



UNIVERSITE DE ABOU BEKR BELKAID TLEMSEN
FACULTE DES SCIENCES

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Perturbations, Moyennisation et Applications aux
Biomathématiques (PeMAB)

présenté par

Nesrine BENCHAIB

**Etude de la stabilité globale de l'équilibre
endémique des modèles multi groupes SIR avec
une incidence non linéaire**

dirigé par *M^{elle}* Chahrazed BENOSMAN

Soutenu le 04 septembre 2013 devant le jury composé de :

M ^{me} D. Hadj Slimane	Université de Tlemcen	Présidente
T.M. Touaoula	Université de Tlemcen	Examineur
M ^{lle} C. Benosman	Université de Tlemcen	Directrice

*Ce travail modeste est dédié : À mes chers parents, mon
frère et ma soeur ; À la mémoire de ma tante ; À tous mes
proches ;*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur *M^{elle}* : Chahrazed Benosman, ses conseils et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens également à remercier tous les professeurs qui m'ont enseigné et qui par leurs compétences m'ont soutenu dans la poursuite de mes études.

Résumé

Résumé

Dans ce mémoire, on présente le nombre de reproduction de base pour un modèle épidémique multigroupe avec une incidence non linéaire. Ensuite, on établit la dynamique globale est entièrement déterminée par le nombre de reproduction de base R_0 . On montre que le nombre de reproduction de base R_0 est un paramètre global de seuil dans le sens que si il est inférieur ou égale à 1, l'équilibre sans maladie est globalement stable et la maladie s'éteint, alors que si il est supérieur à 1, il est un équilibre endémique unique qui est globalement stable donc la maladie persiste dans la population. Enfin, des exemples numériques sont également inclus pour illustrer l'efficacité du résultat proposé.

Global stability of the endemic equilibrium of multigroup SIR models with nonlinear incidence

Abstract

In this memory, we introduce a basic reproduction number for a multigroup epidemic model with nonlinear incidence. Then, we establish that global dynamics are completely determined by the basic reproduction number R_0 . It shows that, the basic reproduction number R_0 is a global threshold parameter in the sense that if it is less than or equal to one, the disease free equilibrium is globally stable and the disease dies out; whereas if it is larger than one, there is a unique endemic equilibrium which is globally stable and thus the disease persists in the population. Finally, a numerical example is also included to illustrate the effectiveness of the proposed result.

Table des matières

Introduction	11
1 Les résultats principaux	13
1.1 Théorème 1	16
1.2 Théorème 2	21
2 Simulation numérique	27
2.1 Exemple 1	27
2.2 Exemple 2	28
2.3 Interprétation de la simulation numérique	29
Table des figures	31
Bibliographie	33

Introduction

Ce mémoire concerne l'étude de la stabilité globale de l'équilibre endémique des modèles multi groupes SIR avec une incidence non linéaire qui a été faite par Ruoyan Sun, publiée dans la revue *Computers and Mathematics with Applications* en 2010 [16]. Des modèles multi groupes, ont été présentés dans la littérature, pour décrire la dynamique de transmission des maladies infectieuses, qui peuvent être bactériennes (causées par un germe), virales (par un virus) ou parasitaires (parasites) dans les populations hôte (ce qui préserve les germes, virus ou parasites) et qui sont de nature hétérogène (se dit d'un tout formé d'éléments différents, contraire : population hôte), l'exemple type de ces maladies infectieuses : la rougeole, l'oreillons, la gonorrhée et le SIDA ou (VIH). Et les maladies à transmission vectorielle telles que le paludisme (dite parasitaire). De nombreux facteurs peuvent conduire à une hétérogénéité (caractère de ce qui est hétérogène) dans une population hôte. Les groupes cibles peuvent être répartis géographiquement en communautés (ville, cité, pays) ou épidémiologiquement pour incorporer l'infectiosité différentielle ou la co-infection des tensions multiples de l'agent de maladie. L'article fondateur de Lajmanovich et Yorke [2] sur une classe de modèles multi groupe SIS pour la dynamique de transmission de la gonorrhée (c'est une inflammation de la muqueuse génital de l'homme) est l'un des premier travaux sur les modèles multi groupes. Dans cet article une analyse de la dynamique globale d'un modèle SIR multi groupe est donnée. La stabilité globale de l'unique équilibre endémique est établie suivant une fonction globale de Lyapunov. Plusieurs travaux de recherche ont été effectués sur des modèles multi groupes durant les années précédentes [15-3]. Il est bien connu que la dynamique globale de modèles multi groupes de grandes dimensions, en particulier la stabilité globale de l'équilibre endémique, est un problème très difficile. L'unicité et la stabilité globale de l'équilibre endémique, lorsque le taux de reproduction de base R_0 est supérieur à 1, restent des problèmes ouverts dans la plupart des cas.

Récemment, une approche graphique théorique à la méthode des fonctions de Lyapunov a été proposée dans [6-12]. Cette méthode a été utilisée pour établir la stabilité globale d'un unique équilibre endémique d'un modèle multi groupe SEIR, décrit par un système d'équations différentielles ordinaires. Leurs résultats résolvent complètement le problème de l'unicité et la stabilité globale de l'équilibre endémique pour des modèles multi groupes. En utilisant les résultats de l'article [6], l'unicité et la stabilité globale de l'équilibre endémique pour plusieurs classes de modèles multi groupe ont été étudiées dans [6-21], lorsque le taux de reproduction de base $R_0 > 1$. De plus certains problèmes ouverts on été résolus suivant les résultats de l'article.

