

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques & Modélisations
présentée par

HAMZA CHERIF Rania

Etude mathématique d'un modèle d'invasion de Wolbachia avec transmission maternelle

Soutenue devant le jury composé de :

M.YADI KARIM	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mme.BOUAYAD AGHA SARI ZAKYA	MCB	Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme.BENZERDJEB SARRA	MCB	Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chers parents, pour leur soutien indéfectible, leur amour inconditionnel et leur précieuse guidance tout au long de ma vie.

À mon frère Chiheb ainsi qu'à mes sœurs Malak et Houda, pour leur présence constante, leurs encouragements et leur soutien inébranlable.

À toute ma famille, mes proches et à ceux qui m'ont toujours entourée de leur affection et de leur soutien.

À tous mes amis qui ont été mes piliers dans les moments difficiles et mes compagnons dans les moments joyeux.

À tous ceux que j'aime.

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu tout-puissant pour la patience et la volonté qu'il m'a accordées pour réaliser ce travail.

Je présente mes sincères remerciements à mes parents pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements.

Je suis profondément reconnaissant envers mon encadrante, BENZERDJEB Sarra, pour ses précieux conseils et son soutien continu tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier tous mes enseignants pour leur partage de connaissances, de ressources et de leur temps précieux tout au long de mes années d'études.

Enfin, je remercie ma famille et mes amies pour leur amour, leur soutien et leur compréhension tout au long de ce parcours académique difficile.

Résumé

Cette recherche explore les défis de santé publique posés par les infections virales transmises par les vecteurs, notamment la dengue. La stratégie d'utilisation de la bactérie intracellulaire *Wolbachia* montre des résultats prometteurs pour inhiber la transmission de la dengue en remplaçant les populations de moustiques *Aedes aegypti* par des moustiques infectés par *Wolbachia* (WI). Un modèle dynamique de transmission de *Wolbachia* a été développé en prenant en compte la transmission maternelle imparfaite et la perte potentielle d'infection. L'analyse du modèle permet de dériver le nombre reproductif invasif et d'évaluer la stabilité locale et globale des points d'équilibre. Des programmes de libération optimaux sont proposés en fonction du niveau de transmission maternelle imparfaite et de la perte d'infection. Cette étude fournit des informations essentielles pour concevoir des stratégies de contrôle des vecteurs plus efficaces et durables.

Mots clés : *Wolbachia*, dengue, *Aedes aegypti*, transmission maternelle imparfaite, dynamique de transmission.

Abstract

This research explores the public health challenges posed by vector-borne viral infections, particularly dengue. The strategy of using the intracellular bacterium *Wolbachia* shows promising results in inhibiting dengue transmission by replacing populations of *Aedes aegypti* mosquitoes with mosquitoes infected with *Wolbachia* (WI). A dynamic model of *Wolbachia* transmission has been developed, taking into account imperfect maternal transmission and potential loss of infection. Analysis of the model allows the derivation of the invasive reproductive number and evaluation of the local and global stability of equilibrium points. Optimal release programs are proposed based on the level of imperfect maternal transmission and infection loss. This study provides an essential information to give more effective and sustainable vector control strategies.

Keywords : *Wolbachia*, dengue, *Aedes aegypti*, imperfect maternal transmission, transmission dynamics.

ملخص

تستكشف هذه الدراسة التحديات الصحية العامة التي تطرحها العدوى الفيروسية المنقولة بواسطة النواقل، وخاصة حمى الضنك. تُظهر استراتيجية استخدام بكتيريا ولبخية داخل الخلايا نتائج واعدة في منع انتقال حمى الضنك من خلال استبدال تجمعات البعوض من نوع الزاعجة المصرية ببعوض مصاب ببكتيريا ولبخية. تم تطوير نموذج ديناميكي لانتقال بكتيريا ولبخية مع الأخذ في الاعتبار الانتقال الأمومي غير الكامل وفقدان العدوى المحتمل. يتيح تحليل النموذج استنتاج العدد التكاثري الغازي وتقييم الاستقرار المحلي والعالمي لنقاط التوازن. تُقترح برامج إطلاق مثلى بناءً على مستوى الانتقال الأمومي غير الكامل وفقدان العدوى. توفر هذه الدراسة معلومات أساسية لتصميم استراتيجيات أكثر فعالية واستدامة لمكافحة النواقل.

الكلمات المفتاحية : ولبخية، حمى الضنك، الزاعجة المصرية، انتقال أمومي غير كامل، ديناميكية الانتقال.

Table des matières

1	Préliminaires	9
1.1	Équations différentielles	9
1.2	Cauchy–Lipschitz	10
1.3	Principe de comparaison	11
1.4	La règle de Leibniz	11
1.5	Lemme de Gronwall	11
1.6	Points d’équilibre et Stabilité	12
1.6.1	Critère de Routh-Hurwitz	12
1.6.2	Fonction de Liapounov	13
1.6.3	Principe d’invariance de LaSalle	14
1.7	Taux de reproduction de base R_0	14
1.8	Contrôle optimal	14
2	Modélisation en épidémiologie	17
2.1	Le modèle SI	17
2.2	Le modèle SIR	18
2.3	Modèle d’invasion de Wolbachia avec transmission maternelle	21
2.3.1	Existence et unicité de la solution	24
2.3.2	Positivité et la bornitude de la solution	24
3	Modèle d’invasion de Wolbachia avec transmission maternelle	30
3.1	Modèle de Wolbachia sans perte de l’infection	30
3.1.1	Points d’équilibre	31
3.1.2	Stabilité	35
3.2	Modèle de Wolbachia avec transmission de maladie	52
3.2.1	Points d’équilibre	52
3.2.2	Stabilité	56
4	Problème de Contrôle Optimal	69
4.1	Stratégie de libération en présence de la maladie	69

4.1.1	Taux de libération constant	69
4.1.2	Taux de libération variable	70
4.2	Stratégie de libération pour la perte de la maladie	72
4.2.1	Taux de libération constant	73
4.2.2	Taux de libération variable	73
Bibliographie		77

Introduction

Dans le monde entier, les maladies transmises par les insectes sont un défi majeur pour la santé publique. Ces insectes présentent des vecteurs transporteurs des infections (virus, bactérie, parasite..). Parmi ces insectes, les moustiques, connues sous le nom d'*Aedes aegypti*, se distinguent en tant que vecteurs principaux de virus tels que la dengue, le Zika et le chikungunya. Ce moustique expose plus de la moitié de la population mondiale au risque de contracter uniquement la dengue [3], où les symptômes vont d'une fièvre légère à des formes graves telles que la dengue hémorragique, pouvant entraîner des complications graves, y compris le décès.

Pour réduire la propagation de ces maladies, nous utilisons une bactérie sûre et naturelle appelée *Wolbachia* [13], qui est une bactérie présente à l'intérieur des cellules des insectes, capable de réduire la capacité des moustiques à transmettre le virus de la dengue à l'intérieur du moustique *Ae. aegypti*, et peut se propager par transmission maternelle. Cette stratégie innovante vise à introduire la *Wolbachia* chez les populations de moustiques pour empêcher la transmission des maladies, offrant ainsi un moyen potentiellement efficace de contrôler la propagation de la dengue et d'autres infections virales. Cependant, nous sommes confrontés à certains défis tels que la transmission maternelle imparfaite et la perte de l'infection par la *Wolbachia*.

Dans ce travail, cette étude se concentre sur l'analyse de l'introduction de *Wolbachia* et de ses dynamiques dans les moustiques *Ae. aegypti* pour contrôler la transmission de la dengue. Le modèle mathématique utilisé permet d'étudier l'effet de la transmission maternelle incomplète et de la perte d'infection par *Wolbachia* sur les dynamiques d'invasion. L'objectif principal de cette étude est de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour

l'invasion de *Wolbachia* et la stabilité des points d'équilibre. Les résultats obtenus peuvent être utilisés comme outils de gestion pour développer des stratégies de contrôle appropriées, garantissant que les moustiques infectés par *Wolbachia* peuvent remplacer les moustiques non infectés ou devenir plus abondants qu'eux. Ceci contribuera à la réduction de la transmission de la dengue et d'autres maladies transmises par les moustiques.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres distincts : le premier chapitre présente les outils mathématiques essentiels pour étudier en profondeur les systèmes dynamiques, le deuxième chapitre applique ces outils à la modélisation des épidémies en particulier à travers les modèles SI, SIR et le modèle de *Wolbachia*. Le troisième chapitre étudie le modèle de *Wolbachia* introduit dans le deuxième chapitre, en réalisant une analyse de stabilité dans deux cas : l'un sans perte d'infection et l'autre avec perte d'infection, et en fournissant des simulations numériques. Enfin, le quatrième chapitre analyse l'application du contrôle optimal pour introduire et maintenir *Wolbachia* dans les populations de moustiques, visant à minimiser la transmission de la dengue en suivant une approche similaire à l'article [4] qui a examiné deux stratégies de libération : un taux de libération constant et un taux de libération variable.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre vise à examiner quelques outils mathématiques essentiels pour analyser les modèles épidémiologiques, lesquels sont formulés à l'aide de systèmes d'équations différentielles.

1.1 Équations différentielles

Définition 1.1 Une équation différentielle ordinaire (EDO) est généralement notée de la manière suivante :

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots) = 0$$

où :

- t est le temps,
- $(x = x(t))$ est la fonction inconnue dépendant de t ,
- $(\frac{dx}{dt})$ représente la première dérivée de x par rapport à t ,
- $(\frac{d^2x}{dt^2})$ représente la seconde dérivée de x par rapport à t ,
- et ainsi de suite pour les dérivées supérieures.
- (F) est une fonction donnée de $t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, etc.

Définition 1.2 Une solution d'un système d'équations différentielles ordinaires est une solution qui vérifie à la fois les équations du système et les conditions initiales données.

Définition 1.3 (*solution bornée*) Considérons un système dynamique décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$.

Une solution $x(t)$ de (1.1) est dite bornée s'il existe $N > 0$ tel que pour tout t dans un intervalle I contenant t_0 , la solution satisfait l'inégalité :

$$\|x(t)\| \leq N$$

Cela garantit que la solution ne tend pas vers l'infini (positif ou négatif) sur l'intervalle I , mais reste toujours confinée dans un intervalle borné de valeurs réelles [10].

Définition 1.4 (*Domaine positivement invariant*) Un domaine M du plan est dit positivement invariant si, pour toute condition initiale x_0 dans M , la trajectoire correspondante reste dans M lorsque $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $x(t) \in M$ pour tout $t \geq 0$ [2].

1.2 Cauchy–Lipschitz

Théorème 1.1 Soient $f \in C(I \times U; E)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert d'un espace de Banach E , et $(t_0, u_0) \in I \times U$. On suppose qu'il existe un voisinage de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$.

Alors on a les propriétés suivantes.[15]

Existence Il existe $\tau > 0$ et $u \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; U)$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Unicité Si v est une autre solution de (1.2), elle coïncide avec u sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

[15]

1.3 Principe de comparaison

Considérons le système (1.2). Supposons qu'il existe $z(t)$, une solution du système, avec $z(t_0) \leq u_0$.

Si $z(t)$ satisfait

$$z'(t) \leq f(t, u), \quad t \geq 0,$$

alors $z(t) \leq u(t)$ pour tout $t \geq 0$ [10].

1.4 La règle de Leibniz

Soit $F(x, t)$ une fonction de deux variables x et t , où x est la variable d'intégration et t est le paramètre. Si $F(x, t)$ est continue sur un domaine D qui dépend de t , alors la dérivée par rapport à t de l'intégrale définie comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx$$

est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) dx + F(b(t), t) \cdot \frac{db}{dt} - F(a(t), t) \cdot \frac{da}{dt}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions de t définissant les bornes de l'intégrale, et $\frac{\partial}{\partial t} F(x, t)$ représente la dérivée partielle de $F(x, t)$ par rapport à t .

1.5 Lemme de Gronwall

Si φ est une fonction de classe $C^1(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un t_0 , satisfaisant l'inégalité différentielle :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leq \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t), \quad t > 0$$

où α et β sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0)e^{\left(\int_{t_0}^t \alpha(s)ds\right)} + \int_{t_0}^t e^{\left(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\right)} \beta(s)ds$$

voir [9].

1.6 Points d'équilibre et Stabilité

Définition 1.5 [2] *Un point d'équilibre du (1.1) noté x^* , est un point où la dérivée par rapport au temps s'annule, c'est-à-dire $f(x^*) = 0$.*

Définition 1.6 [10] *Le point d'équilibre x^* est dit stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_\varepsilon \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Définition 1.7 [10] *Le point d'équilibre x^* est dit instable s'il n'est pas stable.*

1.6.1 Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz est un outil essentiel en théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires. Il propose une méthode pour déterminer la stabilité des points d'équilibre d'un système sans avoir à calculer explicitement les valeurs propres de la matrice Jacobienne.

Pour une équation caractéristique de la forme :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

où a_k avec $k \in [1, n]$ sont les coefficients de l'équation caractéristique.

Considérons les n déterminants suivants :

$$H_1 = a_1$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= a_1 a_2 - a_3 \\
H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\
&\vdots \\
H_k &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

tel que $k \in [1, n]$. Dans le cas de dimension n , tous les a_j avec $j > n$ sont pris égaux à zéro.

Nous avons le résultat suivant :

L'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout $k \in [1, n]$, $H_k > 0$ [2].

1.6.2 Fonction de Liapounov

Définition 1.8 [2] On appelle une fonction V définie positive (resp. négative) sur un domaine D contenant l'origine si elle vérifie :

1. $V(0) = 0$
2. $\forall x \in D \setminus \{0\}, V(x) > 0$ (resp. $V(x) < 0$)

Théorème 1.2 (Fonction de Liapounov)

Considérons le système dynamique (1.1) qui admet l'origine comme point d'équilibre. Supposons qu'il existe une fonction $V(x)$, définie dans un voisinage de l'origine, telle que :

1. $\frac{dV}{dx}$ existe et est continue.
2. V est définie positive..
3. $\dot{V}$ est définie négative.

Alors l'origine est un équilibre asymptotiquement stable [2].

1.6.3 Principe d'invariance de LaSalle

Théorème 1.3 (*Principe d'invariance de LaSalle*)

Soit $\Omega \subset D$ un ensemble compact positivement invariant par rapport à l'équation (1.1).

Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ dans Ω .

Soit E l'ensemble de tous les points de Ω où $\dot{V}(x) = 0$ et M le plus grand ensemble invariant dans E .

Alors toute solution commençant dans Ω converge vers M lorsque $t \rightarrow \infty$ [10].

1.7 Taux de reproduction de base R_0

Définition 1.9 (*Taux de reproduction de base R_0*)

Le taux de reproduction de base, noté R_0 , est le nombre attendu de cas secondaires produits, dans une population entièrement susceptible, par un individu typiquement infectieux.

propriété 1.1 Le " R_0 " est le rayon spectral de la matrice appelée de "la prochaine génération".

Remarque 1.1 cette méthode sera utilisée plus loin(chapitre 3). le lecteur est également invité à consulter [16].

1.8 Contrôle optimal

Définition 1.10 (*Le contrôle*) Un système de contrôle est un système dynamique dont le comportement dépend d'un paramètre dynamique u , nommé le contrôle.

Considérons Le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \\ \inf_{u \in U_{\text{adm}}} C(u). \end{cases} \quad (1.3)$$

avec

$$C(u) = \psi(T, x(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t)) dt.$$

$x(T)$ libre et T libre ou fixé.

Définition 1.11 $U_{\text{adm}} = \{u() : I \text{ vers } \mathbb{R}^k ; u(t) \text{ appartient à } U \text{ ppt}\}$ où U compact dans $\mathbb{R}^k$.

Définition 1.12 L'Hamiltonien associé au système de contrôle optimal (1.3) est l'application $H : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$H(t, x, \lambda, u) = \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u).$$

Lorsque la fonctionnelle H ne dépend pas explicitement du temps, On dit que l'Hamiltonien est autonome.

Théorème 1.4 (Principe du maximum de Pontryagin)[7]

On considère le problème de contrôle optimal (1.3).

Si u^* est un contrôle optimal et x^* est le trajectoire associée. Alors il existe une application $\lambda : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint tel que

a)

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), \text{ pour presque tout } t \in [t_0, T] \\ &= f(t, x^*(t), u^*(t)), \text{ pour presque tout } t \in [t_0, T], \\ x^*(t_0) &= x_0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), \text{ pour presque tout } t \in [t_0, T] \\ \lambda(T) &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(T, x^*(T)). (\text{condition de transversalité})\end{aligned}$$

b) $u^* \in \arg \min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), v)$, pour presque tout $t \in [t_0, T]$, c'est à dire

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), v), \text{ p.p. } t \in [t_0, T],$$

c) Si de plus le temps final T est libre, on a :

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), u^*(T)) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}(T, x^*(T)).$$

Remarque 1.2 Dans le cas où $U = \mathbb{R}^k$, c'est à dire, lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition b) du théorème précédent devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Chapitre 2

Modélisation en épidémiologie

Ce chapitre explore les modèles mathématiques des épidémies, en se concentrant notamment sur les modèles SI et SIR. De plus, nous introduisons un modèle pour l'invasion de Wolbachia dans les populations de moustiques, une étape cruciale pour comprendre et contrôler les maladies transmises par les moustiques.

