

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

présenté par

Ainad Tabet Khadidja

Soutenu le : 21 juin 2023

ESTIMATION DANS UN PROCESSUS AUTORÉGRESSIF À
COEFFICIENTS ALÉATOIRES $RCA(1)$.

Soutenu devant le jury composé de :

| | | |
|----------------------|---------------------------------------|--------------|
| Mme. BENYELLES WAFAA | M C B, Université de Tlemccen | Présidente |
| Mme. BENYAHIA WAHIBA | M C B, Université de Tlemccen | Examinatrice |
| Mr. ALLAM ABDELAZIZ | M C A, Université de Tlemccen | Encadrant |
| Mr. ANDREAS HORING | Professeur, Université de Côte d'Azur | Co-encadrant |

Année universitaire : 2022 - 2023

Département de Mathématiques

Faculté des sciences

Tlemcen

khadidjaainadtabet@gmail.com

Thanks, praise, and love to my Lord who continues to provide for me when no one else will and even when I forget to be grateful, Without His leadership, I will be lost and helpless,

Without His assistance, I could not do anything.

Even though they are written in gold and have diamond coins for the points, the best lines from the wealthiest languages will never be able to adequately convey my thanks.

Thank you for giving me the stamina to persevere through hardship and the drive to tackle anything.

Without you, my Lord, ALLAH, I am certain that I would be powerless to accomplish anything; life would be meaningless.

Remerciements

Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait jamais pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de M. Allam. Je le remercie infiniment pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa disponibilité, et surtout ses judicieux conseils, qui ont continué à alimenter ma réflexion.

Je tiens à remercier particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à M. Andreas Horing et à l'Université Côte d'Azur pour la formation enrichissante et plein d'intérêt qu'ils m'ont fait vivre et à tous les enseignants du master international probabilités statistique.

Mes vifs remerciements vont à mes enseignantes Mme. Benyelles et Mme. Benyahia pour avoir accepté de juger mon présent travail, qu'il me soit permis de vous présenter à travers ce travail le témoignage de mon grand respect et l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je ne pourrais pas remercier assez mes piliers, mes exemples, ma plus grande force, mes parents, c'est grâce à vos encouragements, votre bienveillance et votre présence à mes côtés que j'ai réussi à aller au bout de mon parcours..

Je remercie également mes très chères soeurs et mon cher frère pour leur présence, leurs soutiens et pour leurs encouragements.

Enfin je remercie gracieusement tous mes professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve, et toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Remerciments | iii |
| Introduction | 1 |
| 1 Préliminaires | 3 |
| 1.1 Processus stochastique | 3 |
| 1.1.1 Définitions | 3 |
| 1.1.2 Loi d'un processus stochastique. Processus canonique. | 4 |
| 1.2 Processus stationnaire et Ergodicité | 5 |
| 1.2.1 Stationnarité | 5 |
| 1.2.2 Événements invariants, ergodicité | 7 |
| 1.3 Compléments de résultats de convergence de séries de variables aléatoires | 8 |
| 1.3.1 Rappels sur la convergence en loi | 9 |
| 2 Processus autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre 1 RCA(1) | 12 |
| 2.1 Introduction | 12 |
| 2.2 Propriétés Probabiliste d'un Modèle RCA(1) : | 14 |
| 2.3 Existence d'une Solution Strictement Stationnaire | 21 |
| 3 Estimation des paramètres | 23 |
| 3.1 Introduction | 23 |
| 3.2 Procédure de l'estimation | 24 |
| 3.3 La consistance forte de l'E.M.V | 25 |
| 4 Le comportement asymptotique de l'EMV | 35 |
| 4.1 Introduction et notations | 35 |
| 4.2 Loi limite de l'EMV | 37 |
| Conclusion | 46 |

Bibliographie

48

Introduction

Jusqu'aux années 80 du siècle dernier, les modèles considérés pour la modélisation des séries chronologiques étaient généralement linéaires avec des coefficients constants, principalement les modèles moving average (MA) et les modèles autorégressifs (AR). Cependant, dans certains domaines, tels que la finance, la biologie, l'hydrologie, la météorologie, les séries sont le résultat d'un processus complexe caractérisé par plusieurs perturbations aléatoires. Ceci a conduit les auteurs à considérer de nouvelles formes de modèles comme les modèles non linéaires, en particulier le modèle autorégressif à coefficients aléatoires (*RCA*) qui constitue une extension naturelle des modèles *AR*.

Ce modèle a été largement adopté dans la littérature, notamment dans le contexte de perturbations aléatoires des systèmes dynamiques. Les chercheurs ont trouvé une variété d'applications, notamment, en finance et en biologie (cf. Nicholls et Quinn, [10], et Tong, [12]).

Notons \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs et \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs.

Alors, le modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre 1, en abrégé *RCA*(1), est donné par les équations :

$$X_k = (\varphi + b_k)X_{k-1} + e_k \quad k \in \mathbb{Z}$$

où φ est un paramètre réel et $\{(b_k, e_k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$ sont des paires de variables aléatoires.

Dans ce mémoire nous développons les résultats de l'article suivant :

Alexander Aue, Lajos Horvath and Josef Steinebach (2004) : Estimation In Random Coefficient Autoregressive Models.

Les auteurs se sont intéressés à l'estimation des paramètres inconnus d'un processus *RCA*(1) par l'estimateur de maximum de vraisemblance. La procédure a été introduite par Quinn et Nicholls [11] pour des processus *RCA* plus généraux (voir [10] Chapitre 4), qui ont établi

une consistance forte et un théorème central limite. Cependant, leurs résultats nécessitent des hypothèses restrictives supplémentaires telles que l'existence des moments d'ordre 2 pour les variables (b_k, e_k) (voir [10] p. 70) ainsi qu'un moment d'ordre 2 borné pour les variables X_k elles-mêmes (voir hypothèse (v) dans [11]).

En revanche, dans l'article ci-dessus, les auteurs ont imposé des conditions naturelles (et minimales) uniquement sur les suites de bruit $\{b_k\}$ et $\{e_k\}$.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le chapitre préliminaire ; nous rappelons quelques notions sur les processus stochastiques, en particulier la loi d'un processus, la stationnarité, l'ergodicité. Des résultats d'extension de la loi forte des grands nombres. Une version fonctionnelle du théorème centrale limite et une caractérisation de la convergence en loi des vecteurs aléatoires sont présentées à la fin du chapitre.

Dans le chapitre 2, nous introduisons la classe des procesus autorégressifs à coefficients aléatoires et nous rappelons les principaux résultats dûs à Brandt (1986) et Bougerol (1992) relatifs à l'existence d'une solution strictement stationnaire. Ensuite, nous étudions certaines propriétés des processus $RCA(1)$ en particulier l'existence des moments et nous développons un résultat d'existence d'une solution strictement stationnaire.

Le chapitre 3 est consacré à l'estimation des paramètres d'un processus RCA en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Sous certaines hypothèses, nous établissons la consistance forte de l'estimateur.

Dans le dernier chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Nous montrons que l'estimateur est asymptotiquement normal.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilitisé. $\mathcal{L}(X)$ dénote la loi de toute variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. [9] Un processus stochastique (ou aléatoire) défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans (E, \mathcal{E}) .

T est l'ensemble des temps, en général $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou \mathbb{R}^+ .

Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement, quand $T \subset \mathbb{Z}$ le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$ on parle de champ aléatoire.

L'objet de la théorie des processus stochastiques est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

- Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.2. [9] Soient $(X_t)_{t \in T}$ et $(X'_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques à valeurs dans le même espace d'états (E, \mathcal{E}) avec $(X_t)_{t \in T}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X'_t)_{t \in T}$ défini sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. On dit qu'ils sont équivalents si $\forall n \geq 1, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T, \forall B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \mathbb{P}'(X'_{t_1} \in B_1, X'_{t_2} \in B_2, \dots, X'_{t_n} \in B_n).$$

On dira encore que chacun de ces processus est une version de l'autre.

Définition 1.1.3. Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique.

La famille des lois

$$\{\mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}), t_1, t_2, \dots, t_n \in T\},$$

s'appelle la famille des lois de dimension finie ou famille des répartitions finies de $(X_t)_{t \in T}$.

Deux processus stochastiques sont donc équivalents si et seulement si ils ont les mêmes répartitions finies.

1.1.2 Loi d'un processus stochastique. Processus canonique.

Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Soit T un ensemble non vide.

On muni E^T de la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes T}$ engendrée par la famille des cylindres :

$$\{A_1 \times A_2 \dots \times A_p; A_1, A_2, A_p \in \mathcal{E}\}.$$

Il s'agit de la tribu sur E^T rendant mesurables les applications coordonnées :

$$\begin{aligned} \prod_t : \quad E^T &\longrightarrow E \\ x = (x_t)_{t \in T} &\longmapsto x_t \end{aligned}$$

Soit $(X_t)_{t \in T}$ une famille d'applications de Ω dans E . On note

$$\begin{aligned} X : (\Omega, \mathcal{F}) &\longrightarrow (E^T, \mathcal{E}^{\otimes T}) \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in T}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.4. [9] $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique à valeurs dans (E, \mathcal{E}) si et seulement si l'application X est mesurable de (Ω, \mathcal{F}) dans $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$.

Ainsi, on peut identifier un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ et l'application mesurable X associée. Dans la suite, on note $X = (X_t)_{t \in T}$.

Définition 1.1.5. La loi de probabilité, de $X = (X_t)_{t \in T}$ est la probabilité image de \mathbb{P} par l'application mesurable X . On la note \mathbb{P}_X .

Définition 1.1.6. [9] Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

Le processus canonique $(Y_t)_{t \in T}$ associé à $(X_t)_{t \in T}$ est le processus défini sur $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T}, \mathbb{P}_X)$ par

$$Y_t(x) = \prod_t(x) = x_t; \quad x = (x_s)_{s \in T} \in E^T.$$

Proposition 1.1.7. $(X_t)_{t \in T}$ et son processus canonique $(Y_t)_{t \in T}$ sont équivalents.

1.2 Processus stationnaire et Ergodicité

On ne considérera dans ce paragraphe que des processus indexés par $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne de \mathbb{R} .

Etant donné un processus $X = (X_t)_{t \in T}$, il est intéressant en statistique d'avoir la convergence presque sûre de $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Si les $(X_t)_t$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (*i.i.d*) et $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, alors la loi forte des grands nombres affirme que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Affaiblir les conditions sous lesquelles ce résultat reste valable fût depuis toujours un objectif pour tous les spécialistes. Pour répondre à ce problème, les auteurs ont considéré les notions de stationnarité et d'ergodicité.

1.2.1 Stationnarité

Définition 1.2.1. [6]

1. Un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dit (strictement) stationnaire, si pour tout $k, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{L}(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = \mathcal{L}(X_0, X_1, \dots, X_m).$$

2. Un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit (strictement) stationnaire, si pour tout $k, m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{L}(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = \mathcal{L}(X_0, X_1, \dots, X_m).$$

Remarquons que si $(X_t)_{n \in \mathbb{T}}$ est stationnaire, alors les variables X_i sont identiquement distribuées.

Définition 1.2.2. [6] Une transformation mesurable $S : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sera dite préservant la mesure \mathbb{P} si

$$\mathbb{P}(S^{-1}A) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Remarque 1.2.3. A partir d'une transformation préservant la mesure S , un grand nombre de processus stationnaires peuvent être générés.

Soit X une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit un processus X_1, X_2, \dots , par

$$X_1(\omega) = X(\omega), \quad X_2(\omega) = X(S\omega), \quad X_3(\omega) = X(S^2\omega), \dots$$

Ainsi, Si $X_1(\omega)$ est une (*v.a.r*) du système au moment $t = 1$, Alors $X_n(\omega)$ est la même (*v.a.r*) une fois que le système est passé à l'étape $(n - 1)$; de sorte que $\omega \longrightarrow S^{n-1}(\omega)$ et on a $X_n(\omega) = X(S^{n-1}(\omega))$.