En général, un modèle multi groupe est formulé en répartissant la population de taille $N(t)$ en n groupes distincts. Pour $1 \leq k \leq n$, le k -ième groupe est encore réparti en trois compartiments : susceptible, infectieux et rétabli, dont les nombres d'individus à l'instant t sont notés par $S_k(t)$, $I_k(t)$ et $R_k(t)$, respectivement. Le terme non linéaire $\beta_{kj}f_{kj}(S_k, I_j)$ représente l'infection croisée du groupe j vers le groupe k . Le flux d'individus dans le

k -ième groupe est donné par une constante A_k , dont on assume qu'une fraction p_k est immunisée et la fraction restante $(1 - p_k)$ est sensible à la maladie. Une stratégie de vaccination simple est prise en considération où θ_k représente fraction des individus S_k vaccinés. La matrice $B = (\beta_{ij})_{n \times n}$ est une matrice irréductible où $\beta_{ij} \geq 0$. Dans le k ième groupe, on suppose que la mort naturelle se produit avec des taux constants d_k^S, d_k^I , et d_k^R , dans les compartiments S_k, I_k , et R_k respectivement. Les individus dans I_k subissent une mortalité supplémentaire, due à la maladie, avec un taux constant ϵ_k . On suppose que les individus dans I_k se rétablissent avec un taux γ_k constant. Les individus qui se sont rétablis, ne retournent jamais à la classe des infectés. Sous ces hypothèses un modèle multigroupe épidémique, avec une incidence non linéaire, est décrit par le système d'équation différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = (1 - p_k)A_k - (d_k^S + \theta_k) S_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j), \\ \frac{dI_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k, \\ \frac{dR_k}{dt} = p_k A_k + \theta_k S_k + \gamma_k I_k - (d_k^R + \delta_k) R_k. \end{cases} \quad (1)$$

pour $1 \leq k \leq n$. Ce modèle généralise plusieurs modèles précédents dans la littérature, voir par exemple [6, 1]. Dans cet mémoire, une analyse du comportement dynamique globale du modèle SIR (1). On montre que le taux de reproduction de base R_0 est une valeur de seuil globale. Si $R_0 \leq 1$, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable et la maladie s'éteint. Si $R_0 > 1$, il existe un équilibre unique endémique qui est globalement asymptotiquement stable et dont la maladie persiste dans la population. Ces résultats principaux sont prouvés dans la section 2. En conclusion, des simulations numériques seront illustrées pour montrer la dynamique de la population.

Chapitre 1

Les résultats principaux

Considérons le système (1.1)

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = (1 - p_k)A_k - (d_k^S + \theta_k) S_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j), \\ \frac{dI_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k, \\ \frac{dR_k}{dt} = p_k A_k + \theta_k S_k + \gamma_k I_k - (d_k^R + \delta_k) R_k. \end{cases} \quad (1.1)$$

pour $1 \leq k \leq n$. Nous étudions la stabilité globale de l'équilibre endémique des modèles multi groupes SIR en utilisant la fonction de Lyapunov. Pour chaque k , en additionnant les trois équations du système (1) on obtient

$$(S_k + I_k + R_k)' = A_k - d_k^S S_k - (d_k^I + \epsilon_k) I_k - (d_k^R + \delta_k) R_k \leq A_k - d_k^*(S_k + I_k + R_k)$$

où

$$d_k^* = \min\{d_k^S, d_k^I + \epsilon_k, d_k^R + \delta_k\}$$

On utilise le lemme de comparaison pour majorer $S_k + I_k + R_k$. On résout l'équation

$$u' = A_k - d_k^* u$$

avec la méthode de la variation de la constante.

1. On commence par résoudre l'équation différentielle homogène :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -d_k^* u \\ \int_{u_0}^u \frac{dv}{v} &= \int_0^t -d_k^* ds \\ \ln[|v|]_{u_0}^u &= -d_k^* t \\ u(t) &= u(0) \exp(-d_k^* t) \end{aligned}$$

où $u(0)$ est une constante réelle

2. On prend pour nouvelle fonction variable la fonction k définie par la relation

$$u(t) = k(t) \exp(-d_k^* t)$$

En reportant dans l'équation initiale, on obtient une équation équivalente à l'équation initiale mais portant sur k

$$k'(t) = A_k \exp(d_k^* t)$$

en intégrant on trouve

$$k(t) = \frac{A_k}{d_k^*} [\exp(d_k^* t) - 1] + k(0)$$

ce qui permet de remonter à l'expression de la solution générale u

$$u(t) = \left(\frac{A_k}{d_k^*} [\exp(d_k^* t) - 1] + k(0) \right) \exp(-d_k^* t)$$

donc

$$u(t) = \frac{A_k}{d_k^*} + \left(k(0) - \frac{A_k}{d_k^*} \right) \exp(-d_k^* t).$$

On a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} (S_k + I_k + R_k)(t) &\leq u(t), \\ (S_k + I_k + R_k)(t) &\leq \frac{A_k}{d_k^*} + \left(k(0) - \frac{A_k}{d_k^*} \right) \exp(-d_k^* t), \\ \sup_{\tau \geq t} (S_k + I_k + R_k)(\tau) &\leq \frac{A_k}{d_k^*} + \left(k(0) - \frac{A_k}{d_k^*} \right) \exp(-d_k^* t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\sup_{\tau \geq t} (S_k + I_k + R_k)] &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{A_k}{d_k^*} + \left(k(0) - \frac{A_k}{d_k^*} \right) \exp(-d_k^* t) \right], \end{aligned}$$

En conséquence

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S_k + I_k + R_k) \leq \frac{A_k}{d_k^*}$$

L'équation en S_k dans le système (1) vérifie

$$S'_k \leq (1 - p_k)A_k - (d_k^s + \theta_k) S_k$$

car $\sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \geq 0$.

un raisonnement similaire comme avant

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S_k) \leq \frac{(1 - p_k)A_k}{d_k^s + \theta_k}$$

Maintenant on introduit les hypothèses suivantes sur les fonctions $f_{ij}(S_i, I_j)$ pour étudier la stabilité globale des équilibres :

(H1) On définit $C_{ij}(S_i) = \lim_{I_j \rightarrow 0^+} \frac{f_{ij}(S_i, I_j)}{I_j}$. Alors pour tout

$$0 < S_i \leq S_i^0, \text{ on a } 0 < C_{ij}(S_i) \leq \infty,$$

où

$$S_i^0 = \frac{(1 - p_i)A_i}{d_i^s + \theta_i};$$

(H2) $f_{ij}(S_i, I_j) \leq C_{ij}(S_i)I_j$ pour tout $I_j > 0$ et $0 < S_i \leq S_i^0$;

(H3) $C_{ij}(S_i) < C_{ij}(S_i^0)$, pour tout $0 < S_i \leq S_i^0$.