2.1 Le modèle SI

Le modèle SI est l'un des modèles classiques en épidémiologie. Lorsque la maladie se propage dans la population, elle divise la population en deux groupes :

Susceptibles (S) : Ce sont des personnes qui n'ont jamais eu la maladie auparavant.

Infectés (I) : Ce sont des personnes qui ont contracté la maladie.

Le modèle SI est représenté par la figure suivante :

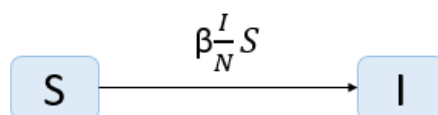


FIGURE 2.1 – Diagramme du modèle SI

avec

- β est le taux de transmission de la maladie.

- N est la taille totale de la population.

Mathématiquement, le modèle SI est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I(t)}{N} S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{I(t)}{N} S(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2 Le modèle SIR

Le modèle SIR est une extension du modèle SI avec une catégorie supplémentaire :

Rétablis (R) : Ce sont des personnes qui ont contracté la maladie et qui sont maintenant immunisées.

Le modèle SIR est représenté par la figure suivante :

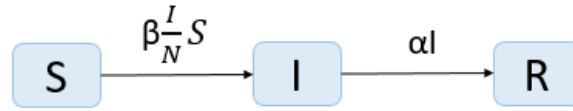


FIGURE 2.2 – Diagramme du modèle SIR

avec

- β est le taux de transmission de la maladie.
- α est le taux de récupération.
- N est la taille totale de la population.

Mathématiquement, le modèle SIR est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I(t)}{N} S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - \alpha I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les conditions initiales sont données par $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$ et $R(0) = 0$.

La population totale N est constante, avec

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

Nous simplifions le modèle à :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I(t)}{N} S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - \alpha I(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce modèle admet deux points d'équilibre :

$$(S_0, 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0 \right)$$

Pour calculer R_0 nous considérons :

- f : le taux de nouveaux cas infectés
- v : le taux de récupération.

De sorte que

$$f = \beta \frac{I(t)}{N} S(t)$$

et

$$v = \alpha I(t)$$

Ensuite, nous définissons

$$F = \frac{\partial f}{\partial I}(S, I, R) \quad \text{et} \quad V = \frac{\partial v}{\partial I}(S, I, R)$$

Ce qui donne

$$F = \left[\beta \frac{S}{N} \right] \quad \text{et} \quad V = [\alpha]$$

À $I = 0$, on a $N = S$, donc

$$F = [\beta]$$

Ainsi, on a :

$$FV^{-1} = \left[\frac{\beta}{\alpha} \right]$$

Par conséquent,

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$$

La stabilité des points d'équilibre [12] :

Le point d'équilibre $(S_0, 0)$ est stable si $R_0 \leq 1$.

Soit V_1 fonction de Lyapunov définie sur $\Omega = \{(S; I) \in \mathbb{R}_+^2; S = S^* \text{ et } S + I \leq 1\}$ par :

$$V_1(S; I) = I(t)$$

On a $V_1(S; I) \geq 0$ et $V_1(S^*; I^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt}(S; I) &= \frac{dI}{dt} \\ &= \beta \frac{I(t)}{N} S(t) - \alpha I(t) \\ &= \alpha(R_0 S(t) - 1)I(t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car $R_0 \leq 1$.

De plus, d'après le principe d'invariance de LaSalle

$$\frac{dV_1}{dt} = 0$$

Si

$$I = 0 \quad \text{ou} \quad (S = S^* \text{ et } R_0 = 1)$$

Donc, l'ensemble invariant maximal contenu dans Ω est :

$$E = \{(S; I) \in \Omega; \frac{dV_1}{dt}(S; I) = 0\}$$

Cet ensemble est réduit au point d'équilibre $(S_0, 0)$.

alors le point d'équilibre $(S_0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable sur Ω .

Le deuxième point d'équilibre $\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ est stable si $R_0 > 1$.

Soit V_2 fonction de Lyapunov définie sur Ω par :

$$V_2(S; I) = (S - S^*) - S^* \log\left(\frac{S}{S^*}\right) + (I - I^*) - I^* \log\left(\frac{I}{I^*}\right)$$

On a

$$V_2(S; I) \geq 0$$

et

$$V_2(S^*; I^*) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt}(S; I) &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \frac{dS}{dt} + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \frac{dI}{dt} \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (-\beta SI) + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (\beta SI - \alpha I) \\ &= \beta(S^*I - SI^*) + \alpha(I^* - I) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{dV_2}{dt} = 0$$

Si

$$I = I^*$$

Et on a

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

Donc

$$E = \{(S; I) \in \Omega; \frac{dV_2}{dt}(S; I) = 0\}$$

Cet ensemble est réduit au point d'équilibre $(\frac{\alpha}{\beta}, 0)$.

Alors $(\frac{\alpha}{\beta}, 0)$ est globalement asymptotiquement stable sur Ω .

Voir [12].

2.3 Modèle d'invasion de Wolbachia avec transmission maternelle

Chaque année, un grand nombre de personnes sont affectées par la dengue, une maladie virale débilitante. Les moustiques femelles, en particulier *Ae. aegypti*, sont les principaux vecteurs responsables de la transmission de cette maladie. Une stratégie prometteuse pour réduire les infections par la dengue consiste à remplacer la population de moustiques *Ae. aegypti* par une variante incapable de transmettre le virus, en utilisant Wolbachia comme moyen potentiel. Cependant, des défis subsistent, notamment la transmission maternelle imparfaite et la perte de l'infection par Wolbachia.

Plusieurs recherches mathématiques ont été faites pour analyser ce genre de problèmes (voir article [17]).

Pour bien comprendre ces problèmes, considérons la population de moustiques *Aedes aegypti*, divisée en deux sous-populations principales : infectés par *Wolbachia* (WI) et non infectés par *Wolbachia* (WU). Notons le nombre de moustiques au stade aquatique (œuf, larve et nymphe) par Q et les moustiques femelles adultes par F . Le modèle obtenu est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} = \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_1\phi_wF_w^2 + \rho_2\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}} & (2.4a) \\ \frac{dQ_w}{dt} = \left[\frac{(1 - \rho_1)\phi_wF_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi)Q_w & (2.4b) \\ \frac{dF_{\bar{w}}}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_{\bar{w}} + \sigma F_w - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} & (2.4c) \\ \frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_w - \sigma F_w - \mu_wF_w & (2.4d) \end{cases}$$

avec $Q = Q_w + Q_{\bar{w}}$.

Symboles	Définitions
$\bar{w}$	La population de moustiques <i>Ae. aegypti</i> non infectés par <i>Wolbachia</i> (WU).
w	La population de moustiques <i>Ae. aegypti</i> infectés par <i>Wolbachia</i> (WI).
$Q_{\bar{w}}$	Nombre de moustiques dans le stade aquatique (œuf, larve et nymphe) dans la population de moustiques <i>Ae. aegypti</i> non infectés par <i>Wolbachia</i> (WU).
Q_w	Nombre de moustiques dans le stade aquatique (œuf, larve et nymphe) dans la population de moustiques <i>Ae. aegypti</i> infectés par <i>Wolbachia</i> (WI).
$F_{\bar{w}}$	Nombre de moustiques femelles adultes dans la population de moustiques <i>Ae. aegypti</i> non infectés par <i>Wolbachia</i> (WU).
F_w	Nombre de moustiques femelles adultes dans la population de moustiques <i>Ae. aegypti</i> infectés par <i>Wolbachia</i> (WI).
K	La capacité de charge de l'étape aquatique
$\phi_{\bar{w}}$	Le taux de ponte par individu pour les moustiques non infectés par <i>Wolbachia</i>
ϕ_w	Le taux de ponte par individu pour les moustiques infectés par <i>Wolbachia</i>
ρ_1	La fraction des œufs qui sont non infectés par <i>Wolbachia</i> produits par les moustiques femelles infectées
ρ_2	La fraction des œufs qui sont non infectés par <i>Wolbachia</i> résultant de l'accouplement entre des moustiques mâles adultes non infectés par <i>Wolbachia</i> et des femelles infectées par <i>Wolbachia</i>
ψ	Taux de maturation des moustiques de l'étape aquatique à l'étape adulte
σ	Taux de perte d'infection par <i>Wolbachia</i>
μ_a	Taux de mortalité des moustiques au stade aquatique
$\mu_{\bar{w}}$	Taux de mortalité des moustiques femelles adultes non infectés par <i>Wolbachia</i>
μ_w	Taux de mortalité des moustiques femelles adultes infectés par <i>Wolbachia</i>

TABLE 2.1 – Tableau des symboles et des définitions

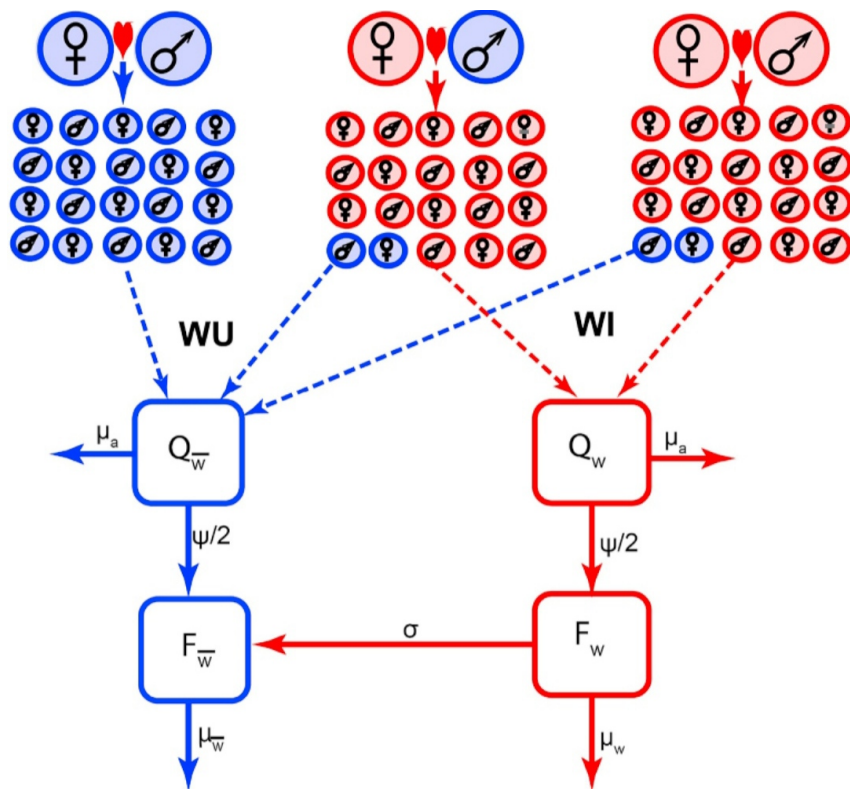


FIGURE 2.3 – Schéma du modèle d'invasion de Wolbachia

2.3.1 Existence et unicité de la solution

Pour faciliter l'étude du système donné par (2.4), il est préférable de le réécrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} = f_1 \\ \frac{dQ_w}{dt} = f_2 \\ \frac{dF_{\bar{w}}}{dt} = f_3 \\ \frac{dF_w}{dt} = f_4 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

avec :

$$f_1 = \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^2 + \rho_1 \phi_w F_w^2 + \rho_2 \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_{\bar{w}}$$

$$f_2 = \left[\frac{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2) \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_w$$

$$f_3 = \frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}} + \sigma F_w - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}$$

$$f_4 = \frac{\psi}{2} Q_w - \sigma F_w - \mu_w F_w$$

Les f_i pour $i = 1, \dots, 4$ sont des fonctions de classe C^1 par rapport à la trajectoire $(Q_{\bar{w}}, Q_w, F_{\bar{w}}, F_w)$, donc elles sont lipschitziennes d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour toute condition initiale, il existe une solution unique.

2.3.2 Positivité et la bornitude de la solution

Théorème 2.1 *Toutes les solutions du système (2.4) partant de $\mathbb{R}_+^4$ restent toujours positives pour tout $t \geq 0$.*

PREUVE.

Tout d'abord, nous devons montrer que $Q(t) \leq K$, $\forall t \geq 0$. En effet :

Supposons que $Q(0) \leq K$.

La somme des deux équations (2.4a) et (2.4b) donne :

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi)Q \\ Q(0) \leq K \end{cases} \quad (2.6)$$

La fonction :

$$M(t) = K, \quad \forall t \geq 0.$$

vérifie le système :

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} \geq \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{M}{K} \right) - (\mu_a + \psi)M \\ M(0) \geq Q(0) \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} 0 \geq -(\mu_a + \psi)K \\ M(0) = K \geq Q(0) \end{cases} \quad (2.8)$$

Par le principe de comparaison on déduit que :

$$M \geq Q$$

D'où :

$$Q(t) \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

À ce niveau, on démontre que la solution $(Q_{\bar{w}}, Q_w, F_{\bar{w}}, F_w)$ est positive :

Commençons par montrer que $Q_{\bar{w}} \geq 0$. En effet :

$$\frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} \geq -(\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}}$$

Autrement dit

$$\frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} + (\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}} \geq 0$$

Par l'application du facteur intégrant :

$$e^{\int_0^t (\mu_a + \psi) ds} = e^{(\mu_a + \psi)t}$$

Il découle :

$$\left(Q_{\bar{w}} e^{(\mu_a + \psi)t} \right)' \geq 0$$

Par passage à l'intégrale

$$\int_0^t \left(Q_{\bar{w}}(s) e^{(\mu_a + \psi)s} \right)' ds \geq 0$$

Il en résulte

$$Q_{\bar{w}}(t) \geq Q_{\bar{w}}(0) e^{-(\mu_a + \psi)t} > 0$$

Pour prouver que Q_w est positive, il suffit d'utiliser l'équation (2.4b) telle que :

$$\frac{dQ_w}{dt} \geq -(\mu_a + \psi)Q_w$$

D'après le facteur intégrant :

$$e^{\int_0^t (\mu_a + \psi) ds} = e^{(\mu_a + \psi)t}$$

On trouve

$$\left(Q_w e^{(\mu_a + \psi)t} \right)' \geq 0$$

Par intégration

$$\int_0^t \left(Q_w(s) e^{(\mu_a + \psi)s} \right)' ds \geq 0$$

On obtient

$$Q_w(t) \geq Q_w(0) e^{-(\mu_a + \psi)t} > 0$$

De même, pour démontrer que F_w est positive, il suffit d'utiliser l'équation (2.4d)

$$\frac{dF_w}{dt} \geq -(\sigma + \mu_w)F_w$$

Par l'utilisation du facteur intégrant :

$$e^{\int_0^t (\sigma + \mu_w) ds} = e^{(\sigma + \mu_w)t}$$

Il découle :

$$\left(F_w e^{(\sigma+\mu_w)t}\right)' \geq 0$$

En intégrant

$$\int_0^t \left(F_w(s) e^{(\sigma+\mu_w)s}\right)' ds \geq 0$$

Alors

$$F_w(t) \geq F_w(0) e^{-(\sigma+\mu_w)t} > 0$$

Pour établir la positivité de $F_{\bar{w}}$, il suffit d'utiliser l'équation (2.4c)

$$\frac{dF_{\bar{w}}}{dt} \geq -\mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}$$

Par l'application du facteur intégrant :

$$e^{\int_0^t \mu_{\bar{w}} ds} = e^{\mu_{\bar{w}} t}$$

On obtient :

$$\left(F_{\bar{w}} e^{\mu_{\bar{w}} t}\right)' \geq 0$$

Par intégration

$$\int_0^t \left(F_{\bar{w}}(s) e^{\mu_{\bar{w}} s}\right)' ds \geq 0$$

On trouve

$$F_{\bar{w}}(t) \geq F_{\bar{w}}(0) e^{-\mu_{\bar{w}} t} > 0$$

Par conséquent, pour toute condition initiale positive, la solution est toujours positive.

