]$ mais seulement sur $] -1, 1[$, comme suit:

$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$	$\arccos'[f(x)] = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.$
--	--

4.7.2 Fonction arcsinus

On considère la fonction

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto f(x) = \sin x.$$

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, elle est continue et strictement croissante.

En plus, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]\right) = [-1, 1]$.

C'est donc une bijection et admet une fonction réciproque, que nous notons par arcsin :

a) Définition

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ x \mapsto f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

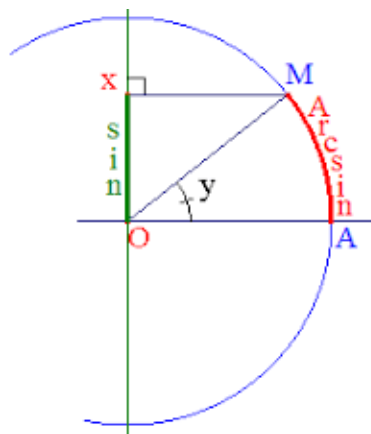


Fig.4.26 : L'arc de $\arcsin$.

$\arcsin(x)$ est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x .

b) Propriétés

Elle vérifie:

1. $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin x) = x.$
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \arcsin(\sin x) = x.$

3. $\forall x \in [-1, 1], y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.
4. Elle est continue, strictement croissante et bijective.
5. Elle est impaire sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemple

$$\sin(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \text{ car } \frac{1}{3} \in [-1, 1].$$

$$\arcsin(\sin 0) = 0 \text{ car } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) = ?$$

Puisque $\frac{3\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous devons chercher un $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin x$.

Grâce au cercle trigonométrique, nous pouvons voir que $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

c) Graphe

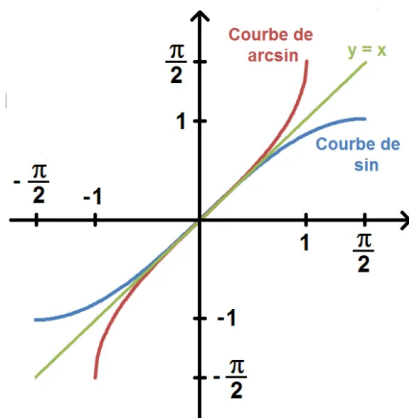


Fig.4.27 : Graphes de $\sin$ et de $\arcsin$.

s) Dérivée

$\arcsin$ n'est pas dérivable sur tout $[-1, 1]$ mais seulement sur $] -1, 1[$, comme suit:

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \arcsin'[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}}.$$

4.7.3 Fonction arctangente

On considère la fonction:

$$f : \quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \tan x.$$

Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle est continue et strictement croissante.

En plus $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

Elle est donc bijective et admet une fonction réciproque, que nous notons par $\arctan$:

$\arctan(x)$ est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est x .

a) Définition

$$f^{-1} : \quad \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto f^{-1}(x) = \arctan x.$$

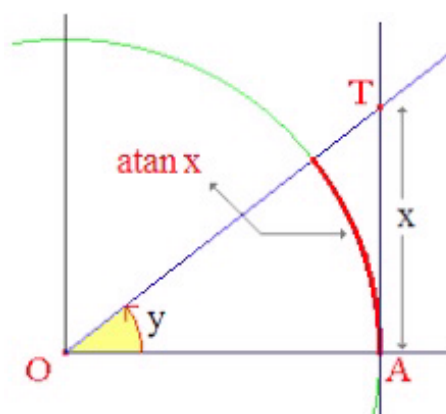


Fig.4.28 : L'arc de $\arctan$.

b) Propriétés

$\arctan$ vérifie:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$.
2. $\forall x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan x) = x$.
3. $\forall x \in [-1, 1], y = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$.
4. Elle est continue, strictement croissante et bijective.
5. $\arctan$ est impaire sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Exemples

$$\tan(\arctan 5) = 5.$$

$$\arctan(\tan 0) = 0.$$

$$\arctan\left(\tan \frac{5\pi}{4}\right) = ?$$

Puisque $\frac{5\pi}{4} \notin \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, nous devons chercher un $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan x$.

Grâce au cercle trigonométrique, nous pouvons voir que $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{\pi}{4} \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Donc $\arctan\left(\tan \frac{5\pi}{4}\right) = \arctan\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

c) Graphe

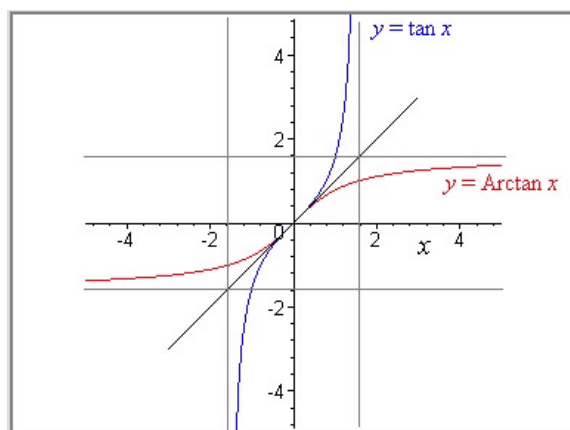


Fig.4.29 : Graphes de $\tan$ et de $\arctan$.

d) Dérivée

$\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \arctan'[f(x)] = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}}.$$

4.7.4 Fonction arcotangente

On considère la fonction:

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cot x. \end{aligned}$$

Sur $[0, \pi]$, elle est continue et strictement décroissante. En plus $f(]0, \pi[) = \mathbb{R}$.

Elle est donc bijective et admet une fonction réciproque, que nous notons par arccot :

a) Définition

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow]0, \pi[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x. \end{aligned}$$

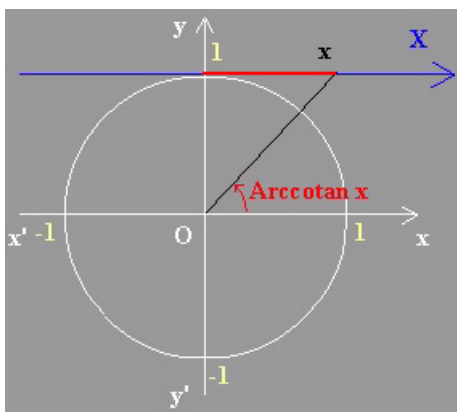


Fig.4.30 : L'arc de arccot .

b) Propriétés arccot vérifie:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \cot(\operatorname{arccot} x) = x.$
2. $\forall x \in]0, \pi[, \operatorname{arccot}(\cot x) = x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ y \in]0, \pi[\end{cases}.$

4. Elle est continue, strictement décroissante et bijective.

Exemples

$$\cot(\operatorname{arccot} 10) = 10.$$

$$\operatorname{arccot}(\cot \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arccot}(\cot \frac{5\pi}{4}) = ?$$

Puisque $\frac{5\pi}{4} \notin]0, \pi[$, nous devons chercher un $x \in]0, \pi[$ tel que $\cot \frac{5\pi}{4} = \cot x$.

Grâce au cercle trigonométrique, nous pouvons voir que $\cot \frac{5\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} \right)$ et que $\frac{\pi}{4} \in]0, \pi[$.

Donc $\operatorname{arccot}(\cot \frac{5\pi}{4}) = \operatorname{arccot}(\cot \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

c) Graphe

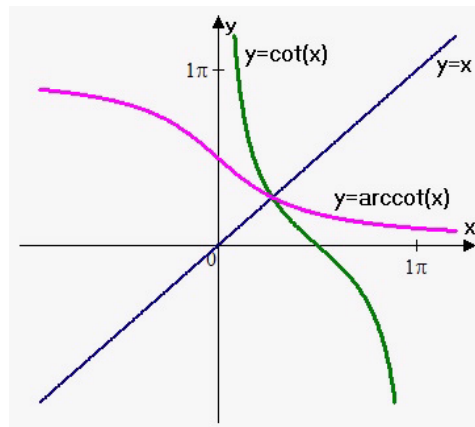


Fig.4.31 : Graphes de $\cot$ et de arccot .

d) Dérivée arccot est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\boxed{\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad \operatorname{arccot}'[f(x)] = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}}.$$

4.7.5 Relations entre les fonctions trigonométriques inverses

On a les relations suivantes :

$$1. \forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

4.8 Série de TD N°4

Exercice 1 (Les fonctions puissances, logarithmiques et exponentielles)

1/ Donner le domaine de définition puis les dérivées des fonctions suivantes:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x} \cdot \log_a x, (a > 0, \neq 1). \\g(x) &= x^{\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x.y = 14 \\ e^x.e^y = e^{-9} \end{cases}.$$

3/ Évaluer :

$$\log_8 4, \quad \log_2 \frac{1}{2}, \quad \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}.$$

4/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = x + 2 - e^x.$$

- a) Étudier le sens de variations de g .
- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux racines $-2 < \alpha < -1$ et $1 < \beta < \frac{3}{2}$. Puis conclure le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- c) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}.$$

Utiliser g pour étudier le sens de variation de f , puis montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Exercice 2 (Les fonctions hyperboliques)

1/ Résoudre l'équation $ch(x) = 2$.

2/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xsh(\frac{1}{x})$.

- a) Étudier la parité de f .
- b) Étudier le comportement de f en $\pm\infty$, en 0.

- c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
d) Montrer que pour tout $y \geq 0$, $th(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f .

