

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd - Tlemcen -

Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Télécommunications

Spécialité : Systèmes de Télécommunications

Par :

HADEF Abdelkader

Sujet

Conception d'un oscillateur chaotique commandé en tension à base d'un oscillateur Colpitts amélioré pour les systèmes de communications sans fil

Soutenu publiquement, le **09/06/2025**, devant le jury composé de :

Mr. A. ABDELMALEK	MCB	Univ. Tlemcen	Président
Mme. A. OTMANI	MCB	Univ. Tlemcen	Examinatrice
Mr. S. KAMECHE	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mr. M.BENDAOU	Docteur	Univ. Tlemcen	Co-Directeur de mémoire

Année universitaire : 2024/2025

Dédicaces

A ma chère mère,

Dont l'amour inébranlable, la patience infinie et le soutien constant ont été ma lumière dans les moments d'obscurité. Ta force et ta tendresse m'ont porté tout au long de ma vie.

A mon père défunt,

Dont la mémoire demeure une source d'inspiration et de courage. Ton exemple de vie, ta sagesse et ta bienveillance continuent de guider chacun de mes pas, même au-delà du temps.

Ce mémoire est dédié à vous deux, piliers de mon existence, pour tout ce que vous m'avez donné, et pour tout ce que vous représentez dans mon cœur.

Avec tout mon amour et ma gratitude éternelle.

HADEF ABDELKADER

Remerciements

Avant toute chose, que mes plus sincères louanges soient adressées au Tout-Puissant (ALLAH), source de toute sagesse, de toute patience et de toute force intérieure. C'est par sa volonté et Sa grâce que ce chemin académique, initié il y a plusieurs décennies, a pu être repris et mené à terme. En lui réside le début et la fin de tout accomplissement.

*Je tiens ensuite à exprimer ma reconnaissance la plus profonde à Monsieur **KAMECHE Samir**, mon directeur de mémoire, pour sa précieuse orientation, sa rigueur intellectuelle et sa bienveillance constante. Sa clairvoyance et sa disponibilité ont grandement contribué à la qualité de ce travail.*

*Je suis également profondément reconnaissant envers Monsieur **BENDAOUD Mohammed**, co-encadreur attentif, dont les conseils avisés et l'accompagnement éclairé ont été pour moi d'un grand secours à chaque étape de ce parcours exigeant.*

*Je ne saurais oublier les membres du jury, Monsieur **ABDELMALEK Abdelhafid** [président], Madame **OTMANI Amina** [examinatrice], pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce travail. Leur expertise et leurs observations critiques seront, j'en suis sûr, des leviers essentiels pour parfaire mes connaissances et orienter mes futures recherches.*

Ce mémoire n'aurait jamais vu le jour sans le soutien indéfectible de celles et ceux qui ont cru en moi, malgré les années qui m'avaient éloigné du monde académique. Depuis l'obtention de mon diplôme d'ingénieur en 1995, la vie m'a mené sur de nombreux chemins, souvent bien loin des bancs de l'université. Pourtant, animé par une profonde soif de connaissance, j'ai su, avec détermination, renouer avec les études — poussé par le désir d'apprendre encore, de comprendre davantage et de toujours aller plus loin

A tous ceux qui ont rendu ce retour possible - enseignants, administration, collègues, amis, membres de ma famille – je dis merci. Merci pour vos encouragements, vos paroles de soutiens, votre patience face à mes doutes, et votre foi en mes capacités.

Enfin, à ceux qui, dans l'ombre ou la lumière, ont semé sur ma route les graines de l'espérance et du savoir, je dédie ce modeste travail. Qu'il soit le témoignage d'un cheminement, non seulement académique, mais aussi profondément humain.

HADEF Abdelkader

Résumé

Ce mémoire vise à étudier les oscillateurs chaotiques, en particulier l'oscillateur Colpitts amélioré, destiné à être utilisé dans des applications de communications sécurisées par chaos. Une modélisation mathématique détaillée, validée par des simulations sous MATLAB et ADS, a permis de concevoir un oscillateur commandé en tension (VCO) utilisant une diode varicap. Deux configurations ont été proposées : l'une avec une plage spectrale continue (1-1.6 GHz) et l'autre discontinue (0.86-1.06 GHz), offrant flexibilité pour des applications RF et cryptographiques. Les résultats soulignent le potentiel de ces systèmes pour générer des signaux chaotiques contrôlables, ouvrant des perspectives en sécurité des données et télécommunications avancées.

Mots clés : Oscillateur chaotique, Colpitts, chaos, VCO, RF, diode varicap.

Abstract

This thesis aims to study chaotic oscillators, particularly the enhanced Colpitts oscillator, intended for use in secure communication applications based on chaos. A detailed mathematical modeling, validated by simulations using MATLAB and ADS, enabled the design of a voltage-controlled oscillator (VCO) using a varicap diode. Two configurations were proposed: one with a continuous spectral range (1-1.06GHz) and another with discontinuous range (0.89-1.06GHz), providing flexibility for RF and cryptographic applications. The results highlight the potential of these systems to generate controllable chaotic signals, paving the way for advancements in data security and advanced telecommunications.

Keywords: Chaotic oscillator, Colpitts, chaos, VCO, RF, varactor diode.

ملخص:

يهدف هذا البحث إلى دراسة المذبذبات الفوضوية، وخصوصًا مذبذب كولبيتس المحسن، المخصّص للاستخدام في تطبيقات الاتصالات الآمنة عبر الفوضى. تمّ تطوير نمذجة رياضية مفصلة، تمّ التحقق من صحتها من خلال محاكاة باستخدام برنامجي MATLAB و ADS، ما أتاح تصميم مذبذب يتم التحكم فيه عبر الجهد (VCO) باستخدام ديود فاريكاب. تم اقتراح تكوينين: أحدهما بنطاق طيفي متصل (1-1.6 غيغاهرتز)، والآخر غير متصل (0.86-1.06 غيغاهرتز)، ما يوفر مرونة لتطبيقات الترددات الراديوية (RF) والتطبيقات التشفيرية. تؤكد النتائج على قدرة هذه الأنظمة في توليد إشارات فوضوية قابلة للتحكم، مما يفتح آفاقًا واعدة في مجال أمن البيانات والاتصالات المتقدمة.

الكلمات المفتاحية: مذبذب فوضوي، كولبيتس، فوضى، VCO، ترددات راديوية (RF)، ديود فاريكاب.

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iii
ملخص	iii
Table des matières	iv
Sigles et abréviations	vii
Liste des figures	viii
Listes des tableaux	x
Introduction générale	2
Chapitre I : Généralités sur les systèmes chaotiques	
I.1 Introduction	6
I.2 Systèmes dynamiques	6
I.2.1 Système dynamique continu	7
I.2.2 Systèmes dynamique discret	8
I.2.3 Système dynamique autonome	8
I.2.4 Système dynamique non-autonome	8
I.3 Système chaotique	9
I.3.1 Historique	9
I.3.2 Non linéarité	10
I.3.3 Déterminisme	10
I.3.4 Sensibilité aux conditions initiales (SCI) :	10
I.4 Outils d'étude des systèmes chaotiques	11
I.4.1 Espace des phases	11
I.4.2 Notion d'attracteur	12
I.4.3 Exposants de Lyapunov	13
I.4.4 Le diagramme de bifurcation et fractal	14
I.4.5 La route vers le chaos	16
I.4.5.1 Doublement de période	16
I.4.5.2 Intermittence	16
I.4.5.3 Quasi périodicité	17

I.5 Domaines d'utilisation des systèmes chaotiques -----	17
I.6 La cryptographie -----	18
I.6.1 Un peu d'histoire-----	18
I.6.2 Objectif des crypto-systèmes-----	19
I.6.3 Définition de la cryptographie -----	19
I.6.3.1 Cryptographie symétrique (ou à clé secrète) -----	20
I.6.3.2 Cryptographie asymétrique (ou à clé publique)-----	20
I.6.4 La Cryptanalyse-----	21
I.6.5 La cryptographie chaotique (Chiffrement par chaos) -----	22
I.6.5.1 Chiffrement par addition -----	22
I.6.5.2 Le chiffrement par commutation (chaos shift keying (csk)): -----	23
I.6.5.3 Chiffrement par modulation -----	24
I.7 Synchronisation des systèmes chaotiques -----	24
I.7.1 Synchronisation identique -----	25
I.7.2 La synchronisation en boucle fermée -----	26
I.7.3 Anti synchronisation-----	26
I.7.4 Synchronisation de phase -----	27
I.7.5 Synchronisation par observateur-----	27
I.8 Conclusion -----	28

Chapitre II : Oscillateurs chaotiques

II.1 Introduction-----	30
II.2 Le circuit de Chua -----	30
II.2.1 Modèle mathématique du circuit de Chua-----	31
II.2.2 Comportement chaotique du circuit de Chua -----	33
II.2.2.1 Réponses temporelles et attracteurs étranges -----	33
II.2.2.2 Diagramme de bifurcation -----	34
II.3 Oscillateur Colpitts -----	35
II.3.1 Le modèle mathématique de l'oscillateur Colpitts -----	36
II.3.2 Simulation numérique-----	37
II.3.2.1 Réponses temporelles et attracteur étrange-----	37
II.3.2.2 Diagramme de bifurcation -----	38
II.3.2.3 Comportement de l'oscillateur Colpitts standard en fonction de « g » -----	39
II.3.3 Simulation électrique de l'oscillateur Colpitts Standard sous ADS -----	40

II.4 Oscillateur Colpitts amélioré -----	41
II.4.1 Modèle mathématique -----	42
II.4.2 Simulation numérique de l'oscillateur Colpitts amélioré -----	43
II.4.2.1 Réponses temporelle et espaces des phases -----	44
II.4.2.2 Diagramme de bifurcation -----	44
II.4.3 Simulation électrique de l'oscillateur Colpitts amélioré (sous ADS) -----	47
II.5 Comparaison entre la version standard et la version améliorée de Colpitts -----	48
II.6 Conclusion -----	51
Chapitre III : Conception d'un VCCO à base de l'oscillateur Colpitts amélioré	
III.1 Introduction -----	53
III.2 Oscillateur commandé en tension -----	53
III.2.1 Caractéristique fréquence-tension d'un VCO -----	55
III.2.2 Oscillateur chaotique commandé en tension -----	56
III.3 Première configuration de VCCO -----	57
III.3.1 Diagramme de bifurcation -----	59
III.3.2 Espaces des Phases -----	60
III.3.3 Simulation sous ADS -----	61
III.3.4 Résultats de simulation sous ADS -----	62
III.4 Deuxième configuration de VCCO -----	62
III.4.1 Diagramme de bifurcation -----	64
III.4.2 Espaces des phases -----	65
III.4.3 Simulation sous ADS -----	66
III.4.4 Résultats de la simulation -----	67
III.5 Comparaison -----	67
III.6 Conclusion -----	69
Conclusion générale -----	71
Bibliographie -----	74

sigles et abréviations

ADS: Advanced Design System

BJT: Bipolar Junction Transistor.

BW: Band Width

CSK: Chaos Shift Keying.

f_0 : Fréquence fondamentale d'un oscillateur.

f_r : Fréquence de Transition d'un transistor bipolaire.

LC: Inductance-Capacité

ODE: Ordinary Differential Equation.

PLL: Phase-Locked Loop.

R : ensemble des nombres réels.

R^+ : nombres réels positifs ou nuls.

R^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

RC : Résistance-Capacité.

RK-4 : La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Varicap : diode à capacité variable.

VCCO: Voltage Chaotic Controlled Oscillator.

VCO: Voltage Controlled Oscillator.

VCXO: Voltage-Controlled Crystal Oscillator.

SCI : Sensibilité aux Conditions Initiales.

YIG : Yttrium Iron Garnet.

$\dot{x}=dx/dt$: dérivée de la variable x par rapport au temps.

liste des figures

Chapitre I

Figure I. 1: Sensibilité aux conditions initiales de la variable d'état x_1 du système chaotique Rössler	11
Figure I. 2: L'attracteur étrange de Rössler.....	13
Figure I. 3 : Diagramme de bifurcation de la fonction logistique	15
Figure I. 4 : Zoom sur la zone de bifurcation	15
Figure I. 5 : Schéma bloc du principe de chiffrement symétrique	20
Figure I. 6 : Schéma bloc du principe de chiffrement asymétrique	21
Figure I. 7 : Schéma bloc du principe de chiffrement chaotique par addition	23
Figure I. 8: Schéma bloc du principe de chiffrement chaotique par commutation.....	23
Figure I. 9 : Schéma bloc du principe de chiffrement chaotique par modulation	24
Figure I. 10 : Schéma bloc du principe de la synchronisation chaotique identique.....	26

Chapitre II

Figure II.1. Circuit de Chua.....	30
Figure II.2. Représentation graphique de la fonction non linéaire $i=h(v_{c1})$	32
Figure II.3. Réponses temporelles chaotiques du modèle Chua.....	33
Figure II.4. Attracteur étrange du modèle Chua [(a):(x1-x2)] ; [(b):(x2-x3)] ; [(c):(x1-x3)] ; [(c):(x1-x2-x3)]	34
Figure II.5. Diagramme de bifurcation du Circuit Chua, (a): $\alpha - X$, (b): $\alpha - Y$	34
Figure II.6. Circuit de l'oscillateur chaotique de Colpitts.....	35
Figure II.7. Modèle de transistor bipolaire base commune	36
Figure II. 8. Réponses temporelles chaotiques de l'oscillateur Colpitts $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$	38
Figure II 9. Espaces des phases chaotiques de l'oscillateur Colpitts: (a)(x_1-x_2);(b)(x_2-x_1)	38
Figure II.10. Diagramme de bifurcation de l'oscillateur Colpitts Standard ($g-x_1$)	39
Figure II.11. Espaces des phases de l'oscillateur Colpitts en fonction de "g"	39
Figure II.12. Circuit Colpitts Standard Simulé sous ADS.....	40
Figure II.13. Espaces de phases chaotiques de l'oscillateur Colpitts sous ADS (a)($V_{C1}-V_{C2}$); (b) ($V_{C2}-V_{C1}$).....	41
Figure II.14. Circuite de l'oscillateur Colpitts amélioré	42
Figure II.15. Réponses temporelles chaotiques de l'oscillateur Colpitts amélioré ($x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$)	44
Figure II.16. Espaces des phases de l'oscillateur Colpitts amélioré ((a)(x_1-x_2);(b)(x_2-x_1)).....	44
Figure II. 17. Diagramme de bifurcation de l'oscillateur Colpitts amélioré ($x_1 - \gamma$)	45

Figure II.18. Espaces de phases de l'oscillateur Colpitts amélioré ((a) $\gamma=15$);((b) $\gamma =20$); ((c) $\gamma =38$);((d) $\gamma =86$)	46
Figure II. 19: Espaces des phases de l'oscillateur Colpitts amélioré $\gamma=86$, ((a)(x_1-x_2)) ;((b)(x_2-x_1)) ; ((c)(x_1-x_4)) ;((d)(x_2-x_4)).....	47
Figure II.20. Circuit de l'oscillateur Colpitts amélioré simulé sous ADS	48
Figure II.21. Espaces des phases chaotiques de l'oscillateur Colpitts amélioré simulé sur ADS	48
Figure II.22. Espaces des phases (à droite) et réponses spectrales (à gauche) de l'oscillateur Colpitts standard aux fréquences fondamentales : (a)($f_{01}=0.5\text{GHz}$) ;(b) ($f_{02}=1\text{GHz}$) ;(c) ($f_{03}=2\text{GHz}$).....	50
Figure II.23. Espaces des phases (à droite) et réponses spectrales (à gauche) de l'oscillateur Colpitts amélioré aux fréquences fondamentales : (a)($f_{01}=0.5\text{GHz}$) ;(b) ($f_{02}=1\text{GHz}$) ;(c) ($f_{03}=2\text{GHz}$).....	51

Chapitre III

Figure III. 1 : Schéma bloc de l'oscillateur commandé en tension.....	53
Figure III. 2: Caractéristiques fréquence-tension de VCO	55
Figure III. 3: Circuit de la première configuration du VCCO	57
Figure III. 4 : Variation de la capacité C_D en fonction de la variation de la tension appliquée V_D	58
Figure III. 5: Diagramme de bifurcation de la première configuration VCCO	59
Figure III. 6: Espaces des phases (x_1, x_2) de la première configuration pour :	60
Figure III. 7: Attracteur étrange obtenus sous Matlab de première configuration de VCCO : (a) (x_1, x_2) ; (b) (x_2, x_1) ; (c) (x_1, x_4) ;(d) (x_2, x_4).....	61
Figure III. 8: Circuit de la première configuration du VCCO sous ADS	61
Figure III. 9: Attracteurs étranges obtenus sous ADS de la première configuration (a)(V_{C1}, V_{C2}); (b)(V_{C2}, V_{C1}); (c)(V_{C1}, I_{Lb}), (d)(V_{C2}, I_{Lb})	62
Figure III. 10: Circuit de la deuxième configuration de VCCO	63
Figure III. 11: Diagramme de bifurcation de la deuxième configuration du VCCO.....	64
Figure III. 12: Espaces des phases (x_1, x_2) de la deuxième configuration du VCCO pour : (a) $V_D=0.10\text{V}$; (b) $V_D=9\text{V}$; (c) $V_D= 14.18\text{V}$; (d) $V_D=6\text{V}$	65
Figure III. 13: Attracteurs étrange obtenus sous MATLAB de la deuxième configuration du VCCO : (a) (x_1, x_2) ; (b) (x_2, x_1) ; (c) (x_1, x_4) ; (d) (x_2, x_4).....	66
Figure III. 14: Circuit de la deuxième configuration du VCCO simulé sous ADS	66
Figure III. 15: Attracteurs étranges obtenus sous ADS de la deuxième configuration de VCCO : (a) (V_{C1}, V_{C2}) ; (b) (V_{C2}, V_{C3}) ; (c) (V_{C1}, I_{Lb}) ; (d) (V_{C2}, I_{Lb})	67

listes des tableaux

Chapitre I

Tableau II.1. Valeurs des composants utilisés (Colpitts standard)	40
Tableau II.2. Valeurs des composants utilisés (Colpitts amélioré)	47
Tableau II. 3 Valeurs des composants utilisés dans la comparaison entre les deux versions de Colpitts	49

Chapitre III

Tableau III. 1: Résultats en fréquences des deux configurations du VCCO proposé.....	68
--	----

Introduction générale

Introduction générale

Contexte général :

Les oscillateurs sont des circuits électroniques qui produisent des signaux périodiques ou non-périodiques, ils sont utilisés dans de nombreuses applications notamment dans la communication radiofréquence. Parmi ces oscillateurs on distingue ceux qui génèrent des signaux chaotiques, qui ont attiré une attention particulière depuis plusieurs décennies et ce pour leurs propriétés complexes et imprévisibles.

D'une manière générale un système chaotique est un système qui semble aléatoire mais il suit des règles précises, il est caractérisé par sa sensibilité aux conditions initiales, ce qui signifie qu'une infime différence au départ peut entraîner des résultats complètement différents plus tard. Bien que le système chaotique soit déterministe (pas aléatoire) son comportement devient imprévisible à long terme à cause de cette sensibilité. En résumé c'est un **système déterministe mais imprévisible**, avec un comportement complexe et non répétitif.

Les signaux chaotiques présentent une structure déterministe mais qui paraît aléatoire et non répétitive dans l'espace des phases et une large bande spectrale. Ces propriétés font des signaux chaotiques des outils puissants pour améliorer la sécurité des transmissions de données en ajoutant un niveau supplémentaire de complexité qui rend difficile leur interception et leur analyse par des tiers non autorisés, ce qui les rend idéaux pour des applications telles que la cryptographie, le masquage du signal et la synchronisation sécurisée dans les communications.

L'oscillateur Colpitts : une base solide pour la création de chaos.

L'oscillateur Colpitts est un circuit oscillant largement utilisé dans les applications RF (Radiofréquence) grâce à sa simplicité et à sa stabilité. Sa configuration repose sur un transistor (ou un amplificateur opérationnel) combiné avec un diviseur capacitif, formé de deux condensateurs en série et une inductance qui permet de générer des signaux sinusoïdaux purs et stables à des fréquences élevées.

Cependant, la modification à certaines composantes ou l'ajout des éléments non linéaires au circuit, peut transformer cet oscillateur classique en un système capable de produire des comportements chaotiques.

Problématique et Objectif du projet

Bien que l'oscillateur Colpitts soit très connu pour ses performances dans les applications RF, son potentiel en tant que générateur chaotique reste sous-exploité. Dans ce projet de fin

d'études, nous visons à concevoir et à simuler un oscillateur chaotique basé sur une version améliorée de l'oscillateur Colpitts, qui sera spécialement adaptée pour être contrôlée en tension, en intégrant une diode à capacité variable (varicap), afin de permettre une modulation flexible de la dynamique chaotique.

L'objectif principal est donc double :

- Etudier théoriquement les propriétés dynamiques d'un oscillateur Colpitts amélioré, notamment en analysant son diagramme de bifurcation, son espace des phases et sa réponse spectrale.
- Concevoir et simuler un oscillateur chaotique commandé en tension, capable de produire des signaux chaotiques contrôlables et adaptés aux besoins des systèmes de communication sécurisés.

Importance des systèmes de communication sécurisés par chaos

Dans le domaine des télécommunications modernes, la protection des données contre l'interception et les cyberattaques devient de plus en plus cruciale. Les méthodes traditionnelles de chiffrement reposent souvent sur des algorithmes mathématiques sophistiqués, mais elles peuvent être vulnérables à des attaques avancées. En revanche, les systèmes de communication basés sur le chaos offrent une alternative prometteuse grâce à leurs propriétés intrinsèquement complexes et imprévisibles.

Le principe fondamental de ces systèmes repose sur la synchronisation de deux oscillateurs chaotiques identiques : un émetteur et un récepteur. Le signal chaotique généré par l'émetteur est utilisé pour masquer les données avant transmission, tandis que le récepteur, étant synchronisé avec l'émetteur, peut extraire les données originales. Cette approche garantit une sécurité élevée, car un intercepteur ne disposant pas d'un système parfaitement synchronisé ne peut pas décoder le signal.

Contribution attendue

Ce projet contribuera à enrichir la littérature scientifique sur les oscillateurs chaotiques et leur application pratique dans les communications sécurisées. Plus précisément :

- Il proposera une nouvelle configuration d'oscillateur Colpitts amélioré, capable de générer des signaux chaotiques contrôlables.
- Il fournira une analyse approfondie des dynamiques non linéaires associées à ce système, y compris les transitions vers le chaos via des bifurcations.

- Il démontrera la faisabilité de l'utilisation de tels oscillateurs dans des applications concrètes de communication sécurisée.

En somme, ce projet représente une opportunité d'explorer les frontières de l'électronique non linéaire tout en répondant à des besoins industriels actuels en matière de sécurité des communications. Grâce à cette étude nous aurons l'occasion de développer des compétences solides en théorie des systèmes dynamiques, simulation numérique et conception de circuits électroniques avancés.

Chapitre I

Généralités sur les systèmes chaotiques

I.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter et de définir les principaux concepts mathématiques relatifs aux systèmes dynamiques et chaotiques. Il s'attache également à exposer les méthodes analytiques couramment utilisées pour l'étude de ces systèmes complexes, en mettant en lumière leurs différents domaines d'application, notamment dans le domaine du cryptage des systèmes de communication.

I.2 Systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques sont des modèles mathématiques qui décrivent l'évolution d'un système au fil du temps. Ils sont souvent représentés par des équations différentielles ou des itérations de fonctions, et ils permettent d'analyser comment les états d'un système changent en réponse à des conditions initiales et à des paramètres spécifiques.

Ils sont définis comme un ensemble d'objets mathématiques qui évoluent dans le temps selon des règles précises [1]. Cette définition souligne l'importance des règles qui régissent le comportement du système, qu'il s'agisse de systèmes linéaires ou non linéaires.

Afin de mieux cerner ces systèmes, on peut les classer selon leur stabilité, leur comportement chaotique et leur dynamique symbolique [2]. Cette classification est essentielle pour comprendre les différents types de comportements que peuvent exhiber les systèmes dynamiques, allant de la stabilité à la complexité chaotique.

Les systèmes dynamiques sont souvent étudiés dans le contexte de la théorie du chaos, qui explore comment des systèmes déterministes peuvent exhiber un comportement apparemment aléatoire. On note aussi que le chaos est une propriété des systèmes dynamique qui se manifeste par une sensibilité extrême aux conditions initiales [1]. Cela signifie qu'une petite variation dans les conditions initiales peut conduire à des résultats très différents, rendant la prévision à long terme pratiquement impossible.

Autrement dit, les systèmes dynamiques non linéaires sont souvent à l'origine de comportements complexes et imprévisible [3], cela met en lumière l'importance de la non-linéarité dans leur étude.

En résumé, les systèmes dynamiques sont des structures mathématiques qui modélisent l'évolution temporelle d'un système, et leur étude est cruciale pour comprendre des phénomènes allant de la stabilité à la complexité chaotique.

L'évolution d'un système dynamique est caractérisée par deux aspects qui sont étroitement liés mais distincts :

- **La causalité** : ce principe fait référence au fait qu'un événement (effet) est la conséquence directe d'un ou de plusieurs autres événements précédents (causes). Autrement dit, l'état futur du système dépend de ses conditions initiales et des interactions qui se produisent au cours du temps.
- **Le déterminisme** : dans les systèmes dynamiques, le déterminisme signifie que, étant donné un ensemble précis de conditions initiales, l'évolution future du système peut être prédite avec certitude à partir des lois physiques ou mathématiques qui le gouvernent. En d'autres termes, il n'y a pas de place pour le hasard ou l'incertitude dans l'évolution du système, sauf si les conditions initiales ne sont pas parfaitement connues.

Plusieurs domaines scientifiques utilisent les systèmes dynamiques pour modéliser et analyser leur évolution dans le temps. Nous citons dans la physique, la modélisation de mouvements planétaires, de fluides ou de systèmes mécaniques, en biologie l'étude de populations, de réseaux neuronaux ou de réactions biochimiques, en économie nous aident à analyser les marchés financiers et les cycles économiques, l'ingénierie les utilise pour concevoir les systèmes de contrôle de robots ou de circuits électroniques et les algorithmes d'apprentissage automatique et réseaux de neurones et en écologie où ils sont utilisés pour étudier les écosystèmes et les interactions entre espèces.

Selon la nature du temps et la manière dont les phénomènes sont modélisés, on distingue deux types de systèmes dynamiques : les systèmes continus et les systèmes discrets.

I.2.1 Système dynamique continu

Où le temps est considéré comme une variable continue. Cela signifie que l'évolution du système est décrite à chaque instant, une manière de modéliser les phénomènes qui évoluent de manière fluide sans interruptions (exemple : mouvement des planètes, écoulement des fluides).

Ils sont modélisés par des **équations différentielles** :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où : $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est le champ de vecteur qui représente la dynamique du système en temps continu, et x_0 représente l'état initial du système en t_0

Il est souvent utilisé lorsqu'on cherche une description précise et détaillée d'un système, en particulier dans les sciences physiques et l'ingénierie.

I.2.2 Systèmes dynamique discret

Le temps est considéré comme une variable discrète, c'est-à-dire que l'évolution du système est décrite à des intervalles de temps spécifiques (exemple : générations annuelles d'une population, itérations d'un algorithme). Cela est utile pour modéliser des processus qui se produisent par étapes ou par cycles.

Ils modélisés par des équations aux différences

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(t), k) \\ x(k_0) = k_0 \end{cases} \quad (I.2)$$

Où : $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la dynamique du système en temps discret, et x_0 représente l'état initiale en k .

On utilise ce système lorsque les données sont collectées à intervalle réguliers (comme en biologie, en économie...) ou lorsque les processus sont intrinsèquement discrets.

D'un autre côté, on peut classer les systèmes dynamiques en deux catégories principales selon leur dépendance explicite au temps : autonomes et non-autonomes.

I.2.3 Système dynamique autonome

Un système dynamique est dit autonome si son évolution ne dépend pas explicitement du temps. Autrement dit, les équations qui décrivent le système ne contiennent pas de terme temporel explicite.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (I.3)$$

Le système est autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps.

Ces systèmes sont invariants par translation temporelle, si on décale le temps initial, la trajectoire reste identique mais simplement décalée dans le temps.

I.2.4 Système dynamique non-autonome

Par contre un système dynamique est dit non-autonome si ses équations d'évolution dépendent explicitement du temps, ce qui signifie que la dynamique peut varier avec le temps absolu, même si l'état initial reste le même.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Ces systèmes ne sont pas invariants par translation temporelle, la dynamique peut changer avec le temps, ce qui rend leur comportement potentiellement plus complexe à analyser.