Proposition 1.2.4. [6] Soit S une transformation sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ préservant la mesure, X une *v.a.r* sur (Ω, \mathcal{F}) .

Alors la suite

$$X_n(\omega) = X(S^{n-1}(\omega)) \quad n = 1, 2, \dots$$

est stationnaire.

Maintenant, on peut se demander si tous les processus stationnaires peuvent être générés par une transformation préservant la mesure.

Définition 1.2.5. [6] La transformation mesurable $\theta : (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes T}) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes T})$ définie par

$$\theta(\dots, x_0, x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_1, x_2, \dots).$$

est appelée opérateur de translation ou de décalage (shift).

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stationnaire. Pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes T}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(\theta^{-1}(A)) &= \mathbb{P}(\theta(\dots, X_0, X_1, \dots) \in A) \\ &= \mathbb{P}((\dots, X_1, X_2, \dots) \in A) \\ &= \mathbb{P}((\dots, X_0, X_1, \dots) \in A) \\ &= \mathbb{P}_X(A), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'opérateur de translation θ préserve \mathbb{P}_X .

1.2.2 Événements invariants, ergodicité

Soit $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace de probabilité.

Définition 1.2.6. Soit S une transformation préservant la mesure sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.

Un évènement $A \in \mathcal{F}'$ est dit invariant si,

$$S^{-1}A = A.$$

Proposition 1.2.7. Soit S une transformation préservant la mesure sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.

La classe des évènements invariants est une tribu, que l'on notera \mathcal{G} .

Définition 1.2.8. Soit S une transformation préservant la mesure sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.

S est dite ergodique si la tribu \mathcal{G} est \mathbb{P}' -triviale, c'est-à-dire $\mathbb{P}'(A) = 0$ ou $\mathbb{P}'(A) = 1$ pour tout $A \in \mathcal{G}$,

Considérons maintenant un processus stochastique $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Définition 1.2.9. Le processus $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit ergodique si l'opérateur de translation est ergodique.

De tout processus stationnaire et ergodique, un nombre infini de processus stationnaires et ergodiques peut être produit :

Théorème 1.2.10. [6] Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique.

Considérons $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ avec

$$Y_t = \phi(\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$$

où ϕ est mesurable.

- i) Si les $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont indépendants, identiquement distribués, Alors le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique.
- ii) Si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus strictement stationnaire et ergodique, alors le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ lui aussi est strictement stationnaire et ergodique.

L'un des théorèmes limite les plus forts et remarquables est le théorème ergodique de Birkhoff suivant :

Théorème 1.2.11. [6] Si $(X_t)_t$ est un processus stationnaire, \mathcal{G} la tribu des évènements invariants, et $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, alors,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1 | \mathcal{G}].$$

Une conséquence du théorème (1.2.11) est que si l'opérateur de translation est ergodique, alors $\mathbb{E}[X_1 | \mathcal{G}]$ peut être remplacée par $\mathbb{E}[X_1]$

Théorème 1.2.12. [6] Si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus stationnaire et ergodique, f une fonction mesurable quelconque tels que $\mathbb{E}[f(|X_1|)] < \infty$, Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[f(X_1)]$$

1.3 Compléments de résultats de convergence de séries de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques résultats, présentés dans [7], relatifs à la convergence de séries de variables aléatoires. Ces résultats nous seront utiles par la suite.

Lemme 1.3.1. [2] Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* satisfaisant,

$$\mathbb{E}[\log^+ |\varepsilon_0|] < \infty.$$

Alors $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n z^n$ converge *p.s* pour tout $|z| < 1$.

Le résultat suivant, dû à Kolmogorov, constitue une généralisation de la loi forte des grands nombres.

Proposition 1.3.2. [7] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (*i.i.d*) et telles que $\mathbb{E}[X_1]$ existe (pas forcément finie).

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$$

Preuve . Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, alors le résultat est une conséquence immédiate de la loi forte des grands nombres.

Supposons que $\mathbb{E}[X_1] = -\infty$.

Introduisons $Y_n = \max(X_n, -K)$ où $K > 0$.

Les $(Y_n)_n$ sont *i.i.d* avec $\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty$. La loi forte des grands nombres donne

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_1] \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_1]$$

Par suite

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow -\infty = \mathbb{E}[X_1]$$

On raisonne d'une manière analogue si $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$.

Lemme 1.3.3 (La loi de Chung Fuchs). [7]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de var (i.i.d) avec $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(|X_1|) > 0$.

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty \quad \mathbb{P}.p.s \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty \quad \mathbb{P}.p.s$$

Le corollaire suivant est la deuxième version du lemme de Borel Cantelli :

Corollaire 1.3.4. [8] Soient $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ une filtration avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\{A_n, n \geq 1\}$ une suite d'événements avec $A_n \in \mathcal{F}_n$, Alors :

$$\{A_n, i.s \text{ (infinitement souvent)}\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n / \mathcal{F}_{n-1}) = \infty \right\}$$

1.3.1 Rappels sur la convergence en loi

On rappelle la notion de convergence faible de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique.

Définition 1.3.5. [9] Soient X et $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S de lois P et P_n respectivement. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , et on écrit $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X).$$

On a vu dans la section 1.1 que le processus canonique X associé à un processus $(X_t)_{t \in T}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\otimes T}})$. Cependant, si $T = [0, 1]$ ou $T = \mathbb{R}^+$ et X est à trajectoires continues alors on peut considérer que X est à valeurs dans $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$. Notons que pour $T = [0, 1]$, $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach. Quand $T = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ admet pour distance

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \min(\|x - y\|_{\infty, n}),$$

où

$$\|x - y\|_{\infty, n} = \sup_{t \in [0, n]} |x_t - y(t)| \quad x, y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

Ainsi, on peut définir une topologie sur $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$.

Proposition 1.3.6. *Soit X et $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S .*

Si $(X_n)_{n \geq 1}$, et X sont des processus à trajectoires continues (ie. $S = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$) avec

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X,$$

alors on a la convergence faible des lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \geq 1$, et t_1, \dots, t_p ,

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_p)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X(t_1), \dots, X(t_p)).$$

Le processus canonique associé à un mouvement brownien $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, qui est à trajectoires continues, peut être vu comme une application aléatoire sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} B : (\Omega, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto B(\omega) = (B_t(\omega))_{t \in T}. \end{aligned}$$

Définition 1.3.7 (La mesure de Wiener). [9] La mesure de Wiener W est la mesure image de \mathbb{P} par l'application B ci dessus, $W = \mathbb{P}_B$.

La mesure de Wiener est une mesure de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Il s'agit de la loi commune à tout mouvement brownien dont les lois fini-dimensionnelles sont données par :

$$\begin{aligned} W & (x : B(t_0) \in A_0, B(t_1) \in A_1, \dots, B(t_n) \in A_n) \\ &= \mathbb{1}_{A_0}(0) \int_{A_1 \times A_2 \dots \times A_n} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\sum_{t=1}^n \frac{(x_t - x_{t-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right). \end{aligned}$$

Théorème 1.3.8. [3] *Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots\}$ un processus stationnaire et ergodique tel que*

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}] = 0 \quad \mathbb{P}.p.s. \quad (1.1)$$

et $\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] = \sigma^2 < \infty$. Soit

$$X_n(t, \omega) = \frac{S_{[nt]}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}},$$

où $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$. Alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W \quad \mathbb{P}.p.s,$$

où W est la mesure de Wiener.

La proposition suivante donne le dispositif de Cramer-Wold relatif à la convergence en loi d'un vecteur aléatoire :

Proposition 1.3.9. [3] Soient les vecteurs $X_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk})$ et $X = (X_1, \dots, X_k)$ tels que

$$\sum_{j=1}^k t_j X_{nj} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^k t_j X_j, \quad (1.2)$$

pour tout point $t = (t_1, \dots, t_k)$ de \mathbb{R}^k .

Alors, la fonction caractéristique

$$\rho_n(s) = \mathbb{E} \left[\exp \left(is \sum_{j=1}^k t_j X_{nj} \right) \right]$$

converge, pour tout s , presque sûrement vers :

$$\rho(s) = \mathbb{E} \left[\exp \left(is \sum_{j=1}^k t_j X_j \right) \right],$$

et

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$$

.

Chapitre 2

Processus autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre 1 RCA(1)

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des conditions de stationnarité, ainsi qu'aux conditions d'existence et d'unicité des solutions stationnaires des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires.

2.1 Introduction

Brandt [5] a considéré le modèle

$$X_n = A_{n-1}X_{n-1} + B_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

où la suite $\Psi = (A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire et ergodique. Il a établi le résultat suivant sur l'existence d'une solution strictement stationnaire :

Théorème 2.1.1 (Brandt). [5] *Si la suite $\Psi = (A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire et ergodique et une de ces conditions,*

$$-\infty \leq \mathbb{E}(\log |A_0|) < 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\log^+ |B_0|) < \infty$$

ou :

$$\mathbb{P}(A_0 = 0) > 0$$

est satisfaite, alors,

$$y_n(\Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{i=n-j}^{n-1} (A_i) B_{n-j-1} \right) \quad n \in \mathbb{Z}$$

est l'unique solution strictement stationnaire de (2.1). De plus la série converge absolument presque sûrement.

Bougerol [4] a étudié un modèle autorégressif multivarié à coefficients aléatoires défini par

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

Il a énoncé d'abord le résultat suivant, dû à Brandt [5], qui donne une condition suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire de l'équation (2.2) :

Théorème 2.1.2. [4]

Supposons que la suite $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique telles que les deux conditions suivantes sont vérifiées,

$$\mathbb{E}(\log^+ \|A_0\|) < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\log^+ \|B_0\|) < \infty.$$

Supposons que l'exposant de Lyapunov γ associé au modèle (2.2) donné par

$$\gamma = \inf \left\{ \mathbb{E} \left(\frac{1}{n+1} \log \|(A_0)(\varphi + b_{-1}) \dots (A_{-n})\| \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

est strictement négatif alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la série

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} B_{n-k} \left(\prod_{i=0}^{k-1} A_{n-i} \right)$$

converge presque sûrement, et $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est l'unique solution strictement stationnaire de (2.2).

Bougerol s'est intéressé au modèle (2.2) avec des coefficients $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *i.i.d.* Il a considéré le problème d'existence d'une solution non anticipative :

Définition 2.1.3. On dit que $(X_k, k \in \mathbb{Z})$ est une solution non-anticipative de l'équation (2.2) si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, X_k est indépendante de $\{(b_i, e_i), i > k\}$.

Pour cela, il a introduit les notions suivantes :

Définition 2.1.4 (sous espace affine). Un sous espace affine H de \mathbb{R} est une translation $z + V$ pour tout sous espace linéaire V .

Définition 2.1.5 (sous espace affine invariant). Un sous espace affine H de \mathbb{R} est dit invariant sous le modèle (2.2), Si H contient l'ensemble $\{b_0 x + e_0, x \in H\}$ presque sûrement.

Définition 2.1.6 (irréductibilité au sens de Bougerol). Le modèle (2.2) est dit irréductible si \mathbb{R} est le seul sous espace affine invariant.

Ceci peut se traduire en termes de probabilité par :

pour tout U inclus dans \mathbb{R} ,

$$\forall x \in U \quad \mathbb{P}(b_0x + e_0 \in U) < 1$$

Ceci est équivalent à,

$$\mathbb{P}(c_1b_0 + c_2e_0 = c_3) < 1 \text{ pour tout réels } c_1, c_2, c_3 \text{ avec } (c_1, c_2) \neq (0, 0)$$

Le resultat fondamental de Bougerol est le suivant :

Théorème 2.1.7. [4]

Supposons que le modèle (2.2) est irréductible et que

$$\mathbb{E}[\log^+ |B_0|] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\log^+ |A_0|] < \infty$$

Alors (2.2) a une solution stationnaire, non anticipative si et seulement si l'exposant de Lyapunov associé au modèle (2.2) est strictement négatif.