Notons que la classe de $f_{ij}(S_i, I_j)$ vérifiant (H1)-(H3) comprennent de nombreuses fonctionnelles à incidence communes telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ij}(S_i, I_j) = S_i I_j [6, 1], \\ f_{ij}(S_i, I_j) = \frac{\eta S_i I_j}{1 + \theta S_i} [15], \\ f_{ij}(S_i, I_j) = \frac{k S_i I_j}{1 + \alpha I_j^2} [3], \\ f_{ij}(S_i, I_j) = g(S_i) h(I_j) [19], \\ f_{ij}(S_i, I_j) = S_i g_j(I_j) [18], \\ f_{ij}(S_i, I_j) = S_i^q I_j [21], \\ f_{ij}(S_i, I_j) = \frac{\beta S_i I_j}{\phi(I_j)} [10]. \end{array} \right.$$

Comme les variables R_k ne figurent pas dans les deux premières équations du système (1) on peut travailler sur le système réduit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_k}{dt} = (1 - p_k) A_k - (d_k^s + \theta_k) S_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j), \\ \frac{dI_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où $k = 1, 2, \dots, n$ dans la région possible

$$\Gamma = \{(S_1, I_1, S_2, I_2, \dots, S_n, I_n) \in \mathbb{R}^{2n} : S_k \leq \frac{(1-p_k)A_k}{d_k^s + \Theta_k}, S_k + I_k \leq \frac{A_k}{d_k^*}, k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3)$$

*

$$S_k = 0, I_k > 0, S'_k = (1 - p_k) A_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(0, I_j) = (1 - p_k) A_k$$

avec

$$f_{kj}(0, I_j) = 0$$

car si $S_k = 0$ donc il n'y a pas de susceptible donc pas d'infection

*

$$I_k = 0, S_k > 0, I'_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, 0) = 0$$

avec

$$f_{kj}(S_k, 0) = 0$$

car si $I_j = 0$ donc il n'y a pas d'infécté donc pas d'infection

Donc Γ est positivement invariant par rapport à (1.2). En outre, le comportement de R_k peut être déterminé à partir de la dernière équation de (1.1). Notons l'intérieur de Γ par Γ^0 où

$$\Gamma^0 = \{(S_1, I_1, S_2, I_2, \dots, S_n, I_n) \in \mathbb{R}^{2n} : S_k < \frac{(1-p_k)A_k}{d_k^s + \Theta_k}, S_k + I_k < \frac{A_k}{d_k^*}, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

$P^0 = (S_1^0, 0, S_2^0, 0, \dots, S_n^0, 0)$ est un équilibre sans maladie du système (2), où $S_i^0 = \frac{(1-p_i)A_i}{d_i^S + \theta_i}$. Un équilibre $P^* = (S_1^*, I_1^*, S_2^*, I_2^*, \dots, S_n^*, I_n^*)$ dans l'intérieur de Γ est appelé un équilibre endémique, où S_i^*, I_j^* satisfait les équations d'équilibre suivantes

$$(1 - p_k)A_k = (d_k^S + \theta_k) S_k + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \quad (1.4)$$

$$(d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k)I_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \quad (1.5)$$

On note par $R_0 = \rho(M_0)$ le rayon spectral de la matrice suivante :

$$M_0 = F \times v^{-1}$$

D'après l'article [16] on a :

$$F = \begin{pmatrix} \beta_{11}C_{11}(S_1^0) & \cdots & \beta_{1n}C_{1n}(S_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}C_{n1}(S_n^0) & \cdots & \beta_{nn}C_{nn}(S_n^0) \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^I + \epsilon_n + \gamma_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{11}C_{11}(S_1^0)}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} & \cdots & \frac{\beta_{1n}C_{1n}(S_1^0)}{d_n^I + \epsilon_n + \gamma_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_{n1}C_{n1}(S_n^0)}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} & \cdots & \frac{\beta_{nn}C_{nn}(S_n^0)}{d_n^I + \epsilon_n + \gamma_n} \end{pmatrix}$$

$$M_0 = M(S_1^0, S_2^0, \dots, S_n^0) = \left(\frac{\beta_{ij}C_{ij}(S_i^0)}{d_i^I + \epsilon_i + \gamma_i} \right)_{n \times n}$$

Dans le cas où $C_{ij}(S_i^0) = \infty$ pour certain i, j , on pose $R_0 = \infty$. Dans la littérature R_0 est considéré comme le taux de reproduction de base, et cette définition est compatible avec les définitions introduits dans les références [13,14].

On a le résultat suivant concernant la stabilité globale de l'équilibre sans maladie :

1.1 Théorème 1

Supposons que $B = (\beta_{ij})$ est irréductible et (H1)-(H3) sont satisfaites.

1. Si $R_0 \leq 1$, alors P_0 est l'unique équilibre du système (1.2) et il est globalement stable dans Γ .
2. Si $R_0 > 1$, alors P_0 est instable et le système (1.2) est uniformément persistant dans Γ^0 .

Preuve. B est irréductible si et seulement si, son graphe est fortement connexe. Si on prends un exemple d'une matrice B irréductible comme suit :

Comme on a

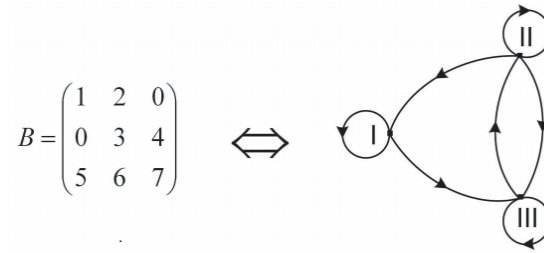


FIGURE 1.1 – B matrice irréductible

$$M_0 = \left(\frac{\beta_{ij} C_{ij}(S_i^0)}{d_i^I + \epsilon_i + \gamma_i} \right)_{(n \times n)}$$

avec

$$C_{ij}(S_i^0) \neq 0$$

et

$$d_i^I + \epsilon_i + \gamma_i \neq 0$$

donc M_0 est irréductible.