3/ Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{1 + th(x)}{1 - th(x)} \right)^n = \frac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)}.$$

Exercice 3 (Les fonctions hyperboliques inverses)

1/ Simplifier les expressions suivantes:

$$a) \quad ch(\arg sh(x)) \quad b) \quad th(\arg sh(x)) \quad c) \quad sh(2 \arg sh(x)).$$

2/ Trouver le domaine de définition de la fonction suivante, puis simplifier son expression:

$$f(x) = \arg ch \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Exercice 4 (Les fonctions trigonométriques)

1/ Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

2/ Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos x &> \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \sin x &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3/ Simplifier les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} A &= (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2. \\ B &= \sin^4(x) - \cos^4(x) + 2 \cos^2(x). \end{aligned}$$

4/ Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ les expressions suivantes:

$$A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x).$$

$$B = \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$C = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

5/ Calculer la dérivée de la fonction:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

6/ Soit la fonction définie par:

$$f(x) = \ln \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|.$$

a) Trouver le domaine de définition de f .

b) Étudier sa parité.

Exercice 5 (Les fonctions trigonométriques inverses)

1/ Calculer:

$$a) \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right), b) \arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{3}\right).$$

$$c) \arccos\left(\cos \frac{-6\pi}{4}\right), d) \arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right).$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}.$$

3/ Écrire en fonction de x les expressions suivantes :

$$1/ \cos(\arcsin x), 2/ \sin(\arccos x), 3/ \sin(\arctan x).$$

4/ Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

5/ Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer :

$$\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right).$$

4.9 Correction de la série de TD N°4

Exercice 1 (Les fonctions puissances, logarithmiques et exponentielles)

1/ Donner le domaine de définition puis la dérivée des fonctions suivantes:

•

$$f(x) = e^{-x} \cdot \log_a x, (a > 0, \neq 1).$$

$$D_f =]0, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x})' \cdot \log_a x + e^{-x} \cdot (\log_a x)' \\ &= -e^{-x} \cdot \log_a x + e^{-x} \cdot \frac{1}{\ln a} \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{aligned}$$

Donc $D_g =]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x} \right)' e^{\frac{\ln x}{x}} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{x}x - 1 \ln x}{x^2} \right) e^{\frac{\ln x}{x}} \\ &= \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) e^{\frac{\ln x}{x}} \\ &= \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) \left(x^{\frac{1}{x}} \right). \end{aligned}$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x.y = 14 \\ e^x.e^y = e^{-9} \end{cases}.$$

On a $e^x.e^y = e^{x+y}$, le système devient donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x.y = 14 \\ e^{x+y} = e^{-9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x.y = 14 \\ x + y = -9 \end{cases} . \end{aligned}$$

x et y sont donc les solutions de l'équation du second ordre :

$$x^2 + 9x + 14 = 0.$$

Donc :

$$S = \{(-2, -7), (-7, -2)\}.$$

3/ Évaluer :

$$\log_8 4, \quad \log_2 \frac{1}{2}, \quad \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \log_8 4 &= \frac{\ln 4}{\ln 8} \\ &= \frac{\ln 2^2}{\ln 2^3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{1}{2} &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 2} \\ &= \frac{-\ln 2}{\ln 2} = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} &= \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln \sqrt{3}} \\ &= \frac{-\ln 3}{\frac{1}{2} \ln 3} \\ &= -2. \end{aligned}$$

4/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = x + 2 - e^x.$$

a) Étudier le sens de variations de g .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 - e^x) = -\infty.$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty.$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Puis:

$$g'(x) = 1 - e^x.$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \Leftrightarrow 1 = e^x \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$			1		$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux racines $-2 < \alpha < -1$ et $1 < \beta < \frac{3}{2}$. Puis conclure le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, sur $[-2, -1]$ puis sur $[1, \frac{3}{2}]$ pour conclure l'existence des deux racines α et β .

Donc :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}.$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = -1.$$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(x + \frac{1}{e^x})} = 0.$$

Après calculs, on se rend compte qu'en fait :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

Donc:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$f(\alpha)$	$f(\beta)$	0

Montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Puisque : $g(\alpha) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \alpha + 2 - e^\alpha &= 0 \\ \Rightarrow e^\alpha &= \alpha + 2. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} \\ &= \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} \\ &= \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (Les fonctions hyperboliques)

1/ Résoudre l'équation $ch(x) = 2$

$$\begin{aligned}ch(x) &= 2 \\ \Leftrightarrow e^x + e^{-x} &= 4 \\ \Leftrightarrow e^{-x} (e^{2x} - 4e^x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 &= 0 \text{ avec } X = e^x.\end{aligned}$$

Nous avons deux solutions positives :

$$X_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ et } X_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Et comme $x = \ln X$ on trouve:

$$x_1 = \ln(2 - \sqrt{3}) \text{ et } x_2 = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

2/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xsh(\frac{1}{x})$.

a) Étudier la parité de f .

Remarquons d'abord que $\mathbb{R}^*$ est symétrique. Ensuite:

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)sh\left(\frac{1}{-x}\right) \\ &= xsh\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc f est paire sur $\mathbb{R}^*$.

b) Étudier le comportement de f en $\pm\infty$, en 0.

On pose $y = \frac{1}{x}$, on trouve: $y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et :

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{sh(y)}{y}.$$

Par la règle de l'Hôpital, on trouve:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{sh(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ch(y)}{1} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

On obtient le même résultat par parité lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Ensuite, par le même changement de variables, on trouve: $y \xrightarrow{x \geq 0} +\infty$.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{sh(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y} \right).$$

Et comme :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{2y} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{2y} = 0.$$

Alors:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y} \right) = +\infty.$$

Ou alors (par parité):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $y \mapsto sh(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :

$$\begin{aligned} f'(x) &= sh\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(\frac{-1}{x^2}\right) ch\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= ch\left(\frac{1}{x}\right) \left[th\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right]. \end{aligned}$$

d) Montrer que pour tout $y \geq 0$, $th(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f .

Nous allons considérer la fonction $y \rightarrow g(y) = th(y) - y$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$$\begin{aligned} g'(y) &= [1 - th^2(y)] - 1 \\ &= -th^2(y) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc g est décroissante sur $]0, +\infty[$. Et comme $g(0) = 0$, alors $\forall y \geq 0, g(y) \leq 0$.

Ce qui fait que f' est négative sur $]0, +\infty[$ et donc f est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variations:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$			$+\infty$	$+\infty$	
	1	$\nearrow$	$\parallel$	$\searrow$	1

3/ Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{1 + th(x)}{1 - th(x)} \right)^n = \frac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)}.$$

Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \frac{1 + th(x)}{1 - th(x)} &= \frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \\ &= \frac{e^x}{e^{-x}} \\ &= e^{2x}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + th(x)}{1 - th(x)} \right)^n &= (e^{2x})^n \\ &= e^{2nx} \\ &= \frac{1 + th(nx)}{1 - th(nx)}. \end{aligned}$$

Exercice 4 (Les fonctions hyperboliques inverses)

1/ Simplifier les expressions suivantes:

•

$$a) \quad ch(\arg sh(x)).$$

On sait que :

$$\begin{aligned}ch^2(x) - sh^2(x) &= 1 \\ \Rightarrow ch^2(x) &= 1 + sh^2(x).\end{aligned}$$

Et comme ch est une fonction à valeurs positives, on trouve:

$$ch(x) = \sqrt{1 + sh^2(x)}.$$

Donc:

$$\begin{aligned}ch(\arg sh(x)) &= \sqrt{1 + sh^2(\arg sh(x))} \\ &= \sqrt{1 + x^2}.\end{aligned}$$

•

$$b) \quad th(\arg sh(x)).$$

$$\begin{aligned}th(\arg sh(x)) &= \frac{sh(\arg sh(x))}{ch(\arg sh(x))} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.\end{aligned}$$

$$c) \quad sh(2 \arg sh(x)).$$

$$\begin{aligned}sh(2 \arg sh(x)) &= 2sh(\arg sh(x))ch(\arg sh(x)) \\ &= 2x\sqrt{1 + x^2}.\end{aligned}$$

2/ Trouver le domaine de définition de la fonction suivante, puis simplifier son expression:

$$f(x) = \arg ch \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right).$$

On sait que la fonction $argch$ est définie sur $[1, +\infty[$. Donc on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) &\geq 1 \\ \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} &\geq 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} &\geq 0 \\ \Rightarrow x &> 0.\end{aligned}$$

Donc la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.

Maintenant, soit $x > 0$, alors $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) > 1$.
Et on sait que

$$\operatorname{argch} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2 - 1} &= \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{4x^2} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{(x^2 - 1)^2}{4x^2}} \\ &= \left|\frac{x^2 - 1}{2x}\right|.\end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned}f(x) &= \operatorname{argch} y \\ &= \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\ &= \ln\left[\frac{x^2 + 1}{2x} + \left|\frac{x^2 - 1}{2x}\right|\right].\end{aligned}$$

On a supposé $x > 0$, il suffit donc de distinguer les cas $x \geq 1$ et $0 < x \leq 1$.

- Si $x \geq 1$, $f(x) = \ln \left[\frac{x^2+1}{2x} + \frac{x^2-1}{2x} \right] = \ln x$.
- Si $0 < x \leq 1$, $f(x) = \left[\frac{x^2+1}{2x} + \frac{1-x^2}{2x} \right] = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

Puisque $\ln x$ est positif si $x > 1$ et négatif si $x \leq 1$, on obtient dans les deux cas $f(x) = |\ln x|$.

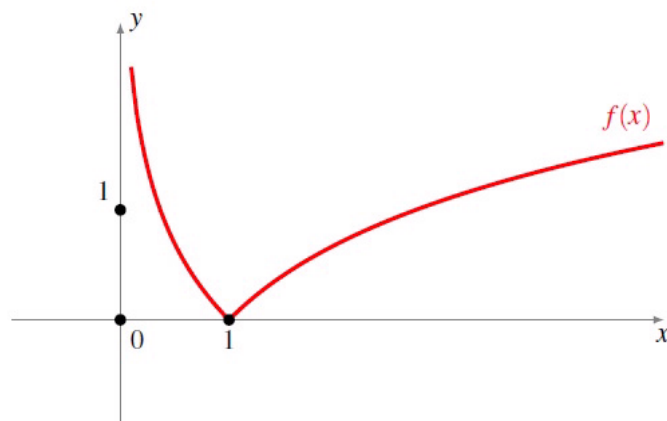


Fig.4.32 : Graphe de $f(x)$.