2.2 Propriétés Probabiliste d'un Modèle RCA(1) :

Dans cette section, nous présentons le travail de Aue et al. [1].

Définition 2.2.1. Un processus stochastique $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est un processus autorégressif à coefficients aléatoires, RCA(1), s'il satisfait l'équation

$$X_n = (\varphi + b_n)X_{n-1} + e_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

où φ est un paramètre réel et $\{(b_k, e_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont des paires de variables aléatoires.

Considérons la série

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} e_{-k} \prod_{j=0}^{k-1} (\varphi + b_{-j}) \quad (2.4)$$

On pose la condition :

(C1) : $\{(e_k, b_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont des vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Lemme 2.2.2. On suppose que (C1) est satisfaite et que

$$\mathbb{E}[\log^+ |e_0|] < \infty, \quad \mathbb{E}[\log^+ |\varphi + b_0|] < \infty \quad (2.5)$$

1. Si

$$-\infty \leq \mathbb{E}[\log |\varphi + b_0|] < 0 \quad (2.6)$$

alors X défini par (2.4) converge absolument p.s.

2. Inversement, si $\mathbb{P}(e_0 = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(|X| < \infty) = 1$, alors (2.6) est vérifiée.

Preuve . Posons $S_k = \sum_{i=1}^k \log |\varphi + b_{-i}|$.

1. Dans une première étape, on suppose que $-\infty < \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) < 0$. La loi forte des grands nombres assure que $\frac{S_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{p.s.} \gamma$, où

$$\gamma = \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|).$$

Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall k \geq k_0, -\varepsilon + \gamma < \frac{S_k}{k} < \varepsilon + \gamma$$

Donc, pour $\varepsilon = -\gamma/2 > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0, \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log |\varphi + b_{-i}| < \frac{\gamma}{2},$$

par suite

$$\forall k \geq k_0, \quad \sum_{i=1}^k \log |\varphi + b_{-i}| < \frac{k\gamma}{2}, \quad (2.7)$$

il s'ensuit que

$$\forall k \geq k_0, \quad \prod_{i=1}^k e^{\log |\varphi + b_{-i}|} < e^{\frac{k\gamma}{2}},$$

ce qui implique que

$$\forall k \geq k_0, \quad \prod_{i=1}^k |\varphi + b_{-i}| < e^{\frac{k\gamma}{2}}. \quad (2.8)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |X| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} e_{-k} \prod_{i=0}^{k-1} (\varphi + b_{-i}) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |e_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |(\varphi + b_{-i})| \\ &= \sum_{k=0}^{k_0} |e_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |(\varphi + b_{-i})| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |e_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |(\varphi + b_{-i})| \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (2.8) au deuxième terme, on aura

$$|X| \leq \sum_{k=0}^{k_0} |e_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |(\varphi + b_{-i})| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |e_{-k}| e^{\frac{k\gamma}{2}} \quad (2.9)$$

D'après le lemme 1.3.1 et si on prend $Z = e^{\gamma/2} < 1$, on obtient

$$\mathbb{P} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |e_{-k}| e^{\frac{k\gamma}{2}} < \infty \right) = 1 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Donc les deux termes de l'inégalité 2.9 sont finis \mathbb{P} .p.s.

Maintenant, si $\mathbb{E}[|\log |\varphi + b_0||] = -\infty$ alors, le théorème de Kolmogorov (1.3.2), assure que l'inégalité (2.7) est satisfaite. D'où $|X| < \infty$.

□

2. Par hypothèse puisque, $\mathbb{P}(|e_0| = 0) < 1$ donc il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(|e_0| \geq a) > 0.$$

Soit (A_k) une suite d'évènements définie par

$$A_k = \left\{ \omega : \left(|e_{-k}|, \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}| \right) \in [a, \infty[\times [1, \infty[\right\}, \quad k \geq 1.$$

On introduit ensuite une suite croissante de tribus $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et

$$\mathcal{F}_k = \sigma((e_i, b_i), -k \leq i \leq 0), \quad k \geq 1.$$

Il est clair que $A_k \in \mathcal{F}_k$. Comme e_k est indépendante de la tribu \mathcal{F}_{k-1} alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k / \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{P} \left((|e_{-k}|, \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}|) \in [a, \infty[\times [1, \infty[/ \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &= \mathbb{P}(|e_{-k}| \in [a, \infty[) \mathbb{P} \left(\prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}| \in [1, \infty[/ \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &= \mathbb{P}(|e_{-k}| \geq a) \mathbb{P} \left(\prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}| \geq 1 / \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &= \mathbb{P}(|e_{-k}| \geq a) \mathbb{P} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 / \mathcal{F}_{k-1} \right). \end{aligned}$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k / \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{P}(|e_0| \geq a) \sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right), \quad (2.10)$$

où $I^{k-1}(A) = \mathbb{P}(A / \mathcal{F}_{k-1})$ pour $A \in \mathcal{F}$ un évènement de Ω . A présent, on montre que la série suivante est divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right).$$

Si $\mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) > 0$, alors la loi forte des grands nombres donne

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \geq k_0$, on ait

$$k(-\varepsilon + \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \leq k(\varepsilon + \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|)),$$

ainsi, si $k \geq k_0$, alors

$$\{k(-\varepsilon + \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|)) \geq 0\} \subset \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right\},$$

soit

$$\{-\varepsilon + \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) \geq 0\} \subset \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right\}.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left(-\varepsilon + \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) \geq 0 \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right).$$

Or, pour $k \geq 1$,

$$I^{k-1} \left(-\varepsilon + \mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) \geq 0 \right) = 1.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right) = \infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Supposons maintenant que $\mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) = 0$. Comme $\mathbb{E}[|\log |\varphi + b_0||] > 0$ alors la loi de Chung Fuchs (lemme 1.3.3), donne

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Donc, il existe une sous suite $(u_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{u_n} = +\infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Il en découle que, pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, S_{u_n} \geq A > 0 \quad \mathbb{P}.p.s.$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \{S_{u_{k-1}} \geq 0\} = \sum_{k=1}^{n_0} I^{k-1} \{S_{u_{k-1}} \geq 0\} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} I^{k-1} \{S_{u_{k-1}} \geq 0\}.$$

Mais, pour tout $k \geq n_0 + 1$,

$$I^{k-1} \{S_{u_{k-1}} \geq 0\} = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} I^{k-1} \{S_{u_{k-1}} \geq 0\} = \infty.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \{S_{u_{k-1}} \geq 0\} = \infty.$$

Ce qui implique que

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \{S_{k-1} \geq 0\} = \infty,$$

soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right\} = \infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Pour les deux cas $\mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) = 0$ et $\mathbb{E}(\log |\varphi + b_0|) \geq 0$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} I^{k-1} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \log |\varphi + b_{-i}| \geq 0 \right\} = \infty \quad \mathbb{P}.p.s \quad (2.11)$$

c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k / \mathcal{F}_{k-1}) = \infty \quad \mathbb{P}.ps$$

En utilisant le second lemme de Borel Cantelli (corollaire 1.3.4) et (2.10) et (2.11), il vient

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k) = 1.$$

L'évènement A_k va donc se réaliser une infinité de fois. Par conséquent

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} e_k \prod_{j=0}^{k-1} (\varphi + b_{-j}) = 0 \right\} = 0. \quad (2.12)$$

Or, on sait que, si la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge, la suite $(U_n)_n$ admet 0 pour limite. Alors par la contraposée

$$\mathbb{P}(|X| < \infty) = 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse de finitude de X.

conclusion : Si $\mathbb{P}(e_0 = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(|X| < \infty) = 1$, alors

$$-\infty \leq \mathbb{E}[\log |\varphi + b_0|] < 0$$

□

Lemme 2.2.3. *On suppose que les conditions (C1) et (2.6) sont satisfaites et $\mathbb{E}[|b_0|^\varepsilon] < \infty$ et $\mathbb{E}[|e_0|^\varepsilon] < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, alors il existe un $\delta > 0$ tels que $\mathbb{E}(|X|^\delta) < \infty$.*

Preuve . Soit $M(t) = \mathbb{E}(Z^t)$, pour $0 < t < \varepsilon$, avec $Z = |\varphi + b_0|$. On note que $M(0) = 1$. Posons $f(t, Z) = Z^t = e^{t \ln Z}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, Z) = Z^t \ln(Z).$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est bien définie, continue par rapport à t . De plus, la fonction $t \mapsto Z^t \ln(Z)$ est croissante. Si $0 < t < \varepsilon$, alors on peut trouver a et γ tels que $0 < a \leq t \leq \gamma < \varepsilon$.

Par suite

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, Z) \right| \leq -Z^a \ln(Z) \mathbb{1}_{\{Z \leq 1\}} + Z^\gamma \ln(Z) \mathbb{1}_{\{Z > 1\}}.$$

Soit $A > 0$.

On sait que $\lim_{Z \rightarrow 0} Z^a \ln(Z) = 0$. Soit donc $0 < \eta_1 < 1$ tel que si $Z \leq \eta_1$ alors

$$-Z^a \ln(Z) \leq A.$$

On a aussi, puisque $\delta < \varepsilon$, $\lim_{Z \rightarrow +\infty} Z^{\gamma-\varepsilon} \ln(Z) = 0$.

Soit donc $\eta_2 \geq 1$ tel que si $Z \geq \eta_2$, on ait

$$Z^\gamma \ln(Z) \leq AZ^\varepsilon.$$

Il en découle que

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, Z) \right| \right) \leq A + \mathbb{E} \left[-Z^a \ln(Z) \mathbb{1}_{\{\eta_1 < Z \leq 1\}} \right] + \left[Z^\gamma \ln(Z) \mathbb{1}_{\{1 < Z < \eta_2\}} \right] + A\mathbb{E}(Z^\varepsilon) < \infty.$$

En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on conclut que la fonction M est différentiable sur $]0, +\infty[$ avec

$$M'(t) = \mathbb{E} \left[Z^t \ln(Z) \right].$$

D'autre part, le théorème de convergence monotone donne

$$M'(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} M'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \mathbb{E} \left[Z^t \ln(Z) \right] = \mathbb{E}(\ln Z) < 0.$$

Il en découle que M est décroissante au voisinage de 0. Comme $M(0) = 1$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $M(\delta) < 1$. On peut supposer sans perdre de généralité que $0 < \delta \leq 1$. On a

$$(a + b)^\delta \leq a^\delta + b^\delta \quad \forall a, b \geq 0. \quad (2.13)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
 |X|^\delta &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} e_{-k} \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}| \right|^\delta \\
 &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |e_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}| \right)^\delta \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(|e_{-k}| \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}| \right)^\delta \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |e_{-k}|^\delta \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}|^\delta
 \end{aligned}$$

Par hypothèse $\mathbb{E}(|e_0|^\delta) < \infty$. Comme $M(\delta) < 1$, alors Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|X|^\delta) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(|e_{-k}|^\delta) \mathbb{E} \left(\prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}|^\delta \right) \\
 &\leq \mathbb{E}(|e_0|^\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(|\varphi + b_0|^\delta) \\
 &\leq \mathbb{E}(|e_0|^\delta) \sum_{k=0}^{\infty} M^k(\delta) \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant fournit une condition d'existence de $\mathbb{E}|X|^\nu$ avec $\nu \geq 1$.

Lemme 2.2.4. *Sous les conditions (C1) et (2.6), et s'il existe un certain $\nu \geq 1$, tel que*

$$\mathbb{E}\{|e_0|^\nu\} < \infty, \quad \mathbb{E}\{|b_0|^\nu\} < \infty, \quad \mathbb{E}\{|\varphi + b_0|^\nu\} < 1,$$

alors $\mathbb{E}\{|X|^\nu\} < \infty$.