Théorème de Perron-Frobenius Soit une matrice A nonnégative ($a_{ij} \geq 0$) irréductible et primitive alors A admet une valeur propre λ strictement dominante ($\lambda > |\lambda_i|$) est cette valeur propre est associé à un vecteur à droite $v > 0$ et un vecteur propre à gauche $w > 0$ $Av = \lambda v$ où $w^T A = \lambda w^T$

Selon le Théorème de Perron-Frobenius de M_0 a un vecteur propre positif principal $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ telle que $\omega_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ et $\omega \cdot \rho(M_0) = \omega \cdot M_0$.

On définit la fonction de Lyapunov suivante $V = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} I_k$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
 V' &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} I'_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k^0) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] \\
 &= \omega \cdot (M_0 I - I) = [\rho(M_0) - 1] \omega \cdot I.
 \end{aligned}$$

$V' \leq 0$ pour $\rho(M_0) \leq 1$.

D'autre part, on a :

$$\omega(M_0 I - I) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k^0) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right]$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 \omega(M_0 I - I) &= \omega M_0 I - \omega I \\
 &= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} \frac{\beta_{11} C_{11}(S_1^0)}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} & \dots & \frac{\beta_{1n} C_{1n}(S_1^0)}{d_1^I + \epsilon_n + \gamma_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_{n1} C_{n1}(S_n^0)}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} & \dots & \frac{\beta_{nn} C_{nn}(S_n^0)}{d_n^I + \epsilon_n + \gamma_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_2 \end{pmatrix} - (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_2 \end{pmatrix} \\
 &= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{1j} C_{1j}(S_1^0)}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} I_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{nj} C_{nj}(S_n^0)}{d_n^I + \epsilon_n + \gamma_n} I_j \end{pmatrix} - (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_2 \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \beta_{kj} C_{ij}(S_k^0) I_j - \sum_{k=1}^n \omega_k I_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k^0) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right]
 \end{aligned}$$

Revenons à notre fonction de Lyapunov, on remarque :

- a) Si $\rho(M_0) < 1$, alors $V' = 0$ ssi $I = 0$.
- b) Si $\rho(M_0) = 1$, alors $V' = 0$ ce qui implique que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k) I_j \right] = \sum_{k=1}^n \omega_k I_k \quad (1.6)$$

D'autre part si pour au moins des $k = 1, 2, \dots, n$, $S_k \neq S_k^0$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k) I_j \right] &< \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k^0) I_j \right] \\ &= \omega \cdot M_0 I = \omega \cdot \rho(M_0) I = \omega \cdot I = \sum_{k=1}^n \omega_k I_k \end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k) I_j \right] = \sum_{k=1}^n \omega_k I_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k) I_j \right] < \sum_{k=1}^n \omega_k I_k. \end{cases}$$

Ce qui implique que (1.6) admet une seule solution triviale $I = 0$, donc $V' = 0$ si et seulement si $I = 0$ ou $S_k = S_k^0$.

Le principe d'invariance de LaSalle Soit $l > 0$, et $\Omega_l = \{x = |V(x) \leq l\}$:

- Ω_l est bornée
- $\forall x \in \Omega_l$ on a $V' \leq 0$
- $\nu \subset \Omega_l$ et $\nu = \{x = |V'(x) = 0\}$
- I est le plus grand ensemble invariant, $I \subset \nu \Rightarrow \forall x_0 \in \Omega_l, \chi(x_0, t) \rightarrow I$ lorsque $t \rightarrow \infty$

Revenons à notre preuve On a : pour tout $1 \leq k \leq n$ à condition que $\rho(M_0) \leq 1$, on a

- Soit $(S_k, I_k) \in \Gamma$ avec Γ est fermé bornée car il est positivement invariant et $S_k \leq \frac{(1-p_k)A_k}{d_k^S + \theta_k}$ et $S_k + I_k \leq \frac{A_k}{d_k^*}$.
 - $\forall (S_k, I_k) \in \Gamma$ on a $V' \leq 0$.
 - Soit $\nu \subset \Gamma$ et $\nu = \{(S_k, I_k) \in \mathbb{R}^{2n} : V'(S_k, I_k) = 0\}$, $V' = 0$ ssi $I_k = 0$ ou $S_k = S_k^0$.
 - Donc le plus grand ensemble invariant compact de l'ensemble ν est réduit à P_0 .
- D'après le principe d'invariance de LaSalle, P_0 est globalement asymptotiquement stable dans Γ si $\rho(M_0) \leq 1$.

c) Si $R_0 = \rho(M_0) > 1$ et $I \neq 0$, alors

$$\omega M_0 - \omega = [\rho(M_0) - 1]\omega > 0$$

et

$$\begin{aligned} \omega M_0 - \omega &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k^0) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] > 0 \\ &\geq \omega M(S) - \omega > 0 \\ \omega M(S) - \omega &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_{ij}(S_k) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] > 0 \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k} \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) I_j - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] > 0 \end{aligned}$$

donc

$$V' > 0$$

dans un voisinage de P_0 dans Γ^0 . Cela implique que P_0 est instable.