Exercice 5 (Les fonctions trigonométriques)

1/ Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation suivante $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:
Résolution graphique sur le cercle trigonométrique:

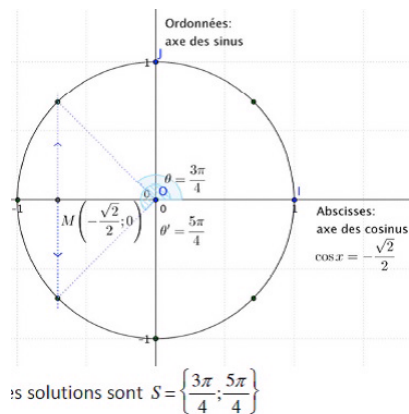


Fig.4.33 : Solution graphique de l'équation 1.

Les solutions sont : $S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$.

*) Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation suivante : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Résolution graphique sur le cercle trigonométrique:

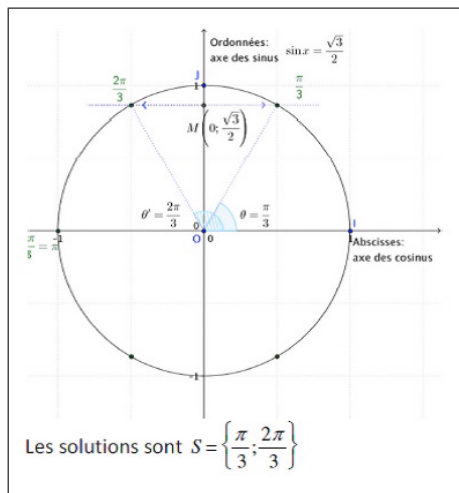


Fig.4.34 : Solution graphique de l'équation 2.

Les solutions sont : $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

2/ Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

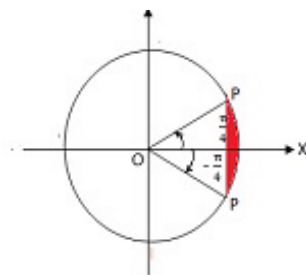


Fig.4.35 : Solution graphique de l'inéquation 1.

$$S = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[.$$

$$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

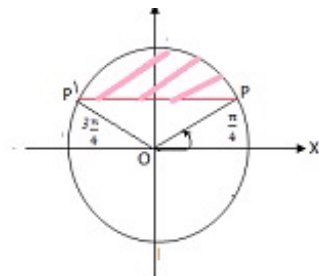


Fig.4.36 : Solution graphique de l'inéquation 2.

$$S = \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$

3/ Simplifier les expressions suivantes:

$$A = (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2.$$

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(x) + \sin^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) \\ &= 2(\cos^2(x) + \sin^2(x)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

•

$$B = \sin^4(x) - \cos^4(x) + 2\cos^2(x).$$

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right]^2 - \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4}[1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)] - \frac{1}{4}[1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)] + [1 + \cos(2x)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

4/ Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ les expressions suivantes:

$$A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x).$$

$$\begin{aligned} A &= \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \sin(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$B = \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$\begin{aligned} B &= -\sin(x) + \sin(x) - \cos(x) \\ &= -\cos(x). \end{aligned}$$

$$C = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

$$\begin{aligned}
C &= \sin(4\pi + \pi + x) + \cos(x - 2\pi - \pi) - \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= -\sin(x) - \cos(x) - \cos(x) \\
&= -\sin(x) - 2\cos(x).
\end{aligned}$$

5/ Calculer la dérivée de la fonction:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / (1 + \cos x \neq 0) \wedge \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \geq 0 \right\}.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \leq 1$ alors $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \geq 0$. Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \\
&= \frac{1}{2} [\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x)].
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{(-\sin x)}{1 + \cos x} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin x (1 + \cos x - 1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin x \cos x}{(1 - \cos^2 x)} \right]. \\
\text{Quand } x &\in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ alors,} \\
&= \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \cot x.
\end{aligned}$$

6/ Soit la fonction définie par: $f(x) = \ln \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|$.

a) Trouver le domaine de définition de f .

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0 \right\} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x = 2k, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / x = 2k, (k \in \mathbb{Z})\}.$$

b) Étudier sa parité.

Remarquons d'abord que le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, i.e.

$$x \in D_f \Rightarrow (-x) \in D_f.$$

Ensuite:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}(-x)\right) \right| \\ &= \ln \left| -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right| \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc f est une fonction paire sur son domaine de définition.

Exercice 6 (Les fonctions trigonométriques inverses)

1/ Calculer:

$$\begin{aligned} a) \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right), b) \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right). \\ c) \arccos\left(\cos\frac{-6\pi}{4}\right), d) \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

a) Puisque $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

b) $\frac{7\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous devons le simplifier :

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi + \pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Donc

$$\sin \frac{7\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}.$$

Ce qui fait que :

$$\arcsin \left(\sin \frac{7\pi}{3} \right) = \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

c) $\frac{-6\pi}{4} = \frac{-3\pi}{2}$ Donc $\cos \frac{-6\pi}{4} = \cos \frac{-3\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2}$. Ce qui fait que :

$$\arccos \left(\cos \frac{-6\pi}{4} \right) = \arccos \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

d) Puisque $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ alors $\arccos \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}.$$

On a :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}.$$

Ensuite, on applique le sin sur les deux côtés de l'égalité, on trouve:

$$\sin (\arcsin x) = \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5} \right).$$

Et comme nous avons la relation trigonométrique :

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Alors :

$$\Rightarrow x = \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \cos \left(\arcsin \frac{3}{5} \right) + \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \sin \left(\arcsin \frac{3}{5} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} + \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2}$$

$$\Rightarrow x = 1. \quad \text{L'ensemble des solutions est } \mathbb{S} = \{1\}.$$

3/ Écrire en fonction de x les expressions suivantes :

$$1/\cos(\arcsin x), 2/\sin(\arccos x), 3/\sin(\arctan x).$$

On pose

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} . \end{aligned}$$

Et puisque

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

Alors

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y.$$

Comme $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos y \geq 0$. Ce qui fait que $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.
Revenons à la variable x maintenant :

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \\ &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}}.$$

2/ On pose

$$\begin{aligned} y &= \arccos x \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases} . \end{aligned}$$

Et puisque

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

Alors

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y.$$

Comme $y \in [0, \pi]$, alors $\sin y \geq 0$. Ce qui fait que $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$.
Revenons à la variable x maintenant :

$$\begin{aligned}\sin(\arccos x) &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} \\ &= \sqrt{1 - x^2}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}}.$$

3/On pose

$$\begin{aligned}y &= \arctan x \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}.\end{aligned}$$

On a la formule trigonométrique connue :

$$\sin^2 y = \frac{\tan^2 y}{1 + \tan^2 y}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sin^2(\arctan x) &= \frac{\tan^2(\arctan x)}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{x^2}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

Mais là, $\sin y$ peut être positif ou négatif, i.e. :

$$\sin(\arctan x) = \pm \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}}.$$

Par contre, (il suffit de revoir le graphe de $\arctan$) on a:

$$\begin{cases} \text{Si } x > 0, & \text{alors } \arctan x > 0 \Rightarrow x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \text{Si } x < 0, & \text{alors } \arctan x < 0 \Rightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}.$$

Donc:

$$\sin(\arctan x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Finalement, dans les deux cas, nous avons:

$$\boxed{\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

4/ Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

1ère méthode: On pose :

$$f(x) = \arccos x + \arcsin x.$$

f est définie, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$ comme suit:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $] -1, 1[$. i.e.: $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \arccos(0) + \arcsin(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \arccos(1) + \arcsin(1) \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pour $x = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \arccos(-1) + \arcsin(-1) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Au final:

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], f(x) = \frac{\pi}{2}}.$$

2ème méthode On a :

$$\begin{aligned} x &\in [-1, 1] \Rightarrow \arccos x \in [0, \pi] \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Maintenant, on applique $\sin$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\arccos x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\arccos x).$$

Car nous avons la relation trigonométrique :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Donc:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) &= x \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x &= \arcsin x \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \arccos x + \arcsin x}.$$

5/ Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer :

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1ère méthode: On pose :

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

f est définie, continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme suit:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme il y a une discontinuité au point 0, f est constante sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x > 0 \\ k_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(1) \\ &= \arctan 1 + \arctan 1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pour $x = -1$:

$$\begin{aligned} k_2 &= f(-1) \\ &= \arctan(-1) + \arctan(-1) \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\boxed{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}.$$

2ème méthode

On pose : $\arctan x = y$ donc,

$$\begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}.$$

Donc

$$\begin{cases} y \in [0, \frac{\pi}{2}[& \text{si } x > 0 \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, 0] & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Pour le premier cas : si $x > 0$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\frac{\pi}{2} - y \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Rappelons la relation trigonométrique connue :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\tan y} \\
&= \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan x.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième cas : si $x < 0$, alors $(-x) > 0$ et comme $\arctan$ est impaire on aura (du premier cas):

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \arctan\left(\frac{1}{(-x)}\right) + \arctan(-x) \\
\frac{\pi}{2} &= -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan x.
\end{aligned}$$

Ou alors:

$$-\frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan x.$$

Au final,

$$\boxed{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} .}$$

5 Chapitre 5 Développement limité

5.1 Formules de Taylor

Rappel :

Quand n est un nombre naturel, on définit $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. Et par convention : $0! = 1$.