I.3 Système chaotique

Un système chaotique est un système dynamique déterministe qui présente un comportement extrêmement complexe, apparemment aléatoire, mais néanmoins gouverné par des lois mathématiques strictes. Les systèmes chaotiques peuvent présenter une variété de comportements dynamiques, notamment des oscillations irrégulières et des trajectoires non périodiques dans l'espace des phases.

I.3.1 Historique

Dans son travail sur le problème des trois corps (*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892-1899*), **Henri Poincaré** fut l'un des premiers à identifier les phénomènes complexes dans les systèmes dynamique. Bien qu'il n'ait pas utilisé le terme « chaos », il remarqua que même des systèmes relativement simples pouvaient exhiber des trajectoires imprévisibles, ses observations ont jeté les bases de ce domaine.

Le terme « chaos » a été popularisé par **Edward Lorenz**, un météorologue américain. En étudiant des modèles simplifiés de l'atmosphère terrestre, Lorenz découvrit que de très petites variations dans les conditions initiales entraînaient des différences drastiques dans les prédictions météorologiques. Il publia son célèbre article intitulé « *Deterministic Nonperiodic Flox* » (*Journal of the Atmospheric sciences, 1963 pages 130+141*). Dans cet article il introduisit l'attracteur de Lorenz, un exemple emblématique de système chaotique. Il résuma cette découverte par la métaphore de l'effet papillon ; « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? ».

En 1975, **Tien-Yien Li et James A. Yorke** ont publié un article fondamental intitulé « *Period Three Implies Chaos* » (*American Mathematical Monthly, 1975, Pages 985-992*). Dans cet article, ils ont formalisé la notion de chaos pour les systèmes dynamique discrets montrant que l'existence d'une orbite périodique de période 3 impliquait nécessairement un comportement chaotique.

Après les travaux de Li et Yorke, le domaine du chaos s'est enrichi grâce à des contributions dans diverses disciplines, incluant les mathématiques, la physique, la biologie et l'informatique.

Les chercheurs ont exploré des concepts tels que les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov, les routes vers le chaos et les applications pratiques telles que la synchronisation et la cryptographie.

Les systèmes chaotiques se distinguent des systèmes réguliers ou prévisibles par plusieurs propriétés qui les caractérisent à savoir la non-linéarité, le déterminisme et la sensibilité aux conditions initiales (SCI).

I.3.2 Non linéarité

La non-linéarité est une condition essentielle pour observer du chaos. Les systèmes linéaires ne peuvent pas être chaotiques car leurs solutions sont généralement régulières et prévisibles. En revanche, les systèmes non-linéaires peuvent produire des comportements complexes et imprévisibles même à partir de règles simples. Comme par exemple l'équation logistique $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, introduite par *Rober May (Nature, 1976, Pages 459-467)* illustre comment une simple équation quadratique peut générer du chaos lorsque le paramètre r dépasse certaines valeurs critiques.

I.3.3 Déterminisme

Un système chaotique est toujours déterministe, c'est-à-dire que son évolution future est entièrement déterminée par ses équations et ses conditions initiales. Cependant, en raison de la sensibilité aux conditions initiales, toute petite incertitude dans ces dernières se propage exponentiellement, rendant le système imprévisible sur le long terme [3].

I.3.4 Sensibilité aux conditions initiales (SCI)

La sensibilité aux conditions initiales est une propriété centrale du chaos. Elle signifie que deux trajectoires partant de conditions initiales très proches divergent exponentiellement avec le temps. Cette divergence est mesurée par l'exposant de Lyapunov, un indicateur mathématique qui quantifie le taux de séparation des trajectoires [4]. Ça veut dire que l'existence d'une moindre erreur sur la condition initiale d'un système chaotique conduit à une divergence rapide des trajectoires au cours du temps. Dans la suite, nous allons illustrer cette propriété en traçant deux réponses temporelles du système chaotique Rössler avec une légère différence dans les conditions initiales.

Le model chaotique Rössler se présente comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Nous avons pris les valeurs $a=0.2$, $b=0.2$ et $c=5.7$

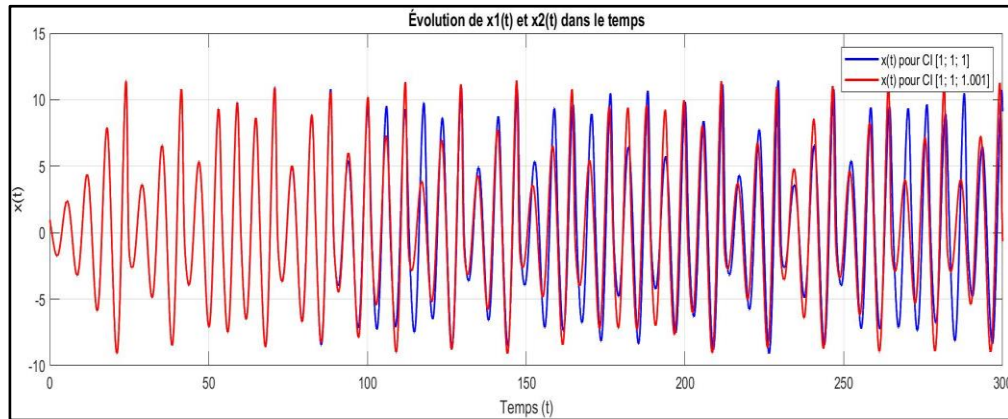


Figure I. 1. Sensibilité aux conditions initiales de la variable d'état x_1 du système chaotique Rössler

I.4 Outils d'étude des systèmes chaotiques

L'étude des systèmes chaotiques combine des approches mathématiques rigoureuses, des simulations numériques avancées, des observations expérimentales et des outils visuels pour mieux comprendre ces phénomènes complexes. Chaque domaine d'application peut nécessiter des adaptations spécifiques de ces outils.

I.4.1 Espace des phases

L'espace des phases est un outil fondamental pour étudier les systèmes dynamiques, y compris ceux qui sont chaotiques. Il représente géométriquement l'évolution de l'état d'un système en fonction du temps, chaque dimension correspondant à une variable d'état. Dans cet espace, on peut visualiser les trajectoires, identifier les attracteurs (y compris les attracteurs étranges caractéristiques du chaos), et analyser la stabilité des points fixe ou cycles limites. Cet outil est crucial pour distinguer le chaos déterministe des processus aléatoires et pour comprendre la dynamique complexe des systèmes non linéaire.

I.4.2 Notion d'attracteur

Un attracteur est une région de l'espace des phases vers laquelle les trajectoires d'un système dynamique convergent au fil du temps, quelles que soient (sous certaines conditions) les conditions initiales. Il représente le comportement asymptotique à long terme du système.

Les attracteur peuvent être simples, comme des points fixes ou des cycles limites (comportement périodiques), ou complexes, comme les attracteurs étrange, qui sont associés au chaos et présentent une structure fractale.

Voici les principaux types d'attracteurs :

- **Attracteur ponctuel (ou fixe) :** C'est un point unique dans l'espace des phases où le système converge asymptotiquement et ce quelles que soit les conditions initiales proches, le système finit par se stabiliser sur ce point tel qu'un pendule amorti qui finit toujours par s'arrêter à sa position verticale basse [5].
- **Attracteur cyclique (ou périodique) :** Dans ce cas, le système suit un cycle répétitif et fermé dans l'espace des phases. Il oscille régulièrement autour d'une trajectoire spécifique [6].
- **Attracteur étrange (chaotique) :** C'est un attracteur caractérisé par un comportement chaotique, sensible aux conditions initiales, et présente une trajectoire bornée mais désordonnée, explorant une région fractale complexe.

Pour une meilleure compréhension de la notion d'attracteur et plus précisément l'attracteur étrange, nous allons voir l'attracteur de Rössler qui est un exemple emblématique d'attracteur étrange, découvert par l'informaticien et chimiste allemand Otto E. Rössler en 1976. Il est défini par un système d'équations différentielles non linéaires simple qui montrent un comportement chaotique complexe.

Il est décrit par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Où a , b , et c sont des paramètres réels.

- Le paramètre a contrôle la dissipation dans le système.

- Le paramètre b influence la distance moyenne entre les cycles successifs.
- Le paramètre c détermine si le système est périodique ou chaotique.

Pour certaines valeurs spécifiques de ces paramètres ($a=0.2$; $b=0.2$, $c=5.7$) le système présente un comportement chaotique typique. La représentation graphique montre que la trajectoire de l'attracteur de Rössler forme une spirale tordue dans l'espace 3D [5].

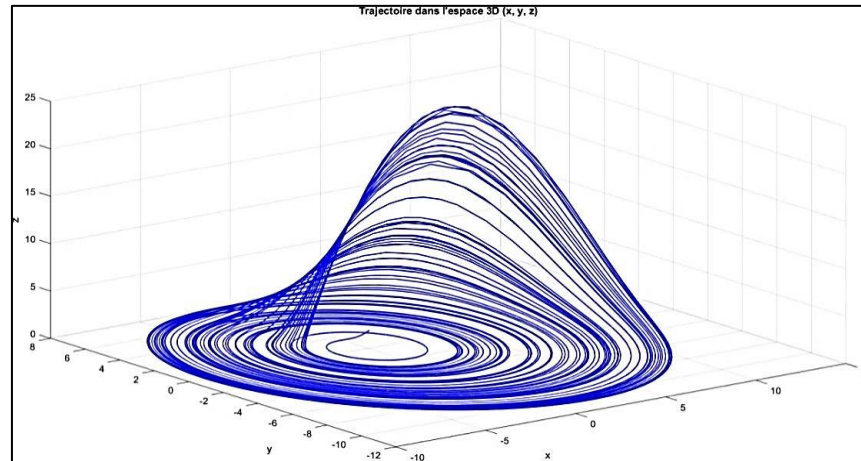


Figure I. 2. L'attracteur étrange de Rössler

I.4.3 Exposants de Lyapunov

Introduits par le mathématicien russe Aleksandr Oseledec en 1968, et leur nom rend hommage au mathématicien Mikhaïl Lyapunov, les exposants de Lyapunov sont des quantités fondamentales en théorie de chaos et en dynamique non linéaire. Ils permettent d'analyser la stabilité des systèmes dynamiques, notamment pour déterminer si un système est chaotique ou non. Plus précisément ces exposants servent à mesurer le taux moyen d'écartement ou de rapprochement de trajectoires initialement proches dans l'espace des phases.

Soit un système dynamique défini par une fonction $f(x)$. Les exposants de Lyapunov caractérisent le comportement asymptotique des petites perturbations autour d'une trajectoire donnée. Pour une perturbation infinitésimale δx_0 à l'instant initial, le module de cette perturbation évolue selon :

$$|\delta x(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta x_0| \quad (I.7)$$

Où λ est l'exposant de Lyapunov. Si $\lambda > 0$, les trajectoires s'éloignent exponentiellement, ce qui est un signe de chaos. Si $\lambda < 0$, les trajectoires convergent vers un point fixe ou un attracteur stable. Et si $\lambda = 0$ on est en présence d'un attracteur périodique ou quasi-périodique.

Le calcul des exposants de Lyapunov peut être réalisé numériquement, ou analytiquement en appliquant la formule des exposants suivante :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)} \right), i = 1, \dots, n \quad (\text{I.8})$$

Où i indexe les directions dans l'espace tangent

Le tableau ci-dessous résume la relation entre le comportement du système dynamique non linéaire et les valeurs des exposants de Lyapunov.

Les valeurs des exposants de Lyapunov	Le type d'attracteur
$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$	Un point fixe
$\lambda_1 = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$	Un cycle limite
$\lambda_1 = \lambda_k = 0;$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} < 0$	L'attracteur est quasi périodique (k fréquence)
$\lambda_1 > 0; \sum_{p=1}^n \lambda_p < 0$	L'attracteur est chaotique (attracteur étrange)
$\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0; \sum_{p=1}^n \lambda_p < 0$	L'attracteur est hyper chaotique (attracteur étrange)

Tableau I 1. Relation entre les comportements possibles des systèmes dynamiques et les valeurs des exposants de Lyapunov

I.4.4 Diagramme de bifurcation et fractal

Un diagramme de bifurcation est un outil graphique utilisé en dynamique des systèmes pour représenter comment le comportement d'un système change en fonction d'un paramètre contrôlable. Il montre les valeurs possibles d'une variable d'état lorsque ce paramètre varie. Les diagrammes de bifurcation sont essentiels pour comprendre les transitions entre différents régimes dynamiques, tels que la stabilité, la périodicité et le chaos.

Un point de bifurcation est un seuil critique où une petite variation du paramètre provoque un changement qualitatif dans le comportement du système [5].

L'un des exemples les plus célèbres et classique utilisé pour expliquer le concept de bifurcation est le diagramme de bifurcation de la fonction logistique, qui est un système dynamique discret défini par l'équation suivante :

$$f : [0;1] \rightarrow [0;1] x_{k+1} = f(x_k) = rx_k(1-x_k) \quad (\text{I.9})$$

Avec la valeur de r comprise entre 0 et 4, et k une variable naturelle non nulle ($k=1,2,\dots$)

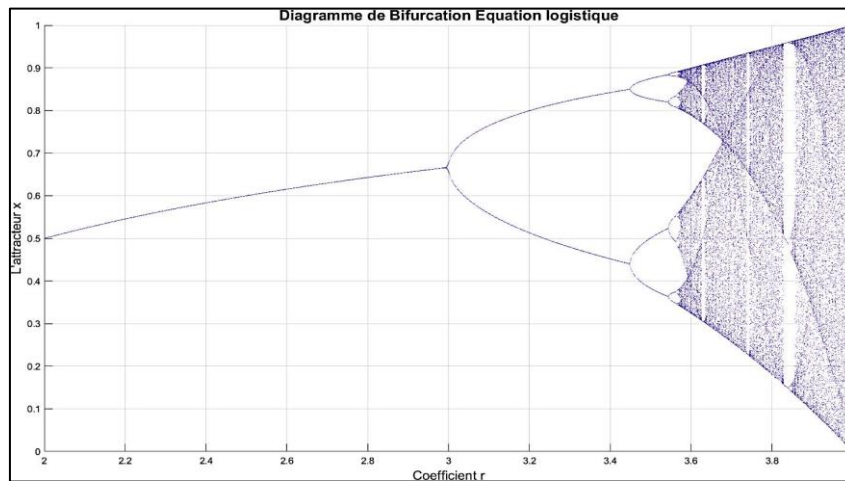


Figure I. 3. Diagramme de bifurcation de la fonction logistique

Le diagramme de bifurcation représente la variation de type d'attracteurs en fonction du paramètre 'r'. Tous les types d'attracteur qu'on a vu sont présents : l'attracteur ponctuel est subsiste jusqu'au voisinage de la valeur 3. À partir de cette valeur, le système présente un attracteur périodique de période deux, puis, pour une valeur supérieure, un attracteur périodique de période quatre, suivi d'un attracteur de période huit. On pourrait alors penser que le système continue cette logique de division par deux, mais à la valeur $r=3.57$ un changement de nature survient : le système entre dans un comportement complètement chaotique, caractérisé par un attracteur étrange. Par contre, lorsqu'on regarde le diagramme de bifurcation de près, on observe des zones où le chaos disparaît et où le système retombe sur des orbites périodiques. C'est le cas autour de la valeur $r \approx 3.83$, où l'on observe des oscillations entre trois valeurs. En zoomant sur ces zones calmes (zones blanches), on retrouve des bifurcations présentant le même motif de dédoublement, suivi d'une petite zone chaotique, puis d'une nouvelle zone calme. En zoomant à nouveau, par exemple autour de $r \approx 3.854$, on retrouve encore des bifurcations similaires. On dit alors que le diagramme de bifurcation possède une structure dite « fractale », qui se répète à différentes échelles au fur et à mesure qu'on zoome dessus.

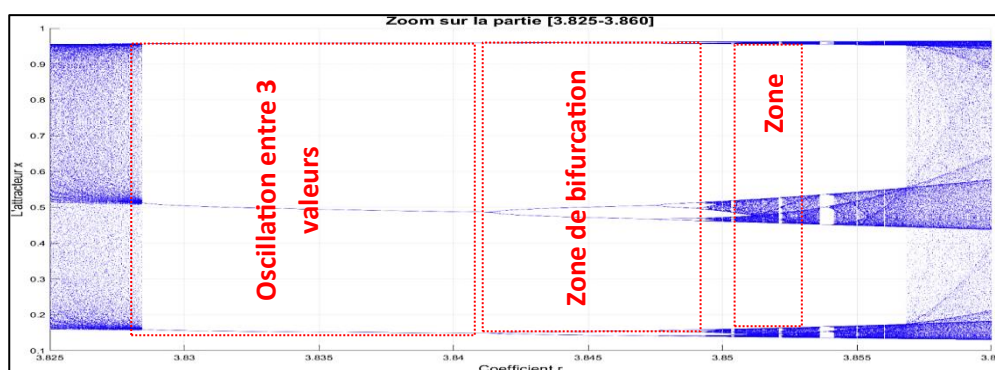


Figure I. 4. Zoom sur la zone de bifurcation

Les fractals sont des objets géométriques dont la structure fine est définie à toutes les échelles [7]. Les fractals sont partout dans la nature et dans les mathématiques, y compris dans les transitions vers le chaos observées dans des systèmes simples comme l'équation logistique[8].

I.4.5 Route vers le chaos

C'est une notion qui fait référence aux mécanismes par lesquels un système dynamique passe d'un comportement régulier et prévisible à un comportement chaotique, ce concept est central dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires, où différentes transitions peuvent conduire à la survenue du chaos.

La route vers le chaos désigne un ensemble de mécanisme ou de scénarios par lesquels un système évolue, caractérisé par une sensibilité extrême aux conditions initiales et une apparente imprédictibilité. Cette transition peut se produire via plusieurs voies, chacune correspondant à une séquence spécifique de bifurcations :

I.4.5.1 Doublement de période

C'est l'une des routes les plus célèbres vers le chaos. Le doublement de période, étudié par Mitchell Feigenbaum dans son article fondateur « *Quantitative Universality for a class of Nonlinear transformations* »[5]. Cette route consiste en une succession de bifurcation où la périodicité du système double à chaque ajustement du paramètre jusqu'au seuil critique où le processus conduit au chaos.

I.4.5.2 Intermittence

L'intermittence est une autre route vers le chaos, où le système alterne entre des phases de comportement régulier et des phases de comportement chaotique. Ce phénomène a été décrit par Pomeau et Manneville en 1980 [5]. Ils ont identifié trois types d'intermittence (I, II et III), chacun correspondant à un mécanisme différent de perte de stabilité.

- De type I : intermittence déterministe, caractérisé par des périodes de comportement régulier (stable) qui alterne avec des phases chaotiques.
- De type II : intermittence stochastique qui implique des éléments de hasard, les transitions entre les phases régulières et chaotiques sont influencées par des perturbations aléatoires.
- De type III : intermittence liée à des bifurcations dans le système.

I.4.5.3 Quasi périodicité

Un système chaotique peut également se produire via la quasi-périodicité, où le système passe par des états de plus en plus complexes qui sont caractérisés par des fréquences démesurées, avant de devenir chaotique.

I.5 Domaines d'utilisation des systèmes chaotiques

En raison de leur capacité à modéliser des phénomènes complexes et imprévisible, les systèmes chaotiques sont omniprésents dans de nombreux domaines scientifique et technique, offrant des moyens puissants pour comprendre et exploiter des phénomènes complexes notamment dans :

- **La physique** : Pour comprendre des phénomènes tels que les transitions vers le chaos, les oscillations non linéaires (Pendule double, circuits électronique), dynamique des fluides (turbulence), la théorie du chaos quantique.
- **L'ingénierie et l'électronique** : où les systèmes chaotiques sont utilisés pour concevoir des circuits électroniques, la génération des signaux chaotiques pour la cryptographie et les dispositifs de communication sécurisé.
- **La biologie et la médecine** : Pour permettre de modéliser des comportements complexes tel que le rythme cardiaque et l'activité neuronale et réseaux neuronaux et aussi de modéliser la dynamique des populations animales ou végétales.
- **La Climatologie et la géophysique** : qui présentent souvent des comportements chaotiques dus à leur nature complexe et non linéaire. Les systèmes chaotiques sont très utilisés pour les prévisions météorologiques et l'étude des cycles climatiques (effet papillon) ainsi que la dynamique des océans et atmosphère.
- **L'économie et la finance** : où on a besoin des systèmes chaotiques pour analyser les fluctuations imprévisibles des prix et des taux, la modélisation des crises économiques ainsi que les prédictions des tendances boursières.
- **La cryptographie et sécurité** : qui tire profit des propriétés intrinsèques des systèmes chaotiques (sensibilité aux conditions initiales, aléatoire apparent), faisant deux des outils précieux pour la conception de systèmes cryptographiques robustes notamment dans la génération d'algorithmes de chiffrement symétrique, la génération de nombres pseudo-aléatoire et les protocoles de sécurité pour les communications.

I.6 Cryptographie

Les procédés de cryptage constituent un domaine en plein essor. Les mécanismes chargés de sécuriser les données sont au cœur de nombreuses technologies : communications via téléphones portables, transmissions de données chiffrées par cartes bancaires, échanges sur des sites internet, etc. La cryptographie intervient ainsi constamment dans la vie quotidienne.

I.6.1 Un peu d'histoire

Le premier texte chiffré connu a pour support une tablette d'argile retrouvée en Irak, daté du XVI^{ème} siècle avant J.C, où un potier avait gravé une recette secrète en supprimant les consonnes et en modifiant l'orthographe du texte.

- **Le bâton de Plutarque** : C'est une technique de cryptage par transposition (ou par changement de l'ordre des mots), mise au point par les Grecs entre le Xème et le VIIème siècle avant J.C. Ils utilisent le bâton de Plutarque, autour duquel est enroulée une bande de cuire, puis ils inscrivent le message. La bande de cuire est ensuite déroulée (le message est alors illisible) et envoyée au destinataire qui doit posséder un bâton identique (en taille et en diamètre) à celui de l'émetteur pour pouvoir lire le message.
- **Le code de César** : Il s'agit d'un procédé par substitution mono-alphabétique utilisé dans l'armée romaine. Le système est simple, il revient à décaler les lettres de l'alphabet d'un nombre de lettre convenu. Ce système est très peu sûr, sensible notamment à des attaques statistiques, qui exploite la fréquence de chaque lettre dans la langue considérée.
- **Le carré de Polybe** : Ce procédé de substitution a été mis au point par l'historien grec Polybe. Il utilise un carré de vingt-cinq cases contenant chacune une lettre : chaque lettre est représentée par un groupe de deux chiffres, correspondant à sa ligne et sa colonne. Ce système de chiffrement peut être compliqué avec un mot de passe supplémentaire.
- **Le chiffre de Vigenère** : En 1586, le diplomate français Blaise de Vigenère élabore une technique de chiffrement par substitution poly-alphabétique. Le chiffrement repose sur un mot de passe, dont chaque lettre indique le décalage à appliquer sur le texte original. Cet algorithme est très simple à utiliser et le déchiffrement est tout aussi aisé, toujours grâce à des attaques statistiques.
- **La machine Enigma** : En 1919, un ingénieur hollandais dépose un brevet de machine à crypter électromagnétique. Ce concept est repris par Arthure Scherbius pour créer en Allemagne une société destinée à fabriquer une machine à chiffrer, appelée Enigma. La simplicité et l'ingéniosité du codage attirent l'attention des militaires. Chaque lettre est

remplacée par une autre, mais la substitution change d'une lettre à l'autre. Quand on appuie sur une touche du clavier, un circuit électrique est fermé et une lampe s'allume pour indiquer la lettre codée. Parmi les points forts d'Enigma est le nombre très important de clés.

I.6.2 Objectif des crypto-systèmes

Au fil des siècles, les techniques de cryptage ont évolué pour résister aux attaques de plus en plus sophistiquées. Plus l'enjeu était important, plus les adversaires développaient des moyens efficaces pour déchiffrer les messages. Cette exigence croissante de sécurité a conduit à une complexification des algorithmes, donnant naissance aux méthodes modernes de cryptage et ce pour atteindre les objectifs suivants [10] :

- *Confidentialité* : Empêcher tout accès non autorisé aux informations en les rendant illisibles sans la clé de déchiffrement.
- *Intégrité* : Assurer que les données n'ont pas été modifiées ou altérées pendant la transmission ou le stockage.
- *Authentification* : Vérifier l'identité des parties impliquées dans une communication pour éviter les usurpations d'identité.
- *Non-répudiation* : Empêcher un expéditeur ou un destinataire de nier avoir envoyé ou reçu un message.
- *Disponibilité* : Garantir l'accès aux informations pour les utilisateurs autorisés, malgré d'éventuelles attaques ou pannes.

Ces principes sont à la base des systèmes de cryptographie modernes, utilisés dans divers domaines comme les transactions bancaires, la cybersécurité et les communications sécurisées.

I.6.3 Définition de la cryptographie

La cryptographie est une discipline scientifique qui se concentre sur les techniques de sécurisation de l'information, en particulier sur la transformation des données (chiffrement) pour les rendre illisible à toute personne non autorisée, ainsi que les méthodes pour les rendre à nouveau lisibles (déchiffrement).

La cryptographie englobe des concepts tels que la confidentialité, l'intégrité des données, l'authentification des entités et l'authentification de l'origine des données. La cryptographie n'est pas le seul moyen de garantir la sécurité des informations mais fait partie d'un ensemble de techniques [10].

I.6.3.1 Cryptographie symétrique (ou à clé secrète)

La cryptographie symétrique utilise une seule clé pour le chiffrement et le déchiffrement des données. Cette clé doit être partagée de manière sécurisée entre les parties communicantes. Les algorithmes symétriques sont généralement rapides et efficaces pour le traitement de grandes quantités de données comme AES (Advanced Encryption Standard), DES (Data Encryption Standard), 3DES et ChaCha20. Cependant, la gestion de la clé partagée est un défi majeur, car toute personne ayant accès à cette clé peut chiffrer ou déchiffrer les messages [10].

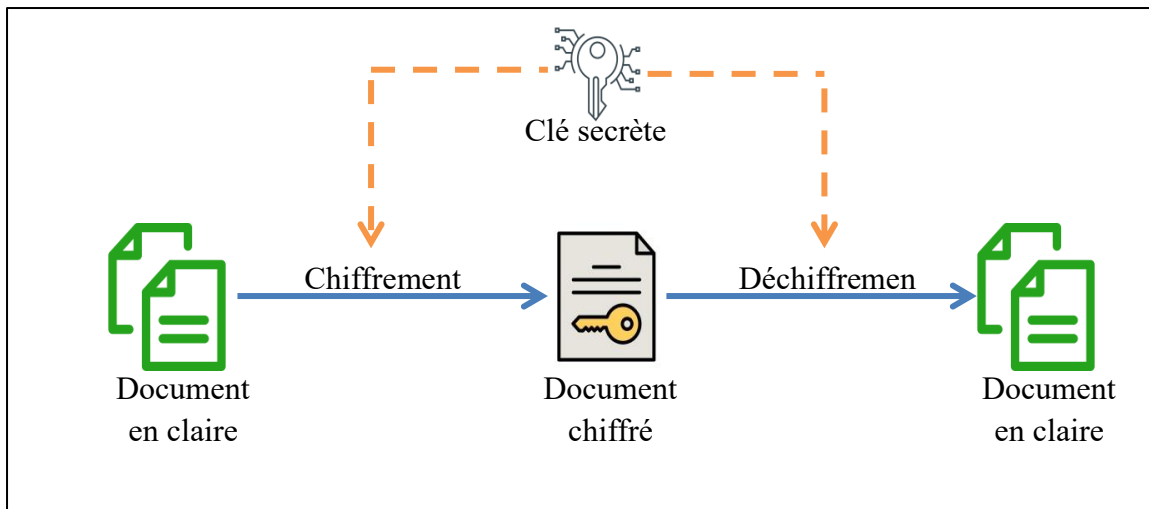


Figure I.5. Schéma bloc du principe de chiffrement symétrique

I.6.3.2 Cryptographie asymétrique (ou à clé publique)

La cryptographie asymétrique utilise une paire de clés, une clé publique (partagée ouvertement) et une clé privée (gardée secrète). La clé publique sert à chiffrer les données, tandis que la clé privée est utilisée pour les déchiffrer. Cette approche résout le problème de la distribution des clés, car la clé publique peut être partagée librement sans compromettre la sécurité. Par contre, les algorithmes asymétriques sont généralement plus lents que les algorithmes symétriques comme RSA (Rivest-Shamir-Adlema), ECC (Elliptic Curve Cryptography) et ElGamal ; et sont souvent utilisés pour échanger des clés symétriques ou pour des signatures numériques.