Pour illustrer l'existence de l'équilibre P^* lorsque $R_0 > 1$ on utilise l'exemple suivant :
Considérons le système (1.2) lorsque $k = 1$, on a le modèle à un seul groupe comme suit :

$$\begin{cases} S'_1 = (1 - p_1)A_1 - (d_1^s + \theta_1) S_1 - \beta_{11}S_1I_1, \\ I'_1 = \beta_{11}S_1I_1 - (d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)I_1, \end{cases} \quad (1.7)$$

Ici $f_{kj}(S_k, I_j) = S_k I_j$, pour $k, j = 1$ On calcule les points d'équilibre du système (1.1)

$$\begin{cases} (1 - p_1)A_1 - (d_1^s + \theta_1) S_1 - \beta_{11}S_1I_1 = 0, \\ \beta_{11}S_1I_1 - (d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)I_1 = 0, \end{cases}$$

$$P_0 = (S_1^0, 0)$$

d'après la 2^{ème} equation on a :

$$\begin{aligned} \beta_{11}S_1^*I_1^* &= (d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)I_1^* \\ S_1^* &= \frac{(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)}{\beta_{11}} > 0 \end{aligned}$$

on remplace par S_1^* dans la 1^{ère} équation

$$\begin{aligned} I_1^* &= \frac{(1 - p_1)A_1 - (d_1^s + \theta_1)S_1^*}{\beta_{11}S_1^*} \\ &= \frac{(1 - p_1)A_1}{(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)} - \frac{(d_1^s + \theta_1)S_1^*}{\beta_{11}} \end{aligned}$$

On a

$$R_0 = \frac{\beta_{11}C_{11}(S_1^0)}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1}$$

où $C_{11}(S_1^0) = S_1^0$ donc

$$R_0 = \frac{\beta_{11}S_1^0}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1}$$

$I_1^* > 0$ si

$$\frac{(1 - p_1)A_1}{(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)} > \frac{(d_1^s + \theta_1)S_1^*}{\beta_{11}}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \beta_{11}(1 - p_1)A_1 &> (d_1^s + \theta_1)(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1) \\ \frac{\beta_{11}(1 - p_1)A_1}{(d_1^s + \theta_1)(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)} &> 1 \end{aligned}$$

Par conséquent P^* existe si $R_0 > 1$. Maintenant on cherche la stabilité locale de P^* On calcule la matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} -(d_1^s + \theta_1) - \beta_{11}I_1^* & -\beta_{11}S_1^* \\ \beta_{11}S_1^* & \beta_{11}S_1^* - (d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_{11}(1-p_1)A_1}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} & -(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1) \\ \frac{\beta_{11}(1-p_1)A_1}{d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1} - (d_1^S + \theta_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\text{tr}(J) < 0$ et $\det(J) = \beta_{11}(1-p_1)A_1 - (d_1^S + \theta_1)(d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)$ et positive si $R_0 > 1$ donc P^* est localement asymptotiquement stable si $R_0 > 1$.

La stabilité globale de P^* est donnée par le résultat suivant :

1.2 Théorème 2

Supposons que $B = (\beta_{ij})$ est irréductible et (H1)-(H3) sont satisfaites. Si $R_0 > 1$, alors P^* est un équilibre endémique arbitraire, et $f_{kj}(S_k, I_j) = S_k I_j$ satisfait les conditions suivantes : pour tout $S_k \neq I_k$, $1 \leq k \leq n$,

$$(S_k - S_k^*)[f_{kk}(S_k, I_k^*) - f_{kk}(S_k^*, I_k^*)] > 0, \quad (1.8)$$

et pour tout $S_k, I_j > 0$, $1 \leq k, j \leq n$,

$$(f_{kk}(S_k^*, I_k^*)f_{kj}(S_k, I_j) - f_{kj}(S_k, I_j^*)f_{kk}(S_k, I_k^*)) \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)f_{kj}(S_k, I_j)}{I_j} - \frac{f_{kj}(S_k^*, I_j^*)f_{kk}(S_k, I_k^*)}{T_j^*} \right) \leq 0, \quad (1.9)$$

de plus il existe un unique équilibre endémique P^* du système (1.2), et P^* est globalement asymptotiquement stable dans Γ^0 .

Preuve. D'abord on montre que si $R_0 > 1$ alors $f_{kj}(S_k, I_j) = S_k I_j$ vérifie les conditions (1.8) et (1.9)

i) On a :

$$\begin{aligned} (S_k - S_k^*)[f_{kk}(S_k, I_k^*) - f_{kk}(S_k^*, I_k^*)] &= (S_k - S_k^*)[S_k I_k^* - S_k^* I_k^*] \\ &= (S_k - S_k^*)^2 I_k^* > 0 \end{aligned}$$

donc la condition (1.8) est vérifiée .

ii) On a

$$\begin{aligned} \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)f_{kj}(S_k, I_j)}{I_j} - \frac{f_{kj}(S_k^*, I_j^*)f_{kk}(S_k, I_k^*)}{T_j^*} &= \frac{S_k^* I_k^* S_k I_j}{I_j} - \frac{S_k^* I_j^* S_k I_k^*}{I_j^*} \\ &= \frac{S_k^* I_k^* S_k I_j I_j^* - S_k^* I_j^* S_k I_k^* I_j}{I_j I_j^*} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la condition (1.9) est vérifiée.

Maintenant on montre que P^* est globalement asymptotiquement stable dans Γ^0 , ce qui implique l'unicité de l'équilibre endémique. Soit une nouvelle fonction de Lyapunov associée à chaque échantillons :

$$V_k = \int_{S_k^*}^{S_k} \frac{f_{kk}(\xi, I_k^*) - f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(\xi, I_k^*)} d\xi + (I_k - I_k^* \ln I_k)$$

En utilisant les équations de l'équilibre (1.4) et (1.5), on obtient

$$\begin{aligned}
V'_k &= \left(1 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)}\right) S'_k + \left(1 - \frac{I_k^*}{I_k}\right) I'_k \\
&= \left(1 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)}\right) \left[(1 - p_k) A_k - (d_k^s + \theta_k) S_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{I_k^*}{I_k}\right) \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - (d_k^I + \epsilon_k + \gamma_k) I_k \right] \\
&= \left(1 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)}\right) \left[(d_k^s + \theta_k) S_k^* + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) - (d_k^s + \theta_k) S_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{I_k^*}{I_k}\right) \cdot \sum_{j=1}^n \left[\beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) \frac{I_k}{I_k^*} \right] \\
&= (d_k^s + \theta_k)(S_k^* - S_k) + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \\
&\quad - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} \cdot (d_k^s + \theta_k)(S_k^* - S_k) + \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} \cdot \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) \frac{I_k}{I_k^*} - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k, I_j) \frac{I_k^*}{I_k} + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) \\
&= -\frac{d_k^s + \theta_k}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} (S_k - S_k^*) [f_{kk}(S_k, I_k^*) - f_{kk}(S_k^*, I_k^*)] \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) \left[2 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} - \frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)} - \frac{I_k}{I_k^*} + \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{f_{kj}(S_k, I_k^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)} \right]
\end{aligned}$$