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Quand $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur I , ainsi que ses n premières dérivées, on dit qu'elle est n fois continûment dérivable, ou alors qu'elle est C^n sur I .

5.1.1 Formule de Taylor-Young

Il existe plusieurs formules de Taylor, nous allons nous intéresser à celle de Taylor-Young.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^n et soit $a \in I$.

La formule de Taylor-Young appliquée à f au voisinage du point a est donnée par:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon((x-a)).$$

$f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ est la **partie régulière** de l'écriture de Taylor-Young et $(x-a)^n \varepsilon((x-a))$ est son **reste**, où ε est une fonction définie sur I vérifiant : $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon((x-a)) = 0$. On dit que le reste est négligeable.

Notation:

Le terme : $(x-a)^n \varepsilon((x-a))$ est souvent abrégé par la notation $o((x-a)^n)$. Cette notation simplifie les écritures mais il faut toujours garder à l'esprit que : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$.

5.1.2 Cas particulier : formule de Taylor-Young au voisinage de 0

Nous revenons souvent au cas particulier où $a = 0$: La formule de Taylor-Young (avec le petit o) devient:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$\text{Avec } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Exemple

1/ Pouvons-nous appliquer la formule de Taylor-Young sur la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$? Si oui, jusqu'à quel ordre?

Oui, nous pouvons appliquer la formule de Taylor-Young au voisinage de n'importe quel point dans : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car la fonction considérée est continue sur D_f ainsi que ses dérivées, jusqu'à n'importe quel ordre.

2/ Appliquer la formule de Taylor-Young au voisinage de $x_0 = -1$, jusqu'à l'ordre 3 sur la fonction f .

Soit $x \in D_f$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = (1-x)^{-2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{4}.$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3} \Rightarrow f''(-1) = \frac{1}{4}.$$

$$f^{(3)}(x) = 6(1-x)^{-4} \Rightarrow f^{(3)}(-1) = \frac{3}{8}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x+1) + \frac{\frac{1}{4}}{2!}(x+1)^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}(x+1)^3 + o((x+1)^3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + o((x+1)^3). \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{o((x+1)^3)}{(x+1)^3} = 0.$$

5.2 Développement limité

5.2.1 Introduction

Le DL d'une fonction au voisinage d'un point est une approximation par un polynôme au voisinage de ce point. Calculable plus facilement, il exprime plus clairement son comportement.

Ce DL est de plus en plus précis au fur et à mesure que l'ordre du développement augmente.

Prenons l'exemple de la fonction exponentielle. Une idée du comportement de la fonction $f(x) = e^x$ autour du point $x = 0$ est donné par sa tangente, dont l'équation est $y = 1 + x$. Nous avons approximé le graphe par une droite.

Si l'on souhaite faire mieux, quelle parabole d'équation $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ approche le mieux le graphe de f autour de $x = 0$? Il s'agit de la parabole d'équation $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Trouver l'équation de cette parabole c'est faire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction f .

Bien sûr si l'on veut être plus précis, on continuerait avec une courbe du troisième degré qui serait en fait: $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \dots$ etc.

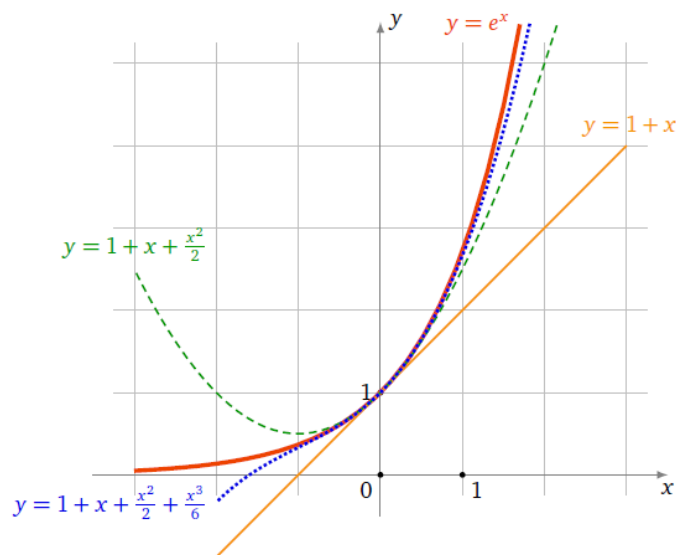


Fig.5.1 : Graphe de e^x et ses trois premières approximations.

5.2.2 Définition

On dit d'une fonction f définie au voisinage d'un point x_0 qu'elle admet un développement limité d'ordre n , noté $DL_n(x_0)$ s'il existe un polynôme de degré n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Tel que :

$$f(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n.$$

Où :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0.$$

$P_n(x)$ est la **partie polynômiale** du DL et $o(x - x_0)^n$ est son **reste**.

On a alors :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n.$$

Avec :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Quand $x \in D_f$, on peut se ramener à 0 par un simple changement de variables : $X = (x - x_0)$ (car $\lim_{x \rightarrow x_0} X = 0$), nous considérons souvent les DL au voisinage de 0 uniquement :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

5.2.3 Relation entre DL et formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young d'une fonction f qui est de classe C^n sur un intervalle contenant 0, permet d'obtenir son DL (au voisinage du même point), en posant :

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}, i = 0, \dots, n.$$

Exemple

1/Trouver le DL de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Rightarrow f(0) = 1. \\ f'(x) = e^x &\Rightarrow f'(0) = 1. \\ f''(x) = e^x &\Rightarrow f''(0) = 1. \\ f^{(3)}(x) = e^x &\Rightarrow f^{(3)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Les coefficients du DL sont tirés de la formule de Taylor-Young:

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}, i = 0, \dots, n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{f(0)}{0!} \Rightarrow a_0 = \frac{e^0}{1} = 1. \\ a_1 &= \frac{f'(0)}{1!} \Rightarrow a_1 = \frac{e^0}{1} = 1. \\ a_2 &= \frac{f''(0)}{2!} \Rightarrow a_2 = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}. \\ a_3 &= \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \Rightarrow a_3 = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Finalement:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

2/ Même question pour la fonction $g(x) = \cos x$ (à faire à la maison).

Remarque

Quand la condition C^n n'est pas vérifiée, le DL ne coïncide pas avec la formule de Taylor, il existe des fonctions qui admettent des DL à l'ordre 2 mais dont la deuxième dérivée n'existe pas.

5.2.4 Propriétés

Soit deux fonctions f et g qui admettent des DL_n , au voisinage du même point x_0 .

- **Unicité** : Le DL d'une fonction à l'ordre n au voisinage d'un point x_0 , quand il existe, il est unique.
- **Somme** : $(f + g)$ admet un DL_n au voisinage du point x_0 dont la partie polynômiale est égale à la somme des parties polynômiales des DLs de f et de g .

- **Produit** : $(f.g)$ admet un DL_n au voisinage du point x_0 dont la partie polynômiale est composée des termes de degré **au plus égal à n** , du produit des parties polynômiales des DL de f et de g .
- **Division** : On obtient le DL_n au voisinage du point x_0 du quotient $\left(\frac{f}{g}\right)$ en divisant la partie polynômiale du DL de f par celle de g , suivant l'ordre **croissant** des puissances.
- **La composition** : $(f \circ g)$ admet un DL_n au voisinage du point x_0 dont la partie régulière est composée des termes de degré **au plus égal à n** , de la **composition** des parties régulières des DLs de f et de g .
- **Parité**: Si f est paire (respectivement impaire) alors la partie polynômiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (respectivement impairs).

5.2.5 Développement limité de quelques fonctions usuelles au voisinage de 0

Nous donnons sur ce tableau les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0. Certains d'entre eux méritent d'être appris par cœur !

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n).$
$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n).$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{16} + \dots + \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)(\frac{-1}{2}-2)\dots(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + o(x^{2n}).$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$
$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$
$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$
$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$
$th(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$
$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}).$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}).$
$\arg th(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}).$
$\arg sh(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}).$

5.2.6 Calculs sur les Dls

La règle principale des calculs sur le DL c'est de tronquer les monômes d'ordres supérieurs à celui demandé dans l'exercice.

Exercice

Calculer le DL_3 au voisinage de 0 de :

$$1/ \quad f(x) = e^x \ln(1+x).$$

$$2/ \quad g(x) = e^{\sin x}.$$

$$3/ \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}.$$

Correction

1/

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \cdot \ln(1+x) \\ &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right). \end{aligned}$$

En développant, on ne garde que les termes de degré ≤ 3 , ce qui donne :

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Remarque

La notation «petit o» évite de devoir donner un nom à chaque fonction, en ne gardant que sa propriété principale, qui est d'être un reste négligeable.

2/

Ici, c'est une fonction composée :

$$g(x) = e^{\sin x}.$$

Le DL₃ de $\sin x$ au voisinage de 0 est donné par :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Et celui de l'expo est donné par :

$$e^X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3).$$

Il suffit de poser $X = x - \frac{x^3}{3!}$. Vérifions que le voisinage est inchangé:

$$\lim_{x \rightarrow 0} X = 0.$$

Par composition on aura :

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{1!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + o\left[(x^3)^3\right].$$

Nous allons négliger les termes d'ordre supérieur à 3:

$$\begin{aligned}e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + o(x^3). \\g(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

3/

$$h(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}.$$

Première méthode: division suivant les puissances croissantes:

$$\begin{array}{r|l}1+x & 2+x+x^2 \\1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3. \\ \hline \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2 & \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^3 & \\ \hline -\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3 & \\ -\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x^3 & \\ \hline \frac{1}{8}x^3 & \end{array}$$

Donc :

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Deuxième méthode

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{x+1}{x^2+x+2} \\&= \frac{x+1}{2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1\right)} \\&= \frac{1}{2}(x+1) \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right]}\end{aligned}$$

Nous pouvons trouver le DL₃ de $\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right]}$ en posant : $X = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)$.