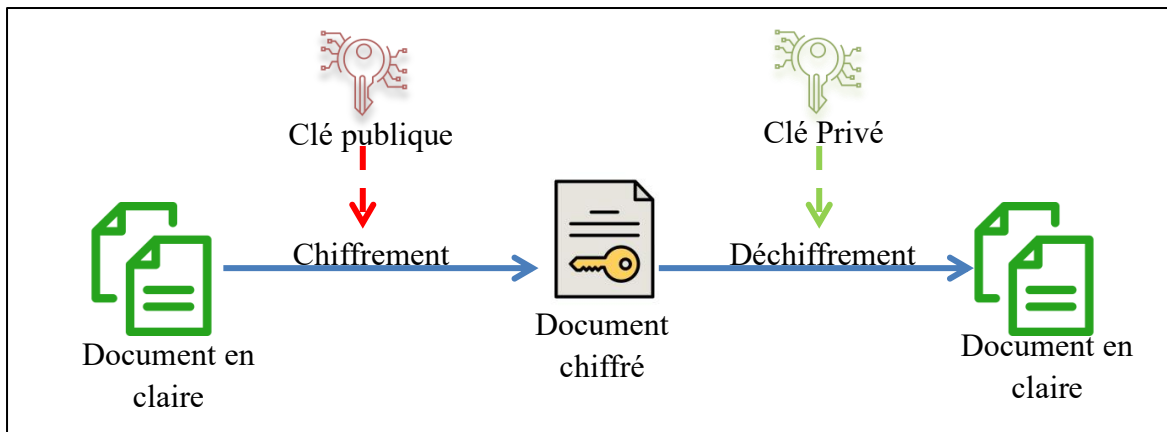


Figure I.6. Schéma bloc du principe de chiffrement asymétrique

La cryptographie symétrique et la cryptographie asymétrique sont deux approches complémentaires qui répondent à des besoins différents en matière de sécurité des données. La cryptographie symétrique est idéale pour la protection de grandes quantités de données, tandis que la cryptographie asymétrique est mieux adaptée aux scénarios nécessitant une authentification ou un échange sécurisé de clés.

Caractéristique	C. Symétrique	C. Asymétrique
Nombre de clés	Une seule clé	Deux clés (publique et privée)
Vitesse	Rapide	Lente
Sécurité	Dépend de la distribution de la clé	Plus sûre grâce à la séparation des clés
Utilisation	Protection de grandes quantités de données	Echange de clés, signatures numériques
Exemples d'algorithmes	AES, DES	RSA, ECC

Tableau I.2. Récapitulatif des caractéristiques du chiffrement symétrique et asymétrique

I.6.4 La Cryptanalyse

C'est une discipline scientifique qui consiste à étudier les méthodes et techniques permettant de déchiffrer des informations chiffrées sans posséder la clé de chiffrement. Elle s'intéresse à l'analyse des systèmes cryptographiques pour identifier les faiblesses, les vulnérabilités ou les erreurs de conception. Elle peut être définie comme l'ensemble des techniques mathématiques, statistiques et algorithmiques utilisées pour attaquer des systèmes cryptographiques dans le but d'exploiter les failles potentielles dans les algorithmes de chiffrement.

Une cryptanalyse réussie peut permettre de récupérer le texte en claire ou la clé. Elle peut également détecter des faiblesses dans un système cryptographique qui conduisent finalement

aux résultats précédents. (La perte d'une clé par des moyens non cryptanalytiques est appelée compromission) [11].

La cryptanalyse utilise différentes méthodes, parmi lesquelles on peut citer :

- **L'analyse fréquentielle** : utilisée pour attaquer les chiffrements par substitution en exploitant la fréquence d'apparition des lettres ou des motifs dans un texte.
- **Les attaques par force brute** : qui consistent à essayer toutes les clés possibles jusqu'à trouver la bonne.
- **Les attaques par texte clair connu ou choisi** : où l'attaquant dispose de paires de textes clairs et chiffrés pour déduire la clé.
- **Les attaques différentielles et linéaires** : utilisée contre les chiffrements par blocs, comme DES, pour réduire la complexité de la recherche de la clé.

I.6.5 La cryptographie chaotique (Chiffrement par chaos)

C'est un domaine émergent de la cryptographie qui utilise les propriétés des systèmes dynamiques chaotiques pour concevoir des algorithmes de chiffrement. En raison de leur sensibilité aux conditions initiales et de leur comportement pseudo-aléatoire, les systèmes chaotiques sont particulièrement adaptés pour générer des clés complexes et sécuriser des communications.

En se basant sur ces propriétés, plusieurs méthodes sont disponibles, qui consistent à générer un signal chaotique pour ensuite le combiner avec le message à chiffrer, le signal résultant est ensuite envoyé au destinataire qui peut enfin récupérer le message original, parmi ces techniques on cite les suivantes :

I.6.5.1 Chiffrement par addition

Cette technique est liée aux travaux de (Wu an Chua, 1993) initialement effectués pour les systèmes à temps continu, elle consiste à ajouter le signal d'information à un signal chaotique généré par un système dynamique. Le récepteur, disposant d'un générateur chaotique synchronisé avec celui de l'émetteur, peut soustraire le signal chaotique reçu pour récupérer l'information originale [12].

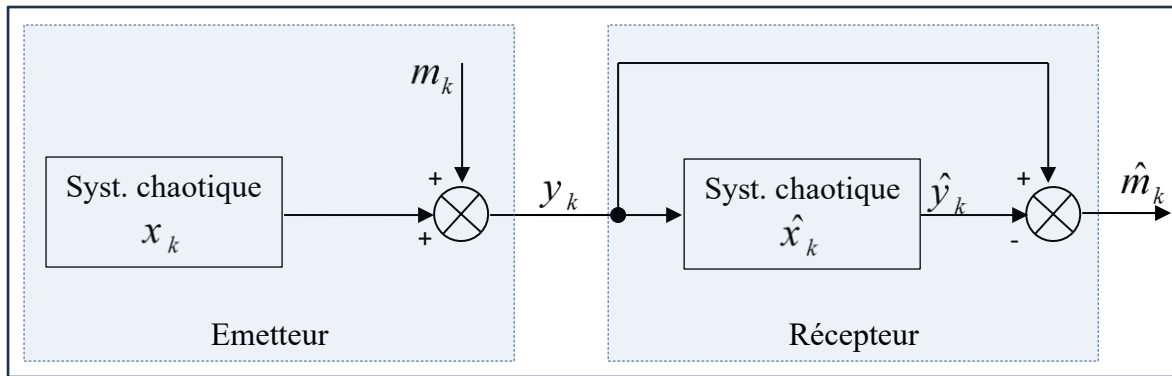


Figure I.7. Schéma bloc du principe de chiffrement chaotique par addition

L'information est alors récupérée en soustrayant la sortie du récepteur avec celle de l'émetteur :

$$\hat{m}_k = y_k - \hat{y}_k \quad (\text{I.10})$$

Cette technique est appréciée pour sa simplicité de mise en œuvre, cependant elle présente des défis, notamment la nécessité d'une synchronisation précise entre l'émetteur et le récepteur pour assurer une récupération fidèle de l'information.

1.6.5.2 Le chiffrement par commutation (chaos shift keying (csk))

Dans cette méthode, l'information binaire est encodée en commutant entre deux signaux chaotiques distincts : un signal chaotique spécifique représente le bit « 0 », tandis qu'un autre signal chaotique représente le bit « 1 », ces signaux peuvent être générés par deux systèmes chaotiques différents ou par un même système chaotique avec des paramètres modifiés. En émission on alterne entre les deux signaux chaotiques selon la séquence du signal information (10110...), si c'est 1 le signal chaotique 1 qui passe et si c'est 0 le signal chaotique 2 qui passe. À la réception on dispose de deux systèmes chaotiques identiques à ceux de l'émetteur. Lorsqu'un de ces systèmes se synchronise avec le signal reçu, on peut déterminer s'il s'agit d'un « 1 » ou d'un « 0 ». Ainsi, il devient possible de reconstituer la séquence d'origine ainsi que le signal d'information.

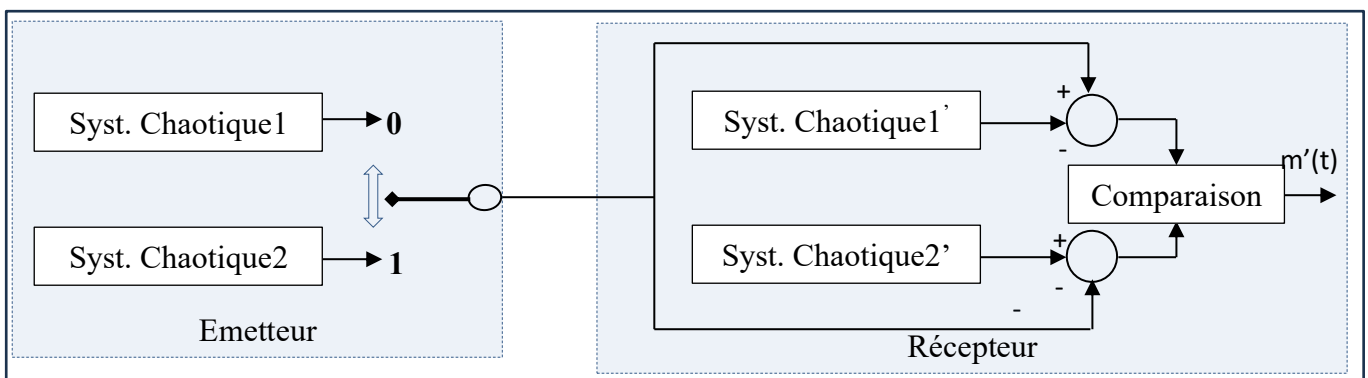


Figure I. 8. Schéma bloc du principe de chiffrement chaotique par commutation

I.6.5.3 Chiffrement par modulation

Dans cette méthode l'information à chiffrer va servir à modifier les paramètres ou les conditions initiales d'un système dynamique chaotique. Cette approche exploite les propriétés intrinsèques du chaos, comme la sensibilité aux conditions initiales et la complexité des trajectoires pour générer un chiffrement robuste. Un contrôleur adaptatif est chargé d'ajuster dynamiquement les paramètres du système récepteur pour minimiser l'erreur entre le signal reçu et le signal chaotique généré localement tout en maintenant la synchronisation et suivre les variations du paramètre modulé.

Au niveau de l'émetteur, la modulation des paramètres entraîne une évolution constante de la trajectoire, faisant ainsi du signal transmis un signal plus complexe que celui d'un signal chaotique conventionnel, il est crucial que la manière dont le message est incorporé, via la fonction de modulation des paramètres, conserve la nature chaotique du signal transmis.

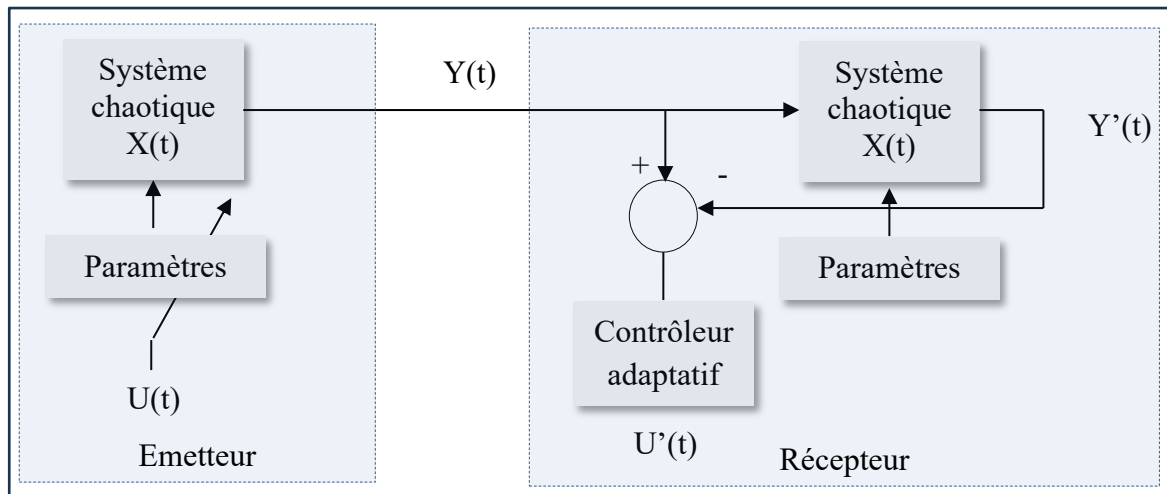


Figure I.9. Schéma bloc du principe de chiffrement chaotique par modulation

I.7 Synchronisation des systèmes chaotiques

Le terme synchronisation désigne le processus par lequel deux ou plusieurs systèmes, évènement ou processus sont alignés dans le temps ou dans leur comportement. Cela implique souvent une coordination pour assurer que les actions ou les états se produisent simultanément ou dans un ordre spécifique.

Il s'agit d'un concept multidimensionnel qui trouve des applications dans divers domaines. Dans chaque contexte, il implique l'idée d'alignement et de coordination, que ce soit dans le temps, le comportement ou l'exécution. En littérature, il peut enrichir la narration et la structure d'un texte, tandis que dans d'autres domaines, il est essentiel au fonctionnement harmonieux de systèmes complexes

Bien que conceptuellement, la synchronisation soit ancienne, elle a pris une nouvelle dimension avec l'avènement des systèmes dynamiques non linéaires et des systèmes chaotiques. Avant d'en arriver là, l'analyse du phénomène de synchronisation a connu ses origines par les premières observations de Christiaan Huygens en 1665, quand il remarqua que deux horloges, pendules suspendus à une même poutre finissaient par osciller en phase ou en opposition de phase [13]. Ensuite les travaux de Lord Rayleigh sur les vibrations acoustiques et mécaniques qui ont montré comment des oscillateurs faiblement couplés pouvaient se synchroniser. Ces observations ont jeté les bases de la théorie des oscillateurs couplés. De 1920 à 1940 les travaux de Van der Pol et Andronov qui ont développé des modèles mathématiques pour décrire les oscillateurs non linéaires, ces travaux ont permis de mieux comprendre les interactions entre oscillateurs couplés [14]. Ensuite de 1950-1960, Winfree a introduit le concept de synchronisation dans les systèmes biologique notamment dans les battements cardiaques où il a montré que la synchronisation n'était pas limitée aux systèmes physiques, mais s'étendait également aux systèmes vivants. Jusqu'à l'émergence des systèmes chaotiques et la découverte du chaos déterministe qui a révolutionné la compréhension des systèmes dynamiques où la synchronisation des systèmes chaotiques a connu une percée majeure, avec la participation de Louis Pecora et Thomas Carroll, en 1990, en publiant un article fondateur dans *Physical Review Letters* [15], où ils ont démontré pour la première fois qu'il était possible de synchroniser deux systèmes chaotiques couplés. Ils ont introduit la méthode « maître-esclave » (l'esclave reproduit fidèlement l'état du maître) ce qui a ouvert la voie à de nombreuses applications pratiques. Après les recherches se sont intensifiées pour explorer des différents types de synchronisations notamment la synchronisation complète, la synchronisation en phase, la synchronisation généralisée et la synchronisation en retard, des concepts qui ont été formalisés dans des articles tels que ceux de Rosenblum, Pikovsky et Kurths (1996-1997)[16].

I.7.1 Synchronisation identique

La synchronisation identique, telle que proposé par Pecora et Carroll dans leur article fondateur « Synchronization in Chaotic Systems » (1990), repose sur une configuration dite « maître-esclave ». Dans cette configuration le maître évolue librement selon la dynamique chaotique, tandis que le système esclave reçoit une partie des informations du système et tente de reproduire fidèlement son comportement.

Comme détaillé dans la figure suivante, la méthode consiste à diviser le système initial en deux sous-systèmes, dont l'un S_s^2 choisi comme réplique candidate pour se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Selon Pecora et Carroll, pour que la synchronisation identique soit

possible, il est nécessaire que le sous-système S_s^2 choisi soit stable, ce qui se traduit par l'exigence que tous les exposants de Lyapunov soient négatifs. Cette condition assure la convergence asymptotique des trajectoires de deux systèmes vers un état synchronisé parfait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2'(t) - x_2(t)\| = 0 \quad (\text{I.11})$$

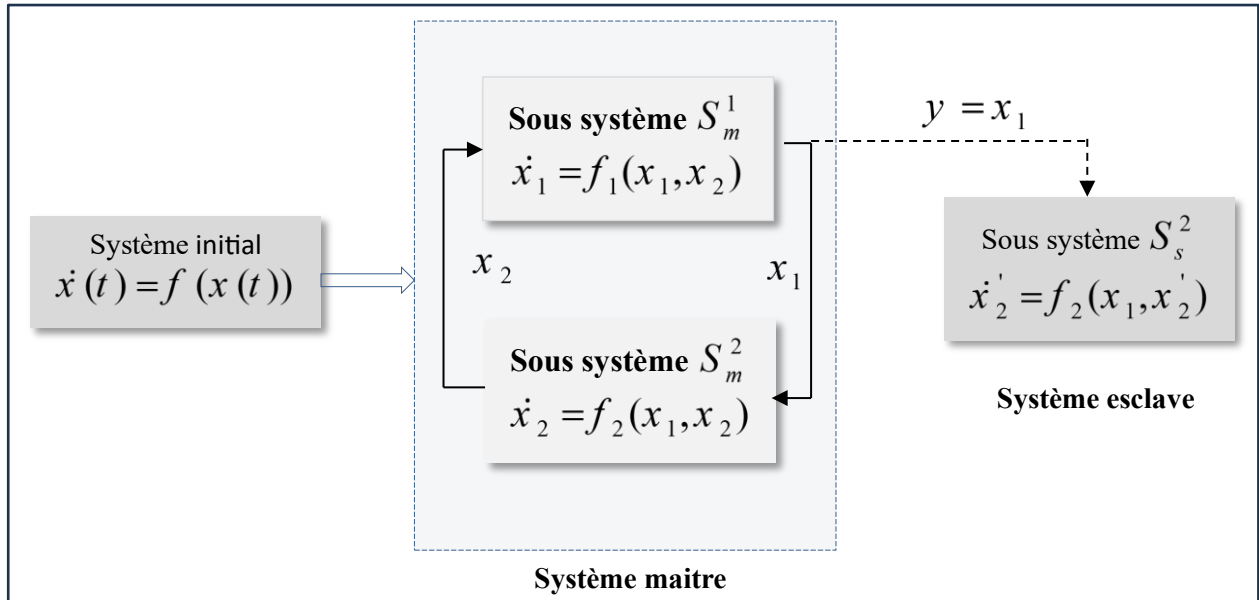


Figure I.10. Schéma bloc du principe de la synchronisation chaotique identique

I.7.2 La synchronisation en boucle fermée

La synchronisation en boucle fermée est une technique de contrôle qui permet à deux systèmes dynamiques non linéaires (un maître et un esclave) de synchroniser leurs états malgré leur comportement chaotique intrinsèque. Contrairement à la synchronisation en boucle ouverte (sans rétroaction), cette approche utilise un signal d'erreur (différence entre les états des deux systèmes) pour ajuster en temps réel les paramètres ou les entrées du système esclave via une loi de contrôle. Ce mécanisme de rétroaction garantit une synchronisation robuste, même en présence de perturbation externes ou de variations paramétriques.

I.7.3 Anti synchronisation

L'anti-synchronisation se produit lorsque deux systèmes dynamiques, souvent appelés maître et esclave, évoluent de telle sorte que la somme de leurs états tend vers zéro au fil du temps. Mathématiquement, si $x(t)$ représente l'état du système maître et $y(t)$ l'état du système esclave, l'anti-synchronisation est atteinte lorsque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) + y(t)\| = 0 \quad (\text{I.12})$$

Cela signifie que les trajectoires des deux systèmes sont symétriques par rapport à l'origine. L'anti-synchronisation est souvent obtenue en utilisant des techniques de couplage ou de contrôle, similaire à celles utilisées pour la synchronisation classique, mais avec des ajustements pour garantir que les états des systèmes soient opposés.

I.7.4 Synchronisation de phase

La synchronisation de phase est un type de synchronisation chaotique dans lequel seule la phase des oscillateurs chaotiques se synchronise, tandis que leurs amplitudes restent indépendantes et peuvent fluctuer de manières désordonnées. Ce phénomène est particulièrement pertinent pour des systèmes non linéaires et chaotiques où la synchronisation complète est difficile à atteindre.

Si l'on considère un système maître et un système esclave ayant des dynamiques chaotiques, leur phases respectives $\phi_m(t)$ et $\phi_s(t)$ doivent satisfaire la relation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_m(t) - \phi_s(t)| = C \quad (\text{I.13})$$

Où C , est une constante finie, ce qui signifie que l'écart de phase entre les deux systèmes reste borné, contrairement à la synchronisation complète, où les trajectoires doivent coïncider exactement, la synchronisation de phase permet aux amplitudes des signaux de rester désynchronisées.

I.7.5 Synchronisation par observateur

La synchronisation par observateur est une technique qui repose sur la conception d'un observateur (ou estimateur) qui est un système dynamique auxiliaire conçu pour estimer les états inconnus d'un système maître à partir de mesures partielles. Une fois les états estimés, le système esclave peut être synchronisé avec le système maître en utilisant ces estimations.

Dans un système par observateur, on considère deux systèmes, système maître dont les états peuvent être partiellement observés et un observateur (système esclave) conçu pour estimer les états inconnus du système maître en utilisant les sorties mesurées. L'objectif est de concevoir un observateur tel que l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge vers zéro, où $x(t)$ est l'état du système maître et $\hat{x}(t)$ est l'état estimé par l'observateur. Une fois l'observateur conçu, le système esclave peut être synchronisé avec le système maître en utilisant les états estimés.

I.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les systèmes dynamiques et chaotiques, en mettant en lumière leurs propriétés fondamentales et leurs applications pratiques. Les systèmes dynamiques, qu'ils soient continus ou discrets, autonomes ou non autonomes, sont des outils essentiels pour modéliser l'évolution temporelle des systèmes complexes dans divers domaines tels que la physique, la biologie, l'économie et l'ingénierie.

Le chaos, caractérisé par une sensibilité extrême aux conditions initiales et une non-linéarité, a été étudié à travers des concepts clés comme les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov et les diagrammes de bifurcation. Ces outils permettent de comprendre comment les systèmes déterministes peuvent engendrer des comportements apparemment aléatoires et imprévisibles.

Enfin, les applications des systèmes chaotiques, notamment dans la cryptographie et la synchronisation, ont été discutées, montrant leur utilité dans des domaines tels que la sécurité des communications et la modélisation de phénomènes complexes. La synchronisation des systèmes chaotiques qu'elle soit identique, en boucle fermée, de phase ou par observateur, ouvre des perspectives pour le contrôle et la coordination des systèmes non linéaires.

Ce chapitre a ainsi posé les bases théoriques et pratiques nécessaires à la compréhension et à l'exploitation des systèmes dynamiques et chaotiques, tout en soulignant leur importance dans l'étude des phénomènes naturels et technologiques.

Chapitre II

Oscillateurs chaotiques

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter le circuit de Chua ainsi que deux versions de l'oscillateur de Colpitts. Ces circuits constituent des exemples emblématiques des systèmes électroniques capables de générer un comportement chaotique. Nous commencerons par une description détaillée du circuit de Chua, en mettant en évidence ses composants, son fonctionnement et les conditions dans lesquelles il produit un comportement chaotique. Ensuite, nous aborderons les deux versions de l'oscillateur de Colpitts, en expliquant leurs caractéristiques respectives et leur potentiel en tant que générateurs de chaos.

II.2 Le circuit de Chua

Leon Chua, né en 1936 est un éminent ingénieur électricien et théoricien, souvent surnommé le « *père des circuits non linéaires* ». Ses travaux ont révolutionné la compréhension des systèmes dynamiques et du chaos. Parmi ses contributions majeures dans ce domaine, le circuit de Chua, un circuit électronique simple non linéaire qui présente un comportement chaotique. Introduit par Leon O. Chua en 1983, il est devenu un système de référence pour l'étude du chaos en électronique.

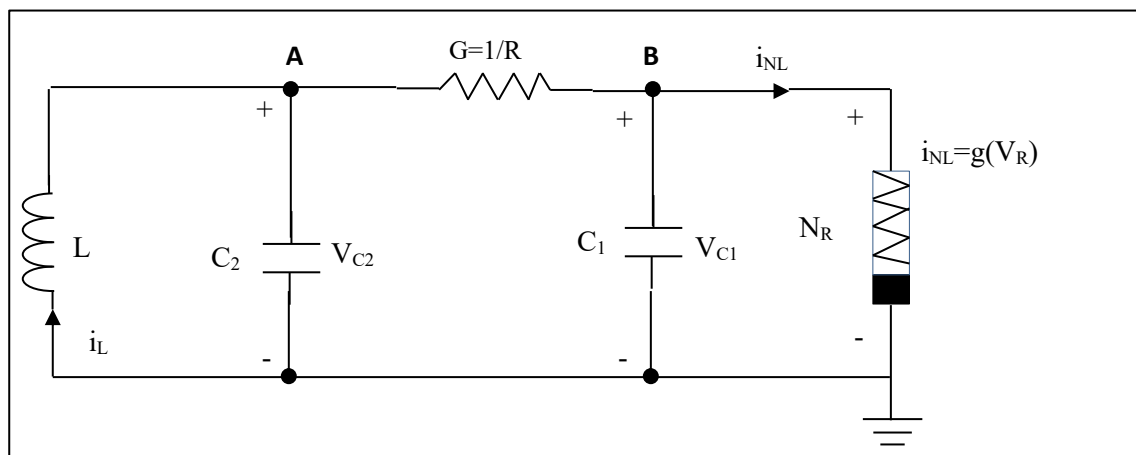


Figure II.1. Circuit de Chua

Circuit de Chua est composé de :

- 2 condensateurs (C_1, C_2).
- 1 inductance (L)
- 1 Résistance linéaire (R).
- 1 diode de Chua (élément non linéaire, cœur du système).

L'étude de ce circuit nécessite connaître son modèle mathématique qui est essentiel pour comprendre sa dynamique chaotique, et qui permet de décrire précisément les interactions entre les composants (Condensateurs, inductance, résistance et diode non linéaire), identifier les conditions qui mènent au chaos (ex : valeurs critiques de résistance R et des capacités C_1, C_2), et enfin analyser les bifurcations (les transitions entre régimes périodiques et chaotiques) utilisant des outils de simulation tel que MATLAB.

II.2.1 Modèle mathématique du circuit de Chua

Pour obtenir le modèle mathématique du circuit de Chua, nous allons appliquer les lois de Kirchhoff sur le circuit de la figure (II.1).

D'après la loi des nœuds :

$$\sum I_{\text{entrée}} = \sum I_{\text{sortie}} \quad (\text{II.1})$$

Où :

$$\begin{cases} i_L = i_{C_2} + i_R \rightarrow \text{nœud 'A'} \\ i_R = i_{C_1} + i_{NL} \rightarrow \text{nœud 'B'} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec i_L est le courant qui traverse l'inductance L , i_R est le courant qui traverse la résistance R , i_{NL} est le courant qui traverse la diode de Chua (composant non linéaire), i_{C_1}, i_{C_2} sont les courants qui traversent respectivement les condensateurs C_1 et C_2 .

$$\begin{cases} i_{C_1} = i_R - i_{NL} \\ i_{C_2} = -i_R + i_L \\ v_L = -v_{C_2} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Avec $i_R = \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{R} = G(v_{C_2} - v_{C_1})$, et v_{C_1}, v_{C_2}, v_L sont les tensions respectivement aux bornes de C_1, C_2 et L

Nous avons aussi la relation : $i = C \frac{dv_C}{dt}$ et $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ et $i_{NL} = I(V_{C_1})$

Où :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = G(v_{C2} - v_{C1}) - I(v_{C1}) \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = G(v_{C1} - v_{C2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -v_{C2} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Où $h(v_{C1})$ est la caractéristique non linéaire de la diode de Chua :

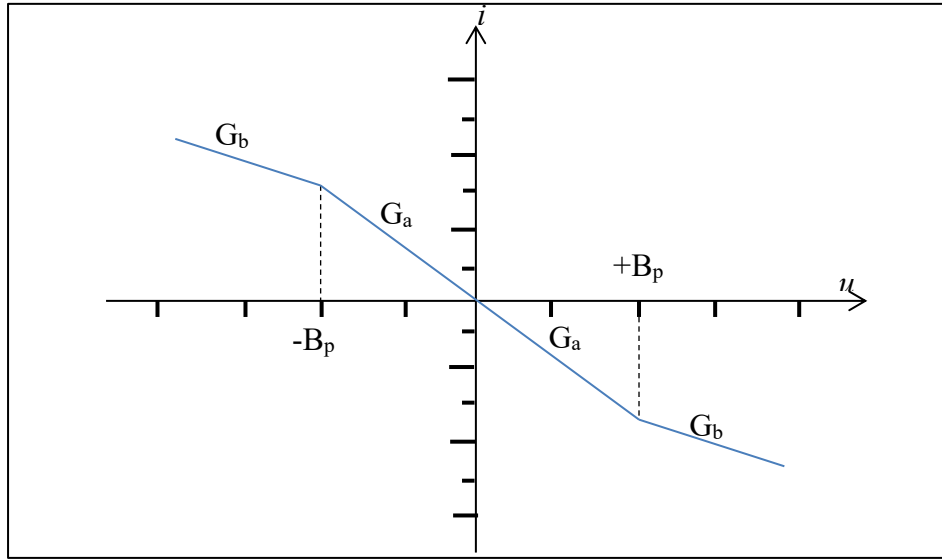


Figure II.2. Représentation graphique de la fonction non linéaire $i=h(v_{C1})$

Elle est donnée par la relation suivante :

$$I(v_{C1}) = G_b v_{C1} + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|v_{C1} + B_p| - |v_{C1} - B_p|) \quad (\text{II.5})$$

Avec G_a et G_b étant les pentes et B_p la tension de transition (tension seuil) et V_{C1} tension appliquée aux bornes de la diode Chua.