Preuve . Comme $\mathbb{E}(|e_0|^\nu) < \infty$ et $\mathbb{E}(|b_0|^\nu) < \infty$, alors pour $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\left| e_k \prod_{i=0}^{k-1} (\varphi + b_{-i}) \right|^\nu \right) &\leq \mathbb{E}(|e_0|^\nu) \mathbb{E} \left(\prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}|^\nu \right), \\
 &\leq \mathbb{E}(|e_0|^\nu) \mathbb{E}^k(|\varphi + b_0|^\nu), \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Minkovski, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^{1/\nu} |X^\nu| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} e_k \prod_{i=0}^{k-1} (\varphi + b_{-i}) \right\|_{\nu} \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| e_k \prod_{i=0}^{k-1} (\varphi + b_{-i}) \right\|_{\nu} \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{1/\nu} \left(\left| e_k \prod_{i=0}^{k-1} (\varphi + b_{-i}) \right|^{\nu} \right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{1/\nu} \left(|e_k|^{\nu} \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi + b_{-i}|^{\nu} \right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{1/\nu} (|e_k|^{\nu}) \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}^{1/\nu} (|\varphi + b_0|^{\nu}) \\
 &\leq \mathbb{E}^{1/\nu} (|e_0|^{\nu}) \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}^{1/\nu} (|\varphi + b_0|^{\nu}) \\
 &\leq \mathbb{E}^{1/\nu} (|e_0|^{\nu}) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mathbb{E}^{1/\nu} (|\varphi + b_0|^{\nu}) \right]^k
 \end{aligned}$$

Par hypothèse $\mathbb{E}^{1/\nu} (|e_0|^{\nu}) < \infty$. De plus, $\mathbb{E}^{1/\nu} (|\varphi + b_0|^{\nu}) < 1$ assure que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{k/\nu} (|\varphi + b_0|^{\nu}) < \infty.$$

Ainsi

$$\mathbb{E} (|X|^{\nu})^{1/\nu} < \infty.$$

□

Remarque 2.2.5. Si e_0 et b_0 sont indépendantes $\mathbb{E}(b_0) = \mathbb{E}(e_0) = 0$, $\mathbb{E}(b_0^2) = \omega^2$ et $\mathbb{E}(e_0^2) < \infty$, alors,

$$\mathbb{E}(X^2) < \infty \text{ si et seulement si } \varphi^2 + \omega^2 < 1.$$

2.3 Existence d'une Solution Strictement Stationnaire

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité d'une solution strictement stationnaire de l'équation (2.3).

Théorème 2.3.1. *On suppose que (2.3) et (2.5) sont satisfaites,*

i) Si de plus (2.6) est vérifiée, alors,

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (\varphi + b_{n-i}); \quad n \in \mathbb{Z}$$

est l'unique solution stationnaire non anticipative de (2.3), de plus la série dans le terme à droite converge absolument $\mathbb{P}.p.s.$

ii) Si pour tous les réels c_1, c_2, c_3 avec $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, on a

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + c_2 e_0 = c_3) < 1, \quad (2.14)$$

et (2.3) a une solution non anticipative, alors (2.6) est satisfaite.

Preuve . *i)* En appliquant le théorème (1.2.10), la première partie du théorème est une conséquence immédiate du théorème de Brandt (2.1.2) et du lemme (2.2.2), et alors X_k est une solution unique stationnaire et la série converge absolument.

De plus, par le même théorème de Brandt (2.1.2) On conclut que X_k est une solution non-anticipative de (2.3).

ii) La condition (2.14) assure l'irréductibilité au sens de Bougerol et Picard (définition 2.1.6) de X_t .

En appliquant le théorème (2.1.7), On conclut que (définition 2.6) est satisfaite.

□

Chapitre 3

Estimation des paramètres

Dans ce chapitre, nous développons les résultats présentés dans l'article [1] concernant l'estimation des paramètres d'un processus autorégressif à coefficients aléatoires.

3.1 Introduction

Les auteurs ont considéré le modèle (2.3) et ont posé les conditions suivantes :

(C1) $\{(e_k, b_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont des vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(C2) (b_0, e_0) vérifie

$$\mathbb{E}(b_0, e_0) = (0, 0), \quad \text{cov}(b_0, e_0) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

avec $\omega^2, \sigma^2 > 0$.

L'objectif est d'étudier l'estimation du vecteur des paramètres $\theta = (\varphi, \omega^2, \sigma^2)$ en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

Considérons les tribus

$$\mathcal{G}_{k-1} = \sigma((b_i, e_i) : i \leq k-1). \quad (3.1)$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Comme (b_k, e_k) est indépendante de \mathcal{G}_{k-1} et X_{k-1} est \mathcal{G}_{k-1} -mesurable alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_k | \mathcal{G}_{k-1}) &= \mathbb{E}[(\varphi + b_k) X_{k-1} | \mathcal{G}_{k-1}] + \mathbb{E}(e_k | \mathcal{G}_{k-1}) \\ &= X_{k-1} \mathbb{E}(\varphi + b_k) + \mathbb{E}(e_k) \\ &= \varphi X_{k-1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_k | \mathcal{G}_{k-1}) &= \mathbb{E}(X_k^2 | \mathcal{G}_{k-1}) - \mathbb{E}^2(X_k | \mathcal{G}_{k-1}) \\
 &= \mathbb{E} [(\varphi + b_k)^2 X_{k-1}^2 | \mathcal{G}_{k-1}] + \mathbb{E}(e_k^2 | \mathcal{G}_{k-1}) + 2\mathbb{E} [(\varphi + b_k) X_{k-1} e_k | \mathcal{G}_{k-1}] - \varphi^2 X_{k-1}^2 \\
 &= \mathbb{E} (\varphi + b_k)^2 X_{k-1}^2 + \sigma^2 + 2X_{k-1} \mathbb{E} [(\varphi + b_k) e_k] - \varphi^2 X_{k-1}^2 \\
 &= \omega^2 X_{k-1}^2 + \sigma^2
 \end{aligned}$$

Maintenant, puisque les (b_k, e_k) sont indépendantes de X_{k-1} , alors la loi conditionnelle de X_k sachant $X_{k-1} = x$ est

$$\mathcal{L}^{X_{k-1}=x}(X_k) = \mathcal{L} [(\varphi + b_k)x + e_k].$$

On a

$$E [(\varphi + b_k)x + e_k] = \varphi x,$$

et

$$\text{Var} [(\varphi + b_k)x + e_k] = x^2 \text{Var}(\varphi + b_k) + \text{Var}(e_k) = x^2 \text{Var}(b_k) + \text{Var}(e_k) = \omega^2 x^2 + \sigma^2.$$

Par ailleurs, si les vecteurs (b_k, e_k) sont gaussiens, alors

$$f_{X_k}^{X_{k-1}=x_{k-1}}(x_k, u) = \left(\frac{1}{2\pi(xX_{k-1}^2 + y)} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{(x_k - sX_{k-1})^2}{2(xX_{k-1}^2 + y)} \right)$$

où $u = (s, x, y)$.

3.2 Procédure de l'estimation

La fonction de maximum de vraisemblance conditionnelle s'est donc

$$\begin{aligned}
 L_n(u) &= \prod_{i=1}^n f(u, X_i | X_{i-1}) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi(xX_{i-1}^2 + y)} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{2(xX_{i-1}^2 + y)} \right)
 \end{aligned}$$

où $u = (s, x, y)$. Egalement, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ est défini par :

$$\sup_{u \in \Gamma} L_n(u) = L_n(\hat{\theta}_n) \tag{3.2}$$

où $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ est un ensemble convenablement choisi.

Il est plus facile de travailler avec la fonction log-vraisemblance que de travailler avec la fonction

vraisemblance elle même.

$$\begin{aligned}
 \ell_n^*(u) &= \log(L_n(u)) \\
 &= \log \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi(xX_{i-1}^2 + y)} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{2(xX_{i-1}^2 + y)} \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{1}{2\pi(xX_{i-1}^2 + y)} \right)^{1/2} \right] + \sum_{i=1}^n \log \exp \left[-\frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{2(xX_{i-1}^2 + y)} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log [2\pi(xX_{i-1}^2 + y)] - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{2(xX_{i-1}^2 + y)} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\log(xX_{i-1}^2 + y) + \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{xX_{i-1}^2 + y} \right] - \frac{n}{2} \log(2\pi).
 \end{aligned}$$

Posons

$$\ell_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\log(xX_{i-1}^2 + y) + \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{xX_{i-1}^2 + y} \right]$$

Chercher le $\sup_u \ell_n^*(u)$ revient à chercher $\inf_u(\ell_n(u))$.

Notons

$$g_i(u) = \log(xX_{i-1}^2 + y) + \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{xX_{i-1}^2 + y}$$

Alors (3.2) peut s'écrire comme suit :

$$\inf_{u \in \Gamma} \ell_n(u) = \ell_n(\hat{\theta}_n)$$

avec

$$\ell_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i(u).$$

Pour cela, on suppose que

$$\Gamma = \left\{ (s, x, y) : -s_0 \leq s \leq s_0, \frac{1}{x_0} \leq x \leq x_0, \frac{1}{y_0} \leq y \leq y_0 \right\}, \quad (3.3)$$

avec $s_0 > 0$, $x_0 > 1$ et $y_0 > 1$.

3.3 La consistance forte de l'E.M.V

Bien que, la fonction de vraisemblance est évaluée sous l'hypothèse de normalité, cependant la consistance de $\hat{\theta}_n$ est établie sans cette hypothèse .

Théorème 3.3.1. *Si les conditions (C1), (C2), (2.5), (2.6), (2.14), et (3.3) sont satisfaites, avec*

$$\mathbb{P}((\varphi + b_0)e_0 = 0) < 1 \quad (3.4)$$

et

$$\theta \in \Gamma, \quad (3.5)$$

alors

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta \quad \mathbb{P}.p.s. \quad (3.6)$$

Remarque 3.3.2. La condition (3.4) est équivalente à

$$\mathbb{P}((\varphi + b_0)e_0 \neq 0) > 0.$$

Si b_0 et e_0 sont indépendantes alors (3.4) est satisfaite.

En effet, comme,

$$\mathbb{P}(b_0 > 0) > 0, \quad \mathbb{P}(b_0 < 0) > 0, \quad \mathbb{P}(e_0 > 0) > 0, \quad \mathbb{P}(e_0 < 0) > 0,$$

alors

- Supposons que $\varphi \geq 0$. On a

$$\mathbb{P}(\varphi + b_0 > 0) > 0.$$

Donc

$$\mathbb{P}((\varphi + b_0)e_0 \neq 0) \geq \mathbb{P}(\varphi + b_0 > 0, e_0 > 0) = \mathbb{P}(\varphi + b_0 > 0)\mathbb{P}(e_0 > 0) > 0$$

- Si $\varphi < 0$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\varphi + b_0)e_0 \neq 0) &\geq \mathbb{P}(e_0(\varphi + b_0) < 0) \\ &\geq \mathbb{P}(e_0 > 0)\mathbb{P}(\varphi + b_0 < 0) \\ &= \mathbb{P}(\varphi + b_0 < 0)\mathbb{P}(e_0 > 0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.3. Nous n'avons imposé que la condition (2.6) aux paramètres, qui est la condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la stationnarité stricte d'un $RCA(1)$.

Remarque 3.3.4. On suppose que $\omega^2 > 0$ et $\sigma^2 > 0$. Une de ces hypothèses peut être abandonnée.

En effet,

- Supposons que $\omega^2 \geq 0$, et soit

$$\Gamma = \left\{ (s, x, y) : -s_0 \leq s \leq s_0, \frac{1}{x_0} \leq x \leq x_0, \frac{1}{y_0} \leq y \leq y_0 \right\}.$$

Alors, le théorème 3.3.1 reste vrai.