Remarquons que le changement de variables considéré ne modifie pas le voisinage i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0} X = 0.$$

$$\frac{1}{(1+X)} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3).$$

Donc :

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right]} = 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)^3 + o((x^2)^3).$$

Nous devons nous arrêter à l'ordre 3 seulement, on néglige donc les termes d'ordres supérieurs dans les calculs:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right]} &= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

On multiplie maintenant par $\frac{1}{2}(x+1)$ en négligeant encore les termes supérieurs à 3, on trouve:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}(x+1) \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3)\right) \\ \Rightarrow h(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

5.3 Applications

5.3.1 Valeurs approchées

Les Dls nous donnent les valeurs approchées à $f(x_0)$.

Exemple

Trouver la valeur approchée de la fonction $\tan(x)$ au point $x_0 = 0.2$ à l'ordre 3:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ au voisinage de } 0, \text{ donc,}$$

$$\begin{aligned} \tan(x_0) &= \tan(0.2) \simeq 0.2 + \frac{(0.2)^3}{3} \\ &\simeq 0.20266. \end{aligned}$$

5.3.2 Calculs des limites par les DLs

Les DLs sont un outil puissant d'aide au calcul des limites, il suffit de remarquer que:

$$\text{si } f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_0.$$

Exemple

Calculer la limite suivante:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}, \text{ puis conclure } \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}.$$

Correction

Quand on utilise les DLs pour calculer des limites, l'ordre du DL n'est généralement pas mentionné, nous allons utiliser l'ordre minimal pour avoir la limite, par exemple, dans ce cas, un DL d'ordre 1 nous suffit, comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)} &= \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} \\ &= \frac{x(3 + o(1))}{x(2 + o(1))} \\ &= \frac{3 + o(1)}{2 + o(1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)} = \frac{3}{2}.$$

Ensuite

$$\frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} = \frac{3 + o(1)}{x(2 + o(1))}.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} = -\infty.$$

5.3.3 Équations de la tangente et des asymptotes et leurs positions par rapport à la courbe

Les DLs nous donnent presque instantanément les équations des tangentes et des asymptotes au voisinage de ∞ , ainsi que leurs positions par rapport au graphe de la fonction:

- Si f admet un DL en un point a à l'ordre $n > 1$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_k(x - a)^k + \dots$$

alors $y = a_0 + a_1(x - a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a .

La position de cette tangente est donnée par le signe de $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe du terme $a_k(x - a)^k$.

S'il est positif, la courbe est au-dessus de la tangente, s'il est négatif, la courbe est au-dessous de la tangente et enfin s'il y a changement de signe, cela veut dire que la tangente traverse la courbe, le point a est donc un point d'inflexion.

- On dit que la fonction $f(x)$ admet un DL_n au voisinage de $\pm\infty$ et on l'appelle développement asymptotique, si la fonction $f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL_n au voisinage de 0.

Nous devons faire le changement de variables $t = \frac{1}{x}$ pour revenir au voisinage de 0.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$.

1/ Donner le DL_2 de f au voisinage de 0.

2/ En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de cette tangente par rapport à la courbe de f .

3/ Déterminer l'équation de l'asymptote en $\pm\infty$, ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe de f .

Correction

1/

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x+x^2}. \\ \Rightarrow f(X) &= \sqrt{1+X}. \end{aligned}$$

Avec, comme changement de variables $x+x^2=X$: qui ne modifie pas le voisinage. Donc:

$$f(X) = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x+x^2}{2} - \frac{(x+x^2)^2}{8} + o(x^2)^2. \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

2/ L'équation de la tangente à la courbe au point $(0,1)$ est donc $y = 1 + \frac{1}{2}x$.
Et

$$f(x) - y = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) > 0.$$

Donc la courbe est au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

3/ Maintenant, on pose :

$$t = \frac{1}{x}.$$

On voit bien que : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} t = 0$. Puis,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 + t + 1}{t^2}} \\ &= \frac{\sqrt{t^2 + t + 1}}{|t|}. \end{aligned}$$

*) Au voisinage de $+\infty$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{t^2 + t + 1}}{t} (t > 0).$$

En utilisant ce qui précède on trouve:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)}{t} \\ &= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}t + o(t). \end{aligned}$$

Ou bien:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \frac{1}{2})] = 0$ alors l'équation de l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ est :

$$y = x + \frac{1}{2}.$$

Et comme : $f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $+\infty$, alors la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

*) Au voisinage de $-\infty$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{t^2 + t + 1}}{-t} (t < 0).$$

De la même manière que précédemment, on trouve:

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc l'équation de l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ est :

$$y = -x - \frac{1}{2}.$$

Et comme : $f(x) - (-x - \frac{1}{2}) = -\frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $-\infty$, alors la courbe est toujours au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

5.4 Série de TD N°5

Exercice 1

1/ Donner le DL_4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de la fonction:

$$f(x) = \cos x.$$

2/ Donner le DL_6 au voisinage de 0 de la fonction:

$$f(x) = \sin(x^2).$$

3/ Donner le DL_3 au voisinage de 0 de la fonction:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \ln(1 + x)}.$$

4/ Donner le DL_1 au voisinage de 1 de la fonction:

$$f(x) = (x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}. \\ B &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}. \\ D &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Exercice 3

1/ Déterminer le DL_4 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

2/ Pouvons-nous prolonger f par continuité au point 0? Si oui, donner son prolongement.

3/ En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ à la courbe du prolongement de f .

4/ Donner un DL au voisinage de 0 de la fonction

$$g(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

Exercice 4

1/ Écrire le DL₃ au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

2/ En déduire le DL₃ au voisinage de 0 de la fonction : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

3/ En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ au graphe de la fonction $F(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, ainsi que sa position.

5.5 Correction de la série de TD N°5

Exercice 1

1/ Donner le DL₄ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de la fonction:

$$f(x) = \cos x.$$

1ère méthode:

Comme nous pouvons dériver f une infinité de fois, nous pouvons appliquer la formule de Taylor-Young:

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x &\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}. \\ f'(x) = -\sin x &\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ f''(x) = -\cos x &\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \\ f^{(3)}(x) = \sin x &\Rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ f^{(4)}(x) = \cos x &\Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = & f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{(x - \frac{\pi}{3})}{1!} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{(x - \frac{\pi}{3})^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{(x - \frac{\pi}{3})^3}{3!} f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \\ & + \frac{(x - \frac{\pi}{3})^4}{4!} f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + o\left[\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right]. \end{aligned}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right].$$

2ème méthode

On pose : $t = x - \frac{\pi}{3}$, on trouve $x = t + \frac{\pi}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} t = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos(t) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(t) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) - \left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}t^3 + t^4 + o(t)^4 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right]. \end{aligned}$$

2/ Donner le DL₆ au voisinage de 0 de la fonction:

$$f(x) = \sin(x^2).$$

Comme

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3).$$

Alors, en posant $t = x^2$ (sans changement du voisinage), on trouve:

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &= x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + o((x^2)^3) \\ &= x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6). \end{aligned}$$

3/ Donner le DL₃ au voisinage de 0 de la fonction:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \ln(1 + x)}.$$

On a (au voisinage de 0) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Et

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}.$$

En divisant suivant les puissances croissantes, on trouve :

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ x + x^2 - \frac{x^3}{2} & x - x^2 + \frac{4}{3}x^3. \\ \hline -x^2 + \frac{x^3}{3} & \\ -x^2 - x^3 & \\ \hline \frac{4x^3}{3} & \\ \frac{4x^3}{3} & \\ \hline \frac{4x^3}{3} & \end{array}$$

Donc:

$$f(x) = x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

4/ Donner le DL₂ au voisinage de 1 de la fonction:

$$f(x) = (x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

On pose : $t = x - 1$. On trouve : $x = t + 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} t = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x)^{\frac{1}{x-1}} \\ \Rightarrow f(t) &= (1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)}. \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+t)}{t} &= \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t} \\ &= 1 - \frac{t}{2} + o(t). \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{1 - \frac{t}{2} + o(t)} = e \cdot e^{-\frac{t}{2} + o(t)} \\ &= e \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right) \\ &= e - \frac{e}{2}t + o(t). \end{aligned}$$

Enfin:

$$f(x) = e - \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1)).$$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} &= \frac{(1 + x^2 + o(x^2)) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\
&= \frac{3}{2} + o(1).
\end{aligned}$$

Donc

$$A = \frac{3}{2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x.$$

On pose : $X = \frac{1}{x}$, on trouve $x = \frac{1}{X}$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x &= \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{3}{X} + 2} - \frac{1}{X} \\
&= \sqrt{\frac{1 + 3X + 2X^2}{X^2}} - \frac{1}{X} \\
&= \frac{\sqrt{1 + 3X + 2X^2}}{X} - \frac{1}{X} \quad \text{car } X > 0.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x &= \frac{\sqrt{1 + 3X + 2X^2} - 1}{X} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2}(3X) + o(X) - 1}{X} \\
&= \frac{\frac{3}{2}X + o(X)}{X} \\
&= \frac{3}{2} + o(1).
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} + o(1) \right].$$

$$B = \frac{3}{2}.$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}.$$

On pose : $t = x - 1$. On trouve : $x = t + 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} &= \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2 - 1} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{1 + 2t + t^2 - 1} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)} \\ &= \frac{t + o(t)}{t(2+t)} \\ &= \frac{1 + o(1)}{2+t}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{2+t} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$C = \frac{1}{2}.$$

$$D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}.$$

On a:

$$\begin{aligned} e^x - 1 - x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Et:

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^2).$$

Donc:

$$\frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} + o(1).$$

Ce qui fait que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + o(1) \\ D &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3

1/ Déterminer le DL_4 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Comme on va diviser par x , il faut considérer un DL de $\sin x$ à l'ordre 5:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Donc

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ce qui fait que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$

2/ Pouvons-nous prolonger f par continuité au point 0? Si oui, donner son prolongement.