Proposition 2.1 *Les solutions du modèle d'invasion de Wolbachia sont bornées pour tout $t \geq 0$.*

PREUVE. Soit N une fonction définie par :

$$N(t) = Q_{\bar{w}}(t) + Q_w(t) + F_{\bar{w}}(t) + F_w(t)$$

La dérivée de N est :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} + \frac{dQ_w}{dt} + \frac{dF_{\bar{w}}}{dt} + \frac{dF_w}{dt}$$

En utilisant les équations données par le système (2.4), on obtient

$$\frac{dN}{dt} = \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi)(Q_{\bar{w}} + Q_w) + \frac{\psi}{2}(Q_{\bar{w}} + Q_w) - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} - \mu_w F_w \quad (2.9)$$

Soit

$$\mu_1 = \min(\mu_{\bar{w}}, \mu_w, \mu_a)$$

L'équation (2.9) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &\leq \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - \frac{\psi}{2}(Q_{\bar{w}} + Q_w) - \mu_1(Q_{\bar{w}} + Q_w + F_{\bar{w}} + F_w) \\ &\leq \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - \frac{\psi}{2}(Q_{\bar{w}} + Q_w) - \mu_1 N(t) \end{aligned}$$

D'après l'équation (2.4d), on a :

$$\frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_w - (\sigma + \mu_w)F_w \geq 0$$

ce qui équivaut à

$$F_w \leq \frac{\psi Q_w}{2(\sigma + \mu_w)}$$

puisque :

$$Q_w \leq K$$

et

$$\sigma + \mu_w \geq \mu_w \geq \mu_1$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\sigma + \mu_w} \leq \frac{1}{\mu_1}$$

alors :

$$F_w \leq \frac{\psi K}{2\mu_1}. \quad (2.10)$$

D'après l'équation (2.4c), on a :

$$\frac{dF_{\bar{w}}}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_{\bar{w}} + \sigma F_w - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} \geq 0$$

Ce qui équivaut à

$$F_{\bar{w}} \leq \frac{\psi Q_{\bar{w}}}{2\mu_{\bar{w}}} + \frac{\sigma F_w}{\mu_{\bar{w}}}.$$

Sachant que :

$$Q_{\bar{w}} \leq K$$

et

$$\frac{1}{\mu_{\bar{w}}} \leq \frac{1}{\mu_1}$$

l'équation (2.10) entraîne :

$$F_{\bar{w}} \leq \frac{\psi K}{2\mu_1^2}(\mu_1 + \sigma). \quad (2.11)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} &= \frac{\phi_w F_w(F_w + F_{\bar{w}}) + \phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \phi_{\bar{w}}F_w F_{\bar{w}} - \phi_{\bar{w}}F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \\ &= \phi_w F_w + \phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}} - \frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \phi_w F_w^2 + \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \leq \phi_w F_w + \phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &\leq \phi_w F_w + \phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}} - \mu_1 N(t) \\ &\leq \frac{\psi K}{2\mu_1^2}(\phi_w \mu_1 + \phi_{\bar{w}}(\mu_1 + \sigma)) - \mu_1 N(t) \\ &\leq L - \mu_1 N(t) \end{aligned}$$

avec

$$L = \frac{\psi K}{2\mu_1^2}(\phi_w \mu_1 + \phi_{\bar{w}}(\mu_1 + \sigma))$$

Par conséquent

$$\frac{dN}{dt} + \mu_1 N(t) \leq L$$

Par l'application du lemme de Gronwall, on a :

$$\begin{aligned} N(t) &\leq N(0)e^{\int_0^t -\mu_1 ds} + \int_0^t L e^{\int_s^t -\mu_1 d\tau} ds \\ &\leq N(0)e^{-\mu_1 t} + \int_0^t L e^{-\mu_1(t-s)} ds \\ &\leq N(0)e^{-\mu_1 t} + \frac{L}{\mu_1}(1 - e^{-\mu_1 t}) \end{aligned}$$

Maintenant, nous passons à la limsup :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{L}{\mu_1}$$

Chapitre 3

Modèle d'invasion de Wolbachia avec transmission maternelle

Ce chapitre se concentre sur l'analyse de la stabilité du modèle de Wolbachia décrit dans le chapitre précédent. En fait, il développe le travail de l'article [1] en examinant les conditions de stabilité du système et en introduisant quelques simulations numériques pour illustrer les résultats de l'analyse de stabilité.

3.1 Modèle de Wolbachia sans perte de l'infection

Lorsque l'infection persiste chez les moustiques, les deux coefficients σ et ρ_1 sont nuls ($\rho_1 = 0$, $\sigma = 0$) ceci indique que dans le modèle (2.4), la transmission maternelle imparfaite est restreinte aux femelles WI et aux mâles WU, et qu'il n'y a pas de perte d'infection par Wolbachia chez les moustiques adultes infectés. Par suite, le système (2.4) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} = \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^2 + \rho_2 \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_{\bar{w}} \\ \frac{dQ_w}{dt} = \left[\frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2) \phi_{\bar{w}} F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_w \\ \frac{dF_{\bar{w}}}{dt} = \frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}} - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}} \\ \frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2} Q_w - \mu_w F_w \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.1a) \\ (3.1b) \\ (3.1c) \\ (3.1d) \end{array}$$

3.1.1 Points d'équilibre

La recherche des points d'équilibre se base sur la résolution des équations suivantes :

$$\left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_{\bar{w}}^* = 0 \quad (3.2)$$

$$\left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_w^* = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}}^* - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\psi}{2} Q_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \quad (3.5)$$

D'après les équations (3.4) et (3.5), on a :

$$Q^* = \frac{2}{\psi} (\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)$$

$$Q_{\bar{w}}^* = \frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*$$

$$Q_w^* = \frac{2}{\psi} \mu_w F_w^*$$

En remplaçant Q^* , $Q_{\bar{w}}^*$ et Q_w^* dans les équations (3.2) et (3.3), on obtient :

$$F_{\bar{w}}^* = 0 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* + \rho_2 \phi_w F_w^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} = 0$$

et

$$F_w^* = 0 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{\phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0$$

Si

$$F_{\bar{w}}^* = 0 \quad \text{et} \quad F_w^* = 0$$

alors

$$Q_{\bar{w}}^* = 0 \quad \text{et} \quad Q_w^* = 0$$

Ainsi, le premier point d'équilibre est :

$$E_1 = (0, 0, 0, 0)$$

et si

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* + \rho_2 \phi_w F_w^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} = 0 \\ F_w^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}}^* - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\bar{w}}^* = \frac{\psi K}{2\mu_{\bar{w}}} \left(1 - \frac{2\mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)}{\phi_{\bar{w}}\psi} \right) \\ F_w^* = 0 \\ Q_{\bar{w}}^* = K \left(1 - \frac{2\mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)}{\phi_{\bar{w}}\psi} \right) \\ Q_w^* = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Par conséquent, le deuxième point d'équilibre est :

$$E_2 = (Q_{\bar{w}}^*, 0, F_{\bar{w}}^*, 0)$$

De même, si

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\bar{w}}^* = 0 \\ \left[\frac{\phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}}^* - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

ce qui implique

$$\begin{cases} F_w^* = 0 \\ \phi_w \left(1 - \frac{2\mu_w F_w^*}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0 \\ Q_w^* = 0 \\ Q_w^* = \frac{2}{\psi} \mu_w F_w^* \end{cases} \quad (3.9)$$

alors

$$\begin{cases} F_w^* = 0 \\ F_w^* = \frac{\psi K}{2\mu_w} \left(1 - \frac{2\mu_w(\mu_a + \psi)}{\phi_w \psi} \right) \\ Q_w^* = 0 \\ Q_w^* = K \left(1 - \frac{2\mu_w(\mu_a + \psi)}{\phi_w \psi} \right) \end{cases} \quad (3.10)$$

Le troisième point d'équilibre est donc

$$E_3 = (0, Q_w^*, 0, F_w^*)$$

Finalement, si

$$\begin{cases} \left[\frac{\phi_w F_w^* + \rho_2 \phi_w F_w^*}{F_w^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_w F_w^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0 \\ \left[\frac{\phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*}{F_w^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_w F_w^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

De la deuxième équation du système (3.11) on obtient :

$$\frac{1}{F_w^* + F_w^*} \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_w F_w^*)}{K\psi} \right) = (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w \frac{1}{\phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*} \quad (3.12)$$

On remplace (3.12) dans la première équation du système (3.11) :

$$\left[\frac{\phi_w F_w^* + \rho_2 \phi_w F_w^*}{\phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*} \right] (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0$$

ce qui implique

$$[(\phi_{\bar{w}}F_w^* + \rho_2\phi_wF_{\bar{w}}^*)\mu_w - (\phi_wF_w^* + (1 - \rho_2)\phi_wF_{\bar{w}}^*)\mu_{\bar{w}}] \frac{2}{\psi}(\mu_a + \psi) = 0$$

ce qui entraîne

$$[(\phi_{\bar{w}}F_w^* + \rho_2\phi_wF_{\bar{w}}^*)\mu_w - (\phi_wF_w^* + (1 - \rho_2)\phi_wF_{\bar{w}}^*)\mu_{\bar{w}}] = 0$$

Un calcul simple donne

$$F_{\bar{w}}^* = \frac{\phi_w\mu_{\bar{w}} - \rho_2\phi_w\mu_w}{\mu_w\phi_{\bar{w}} - \phi_w(1 - \rho_2)\mu_{\bar{w}}} F_w^*$$

On pose :

$$x = \frac{\phi_w\mu_{\bar{w}} - \rho_2\phi_w\mu_w}{\mu_w\phi_{\bar{w}} - \phi_w(1 - \rho_2)\mu_{\bar{w}}}$$

$$x = \frac{(\mu_{\bar{w}} - \rho_2\mu_w)\phi_w}{\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2) \left(\frac{\mu_w\phi_{\bar{w}}}{(1 - \rho_2)\mu_{\bar{w}}} - \phi_w \right)}$$

$$x = \frac{(\mu_{\bar{w}} - \rho_2\mu_w)}{\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)} \frac{1}{\left(\frac{\mu_w\phi_{\bar{w}}}{(1 - \rho_2)\mu_{\bar{w}}\phi_w} - 1 \right)}$$

$$x = \frac{(\mu_{\bar{w}} - \rho_2\mu_w)}{\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)} \frac{(1 - \rho_2)\mu_{\bar{w}}\phi_w}{\mu_w\phi_{\bar{w}} \left(1 - \frac{(1 - \rho_2)\mu_{\bar{w}}\phi_w}{\mu_{\bar{w}}\phi_w} \right)}$$

alors :

$$F_{\bar{w}}^* = xF_w^* \tag{3.13}$$

d'après la deuxième équation du système (3.11), on obtient :

$$[\phi_wF_w^* + (1 - \rho_2)\phi_wF_{\bar{w}}^*] \left(1 - \frac{2(\mu_wF_w^* + \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (F_{\bar{w}}^* + F_w^*)(\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi}\mu_w = 0$$

On remplace par l'équation (3.13), on trouve :

$$F_w^* \left[(\phi_w + (1 - \rho_2)\phi_w x) \left(1 - F_w^* \frac{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)}{K\psi} \right) - (x + 1)(\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi}\mu_w \right] = 0$$

Si $F_w^* = 0$, alors :

$$E_1 = (0, 0, 0, 0)$$

Ainsi :

$$(\phi_w + (1 - \rho_2)\phi_w x) \left(1 - F_w^* \frac{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)}{K\psi} \right) - (x + 1)(\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w = 0$$

Ce qui implique

$$F_w^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)} \left[\frac{\phi_w + (1 - \rho_2)\phi_w x - (x + 1)(\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_w}{\phi_w + (1 - \rho_2)\phi_w x} \right]$$

$$F_w^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)} \frac{2\mu_w(\mu_a + \psi)}{\psi\phi_w(1 + (1 - \rho_2)x)} \left[\frac{\psi\phi_w(1 + (1 - \rho_2)x)}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} - (x + 1) \right]$$

Le dernier point d'équilibre est donc :

$$E_4 = (Q_{\bar{w}}^*, Q_w^*, F_{\bar{w}}^*, F_w^*) = \left(\frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*, \frac{2}{\psi} \mu_w F_w^*, x F_w^*, F_w^* \right)$$

3.1.2 Stabilité

Le modèle identifie quatre points d'équilibre :

$E_1 = (0, 0, 0, 0)$ où il n'y a pas de moustiques, $E_2 = (Q_{\bar{w}}^*, 0, F_{\bar{w}}^*, 0)$ où seuls les moustiques non infectés par Wolbachia (WU) existent, $E_3 = (0, Q_w^*, 0, F_w^*)$ où seuls les moustiques infectés par Wolbachia (WI) existent, et $E_4 = (Q_{\bar{w}}^*, Q_w^*, F_{\bar{w}}^*, F_w^*)$ où les moustiques WU et WI coexistent.

Théorème 3.1 *Si $R_{0\bar{w}} < 1$ et $R_{0w} < 1$, alors le point d'équilibre E_1 est localement stable.*

PREUVE. Pour calculer la matrice jacobienne à E_1 et éviter toute division par zéro, nous évaluons d'abord (voir [4])

$$J(0, 0, 0, F_w) = \begin{pmatrix} -(\mu_a + \psi) & 0 & \rho_2 \phi_w & 0 \\ 0 & -(\mu_a + \psi) & -\rho_2 \phi_w & \phi_w \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\bar{w}} & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_w \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que $J(0, 0, 0, F_w)$ ne change pas lorsque $F_w \rightarrow 0$.

L'équation caractéristique pour ce jacobien est donnée par

$$\begin{aligned}
& -(\mu_a + \psi) - \lambda \left[(-\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_{\overline{w}} - \lambda)(-\mu_w - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_w(-\mu_{\overline{w}} - \lambda) \right] \\
& + \frac{\psi}{2} \left[(-\mu_a + \psi) - \lambda)\rho_2\phi_w(-\mu_w - \lambda) + \frac{\psi}{2}\rho_2\phi_w^2 \right] = 0
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
& (-\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_w - \lambda) \left[(-\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_{\overline{w}} - \lambda) - \frac{\psi}{2}\rho_2\phi_w \right] \\
& - \frac{\psi}{2}\phi_w \left[(-\mu_{\overline{w}} - \lambda)(-\mu_a + \psi) - \lambda) - \frac{\psi}{2}\rho_2\phi_w \right] = 0
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left[(-\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_{\overline{w}} - \lambda) - \frac{\psi}{2}\rho_2\phi_w \right] \left[(-\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_w - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_w \right] = 0$$

Ainsi

$$(\lambda^2 + \lambda v_1 + v_2)(\lambda^2 + \lambda y_1 + y_2) = 0$$

Avec v_1 , v_2 , y_1 et y_2 sont des coefficients définis par :

$$v_1 = \mu_a + \psi + \mu_{\overline{w}}$$

$$v_2 = \mu_{\overline{w}}(\mu_a + \psi) - \frac{\psi}{2}\rho_2\phi_w$$

$$y_1 = \mu_a + \psi + \mu_w$$

$$y_2 = \mu_w(\mu_a + \psi) - \frac{\psi}{2}\phi_w = 1 - \frac{\phi_w\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)}$$

De même (voir [4])

$$J(0, 0, F_{\overline{w}}, 0) = \begin{pmatrix} -(\mu_a + \psi) & 0 & \phi_{\overline{w}} & \rho_2\phi_w - \phi_{\overline{w}} \\ 0 & -(\mu_a + \psi) & 0 & (1 - \rho_2)\phi_w \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\overline{w}} & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_w \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que $J(0, 0, F_{\overline{w}}, 0)$ ne change pas lorsque $F_{\overline{w}} \rightarrow 0$.

L'équation caractéristique pour ce jacobien est donnée par

$$\begin{aligned} [-(\mu_a + \psi) - \lambda] \left[(-(\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_{\bar{w}} - \lambda)(-\mu_w - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_w(-\mu_{\bar{w}} - \lambda)(1 - \rho_2) \right] \\ + \frac{\psi}{2} \left[(-(\mu_a + \psi) - \lambda)\phi_{\bar{w}}(-\mu_w - \lambda) + \frac{\psi}{2}\phi_{\bar{w}}(1 - \rho_2)\phi_w \right] = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (-(\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_w - \lambda) \left[(-(\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_{\bar{w}} - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_{\bar{w}} \right] \\ - \frac{\psi}{2}\phi_w(1 - \rho_2) \left[(-\mu_{\bar{w}} - \lambda)(-(\mu_a + \psi) - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_{\bar{w}} \right] = 0 \end{aligned}$$

ce qui signifie

$$\left[(-(\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_{\bar{w}} - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_{\bar{w}} \right] \left[(-(\mu_a + \psi) - \lambda)(-\mu_w - \lambda) - \frac{\psi}{2}\phi_w(1 - \rho_2) \right] = 0$$

Ainsi

$$(\lambda^2 + \lambda v_3 + v_4)(\lambda^2 + \lambda y_3 + y_4) = 0$$

Avec v_3 , v_4 , y_3 et y_4 sont des coefficients définis par :

$$v_3 = \mu_a + \psi + \mu_{\bar{w}}$$

$$v_4 = \mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi) - \frac{\psi}{2}\phi_{\bar{w}} = 1 - \frac{\phi_{\bar{w}}\psi}{2\mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)}$$

$$y_3 = \mu_a + \psi + \mu_w$$

$$y_4 = \mu_w(\mu_a + \psi) - \frac{\psi}{2}\phi_w(1 - \rho_2) = 1 - \frac{\phi_w\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)}(1 - \rho_2)$$

On pose

$$R_{0\bar{w}} = \frac{\phi_{\bar{w}}\psi}{2\mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)}$$

et

$$R_{0w} = \frac{\phi_w\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)}$$

Il est clair que $v_1 > 0$, $y_1 > 0$, $v_3 > 0$, $y_3 > 0$ et si $R_{0w} < 1$, alors $y_2 > 0$ et $y_4 > 0$. De même, si $R_{0\bar{w}} < 1$, alors $v_4 > 0$ et $v_2 > 0$.