Si $\omega^2 = 0$ et $\mathbb{E}(X_0^2) < \infty$, alors, $\{X_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un processus $AR(1)$ et le théorème (3.3.1) restera vrai.

- Si la condition $\sigma^2 \geq 0$ est vérifiée, donc on peut choisir,

$$\Gamma = \left\{ (s, x, y) : -s_0 \leq s \leq s_0, \frac{1}{x_0} \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0 \right\}$$

et encore une fois le théorème 3.3.1 reste valable.

Pour la preuve du théorème 3.3.1, nous avons besoin de quelques notations et lemmes techniques.

On note par

$$Y_{i-1}(u, \kappa, \gamma) = \frac{X_{i-1}^\kappa}{(xX_{i-1}^2 + y)^\gamma}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, 2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Soit

$$H = H(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha(2, 1) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(4, 2) & \alpha(2, 2) \\ 0 & \alpha(2, 2) & \alpha(0, 2) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Avec,

$$\alpha(\kappa, \gamma) = \mathbb{E} \left(\frac{X_0^\kappa}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^\gamma} \right) < \infty \quad \kappa = 0, 1, \dots, 2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

Lemme 3.3.5. *Si (C1), (C2), (2.5), (2.6) et (3.3) sont satisfaites, alors,*

$$\mathbb{E} \left[\inf_{u \in \Gamma} g_1(u) \right] > -\infty,$$

et $\mathbb{E}[g_1(u)]$ est continue sur Γ

Preuve . Puisque $u \in \Gamma$ alors

$$-s_0 \leq s \leq s_0, \quad \frac{1}{x_0} \leq x \leq x_0, \quad \frac{1}{y_0} \leq y \leq y_0$$

$s_0 > 0, x_0 > 1, y_0 > 1$. On a donc et,

$$\frac{X_0^2}{x_0} \leq xX_0^2 \leq x_0X_0^2,$$

Par conséquent

$$\frac{X_0^2}{x_0} + \frac{1}{y_0} \leq xX_0^2 + y \leq x_0X_0^2 + y_0,$$

il s'ensuit que

$$\log \left(\frac{X_0^2}{x_0} + \frac{1}{y_0} \right) \leq \log(xX_0^2 + y) \leq \log(x_0X_0^2 + y_0),$$

donc

$$\mathbb{E} \left[\sup_{u \in \Gamma} |\log(xX_0^2 + y)| \right] \leq \mathbb{E} \left[\left| \log \left(\frac{X_0^2}{x_0} + \frac{1}{y_0} \right) \right| \right] + \mathbb{E} \left[|\log(x_0X_0^2 + y_0)| \right]$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $t \mapsto h(t) = t^{-\varepsilon} \log\left(\frac{t^2}{x_0} + \frac{1}{y_0}\right)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0,$$

Ceci assure que h est bornée sur \mathbb{R}^+ . En utilisant l'hypothèse **(C2)** et le lemme (2.2.3) on obtient

$$\mathbb{E} \left[\left| \log\left(\frac{X_0^2}{x_0} + \frac{1}{y_0}\right) \right| \right] < \infty.$$

Par les mêmes arguments on a,

$$\mathbb{E} \left[\left| \log(x_0 X_0^2 + y_0) \right| \right] < \infty$$

D'où,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{u \in \Gamma} \left| \log(x X_0^2 + y) \right| \right] < \infty \quad (3.10)$$

Or, on sait que, si on considère U et V deux fonction on a

$$\inf(U + V) \geq \inf(U) + \inf(V)$$

$$\inf(V - U) \geq \inf(V) + \inf(-U)$$

$$\inf(V - U) \geq \inf(V) - \sup(U)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\inf_{u \in \Gamma} g_1(u) \right] &= \mathbb{E} \left[\inf_{u \in \Gamma} \left(\frac{(X_1 - sX_0)^2}{xX_0^2 + y} - (-\log(xX_0^2 + y)) \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\inf_{u \in \Gamma} \left[\frac{(X_1 - sX_0)^2}{xX_0^2 + y} \right] \right] - \mathbb{E} \left[\sup_{u \in \Gamma} [-\log(xX_0^2 + y)] \right]. \end{aligned}$$

Le deuxième terme ci-dessus est fini par (3.10). De plus, pour tout $u \in \Gamma$, $\left[\frac{(X_1 - sX_0)^2}{xX_0^2 + y} \right] \geq 0$.

On conclut que

$$\mathbb{E} \left[\inf_{u \in \Gamma} g_1(u) \right] > -\infty.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} g_i(u) &= \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{(xX_{i-1}^2 + y)} + \log(xX_{i-1}^2 + y) \\ &= \frac{X_i^2}{xX_{i-1}^2 + y} + s^2 \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y} - 2sX_i \frac{X_{i-1}}{(xX_{i-1}^2 + y)} + \log(xX_{i-1}^2 + y) \\ &= (\varphi + b_i)^2 \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y} + 2(\varphi + b_i)e_i \frac{X_{i-1}}{xX_{i-1}^2 + y} + \frac{e_i^2}{xX_{i-1}^2 + y} + s^2 \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y} \\ &\quad - 2s(\varphi + b_i) \frac{X_{i-1}}{xX_{i-1}^2 + y} - 2se_i \frac{X_{i-1}}{xX_{i-1}^2 + y} + \log(xX_{i-1}^2 + y) \\ &= (\varphi + b_i)^2 Y_{i-1}(u, 2, 1) + s^2 Y_{i-1}(u, 2, 1) + 2(\varphi + b_i)e_i Y_{i-1}(u, 1, 1) + e_i^2 Y_{i-1}(u, 0, 1) - \\ &\quad 2s(\varphi + b_i) Y_{i-1}(u, 2, 1) - 2se_i Y_{i-1}(u, 1, 1) + \log(xX_{i-1}^2 + y) \end{aligned}$$

On déduit que

$$g_i(u) = (\varphi - s + b_i)^2 Y_{i-1}(u, 2, 1) + 2(\varphi - s + b_i) e_i Y_{i-1}(u, 1, 1) + e_i^2 y_{i-1}(u, 0, 1) + \log(x X_{i-1}^2 + y)$$

Si $u = (s, x, y) \in \Gamma$, alors $x > 0$. Par conséquent, quand $\kappa = 0, 1, 2$ la fonction $t \mapsto \frac{t^\kappa}{xt^2 + y}$ est bornée sur \mathbb{R} . Il en découle

$$\mathbb{E} \left[\frac{|X_{i-1}|^\kappa}{x X_{i-1}^2 + y} \right] < \infty \quad \kappa = 0, 1, 2; \quad (3.11)$$

Donc par **(C2)** On a,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_1(u)] &= \mathbb{E}[(\varphi - s + b_1)^2 Y_0(u, 2, 1)] + \mathbb{E}[e_1^2 Y_0(u, 0, 1)] + 2\mathbb{E}[(\varphi - s + b_1) e_1 Y_0(u, 1, 1)] + \\ &\quad \mathbb{E}[\log(x X_0^2 + y)] \\ &= \mathbb{E}[\left((\varphi - s)^2 + b_1^2 + 2(\varphi - s)b_1\right) Y_0(u, 2, 1)] + \mathbb{E}(e_1^2) \mathbb{E}(Y_0(u, 0, 1)) + \\ &\quad 2\mathbb{E}(\varphi - s + b_1) \mathbb{E}(e_1) \mathbb{E}(Y_0(u, 1, 1)) + \mathbb{E}[\log(Y_0(u, 0, 1))] \end{aligned}$$

Il s'ensuit, par (3.11), que

$$\mathbb{E}[g_1(u)] < \infty \quad (3.12)$$

Soit $u = (s, x, y) \in \Gamma$. La fonction $u \mapsto \frac{|X_{i-1}|^\kappa}{x X_{i-1}^2 + y}$ est continue. De plus, il existe $a, b > 0$ tels que $x \geq a$ et $y \geq b$. Donc

$$\frac{|X_{i-1}|^\kappa}{x X_{i-1}^2 + y} \leq \frac{|X_{i-1}|^\kappa}{a X_{i-1}^2 + b}$$

Comme, pour $\kappa \in \{0, 1, 2\}$, la fonction $t \mapsto \frac{|t|^\kappa}{at^2 + b}$ est bornée sur \mathbb{R} , alors

$$\mathbb{E} \left[\frac{|X_{i-1}|^\kappa}{a X_{i-1}^2 + b} \right] < \infty.$$

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale on déduit que $\mathbb{E}[g_1(\cdot)]$ est continue sur Γ .

□

Lemme 3.3.6. *Si (C1), (C2) (2.5), (2.6), (2.14), (3.3), et (3.4) sont satisfaites, alors*

$$\mathbb{E}[g_1(u)] > \mathbb{E}[g_1(\theta)] \quad \text{pour tout } u \neq \theta, \quad u \in \Gamma$$

Preuve . Par (3.12), on a,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[g_1(u)] &= (\varphi - s)^2 \mathbb{E} \left[\frac{X_0^2}{xX_0^2 + y} \right] + \omega^2 \mathbb{E} \left[\frac{X_0^2}{xX_0^2 + y} \right] + \sigma^2 \mathbb{E} \left[\frac{1}{xX_0^2} \right] + \mathbb{E} [\log(xX_0^2 + y)] \\
 &= (\varphi - s)^2 \mathbb{E} \left[\frac{X_0^2}{xX_0^2 + y} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{xX_0^2 + y} \right] + \mathbb{E} [\log(xX_0^2 + y)] + \\
 &\quad \mathbb{E} [\log(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)] - \mathbb{E} [\log(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)] \\
 &= (\varphi - s)^2 \mathbb{E} \left[\frac{X_0^2}{xX_0^2 + y} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{xX_0^2 + y} \right] - \mathbb{E} \left[\log \frac{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)}{xX_0^2 + y} \right] + \mathbb{E} [\log(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)] \\
 &= (\varphi - s)^2 \mathbb{E} \left[\frac{X_0^2}{xX_0^2 + y} \right] + \mathbb{E} \left[h \left(\frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{xX_0^2 + y} \right) \right] + \mathbb{E} [\log(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)]
 \end{aligned}$$

où $h(x) = x - \log(x)$ avec $x > 0$. Par une étude élémentaire de la fonction h , on peut s'assurer que $h(x) > h(1) = 1$ pour tout $x \neq 1$. Ainsi

$$\mathbb{E}[g_1(u)] \geq 1 + \mathbb{E} [\log(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)] = \mathbb{E}[g_1(\theta)]$$

avec $\theta = (\varphi, \omega^2, \sigma^2)$. De plus,

$$\mathbb{E}[g_1(u)] = \mathbb{E}[g_1(\theta)]$$

si et seulement si

$$s = \varphi \text{ et } \mathbb{P} \left[\frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{xX_0^2 + y} = 1 \right] = 1.$$

Si

$$\omega^2 X_0^2 + \sigma^2 = xX_0^2 + y \quad \mathbb{P}.ps$$

alors

$$(\omega^2 - x)X_0^2 = y - \sigma^2 \quad \mathbb{P}.ps.$$

Ceci est possible si $\omega^2 = x$ et $y = \sigma^2$.