Soit $a_{kj} = \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*)$, et on note

$$F_{kj}(S_k, I_k, I_j) = 2 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} - \frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)} - \frac{I_k}{I_k^*} + \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{f_{kj}(S_k, I_k^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)}$$

On a

$$(S_k - S_k^*) [f_{kk}(S_k, I_k^*) - f_{kk}(S_k^*, I_k^*)] > 0$$

donc

$$-\frac{d_k^s + \theta_k}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} (S_k - S_k^*) [f_{kk}(S_k, I_k^*) - f_{kk}(S_k^*, I_k^*)] < 0$$

alors

$$V'_k \leq \sum_{j=1}^n a_{kj} F_{kj}(S_k, I_k, I_j)$$

Soit $\phi(a) := 1 - a + \ln a$

Montrons que si $\phi(a) \leq 0$ alors $a > 0$ Soit

$$f(x) = 1 - x + \ln x$$

définit sur $D = \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

on a :

$$f'(x) \geq 0 \text{ si } x \leq 1$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ si } x \geq 1$$

et comme on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

alors

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

done

$$\phi(a) \leq 0 \Rightarrow a > 0$$

En outre, d'après la condition (1.9) on a

$$\begin{aligned}
F_{kj}(S_k, I_k, I_j) &= 2 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} - \frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)} - \frac{I_k}{I_k^*} + \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{f_{kj}(S_k, I_k^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)} \\
&= 1 - \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} + \ln \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} \right) - \ln \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)} \right) + 1 \\
&\quad - \frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)} + \ln \left(\frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)} \right) - \ln \left(\frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)} \right) \\
&\quad - \frac{I_k}{I_k^*} + 1 + \frac{I_j}{I_j^*} - \frac{I_j f_{kk}(S_k, I_k^*) f_{kj}(S_k^*, I_j^*)}{I_j^* f_{kj}(S_k, I_j) f_{kk}(S_k^*, I_k^*)} \\
&\quad + \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)} - 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{I_j}{I_j^*} \cdot \frac{f_{kk}(S_k, I_k^*) f_{kj}(S_k^*, I_j^*)}{f_{kj}(S_k, I_j) f_{kk}(S_k^*, I_k^*)} \right)
\end{aligned}$$

On pose :

$$a_1 = \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}{f_{kk}(S_k, I_k^*)}$$

$$a_2 = \frac{I_k^* f_{kj}(S_k, I_k)}{I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*)}$$

$$a_3 = \frac{I_j f_{kk}(S_k, I_k^*) f_{kj}(S_k^*, I_j^*)}{I_j^* f_{kj}(S_k, I_j) f_{kk}(S_k^*, I_k^*)}$$

$$a_4 = \frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)}$$

$$\begin{aligned}
F_{kj}(S_k, I_k, I_j) &= \phi(a_1) - \ln(a_1) + \phi(a_2) - \ln(a_2) - \frac{I_k}{I_k^*} + 1 + \frac{I_j}{I_j^*} - a_3 \\
&\quad + (a_4 - 1) \cdot (1 - a_3)
\end{aligned}$$

On a $\phi(a) \leq 0$ si $a > 0$,

Comme $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ donc $\phi(a_1) \leq 0$ et $\phi(a_2) \leq 0$

$$\begin{aligned} F_{kj}(S_k, I_k, I_j) &\leq -\ln(a_1) - \ln(a_2) - \frac{I_k}{I_k^*} + \frac{I_j}{I_j^*} \\ &\quad + \phi(a_3) - \ln(a_3) + (a_4 - 1) \cdot (1 - a_3) \\ &\leq -\ln\left(\frac{I_k^*}{I_k} \cdot \frac{I_j}{I_j^*}\right) - \frac{I_k}{I_k^*} + \frac{I_j}{I_j^*} \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} -\ln(a_1) - \ln(a_2) - \ln(a_3) &= -\ln\left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) I_k^* f_{kj}(S_k, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*) f_{kj}(S_k^*, I_j^*) I_j}{f_{kk}(S_k, I_k^*) I_k f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j) I_j^*}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{I_k^*}{I_k} \cdot \frac{I_j}{I_j^*}\right) \end{aligned}$$

et $a_3 > 0$ donc $\phi(a_3) \leq 0$

on a aussi :

$$(a_4 - 1) \cdot (1 - a_3) \leq 0$$

car

$$\begin{aligned} &(a_4 - 1) \cdot (1 - a_3) \\ &= \frac{1}{f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)} \left(f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*) \right) \\ &\quad \frac{I_j}{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)} \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{I_j} - \frac{f_{kk}(S_k, I_k^*) f_{kj}(S_k^*, I_j^*)}{I_j^*} \right) \\ &= \frac{I_j}{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j) f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)} \\ &\quad \left[(f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j) - f_{kj}(S_k, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)) \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{I_j} - \frac{f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)}{I_j^*} \right) \right] \end{aligned}$$

de plus

$$\frac{I_j}{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j) f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)} > 0$$

et

$$(f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j) - f_{kj}(S_k, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)) \left(\frac{f_{kk}(S_k^*, I_k^*) f_{kj}(S_k, I_j)}{I_j} - \frac{f_{kj}(S_k^*, I_j^*) f_{kk}(S_k, I_k^*)}{I_j^*} \right) \leq 0$$

d'après l'hypothèse (1.9) donc

$$\begin{aligned} F_{kj}(S_k, I_k, I_j) &\leq -\ln\left(\frac{I_k^*}{I_k} \cdot \frac{I_j}{I_j^*}\right) - \frac{I_k}{I_k^*} + \frac{I_j}{I_j^*} \\ &= -\frac{I_k}{I_k^*} + \frac{I_j}{I_j^*} - \ln\frac{I_k^*}{I_k} - \ln\frac{I_j}{I_j^*} \\ &= \left(-\frac{I_k}{I_k^*} - \ln\frac{I_k^*}{I_k}\right) - \left(-\frac{I_j}{I_j^*} + \ln\frac{I_j}{I_j^*}\right) \\ &= \left(-\frac{I_k}{I_k^*} + \ln\frac{I_k}{I_k^*}\right) - \left(-\frac{I_j}{I_j^*} + \ln\frac{I_j}{I_j^*}\right) \end{aligned}$$