Donc, oui, f est prolongeable par continuité au point 0.

Son prolongement est donné par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

3/

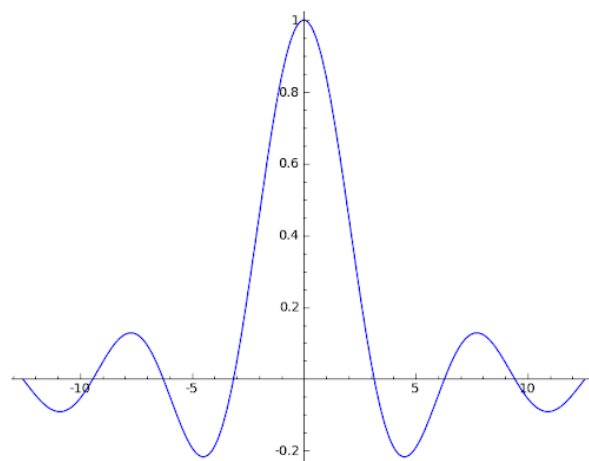


Fig.5.2 : Graphe de $F(x)$, (Prolongement de $\frac{\sin x}{x}$ à 0).

L'équation de la tangente à la courbe au point $(0, 1)$ est donc $y = 1$.

4/ Donner un DL au voisinage de 0 de la fonction

$$g(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \ln \left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right] \\ &= \ln(1 + X). \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \\ X^2 &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \times \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \\ &= \frac{x^4}{36} + o(x^4). \\ X^3 &= X^4 = o(x^4). \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
g(x) &= X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4) \\
&= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{\left(\frac{x^4}{36}\right)}{2} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Exercice 4

1/ Écrire le DL₃ au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

$$g(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

2/En déduire le DL₃ au voisinage de 0 de la fonction : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1ère méthode

Comme :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

On aura :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+e^x} \\
&= \frac{1}{1 + \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right]} \\
&= \frac{1}{2 \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right]} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1+X}.
\end{aligned}$$

Avec $X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$. Le voisinage est inchangé puisque:

$$\lim_{x \rightarrow 0} X = 0.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} [1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)].$$

Nous devons calculer X^2 et X^3 en suivant la règle de calcul des DLs : négliger les ordres supérieurs à l'ordre demandé (en l'occurrence 3 ici).

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3). \end{aligned}$$

$$X^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

On remplace dans l'expression de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 + e^x} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right) - \left(\frac{x^3}{8} + o(x^3) \right) + o(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3). \end{aligned}$$

2^{ème} méthode :

Division Euclidienne suivant les puissances croissantes:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3. \\ \hline -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^3}{12} & \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 & \\ \hline \frac{1}{24}x^3 & \\ -\frac{1}{24}x^3 & \end{array}$$

3/ En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ au graphe de la fonction $F(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, ainsi que sa position.

On pose :

$$t = \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} t = 0.$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \\
F\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t(1 + e^t)} \\
&= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{48}t^3 + o(t^3) \right) \\
&= \frac{1}{2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48}t^2 + o(t^2).
\end{aligned}$$

Donc :

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Puisque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = 0.$$

Alors la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$.

Et puisque $F(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) < 0$, alors le graphe de F est au-dessous de l'asymptote.

6 Chapitre 6 Algèbre linéaire

6.1 Lois de compositions internes

Définition 1 Loi de composition interne

Un ensemble E est muni d'une loi de composition interne si à chaque couple (a, b) d'éléments de E correspond un élément bien déterminé de E .

Exemples

- 1) L'addition est une loi de composition interne à l'ensemble des réels.
- 2) La division est également une loi de composition interne à l'ensemble des réels définie quand le diviseur n'est pas nul.

Définition 2 loi de composition externe

Considérons deux ensembles E et $\mathbf{K}$. Supposons qu'à tout élément $a \in E$ et qu'à tout élément $\lambda \in \mathbf{K}$ on associe un élément $b \in E$. On dit que l'on a défini une loi de composition externe sur E .

Exemple

E est l'ensemble des vecteurs dans l'espace à trois dimensions et $\mathbf{K} = \mathbb{R}$.

La multiplication d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel λ est un vecteur $(\lambda \vec{u})$. Cette opération est une loi de composition externe sur l'ensemble E .

6.2 Espaces vectoriels

Dans ce qui suit l'ensemble $\mathbf{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3

On dit qu'un ensemble E est un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbf{K}$ et on note **E un K-EV** si on peut définir sur les éléments de E -que nous appelons désormais vecteurs- deux lois de compositions, une interne et une externe vérifiant les axiomes suivants :

- **L'opération interne** : notée $+$, elle doit être commutative, associative, possédant un élément neutre 0_E et pour laquelle chaque vecteur u de E admet un élément réciproque (ou inverse) u' qui vérifie : $u + u' = 0_E$.

Notre opération interne doit donc vérifier :

1. Commutative: $\forall x, y \in E, (x + y) = (y + x)$.
2. Associative : $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Possédant un élément neutre: $\forall x \in E, (x + 0_E) = (0_E + x) = x$.
4. Tout élément de E admet un élément inverse : $\forall x \in E, \exists x' \in E / (x + x') = (x' + x) = 0_E$.

- **L'opération externe:** notée $\cdot$, c'est la multiplication par les éléments (externes) de $\mathbf{K}$ que nous appellerons désormais scalaires par opposition aux vecteurs de E. Elle doit vérifier les axiomes suivants:

1. $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall x, y \in E, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$. (Distributivité sur E).
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$. (Distributivité sur $\mathbf{K}$).
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in E, (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta x)$.
4. $\forall x \in E, (1_{\mathbf{K}} \cdot x) = x$. $1_{\mathbf{K}}$ étant l'unité de $\mathbf{K}$.

Les opérations définies en 1. et 2. sont appelées opérations linéaires sur les vecteurs de E.

Exemples

Les ensembles suivants sont des $\mathbf{K}$ -EV : ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$).

- E l'ensemble des vecteurs de la géométrie élémentaire.
- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- S l'ensemble des séries numériques convergentes.
- $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre.

6.2.1 Propriétés immédiates

1. $\forall x \in E, 0_{\mathbf{K}}x = 0_E$.
2. $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \alpha \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall x \in E, (\alpha \cdot x) = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbf{K}}$ ou bien $x = 0_E$.

6.3 Définitions et propriétés élémentaires

6.3.1 Vecteurs indépendants, familles liées

En prenant p éléments $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'un $\mathbf{K}$ -EV, on constitue une famille (ou un système) de vecteurs.

- On dit que les p vecteurs sont indépendants ou que la famille des p vecteurs est libre si et seulement si:

$$\forall \alpha_i \in \mathbf{K}, \quad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1, p}, \alpha_i = 0.$$

Ou alors,

$$\forall \alpha_i \in \mathbf{K}, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, i = \overline{1, p}.$$

- Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe p scalaires non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i = 0$ alors les vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ sont dépendants ou constituent une famille liée (non libre).

Dans ce cas, au moins l'un des α_i , disons α_p est non nul. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \alpha_p u_p &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_{p-1} u_{p-1}. \\ u_p &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i \text{ avec } \lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_p}. \end{aligned}$$

On dit que qu'un vecteur de la famille est une **combinaison linéaire** des $(p-1)$ autres vecteurs.

6.3.2 Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbf{K}$ -EV et soit $F \subset E$ non vide.

Pour que F soit un sous-espace vectoriel de E , il faut et il suffit que toute combinaison linéaire de vecteurs de F soit un vecteur de F . On dit que F est stable par combinaison linéaire si et seulement si:

$$\begin{cases} F \neq \emptyset & (0 \in F). \\ \forall u, v \in F, u + v \in F. \\ \forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall u \in F, \alpha u \in F. \end{cases}$$

Ou bien:

$$\forall u, v \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, (\alpha u + \beta v) \in F.$$

Remarque

Si $0 \notin F$, alors F n'est pas un sous espace vectoriel de E .

Exemples

- 1) $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de tous les espaces vectoriels.
- 2) L'espace des vecteurs parallèles à un plan donné forme un sous-espace vectoriel des vecteurs libres de la géométrie élémentaire, il est appelé plan vectoriel.

6.3.3 Générateurs, bases et coordonnées

a) Soit une famille de p vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'un $\mathbf{K}$ -EV E . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de ces p vecteurs forment un sous-espace vectoriel F de E . On dit que F est **engendré** par la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ou que les u_i sont des générateurs de F .

b) Si la famille plus haut est en plus libre, alors, on dit que c'est une base de E . On dit aussi famille libre et génératrice de E .

Exemples

1- Deux vecteurs indépendants d'un plan, c'est à dire non colinéaires constituent une base de ce plan.

2- Les fonctions $y_1 = \sin x$ et $y_2 = \cos x$ forment une base de l'EV des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Théorème

Pour qu'une famille de n vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'un $\mathbf{K}$ -EV E soit une base de E , il faut et il suffit que tout vecteur u de E admette une décomposition **unique** suivant cette famille, de la forme : $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Les scalaires (x_i) s'appellent les coordonnées (ou les composantes) de u suivant la base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

6.3.4 Théorème de la base incomplète

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base du **K**-EV E et soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs **indépendants** de E avec $p \leq n$.