Par conséquent, si $R_{0\bar{w}} < 1$ et $R_{0w} < 1$, alors le point d'équilibre E_1 est localement stable.

Les résultats de cette analyse sont résumés dans la Figure 3.1

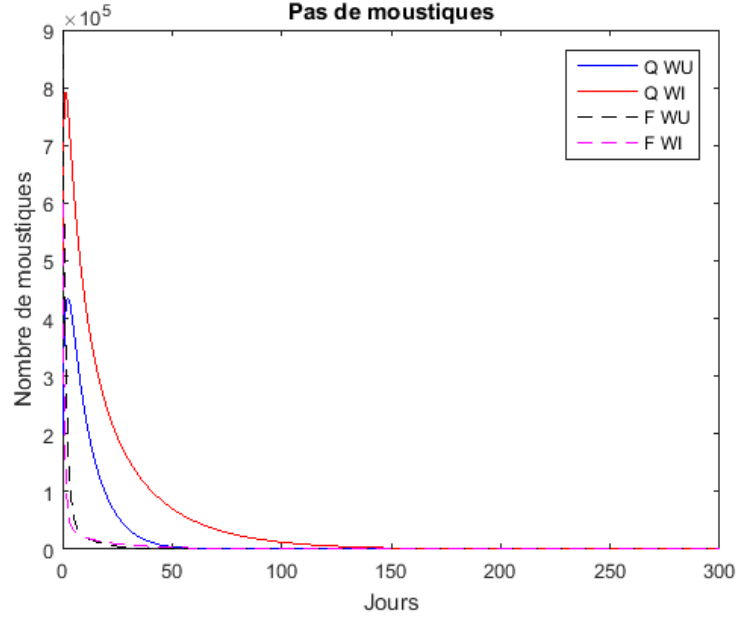


FIGURE 3.1 – Point d'équilibre sans moustique

Les conditions initiales pour la Figure 3.1 sont :

$$(Q_{\bar{w}}(0), Q_w(0), F_{\bar{w}}(0), F_w(0)) = (200000, 500000, 900000, 600000)$$

Paramètres	K	$\phi_{\bar{w}}$	ϕ_w	ρ_2	ψ	μ_a	μ_w	$\mu_{\bar{w}}$
Valeurs	2000000	1	2	0.05	0.11	0.02	1.17	0.7

TABLE 3.1 – Les valeurs des paramètres correspondants pour la figure 3.1

Pour $E_2 = (Q_{\bar{w}}^*, 0, F_{\bar{w}}^*, 0)$, où $Q_{\bar{w}}^* = K \left(1 - \frac{1}{R_{0\bar{w}}}\right)$ et $F_{\bar{w}}^* = \frac{\psi K}{2\mu_{\bar{w}}} \left(1 - \frac{1}{R_{0\bar{w}}}\right)$.

Pour que ce point d'équilibre existe, il est nécessaire que $R_{0\bar{w}} > 1$, sinon il n'y aura pas de moustiques WU.

Soit $(R_{0w|\bar{w}})$ le nombre reproductif envahissant défini comme la mesure du nombre de descendants qui seraient infectés par Wolbachia après l'introduction d'une moustique adulte WI typique dans une population de moustiques adultes WU.

Pour calculer $R_{0w|\bar{w}}$, on construit la matrice de la prochaine génération [1], nous considérons :

- ($\mathcal{F}$) : taux d'apparition de nouveaux moustiques infectés par Wolbachia
- ($\mathcal{V}$) : taux de transition tels que la progression vers des moustiques adultes infectés par Wolbachia et les taux de mortalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Q_w \ F_w)^T &= \mathcal{F} - \mathcal{V} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2) \phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K}\right) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu_a + \psi) Q_w \\ -\frac{\psi}{2} Q_w + \mu_w F_w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les matrices F et V sont définies comme suit :

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(E_2)}{\partial x_j} \right) \quad \text{et} \quad V = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i(E_2)}{\partial x_j} \right)$$

Avec x_j représentent les compartiments infectés Q_w et F_w . Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\phi_w (K - Q_{\bar{w}}^*) (1 - \rho_2)}{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ V &= \begin{pmatrix} \mu_a + \psi & 0 \\ -\frac{\psi}{2} & \mu_w \end{pmatrix} \\ V^{-1} &= \frac{1}{\mu_w (\mu_a + \psi)} \begin{pmatrix} \mu_w & 0 \\ \frac{\psi}{2} & \mu_a + \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de la prochaine génération est

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\psi \phi_w (K - Q_{\bar{w}}^*) (1 - \rho_2)}{2(\mu_a + \psi) \mu_w K} & \frac{\phi_w (K - Q_{\bar{w}}^*) (1 - \rho_2)}{\mu_w K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de reproduction de base est la plus grande valeur propre absolue de FV^{-1} , notée par $M(FV^{-1})$.

$$\begin{aligned}
R_{0w|\bar{w}} &= M(FV^{-1}) = \frac{\psi\phi_w(K - Q_{\bar{w}}^*)(1 - \rho_2)}{2(\mu_a + \psi)\mu_w K} \\
&= \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)}{2(\mu_a + \psi)\mu_w R_{0\bar{w}}} \\
&= \frac{R_{0w}(1 - \rho_2)}{R_{0\bar{w}}} \\
&= \frac{\phi_w\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}\mu_w}
\end{aligned}$$

Le terme $(1 - \rho_2)$ montre l'effet de la proportion de moustiques au stade aquatique qui sont WI à la suite de l'accouplement entre les moustiques mâles WU et les moustiques femelles WI sur la probabilité que les moustiques WI remplacent les moustiques WU.[1]

Théorème 3.2 *Si $R_{0\bar{w}} > 1$ et $R_{0w|\bar{w}} < 1$, alors le point d'équilibre E_2 est localement stable.*

PREUVE. Le jacobien à E_2 est donné par

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -(\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}} & (\mu_a + \psi)(1 - R_{0\bar{w}}) & \frac{\phi_{\bar{w}}}{R_{0\bar{w}}} & \frac{(\rho_2\phi_w - \phi_{\bar{w}})}{R_{0\bar{w}}} \\ 0 & -(\mu_a + \psi) & 0 & \frac{\phi_w(1 - \rho_2)}{R_{0\bar{w}}} \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\bar{w}} & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_w \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à la matrice $J(E_2)$:

$$|J(E_2) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda a_1 + a_2)(\lambda^2 + \lambda b_1 + b_2) = 0$$

Avec a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des coefficients définis par :

$$a_1 = \mu_{\bar{w}} + (\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}$$

$$a_2 = \frac{2\mu_{\bar{w}}^2 + \phi_{\bar{w}}\psi}{2\mu_{\bar{w}}}$$

$$a_2 = (\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}\mu_{\bar{w}} - \frac{\psi}{2} \frac{\phi_{\bar{w}}}{R_{0\bar{w}}}$$

$$a_2 = \mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi) \left(R_{0\bar{w}} - \frac{\psi\phi_{\bar{w}}}{2\mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}} \right)$$

$$a_2 = \mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)(R_{0\bar{w}} - 1)$$

$$b_1 = \mu_a + \psi + \mu_w$$

$$b_2 = \mu_w(\mu_a + \psi) - \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)}{2R_{0\bar{w}}}$$

$$b_2 = \mu_w(\mu_a + \psi)(1 - R_{0w|\bar{w}})$$

Il est clair que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ et si $R_{0\bar{w}} > 1$, alors $a_2 > 0$. De même, si $R_{0w|\bar{w}} < 1$, alors $b_2 > 0$.

Donc, si $R_{0\bar{w}} > 1$ et $R_{0w|\bar{w}} < 1$, alors le point d'équilibre E_2 est localement stable. (voir [1])

Pour $E_3 = (0, Q_w^*, 0, F_w^*)$, où $Q_w^* = K \left(1 - \frac{1}{R_{0w}} \right)$ et $F_w^* = \frac{\psi K}{2\mu_w} \left(1 - \frac{1}{R_{0w}} \right)$, ce point d'équilibre correspond aux moustiques WI. Ainsi, pour que ce point d'équilibre existe, il est nécessaire que $R_{0w} > 1$, sinon il n'y aura pas de moustiques WI.

Théorème 3.3 *Si $R_{0w} > 1$ et $\mu_{\bar{w}} > \rho_2\mu_w$, alors le point d'équilibre E_3 est localement stable.*

PREUVE. Le jacobien à E_3 est donné par

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} -(\mu_a + \psi) & 0 & \frac{\rho_2\phi_w}{R_{0w}} & 0 \\ (\mu_a + \psi)(1 - R_{0w}) & -(\mu_a + \psi)R_{0w} & -\frac{\rho_2\phi_w}{R_{0w}} & \frac{\phi_w}{R_{0w}} \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\bar{w}} & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_w \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à la matrice $J(E_3)$:

$$|J(E_3) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda a_1 + a_2)(\lambda^2 + \lambda b_1 + b_2) = 0$$

Avec a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des coefficients définis par :

$$a_1 = \mu_w + (\mu_a + \psi)R_{0w}$$

$$a_1 = \mu_w + \frac{\phi_w \psi}{2\mu_w}$$

$$a_1 = \frac{2\mu_w^2 + \phi_w \psi}{2\mu_w}$$

$$a_2 = (\mu_a + \psi)R_{0w}\mu_w - \frac{\phi_w \psi}{2R_{0w}}$$

$$a_2 = \mu_w(\mu_a + \psi)(R_{0w} - 1)$$

$$b_1 = \mu_a + \psi + \mu_{\bar{w}}$$

$$b_2 = (\mu_a + \psi)\mu_{\bar{w}} - \frac{\rho_2 \phi_w \psi}{2R_{0w}}$$

$$b_2 = (\mu_a + \psi) \left(\mu_{\bar{w}} - \frac{\rho_2 \mu_w \phi_w \psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)R_{0w}} \right)$$

$$b_2 = (\mu_a + \psi)(\mu_{\bar{w}} - \rho_2 \mu_w)$$

On remarque que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ et si $R_{0w} > 1$ alors $a_2 > 0$. De plus, si $\mu_{\bar{w}} > \rho_2 \mu_w$ alors $b_2 > 0$.

Par conséquent, si $R_{0w} > 1$ et $\mu_{\bar{w}} > \rho_2 \mu_w$, alors le point d'équilibre E_3 est localement stable.

Une autre manière d'écrire F_w^* est la suivante :

$$F_w^* = \frac{\psi K}{2\mu_w} \left(1 - \frac{1}{R_{0w}} \right) = \frac{\psi K}{2\mu_w} \left(1 - \frac{(1 - \rho_2)R_{0\bar{w}}}{R_{0w}(1 - \rho_2)R_{0\bar{w}}} \right) = \frac{\psi K}{2\mu_w} \left(1 - \frac{(1 - \rho_2)}{R_{0w|\bar{w}}R_{0\bar{w}}} \right)$$

Le point d'équilibre E_3 peut exister lorsque $R_{0w|\bar{w}} < 1$.

Si $R_{0w|\bar{w}} < \frac{(1-\rho_2)}{R_{0\bar{w}}}$, alors le point d'équilibre E_3 est instable et il est localement stable même si $R_{0w|\bar{w}} < 1$ (voir [1]).

Théorème 3.4 *Si $\mu_{\bar{w}} > \rho_2 \mu_w$, le point d'équilibre E_3 est globalement asymptotiquement stable lorsque $R_{0w|\bar{w}} > 1$ et $R_{0w} > 1$. [1]*

PREUVE. Soit V_3 une fonction de Lyapunov telle que :

$$V_3 = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \int_{Q_w^*}^{Q_w} \left(1 - \frac{Q_w^*}{y} \right) dy + \frac{1}{\mu_w} \int_{F_w^*}^{F_w} \left(1 - \frac{F_w^*}{y} \right) dy.$$

Nous avons $V_3 \geq 0$ et $V(Q_{\bar{w}}^*, Q_w^*, F_{\bar{w}}^*, F_w^*) = 0$.

En dérivant V_3 par rapport au temps :

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \frac{d}{dt} \int_{Q_w^*}^{Q_w} \left(1 - \frac{Q_w^*}{y}\right) dy + \frac{1}{\mu_w} \frac{d}{dt} \int_{F_w^*}^{F_w} \left(1 - \frac{F_w^*}{y}\right) dy.$$

D'après la règle de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \int_{Q_w^*}^{Q_w} \left(1 - \frac{Q_w^*}{y}\right) dy = \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) \frac{dQ_w}{dt}$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_{F_w^*}^{F_w} \left(1 - \frac{F_w^*}{y}\right) dy = \left(1 - \frac{F_w^*}{F_w}\right) \frac{dF_w}{dt}$$

alors

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) \frac{dQ_w}{dt} + \frac{1}{\mu_w} \left(1 - \frac{F_w^*}{F_w}\right) \frac{dF_w}{dt}.$$

En utilisant les équations (3.1b) et (3.1d), on obtient :

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) \left(U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_w\right) + \frac{1}{\mu_w} \left(1 - \frac{F_w^*}{F_w}\right) \left(\frac{\psi}{2}Q_w - \mu_w F_w\right)$$

avec

$$U_1 = \left[\frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right]$$

Un calcul simple donne

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) + \frac{\psi Q_w^*}{2\mu_w} - \frac{\psi Q_w F_w^*}{2\mu_w F_w} - F_w + F_w^*$$

autrement dit

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - F_w \left(1 - \frac{\psi Q_w^*}{2\mu_w F_w}\right) - \frac{\psi Q_w F_w^*}{2\mu_w F_w} + F_w^*$$

puisque

$$F_w = \frac{\psi Q_w}{2\mu_w}$$

et

$$\frac{\psi}{2\mu_w} Q_w^* - F_w^* = 0$$

Ce qui implique

$$-\frac{\psi}{2\mu_w} Q_w^* + F_w^* = 0$$

par suite

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - F_w \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) - \frac{\psi Q_w F_w^*}{2\mu_w F_w} + 2F_w^* - \frac{\psi}{2\mu_w} Q_w^*$$

sachant que

$$\frac{\psi}{2\mu_w} = \frac{F_w^*}{Q_w^*} \quad \text{et} \quad \frac{\psi}{2\mu_w} = \frac{F_w}{Q_w}.$$

Ainsi

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - F_w \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) - \frac{Q_w F_w^{*2}}{Q_w^* F_w} + 2F_w^* - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w}$$

alors

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - F_w \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) + F_w^* \left(2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{dV_3}{dt} = F_w \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) \left[\frac{\psi}{2\mu_w(\mu_a + \psi) F_w} U_1 \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - 1 \right] + F_w^* \left(2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*}\right)$$

On substitue U_1 par son expression, on trouve

$$\frac{dV_3}{dt} = F_w \left(1 - \frac{Q_w^*}{Q_w}\right) \left[\frac{R_{0w}(F_w + (1 - \rho_2)F_{\bar{w}})}{F_w + F_{\bar{w}}} \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - 1 \right] + F_w^* \left(2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*}\right).$$

Une autre manière d'écrire $\frac{dV_3}{dt}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt} &= F_w^* \left(\frac{F_w}{F_w^*} + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - 2 \right) \left(\frac{R_{0w}(F_w + (1 - \rho_2)F_{\bar{w}})}{F_w + F_{\bar{w}}} \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - 1 \right) \\ &\quad + F_w^* \left(2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*} \right) \left(\frac{R_{0w}(F_w + (1 - \rho_2)F_{\bar{w}})}{F_w + F_{\bar{w}}} \left(1 - \frac{Q}{K}\right) \right). \end{aligned}$$

Pour vérifier que $\frac{dV_3}{dt} \leq 0$, on va montrer que :

Pour le deuxième terme on a :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*} &= 2 - \frac{Q_w}{F_w} \frac{\psi}{2\mu_w} - \frac{F_w}{Q_w} \frac{2\mu_w}{\psi} \\ &= -\frac{2F_w}{Q_w} \left(\frac{\mu_w}{\psi} + \frac{\psi Q_w^2}{4\mu_w F_w^2} - \frac{Q_w}{F_w} \right) \\ &= -\frac{2F_w}{Q_w} \left(\frac{4\mu_w^2 F_w^2}{4\psi\mu_w F_w^2} + \frac{\psi^2 Q_w^2}{4\psi\mu_w F_w^2} - \frac{4Q_w\mu_w F_w\psi}{4\psi\mu_w F_w^2} \right) \\ &= -\frac{2F_w}{Q_w} \left(\frac{(2\mu_w F_w - \psi Q_w)^2}{4\psi\mu_w F_w^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*} \leq 0 \quad (3.14)$$

Pour le premier terme :

De l'expression (3.14), on a :

$$- \left[-2 + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} + \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*} \right] \leq 0$$

On ajoute et on soustrait le terme $\frac{F_w}{F_w^*}$:

$$- \left[-2 + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} + \frac{F_w}{F_w^*} + \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*} - \frac{F_w}{F_w^*} \right] \leq 0$$

Ce qui implique

$$- \left[-2 + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} + \frac{F_w}{F_w^*} + \frac{F_w(Q_w^* - Q_w)}{Q_w F_w^*} \right] \leq 0$$

C'est-à-dire

$$\frac{F_w(Q_w - Q_w^*)}{Q_w F_w^*} \leq -2 + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} + \frac{F_w}{F_w^*}$$

Si $Q_w^* \leq Q_w$, alors

$$0 \leq -2 + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} + \frac{F_w}{F_w^*}$$

Par l'application du théorème de Krasovskii-Lasalle :

La dérivée de V_3 s'annule lorsque les termes suivants s'annulent :

$$\left(\frac{F_w}{F_w^*} + \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - 2 \right) = 0$$

et

$$\left(2 - \frac{Q_w F_w^*}{Q_w^* F_w} - \frac{Q_w^* F_w}{Q_w F_w^*} \right) = 0$$

Ces équations s'annulent lorsque :

$$Q_w = Q_w^* \quad \text{et} \quad F_w = F_w^*$$

L'ensemble des points où $\frac{dV_3}{dt} = 0$ est donc

$$\{(Q_w, F_w) = (Q_w^*, F_w^*)\}$$

Ainsi

$$(Q_w, F_w) \longrightarrow (Q_w^*, F_w^*) \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty.$$

On va montrer que $(Q_{\bar{w}}(t), F_{\bar{w}}(t))$ tend vers $(0,0)$ lorsque t tend vers l'infini

Soit

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Q_w = Q_w^* \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} F_w = F_w^*,$$

il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et un $t_1 > 0$ tel que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} F_w \leq F_w^* + \varepsilon \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} Q_w \leq Q_w^* + \varepsilon \quad \text{pour tout } t > t_1.$$

De l'équation (3.1a), on a :

$$\frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} \leq \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{\infty 2} + \rho_2 \phi_w (F_w^* + \varepsilon) F_{\bar{w}}^{\infty}}{F_{\bar{w}}^{\infty} + F_w^* + \varepsilon} \right] \left[1 - \frac{Q_w^* + \varepsilon}{k} \right] - (\mu_a + \psi) Q_{\bar{w}}(t),$$

avec $F_{\bar{w}}^{\infty} = \limsup_{t \rightarrow \infty} F_{\bar{w}}(t)$.