Les c_k sont définies comme suit :

on pose

$$\bar{\beta} = \beta_{kj} f_{kj}(S_k^*, I_j^*) \quad 1 \leq k, j \leq n$$

et la matrice

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \sum_{l \neq 1} \bar{\beta}_{1l} & -\bar{\beta}_{21} & \cdots & -\bar{\beta}_{n1} \\ -\bar{\beta}_{12} & \sum_{l \neq 2} \bar{\beta}_{2l} & \cdots & -\bar{\beta}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\beta}_{1n} & -\bar{\beta}_{2n} & \cdots & \sum_{l \neq n} \bar{\beta}_{nl} \end{pmatrix}$$

comme la matrice $B = (\beta_{ij})_{n \times n}$ est irréductible, donc la matrice $(\bar{\beta}_{ij})_{n \times n}$ est irréductible. Une base de l'espace des solutions du système linéaire

$$\bar{\beta} v = 0$$

peut être exprimé en tant que $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, où c_k désigne le cofacteur de la k -ième entrée diagonale de $\bar{B}$ et $v_k = c_k > 0, 1 \leq k \leq n$.

On prend $G_k(I_k) = -\frac{I_k}{I_k^*} + \ln \frac{I_k}{I_k^*}$: on peut voir que V_k, F_{kj}, G_k, a_{kj} satisfait les hypothèses du théorème 3.1 et le corollaire 3.3 dans [12].

1. $V'_k \leq \sum_{j=1}^n a_{kj} F_{kj}(S_k, I_k, I_j)$
2. $F_{kj}(S_k, I_k, I_j) \leq G_k(I_k) - G_j(I_j), 1 \leq k, j \leq n$
3. Les constante c_k

Par conséquent, la fonction $V = \sum_{k=1}^n c_k v_k$ telle qu'elle est définie dans le théorème 1.3 de [12] est une fonction de Lyapunov pour le système (1.2), $V' \leq 0$ pour tout $(S_1, I_1, \dots, S_n, I_n) \in \Gamma$. Pour $V' = 0$ on a $V'_k = 0$ c'est à dire $S_k = S_k^*$ et $I_k = I_k^*$

Donc le plus grand ensemble invariant est réduit à $\{P^*\}$.

On a

- Soit $(S_k, I_k) \in \Gamma^0$ avec Γ^0 est bornée car il est positivement invariant et $S_k < \frac{(1-p_k)A_k}{d_k^S + \theta_k}$ et $I_k < \frac{A_k}{d_k^*}$.
- $\forall (S_k, I_k) \in \Gamma^0$ on a $V' \leq 0$.
- Soit $\nu \subset \Gamma^0$ et $\nu = \{(S_k, I_k) \in \mathbb{R}^{2n} : V'(S_k, I_k) = 0\}$, $V' = 0$ ssi $I_k = I_k^*$ ou $S_k = S_k^*$.
- Donc le plus grand ensemble invariant compact de l'ensemble ν est réduit à $\{P^*\}$.

D'après le principe d'invariance de LaSalle P^* est globalement asymptotiquement stable dans Γ^0 . Ceci achève la démonstration du théorème 2. $\square$

On remarque que la fonction de Lyapunov pour des modèles similaire ont été utilisées dans [5,19] et d'autre. Ici, on profite du nouveau résultat général prouvé dans [12] pour prouver la stabilité globale de l'équilibre endémique pour une classe plus générale des modèles SIR multigroupes.

Chapitre 2

Simulation numérique

2.1 Exemple 1

Considérons le système (1.2) lorsque $k = 2$, on a le modèle à deux groupes comme suit :

$$\begin{cases} S'_1 = (1 - p_1)A_1 - (d_1^s + \theta_1) S_1 - \left[\beta_{11} \frac{S_1 I_1}{1 + I_1^2} + \beta_{12} \frac{S_1 I_2}{1 + I_2^2} \right], \\ I'_1 = \left[\beta_{11} \frac{S_1 I_1}{1 + I_1^2} + \beta_{12} \frac{S_1 I_2}{1 + I_2^2} \right] - (d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1) I_1, \\ S'_2 = (1 - p_2)A_2 - (d_2^s + \theta_2) S_2 - \left[\beta_{21} \frac{S_2 I_1}{1 + I_1^2} + \beta_{22} \frac{S_2 I_2}{1 + I_2^2} \right], \\ I'_2 = \left[\beta_{21} \frac{S_2 I_1}{1 + I_1^2} + \beta_{22} \frac{S_2 I_2}{1 + I_2^2} \right] - (d_2^I + \epsilon_2 + \gamma_2) I_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici $f_{kj}(S_k, I_j) = \frac{S_k I_j}{1 + I_j^2}$, pour $k, j = 1, 2$.

Nous utilisons les valeurs de paramètres comme dans le Tableau 1.

Tableau 1 Exemple de valeurs de paramètres.

parametres	p_1	p_2	A_1	A_2	d_1^S	d_1^I	d_2^S	d_2^I	θ_1	θ_2	ϵ_1	γ_1	ϵ_2	γ_2
les valeurs	1/2	1/3	2	3/2	1/4	1/4	1/8	1/8	1/4	3/4	1	1/8	3	7/8

Si $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/12 \\ 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$, on a $M_0 = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/12 \\ 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$,

$R_0 = 0.5 < 1$. D'où l'équilibre sans maladie est $P_0 = (2, 0, 4, 0)$ est l'unique équilibre du système (2.1) et il est globalement stable en Γ du théorème 1.

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $R_0 = 3 > 1$.

En conséquence $P^* = (0.901, 0.275, 1.065, 0.183)$ est l'unique équilibre endémique du système (2.1) et il est globalement stable en Γ^0 du théorème 2.