Nous procédons à la normalisation du système d'équations afin d'avoir des variables sans dimensions (en éliminant les unités 'volts, ampères, secondes'), et donc le système de Chua normalisé s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où $x = \frac{V_{C1}}{B_p}$, $y = \frac{V_{C2}}{B_p}$, et $z = \frac{I_L R}{B_p}$. La fonction non linéaire s'exprime comme suit :

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|).$$

Avec les coefficients : $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, $\beta = \frac{C_2 R^2}{L}$

II.2.2 Comportement chaotique du circuit de Chua

II.2.2.1 Réponses temporelles et attracteurs étranges

Les réponses temporelles et l'attracteur chaotique représentées dans les figures sont obtenues en fixant les paramètres α , β , a , et b respectivement à : 10, 100/7, -8/7, -5/7 avec les conditions initiales : $(x_1(0) ; x_2(0) ; x_3(0)) = (0 ; 0 ; 0.6)$

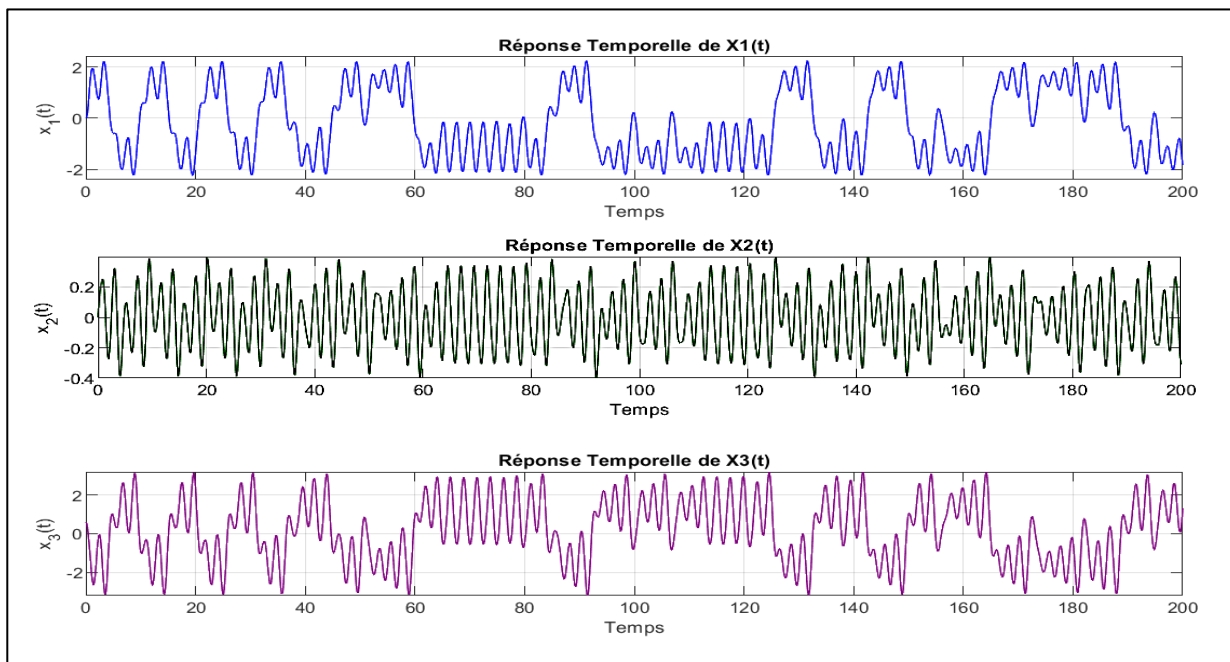


Figure II.3. Réponses temporelles chaotiques du modèle Chua

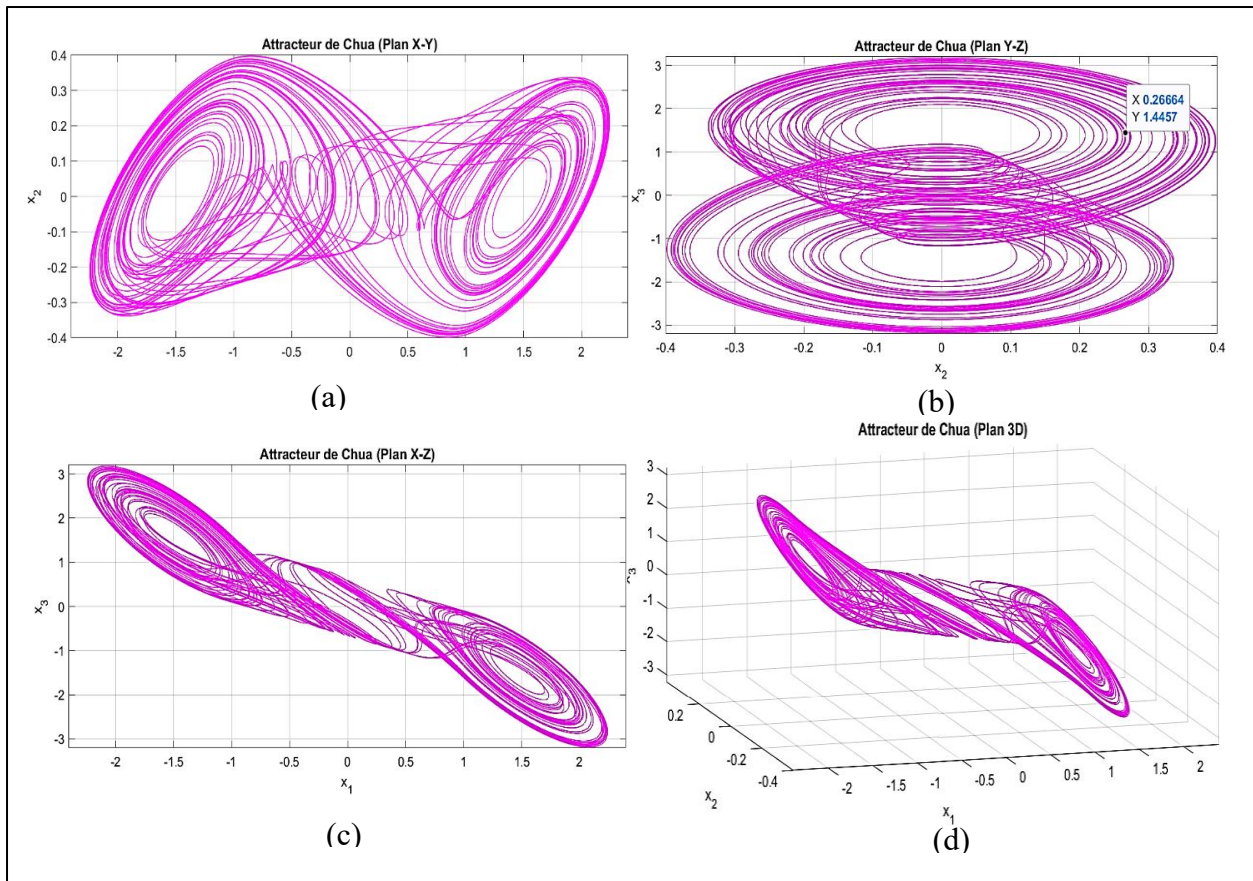


Figure II.4. Attracteur étrange du modèle Chua [(a):(x1-x2)] ; [(b):(x2-x3)] ; [(c):(x1-x3)] ; [(d):(x1-x2-x3)]

II.2.2.2 Diagramme de bifurcation

En fixant les paramètres β , a , et b respectivement à : $100/7$, $-8/7$, $-5/7$ et en variant le paramètre α de 8 à 10.5 nous avons pu tracer le diagramme de bifurcation de circuit Chua qui est illustré dans la figure (II.5).

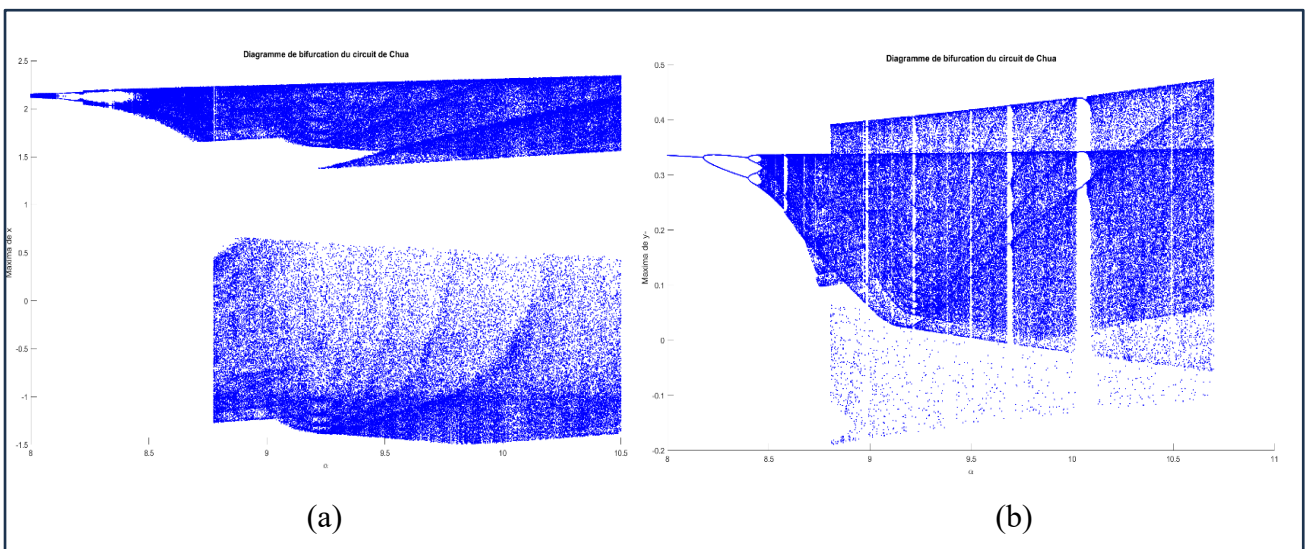


Figure II.5. Diagramme de bifurcation du Circuit Chua, (a): $\alpha - X$, (b): $\alpha - Y$

II.3 Oscillateur Colpitts

L'oscillateur Colpitts a été inventé en 1918 par l'ingénieur américain Edwin H. Colpitts. Il a été conçu pour répondre aux besoins croissants en télécommunications, notamment dans les émetteurs-récepteurs radio. Grâce à une stabilité fréquentielle supérieure, il a en partie remplacé les oscillateurs Hartley (à diviseur inductif) [17]. Initialement réalisé avec des tubes électroniques, il a évolué avec l'avènement des transistors dans les années 1950. Aujourd'hui encore, il est considéré comme un pilier des applications RF (radiofréquence), telles que les radars et la téléphonie mobile. Il est également largement utilisé dans les oscillateurs commandés en tension (VCO – Voltage-Controlled Oscillators).

Le circuit de l'oscillateur Colpitts que nous allons étudier, illustré à la figure II.6, a été utilisé comme générateur chaotique pour la première fois en 1994 par M. P. Kennedy [18].

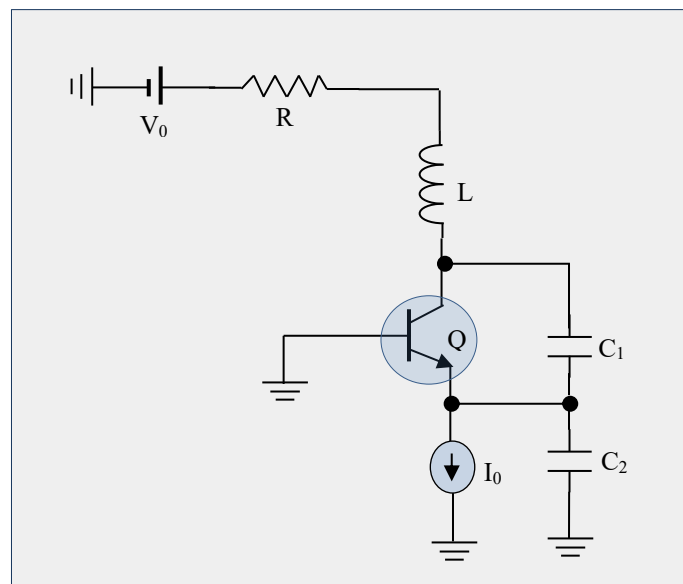


Figure II.6. Circuit de l'oscillateur chaotique de Colpitts

Cet oscillateur est constitué d'un transistor bipolaire Q monté en configuration base commune, jouant le rôle d'un amplificateur. Un circuit résonant composé de L, C₁ et C₂ est connecté entre le collecteur et l'émetteur du transistor. La source de courant I₀ permet de polariser le transistor. La fréquence fondamentale des oscillations chaotiques est déterminée par les valeurs de L, C₁ et C₂ [19], [20] :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} \quad (\text{II.7})$$

II.3.1 Le modèle mathématique de l'oscillateur Colpitts

Pour établir un modèle mathématique de notre oscillateur Colpitts, nous allons considérer que le transistor bipolaire Q est modélisé par une résistance non linéaire R_N et une source de courant linéaire contrôlée en courant, comme illustrée dans la figure (II.7). La jonction Base-Emetteur (B-E) est modélisé par la fonction exponentielle suivante :

$$I_E = I_S [\exp(V_{BE} / V_T) - 1] \quad (\text{II.8})$$

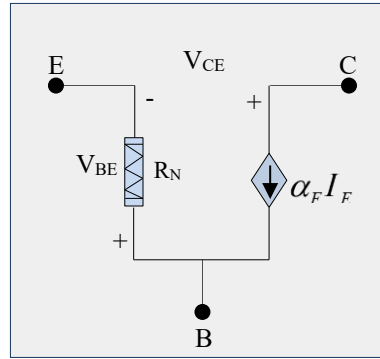


Figure II.7. Modèle de transistor bipolaire base commune

Où I_E est le courant de l'émetteur, I_S est le courant de saturation de la jonction B-E, V_{BE} la tension base-émetteur et V_T la tension thermique (≈ 26 mV à température ambiante $T=300$ K) [21].

1. Résistance dynamique ; au petit signal, la diode base-émetteur peut être linéarisée autour du point de polarisation, conduisant à une dynamique r_{be} proportionnelle à $1/I_E$.
2. Facteur de transfert α_F : en configuration base commune, le courant de collecteur est approximativement $\alpha_F I_E$ avec $\alpha_F \approx 1$ (mais toujours inférieur à 1). Cela reflète la relation entre le courant d'émetteur et le courant de collecteur.

Pour établir le système d'équations différentielles décrivant la dynamique de cet oscillateur, il convient d'appliquer les lois de Kirchhoff au circuit de l'oscillateur illustré à la figure II.6 :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = I_L - f(-V_{C2}) & (1) \\ C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = I_L - I_0 & (2) \\ L \frac{dI_L}{dt} = V_0 - RI_L - V_{C1} - V_{C2} & (3) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Le point d'équilibre du système $(V_{C1}^*, V_{C2}^*, I_L^*)$ s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} V_{C1}^* = V_0 - RI_0 + V_T \ln\left(\frac{I_0}{I_S}\right) \\ V_{C2}^* = -V_T \ln\left(\frac{I_0}{I_S}\right) \\ I_L^* = I_0 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Pour étudier la dynamique chaotique (bifurcations, attracteurs, etc.), on réécrit le système en variable sans dimension centrées autour de l'équilibre.

$$x_1 = \frac{V_{C1} - V_{C1}^*}{V_T}, \quad x_2 = \frac{V_{C2} - V_{C2}^*}{V_T}, \quad x_3 = \frac{I_L - I_0}{I_0}, \quad \tau = \omega_0 t \quad (\text{II.11})$$

$$V_{C1} = V_T x_1 + V_{C1}^*, \quad V_{C2} = V_T x_2 + V_{C2}^*, \quad I_L = I_0 x_3 + I_0 \quad (\text{II.12})$$

Et donc le système sans dimensions qui décrit les dynamiques de l'oscillateur Colpitts chaotique :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{g}{Q(1-k)} (x_3 + 1 - e^{-x_2}) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{g}{Qk} x_3 \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

$$\text{Avec : } k = \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad g = \frac{(R_1 + r_L) Q^2}{4V_T} I_0 \quad [21]$$

II.3.2 Simulation numérique

II.3.2.1 Réponses temporelles et attracteur étrange

La simulation numérique repose essentiellement sur la fonction ODE45 de Matlab, car c'est un outil puissant pour la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Elle est largement utilisée pour simuler des systèmes dynamiques, y compris des circuits électroniques non linéaires comme l'oscillateur de Colpitts chaotique, et donc tracer les différentes réponses temporelles et espaces des phases.

Pour observer le comportement chaotique du circuit de Colpitts, nous avons fixé les paramètres des systèmes comme suite : $k=0.5$, $Q=1.38$, et $g=4.46$ [21] avec des conditions initiales $X_1(t)=0$; $X_2(t)=0$; $X_3(t)=0.6$; pour obtenir les réponses temporelles et les espaces des phases chaotiques qui sont illustrés dans les figures (II.8) et (II.9).

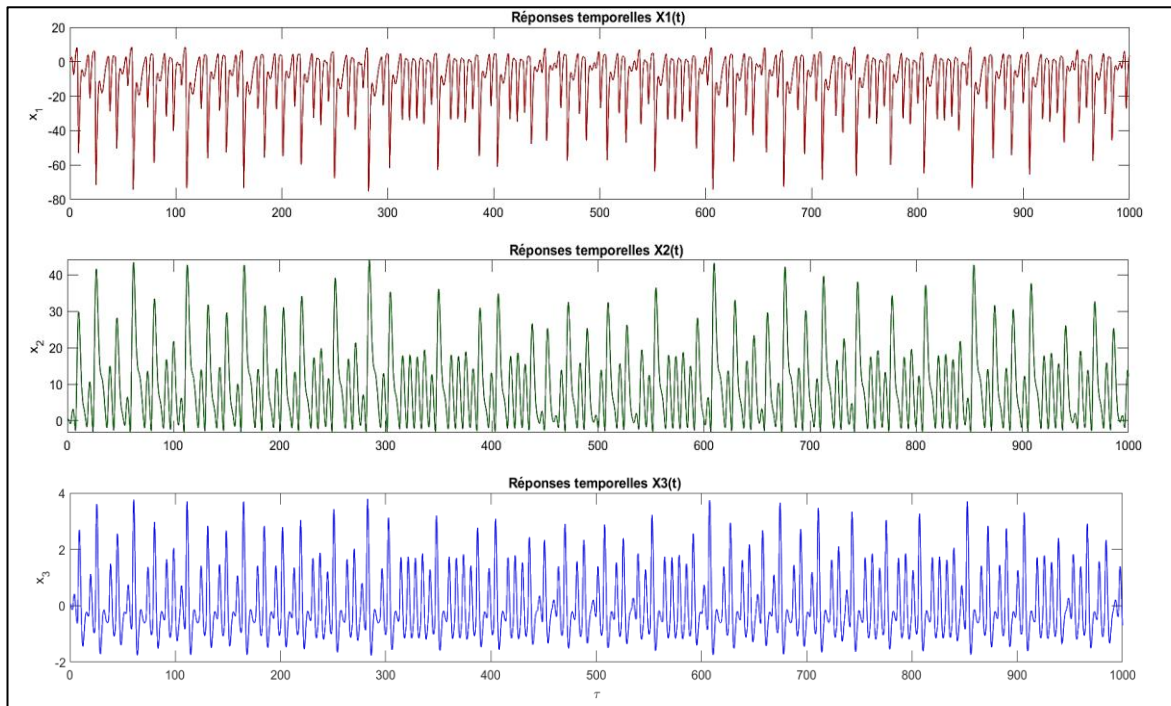


Figure II. 8. Réponses temporelles chaotiques de l'oscillateur Colpitts $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$

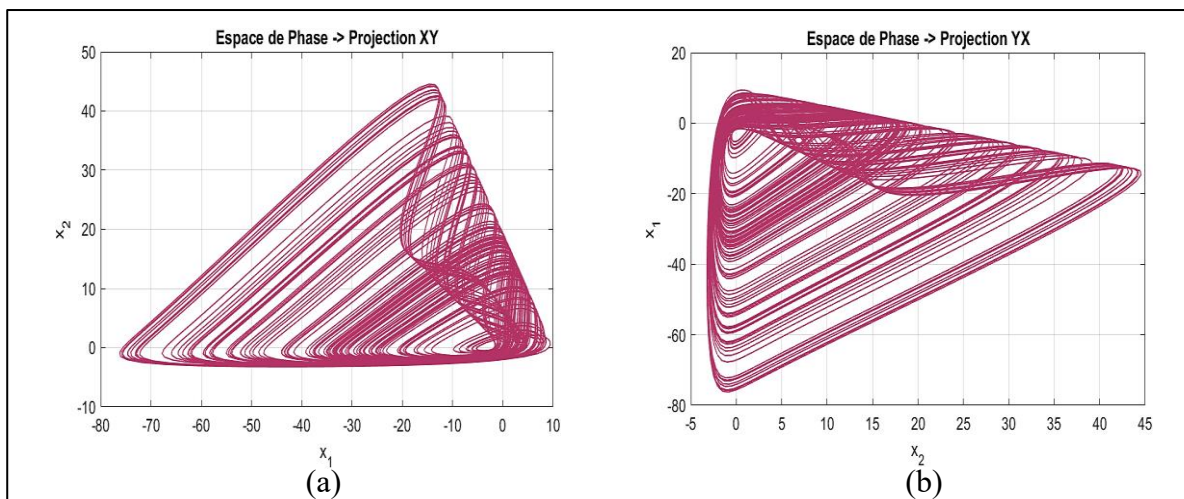


Figure II 9. Espaces des phases chaotiques de l'oscillateur Colpitts: (a)(x_1 - x_2);(b)(x_2 - x_1)

II.3.2.2 Diagramme de bifurcation

Afin d’observer le comportement chaotique de l’oscillateur Colpitts standard, nous avons procédé à tracer son diagramme de bifurcation en fixant les paramètres Q et k respectivement à 1.38 et 0.5 et varier le paramètre g de 0 à 10. Le diagramme de bifurcation obtenu est illustré dans la figure (II.10).

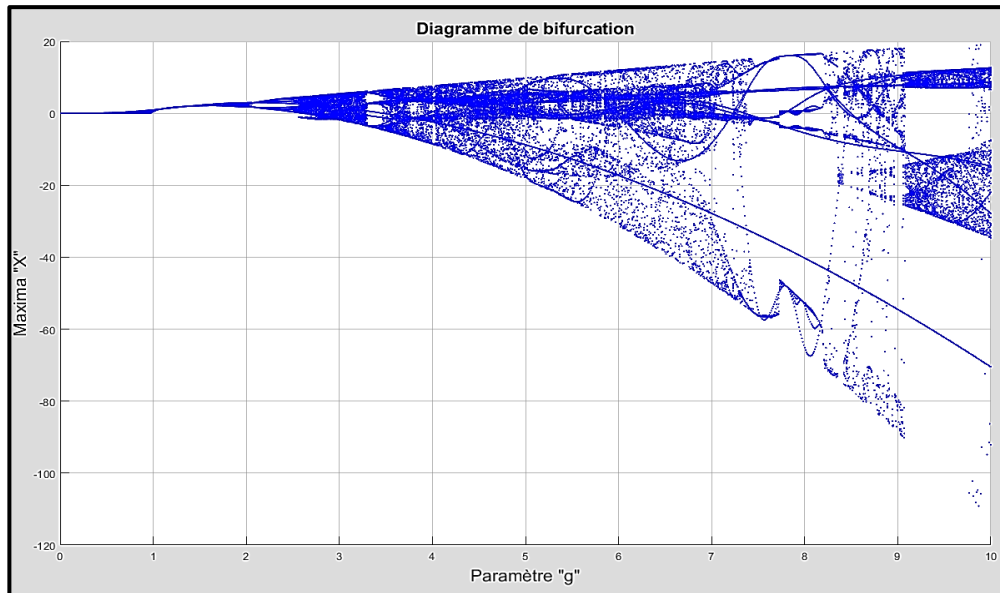


Figure II.10. Diagramme de bifurcation de l'oscillateur Colpitts Standard (g-x1)

II.3.2.3 Comportement de l'oscillateur Colpitts standard en fonction de « g »

En examinant le diagramme de bifurcation de la figure (II.10), on a tracé les espaces de phases (x_1, x_2) et ce en quelques valeurs du paramètre « g » pour mieux comprendre le comportement de notre oscillateur quand il passe de l'état périodique à l'état quasi périodique jusqu'à l'état chaotique (le chemin vers le chaos).

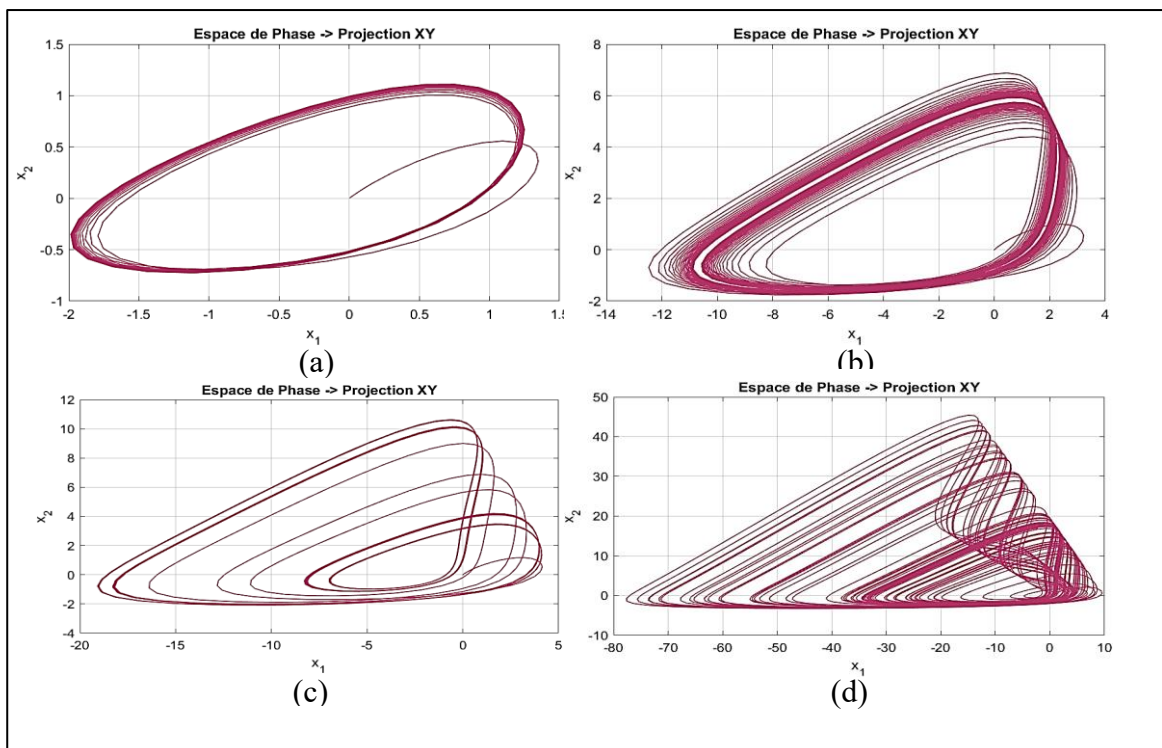


Figure II.11. Espaces des phases de l'oscillateur Colpitts en fonction de "g"
 [(a)(g=1.09) ;(b) (g=2) ;(c) (g=2.4) ;(d) (g=4.5)

II.3.3 Simulation électrique de l'oscillateur Colpitts Standard sous ADS

Dans cette partie nous allons comparer les résultats issus de la simulation numérique sous Matlab en utilisant le modèle mathématique de l'oscillateur Colpitts, avec celles de la simulation électrique. La simulation électrique est pratiquée sous le logiciel ADS (Advanced Design System) et ce en utilisant le circuit électrique présenté dans la figure avec les valeurs des composants mentionnées dans le tableau (II.1) [18].