En appliquant le Théorème de comparaison avec $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$Q_{\bar{w}}^{\infty} = \limsup_{t \rightarrow \infty} Q_{\bar{w}}(t) \leq \frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{\infty 2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^{\infty}}{(F_{\bar{w}}^{\infty} + F_w^*)(\mu_a + \psi) R_{0w}}.$$

Si $F_{\bar{w}}^{\infty} = \limsup_{t \rightarrow \infty} F_{\bar{w}}(t) = 0$, alors :

$$Q_{\bar{w}}^{\infty} \leq 0.$$

Sinon :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} F_{\bar{w}} \leq \frac{\psi Q_{\bar{w}}^{\infty}}{2\mu_{\bar{w}}}$$

et :

$$Q_{\bar{w}}^{\infty 2} \left(\frac{\psi}{2\mu_{\bar{w}}} \left[1 - \frac{R_{0\bar{w}}}{R_{0w}} \right] \right) + Q_{\bar{w}}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho_2 \mu_w}{\mu_{\bar{w}}} \right) \leq 0.$$

Ainsi

$$\frac{-2\mu_{\bar{w}} F_w^* \left(1 - \frac{\rho_2 \mu_w}{\mu_{\bar{w}}} \right)}{\psi \left(1 - \frac{R_{0\bar{w}}}{R_{0w}} \right)} \leq Q_{\bar{w}}^{\infty} \leq 0$$

Donc, on peut conclure que $Q_{\bar{w}}(t) \rightarrow 0$ et $F_{\bar{w}}(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Les résultats de cette analyse sont résumés dans la Figure 3.2

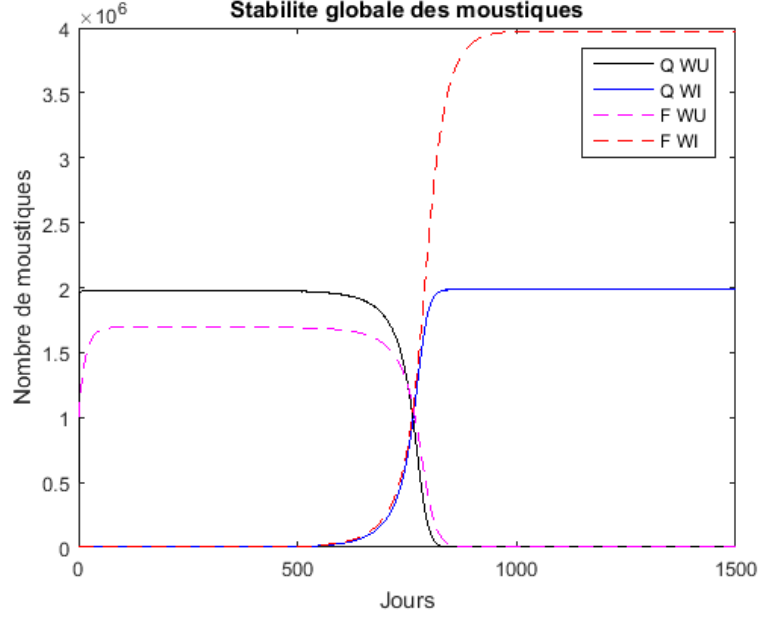


FIGURE 3.2 – Stabilité globale du modèle d'Ae. aegypti

Les conditions initiales pour la Figure 3.2 sont :

$$(Q_{\bar{w}}(0), Q_w(0), F_{\bar{w}}(0), F_w(0)) = (500000, 0, 1000000, 1)$$

Paramètres	K	$\phi_{\bar{w}}$	ϕ_w	ρ_2	ψ	μ_a	μ_w	$\mu_{\bar{w}}$
Valeurs	2000000	15	11.87	0.05	0.12	0.02	0.03	0.07

TABLE 3.2 – Les valeurs des paramètres correspondants pour la figure 3.2

E_4 représente un équilibre dans le modèle d'invasion de Wolbachia où il y a une interaction entre les moustiques WU et WI. Dans ce cas, il est important d'avoir une majorité de moustiques infectés par Wolbachia dans la population pour réduire la propagation des maladies. Le point d'équilibre de coexistence est donné comme suit.

$$E_4 = (Q_{\bar{w}}^*, Q_w^*, F_{\bar{w}}^*, F_w^*) = \left(\frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*, \frac{2}{\psi} \mu_w F_w^*, x F_w^*, F_w^* \right)$$

Avec

$$F_w^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)} \frac{2\mu_w(\mu_a + \psi)}{\psi\phi_w(1 + (1 - \rho_2)x)} \left[\frac{\psi\phi_w(1 + (1 - \rho_2)x)}{2\mu_w(\mu_a + \psi)} - (x + 1) \right]$$

$$F_{\bar{w}}^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)} \frac{1}{R_{0w}(1 + (1 - \rho_2)x)} [R_{0w}(1 + (1 - \rho_2)x) - (x + 1)]$$

$$F_w^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w + \mu_{\bar{w}}x)} \left[\frac{R_{0w}(1 + (1 - \rho_2)x) - (x + 1)}{R_{0w}(1 + (1 - \rho_2)x)} \right]$$

$$x = \frac{R_{0w|\bar{w}}(\mu_{\bar{w}} - \rho_2\mu_w)}{\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)(1 - R_{0w|\bar{w}})}.$$

et

$$F_{\bar{w}}^* = F_w^* x \quad (3.15)$$

Ainsi, pour que ce point d'équilibre existe, il est nécessaire que $\rho_2 < 1$, $R_{0w} > 1$ et $R_{0\bar{w}} > 1$. De plus, l'une des deux conditions suivantes doit être également vraie :

$$1. \ R_{0w|\bar{w}} < 1 \text{ et } \mu_{\bar{w}} > \rho_2\mu_w,$$

$$2. \ R_{0w|\bar{w}} > 1 \text{ et } \mu_{\bar{w}} < \rho_2\mu_w,$$

Pour la première condition, lorsque $R_{0w|\bar{w}} < 1$, cela signifie que les moustiques non infectés par Wolbachia (WU) ont un taux de mortalité tolérable, permettant ainsi aux moustiques infectés par Wolbachia (WI) de survivre. De manière similaire, pour la deuxième condition, si $R_{0w|\bar{w}} > 1$, une certaine tolérance est observée. Par conséquent, tous les points d'équilibre du (3.1a - 3.1d) peuvent coexister lorsque $R_{0w|\bar{w}} < 1$.

Théorème 3.5 *Si $\rho_2 < 1$, $R_{0w|\bar{w}} > 1$, $R_{0w} > 1$, $R_{0\bar{w}} > 1$ et $\mu_{\bar{w}} < \rho_2\mu_w$, alors le point d'équilibre E_4 est localement stable .*

PREUVE. Le jacobien calculé au point E_4 est donné par

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\bar{w}} & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_w \end{pmatrix}$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ et b_4 sont des coefficients définis par :

$$a_1 = - \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{k(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)} \right] - (\mu_a + \psi)$$

$$a_2 = - \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{k(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)} \right]$$

$$a_3 = \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + 2\phi_{\bar{w}} F_w^* F_{\bar{w}}^* + \rho_2 \phi_w F_w^{*2}}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

D'après l'équation (3.15) :

$$a_3 = \left[\frac{\phi_{\bar{w}} (x F_w)^2 + 2\phi_{\bar{w}} F_w^* x F_w^* + \rho_2 \phi_w F_w^{*2}}{(x F_w^* + F_w^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

alors

$$a_3 = \left[\frac{\phi_{\bar{w}} x (x + 2) + \rho_2 \phi_w}{(x + 1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

$$a_4 = \frac{F_{\bar{w}}^{*2} (\rho_2 \phi_w - \phi_{\bar{w}})}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

De l'équation (3.15), on obtient :

$$a_4 = \frac{x^2 (\rho_2 \phi_w - \phi_{\bar{w}})}{(x + 1)^2} \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

$$b_1 = - \left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{k(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)} \right]$$

$$b_2 = - \left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{k(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)} \right] - (\mu_a + \psi)$$

$$b_3 = - \frac{\rho_2 \phi_w F_w^{*2}}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

D'après l'équation (3.15), on trouve :

$$b_3 = -\frac{\rho_2 \phi_w}{(x+1)^2} \left(1 - \frac{Q^*}{K}\right)$$

$$b_4 = \left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + 2\phi_w F_w^* F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^{*2}}{(F_w^* + F_w^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K}\right)$$

De l'équation (3.15), on obtient :

$$b_4 = \left[\frac{\phi_w + 2\phi_w x + (1 - \rho_2) \phi_w x^2}{(x+1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K}\right)$$

$$b_4 = \left[\frac{\phi_w (1 + x(2 + (1 - \rho_2)x))}{(x+1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K}\right)$$

L'équation caractéristique associée à la matrice $J(E_4)$

$$|J(E_4) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + \lambda^3 e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda e_3 + e_4 = 0$$

Avec e_1, e_2, e_3 et e_4 sont des coefficients définis par :

$$e_1 = -a_1 - b_2 + \mu_{\bar{w}} + \mu_w$$

$$e_2 = a_1 b_2 - b_1 a_2 + \mu_{\bar{w}} \mu_w + (\mu_{\bar{w}} + \mu_w)(-a_1 - b_2) - \frac{\psi}{2}(b_4 + a_3)$$

$$e_2 = \left(-b_2 \mu_w - \frac{\psi}{2} b_4\right) + (-a_1 + \mu_{\bar{w}})(-b_2 + \mu_w) + \left(-a_1 \mu_{\bar{w}} - \frac{\psi}{2} a_3\right) - a_2 b_1$$

$$e_3 = (\mu_{\bar{w}} + \mu_w)(a_1 b_2 - b_1 a_2) + \mu_{\bar{w}} \mu_w (-a_1 - b_2) + \frac{\psi}{2}(b_4 a_1 - b_4 \mu_{\bar{w}} - b_1 a_4 + a_3 b_2 - a_3 \mu_w - a_2 b_3)$$

$$e_3 = \left(-b_2 \mu_w - \frac{\psi}{2} b_4\right) (-a_1 + \mu_{\bar{w}}) + (-b_2 + \mu_w) \left(-a_1 \mu_{\bar{w}} - \frac{\psi}{2} a_3\right) + b_1 \left(-a_2 \mu_w - \frac{\psi}{2} a_4\right) + a_2 \left(-b_1 \mu_w - \frac{\psi}{2} b_3\right)$$

$$e_4 = \frac{\psi^2}{4}(a_3 b_4 - a_4 b_3) + \frac{\psi}{2} [(b_4 a_1 - b_1 a_4) \mu_{\bar{w}} + (a_3 b_2 - a_2 b_3) \mu_w] + \mu_{\bar{w}} \mu_w (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$e_4 = \left(-a_1 \mu_{\bar{w}} - \frac{\psi}{2} a_3\right) \left(-b_2 \mu_w - \frac{\psi}{2} b_4\right) - \left(-a_2 \mu_w - \frac{\psi}{2} a_4\right) \left(-b_1 \mu_{\bar{w}} - \frac{\psi}{2} b_3\right)$$

Par l'application du critère de Routh-Hurwitz

$$H_1 = e_1$$

$$H_2 = e_1 e_2 - e_3$$

$$H_3 = e_1 e_2 e_3 - e_1^2 e_4 - e_3^2$$

$$H_4 = e_4(e_1 e_2 e_3 - e_1^2 e_4 - e_3^2)$$

On remarque que $H_1 > 0$, $H_2 > 0$ et si $e_1 e_2 e_3 > e_1^2 e_4 + e_3^2$ alors $H_3 > 0$ et $H_4 > 0$.

Par conséquent, le point d'équilibre E_4 est localement stable.

La démonstration de la stabilité du point d'équilibre E_4 est résumée dans la Figure 3.3

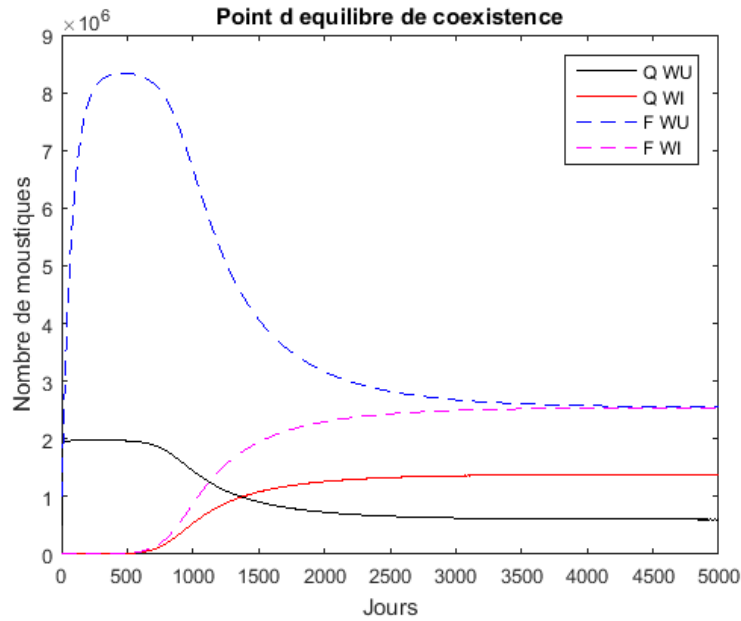


FIGURE 3.3 – La stabilité globale du point d'équilibre de coexistence

Les conditions initiales pour la Figure 3.3 sont :

$$(Q_w(0), Q_w(0), F_w(0), F_w(0)) = (500000, 0, 1000000, 1)$$

Paramètres	K	$\phi_{\bar{w}}$	ϕ_w	ρ_2	ψ	μ_a	μ_w	$\mu_{\bar{w}}$
Valeurs	2000000	3	20	0.5	0.11	0.02	0.03	0.013

TABLE 3.3 – Les valeurs des paramètres correspondants pour la figure 3.3

3.2 Modèle de Wolbachia avec transmission de maladie

Dans cette partie, nous allons étudier le modèle de Wolbachia en prenant en compte que $\rho_1 \in (0, 1]$ et $\sigma > 0$. Cela signifie que la transmission maternelle imparfaite de Wolbachia est présente pour les moustiques femelles WI et les mâles moustiques, et qu'il y a une perte d'infection chez les moustiques adultes infectés.