Maintenant si $\omega^2 \neq x$ ou $y \neq \sigma^2$, alors $\omega^2 X_0^2 + \sigma^2 = xX_0^2 + y$ *p.s* implique qu'il existe une constante c non nulle telle que

$$X_0^2 = c \quad \mathbb{P}.s.$$

Par (2.3)

$$X_1^2 = (\varphi + b_1)^2 X_0^2 + e_1^2 + 2(\varphi + b_1)e_1 X_0 \quad \mathbb{P}.s. \quad (3.13)$$

En utilisant la stationnarité de $(X_k, k \in \mathbb{Z})$, nous avons $X_1^2 = c$ *p.s.* Ce qui donne

$$c = (\varphi + b_1)^2 c + e_1^2 + 2(\varphi + b_1)e_1 X_0 \quad \mathbb{P}.s. \quad (3.14)$$

Notons que sous **(C1)**, **(C2)** et (2.3), on a

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(\varphi + b_1) \mathbb{E}(X_0) + \mathbb{E}(e_1) = \varphi \mathbb{E}(X_0).$$

Par suite

$$(1 - \varphi)\mathbb{E}(X_0) = 0 \quad \mathbb{P}. p.s.$$

Si $|\varphi| < 1$ alors la stationnarité du processus donne

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{E}(X_k) = 0.$$

En appliquant l'espérance conditionnelle dans (3.13), et le fait que X_0 est indépendante du vecteur (b_1, e_1) il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_0^2 | (b_1, e_1)) &= (\varphi + b_1)^2 c + e_1^2 + 2\mathbb{E}(\varphi + b_1) \mathbb{E}(e_1) \mathbb{E}(X_0) \\ &= (\varphi + b_1)^2 c + e_1^2 \end{aligned}$$

Par suite

$$c = (\varphi + b_1)^2 c + e_1^2 \quad \mathbb{P}. p.s.$$

En injectant cette dernière égalité dans (3.14), on trouve,

$$(\varphi + b_1)^2 c + e_1^2 = (\varphi + b_1)^2 c + e_1^2 + 2(\varphi + b_1)e_1 X_0,$$

donc

$$2(\varphi + b_1)e_1 X_0 = 0 \quad \mathbb{P}. p.s.$$

Notons que $X_0 = \sqrt{c} \neq 0$. Nous devons alors avoir

$$(\varphi + b_1)e_1 = 0 \quad \mathbb{P}. p.s.$$

Ce qui contredit l'hypothèse (3.4).

On conclut ainsi que $\mathbb{E}[g_1(u)] = \mathbb{E}[g_1(\theta)]$ si et seulement si $u = \theta = (s, x, y)$.

□

Preuve . (du théorème 3.3.1)

La preuve suit la méthode générale développée par Pfanzagl (1969). Tout d'abord, nous observons que, d'après (3.5),

$$\inf_{u \in \Gamma} \ell_n(u) \leq \ell_n(\theta)$$

Par suite,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in \Gamma} \ell_n(u) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\theta).$$

Les variables (b_i, e_i) sont *(i.i.d)*. Le théorème (2.1.1) assure donc que la suite $(X_i)_i$ est strictement stationnaire et ergodique. il s'ensuit que la suite $g_i(\theta)$, $i \in \mathbb{Z}$ est strictement stationnaire et ergodique. D'après (3.12) :

$$\mathbb{E}[g_1(\theta)] < \infty$$

Donc, par le théorème ergodique (1.2.12), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\theta) = \mathbb{E}[g_1(\theta)].$$

D'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in \Gamma} \ell_n(u) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\theta) = \mathbb{E}[g_1(\theta)] \quad p.s.,$$

soit

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in \Gamma} \ell_n(u) \leq \mathbb{E}[g_1(\theta)] \quad p.s. \quad (3.15)$$

Pour tout n , $\ell_n(u)$ est continue sur Γ , ce dernier étant compact, donc $\hat{\theta}_n \in \Gamma$.

Par (3.15), on a bien

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\hat{\theta}_n) \leq \mathbb{E}[g_1(\theta)] \quad p.s. \quad (3.16)$$

Soit $C \subset \Gamma$ une partie compacte telle que la distance entre C et θ est positive. Notons que l'ensemble C peut être facilement construit.

Par exemple, soit U une boule ouverte autour de θ avec un rayon suffisamment petit. Clairement $C = \Gamma \setminus U$ ainsi définie satisfait les hypothèses faites sur C .

Maintenant, comme $g_1(u)$ est continue sur Γ , et donc continue sur C , pour tout r tel que

$$r < \mathbb{E}[g_1(u)], \quad u \in C,$$

il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(u)$ autour de u telle que

$$r < \mathbb{E} \left[\inf_{t \in \mathcal{B}(u)} g_1(t) \right]$$

En effet,

Soit $(B_n(u))_n$ une suite boules centrées en u donnée par $B_n(u) = B_n(u, \varepsilon_n)$ où ε_n est une suite décroissante tendant vers 0 et vérifiant $\varepsilon_1 \leq d(\theta, C)$.

Puisque g_1 est continue, alors

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \lim_{t \rightarrow u} g_1(t) \\ &= \underline{\lim}_{t \rightarrow u} g_1(t) \\ &= \sup_n \inf_{t \in B_n(u)} g_1(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \in B_n(u)} g_1(t). \end{aligned}$$

La dernière égalité revient au fait que $\inf_{t \in B_n(u)} g_1(t)$ est croissante par rapport à n . Le théorème de convergence monotone donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\inf_{t \in B_n(u)} g_1(t) \right] = \mathbb{E}[g_1(u)] > r.$$

Ceci implique que, pour un $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a

$$\mathbb{E} \left[\inf_{t \in B_n(u)} g_1(t) \right] > r.$$

Et puis, en choisissant une de ces $B_n(u)$ pour $\mathcal{B}(u)$, on aura :

$$\mathbb{E} \left[\inf_{t \in \mathcal{B}(u)} g_1(t) \right] > r$$

Les ensembles $\mathcal{B}(u)$, $u \in C$ forment une couverture ouverte de C , C étant compact, donc il existe un nombre fini de points u_1, u_2, \dots, u_k tels que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}(u_i).$$

Par le théorème ergodique (1.2.12), on a pour tout $1 \leq j \leq k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf_{u \in \mathcal{B}(u_j)} g_i(u) = \mathbb{E} \left[\inf_{u \in \mathcal{B}(u_j)} g_i(u) \right] > r \quad p.s. \quad (3.17)$$

$\{g_i(u), i \in \mathbb{Z}\}$ étant un processus stationnaire et ergodique. Puisque la fonction inf est mesurable, alors par le théorème (1.2.10) le processus :

$$\left\{ \inf_{u \in \mathcal{B}(u_j)} g_i(u), \quad 1 \leq j \leq k \right\}$$

est stationnaire et ergodique.

observons que,

$$\inf_{u \in C} \ell_n(u) \geq \min_{1 \leq j \leq k} \inf_{u \in \mathcal{B}(u_j)} \ell_n(u) \geq \min_{1 \leq j \leq k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf_{u \in \mathcal{B}(u_j)} g_i(u).$$

Par (3.17), nous avons

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C} \ell_n(u) \geq \min_{1 \leq j \leq k} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf_{u \in \mathcal{B}(u_j)} g_i(u) > r \quad (3.18)$$

Ceci est vrai sauf sur un évènement qu'on le note B_r .

Sur B_r , on a

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C} \ell_n(u) \leq r,$$

et $\mathbb{P}(B_r) = 0$ pour tout r verifiant,

$$r < \inf_{u \in C} \mathbb{E} [g_1(u)] \quad (3.19)$$

Soit

$$B = \bigcup \{B_r, r \text{ est un rationnel qui satisfait (3.19)}\}.$$

Soit \bar{B} le complémentaire de B ,

$$\bar{B} = \bigcap \left\{ \bar{B}_r, r \text{ satisfait (3.19)} \right\}$$

Sur \bar{B} , pour tout rationnel r qui satisfait (3.19), on a

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C} \ell_n(u) > r$$

Ceci implique que sur \bar{B} ,

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C} \ell_n(u) \geq \inf_{u \in C} \mathbb{E}[g_1(u)] \quad p.s. \quad (3.20)$$

$\mathbb{E}[g_1(u)]$ est continue par le lemme (3.3.5) et C est compact. D'autre part, le lemme (3.3.6) assure que $\theta \notin C$ est l'unique minimum de $\mathbb{E}[g_1(u)]$. En utilisant (3.20) on obtient

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C} \ell_n(u) \geq \inf_{u \in C} \mathbb{E}[g_1(u)] > \mathbb{E}[g_1(\theta)]. \quad (3.21)$$

Soit U une boule ouverte autour de θ , avec un rayon suffisamment petit et soit $U^* = U \cap \Gamma$. Si $\hat{\theta}_n \notin U^*$ une infinité de fois, alors il existe une sous suite n_k aléatoire telle que si $C^* = \Gamma \setminus U^*$, on a

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C^*} \ell_n(u) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \ell_{n_k}(\hat{\theta}_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\hat{\theta}_n) \quad p.s. \quad (3.22)$$

Mais d'après (3.16), et (3.21), on a

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in C^*} \ell_n(u) > \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\hat{\theta}_n).$$

Ceci contredit (3.22).

Ainsi, pour tout U^* , il existe un n_0 pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$\hat{\theta}_n \in U^*$$

c'est à dire

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \theta.$$

□

Chapitre 4

Le comportement asymptotique de l'EMV

Dans ce chapitre, nous allons établir la loi limite de l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres d'un autorégressif à coefficients aléatoires.

4.1 Introduction et notations

Considérons le modèle (2.3) avec les hypothèses considérées dans le chapitre 3 :

C1 : $\{(b_k, e_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont des paires de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées.

C2 : Le vecteur (b_0, e_0) vérifie,

$$\mathbb{E}(b_0, e_0) = (0, 0), \quad \text{cov}(b_0, e_0) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

avec $\omega^2, \sigma^2 > 0$.

Notons que l'EMV vérifie

$$\inf_{u \in \Gamma} \ell_n(u) = \ell_n(\hat{\theta}_n),$$

où

$$\ell_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i(u),$$

avec

$$g_i(u) = \log(xX_{i-1}^2 + y) + \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{xX_{i-1}^2 + y}.$$

Rappelons les notations suivantes :

$$Y_{i-1}(u, \kappa, \gamma) = \frac{X_{i-1}^\kappa}{(xX_{i-1}^2 + y)^\gamma}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, 2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

et

$$H = H(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha(2,1) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(4,2) & \alpha(2,2) \\ 0 & \alpha(2,2) & \alpha(0,2) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Avec :

$$\alpha(\kappa, \gamma) = \mathbb{E} \left(\frac{X_0^\kappa}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^\gamma} \right) < \infty \quad \kappa = 0, 1, \dots, 2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

Soit maintenant le vecteur

$$g'_i(u) = \left(\frac{\partial}{\partial s} g_i(u), \frac{\partial}{\partial x} g_i(u), \frac{\partial}{\partial y} g_i(u) \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g_i(u) &= \frac{-2X_{i-1}(X_i - sX_{i-1})}{xX_{i-1}^2 + y} \\ &= -2X_i \frac{X_{i-1}}{xX_{i-1}^2 + y} + 2s \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y} \\ &= -2((\varphi + b_i)X_{i-1} + e_i) \frac{X_{i-1}}{xX_{i-1}^2 + y} + 2sY_{i-1}(u, 2, 1) \\ &= -2(\varphi + b_i) \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y} - 2e_i \frac{X_{i-1}}{xX_{i-1}^2 + y} + 2sY_{i-1}(u, 2, 1) \\ &= -2(\varphi + b_i)Y_{i-1}(u, 2, 1) - 2e_iY_{i-1}(u, 1, 1) + 2sY_{i-1}(u, 2, 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s} g_i(u) = -2(\varphi - s + b_i)Y_{i-1}(u, 2, 1) - 2e_iY_{i-1}(u, 1, 1)} \quad (4.4)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g_i(u) &= (X_i - sX_{i-1})^2 \left[-\frac{X_{i-1}^2}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} \right] + \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y} \\ &= (X_i^2 + s^2X_{i-1}^2 - 2X_iX_{i-1}s) \left[-\frac{X_{i-1}^2}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} \right] + \frac{X_{i-1}^2}{xX_{i-1}^2 + y}. \end{aligned}$$