Les composants	V_0	I_0	R_C	L	$C_1=C_2$
Les valeurs	8 V	14 mA	35 Ω	98.5 μ H	54 nF

Tableau II.1. Valeurs des composants utilisés (Colpitts standard)

Nous avons utilisé le transistor bipolaire 2N2222 qui a comme caractéristique une fréquence de transition $f_T=300$ MHz [22].

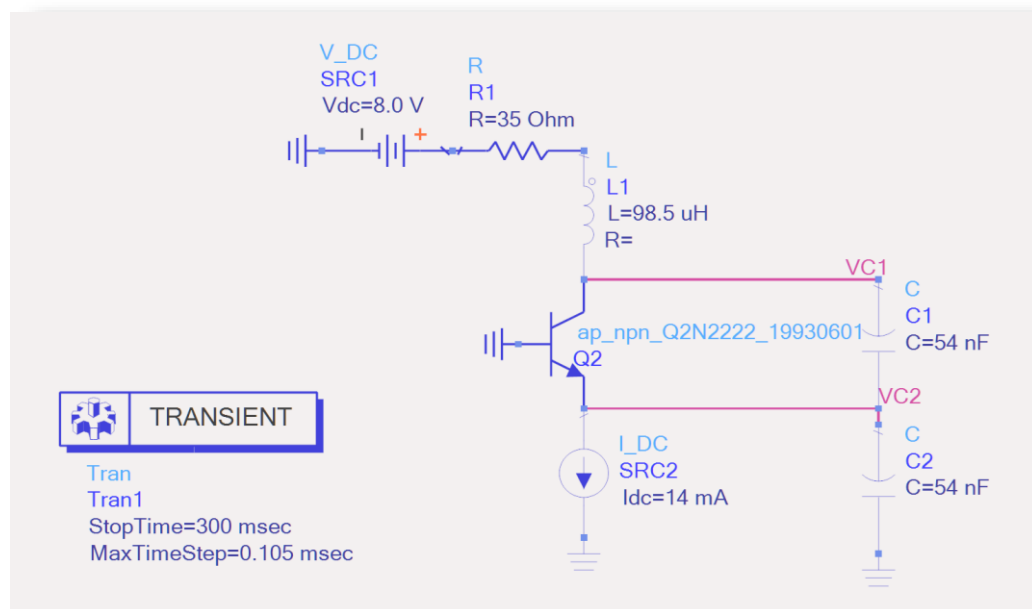


Figure II.12. Circuit Colpitts Standard Simulé sous ADS

Les espaces de phases ($V_{C1}-V_{C2}$) et ($V_{C2}-V_{C1}$) obtenus et illustrés dans la figure (II.13) confirment la concordance avec celles issus de la résolution numérique sous Matlab ce qui permet de confirmer la validité du modèle mathématique.

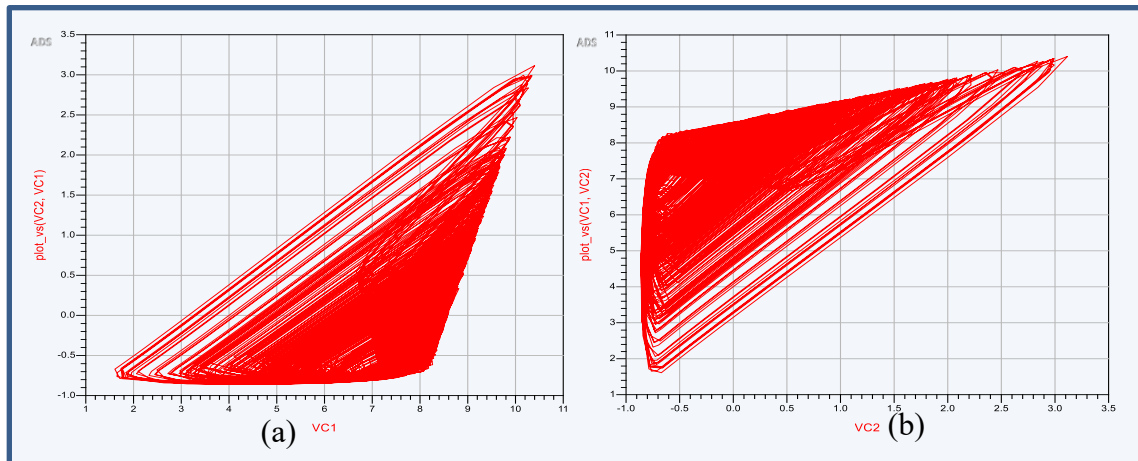


Figure II.13. Espaces de phases chaotiques de l'oscillateur Colpitts sous ADS (a) ($V_{C1}-V_{C2}$); (b) ($V_{C2}-V_{C1}$)

II.4 Oscillateur Colpitts amélioré

L'oscillateur Colpitts est un circuit classique utilisé pour générer des signaux dans une large gamme de fréquences. Cependant, dans la gamme des ultra-hautes fréquence (UHF), les caractéristiques par défaut de cet oscillateur peuvent être affectées par des éléments parasites, notamment la capacité de Miller C_3 , qui court-circuite virtuellement la base et le collecteur du transistor bipolaire. Pour résoudre ce problème, une version améliorée de l'oscillateur Colpitts a été proposée en 2004. Cette nouvelle conception vise à réduire les effets négatifs de C_3 afin de permettre la génération d'oscillations chaotique dans la gamme de 2 GHz à 4 GHz [23].

La version améliorée de l'oscillateur Colpitts diffère de la version standard par deux principales caractéristiques, l'ajout d'une inductance L placée en série avec la base du transistor bipolaire Q qui joue un rôle crucial dans la compensation de la capacité C_3 , et l'ajout de la résistance R_b en série avec l'inductance L qui permet de contrôler les pertes dans le circuit et améliorer la stabilité des oscillations [23].

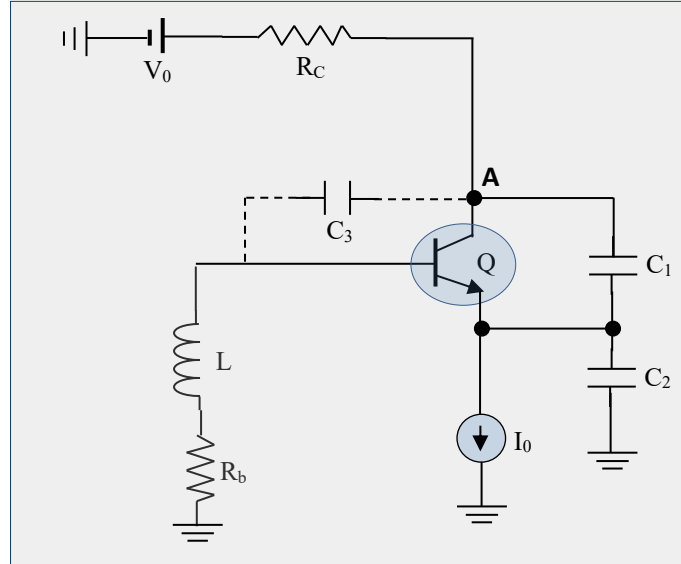


Figure II.14. Circuite de l'oscillateur Colpitts amélioré

II.4.1 Modèle mathématique

Pour analyser le comportement dynamique de cet oscillateur, il est essentiel de développer un modèle mathématique basé sur les variables d'état qui permettent de décrire l'évolution temporelle des grandeurs électriques clés du circuit sous forme d'équations différentielles. Ces variables d'état sont les grandeurs physiques qui caractérisent l'état du système à tout instant. Pour l'oscillateur Colpitts amélioré comme pour la version standard, les variables d'états typiques sont : V_{C1} , V_{C2} , V_{C3} et I_L sachant que V_{C1} , V_{C2} , V_{C3} sont respectivement les tensions aux bornes de C_1 , C_2 et C_3 et I_L est le courant qui traverse l'inductance L.

Le système des équations différentielles qui décrit les dynamiques de l'oscillateur Colpitts amélioré :

$$\begin{cases} R_C C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = V_0 - V_{C1} - V_{C2} + R_C I_L - R_C f(V_{BE}) \\ R_C C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = V_0 - V_{C1} - V_{C2} + R_C I_L - R_C I_0 \\ C_3 \frac{dV_{C3}}{dt} = I_L - (1 - \alpha) f(V_{BE}) \\ I_L \frac{dI_L}{dt} = -I_L R_b - V_{C1} - V_{C2} - V_{C3} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

A l'équilibre les variations des tensions et des courants sont nulles :

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{dV_{C3}}{dt} = \frac{dI_L}{dt} = 0 \quad (\text{II.15})$$

Ce qui donne le point d'équilibre comme suit :

$$\begin{cases} V_{c1}^* = V_0 + V_T \ln\left(1 + \frac{I_0}{I_S}\right) + [(1-\alpha)R_b - \alpha R_C]I_0 \\ V_{c2}^* = -(1-\alpha)R_b I_0 - V_T \ln\left(1 + \frac{I_0}{I_S}\right) \\ V_{c3}^* = -V_0 - [(1-\alpha)R_b - \alpha R_C]I_0 \\ I_L^* = (1-\alpha)I_0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

En utilisant ce résultat final de l'équilibre de ce modèle et en adoptant le changement de variables et paramètre suivant [24] :

$$\begin{aligned} x_i V_T &= V_{C_i} - V_{C_i}^* \quad \text{avec} \quad (i=1,2,3) \quad x_4 V_T = \rho(I_L - I_L^*) \\ t &= \tau \sqrt{LC_1}, \quad \rho = \sqrt{L/C_1}, \quad \varepsilon_1 = C_1/C_2, \quad \varepsilon_2 = C_1/C_3 \\ \sigma_1 &= \rho/R_C, \quad \sigma_2 = R_b/\rho, \quad \gamma = \rho I_0/V_T \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Les équations normalisées du circuit de Colpitts amélioré sont exprimées par l'ensemble suivant de quatre équations différentielles du premier ordre[24] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(-x_1 - x_2) + x_4 - \gamma\phi(x_1, x_3) \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1\sigma_1(-x_1 - x_2) + \varepsilon_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = \varepsilon_2(x_4 - (1-\alpha)\gamma\phi(x_1, x_3)) \\ \dot{x}_4 = -x_1 - x_2 - x_3 - \sigma_2 x_4 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Avec : } \phi(x_1, x_3) = \exp(x_1 + x_3) - 1 \quad (\text{II.19})$$

II.4.2 Simulation numérique de l'oscillateur Colpitts amélioré

Pour simuler un système chaotique comme le modèle de Colpitts amélioré dans MATLAB, la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) avec un pas fixe de 0.001 est généralement préférable pour les avantages qu'elle présente, notamment la précision des trajectoires chaotiques car les systèmes chaotique sont sensibles aux erreurs numériques et avec un pas fixe petit (comme 0.001) garantit une résolution fine des variation rapide, cruciales pour capturer les détails du chaos, d'autre part les solveurs adaptatifs comme ODE45 peuvent modifier le pas dynamiquement risquant de sauter des transitoires critiques ou d'introduire des biais dans les trajectoires, en plus le pas fixe assure une cohérence temporelle, essentielle pour les analyses de sensibilité aux conditions initiales.

Cependant, ODE-45, et avec une tolérance d'erreur serré, ex RelTol=1.e-6 et AbsTol=1.e-8, peut-être une alternative efficace, bien que moins recommandée pour des études approfondies du chaos.

II.4.2.1 Réponses temporelle et espaces des phases

Les valeurs des paramètres pour que le comportement de ce modèle soit chaotique sont : $\varepsilon_1 = 1.00$, $\varepsilon_2 = 20.00$, $\sigma_1 = 1.49$, $\sigma_2 = 0.872$, $\gamma = 86.00$, $\alpha = 255/256$, avec des conditions initiales : $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0.1, 0)$ [24].

Les réponses temporelles et les espaces des phases chaotiques obtenus après simulation en appliquant ces paramètres sont illustrés dans les figures respectives suivantes :

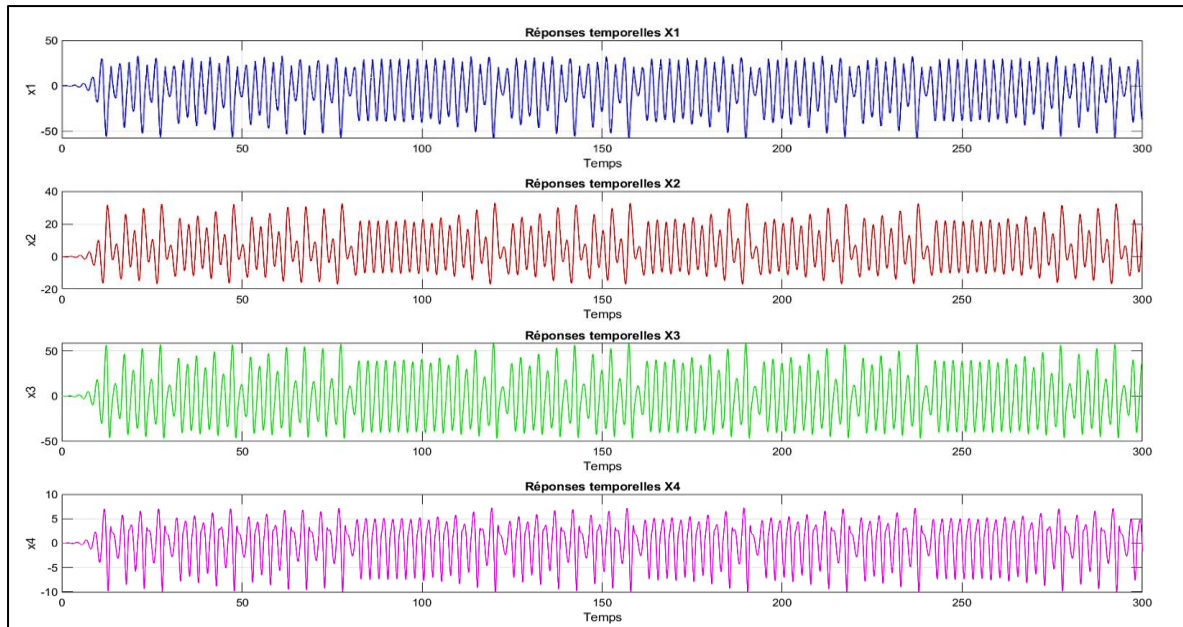


Figure II.15. Réponses temporelles chaotiques de l'oscillateur Colpitts amélioré $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$

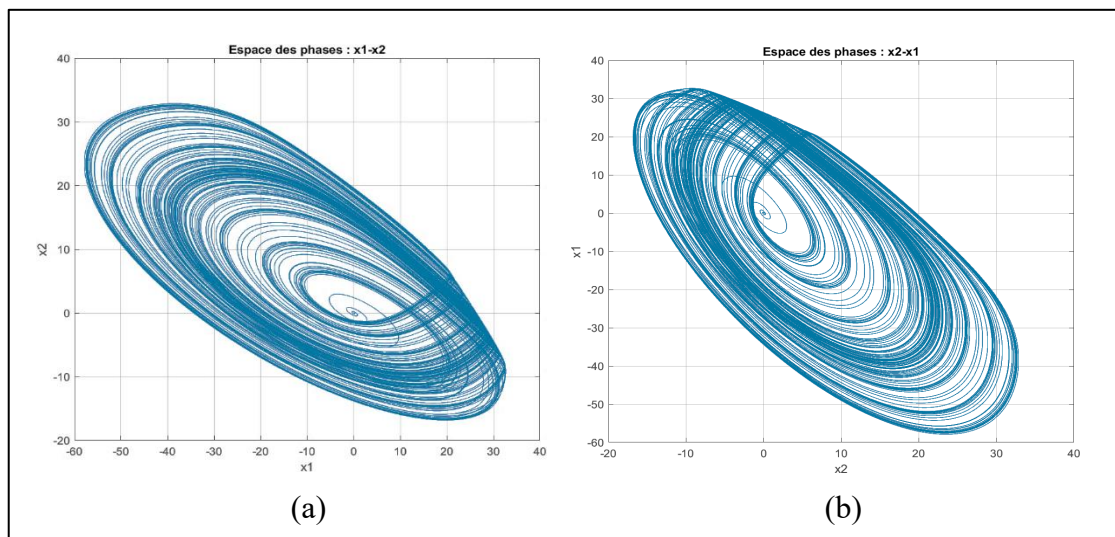


Figure II.16. Espaces des phases de l'oscillateur Colpitts amélioré ((a) (x_1-x_2));(b) (x_2-x_1))

II.4.2.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est obtenu en variant un paramètre du système pour observer le comportement du système, dans le cas présent nous allons résoudre le système en intervenant

sur le paramètre γ (lié directement à I_0 car $\gamma = \rho I_0 / V_T$), on va le faire varier de 0 à 100. Les valeurs des autres paramètres sont fixées comme suit :

$\varepsilon_1 = 1.00$, $\varepsilon_2 = 20.00$, $\sigma_1 = 1.49$, $\sigma_2 = 0.872$, $\alpha = 255 / 256$, avec des conditions initiales : $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0.1, 0)$

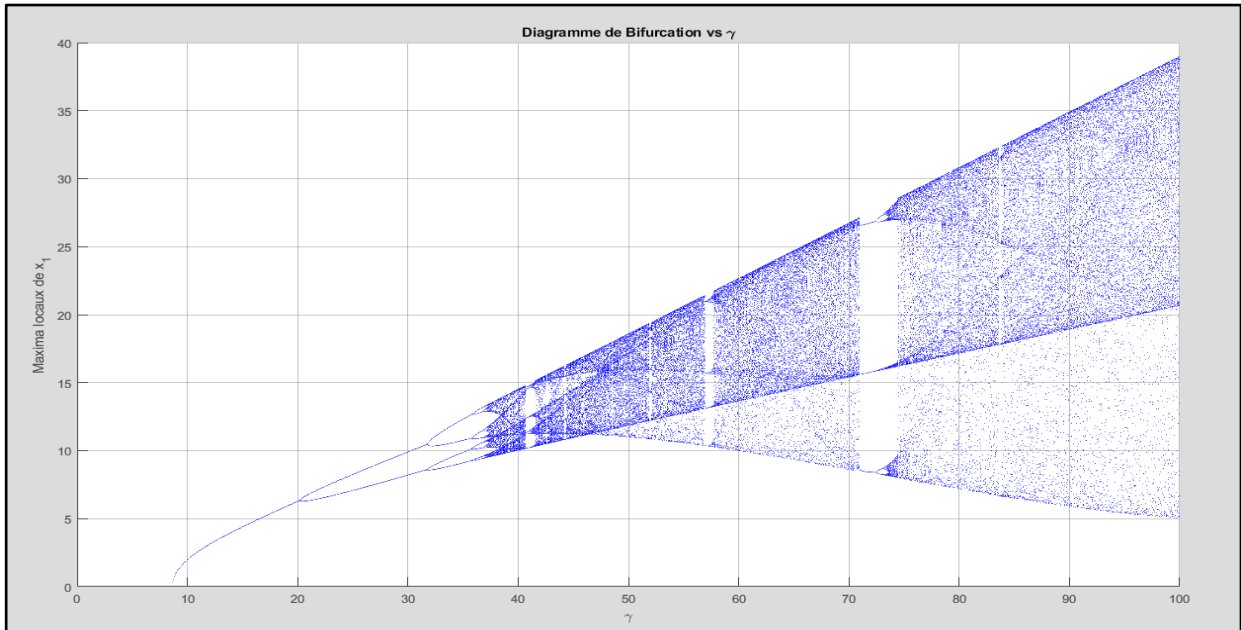


Figure II. 17. Diagramme de bifurcation de l'oscillateur Colpitts amélioré ($x_1 - \gamma$)

En analysant le diagramme de bifurcation de la Figure (II.17), nous constatons que le changement de la valeur de γ fait basculer ou passer le système par de différents comportements du comportement dynamique (périodique ou quasi périodique) pour des valeurs basses de γ (entre 10 et 36) à un autre comportement chaotique pour des valeurs de γ telles que (60-70) ou (>75).

Ce diagramme de bifurcation illustre clairement les transitions dynamiques de l'oscillateur Colpitts amélioré en fonction du paramètre γ . Il comporte les principales phases suivantes :

- Un régime stable initial pour $9 < \gamma < 20$.
- Une bifurcation initiale vers des oscillations multi stables pour $20 < \gamma < 36$.
- Une transition vers le chaos pour $\gamma > 40$.
- Une zone de repos et retour à la périodicité autour de $\gamma > 40$.

Ces observations fournissent des informations précieuses sur la robustesse et la stabilité du système, ainsi que sur les conditions nécessaires pour induire des comportements chaotiques ou périodiques.

En conclusion ce diagramme montre une transition progressive du système d'un état stable vers un comportement chaotique.

Pour comprendre encore mieux les différents comportements possibles de notre système, nous allons tracer l'espace des phases (x_2, x_1) pour les différentes valeurs de γ suivantes : $\gamma=15$, $\gamma=20$, $\gamma=38$, $\gamma=86$. Nous avons obtenu les résultats illustrés dans la figure (II.18).

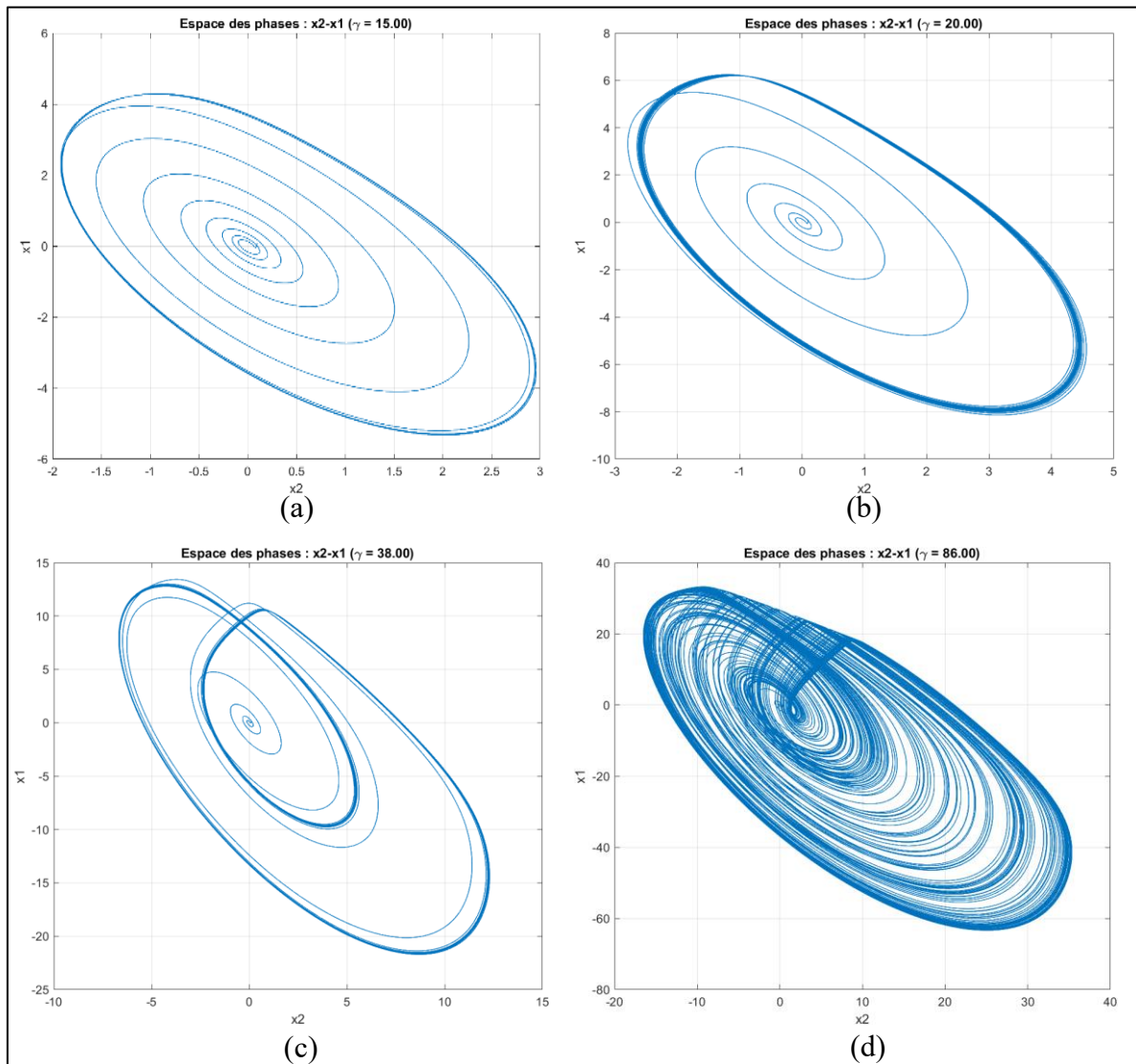


Figure II.18. Espaces de phases de l'oscillateur Colpitts amélioré ((a) $\gamma=15$);(b) $\gamma =20$); (c) $\gamma =38$);(d) $\gamma =86$)

Ainsi, l'augmentation de γ induit une succession de bifurcation, menant le système de la périodicité stable au chaos, via des étapes intermédiaires de complexification (doublement de période). Ces résultats illustrent la richesse dynamique de l'oscillateur Colpitts et son analogie avec les routes classiques vers le chaos observées dans les systèmes non linéaires.

Nous avons relevé d'autres espaces de phase illustrée dans la figure et ça c'est pour la valeur $\gamma=86$.

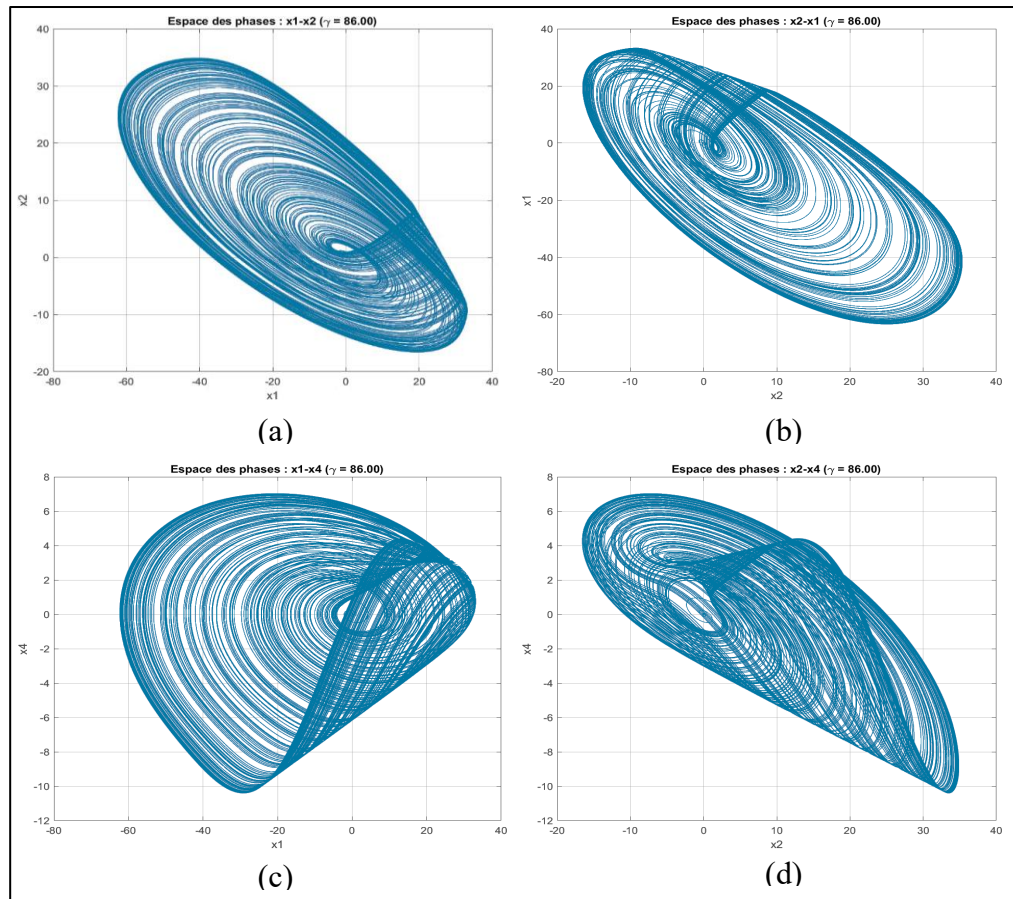


Figure II. 19: Espaces des phases de l'oscillateur Colpitts amélioré $\gamma=86$, ((a)(x_1-x_2)) ;((b)(x_2-x_1)) ; ((c)(x_1-x_4)) ;((d)(x_2-x_4))

II.4.3 Simulation électrique de l'oscillateur Colpitts amélioré (sous ADS)

Dans cette section, nous allons procéder à la simulation du circuit de l'oscillateur Colpitts amélioré en utilisant le logiciel ADS, afin de vérifier les résultats obtenus précédemment avec le simulateur Matlab. Pour cette simulation nous utilisons un transistor bipolaire de type BFG520, dont la fréquence de transition f_T est spécifiée à 9 GHz [25]. Le schéma du circuit de oscillateur simulé sous ADS est illustré dans la figure tandis que les valeurs des composants correspondants sont répertoriées dans le tableau II.2 [23].