3.2.1 Points d'équilibre

La recherche des états d'équilibre se traduit par la résolution des équations suivantes :

$$\left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_{\bar{w}}^* = 0 \quad (3.16)$$

$$\left[\frac{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^{*2} + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) - (\mu_a + \psi) Q_w^* = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}}^* + \sigma F_w^* - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\psi}{2} Q_w^* - \sigma F_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \quad (3.19)$$

D'après les équations (3.18) et (3.19), on a :

$$Q^* = \frac{2}{\psi} (\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)$$

$$Q_{\bar{w}}^* = \frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)$$

$$Q_w^* = \frac{2}{\psi} (\mu_w + \sigma) F_w^*$$

En remplaçant Q^* , $Q_{\bar{w}}^*$ et Q_w^* dans les équations (3.16) et (3.17), on obtient :

$$\left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*) = 0$$

et

$$F_w^* = 0 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (\mu_w + \sigma) = 0$$

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*}{F_{\bar{w}}^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*) = 0 \\ F_w^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_{\bar{w}}^* + \sigma F_w^* - \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* - \sigma F_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

puisque

$$F_w^* = 0$$

alors

$$Q_w^* = 0$$

La première équation du système (3.20) devient :

$$\frac{\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2}}{F_{\bar{w}}^*} \left(1 - \frac{2\mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^* = 0$$

ce qui implique

$$F_{\bar{w}}^* = 0 \quad \text{ou} \quad \phi_{\bar{w}} \left(1 - \frac{2\mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} = 0.$$

Si

$$F_{\bar{w}}^* = 0$$

alors

$$Q_{\bar{w}}^* = 0.$$

ainsi, le premier point d'équilibre est :

$$P_1 = (0, 0, 0, 0).$$

Si

$$\phi_{\bar{w}} \left(1 - \frac{2\mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \mu_{\bar{w}} = 0$$

alors

$$F_{\bar{w}}^* = \left(1 - \frac{1}{R_{0\bar{w}}} \right) \frac{K\psi}{2\mu_{\bar{w}}}.$$

Comme

$$Q_{\bar{w}}^* = \frac{2\mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*}{\psi}$$

donc

$$Q_w^* = K \left(1 - \frac{1}{R_{0w}} \right)$$

Par conséquent, le deuxième point d'équilibre est :

$$P_2 = (Q_w^*, 0, F_w^*, 0).$$

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_w^*}{F_w^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_w F_w^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_w F_w^*) = 0 \\ \left[\frac{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*}{F_w^* + F_w^*} \right] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_w F_w^*)}{K\psi} \right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (\mu_w + \sigma) = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* + \sigma F_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \\ \frac{\psi}{2} Q_w^* - \sigma F_w^* - \mu_w F_w^* = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

De la deuxième équation du système (3.21) on obtient :

$$\frac{1}{F_w^* + F_w^*} \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_w F_w^*)}{K\psi} \right) = (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (\mu_w + \sigma) \frac{1}{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*} \quad (3.22)$$

On remplace (3.22) dans la première équation du système (3.21) :

$$\left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_w^*}{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*} \right] (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (\mu_w + \sigma) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_w F_w^*) = 0$$

Ce qui implique

$$(\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} \left(\left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_w^*}{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*} \right] (\mu_w + \sigma) - (-\sigma F_w^* + \mu_w F_w^*) \right) = 0$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{\phi_w F_w^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_w^*}{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_w^*} \right] (\mu_w + \sigma) + \sigma F_w^* - \mu_w F_w^* = 0$$

Un calcul simple donne

$$F_w^{*2} [\phi_w (\sigma + \rho_1 \mu_w)] + F_w^* F_w^* [\phi_w (\sigma + \rho_2 \mu_w - \mu_w (1 - \rho_1))] + F_w^{*2} \left[\phi_w (\mu_w + \sigma) \left(1 - \frac{\mu_w (1 - \rho_2) \phi_w}{\phi_w (\mu_w + \sigma)} \right) \right] = 0$$

On pose :

$$B_1 = \phi_w (\sigma + \rho_1 \mu_w)$$

$$B_2 = \phi_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))$$

$$B_3 = \phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma) \left(1 - \frac{\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)\phi_w}{\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} \right)$$

alors

$$F_w^{*2} B_1 + F_w^* F_{\bar{w}}^* B_2 + F_{\bar{w}}^{*2} B_3 = 0$$

$$\Rightarrow F_w^{*2} + F_w^* F_{\bar{w}}^* \frac{B_2}{B_1} + F_{\bar{w}}^{*2} \frac{B_3}{B_1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(F_w^* + F_{\bar{w}}^* \frac{B_2}{2B_1} \right)^2 - F_{\bar{w}}^{*2} \frac{B_2^2}{4B_1^2} + F_{\bar{w}}^{*2} \frac{B_3}{B_1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(F_w^* + F_{\bar{w}}^* \frac{B_2}{2B_1} \right)^2 - F_{\bar{w}}^{*2} \left(\frac{B_2^2}{4B_1^2} - \frac{B_3}{B_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(F_w^* + F_{\bar{w}}^* \frac{B_2}{2B_1} \right)^2 - \frac{F_{\bar{w}}^{*2}}{4B_1^2} (B_2^2 - 4B_1 B_3) = 0$$

puisque $B_1 > 0$ on choisit $B_3 < 0$

Par suite

$$\left(F_w^* + F_{\bar{w}}^* \frac{B_2}{2B_1} \right)^2 - \left(\frac{F_{\bar{w}}^*}{2B_1} \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3} \right)^2 = 0$$

ce qui implique

$$\left(F_w^* + \frac{F_{\bar{w}}^*}{2B_1} \left(B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3} \right) \right) \left(F_w^* + \frac{F_{\bar{w}}^*}{2B_1} \left(B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3} \right) \right) = 0$$

ainsi

$$F_w^* + \frac{F_{\bar{w}}^*}{2B_1} \left(B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad F_w^* + \frac{F_{\bar{w}}^*}{2B_1} \left(B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3} \right) = 0$$

On veut une solution positive, donc on prend

$$F_w^* = \left(\frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3}}{2B_1} \right) F_{\bar{w}}^*$$

on pose

$$C_1 = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3}}{2B_1}$$

alors

$$F_w^* = C_1 F_{\bar{w}}^* \quad (3.23)$$

D'après la première équation du système (3.21), on obtient :

$$[\phi_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^{*2} + \rho_1 \phi_w F_w^{*2} + \rho_2 \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^*] \left(1 - \frac{2(\mu_w F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*)}{K\psi}\right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*) (F_{\bar{w}}^* + F_w^*) = 0$$

On remplace par l'équation (3.23), on trouve :

$$F_{\bar{w}}^{*2} \left[(\phi_{\bar{w}} + \rho_1 \phi_w C_1^2 + \rho_2 \phi_w C_1) \left(1 - F_{\bar{w}}^* \frac{2(\mu_w C_1 + \mu_{\bar{w}})}{K\psi}\right) \right] + F_{\bar{w}}^{*2} \left[-(\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma C_1 + \mu_{\bar{w}})(1 + C_1) \right] = 0$$

Si $F_{\bar{w}}^* = 0$, alors

$$P_1 = (0, 0, 0, 0)$$

ainsi

$$(\phi_{\bar{w}} + \rho_1 \phi_w C_1^2 + \rho_2 \phi_w C_1) \left(1 - F_{\bar{w}}^* \frac{2(\mu_w C_1 + \mu_{\bar{w}})}{K\psi}\right) - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma C_1 + \mu_{\bar{w}})(1 + C_1) = 0$$

ce qui implique

$$F_{\bar{w}}^* = \frac{K\psi \left[\phi_{\bar{w}} + \rho_1 \phi_w C_1^2 + \rho_2 \phi_w C_1 - (\mu_a + \psi) \frac{2}{\psi} (-\sigma C_1 + \mu_{\bar{w}})(1 + C_1) \right]}{2(\mu_w C_1 + \mu_{\bar{w}}) (\phi_{\bar{w}} + \rho_1 \phi_w C_1^2 + \rho_2 \phi_w C_1)}$$

$$F_w^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w C_1 + \mu_{\bar{w}})} \left(1 - \frac{2(\mu_a + \psi)(-\sigma C_1 + \mu_{\bar{w}})(1 + C_1)}{\psi (\phi_{\bar{w}} + \rho_1 \phi_w C_1^2 + \rho_2 \phi_w C_1)}\right)$$

$$F_{\bar{w}}^* = \frac{K\psi}{2(\mu_w C_1 + \mu_{\bar{w}})} \left(1 - \frac{2(\mu_a + \psi)(-\sigma C_1 + \mu_{\bar{w}})(1 + C_1)}{\psi (\phi_{\bar{w}} + \phi_w C_1(\rho_1 C_1 + \rho_2))}\right)$$

Le dernier point d'équilibre est donc :

$$P_3 = (Q_{\bar{w}}^*, Q_w^*, F_{\bar{w}}^*, F_w^*) = \left(\frac{2}{\psi} (-\sigma F_w^* + \mu_{\bar{w}} F_{\bar{w}}^*), \frac{2}{\psi} F_w^* (\mu_w + \sigma), F_{\bar{w}}^*, C_1 F_{\bar{w}}^* \right)$$

3.2.2 Stabilité

Le modèle d'invasion de Wolbachia (2.4a-2.4d) identifie trois points d'équilibre :

$P_1 = (0, 0, 0, 0)$ où il n'y a pas de moustiques, $P_2 = (Q_{\bar{w}}^*, 0, F_{\bar{w}}^*, 0)$ où il y a des moustiques WU et $P_3 = (Q_{\bar{w}}^*, Q_w^*, F_{\bar{w}}^*, F_w^*)$ où les moustiques WU et WI coexistent.

Dans ce modèle, l'absence de point d'équilibre pour les moustiques WI est due à la perte continue du taux d'infection par Wolbachia (σ) par individu.

Pour le point d'équilibre $P_1 = (0,0,0,0)$, comme on l'a vu précédemment, quand $R_{0w} < 1$ et $R_{0\bar{w}} < 1$, la solution tend vers cet équilibre trivial.

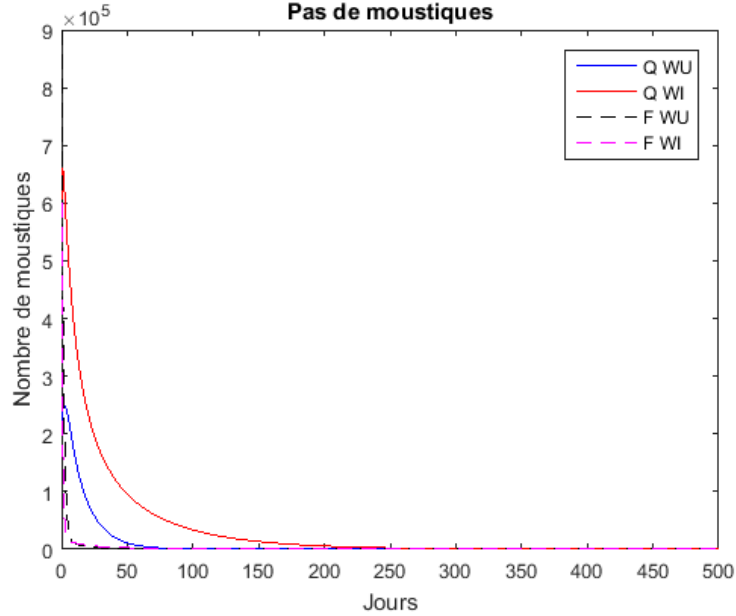


FIGURE 3.4 – Point d'équilibre sans moustique

Les conditions initiales pour la Figure 3.4 sont :

$$(Q_{\bar{w}}(0), Q_w(0), F_{\bar{w}}(0), F_w(0)) = (200000, 600000, 900000, 600000)$$

Paramètres	K	$\phi_{\bar{w}}$	ϕ_w	ρ_2	ψ	μ_a	μ_w	$\mu_{\bar{w}}$	ρ_1	σ
Valeurs	1000000	1.05	2.6	0.05	0.07	0.02	1.2	0.7	0.01	0.04

TABLE 3.4 – Les valeurs des paramètres correspondants pour la figure 3.4

Pour le point d'équilibre $P_2 = (Q_{\bar{w}}^*, 0, F_{\bar{w}}^*, 0)$, où $Q_{\bar{w}}^* = K \left(1 - \frac{1}{R_{0\bar{w}}}\right)$ et $F_{\bar{w}}^* = \frac{\psi K}{2\mu_{\bar{w}}} \left(1 - \frac{1}{R_{0\bar{w}}}\right)$.

Tout d'abord, on va calculer le nombre reproductif envahissant ($R_{0w|\bar{w}}^1$). Pour calculer $R_{0w|\bar{w}}^1$ nous considérons :

-($\mathcal{F}$) : taux d'apparition de nouvelles moustiques infectés par Wolbachia.

-($\mathcal{V}$) : taux de transition tels que la progression vers des moustiques adultes

infectés par Wolbachia et les taux de mortalité.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Q_w \ F_w)^T &= \mathcal{F} - \mathcal{V} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{(1-\rho_1)\phi_w F_w^2 + (1-\rho_2)\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] (1 - \frac{Q}{K}) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu_a + \psi)Q_w \\ -\frac{\psi}{2}Q_w + \sigma F_w + \mu_w F_w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les matrices F et V sont définies comme suit :

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(E2)}{\partial x_j} \right) \quad \text{et} \quad V = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i(E2)}{\partial x_j} \right)$$

où x_j représentent les compartiments infectés Q_w et F_w . Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\phi_w(k - Q_w^*)(1 - \rho_2)}{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ V &= \begin{pmatrix} \mu_a + \psi & 0 \\ -\frac{\psi}{2} & \sigma + \mu_w \end{pmatrix} \\ V^{-1} &= \frac{1}{(\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi)} \begin{pmatrix} \sigma + \mu_w & 0 \\ \frac{\psi}{2} & \mu_a + \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de la prochaine génération est

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\psi\phi_w(K - Q_w^*)(1 - \rho_2)}{2(\mu_a + \psi)(\sigma + \mu_w)K} & \frac{\phi_w(K - Q_w^*)(1 - \rho_2)}{(\sigma + \mu_w)K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de reproduction de base est la plus grande valeur propre absolue de FV^{-1} , notée par $M(FV^{-1})$.

$$\begin{aligned}
R_{0w|\bar{w}}^1 &= M(FV^{-1}) = \frac{\psi\phi_w(K - Q_{\bar{w}}^*)(1 - \rho_2)}{2(\mu_a + \psi)(\sigma + \mu_w)K} \\
&= \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)}{2(\mu_a + \psi)(\sigma + \mu_w)R_{0\bar{w}}} \\
&= \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)\mu_w}{2\mu_w(\mu_a + \psi)(\sigma + \mu_w)R_{0\bar{w}}} \\
&= \frac{R_{0w}(1 - \rho_2)\mu_w}{(\sigma + \mu_w)R_{0\bar{w}}} \\
&= \frac{\phi_w\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w)}
\end{aligned}$$

voir [17].

Selon l'expression, le terme $\frac{\mu_{\bar{w}}}{\mu_w + \sigma}$ montre que la perte d'infection par Wolbachia (σ) réduit $R_{0w|\bar{w}}^1$, ce qui diminue la capacité des moustiques infectés par Wolbachia à se propager dans la population de moustiques non infectés. L'absence de ρ_1 dans l'expression indique que la transmission maternelle imparfaite entre les moustiques adultes infectés par Wolbachia n'affecte pas le nombre reproductif ajusté [1].

Théorème 3.6 *Si $R_{0\bar{w}} > 1$ et $R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$, alors le point d'équilibre P_2 est localement stable.*

PREUVE. Le jacobien au point P_2 est donné par

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -(\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}} & (\mu_a + \psi)(1 - R_{0\bar{w}}) & \frac{\phi_{\bar{w}}}{R_{0\bar{w}}} & \frac{(\rho_2\phi_w - \phi_{\bar{w}})}{R_{0\bar{w}}} \\ 0 & -(\mu_a + \psi) & 0 & \frac{\phi_w(1 - \rho_2)}{R_{0\bar{w}}} \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\bar{w}} & \sigma \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -(\mu_w + \sigma) \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à la matrice $J(P_2)$

$$|J(P_2) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda a_1 + a_2)(\lambda^2 + \lambda b_1 + b_2) = 0$$

avec a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des coefficients définis par :

$$a_1 = \mu_{\bar{w}} + (\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}$$

$$a_1 = \frac{2\mu_{\bar{w}}^2 + \phi_{\bar{w}}\psi}{2\mu_{\bar{w}}}$$

$$a_2 = (\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}\mu_{\bar{w}} - \frac{\psi}{2} \frac{\phi_{\bar{w}}}{R_{0\bar{w}}}$$

$$a_2 = \mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi) \left(R_{0\bar{w}} - \frac{\psi\phi_{\bar{w}}}{2\mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}} \right)$$

$$a_2 = \mu_{\bar{w}}(\mu_a + \psi)(R_{0\bar{w}} - 1)$$

$$b_1 = \mu_a + \psi + \sigma + \mu_w$$

$$b_2 = (\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi) - \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)}{2R_{0\bar{w}}}$$

$$b_2 = (\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi) \left(1 - \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)}{2(\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}} \right)$$

$$b_2 = (\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi) \left(1 - \frac{\psi\phi_w(1 - \rho_2)\mu_w}{2\mu_w(\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi)R_{0\bar{w}}} \right)$$

$$b_2 = (\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi) \left(1 - \frac{R_{0w}(1 - \rho_2)\mu_w}{(\sigma + \mu_w)R_{0\bar{w}}} \right)$$

$$b_2 = (\sigma + \mu_w)(\mu_a + \psi)(1 - R_{0w|\bar{w}}^1)$$

Il est évident que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ et si $R_{0\bar{w}} > 1$, alors $a_2 > 0$. De plus, si $R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$ alors $b_2 > 0$.