On peut écrire,

$$X_i^2 = ((\varphi + b_i)X_{i-1} + e_i)^2 = (\varphi + b_i)^2X_{i-1}^2 + e_i^2 + 2(\varphi + b_i)e_iX_{i-1},$$

par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g_i(u) &= -(\varphi + b_i)^2Y_{i-1}(u, 4, 2) - s^2Y_{i-1}(u, 4, 2) + 2sX_i \frac{X_{i-1}^3}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} + Y_{i-1}(u, 2, 1) \\ &\quad - e_i^2Y_{i-1}(u, 2, 2) - 2(\varphi + b_i)e_iY_{i-1}(u, 3, 2) \\ &= -(\varphi + b_i)^2Y_{i-1}(u, 4, 2) - s^2Y_{i-1}(u, 4, 2) + 2s(\varphi + b_i) \frac{X_{i-1}^4}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} + 2se_iY_{i-1}(u, 3, 2) \\ &\quad + Y_{i-1}(u, 2, 1) - e_i^2Y_{i-1}(u, 2, 2) - 2(\varphi + b_i)e_iY_{i-1}(u, 3, 2). \end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} g_i(u) = -(\varphi - s + b_i)^2 Y_{i-1}(u, 4, 2) - 2(\varphi - s + b_i) e_i Y_{i-1}(u, 3, 2) - e_i^2 Y_{i-1}(u, 2, 2) + Y_{i-1}(u, 2, 1)}$$

(4.5)

On a aussi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} g_i(u) &= -\frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} + \frac{1}{xX_{i-1}^2 + y} \\ &= -\frac{X_i^2}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} - s^2 \frac{X_{i-1}^2}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} + 2sX_i \frac{X_{i-1}}{(xX_{i-1}^2 + y)^2} + Y_{i-1}(u, 0, 1) \\ &= -(\varphi + b_i)^2 Y_{i-1}(u, 2, 2) - e_i^2 Y_{i-1}(u, 0, 2) - 2(\varphi + b_i) e_i Y_{i-1}(u, 1, 2) - s^2 Y_{i-1}(u, 2, 2) \\ &\quad + 2s(\varphi + b_i) Y_{i-1}(u, 2, 2) + 2se_i Y_{i-1}(u, 1, 2) + Y_{i-1}(u, 0, 1), \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} g_i(u) = -(\varphi - s + b_i)^2 Y_{i-1}(u, 2, 2) - 2(\varphi + b_i - s) e_i Y_{i-1}(u, 1, 2) - e_i^2 Y_{i-1}(u, 0, 2) + y_{i-1}(u, 0, 1)}$$

(4.6)

On note

$$A = \mathbb{E} \left[g'_1(\theta)^t g'_1(\theta) \right], \quad (4.7)$$

où X^t désigne la transposée de X .

4.2 Loi limite de l'EMV

Le résultat suivant montre que l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement normal.

Soit $N(m, A)$ un vecteur aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et de matrice de covariance A notons par $\text{int}(\Gamma)$ l'intérieur de Γ .

Théorème 4.2.1. *Si les conditions (C1), (C2), (2.5), (2.6), (3.3), (3.4) sont satisfaites,*

$\theta \in \text{int}(\Gamma)$ et

$$\mathbb{E} [b_0^4] < \infty, \quad \mathbb{E} [e_0^4] < \infty \quad (4.8)$$

et pour tous les réels c_1, c_2, c_3 avec $c_1 \neq 0$ on aura

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 \in \{c_2, c_3\}) < 1, \quad (4.9)$$

alors

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, H^{-1}AH),$$

où A et H sont deux matrices inversibles définies en (4.7) et (4.2) respectivement.

La preuve du théorème (4.2.1), sera divisée en plusieurs lemmes.

Lemme 4.2.2. *On suppose que (C1), (C2), (2.5), (2.6), (3.3), (3.5), (4.8), (4.9), sont satisfaites.*

Alors,

$$(i) \mathbb{E}[g'_1(\theta)] = 0$$

(ii) *La matrice A définie par (4.7) existe et est inversible.*

Preuve . (i) De (4.4), on a

$$\frac{\partial}{\partial s} g_i(u) = -2b_i \frac{X_{i-1}^2}{\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2} - 2e_i \frac{X_{i-1}}{\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2}.$$

e_i est indépendante de X_{i-1} , en utilisant (C2) et (4.3) il vient

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial s} g_i(\theta)\right) = -2\mathbb{E}(b_i) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}^2}{\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2}\right) - 2\mathbb{E}(e_i) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}}{\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2}\right) = 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g_i(\theta) &= -b_i^2 Y_{i-1}(\theta, 4, 2) - 2b_i e_i Y_{i-1}(\theta, 3, 2) - e_i^2 Y_{i-1}(\theta, 2, 2) + Y_{i-1}(\theta, 2, 1) \\ &= \frac{-b_i^2 X_{i-1}^4 - 2b_i e_i X_{i-1}^3 - e_i^2 X_{i-1}^2}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2} + \frac{X_{i-1}^2 (\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2} \\ &= \frac{(\omega^2 - b_i^2) X_{i-1}^4 - 2b_i e_i X_{i-1}^3 + X_{i-1}^2 (\sigma^2 - e_i^2)}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}. \end{aligned}$$

(C1), (C2) et 4.3 donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x} g_i(\theta)\right) &= \mathbb{E}(\omega^2 - b_i^2) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}^4}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}\right) - 2\mathbb{E}(b_i) \mathbb{E}(e_i) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}^3}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}\right) \\ &\quad + \mathbb{E}(\sigma^2 - e_i^2) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}^2}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, par (4.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} g_i(\theta) &= -b_i^2 Y_{i-1}(\theta, 2, 2) - 2b_i e_i Y_{i-1}(\theta, 1, 2) - e_i^2 Y_{i-1}(\theta, 0, 2) + Y_{i-1}(\theta, 0, 1) \\ &= \frac{-b_i^2 X_{i-1}^2 - 2b_i e_i X_{i-1} - e_i^2}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2} + \frac{1}{\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2} \\ &= \frac{(\omega^2 - b_i^2) X_{i-1}^2 - 2b_i e_i X_{i-1} + (\sigma^2 - e_i^2)}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}. \end{aligned}$$

En utilisant (C1), (C2), et (4.3) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial y} g_i(\theta)\right) &= \mathbb{E}((\omega^2 - b_i^2)) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}^2}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}\right) - 2\mathbb{E}(e_i) \mathbb{E}(b_i) \mathbb{E}\left(\frac{X_{i-1}}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}\right) \\ &\quad + \mathbb{E}(\sigma^2 - e_i^2) \mathbb{E}\left(\frac{1}{(\omega^2 X_{i-1}^2 + \sigma^2)^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathbb{E}(g'_1(\theta)) = 0$$

(ii) Montrons que la matrice est inversible.

Supposons que A est non-inversible, alors, il existe des constantes c_1, c_2, c_3 non toutes nulles telles que :

$$c_1 \frac{\partial}{\partial s} g_1(\theta) + c_2 \frac{\partial}{\partial x} g_1(\theta) + c_3 \frac{\partial}{\partial y} g_1(\theta) = 0 \quad (p.s) \quad (4.10)$$

En utilisant les formules de dérivées partielles de $g'_1(\theta)$, (4.10) devient,

$$c_1 \left[-2b_1 \frac{X_0^2}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} - 2e_1 \frac{X_0}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} \right] + c_2 \left[\frac{(\omega^2 - b_1^2)X_0^4 - 2b_1 e_1 X_0^3 + X_0^2(\sigma^2 - e_1^2)}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] + c_3 \left[\frac{(\omega^2 - b_1^2)X_0^2 - 2b_1 e_1 X_0 + (\sigma^2 - e_1^2)}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] = 0,$$

donc

$$-2c_1 X_0 \left(\frac{b_1 X_0 + e_1}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} \right) + c_2 X_0^2 \left[\frac{(\omega^2 - b_1^2)X_0^2 - 2b_1 e_1 X_0 + (\sigma^2 - e_1^2)}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] + c_3 \left[\frac{-b_1^2 X_0^2 - 2b_1 e_1 X_0 - e_1^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} + \frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] = 0,$$

il en résulte que

$$-2c_1 X_0 \left(\frac{b_1 X_0 + e_1}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} \right) + c_2 X_0^2 \left[\frac{-b_1^2 X_0^2 - 2b_1 e_1 X_0 - e_1^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} + \frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] + c_3 \left[\frac{-b_1^2 X_0^2 - 2b_1 e_1 X_0 - e_1^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} + \frac{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] = 0$$

par conséquent

$$(c_3 + c_2 X_0^2) \left[\frac{-(b_1 X_0 + e_1)^2}{(\omega^2 X_0^2 + \sigma^2)^2} \right] - 2c_1 X_0 \left(\frac{b_1 X_0 + e_1}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} \right) + \frac{c_3 + c_2 X_0^2}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} = 0 \quad (4.11)$$

- Si $c_2 = 0$ et $c_3 = 0$ alors $c_1 \neq 0$. Dans ce cas

$$X_0(b_1 X_0 + e_1) = 0 \quad p.s,$$

ce qui implique,

$$(b_1 X_0 + e_1) \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} = 0 \quad p.s.$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à (b_1, e_1) , on aura

$$\mathbb{E} \left[(b_1 X_0 + e_1) \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \mid (b_1, e_1) \right] = 0,$$

donc

$$\mathbb{E} \left[b_1 X_0 \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \mid (b_1, e_1) \right] + \mathbb{E} \left[e_1 \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \mid (b_1, e_1) \right] = 0,$$

par suite

$$b_1 \mathbb{E} \left(X_0 \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \right) + e_1 \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \right) = 0,$$

ceci donne

$$b_1 \mathbb{E} \left(X_0 \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \right) + e_1 \mathbb{P} (X_0 \neq 0) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_0 \mathbb{1}_{\{X_0 \neq 0\}} \right] &= \mathbb{E} \left[X_0 (1 - \mathbb{1}_{\{X_0 = 0\}}) \right] \\ &= \mathbb{E}(X_0) - \mathbb{E} \left(X_0 \mathbb{1}_{\{X_0 = 0\}} \right) \\ &= \mathbb{E}(X_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$e_1 \mathbb{P}(X_0 \neq 0) = 0,$$

mais

$$\mathbb{P}(X_0 \neq 0) > 0.$$

Donc

$$e_1 = 0 \text{ p.s.}$$

Ce qui contredit les hypothèses.

- Supposons maintenant que $c_2 \neq 0$ ou $c_3 \neq 0$. Si $c_3 + c_2 X_0^2 = 0$, alors

$$\mathbb{P} \left(c_3 + c_2 X_0^2 \neq 0 \right) = 1,$$

sinon $\mathbb{P}(X_0^2 = c) = 1$ avec c une constante quelconque, cependant ceci contredit les hypothèses de départ.

D'après (4.11)

$$\mathbb{P}(b_1 X_0 + e_1 \in \{K_2, K_3\}) = 1$$

ou $K_2 = K_2(X_0)$ et $K_3 = K_3(X_0)$. En faisant rentrer l'espérance conditionnelle par rapport à X_0 , on obtient

$$\mathbb{E} [\mathbb{P} (b_1 X_0 + e_1 \in \{K_2(X_0), K_3(X_0)\}) | X_0] = 1$$

- (iii) Ceci implique, puisque X_0 et (e_1, b_1) sont indépendantes,

$$\int \mathbb{P}(b_1 x + e_1 \in \{K_2(x), K_3(x)\}) d\mathbb{P}_{X_0}(x) = 1,$$

Il s'ensuit que pour \mathbb{P}_{X_0} presque tout x

$$\mathbb{P}(b_1x + e_1 \in \{K_2(x), K_3(x)\}) = 1 \quad .$$

Toutefois, puisque $\mathbb{P}(X_0 \neq 0) > 0$, la dernière égalité contredit (4.9).

On conclut

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Donc la matrice A est inversible.

□

Le prochain résultat montre que $n^{1/2}\ell'_n(\theta)$ converge en loi vers un vecteur aléatoire normal tridimensionnel non dégénéré.