Les composants	V_0	I_0	R_C	R_B	L	$C_1=C_2$
Les valeurs	8 V	15 mA	30 Ω	39 Ω	20 nH	10 Pf

Tableau II.2. Valeurs des composants utilisés (Colpitts amélioré)

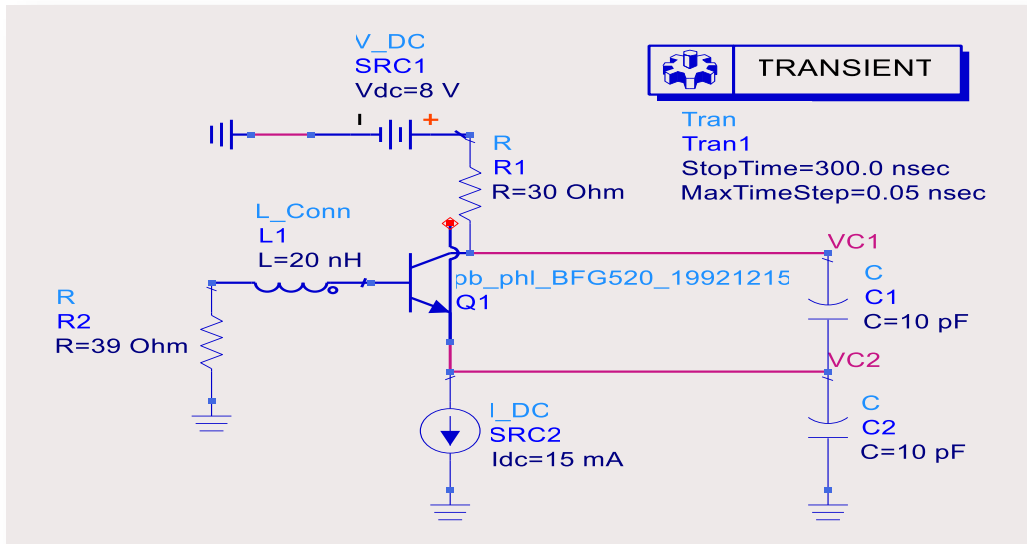


Figure II.20. Circuit de l'oscillateur Colpitts amélioré simulé sous ADS

Après l'exécution de la simulation sous ADS nous avons obtenu les espaces de phases de la figure (II.20), qui présentent une parfaite similitude avec ceux obtenus par la simulation sous Matlab, ce qui confirme la validité du modèle mathématique de l'oscillateur Colpitts amélioré.

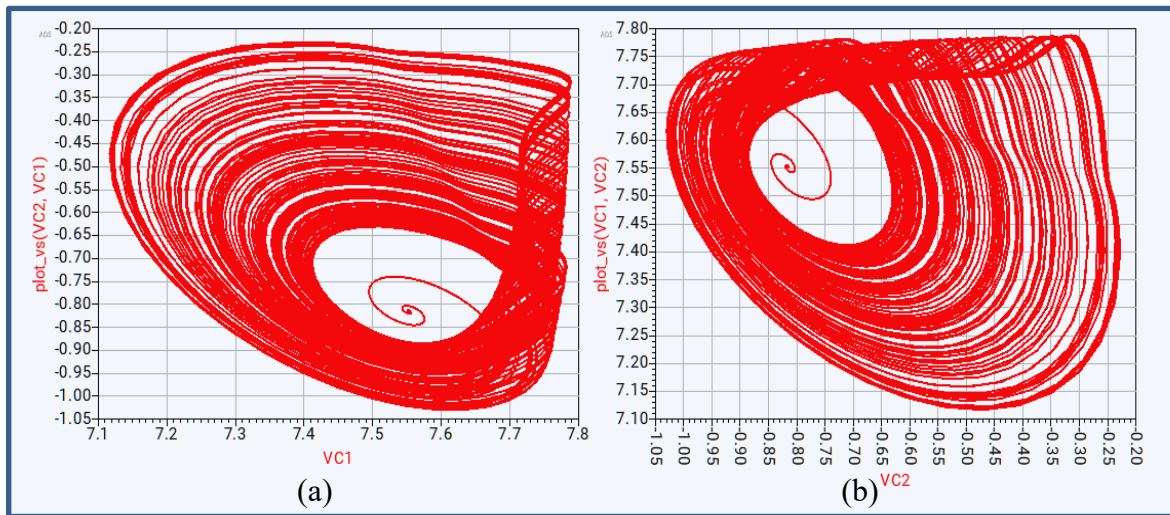


Figure II.221. Espaces des phases chaotiques de l'oscillateur Colpitts amélioré simulé sur ADS (a)(V_{C1} - V_{C2}) ; (b) (V_{C2} - V_{C1})

II.5 Comparaison entre la version standard et la version améliorée de Colpitts

Dans le cadre de l'analyse et la conception des circuits oscillateurs, les oscillateurs Colpitts sont largement utilisés en raison de leur simplicité et de leur efficacité dans la génération des signaux haute fréquence. La variante améliorée du circuit Colpitts a été développée pour répondre aux exigences croissantes en termes de précision, stabilité et performance.

Le but de ce travail est de comparer les performances des deux configurations Colpitts déjà vus, en fonction de plusieurs fréquences fondamentales, cette comparaison sera réalisée sous

l'environnement de simulation ADS (Advance Design System) un outil puissant utilisé pour modéliser et analyser des circuits RF et microonde. Les fréquences cible seront 0.5 GHz, 1 GHz, et 2 GHz afin de couvrir une plage représentative de fréquences couramment utilisées dans les applications modernes. Pour les deux configurations, cette fréquence est donnée par l'équation suivante [23] :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} \quad (\text{II.20})$$

Ainsi la fréquence fondamentale dépend directement de ces composants passifs. Et pour les deux configurations nous utiliserons le même transistor bipolaire BFG520 [26](rappelons qui a une fréquence de transition de 9GHz).

En fonction des fréquences fondamentales ciblées, les valeurs des composants des circuits sont mentionnées dans le tableau

Les composants	V_0	I_0	R_C	R_b	L	$C_1=C_2$
$f_0 = 0.5\text{GHz}$	8V	15 mA	30 Ω	39 Ω	20 nH	10 pF
$f_0 = 1\text{GHz}$	8V	15 mA	36 Ω	20 Ω	10 nH	4.3 pF
$f_0 = 2\text{GHz}$	8V	15 mA	36 Ω	4 Ω	3 nH	2.2 pF

Tableau II. 3 Valeurs des composants utilisés dans la comparaison entre les deux versions de Colpitts

Les différentes représentations des espaces de phases chaotiques ainsi que les réponses spectrales issues de la simulation des deux versions de circuits (standard et amélioré) sous ADS sont présentés dans les figures (II.22) et (II.23). Ces résultats concernant trois valeurs de la fréquence fondamentale : $f_{01}=0.5$ GHz, $f_{02}=1$ GHz et $f_{03}=2$ GHz.

L'analyse de ces figures révèle que la dynamique chaotique des deux oscillateurs est bien préservée lorsque la fréquence fondamentale reste inférieure à 1GHz. Dans cette plage, les attracteurs chaotiques conservent une structure complexe et les spectres présentent un contenu fréquentiel riche et continu typique d'un comportement chaotique.

En revanche, à partir de $f_0 > 1$ GHz, une altération significative est observée dans la version standard de l'oscillateur Colpitts. L'attracteur chaotique devient déformé, ce qui traduit une perte de la richesse dynamique. Cette dégradation est également visible dans le spectre de fréquence où seuls quelques pics isolés subsistent, indiquant une transition vers un comportement plus périodique ou quasi-périodique.

A l'inverse, la version améliorée de l'oscillateur maintient un comportement chaotique même à $f_0 = 2$ GHz. Les trajectoires dans l'espace de phase restent complexes et le spectre conserve une large bande, confirmant la persistance du chaos.

Ces observations suggèrent que les modifications apportées dans la version améliorée ont permis d'atténuer les limitations liées au fonctionnement en haute fréquence. Les ajustements effectués semblent compenser les effets parasites introduits par la capacité de Miller associée au condensateur C_3 , qui devient particulièrement perturbatrice à des fréquences élevées. Ce résultat met en évidence l'importance de l'optimisation du design pour préserver la dynamique chaotique dans les circuits RF, notamment en minimisant les rétroactions capacitives indésirables.

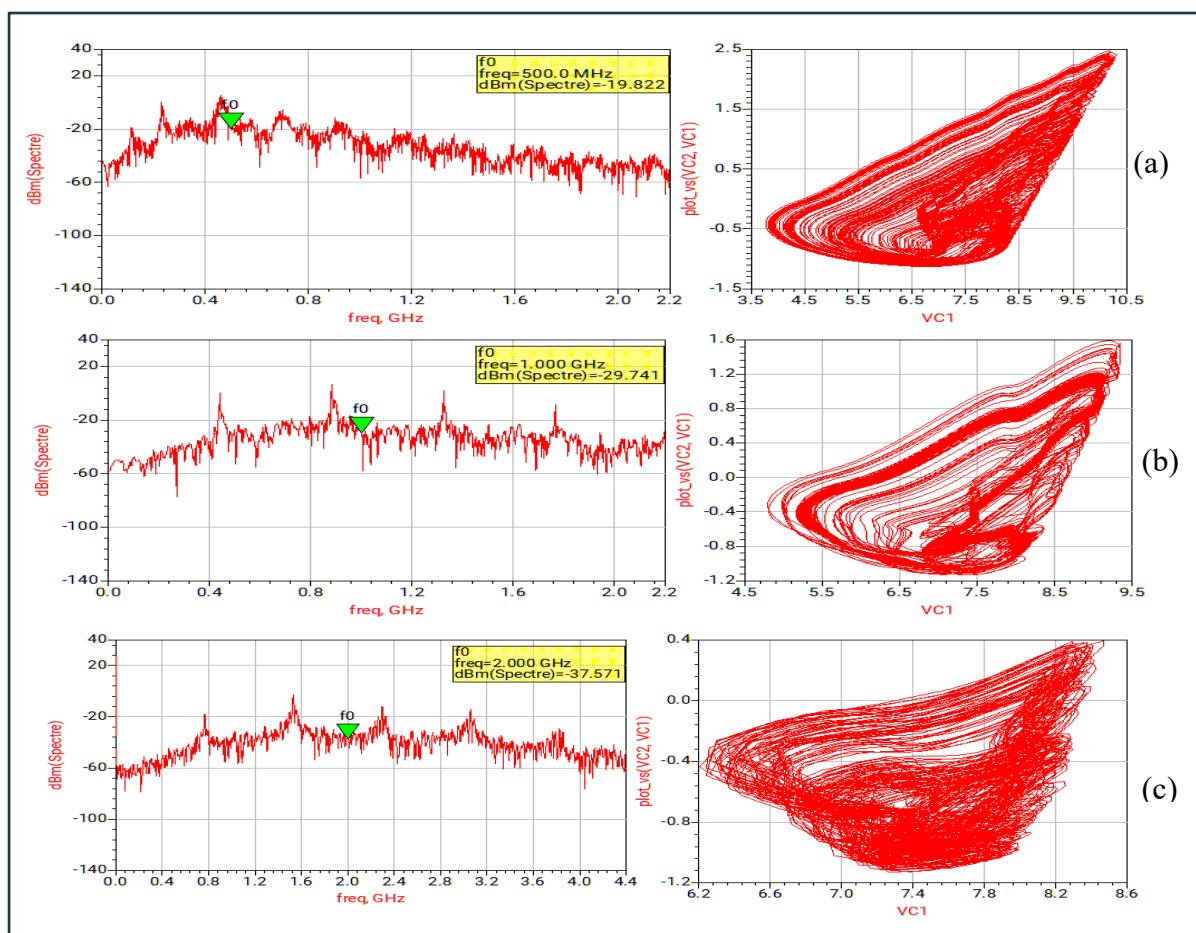


Figure II.232. Espaces des phases (à droite) et réponses spectrales (à gauche) de l'oscillateur Colpitts standard aux fréquences fondamentales : (a) $f_{01}=0.5$ GHz ;(b) $f_{02}=1$ GHz ;(c) $f_{03}=2$ GHz)

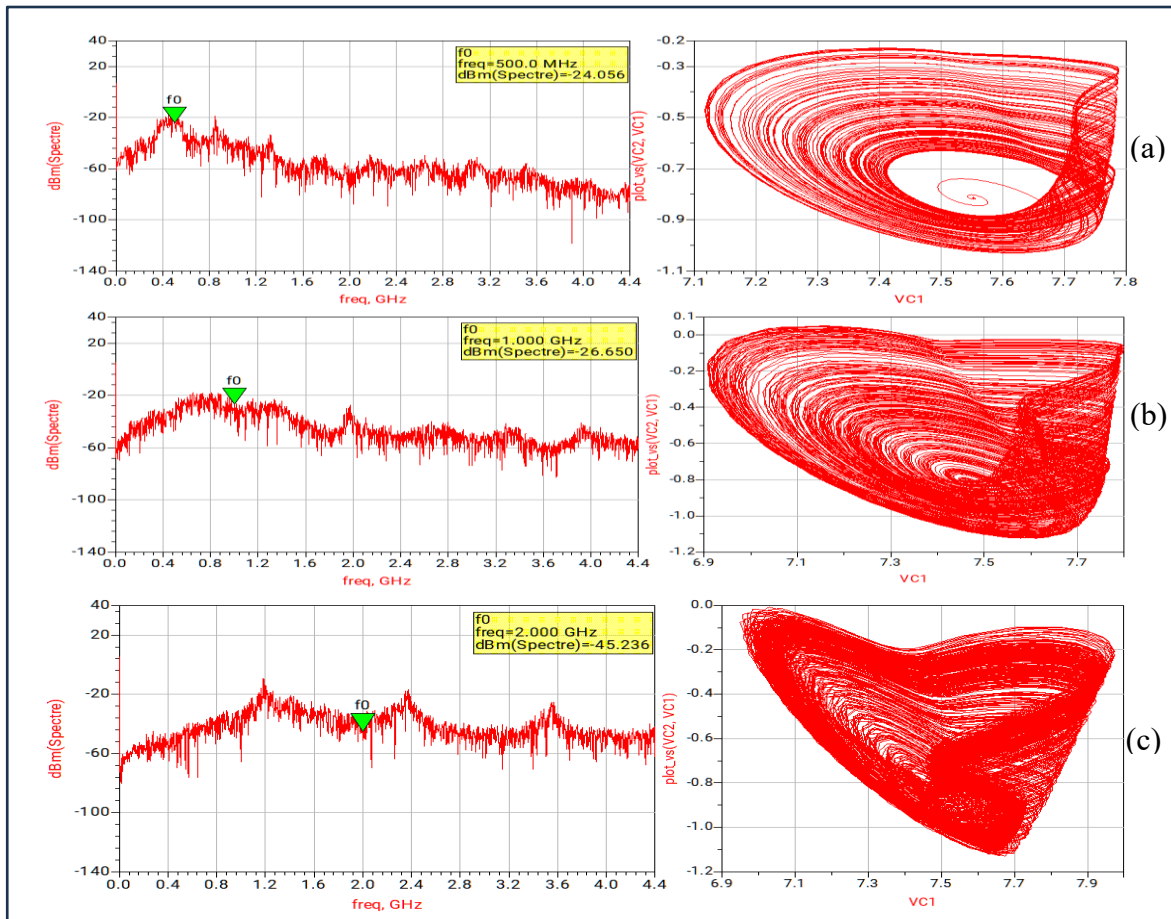


Figure II.243. Espaces des phases (à droite) et réponses spectrales (à gauche) de l'oscillateur Colpitts amélioré aux fréquences fondamentales : (a) ($f_{01}=0.5\text{GHz}$) ;(b) ($f_{02}=1\text{GHz}$) ;(c) ($f_{03}=2\text{GHz}$)

II.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter de manière approfondie les fondements théoriques et les modèles mathématiques des circuits chaotiques étudiés, notamment les oscillateurs Colpitts standard et amélioré. A travers les simulations numériques et électriques, nous avons mis en évidence leur comportement dynamique non linéaire, allant de la périodicité au chaos selon leurs valeurs des paramètres. L'analyse des attracteurs chaotiques et des diagrammes de bifurcation a confirmé la sensibilité de ces systèmes aux variations des conditions initiales et des paramètres de contrôle. La comparaison entre les deux versions de l'oscillateur Colpitts a également montré l'intérêt de la structure améliorée pour atteindre des fréquences plus élevées tout en maintenant une dynamique chaotique contrôlée. Ainsi, ces résultats mettent en lumière le potentiel de l'oscillateur Colpitts amélioré pour générer des comportements chaotiques stables et contrôlables. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment intégrer ce circuit dans un système de type VCCO afin de moduler et contrôler le chaos via une tension externe, ouvrant ainsi la voie à des applications telles que la génération de signaux sécurisés ou les communications chaotiques.

Chapitre III

Conception d'un VCCO à base de l'oscillateur Colpitts amélioré

III.1 Introduction

Les oscillateurs contrôlés en tension (VCO, *Voltage Controlled Oscillators*) sont des blocs clés dans les systèmes électroniques modernes, permettant de générer un signal périodique dont la fréquence est ajustée dynamiquement par une tension de commande. Ils jouent un rôle central dans les systèmes de communication, les synthétiseurs de fréquence ou les application radar. Toutefois leurs performances peuvent être limitées par des phénomènes de non linéarité, des instabilités dynamiques ou une sensibilité au bruit etc., pour dépasser ces limites, les VCCO (*Voltage Chaos Controlled Oscillators*) émergent comme une approche innovante, exploitant les propriétés des système chaotiques.

Ce chapitre explore la conception d'un VCCO basé sur une architecture Colpitts amélioré, initialement conçue pour sa simplicité et sa fiabilité, en introduisant des éléments non linéaires (comme la varicap à réponse hyperbolique), et nous étudierons deux structures qui seront capables de basculer entre régime périodique et chaotique selon la tension appliquée et aussi maîtriser le chaos pour élargir la plage de réglage spectral, des simulations illustreront comment ces deux architecture revisitées répondent aux défis des systèmes modernes.

III.2 Oscillateur commandé en tension

L'oscillateur commandé en tension est un circuit électronique capable de produire un signal oscillant (généralement sinusoïdal) dont la fréquence est contrôlée par une tension d'entrée, en effet, la variation de cette dernière permet de lui donner la capacité à adapter dynamiquement cette fréquence de sortie, ce qui le rend particulièrement sollicité par les systèmes nécessitant une grande flexibilité en matière de génération de signaux.

Le schéma bloc de l'oscillateur commandé en tension est représenté dans la figure , où V_e est la tension appliquée à l'entrée et V_s est le signal de sortie, et $f(V_e)$ est la fréquence du signal de sortie qui varie en fonction de la tension appliquée [27].

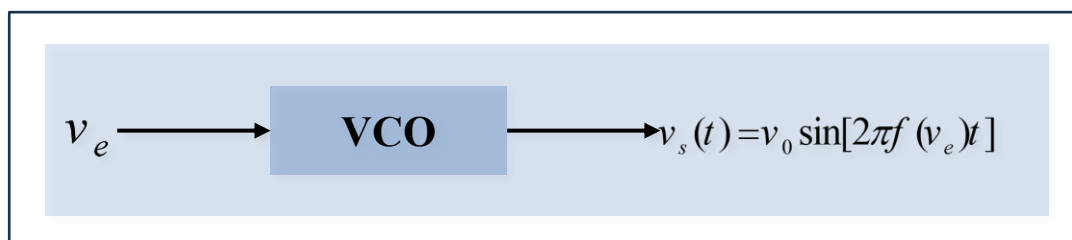


Figure III.1. Schéma bloc de l'oscillateur commandé en tension

Comme mentionné dans l'introduction, les VCO sont très utilisés dans les boucles à verrouillage de phase (PLL). Dans ce contexte le VCO est un élément crucial pour maintenir la synchronisation entre le signal de référence et le signal de sortie, en ajustant dynamiquement sa fréquence de sortie pour suivre celle du signal de référence.

En somme les oscillateurs commandés en tension représentent un pilier des technologies de communication modernes. Leur capacité à générer des signaux précis et ajustables en fréquence en fait des outils indispensables pour une large gamme d'applications, telles que la transmission des données numérique, la synchronisation des horloges et la démodulation des signaux modulés en fréquence.

Il existe plusieurs formes de VCO, chaque forme ayant sa propre caractéristique et applications spécifiques, voici les principaux d'entre eux :

- **Oscillateurs RC** : ils utilisent des résistances et condensateur pour déterminer la fréquence d'oscillation. Le principe repose sur des amplificateurs qui convertissent une tension de commande en un courant constant, chargé ou déchargé sur un condensateur, faisant varier la période de l'oscillation. Ces VCO sont couramment utilisés pour les fréquences basses. Ils sont simples et économiques, par contre ils peuvent présenter des limitations en termes de plage de fréquence et de stabilité.
- **Oscillateur LC avec diode varicap** : ces VCO reposent sur un circuit LC dont la capacité est contrôlée par une diode varicap (diode à capacité variable). La tension appliquée à la diode modifie sa capacité ce qui fait varier la fréquence de résonance du circuit LC. Ce type d'oscillateur est très utilisé pour des fréquences plus élevées, allant de quelques centaines de kHz jusqu'à plusieurs GHz. Il offre une meilleure stabilité par rapport aux oscillateurs RC.
- **Oscillateur à quartz (VCXO)** : ce type d'oscillateur utilise un cristal de quartz comme élément résonant, ce qui donne une excellente stabilité en fréquence. Le VXO est une variante où la fréquence peut être légèrement ajustée par une tension de commande, mais la plage de variation est limitée par rapport aux VCO LC ou RC. Ce type est privilégié pour des applications nécessitant une grande précision et stabilité.
- **Oscillateur à YIG (Yttrium Iron Garnet)** : utilisant un résonateur en grenat de fer d'yttrium, qui est un matériau ferrimagnétique, il génère des fréquences très élevées, souvent dans la gamme des micro-ondes obtenues en contrôlant le champ magnétique appliqué, ce qui modifie la fréquence de résonance du résonateur YIG. Utilisé dans

des applications spécialisées comme les radars et les communications par satellite en raison de leur large bande de fréquence et leur bonne stabilité, par contre ils sont coûteux et complexes à mettre en œuvre.

III.2.1 Caractéristique fréquence-tension d'un VCO

La relation fréquence-tension est l'une des caractéristiques fondamentales d'un voltage-controlled-Oscillator (VCO). Elle décrit comment la fréquence de sortie f_{out} varie en fonction de la tension de commande V_{ctrl} appliquée à l'entrée du VCO. Cette relation est généralement linéaire ou approximativement linéaire dans une plage spécifique de fonctionnement.

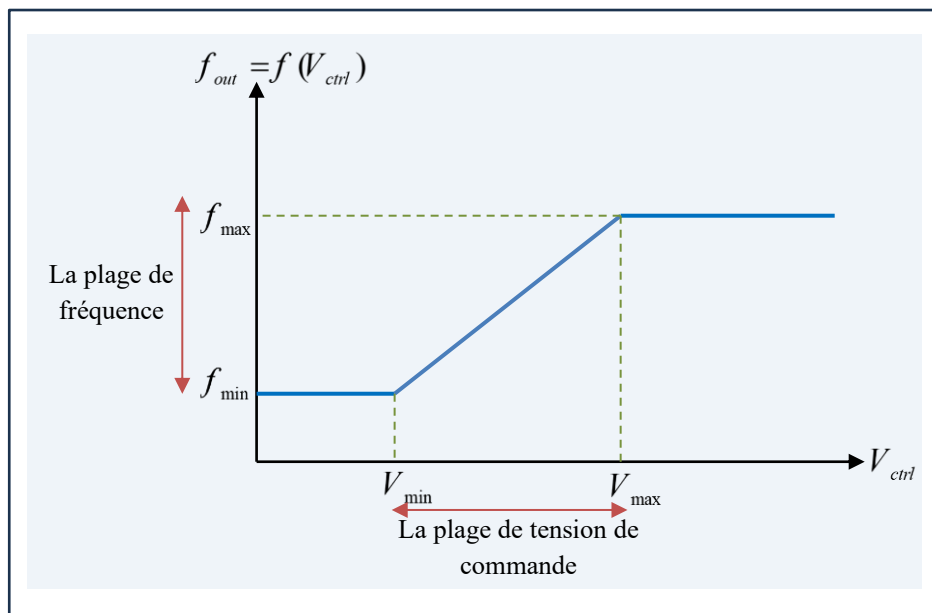


Figure III. 2. Caractéristiques fréquence-tension de VCO

La relation entre la fréquence de sortie f_{out} et la tension de commande V_{ctrl} peut être exprimé comme suit :

$$f_{out} = f_{min} + k_{VCO} V_{ctrl} \quad (III.1)$$

On peut citer les principales caractéristiques de la relation entre la fréquence et la tension de commande d'un VCO :

- 1- **La sensibilité k_{VCO}** : c'est un paramètre clé qui détermine la pente de la courbe (Fréquence/Tension). Une valeur élevée de k_{VCO} signifie que le VCO réagit fortement aux variations de tension, tandis qu'une faible valeur indique une réponse modérée.
- 2- **La linéarité** : dans une plage de fonctionnement idéale, la relation fréquence/tension est linéaire, cela signifie que la fréquence augmente proportionnellement avec la tension de

commande. En pratique des non-linéarités peuvent apparaître aux extrémités de la plage de fonctionnement entraînant une distorsion de la courbe.

- 3- **Plage de fréquence (Tuning Range)** : La plage de fréquence correspond à l'intervalle de fréquence que la VCO peut générer en fonction de la tension de commande. Elle est définie par :

$$\text{Plage de fréquence} = f_{\max} - f_{\min} \quad (\text{III.2})$$

- 4- **Fréquence de repos (Offset Frequency : f_{\min} ou f_0)** : c'est la fréquence minimale générée par la VCO lorsque la tension de commande est nulle ou à valeur minimale.
- 5- **La stabilité** : la stabilité de la relation fréquence/Tension est cruciale pour garantir que la fréquence reste constante pour une tension donnée, même en présence de variations de température ou vieillissement des composants.

III.2.2 Oscillateur chaotique commandé en tension

Un oscillateur chaotique commandé en tension ou VCCO de « Voltage-Controlled Chaotic Oscillator » est un circuit électronique non linéaire dont le comportement dynamique peut être chaotique. Ce type d'oscillateur génère des signaux non périodiques mais déterminés, très différents des signaux sinusoïdaux classiques de VCO linéaires.

Contrairement à un VCO traditionnel, qui génère une fréquence réglable de manière prévisible, un VCCO peut produire des trajectoires dans l'espace des phases très complexes.

Un VCCO est généralement basé sur un oscillateur chaotique classique (comme celui de Chua, Colpitts...) dont un ou plusieurs paramètres sont contrôlés par une tension externe. Cette tension contrôle par exemple :

- La non-linéarité (valeur d'un composant actif).
- Le gain.
- Ou la fréquence interne de l'oscillation.

Cette tension de commande agit donc comme un sélecteur de régime qui peut faire passer le système d'un comportement stable à périodique à un autre complètement chaotique, ou naviguer entre les différents types de chaos.

Dans cette partie nous allons voir des exemples de VCCO basés sur un oscillateur Colpitts. Souvent on utilise une diode varicap ou une résistance commandée en tension pour ajuster la fréquence. Le système peut alors générer :

- Un signal sinusoïdal stable (régime linéaire).

- Un signal périodique avec harmoniques (régime non linéaire).
- Un signal chaotique (saut d'amplitude, spectre étalé) selon V_{Ctrl} .

III.3 Première configuration de VCCO

La première configuration est basée essentiellement sur un oscillateur de Colpitts amélioré en lui ajoutant une diode à capacité variable (Varicap) D en parallèle avec le condensateur C_1 . La diode varicap D est polarisée de manière inverse par le biais d'une résistance R_L et une source de tension continue V_2 .