On peut alors compléter la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ par $(n - p)$ vecteurs de $\mathcal{B}$ convenablement choisis pour former une nouvelle base de E .

Remarques

- 1/ Toute base de E comporte exactement n vecteurs.
- 2/ Toute famille libre de E comporte au plus n vecteurs.

6.3.5 Dimension

Définition

S'il existe un entier naturel n tel que l'EV E possède une base constituée de n vecteurs, alors toute autre base de E est aussi constituée de n vecteurs et ce nombre n s'appelle dimension de E , noté $\dim(E)$.

Remarques

- 1/ Si n est fini, on dit que l'espace vectoriel E est de dimension finie, comme $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
- 2/ L'espace $\{0_E\}$ est de dimension 0 par convention.

Base canonique On privilégie souvent une base qu'on appelle **canonique** et on la représente par les n -uplets :

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}.$$

Exemples

Dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, la base canonique est $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

6.3.6 Rang

Soit un système de p vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'un $\mathbf{K}$ -EV avec $\dim(E) = n$.

Le nombre maximal de vecteurs libres qu'on peut extraire du système donné s'appelle le rang r . Il est à noter que :

$$r \leq n \text{ et } r \leq p \text{ i.e. } r \leq \inf(n, p).$$

6.4 Applications linéaires

Définitions

1/ Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -EV. On appelle application linéaire de E dans F l'application $f : E \rightarrow F$ qui vérifie:

$$\begin{cases} \forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v) \\ \forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall u \in E, f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases}.$$

Ou alors,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall x, y \in E, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

On a alors forcément : $f(0_E) = 0_F$.

6.4.1 Noyau

On appelle noyau de f et on note $\ker f$ ⁵ l'image réciproque du vecteur nul de F , i.e.

$$\ker f = \{u \in E / f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

6.4.2 Image

On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$, l'ensemble des vecteurs $f(u)$ tels que u est dans E , i.e:

$$\operatorname{Im} f = \{v \in F / \exists u \in E / f(u) = v\} = f(E).$$

Ou bien:

⁵*ker* vient du mot allemand *kern* qui signifie noyau.

$$\text{Im } f = \{f(u) \text{ avec } u \in E\}.$$

Théorème

Si E est de dimension finie et que $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors:

$$\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = \dim E.$$

6.4.3 Rang d'une application linéaire

On appelle rang d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ la dimension de $(\text{Im } f)$ lorsque cette dimension est finie.

Rappelons que quand $\dim(E)$ est finie alors $\dim(\text{Im } f)$ est aussi finie.

On a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &\leq n \text{ et} \\ \text{rg}(f) &= n \Leftrightarrow \ker f = \{O_E\} \Leftrightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

6.4.4 Matrice associée à une application linéaire

Soit E un espace vectoriel avec $\dim(E) = n$ et $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Soit F avec $\dim(F) = p$ et $\mathcal{B}_F = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ une base de F .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

f est complètement définie en donnant l'image des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ dans $F : (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

Puisque $f(e_j) = \alpha_{1j}\varphi_1 + \alpha_{2j}\varphi_2 + \dots + \alpha_{pj}\varphi_p$ on pose : a_{ij} la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(e_j)$ dans la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

En considérant $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors:

$$f(u) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^p a_{ij} \varphi_j.$$

C'est-à-dire:

$$y = f(u)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

f est donc parfaitement connue si on connaît le tableau rectangulaire suivant qu'on appelle matrice associée à l'application f :

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Remarque

Le nombre de ligne de A_f est égal à $\dim(E)$ c'est-à-dire à n et le nombre de colonnes de A_f est égal à $\dim(F)$ c'est-à-dire à p .

Exemple

Soit E avec $\dim(E) = 3$ et $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ et F avec $\dim(F) = 4$ et $\mathfrak{B}_F = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$.

Soit $f : E \rightarrow F$ l'application linéaire suivante :

$$f(x, y, z) = (x - 2y - 2z, -3x + y + z, -2x - 2y - 2z, -x + 3y + z).$$

On pose: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(x, y, z)$. On obtient le système linéaire suivant:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x - 2y - 2z \\ y_2 = -3x + y + z \\ y_3 = -2x - 2y - 2z \\ y_4 = -x + 3y + z \end{cases}.$$

Qui s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice associée à notre application linéaire est :

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4.5 Application linéaire associée à une matrice

Soit E un $\mathbf{K}$ -EV de dimension n muni de la base $B_E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et soit F un $\mathbf{K}$ -EV de dimension p muni de la base $B_F = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$.

Soit f une application linéaire de E vers F de matrice donnée par :

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On pose: $(y_1, y_2, \dots, y_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Sous forme matricielle, on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Donc sous forme d'un système, on aura:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{cases}.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (y_1, y_2, \dots, y_p) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, y_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ &\quad + a_{2n}x_n, \dots, a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n). \end{aligned}$$

Qui est exactement l'application linéaire associée à la matrice A_f .

Remarques

1. La matrice d'une application linéaire dépend des choix des bases de l'ensemble de départ et de celui de l'arrivée.
2. L'expression $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dépend aussi des choix des bases de l'ensemble de départ et de celui de l'arrivée.
3. Le changement d'une base change la matrice et l'expression $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemple

Soit E un $\mathbf{K}$ -EV de dimension 3 muni de la base $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ et soit F un $\mathbf{K}$ -EV de dimension 3 muni de la base $B_F = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Soit f une application linéaire de E vers F de matrice donnée par :

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose: $(X, Y, Z) = f(x, y, z)$.

Sous forme matricielle, on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc, l'application linéaire associée à la matrice A_f est donnée par :

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + z, 2x - 2y + z, -2x - 2y - z).$$

6.5 Changement de base, matrice de passage

Il faut bien garder à l'esprit que la matrice d'une application linéaire est une représentation de celle-ci qui dépend du choix des bases au départ et à l'arrivée. Il est utile de savoir passer d'une représentation à une autre.

Définition

Soit E avec $\dim(E) = n$ et deux bases différentes de E , $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.

Les vecteurs de β' peuvent s'exprimer dans la première base β comme suit:

$$\begin{cases} \varphi_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ \varphi_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ \vdots \\ \varphi_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}.$$

La matrice **carrée** P obtenue en écrivant le système d'équations plus haut sous forme matricielle est appelée matrice de passage de la base $\mathfrak{B}$ à la base $\mathfrak{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Remarque

1. P est inversible forcément.
2. La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathfrak{B}'$ à la base $\mathfrak{B}$.

Exemple

Soit $\mathfrak{B}(o, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathfrak{B}'(o, \vec{i}', \vec{j}')$ deux repères orthonormés de $\mathbb{R}^2$. On considère la rotation sur l'origine o d'angle θ .

Alors la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Son inverse est:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

6.6 Série de TD N°6

Exercice 1

Vérifier si les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ -EV $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$.
2. $B = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y \text{ et } z = 0\}$.

Exercice 2

1. Pour quelle valeur de k le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant $u = (1, -2, k)$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $a = (1, 1, 1)$ et $b = (1, 2, 3)$?

2. Montrer que les vecteurs $a = (1, 1, 1), b = (1, 2, 1), c = (2, -1, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

1. Montrer que les fonctions f, g et h définies par:

$$f(x) = x, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x,$$

sont linéairement indépendantes dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Soient les vecteurs $a = (0, 1, -1), b = (-1, 0, 1), c = (1, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

- a) Montrer que ces vecteurs sont indépendants deux à deux.
- b) Est-ce que la famille $\{a, b, c\}$ est libre?
- c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille?

Exercice 4

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$a = (-1, 1, -3, 0), b = (1, 2, 0, 1), c = (2, 1, 3, 1).$$

Donner une base de E et déterminer $\dim(E)$.

Exercice 5

Montrer que les vecteurs:

$$a = (1, 1, 2, 1), b = (1, -1, 0, 1), c = (0, 0, -1, 1), d = (1, 2, 2, 0),$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$.

2/ Trouver les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 6

Dire si les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0)$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / g(x, y) = (x + y, x - 2y, 1)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / h(x, y) = x^2 - y^2$.

Exercice 7

1/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f puis son image. f est-elle injective? Surjective?

2/ Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

- a) Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.
- b) f est-elle injective?
- c) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

6.7 Correction de la série de TD N°6

Exercice 1

Vérifier si les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ -EV $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$.

On a : $A \subset \mathbb{R}^3$ et A est non vide puisqu'il contient le vecteur $(0, 0, 0)$ par exemple.

Ensuite, il suffit de prendre $u = (4, 0, -1)$ et $\lambda = -1$ par exemple pour avoir $\lambda u = (-4, 0, 1) \notin A$.

Donc, non, A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $B = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$.

B n'est pas un sous-espace vectoriel de car $(0, 0, 0) \notin B$.

3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

On a : $C \subset \mathbb{R}^3$ et C est non vide puisqu'il contient le vecteur $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ par exemple.

Ensuite, il suffit de prendre $\lambda = 2$ par exemple pour avoir

$$\lambda u = (1, 1, 1) \notin C.$$

Donc, C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y \text{ et } z = 0\}$.

Il est facile de voir que $D \subset \mathbb{R}^3$ et que $D \neq \emptyset$ puisqu'il contient le vecteur $(0, 0, 0)$ par exemple.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbf{K}, u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in D$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta x' &= \alpha(2y) + \beta(2y') \\ &= 2(\alpha y + \beta y'). \end{aligned}$$

Et puisque $z = z' = 0$ alors $\alpha z + \beta z' = 0$.