Rappelons

$$\ell_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i(u),$$

où

$$g_i(u) = \log(xX_{i-1}^2 + y) + \frac{(X_i - sX_{i-1})^2}{xX_{i-1}^2 + y}.$$

On a

Lemme 4.2.3. *On suppose que (C1), (C2), (2.5), (2.6), (3.3), (3.5), (4.8), (4.9), sont satisfaites, alors :*

$$n^{1/2}\ell'_n(\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, A),$$

où A est la matrice définie en (4.7).

Preuve . On note que

$$n^{1/2}\ell'_n(\theta) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n g'_i(\theta)$$

avec

$$\mathbb{E}(g'_i(\theta)) = 0,$$

et

$$\text{cov}(g'_i(\theta)) = A = \mathbb{E}[g'_i(\theta)^t g'_i(\theta)].$$

Remarquons que $g'_i(\theta)$ et $g'_j(\theta)$ sont non corrélées si $i \neq j$. De plus, par (C1), et (C2)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k g'_i(\theta) \mid \mathcal{G}_{k-1}\right] = \sum_{i=1}^{k-1} g'_i(\theta) + \mathbb{E}(g'_k(\theta) \mid \mathcal{G}_{k-1})$$

Or, par (C1) et (C2), on a

$$\mathbb{E}(g'_k(\theta) \mid \mathcal{G}_{k-1}) = 0$$

Donc ;

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k g'_i(\theta) \mid \mathcal{G}_{k-1} \right] = \sum_{i=1}^{k-1} g'_i(\theta).$$

On applique le théorème (1.3.8), sur $\frac{\partial g_i}{\partial s}(\theta)$, $\frac{\partial g_i}{\partial x}(\theta)$, et $\frac{\partial g_i}{\partial y}(\theta)$, on conclut que les variables

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(\theta)}{\partial s}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(\theta)}{\partial x}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(\theta)}{\partial y}$$

convergent vers une loi normale de moyenne 0.

Puis, en appliquant le dispositif de Cramer (1.3.9) à ses variables, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n g'_i(\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, A),$$

sachant que

$$g'_i(u) = \left(\frac{\partial}{\partial s} g_i(u), \frac{\partial}{\partial x} g_i(u), \frac{\partial}{\partial y} g_i(u) \right),$$

alors

$$n^{1/2} \ell'_n(\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, A)$$

□

Remarque 4.2.4. Notons que dans l'article [1], les auteurs ont montré que le vecteur $n^{1/2} \ell'_n(\theta)$ converge en loi vers une variable suivant la loi $N(\theta, A)$ alors qu'en fait $n^{1/2} \ell'_n(\theta)$ converge vers une variable de loi $N(0, A)$ Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que le vecteur $\ell'_n(\theta)$ est centré.

On pose maintenant $H(u) = \mathbb{E}[g''_1(u)]$ et tout comme (3.11), il est clair que la fonction H est définie, en tout point $u \in \Gamma$.

Soit $|\cdot|$ la norme matricielle maximale.

Lemme 4.2.5. *On suppose que (C1), (C2), (2.5), (2.6), (3.3), (3.4), (3.5), et (4.8) sont vérifiées, alors :*

$$\sup_{u \in \Gamma} |\ell''_n(u) - H(u)| \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P}.p.s \quad (4.12)$$

De plus : $H(u)$ est continue sur Γ et $H = H(\theta)$ définie comme en (4.2) est inversible.

Preuve . Puisque $\mathbb{E}[g''_1(u)] < \infty$ alors par le théorème ergodique,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g''_i(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[g''_1(u)] \quad \mathbb{P}.p.s.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in \Gamma} |\ell_n^{(3)}(u)| &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{u \in \Gamma} |\ell_n^{(3)}(u)| \\ &= \mathbb{E} \sup_{u \in \Gamma} |\ell_n^{(3)}(u)|. \end{aligned}$$

Le théorème de dérivation sur la convergence uniforme des suites de fonctions implique (4.12).

Il est clair que $H(u)$ est continue sur Γ car g_1'' l'est.

Maintenant, pour montrer que $H(\theta)$ est inversible, il suffit de montrer que la matrice

$$H^* = \begin{pmatrix} \alpha(4, 2) & \alpha(2, 2) \\ \alpha(2, 2) & \alpha(0, 2) \end{pmatrix}$$

est inversible.

Remarquons que

$$H^* = \mathbb{E}(\eta^t \eta)$$

où :

$$\eta = \left(\frac{X_0^2}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2}, \frac{1}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} \right)$$

Si H^* est singulière alors, il existe des constantes c_1 et c_2 non toutes nulles $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ telles que

$$\mathbb{P} \left(c_1 \frac{X_0^2}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} + c_2 \frac{1}{\omega^2 X_0^2 + \sigma^2} = 0 \right) = 1$$

Ce qui implique que $c_1 \neq 0$ car sinon $c_2 = 0$. Donc

$$\mathbb{P} \left(X_0^2 = -\frac{c_2}{c_1} \right) = 1.$$

Or, ceci n'est pas possible pour la même raison de la preuve du lemme (4.2.2); X_0 n'est pas une constante.

Il s'ensuit que

$$c_1 = c_2 = 0$$

La matrice H est donc inversible.

□

Preuve . (du théorème (4.2.1))

Le théorème des accroissements finis sur appliqué sur les coordonnées de ℓ'_n implique qu'il existe un vecteur c tel que

$$\ell'_n(\widehat{\theta}_n) - \ell'_n(\theta) = (\widehat{\theta}_n - \theta)\ell''_n(c).$$

Comme $\ell'_n(\widehat{\theta}_n) = 0$ et $\ell_n(u)$ est continûment différentiable sur $\text{int}(\Gamma)$, alors par le théorème (3.3.1), on obtient

$$\ell'_n(\widehat{\theta}_n) - \ell'_n(\theta) = (\widehat{\theta}_n - \theta)(\ell''_n(\theta) + o(1)).$$

Le lemme (4.2.5) donne

$$-\ell'_n(\theta) = (\hat{\theta}_n - \theta)(H(\theta) + o(1)).$$

Il s'ensuit par le lemme (4.2.3) que

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta)H(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, A)$$

D'où

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, H^{-1}AH)$$

□

Remarque 4.2.6. Si b_0 et e_0 sont indépendantes, alors la condition (4.9) est satisfaite.

En effet,

- Supposons le contraire ie,

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 \in \{c_2, c_3\}) = 1 \quad \text{pour } c_1, c_2, c_3, \text{ avec } c_1 \neq 0 \quad (4.13)$$

- Notons que $c_2 \neq c_3$ donc, on peut supposer que, $c_2 < 0 < c_3$ puisque $\mathbb{E}[c_1 b_0 + e_0] = 0$ (par **(C2)**) et $\mathbb{E}((c_1 b_0 + e_0)^2) = c_1^2 \omega^2 + \sigma^2 > 0$ ceci est vrai grâce à l'hypothèse e_0 et b_0 sont indépendantes.
- Si c_2 et c_3 étaient de même signe, l'espérance ne va pas être nulle, et elles ne peuvent pas être nulles puisque la variance est strictement positive.
- Par (4.13), On a,

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 \in \{c_2, c_3\} | e_0 = v) d\mathbb{P}_{e_0}(v) = 1 \\ & \Leftrightarrow \int \mathbb{P}(c_2 < c_1 b_0 + e_0 < c_3 | e_0 = v) d\mathbb{P}_{e_0}(v) = 1 \\ & \Leftrightarrow \int \mathbb{P}\left(\frac{c_2 - v}{c_1} < b_0 < \frac{c_3 - v}{c_1} | e_0 = v\right) d\mathbb{P}_{e_0}(v) = 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int \mathbb{P}\left(b_0 \in \left\{\frac{c_2 - v}{c_1}, \frac{c_3 - v}{c_1}\right\}\right) = 1 \quad \text{pour } \mathbb{P}_{e_0} \text{ presque tout } v$$

- Donc b_0 a une distribution en deux points c'est à dire,

$$\mathbb{P}(b_0 = u_1) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(b_0 = u_2) > 0.$$

Pour tout $u_1 < 0 < u_2$ car $\mathbb{E}(b_0) = 0$ et $\mathbb{E}(b_0^2) > 0$

- De même pour e_0 ,

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 \in \{c_2, c_3\} | b_0 = u) d\mathbb{P}_{b_0}(u) = 1 \\ & \Leftrightarrow \int \mathbb{P}(c_2 < c_1 u + e_0 < c_3 | b_0 = u) d\mathbb{P}_{b_0}(u) = 1 \\ & \Leftrightarrow \int \mathbb{P}(c_2 - c_1 u < e_0 < c_3 - c_1 u | b_0 = u) d\mathbb{P}_{b_0}(u) = 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int \mathbb{P}(e_0 \in \{c_2 - c_1 u, c_3 - c_1 u\}) = 1 \quad \text{pour } \mathbb{P}_{b_0} \text{ presque tout } u$$

- Donc e_0 a une distribution en deux points c'est à dire,

$$\mathbb{P}(e_0 = v_1) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(e_0 = v_2) > 0$$

Pour tout $v_1 < 0 < v_2$ car $\mathbb{E}(e_0) = 0$ et $\mathbb{E}(b_0^2) > 0$

- Cependant ceci implique que, Si $c_1 > 0$,

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 = c_1 u_1 + v_1) > 0$$

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 = c_1 u_1 + v_2) > 0$$

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 = c_1 u_2 + v_2) > 0$$

avec,

$$c_1 u_1 + v_1 < c_1 u_1 + v_2 < c_1 u_2 + v_2.$$

Ce qui contredit (4.13), car dans ce cas,

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 \in \{c_1 u_1 + v_1, c_1 u_1 + v_2, c_1 u_2 + v_2\}) > 0$$

- Et si $c_1 < 0$, on a,

$$c_1 u_1 + v_2 > c_1 u_1 + v_1 < c_1 u_2 + v_1.$$

De plus,

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 = c_1 u_1 + v_2) > 0$$

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 = c_1 u_1 + v_1) > 0$$

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 = c_1 u_2 + v_1) > 0.$$

Et pour la même raison nous avons une contradiction avec (4.13).

- Conclusion, $\forall c_1 \neq 0$

$$\mathbb{P}(c_1 b_0 + e_0 \in \{c_2, c_3\}) < 1$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux processus autorégressifs à coefficients aléatoires d'ordre 1. Nous nous sommes penchés sur les conditions d'existence d'une solution strictement stationnaire et sur l'estimation des paramètres à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Sous certaines conditions optimales, l'estimateur obtenu est consistant et est asymptotiquement normal.

Bibliographie

- [1] Aue, A., Horvath, L., Steinebach, J., (2006). Estimation in random coefficient autoregressive models. *J. Time Series Anal.* 27 (1), 61–76.
- [2] Berkes, I., Horvath, L. and Kokoszka, P. (2003) GARCH processes : structure and estimation. *Bernoulli* 9, 201–27.
- [3] Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures*. New York : Wiley.
- [4] Bougerol, P. and Picard, N. (1992) Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Ann. Probab.* 20, 1714–30.
- [5] Brandt, A. (1986) The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. *Adv. Appl. Probab.* 18, 211–20.
- [6] Breiman, L. (1968). *Probability. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- [7] Chow, Y. S. and Teicher, H. (1997) *Probability Theory* (3rd edn). New York : Springer-Verlag
- [8] Durrett, R. (1996) *Probability : Theory and Examples* (2nd edn). Belmont : Duxbury Press.
- [9] Jean-christophe, B. (2022) Cours De Master 2 Mathématique : *Processus Stochastiques*.
- [10] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982) *Random Coefficient Autoregressive Models : An Introduction*. New York : Springer-Verlag.
- [11] Quinn, B. G. and Nicholls, D. F. (1981) The estimation of random coefficient autoregressive models II. *J. Time Ser. Anal.* 2, 185–203.
- [12] Tong, H. (1990) *Non-linear Time Series : A Dynamical System Approach*. Oxford : Clarendon Press.