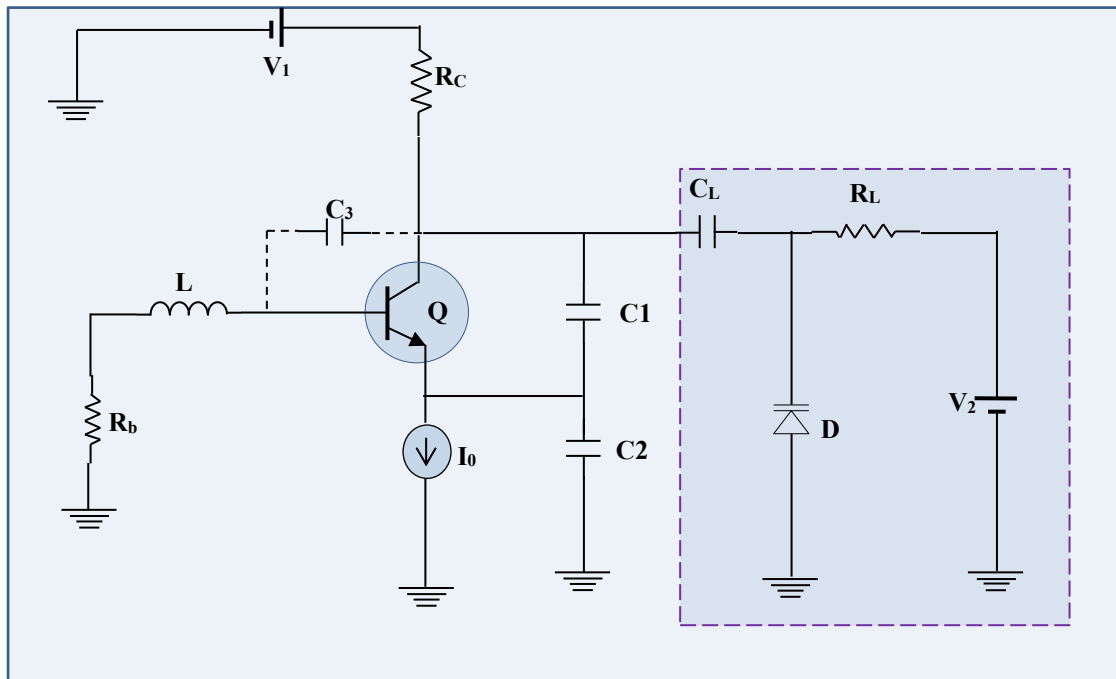


Figure III.3. Circuit de la première configuration du VCCO

Dans les équations la capacité C_1 sera remplacée par une capacité équivalente C_{eq} :

$$C_{eq} = C_1 + C_D \quad (\text{III.3})$$

Où C_D est la capacité de la diode D. Elle varie en fonction de la tension appliquée à ses bornes V_D . La variation de la capacité C_D est exprimé par l'équation suivante [28] :

$$C_D = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{V_D}{V_0}\right)^n} \quad (\text{III.4})$$

Avec C_0 la capacité sans tension de polarisation (appelée aussi capacité minimale), V_0 est la tension de seuil de la diode D (environ 0.7V) ; et n est un exposant qui dépend du profil de dopage de la couche intrinsèque de la diode, de nombreuses diodes ont un exposant de 0.47, bien que

cette valeur puisse atteindre 1.5 ou 2.0 pour certaines diodes. Dans ce cas la tension appliquée V_D est égal à V_2 [29].

Dans ce qui suit et pour toutes les configurations proposées à l'étude dans cette partie, nous allons utiliser la diode varicap BB857 qui a les caractéristiques suivantes [30] :

- $C_D = 9.3 \text{ pF}$ pour $V_D = 1 \text{ V}$;
- $C_D = 0.75 \text{ pF}$ pour $V_D = 28 \text{ V}$;
- $C_0 = 12.85 \text{ pF}$;
- $V_0 = 0.7 \text{ V}$;
- $n = 0.892$.

La figure (III.4) est une illustration du changement de la valeur de C_D en fonction de la tension V_D appliqué à ses bornes :

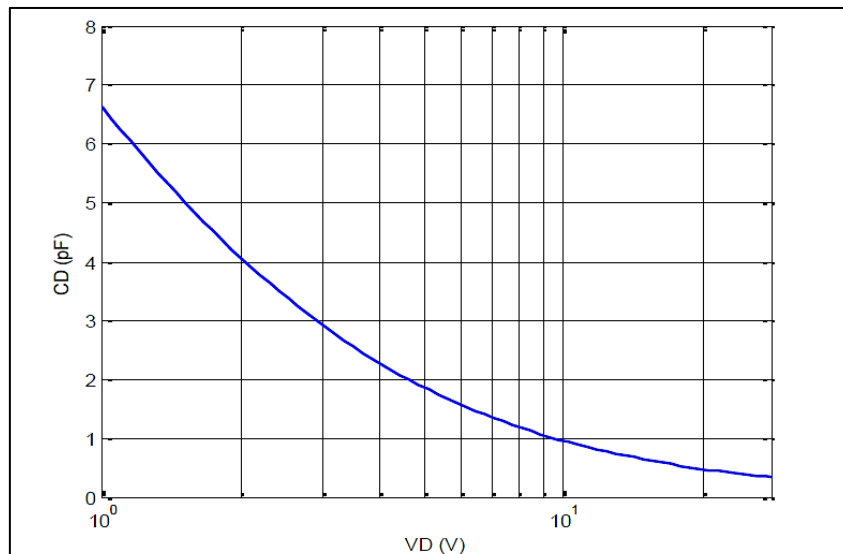


Figure III.4. Variation de la capacité C_D en fonction de la variation de la tension appliquée V_D

Ainsi la fréquence fondamentale de cette configuration du VCCO est donné par :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \frac{C_2(C_1 + C_D)}{C_2 + (C_1 + C_D)}}} \quad (\text{III.5})$$

En se basant sur le modèle mathématique de notre système, établi dans le chapitre précédent (équation (II.51)), on peut dire que cette première configuration du VCCO peut être décrite par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(-x_1 - x_2) + x_4 - \gamma\phi(x_1, x_3) \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1\sigma_1(-x_1 - x_2) + \varepsilon_1x_4 \\ \dot{x}_3 = \varepsilon_2(x_4 - (1-\alpha)\gamma\phi(x_1, x_3)) \\ \dot{x}_4 = -x_1 - x_2 - x_3 - \sigma_2x_4 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Avec : $\phi(x_1, x_3) = \exp(x_1 + x_3) - 1$

Et :

$$x_i V_T = V_{Ci} - V_{Ci}^* \quad \text{avec} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad x_4 V_T = \rho(I_L - I_L^*)$$

$$t = \tau \sqrt{LC_{eq}}, \quad \rho = \sqrt{L/C_{eq}}, \quad \varepsilon_1 = C_{eq}/C_2, \quad \varepsilon_2 = C_{eq}/C_3 \quad (\text{III.7})$$

$$\sigma_1 = \rho/R_C, \quad \sigma_2 = R_b/\rho, \quad \gamma = \rho I_0/V_T, \quad C_{eq} = C_1 + C_D$$

III.3.1 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation de cette première configuration VCCO (Figure) a été obtenu par la résolution du modèle mathématique de l'équation (III.6) sous Matlab, en utilisant la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps $\Delta\tau = 0.001$. Les valeurs des composants du circuit étudié sont : $C_1=C_2=4.3$ pF ; $R_c=36$ Ω ; $R_b=20$ Ω ; $L=10$ nH ; $V_0= 8$ V et $I_0= 15.5$ mA ; $C_L=100$ nF ; $R_L= 1$ K Ω . L'objectif du programme est de calculer les maximas de x_1 et fonction de V_D qui varie de 1V à 28V.

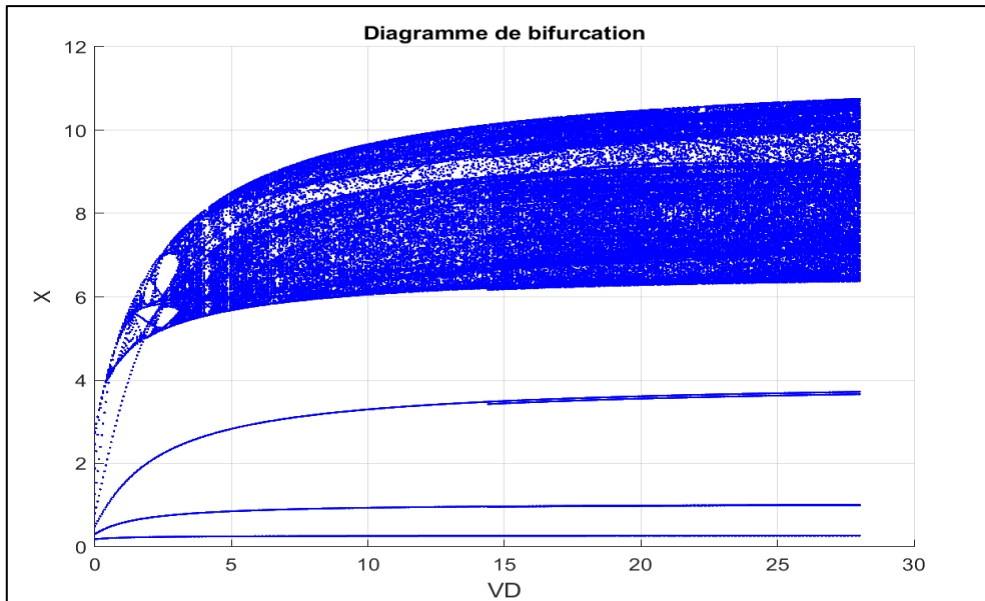


Figure III.5. Diagramme de bifurcation de la première configuration VCCO

Le diagramme de bifurcation révèle que notre modèle mathématique se comporte de manière chaotique presque tout le long de plage de variation de V_D . Une région de transition du

régime périodique vers le régime quasi-périodique qui se situe de $[0.1V - 5.3V]$. On peut dire que la valeur minimale de V_D qu'à partir de laquelle le système se comporte de manière purement chaotique est autour de $5.4V$ avec une fréquence correspondante $f_{0min}=1.00$ GHz et la valeur maximale est de $27.85V$ avec une fréquence correspondante $f_{0max}=1.058$ GHz, soit une bande passante de 58 MHz.

III.3.2 Espaces des Phases

Afin d'illustrer plus clairement les différents comportements évoqués précédemment, la figure (III.6) présente les représentations dans l'espace de phase (x_1, x_2) correspondant à chaque dynamique possible de cette version du VCCO.

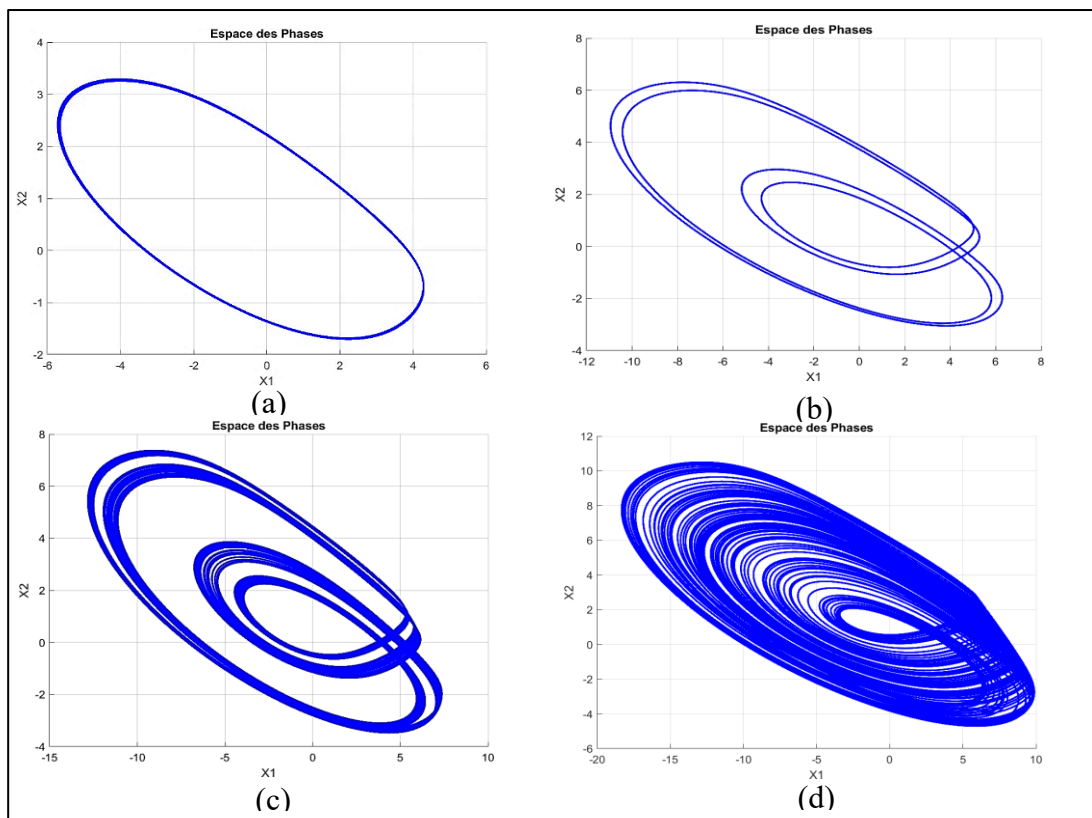


Figure III.6. Espaces des phases (x_1, x_2) de la première configuration pour :
(a) $(V_D=0.5V)$; (b) $(V_D=1.89V)$; (c) $(V_D= 2.85V)$;(d) $(V_D=10V)$

La figure (III.6) met en évidence que pour une tension $V_D=0.5V$, le système présente un cycle limite dans l'espace de phase, révélant ainsi un comportement périodique. Pour des tensions $V_D=1.89V$ et $V_D=2.85$, on observe des attracteurs quasi-périodiques caractérisés par un nombre bien défini de périodes. En revanche, pour une tension $V_D=10V$, un attracteur étrange apparaît, associé à un nombre infini de période ce qui témoigne d'un comportement chaotique du système.

D'autres espaces de phases chaotiques obtenus dans les cas de la tension $V_D=10V$ sont illustrée dans la figure (III.7).

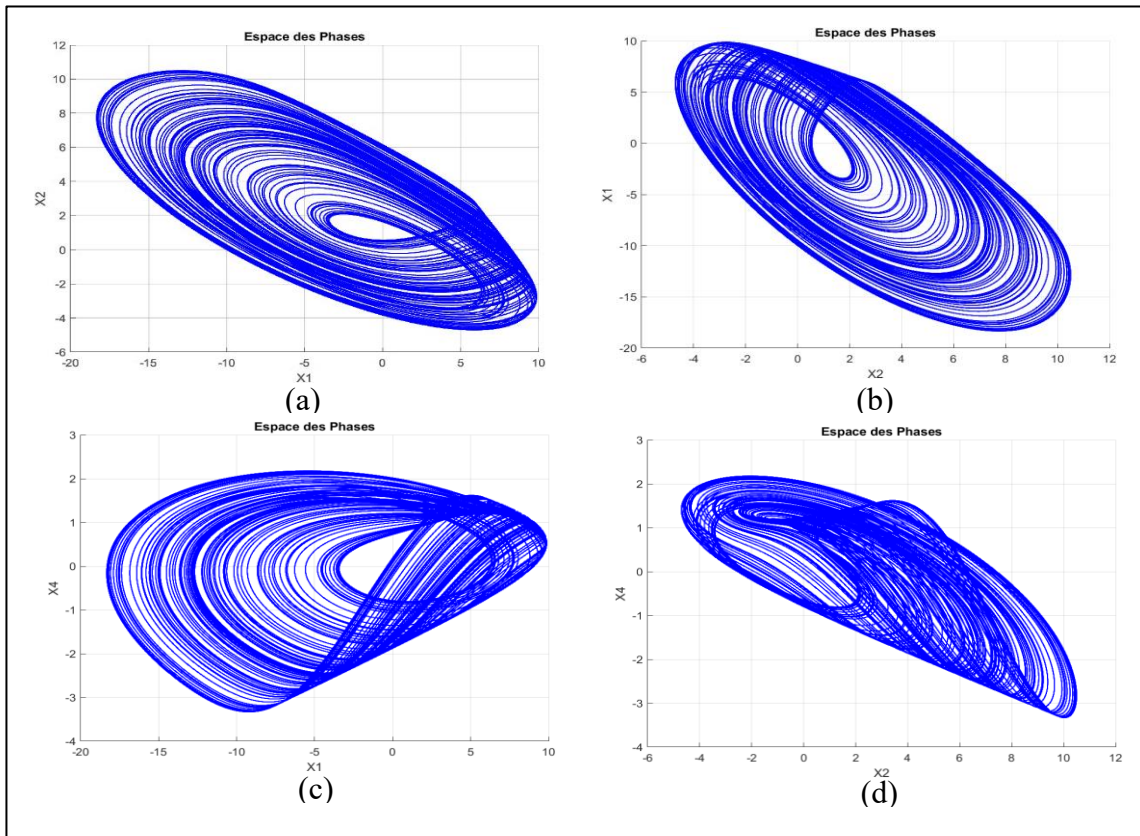


Figure III.7. Attracteur étrange obtenus sous Matlab de première configuration de VCCO :
 (a) (x1, x2) ; (b) (x2, x1) ; (c) (x1, x4) ;(d) (x2, x4)

III.3.3 Simulation sous ADS

Afin de valider les résultats numériques issus de la simulation du modèle mathématique réalisée sous MATLAB, le circuit associé à la première configuration du VCCO a été simulé à l'aide du logiciel ADS, tel que représenté sur la figure (III.8). Les composants employés maintiennent les valeurs déterminées lors de l'analyse du diagramme de bifurcation, à l'exception de la tension V2 fixée à 10V. Le transistor bipolaire sélectionné correspond au model BFG520, alors que la diode varicap utilisée est un BB833.

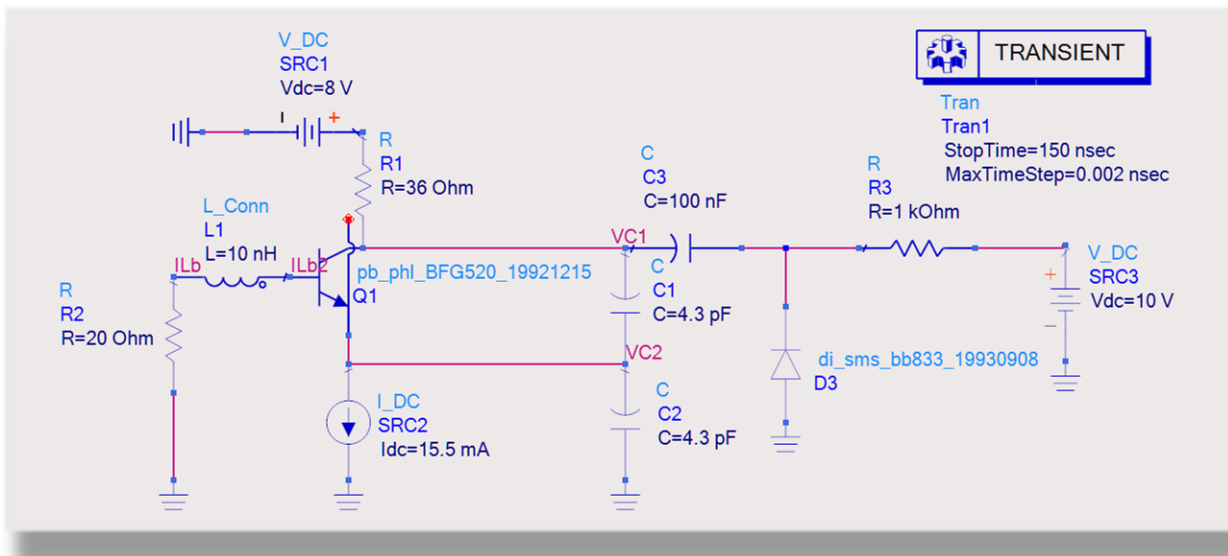


Figure III.8. Circuit de la première configuration du VCCO sous ADS

III.3.4 Résultats de simulation sous ADS

Les diagrammes de phase représentant les attracteurs chaotiques des variables (V_{C1}, V_{C1}) , (V_{C2}, V_{C1}) , (V_{C1}, I_{Lb}) et (V_{C2}, I_{Lb}) , générés pour la configuration du circuit VCCO à l'aide du logiciel ADS, sont présentés dans la figure (III.9). Une analyse comparative des espaces de phase simulés sous MATLAB et ceux obtenus sous ADS met en évidence une concordance remarquable, attestant de la cohérence des dynamiques non linéaires modélisées entre les deux plateformes de simulation. Cette similitude renforce la validité des approches numériques employées pour l'étude des régimes chaotique dans le système considéré.

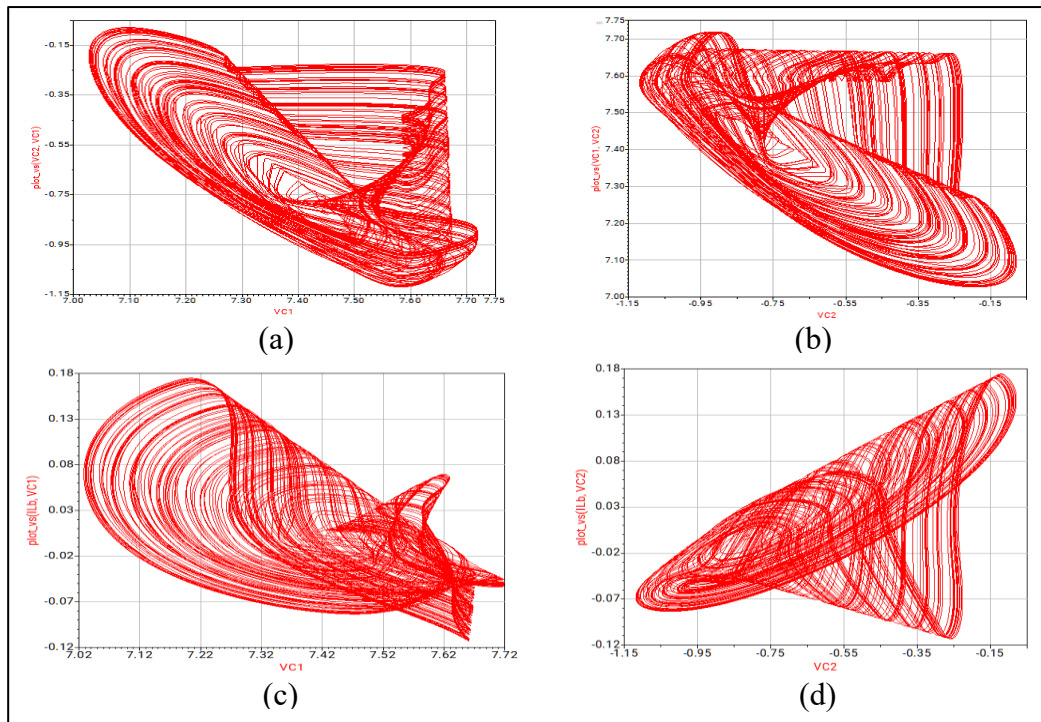


Figure III.9. Attracteurs étranges obtenus sous ADS de la première configuration (a) (V_{C1}, V_{C2}) ; (b) (V_{C2}, V_{C1}) ; (c) (V_{C1}, I_{Lb}) , (d) (V_{C2}, I_{Lb})

III.4 Deuxième configuration de VCCO

La seconde configuration du circuit VCCO analysée dans ce chapitre, représentée sur la figure (III.10), intègre un module identique à celui implémenté dans l'architecture précédente. Toutefois, cette configuration se distingue par un agencement où la diode D est placée en parallèle avec le condensateur C2, cette disposition a pour finalité de générer une capacité équivalente ajustable C_{eq} , exprimée par la relation :

$$C_{eq} = C_2 + C_D \quad (III.8)$$

Cette adaptation structurelle vise à moduler dynamiquement les propriétés capacitatives du système, offrant ainsi un degré de liberté supplémentaire pour l'exploration des régimes non linéaire et chaotiques.

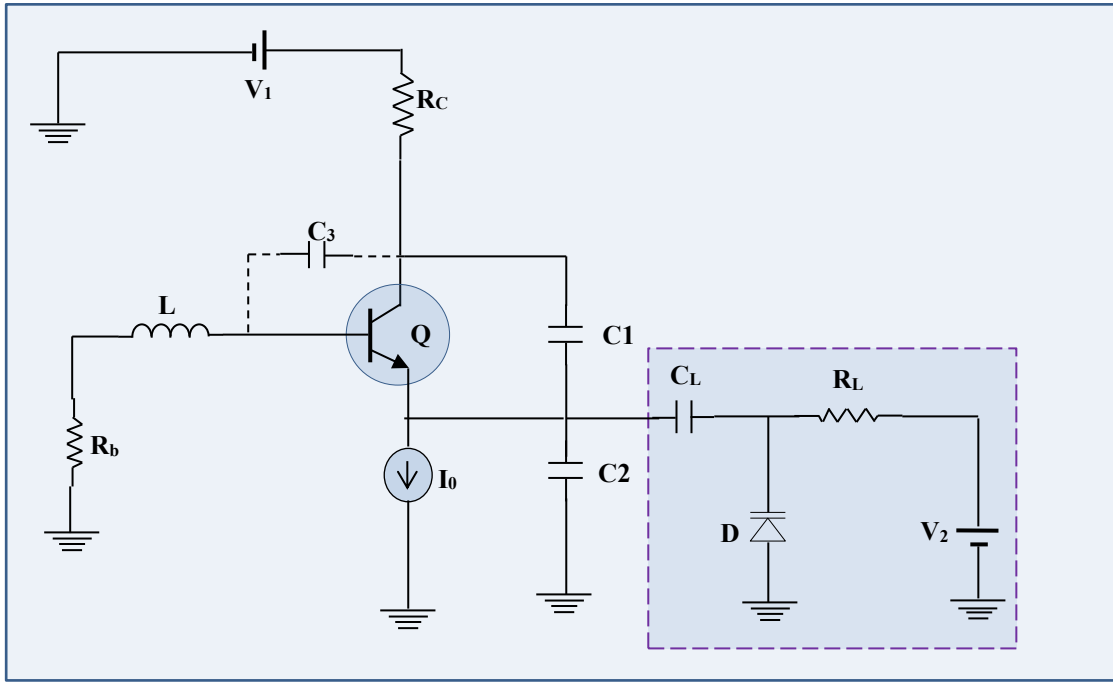


Figure III.10. Circuit de la deuxième configuration de VCCO

La fréquence fondamentale de cette deuxième structure chaotique est donnée par l'équation suivante :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \frac{C_1(C_2 + C_D)}{C_1 + (C_2 + C_D)}}} \quad (\text{III.9})$$

Le modèle mathématique qui décrit ce système dynamique est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(-x_1 - x_2) + x_4 - \gamma\phi(x_1, x_3) \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1\sigma_1(-x_1 - x_2) + \varepsilon_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = \varepsilon_2(x_4 - (1 - \alpha)\gamma\phi(x_1, x_3)) \\ \dot{x}_4 = -x_1 - x_2 - x_3 - \sigma_2 x_4 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Avec : $\phi(x_1, x_3) = \exp(x_1 + x_3) - 1$

Et :

$$x_i V_T = V_{Ci} - V_{Ci}^* \quad \text{avec} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad x_4 V_T = \rho(I_L - I_L^*)$$

$$t = \tau \sqrt{LC_1}, \quad \rho = \sqrt{L/C_1}, \quad \varepsilon_1 = C_1/C_{eq}, \quad \varepsilon_2 = C_1/C_3, \quad C_{eq} = C_2 + C_D \quad (\text{III.11})$$

$$\sigma_1 = \rho/R_C, \quad \sigma_2 = R_b/\rho, \quad \gamma = \rho I_0/V_T, \quad C_{eq} = C_1 + C_D$$

III.4.1 Diagramme de bifurcation

L'analyse du diagramme de bifurcation associé à la deuxième configuration du circuit VCCO a été réalisé sous l'environnement MATLAB à l'aide de la méthode numérique de Rung-Kutta d'ordre 4, avec un incrément temporel fixe de $\Delta\tau=0.001$, les paramètres du circuit, définis pour cette étude, incluent ; $C_1=C_2=4.3$ pF ; $R_c=36$ Ω ; $R_b=20$ Ω ; $L=10$ nH ; $V_0= 8$ V et $I_0= 15.2$ mA ; $C_L=100$ nF ; $R_L= 1$ k Ω , la tension V_D appliquée à la diode varicap, est balayée de 0.1V à 28V afin d'examiner son influence sur les dynamiques non linéaires du système. Cette approche permet d'identifier l'étendue des valeurs de V_D induisant un comportement chaotique. Le diagramme de bifurcation résultant est illustré à la figure (III.11).