Donc $(\alpha u + \beta v) \in D$, ce qui fait que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Pour quelle valeur de k le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant $u = (1, -2, k)$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $a = (1, 1, 1)$ et $b = (1, 2, 3)$?

Le vecteur $u = (1, -2, k)$ est une combinaison linéaire de a et b si on peut trouver deux scalaires α et β vérifiant:

$$u = \alpha a + \beta b.$$

On a alors:

$$\begin{aligned}(1, -2, k) &= \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 3) \\ &= (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -2 \\ \alpha + 3\beta = k \end{cases} \\ \Leftrightarrow &k = -5.\end{aligned}$$

2. Montrer que les vecteurs $a = (1, 1, 1), b = (1, 2, 1), c = (2, -1, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Il faut montrer que tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de a, b et c .

C'est-à-dire qu'il existe des scalaires α, β, γ tels que $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$.
i.e:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, \alpha + 3\beta + \gamma) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ \alpha + 2\beta - \gamma = y \\ \alpha + 3\beta + \gamma = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ -\beta + 3\gamma = x - y \\ -2\beta + \gamma = x - z \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ -\beta + 3\gamma = x - y \\ -5\gamma = -x + 2y - z \end{cases}.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{5}(-2x - y + 3z) \\ \gamma = \frac{1}{5}(x - 2y + z) \\ \alpha = x + y - z \end{cases}.$$

Puisque la $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors la famille $\{a, b, c\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

1. Montrer que les fonctions f , g et h définies par:

$$f(x) = x, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x,$$

sont linéairement indépendantes dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soient les scalaires α, β, γ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h \equiv 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

Rappelons que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'élément neutre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Donc, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

En particulier, pour $x = 0, \pi$ et $\frac{\pi}{2}$ on aura :

$$\begin{cases} \alpha.0 + \beta.0 + \gamma.1 = 0 \\ \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta.1 + \gamma.0 = 0 \\ \alpha.\pi + \beta.0 + \gamma.(-1) = 0 \end{cases}.$$

Ce qui donne que : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

L'équivalence suivante est donc vraie:

$$\alpha f + \beta g + \gamma h \equiv 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc les fonctions données sont linéairement indépendantes.

2. Soient les vecteurs $a = (0, 1, -1), b = (-1, 0, 1), c = (1, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que ces vecteurs sont indépendants deux à deux.

Montrons que a et b sont linéairement indépendants:

Soient les scalaires α, β tels que $\alpha a + \beta b = 0$.

Donc:

$$\begin{aligned}
\alpha(0, 1, -1) + \beta(-1, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\
\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui fait que a et b sont linéairement indépendants.

De la même manière, on montre que a et c sont linéairement indépendants et que b et c sont linéairement indépendants aussi.

b) Est-ce que la famille $\{a, b, c\}$ est libre?

Supposons que $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ où α, β, γ sont des scalaires. On aura alors :

$$\begin{aligned}
\alpha(0, 1, -1) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(1, -1, 0) &= (0, 0, 0) \\
\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.
\end{aligned}$$

Nous avons donc une infinité de solutions, les scalaires α, β, γ ne sont pas obligés d'être tous nuls.

La famille $\{a, b, c\}$ n'est par conséquent pas libre, elle est liée.

Remarque

On pouvait juste remarquer dès le début que : $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow a + b + c = 0$ par exemple.

c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille?

Soit S l'ensemble engendré par la famille $\{a, b, c\}$:

$$\begin{aligned}
S &= \{v \in \mathbb{R}^3 / v = \alpha a + \beta b + \gamma c, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^3 / v = \alpha(-b - c) + \beta b + \gamma c, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^3 / v = (-\alpha + \beta)b + (-\alpha + \gamma)c, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Donc b et c engendrent S et comme ce sont deux vecteurs indépendants linéairement alors ils forment une base de S . Ce qui fait que $\dim(S) = 2$.

Remarque

De la même manière on peut prouver que $\{a, b\}$ ainsi que $\{a, c\}$ forment aussi des bases de S .

Exercice 4

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$a = (-1, 1, -3, 0), b = (1, 2, 0, 1), c = (2, 1, 3, 1).$$

Donner une base de E et déterminer $\dim(E)$.

On a :

$$E = \{v \in \mathbb{R}^4 / v = \alpha a + \beta b + \gamma c, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Si les vecteurs a, b, c sont linéairement indépendants et que la famille $\{a, b, c\}$ engendre E alors elle forme une base de E et donc $\dim(E) = 3$.

Ensuite, remarquons que $b = a + c$ donc les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, c'est pour cela que $\dim(E) < 3$.

Donc,

$$\begin{aligned} E &= \{v \in \mathbb{R}^4 / v = \alpha a + \beta(a + c) + \gamma c, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^4 / v = (\alpha + \beta)a + (\beta + \gamma)c, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que a et c engendrent E . Il reste à montrer que a et c sont linéairement indépendants :

Soient les scalaires α, β tels que $\alpha a + \beta c = 0$.

Alors:

$$\begin{aligned} \alpha(-1, 1, -3, 0) + \beta(2, 1, 3, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Ce qui fait que a et c sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de E . On en conclut que $\dim(E) = 2$.

Exercice 5

Montrer que les vecteurs:

$$a = (1, 1, 2, 1), b = (1, -1, 0, 1), c = (0, 0, -1, 1), d = (1, 2, 2, 0).$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Puisque $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ il suffit de montrer que la famille $\{a, b, c, d\}$ est libre ou bien qu'elle engendre $\mathbb{R}^4$.

Nous allons montrer la deuxième option, qu'elle engendre $\mathbb{R}^4$:

soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, nous devons trouver des scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $X = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$.

i.e:

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &= \alpha(1, 1, 2, 1) + \beta(1, -1, 0, 1) + \gamma(0, 0, -1, 1) + \delta(1, 2, 2, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = x \\ \alpha - \beta + 2\delta = y \\ 2\alpha - \gamma + 2\delta = z \\ \alpha + \beta + \gamma = t \end{cases} \end{aligned}$$

Après calculs, on trouve:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}(-4x - y + 3z + 3t) \\ \beta = \frac{1}{4}(4x - y - z - t) \\ \gamma = \frac{1}{2}(y - z + t) \\ \delta = \frac{1}{2}(2x + y - z - t) \end{cases}.$$

2/ Trouver les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base.

Il suffit de remplacer (x, y, z, t) par $(1, 1, 1, 1)$, on trouve:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \\ \gamma = \frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ce qui fait que : $u = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$.

Exercice 6

Dire si les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0)$.

Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et soit λ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(u + v) &= ((x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y'), 0) \\ &= (x + y, x - 2y, 0) + (x' + y', x' - 2y', 0) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda(2y), 0) \\ &= \lambda(x + y, x - 2y, 0) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

Donc, oui, f est une application linéaire.

2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / g(x, y) = (x + y, x - 2y, 1)$.

Comme $f(0, 0) \neq (0, 0, 0)$ alors non, g n'est pas une application linéaire.

3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / h(x, y) = x^2 - y^2$.

On a :

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= 1, f(-1, 0) = 1, f(0, 0) = 0 \\ f(1, 0) + f(-1, 0) &= 2 \neq f(0, 0). \end{aligned}$$

Donc h n'est pas une application linéaire.

Exercice 7

1/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f puis son image. f est-elle injective? Surjective?

$$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^2 / f(u) = 0\}$$

$$\begin{aligned}
f(u) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Donc: $\ker f = \{(0, 0)\}$. Ce qui fait que f est injective.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \exists u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(u) = v\} \\
f(u) = v &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ x + y = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \\ c - a = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Donc:

$$\operatorname{Im} f = \{v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / c - a = 0\} .$$

Il suffit de remarquer que $v = (1, 1, 0) \notin \operatorname{Im} f$ donc f n'est pas surjective.

2/ Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

a) Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.

$$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0\}.$$

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 8x + 3y - 2z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 \end{cases} .$$

Après résolution, on trouve:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, -2x, x) \\ &= x(1, -2, 1).\end{aligned}$$

Donc une base du noyau de f est la famille à un seul élément $\{(1, -2, 1)\}$, donc $\dim(\ker f) = 1$.

b) f est-elle injective?

Comme le noyau n'est pas réduit à $0_{\mathbb{R}^3}$, f n'est pas injective.

c) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

$$\text{Im } f = \{v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \exists u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(u) = v\}.$$

$$f(u) = v \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - y + z = a \\ 8x + 3y - 2z = b \\ -4x - y + 2z = c \end{cases}.$$

Après résolution, on trouve:

$$\text{Im } f = \{u = (a(-3, 8, -4) + b(-1, 3, -1) + c(1, -2, 2))\}.$$

En posant $u_1(-3, 8, -4)$ et $u_2(-1, 3, -1)$ il est facile de montrer que la famille $\{u_1, u_2\}$ constitue une base de $\text{Im } f$.

References

- [1] Baba Hamed et Ben Hbib, "Algèbre 1, rappel de cours et exercices corrigés", 3ème édition, OPU, université d'Oran.
- [2] Baba Hamed et Ben Hbib, "Analyse 1, rappel de cours et exercices corrigés", 3ème édition, OPU, université d'Oran.
- [3] E. Azoulay et J. Avignant, "Mathématiques 4. Algèbre, cours et exercices", ISBN: 2-7042-1089-6, McGraw-Hill, Paris.
- [4] A. Rahmoun, "Mathématiques pour la première année universitaire LMD, cours, séries d'exercices et sujets corrigés", polycopié interne, département de mathématiques, Université de Tlemcen.
- [5] B. Mssirdi, " Algèbre 1", polycopié interne, département de mathématiques, Université de Tlemcen.
- [6] Différents sites internet, notamment Wikipédia et Exo7.