Donc, si $R_{0\bar{w}} > 1$ et $R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$, alors le point d'équilibre P_2 est localement stable.

Théorème 3.7 *Pour la condition $\sigma + \rho_2\mu_w \geq \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$, P_2 est le seul point d'équilibre non trivial lorsque $R_{0\bar{w}} > 1$ et $R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$ [1].*

PREUVE. Tout d'abord, pour que P_3 existe, nous devons avoir $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, et $B_3 < 0$. Cependant, sous les conditions données, nous observons que

$$B_1 = \phi_w(\sigma + \rho_1\mu_w) .$$

$$B_2 = \phi_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))$$

$$B_3 = \phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma) \left(1 - \frac{\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)\phi_w}{\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} \right) = \phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma) \left(1 - R_{0w|\bar{w}}^1 \right)$$

On remarque que $B_1 > 0$ est toujours vérifié, $B_2 > 0$ si $\sigma + \rho_2\mu_w > \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$ et $B_3 < 0$ si $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$.

Par conséquent, le point P_3 n'existe pas sous les conditions $\sigma + \rho_2\mu_w \geq \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$, $R_{0\bar{w}} > 1$ et $R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$, ce qui implique que P_2 est le seul point d'équilibre non trivial, alors P_2 est globalement stable.

$\sigma + \rho_2\mu_w \geq \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$ c'est une condition qui exprime l'avantage des moustiques non infectés par Wolbachia par rapport aux moustiques infectés par Wolbachia. En conséquence, les moustiques infectés par Wolbachia ne peuvent pas remplacer les moustiques non infectés par Wolbachia sauf s'il y a une intervention humaine pour éliminer tous les moustiques non infectés par Wolbachia et les remplacer par des moustiques infectés par Wolbachia, ce qui est généralement peu réaliste[1].

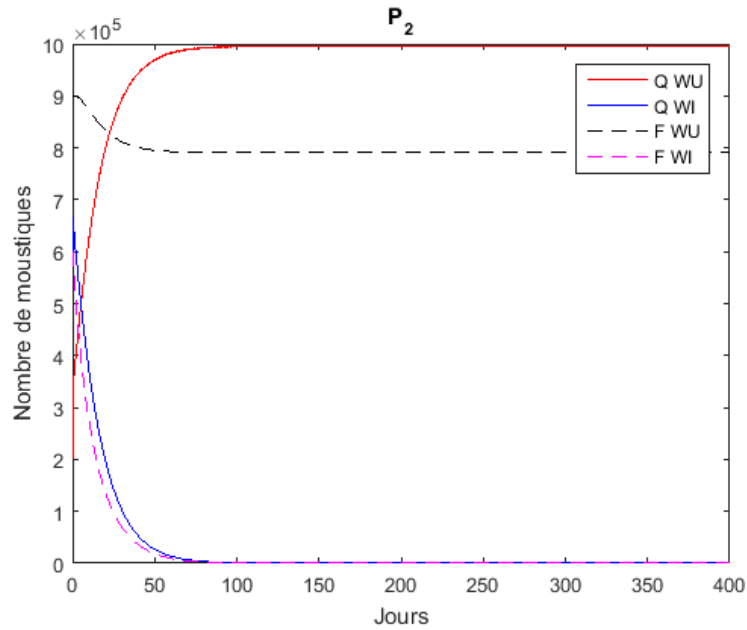


FIGURE 3.5 – Stabilité des moustiques non infectés par Wolbachia

Les conditions initiales pour la Figure 3.5 sont :

$$(Q_{\bar{w}}(0), Q_w(0), F_{\bar{w}}(0), F_w(0)) = (200000, 600000, 900000, 600000)$$

Paramètres	K	$\phi_{\bar{w}}$	ϕ_w	ρ_2	ψ	μ_a	μ_w	$\mu_{\bar{w}}$	ρ_1	σ
Valeurs	1000000	38	47.3	0.6	0.1	0.02	0.07	0.063	0.05	0.07

TABLE 3.5 – Les valeurs des paramètres correspondants pour la figure 3.5

Proposition 3.1 *Si $\sigma + \rho_2\mu_w < \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$, alors l'une des deux conditions suivantes garantit une solution positive pour F_w^* :*

- (i) $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$
- (ii) $1 - \frac{\mu_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2 R_{0w}}{4\mu_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)(\sigma + \rho_1\mu_w)R_{0\bar{w}}} < R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$

PREUVE. Pour que la solution reste positive pour F_w^* :

Premièrement, on a :

$$F_w^* = C_1 F_{\bar{w}}^*$$

avec

$$C_1 = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1}$$

sachant que $B_1 > 0$

et comme on a $\sigma + \rho_2\mu_w < \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$, alors :

$$B_2 < 0$$

Puisqu'on veut une solution positive, on choisit $B_3 < 0$ ce qui est vérifié si $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$, ce qui signifie que C_1 est positif

et donc F_w^* reste positif.

Deuxièmement, pour montrer que la solution reste positive, il est nécessaire que

$$B_2^2 - 4B_1B_3 > 0$$

$$\Rightarrow \phi_w^2(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2 - 4\phi_w(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma) \left(1 - R_{0w|\bar{w}}^1\right) > 0$$

$$\Rightarrow \phi_w^2(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2 > 4\phi_w(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma) \left(1 - R_{0w|\bar{w}}^1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_w^2(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{4\phi_w(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} > 1 - R_{0w|\bar{w}}^1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{4(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} > 1 - R_{0w|\bar{w}}^1 > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\phi_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{4(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} < -1 + R_{0w|\bar{w}}^1 < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\phi_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{4(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} < R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\phi_w\psi\mu_w(\mu_a + \psi)2\mu_{\bar{w}}(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{2\mu_w(\mu_a + \psi)\psi\mu_{\bar{w}}4(\sigma + \rho_1\mu_w)\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma)} < R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$$

ainsi

$$1 - \frac{R_{0w}\mu_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{R_{0\bar{w}}4\mu_{\bar{w}}(\sigma + \rho_1\mu_w)(\mu_w + \sigma)} < R_{0w|\bar{w}}^1 < 1$$

On pose

$$R_0^* = \frac{R_{0w}\mu_w(\sigma + \rho_2\mu_w - \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1))^2}{R_{0\bar{w}}4\mu_{\bar{w}}(\sigma + \rho_1\mu_w)(\mu_w + \sigma)}$$

Si $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$ et $R_{0\bar{w}} > 1$, cela signifie que le point P_2 n'est pas stable. Par conséquent, P_3 est le seul point stable possible dans le quadrant positif $\mathbb{R}_+^4$.

Théorème 3.8 *Si $\sigma + \rho_2\mu_w < \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$ et $R_{0w|\bar{w}}^1 > R_0^*$, alors le point d'équilibre P_3 est localement stable.*

PREUVE. Le jacobien à P_3 est donné par

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \frac{\psi}{2} & 0 & -\mu_{\bar{w}} & \sigma \\ 0 & \frac{\psi}{2} & 0 & -(\sigma + \mu_w) \end{pmatrix}$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ et b_4 sont des coefficients définis par :

$$a_1 = -(\mu_a + \psi) \left[\frac{K - Q_w^*}{K - Q^*} \right]$$

$$a_2 = -\frac{(\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}}^*}{K - Q^*}$$

$$a_3 = \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^{*2} + 2\phi_{\bar{w}}F_w^*F_{\bar{w}}^* + (\rho_2 - \rho_1)\phi_wF_w^{*2}}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

D'après l'équation (3.23) :

$$\begin{aligned} a_3 &= \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^{*2} + 2\phi_{\bar{w}}C_1F_{\bar{w}}^{*2} + (\rho_2 - \rho_1)\phi_wC_1^2F_{\bar{w}}^{*2}}{(F_{\bar{w}}^* + C_1F_{\bar{w}}^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) \\ &= \left[\frac{\phi_{\bar{w}} + 2\phi_{\bar{w}}C_1 + (\rho_2 - \rho_1)\phi_wC_1^2}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} a_3 &= \left[\frac{\phi_{\bar{w}}(1 + 2C_1) + (\rho_2 - \rho_1)\phi_wC_1^2}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) \\ a_4 &= \left[\frac{\rho_1\phi_wF_w^{*2} + 2\phi_w\rho_1F_w^*F_{\bar{w}}^* + \rho_2\phi_wF_{\bar{w}}^{*2} - \phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^{*2}}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.23) :

$$a_4 = \left[\frac{\rho_1\phi_wC_1^2 + 2\phi_w\rho_1C_1 + \rho_2\phi_w - \phi_{\bar{w}}}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

alors :

$$a_4 = \left[\frac{\rho_1 \phi_w C_1 (C_1 + 2) + \rho_2 \phi_w - \phi_{\bar{w}}}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

$$b_1 = -\frac{(\mu_a + \psi) Q_w^*}{K - Q^*}$$

$$b_2 = -(\mu_a + \psi) \left[\frac{K - Q_{\bar{w}}^*}{K - Q^*} \right]$$

$$b_3 = \frac{\phi_w F_w^{*2} (\rho_1 - \rho_2)}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

D'après l'équation (3.23) :

$$b_3 = \frac{\phi_w C_1^2 (\rho_1 - \rho_2)}{(1 + C_1)^2} \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

$$b_4 = \left[\frac{(1 - \rho_1) \phi_w F_w^{*2} + 2(1 - \rho_1) \phi_w F_w^* F_{\bar{w}}^* + (1 - \rho_2) \phi_w F_{\bar{w}}^{*2}}{(F_{\bar{w}}^* + F_w^*)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

D'après l'équation (3.23) :

$$b_4 = \left[\frac{(1 - \rho_1) \phi_w C_1^2 + 2(1 - \rho_1) \phi_w C_1 + (1 - \rho_2) \phi_w}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

$$b_4 = \left[\frac{\phi_w ((1 - \rho_1) C_1 (C_1 + 2) + (1 - \rho_2))}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right)$$

L'équation caractéristique associée à la matrice $J(P_3)$ est

$$\lambda^4 + \lambda^3 e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda e_3 + e_4 = 0$$

avec e_1, e_2, e_3 et e_4 sont des coefficients définis par :

$$e_1 = -a_1 - b_2 + \mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma$$

$$e_1 = (\mu_a + \psi) \left[\frac{K - Q_w^*}{K - Q^*} \right] + (\mu_a + \psi) \left[\frac{K - Q_{\bar{w}}^*}{K - Q^*} \right] + \mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma$$

$$e_1 = \frac{(\mu_a + \psi)}{K - Q^*} (2K - Q^*) + \mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma > 0$$

$$e_2 = a_1 b_2 - b_1 a_2 + \mu_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w) + (\mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma)(-a_1 - b_2) - \frac{\psi}{2}(b_4 + a_3)$$

$$e_2 = \frac{(\mu_a + \psi)^2}{(K - Q^*)^2} (K - Q_w^*)(K - Q_{\bar{w}}^*) - \frac{(\mu_a + \psi)^2}{(K - Q^*)^2} Q_w^* Q_{\bar{w}}^* + \mu_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w) + (\mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma) \frac{(\mu_a + \psi)}{K - Q^*} (2K - Q^*)$$

$$- \frac{\psi}{2} \left(\left[\frac{\phi_w((1 - \rho_1)C_1(C_1 + 2) + (1 - \rho_2))}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) + \left[\frac{\phi_{\bar{w}}(1 + 2C_1) + (\rho_2 - \rho_1)\phi_w C_1^2}{(1 + C_1)^2} \right] \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) \right)$$

$$e_2 = \frac{(\mu_a + \psi)^2}{(K - Q^*)^2} K(K - Q^*) + \mu_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w) + (\mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma) \frac{(\mu_a + \psi)}{(K - Q^*)} (2K - Q^*)$$

$$- \frac{\psi}{2} \left(1 - \frac{Q^*}{K} \right) \left[\phi_w(1 - \rho_1)C_1(C_1 + 2) + \phi_w(1 - \rho_2) + \phi_{\bar{w}}(1 + 2C_1) + (\rho_2 - \rho_1)\phi_w C_1^2 \right]$$

$$e_2 = \frac{(\mu_a + \psi)^2}{(K - Q^*)} K + \mu_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w) + (\mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma) \frac{(\mu_a + \psi)}{(K - Q^*)} (2K - Q^*)$$

$$- \frac{\psi(K - Q^*)}{2K(1 + C_1)^2} \left[\phi_w(1 - \rho_1)C_1(C_1 + 2) + \phi_w(1 - \rho_2) + \phi_{\bar{w}}(1 + 2C_1) + (\rho_2 - \rho_1)\phi_w C_1^2 \right]$$

$$e_3 = (\mu_{\bar{w}} + \mu_w + \sigma)(a_1 b_2 - b_1 a_2) + \mu_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w)(-a_1 - b_2)$$

$$+ \frac{\psi}{2} [-b_4(\mu_{\bar{w}} - a_1) - b_1 a_4 - b_3 \sigma - a_2 b_3 - a_3(\sigma + \mu_w - b_2)]$$

$$e_4 = \mu_{\bar{w}}(\sigma + \mu_w)(a_1 b_2 - b_1 a_2) + \frac{\psi^2}{4}(a_3 b_4 - a_4 b_3) + \frac{\psi}{2}\sigma[a_3(b_2 - b_1) + b_3(a_1 - a_2)]$$

$$+ \frac{\psi}{2}(b_4 a_1 - b_1 a_4)\mu_{\bar{w}} + \frac{\psi}{2}(a_3 b_2 - a_2 b_3)\mu_w$$

Par l'application du critère de Routh-Hurwitz

$$H_1 = e_1$$

$$H_2 = e_1 e_2 - e_3$$

$$H_3 = e_1 e_2 e_3 - e_1^2 e_4 - e_3^2$$

$$H_4 = e_4(e_1 e_2 e_3 - e_1^2 e_4 - e_3^2)$$

Un simple calcul montre que $H_1 > 0$, $H_2 > 0$ et si $e_1 e_2 e_3 > e_1^2 e_4 + e_3^2$, alors $H_3 > 0$ et $H_4 > 0$.

Par conséquent, si $\sigma + \rho_2 \mu_w < \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1)$ et $R_{0w|\bar{w}}^1 > R_0^*$, alors le point d'équilibre P_3 est localement stable.

Si $R_0^* > 1$ alors $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$.

Donc si $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$ et $R_{0\bar{w}} > 1$, cela signifie que le point d'équilibre P_3 est le seul point d'équilibre non trivial, alors P_3 est globalement stable.

La démonstration de la stabilité du point d'équilibre P_3 est résumée dans la Figure 3.6 :

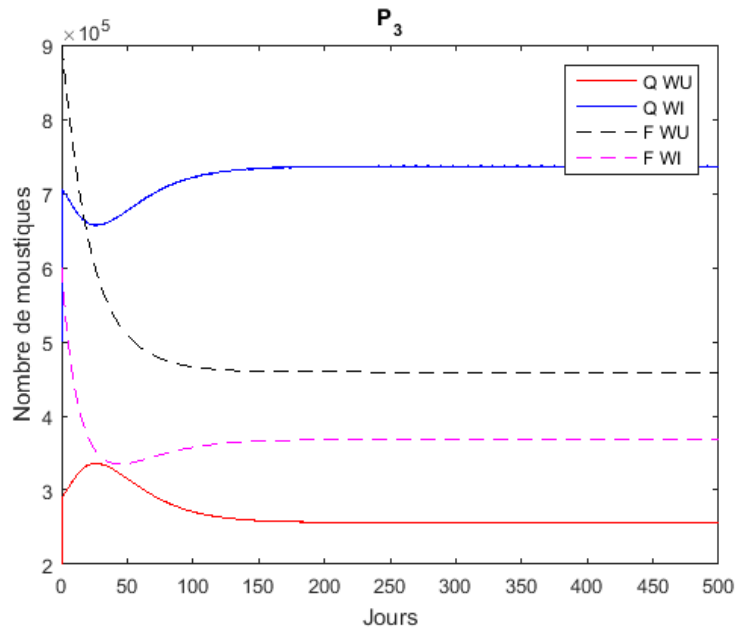


FIGURE 3.6 – stabilité globale du point d'équilibre de coexistence

Les conditions initiales pour la Figure 3.6 sont :

$$(Q_{\bar{w}}(0), Q_w(0), F_{\bar{w}}(0), F_w(0)) = (200000, 500000, 900000, 600000)$$

Paramètres	K	$\phi_{\bar{w}}$	ϕ_w	ρ_2	ψ	μ_a	μ_w	$\mu_{\bar{w}}$	ρ_1	σ
Valeurs	1000000	14	33.8	0.05	0.1	0.02	0.05	0.068	0.04	0.05

TABLE 3.6 – Les valeurs des paramètres correspondants pour la figure 3.6

Chapitre 4

Problème de Contrôle Optimal

Ce chapitre examine l'utilisation du contrôle optimal à introduire pour maintenir la Wolbachia dans les populations de moustiques, afin de réduire la transmission de la dengue.