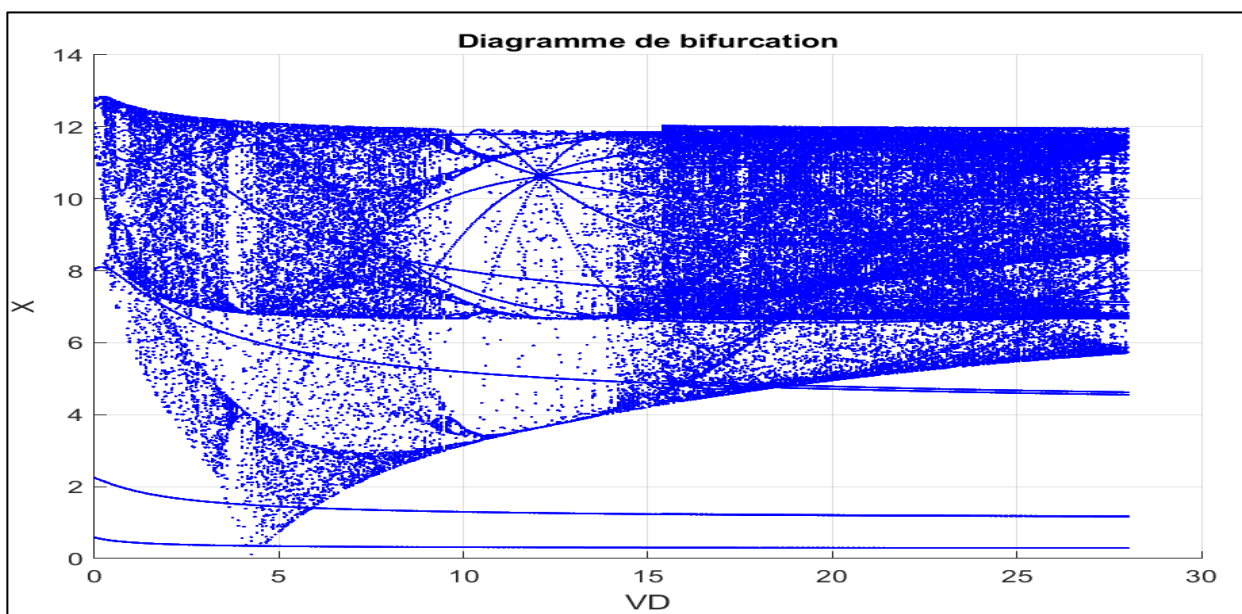


Figure III.11. Diagramme de bifurcation de la deuxième configuration du VCCO

L'analyse du diagramme de bifurcation met en évidence les transitions de notre système dynamique étudié entre les régimes périodiques ou quasi-périodiques vers le régime chaotique. En effet on remarque que notre système se comporte de manière chaotique pour la majorité de l'intervalle de V_D à l'exception de quelques valeurs notamment l'intervalle [8.65V-14.4V]. On peut considérer que notre système (deuxième configuration) présente un régime chaotique en deux plages essentielles, la première [0.36V-8.60V] et la deuxième [14.45V-26.7V], ce qui se traduit par deux plages de fréquence fondamentale [$f_{0min} - f_{0max}$] respectives [0.884GHz- 1.021GHz] et [1.041GHz- 1.057GHz]. Cette variabilité fréquentielle, corrélée à la tension de polarisation de la diode varicap, souligne le potentiel de ce système pour des applications nécessitant une configuration dynamique.

III.4.2 Espaces des phases

L'exploration des dynamiques du système a été réalisée à travers l'analyse des espaces de phase, représentés dans la figure (III.12), pour différentes valeurs de la tension V_D . Pour cette configuration, on observe que les régimes périodique et quasi-périodique apparaissent à différents points du parcours de variation de V_D , notamment entre 0,06 V et 0,11 V, ainsi qu'entre 9 V et 14,1 V. Dans ces plages, la présence d'un cycle limite dans l'espace des phases atteste l'existence d'un régime périodique. Pour d'autres valeurs de V_D on remarquera l'émergence d'un attracteur quasi-périodique notamment le cas de $V_D=14.18$, et enfin pour une valeur de $V_D=16V$ la présence de l'attracteur étrange validant ainsi l'établissement d'un régime chaotique. Ces transitions illustrent la richesse des comportements dynamiques accessibles dans ce système et souligne le rôle clé de la tension de polarisation dans la modulation des états non linéaires.

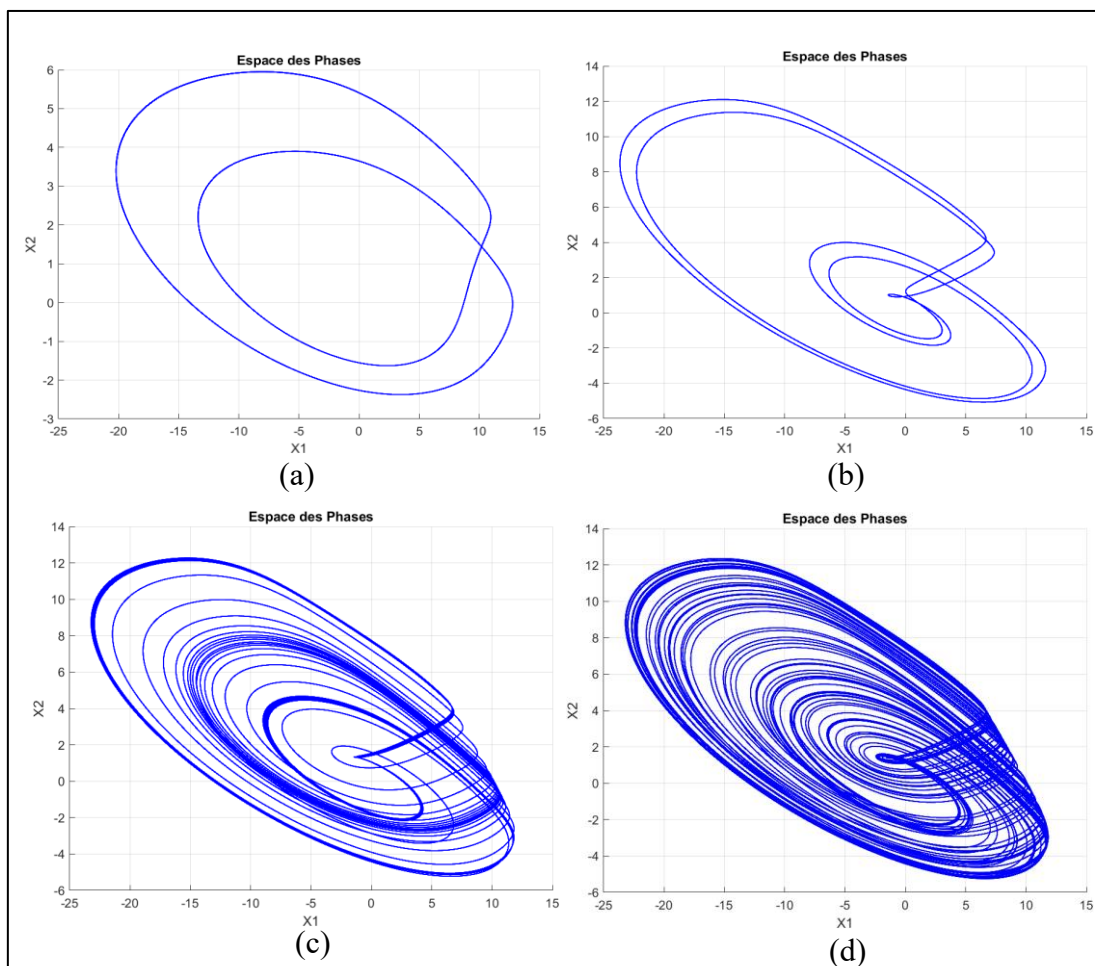


Figure III.12. Espaces des phases (x_1 , x_2) de la deuxième configuration du VCCO pour :
(a) $V_D=0.10V$; (b) $V_D=9V$; (c) $V_D= 14.18V$; (d) $V_D=16V$

Des différents espaces de phases qui identifient le comportement chaotique de notre système dynamique (VCCO deuxième configuration) sont illustrés dans la figure (III.13).

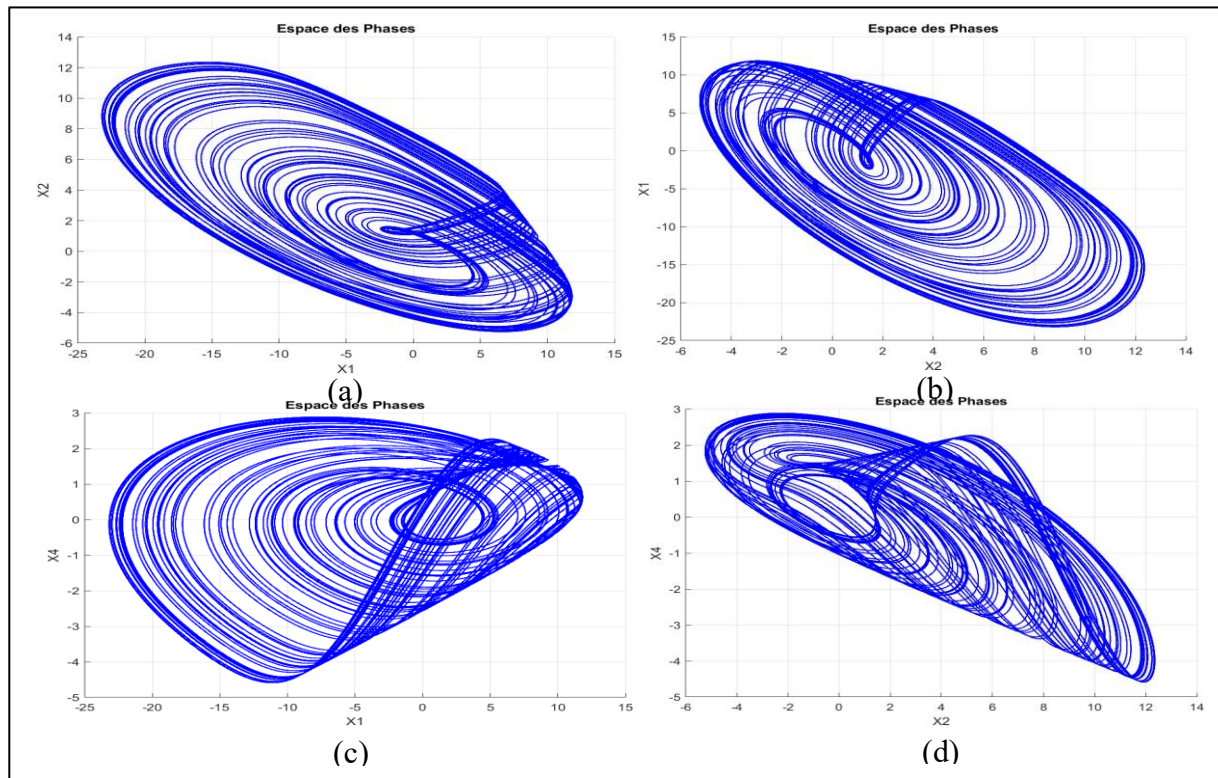


Figure III.13. Attracteurs étrange obtenus sous MATLAB de la deuxième configuration du VCCO :
(a) (x_1, x_2) ; (b) (x_2, x_1) ; (c) (x_1, x_4) ; (d) (x_2, x_4)

III.4.3 Simulation sous ADS

Pour valider les résultats numérisés issus du modèle mathématique simulé sous MATLAB, une reconstitution du VCCO (deuxième configuration) a été implémentée sous le logiciel ADS comme illustré à la figure (III.14), en gardant les paramètres des composants identiques à ceux utilisés pour l'analyse du diagramme de bifurcation. Le transistor est de type BFG520 et la diode et du type varicap BB833.

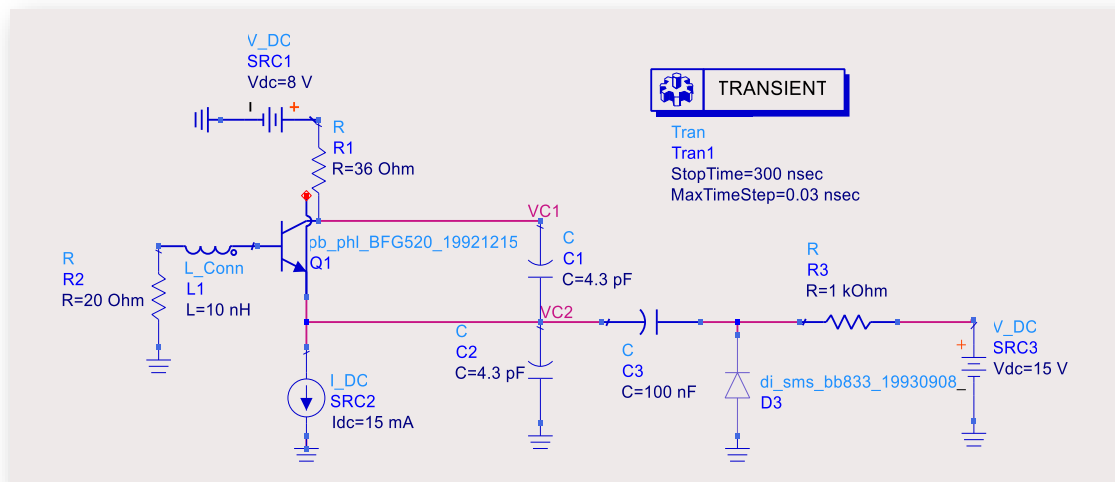


Figure III.14. Circuit de la deuxième configuration du VCCO simulé sous ADS

III.4.4 Résultats de la simulation

La figure (III.15) illustre les attracteurs étranges générés par les variables (V_{C1}, V_{C2}) ; (V_{C2}, V_{C1}) ; (V_{C1}, I_{Lb}) et (V_{C2}, I_{Lb}) résultant de la simulation électrique du système VCCO. Une corrélation remarquable est observée entre les espaces de phase obtenus à partir du modèle mathématique (sous MATLAB) et ceux issus des simulations réalisées sous ADS, confirmant ainsi la validité du modèle mathématique précédemment étudié.

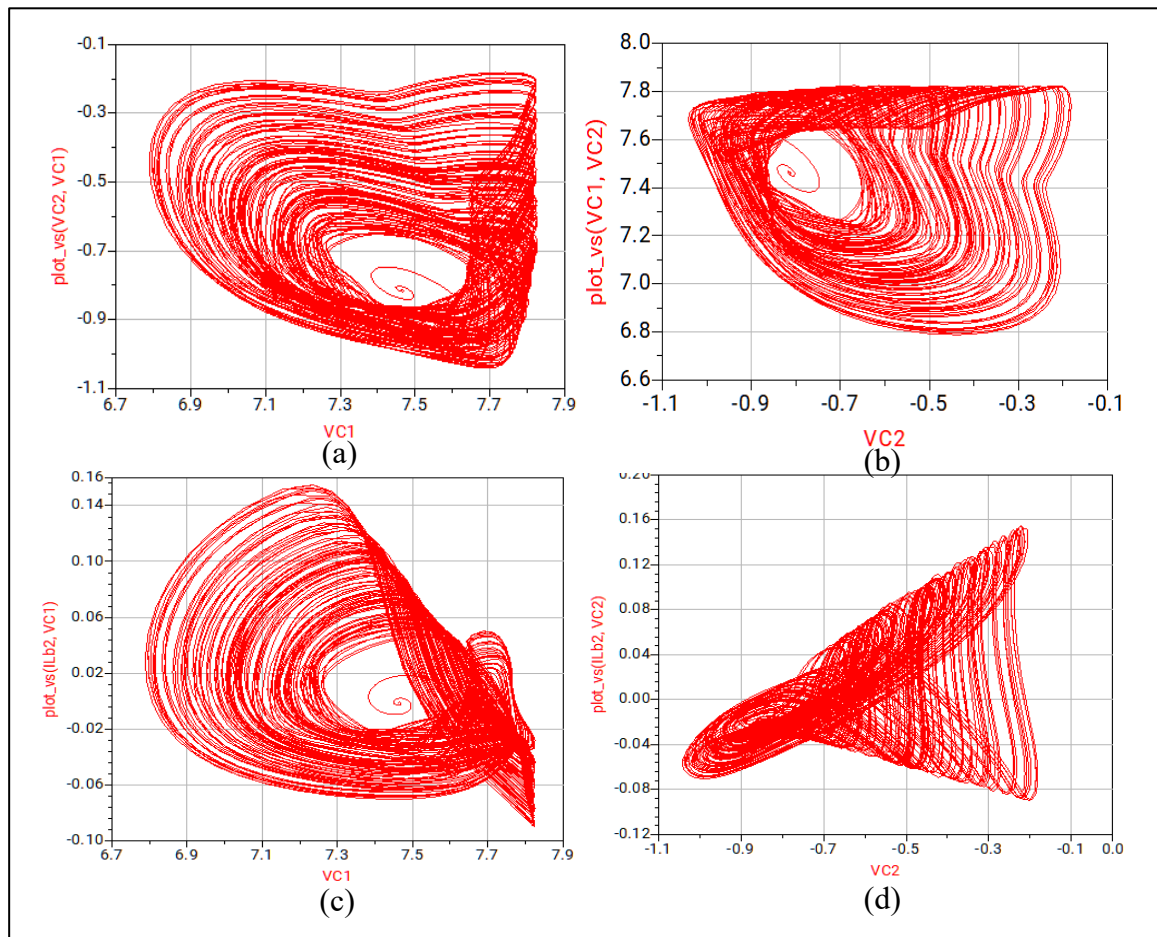


Figure III.15. Attracteurs étranges obtenus sous ADS de la deuxième configuration de VCCO :
(a) (V_{C1}, V_{C2}) ; (b) (V_{C2}, V_{C1}) ; (c) (V_{C1}, I_{Lb}) ; (d) (V_{C2}, I_{Lb})

III.5 Comparaison

Les études menées dans ce chapitre sur deux versions distinctes de l'oscillateur chaotique commandé en tension (VCCO) ont permis d'identifier les différentes fréquences fondamentales associées au régime chaotique. Le tableau ci-dessous présente un récapitulatif des plages de fréquences fondamentales obtenues pour chacune des versions étudiées.

Les différents configurations	La première configuration (Diode varicap D en parallèle avec C1)	La première configuration (Diode varicap D en parallèle avec C2)
L'intervalle en fréquence fondamentale de comportement chaotique $f_{0\min} - f_{0\max}$	1.00GHz – 1.058GHz	0.884GHz – 1.021GHz 1.041GHz – 1.057GHz

Tableau III.1. Résultats en fréquences des deux configurations du VCCO proposé

Le tableau met en évidence les fréquences associées au comportement chaotique pour les deux configurations d'oscillateur chaotique commandé en tension (VCCO).

- **Première configuration**

Avantages :

- Continuité spectrale : La plage de fréquence est unique et continue, simplifiant le réglage dynamique sans interruption.

Inconvénient :

- Bande limitée : La plage restreinte limite la flexibilité pour des systèmes exigeant une large couverture spectrale.

- **Deuxième configuration**

Avantage :

- Largeur spectrale étendue : la plage totale couvre environ 153MHz, offrant une plus grande diversité de fréquence exploitables.
- Flexibilité multi-bandes : La séparation en deux intervalles permet d'adresser des applications nécessitant des bandes distinctes.

Inconvénients :

- Discontinuité : La zone intermédiaire (1.021 GHz – 1.041 GHz) ne présente pas de chaos, imposant des contraintes de conception pour éviter cette région.
- Complexité de contrôle : La gestion de deux plages disjointes augmente la difficulté de modulation dynamique.

En conclusion la première configuration convient mieux aux systèmes exigeant une couverture fréquentielle continue et stable, tandis que la deuxième configuration offre une meilleure adaptabilité grâce à sa bande passante élargie, au prix d'une discontinuité spectrale. Le choix entre les deux dépendra des exigences spécifiques de l'application.

III.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la conception, à la modélisation et à l'analyse approfondie de deux configurations innovantes d'oscillateurs chaotiques commandés en tension (VCCO), basées sur une architecture Colpitts améliorée. L'objectif principal était d'exploiter les propriétés non linéaires introduites par la diode varicap, afin de contrôler dynamiquement les régimes de fonctionnement allant d'une périodicité stable à un chaos déterministe tout en élargissant la plage de réglage spectral.

Chaque configuration a présenté une caractéristique spectrale spécifique, tant en termes de largeur de bande que de continuité spectrale. Les résultats confirment que la première configuration, avec sa plage unique et continue, se distingue par sa simplicité et sa cohérence spectrale, la rendant idéale pour des systèmes nécessitant une stabilité opérationnelle. En revanche, la deuxième configuration, bien qu'elle présente deux plages disjointes couvrant une étendue plus large, offre une adaptabilité supérieure, malgré les défis associés à sa discontinuité spectrale. Ces différences mettent en évidence l'importance d'un compromis entre continuité spectrale et largeur de bande dans la conception de systèmes chaotiques.

Conclusion générale

Conclusion générale

Au cours de notre travail, nous avons conçu et analysé deux modèles de l'oscillateur Colpitts chaotique et deux configurations distinctes d'un oscillateur commandé en tension (VCCO). L'objectif principal de ces propositions et leur utilisation potentielle dans les systèmes de communication sécurisée exploitant le chaos, grâce à leurs propriétés dynamiques riches et imprévisibles.

Ces structures permettent de générer des signaux chaotiques contrôlables, essentiels pour des applications telles que le chiffrement et la modulation sécurisée de données. Les résultats obtenus montrent une bonne maîtrise du passage entre régimes périodique et chaotique.

Pour permettre une analyse approfondie des structures proposées dans ce travail, il a été essentiel de présenter, dans un premier chapitre, les fondements théoriques des systèmes chaotiques. Nous avons ainsi détaillé leurs principales caractéristiques, tels que la sensibilité aux conditions initiales, la non-linéarité et le comportement imprévisible à long terme, tout en expliquant les outils mathématiques utilisés pour leur étude, notamment les attracteurs étranges, les diagrammes de bifurcation.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, et après avoir revu et étudié le célèbre oscillateur « Chua » en analysant son diagramme de bifurcation et son attracteur étrange, nous avons analysé de manière systématique deux variantes de l'oscillateur Colpitts chaotique très connues dans la littérature. Une synthèse critique des deux architectures proposées a mis en lumière les mécanismes de génération du chaos dans ces systèmes.

Une étude comparative entre les deux structures étudiées a permis d'évaluer les performances de chacune surtout dans la plage de fréquence, montrant que la version améliorée de l'oscillateur Colpitts est la plus performante couvrant une plage de fréquence plus large que celle de la version standard. Ce résultat constitue une base méthodologique solide pour le chapitre suivant où des structures originales inspirées de ces résultats seront proposées et validées expérimentalement.

Le dernier chapitre a été dédié à la conception, l'analyse et la comparaison de deux variantes d'un oscillateur chaotique commandé en tension (VCCO) dérivées de l'oscillateur Colpitts amélioré.

- La Première configuration est basée sur l'intégration d'une diode varicap de type BB833 en parallèle avec le condensateur C_1 . Les simulations ont mis en évidence un comportement chaotique dans une plage de fréquences fondamentales s'étendant de

[1.00GHz-1.058GHz], qui démontrent ainsi une réponse spectrale concentrée et cohérente, idéale pour des applications exigeant une stabilité fréquentielle localisée. Cette configuration pourrait être privilégiée dans des systèmes où la prédictibilité partielle du spectre est nécessaire, comme dans certaines méthodes de masquage de signaux ou de synchronisation chaotique.

- La deuxième configuration du VCCO, avec la même diode varicap placée en parallèle avec le condensateur C_2 , donnant un résultat différent en bande passante et en structure, en effet cette configuration a révélé une bande passante un peu large mais en double plage de fréquences fondamentales, la première plage est [0.884GHz-1.021GHz] et la deuxième plage est [1.041GHz-1.057GHz]. Cette dualité de plages fréquentielles couplée à une bande passante élargie, suggère une richesse dynamique, cette bifurcation spectrale pourrait résulter d'une interaction non linéaire plus complexe entre la varicap et les autres composants du circuit, induisant des attracteurs chaotiques multi-échelles. Une telle propriété ouvre la voie à des applications en communication multi-bande.

Perspectives de recherche :

- Optimisation paramétrique : Explorer des combinaisons de valeurs de composants (inductance, résistances) pour étendre davantage les plages fréquentielles ou stabiliser les zones de chaos dans la deuxième configuration.
- Implémentation matérielle : Valider expérimentalement ces résultats de simulation, en étudiant notamment les effets des parasites et des non-idéalités des composants sur la stabilité des régimes chaotiques.
- Applications hybrides : Tirer de la dualité fréquentielle de la deuxième configuration pour concevoir des systèmes de communication à saut de fréquence.
- Comparaison avec d'autres architectures : Évaluer la performance de ces VCCO face à d'autres oscillateurs chaotiques (Chua, Sprott) en termes de rapport signal/bruit, consommation énergétique et facilité de contrôle.

En synthèse, ces deux configurations illustrent le potentiel de l'oscillateur Colpitts amélioré comme plateforme reconfigurable pour l'ingénierie du chaos, combinant la simplicité structurelle et flexibilité opérationnelle. Leurs propriétés spectrales distinctes ont fait de ces candidats prometteurs pour répondre à des besoins variés, allant des télécommunications à la sécurité embarquée, sous réserve d'une validation expérimentale rigoureuse et d'une exploration approfondie de leur robustesse en conditions réelles.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] M. Brin et G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*. Cambridge, U.K ; New York: Cambridge University Press, 2002.
- [2] C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed. in Studies in advanced mathematics. London New York [etc.]: Boca Raton CRC press, 1999.
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. in Studies in nonlinearity. Reading (Mass.): Addison-Wesley publ, 1994.
- [4] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, 2nd ed. Cambridge, U.K. ; New York: Cambridge University Press, 2002.
- [5] S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Second edition, First issued in hardback. in A Chapman & Hall book. Boca Raton London New York: CRC Press, 2019.
- [6] D. W. Jordan et P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers*, 4th ed. Oxford [England]: New York : Oxford University Press, 2007.
- [7] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Updated and augm. Ed. New York: W. H. Freeman, 1986.
- [8] J. Gleick, *Chaos: making a new science*, Nachdr. New York: Viking, 1988.
- [9] « Estelle Cherrier: “Estimation de l’état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires” ; Thèse Doctorat de l’Université Henri Poincaré - Nancy 1 ».
- [10] « Handbook of Applied Cryptography - Alfred J. Menezes ».
- [11] B. Schbeier, « Applied Cryptography ».
- [12] F. Anstett, « Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : synthèse et cryptanalyse » ; Thèse Doctorat de l’université Henri Poincaré- Nancy 1 ; 12/07/2006, P 49 ».
- [13] T. Kapitaniak et J. Kurths, « Synchronized pendula: From Huygens’ clocks to chimera states », *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, vol. 223, n° 4, p. 609-612, avr. 2014, doi: 10.1140/epjst/e2014-02128-8.
- [14] « Résumés des exposés de la 14ème rencontre non-linéaire paris 2011. (Institut Henry Poincaré) ».
- [15] « Physical Review letter 19 February 1990 ».
- [16] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, et J. Kurths, « Phase Synchronization of Chaotic Oscillators », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, n° 11, p. 1804-1807, mars 1996, doi: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.

- [17] H. COLPITTS, « UNITED STATES 1,624,537 PATENT OFFICE. ».
- [18] M. P. Kennedy, « Chaos in the Colpitts oscillator », *IEEE Trans. Circuits Syst. Fundam. Theory Appl.*, vol. 41, n° 11, p. 771-774, nov. 1994, doi: 10.1109/81.331536.
- [19] P. Horowitz et W. Hill, *The art of electronics*, Third edition, 20th printing with corrections. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2024.
- [20] A. S. Elwakil et M. P. Kennedy, « A family of Colpitts-like chaotic oscillators », *J. Frankl. Inst.*, vol. 336, n° 4, p. 687-700, mai 1999, doi: 10.1016/S0016-0032(98)00046-5.
- [21] O. De Feo et G. M. Maggio, « BIFURCATIONS IN THE COLPITTS OSCILLATOR: FROM THEORY TO PRACTICE », *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 13, n° 10, p. 2917-2934, oct. 2003, doi: 10.1142/S0218127403008338.
- [22] « SEMICONDUCTORS, D. (1997). 2N2222; 2N2222A ».
- [23] A. Tamaševičius, S. Bumelienė, et E. Lindberg, « Improved chaotic Colpitts oscillator for ultrahigh frequencies », *Electron. Lett.*, vol. 40, n° 25, p. 1569-1570, déc. 2004, doi: 10.1049/el:20047019.
- [24] J. Kengne, J. C. Chedjou, G. Kenne, et K. Kyamakya, « Dynamical properties and chaos synchronization of improved Colpitts oscillators », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17, n° 7, p. 2914-2923, juill. 2012, doi: 10.1016/j.cnsns.2011.10.038.
- [25] « BFG520; BFG520/X; BFG520/XR NPN 9 GHz wideband transistor ».
- [26] « BFG520; BFG520/X; BFG520/XR NPN 9 GHz wideband transistor ».
- [27] S. Askari et M. Saneei, « Design and analysis of differential ring voltage controlled oscillator for wide tuning range and low power applications », *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 47, n° 2, p. 204-216, févr. 2019, doi: 10.1002/cta.2582.
- [28] B. Razavi, *RF microelectronics*, 2. édition. in The Prentice Hall communications engineering and emerging technologies series. Upper Saddle River, NJ Munich: Prentice Hall, 2012.
- [29] D. M. Pozar, *Microwave engineering*, Fourth edition. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2012.
- [30] « bb833series-88272 » DATASHEET.