4.1 Stratégie de libération en présence de la maladie

Dans cette partie, nous allons étudier le cas où $\rho_1 = 0$ et $\sigma = 0$, nous étudierons combien de moustiques infectées par Wolbachia devraient être relâchées périodiquement afin de remplacer les moustiques WU par les infectés (voir [4] et [14]). Les ensembles de paramètres pour garantir les conditions $R_{0w|\bar{w}} > 1$ et $\mu_{\bar{w}} < \rho_2 \mu_w$ pour l'existence de l'équilibre de coexistence sont irréalistes et il sera très difficile de les atteindre, car il y a des limitations sur les paramètres pouvant être contrôlés. Par conséquent, nous devons forcer $R_{0w|\bar{w}} > 1$ et $\mu_{\bar{w}} > \rho_2 \mu_w$ (voir [1] et [4]).

4.1.1 Taux de libération constant

En modifiant l'équation (3.1d), nous obtenons :

$$\frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2} Q_w - (\mu_w - \delta) F_w$$

avec δ qui représente le taux de libération par individu.

Pour la première condition, on a :

$$R_{0w|\bar{w}} > 1$$

ce qui implique

$$\frac{\phi_w \mu_{\bar{w}} (1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}} (\mu_w - \delta)} > 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{\phi_w \mu_{\bar{w}} (1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} > \mu_w - \delta$$

ce qui signifie

$$\delta > \mu_w - \frac{\phi_w \mu_{\bar{w}} (1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}}$$

et pour la deuxième condition, on a :

$$\mu_{\bar{w}} > \rho_2 (\mu_w - \delta)$$

ce qui veut dire

$$\delta > \mu_w - \frac{\mu_{\bar{w}}}{\rho_2}$$

Ainsi, en combinant ces deux conditions, nous obtenons :

$$\max \left(\mu_w - \frac{\mu_{\bar{w}}}{\rho_2}, \mu_w - \frac{\phi_w \mu_{\bar{w}} (1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} \right) < \delta \leq \delta_{\max}$$

voir[1].

4.1.2 Taux de libération variable

Soit $u(t)$ une variable de contrôle, définie sur $\left[\max \left(\mu_w - \frac{\mu_{\bar{w}}}{\rho_2}, \mu_w - \frac{\phi_w \mu_{\bar{w}} (1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} \right), \mu_w \right]$ le problème de libération variable est un problème de contrôle optimal visant à minimiser la fonction $J(u)$, définie par :

$$J(u) = \int_0^{t_f} (c_1 u(t) F_w(t) + c_2 u(t)^2) dt$$

avec des contraintes sur les deux extrémités.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} = \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_2\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}} \\ \frac{dQ_w}{dt} = \left[\frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_w \\ \frac{dF_{\bar{w}}}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_{\bar{w}} - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} \\ \frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_w - (\mu_w - u(t))F_w \\ F_{\bar{w}}(t_f) = 0 \\ F_w(0) = u(0)F_{\bar{w}}(0) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ici, au lieu de résoudre le problème directement, nous résolvons le problème augmenté suivant :

$$J(u) = 10 \left(F_{\bar{w}}(t_f)^2 + (F_w(0) - u(0)F_{\bar{w}}(0))^2 + \int_0^{t_f} (cu(t)F_w(t) + u(t)^2) dt \right)$$

La valeur 10 est choisie de manière arbitraire, car toute autre valeur pourrait être utilisée sans affecter la nature du problème. Ainsi, lorsque la contrainte d'égalité est satisfaite, la fonction de coût augmentée se réduit à la fonction coût d'origine. Cela transforme notre problème en un problème sans contraintes sur les variables d'état. Par conséquent, l'Hamiltonienne, notée H , est définie comme :

$$\begin{aligned} H &= cu(t)F_w(t) + u(t)^2 \\ &+ \lambda_1 \left[\left(\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_2\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right) \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}} \right] \\ &+ \lambda_2 \left[\left(\frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right) \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_w \right] \\ &+ \lambda_3 \left[\frac{\psi}{2}Q_{\bar{w}} - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} \right] \\ &+ \lambda_4 \left[\frac{\psi}{2}Q_w - (\mu_w - u(t))F_w \right]. \end{aligned}$$

D'après le principe du maximum de pontryaguine

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{\bar{w}}} = -\lambda_1 \left(\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_2\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - (\mu_a + \psi) \right) - \lambda_2 \frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - \lambda_3 \frac{\psi}{2}.$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_w} = -\lambda_1 \frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_2\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - \lambda_2 \left(\frac{\phi_w F_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_w F_w F_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - (\mu_a + \psi) \right) - \lambda_4 \frac{\psi}{2}.$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F_{\bar{w}}} = -\lambda_1 \frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + 2\phi_{\bar{w}}F_w F_{\bar{w}} + \rho_2\phi_w F_w^2}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) + \lambda_2 \frac{\rho_2\phi_w F_w^2}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) + \lambda_3 \mu_{\bar{w}}.$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F_w} = -\lambda_1 \frac{F_{\bar{w}}^2(\rho_2\phi_w - \phi_{\bar{w}})}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) - \lambda_2 \frac{\phi_w F_w^2 + 2\phi_w F_w F_{\bar{w}} + (1 - \rho_2)\phi_w F_{\bar{w}}^2}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right)$$

$$+ \lambda_4(\mu_w - u(t)) - cu(t)$$

et les conditions de transversalité :

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3(t_f) = \frac{\partial \psi}{\partial F_{\bar{w}}}(t_f) = 20F_{\bar{w}}(t_f)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = F_w(\lambda_4 + c) + 2u = 0$$

ce qui implique

$$u = -\frac{F_w(\lambda_4 + c)}{2}$$

ainsi

$$u = \min \left(\mu_w, \max \left(-\frac{F_w(\lambda_4 + c)}{2}, \mu_w - \frac{\phi_w \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} \right) \right)$$

voir [1] et [4].

4.2 Stratégie de libération pour la perte de la maladie

Pour ce cas, la stratégie est d'avoir plus de moustiques WI que de moustiques WU (voir [14]).

4.2.1 Taux de libération constant

En modifiant l'équation (2.4d), nous obtenons :

$$\frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2} Q_w - (\mu_w + \sigma - \delta) F_w$$

avec δ qui représente le taux de libération par individu. Comme nous visons à augmenter le nombre de moustiques WI, les conditions nécessaires sont $C_1 > 1$, $\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_1) > \sigma + \rho_2(\mu_w - \delta)$, et $R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$. on a :

$$R_{0w|\bar{w}}^1 > 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{\phi_w \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}(\mu_w + \sigma - \delta)} > 1$$

ce qui signifie

$$\frac{\phi_w \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} > \mu_w + \sigma - \delta$$

alors

$$\mu_w + \sigma - \frac{\phi_w \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} < \delta < \delta_{max}$$

4.2.2 Taux de libération variable

Nous suivons une approche similaire à celle où $\rho_1 = 0$ et $\sigma = 0$.

Soit $u(t)$ une variable de contrôle, définie sur $\left[\mu_w + \sigma - \frac{\phi_w \mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}}, \mu_w\right]$ le problème de libération variable est un problème de contrôle optimal visant à minimiser la fonction $J(u)$, définie par :

$$J(u) = \int_0^{t_f} (c_1 u(t) F_w(t) + c_2 u(t)^2) dt$$

avec des contraintes sur les deux extrémités.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_{\bar{w}}}{dt} = \left[\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_1\phi_wF_w^2 + \rho_2\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}} \\ \frac{dQ_w}{dt} = \left[\frac{(1 - \rho_1)\phi_wF_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_w \\ \frac{dF_{\bar{w}}}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_{\bar{w}} + \sigma F_w - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} \\ \frac{dF_w}{dt} = \frac{\psi}{2}Q_w - \sigma F_w - (\mu_w - u(t))F_w \\ F_{\bar{w}}(t_f) = 0 \\ F_w(0) = u(0)F_{\bar{w}}(0) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Nous résolvons le problème augmenté suivant :

$$J(u) = 10 \left(F_{\bar{w}}(t_f)^2 + (F_w(0) - u(0)F_{\bar{w}}(0))^2 + \int_0^{t_f} (cu(t)F_w(t) + u(t)^2) dt \right)$$

L'Hamiltonienne, notée H, est définie par :

$$\begin{aligned} H &= cu(t)F_w(t) + u(t)^2 \\ &+ \lambda_1 \left[\left(\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_1\phi_wF_w^2 + \rho_2\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right) \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_{\bar{w}} \right] \\ &+ \lambda_2 \left[\left[\frac{(1 - \rho_1)\phi_wF_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{F_{\bar{w}} + F_w} \right] \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - (\mu_a + \psi)Q_w \right] \\ &+ \lambda_3 \left[\frac{\psi}{2}Q_{\bar{w}} + \sigma F_w - \mu_{\bar{w}}F_{\bar{w}} \right] \\ &+ \lambda_4 \left[\frac{\psi}{2}Q_w - \sigma F_w - (\mu_w - u(t))F_w \right]. \end{aligned}$$

D'après le principe du maximum de pontryaguine

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\lambda_1 \left(\frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_1\phi_wF_w^2 + \rho_2\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - (\mu_a + \psi) \right) - \lambda_2 \frac{(1 - \rho_1)\phi_wF_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - \lambda_3 \frac{\psi}{2} \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_1 \frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + \rho_1\phi_wF_w^2 + \rho_2\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - \lambda_2 \left(\frac{(1 - \rho_1)\phi_wF_w^2 + (1 - \rho_2)\phi_wF_wF_{\bar{w}}}{-k(F_{\bar{w}} + F_w)} - (\mu_a + \psi) \right) - \lambda_4 \frac{\psi}{2} \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\lambda_1 \frac{\phi_{\bar{w}}F_{\bar{w}}^2 + 2\phi_{\bar{w}}F_wF_{\bar{w}} + \rho_2\phi_wF_w^2 - \rho_1\phi_wF_w^2}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) - \lambda_2 \frac{(-\rho_2 + \rho_1)\phi_wF_w^2}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) + \lambda_3\mu_{\bar{w}} \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\lambda_1 \frac{\rho_1\phi_w(F_w^2 + 2F_wF_{\bar{w}}) + F_{\bar{w}}^2(\rho_2\phi_w - \phi_{\bar{w}})}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) \\
&\quad - \lambda_2 \frac{(1 - \rho_1)\phi_wF_w^2 + 2(1 - \rho_1)\phi_wF_wF_{\bar{w}} + (1 - \rho_2)\phi_wF_w^2}{(F_{\bar{w}} + F_w)^2} \left(1 - \frac{Q}{k}\right) - \lambda_3\sigma - \lambda_4(-\sigma - \mu_w + u(t)) - cu(t)
\end{aligned}$$

et les conditions de transversalité :

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3(t_f) = \frac{\partial \psi}{\partial F_{\bar{w}}}(t_f) = 20F_{\bar{w}}(t_f)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = F_w(\lambda_4 + c) + 2u = 0$$

ce qui implique

$$u = -\frac{F_w(\lambda_4 + c)}{2}$$

ainsi

$$u = \min \left(\mu_w, \max \left(-\frac{F_w(\lambda_4 + c)}{2}, \mu_w + \sigma - \frac{\phi_w\mu_{\bar{w}}(1 - \rho_2)}{\phi_{\bar{w}}} \right) \right)$$

voir [1] et [4].

Conclusion

Dans cette étude, nous avons examiné un modèle d'invasion de *Wolbachia* dans une population de moustiques *Ae. aegypti*, en tenant compte de la transmission maternelle imparfaite et de la perte d'infection par *Wolbachia*. L'objectif principal était de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour la propagation de l'infection par la bactérie *Wolbachia*.

Tout d'abord, nous avons étudié un modèle d'invasion de *Wolbachia* sans perte d'infection, puis nous avons examiné un modèle d'invasion de *Wolbachia* avec perte d'infection, en présentant les nombres de reproduction pour les deux cas. Nous avons également défini les conditions de stabilité locale et globale des points d'équilibre.

De plus, nous avons analysé la stratégie optimale de lâcher de moustiques pour assurer le remplacement des moustiques non infectés (WU) par les moustiques infectés par *Wolbachia* (WI) ou pour rendre ces derniers plus abondants.

Nos analyses ont montré que les moustiques infectés par *Wolbachia* peuvent coexister ou disparaître en fonction de leur efficacité par rapport aux moustiques non infectés. Nos résultats ont montré que l'introduction continue d'un grand nombre de moustiques WI pendant une période donnée augmente le nombre de reproduction au-dessus de un, rendant ainsi le point d'équilibre contenant uniquement les moustiques WI infectés globalement stable.

En conclusion, notre travail complète la recherche sur les différentes façons dont les moustiques WI pourraient avoir un avantage sur les moustiques WU dans la lutte contre les épidémies de dengue et autres infections virales. Nos résultats mettent en évidence les principaux paramètres à cibler pour atteindre les objectifs de contrôle souhaités.

Bibliographie

- [1] Adeshina I. Adekunle and all, Mathematical analysis of a Wolbachia invasive model with imperfect maternal transmission and loss of Wolbachia infection, infectious Disease Modelling 4, 2019.
- [2] Auger P., Christophe Lett, Jean-Christophe Poggiale, Modélisation mathématique en écologie, 2010.
- [3] Bhatt S., Gething P.W., Brady O.J., Messina J.P., Farlow A.W., Moyes C.L. The global distribution and burden of dengue. Nature, 2013.
- [4] Campo-Duarte, D.E., Vasilieva, O., Cardona-Salgado, D. et al. Optimal control approach for establishing wMelPop Wolbachia infection among wild Aedes aegypti populations. J. Math. Biol. 76, 1907–1950, 2018.
- [5] Cui J., Sun Y., Zhu H. The impact of media on the control of infectious diseases. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2008.
- [6] Dutra H.L.C., Rocha M.N., Dias F.B.S., Mansur S.B., Caragata E.P., Moreira L.A. Wolbachia blocks currently circulating Zika virus isolates in brazilian Aedes aegypti mosquitoes. Cell Host-Microbe, 2016.
- [7] E. Trelat, Contrôle optimal : Théorie et applications, Éditions Vuibert, 2002.
- [8] Ferguson N.M., Kien D.T.H., Clapham H., Aguas R., Trung V.T., Chau T.N.B. Modeling the impact on virus transmission of Wolbachia-mediated blocking of dengue virus infection of Aedes aegypti. Science Translational Medicine, 2015.
- [9] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1990.

- [10] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd ed., Prentice Hall, 2002.
- [11] Hoffmann A.A., Iturbe-Ormaetxe I., Callahan A.G., Phillips B.L., Billington K., Axford J.K. Stability of the wMel Wolbachia infection following invasion into *Aedes aegypti* populations. PLoS Neglected Tropical Diseases, 2014.
- [12] Jonas Sylneon. Une contribution à l'étude du modèle SIR de Kermack McKendrick. Application à la propagation de l'épidémie de Covid-19 en milieu insulaire, 2020.
- [13] Moreira L.A., Iturbe-Ormaetxe I., Jeffery J.A., Lu G., Pyke A.T., Hedges L.M. A Wolbachia symbiont in *Aedes aegypti* limits infection with dengue, chikungunya, and Plasmodium. Cell, 2009.
- [14] Rafikov M., Meza M.E.M., Correa D.P.F., Wyse A.P. Controlling *Aedes aegypti* populations by limited colorredWolbachia-based strategies in a seasonal environment. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019.
- [15] Sylvie Benzoni Gavage, calcul différentiel et équation différentielle, 2010.
- [16] Van den Driessche, P. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. Mathematical Biosciences, 180 (1-2) : 29-48, 2002.
- [17] Xue L., Manore C.A., Thongsripong P., Hyman J.M. Two-sex mosquito model for the persistence of Wolbachia, 2017.
- [18] Yang H., Macoris M.d.L.d.G., Galvani K., Andrighetti M., Wanderley D. Assessing the effects of temperature on the population of *Aedes aegypti*, the vector of dengue. Epidemiology and Infection, 2009.
- [19] Yeap H.L., Mee P., Walker T., Weeks A.R., O'Neill S.L., Johnson P. Dynamics of the “popcorn” Wolbachia infection in outbred *Aedes aegypti* informs prospects for mosquito vector control. Genetics, 2011.
- [20] Zheng B., Tang M., Yu J., Qiu J. Wolbachia spreading dynamics in mosquitoes with imperfect maternal transmission. Journal of Mathematical Biology, 2018.