Les simulations numériques de ces deux cas sont présentés dans la Figure. 2.1.

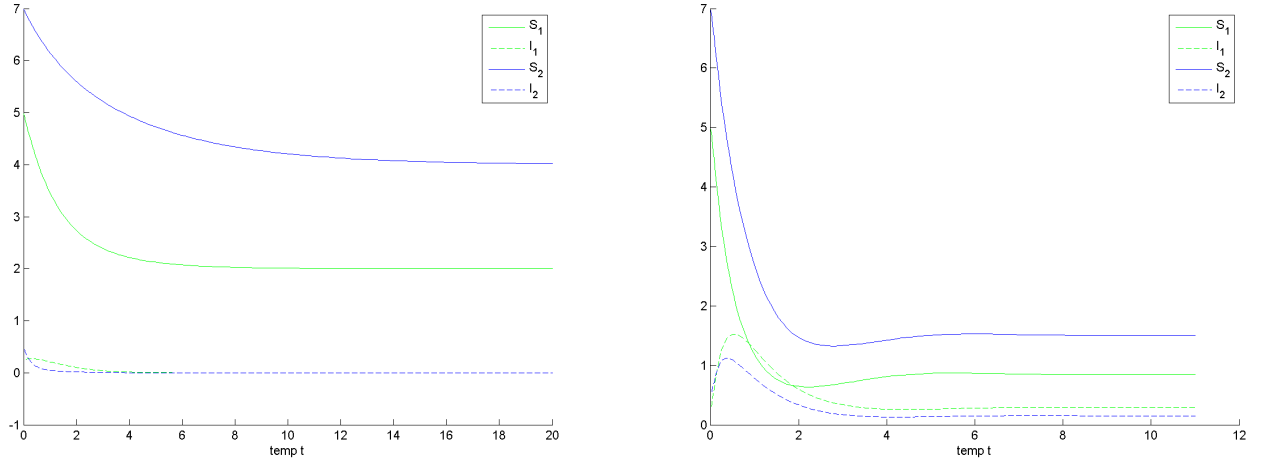


FIGURE 2.1 – Des simulations numériques pour (2.1) avec les valeurs de paramètres dans le tableau 1.

2.2 Exemple 2

Considérons un modèle à deux groupes avec une autre incidence non linéaire comme suit :

$$\begin{cases} S'_1 = (1 - p_1)A_1 - (d_1^s + \theta_1) S_1 - [\beta_{11}S_1I_1 + \beta_{12}S_1I_2], \\ I'_1 = [\beta_{11}S_1I_1 + \beta_{12}S_1I_2] - (d_1^I + \epsilon_1 + \gamma_1)I_1, \\ S'_2 = (1 - p_2)A_2 - (d_2^s + \theta_2) S_2 - [\beta_{21}S_2I_1 + \beta_{22}S_2I_2], \\ I'_2 = [\beta_{21}S_2I_1 + \beta_{22}S_2I_2] - (d_2^I + \epsilon_2 + \gamma_2)I_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

Ici $f_{kj}(S_k, I_j) = S_k I_j$, pour $k, j = 1, 2$. Nous utilisons les valeurs de paramètres comme dans le Tableau 1.

Si $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/12 \\ 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$, on a $M_0 = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/12 \\ 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$, $R_0 = 0.5 < 1$.

D'où l'équilibre sans maladie est $P_0 = (2, 0, 4, 0)$ est l'unique équilibre du système (2.2) et il est globalement stable en Γ du théorème 1.

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $R_0 = 3 > 1$.

En conséquence $P^* = (0.7936, 0.3016, 1.4115, 0.1569)$ est l'unique équilibre endémique du système (2.1) et il est globalement stable en Γ^0 du théorème 2.

Les simulations numériques de ces deux cas sont présentés dans la Figure. 2.2.

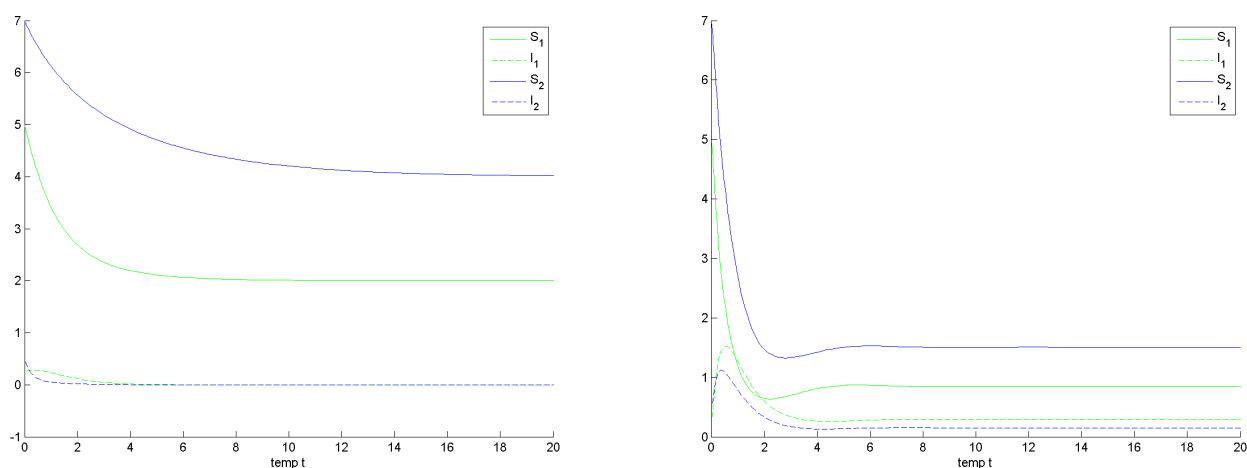


FIGURE 2.2 – Des simulations numériques pour (2.2) avec les valeurs de paramètres dans le tableau 2.

2.3 Interprétation de la simulation numérique

On voit d'une part, que si $R_0 \leq 1$ les courbes tendent vers l'unique équilibre sans maladie ; ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'épidémie.

l'Infection ne peut pas s'installer et d'autre part, quand $R_0 > 1$ les courbes tendent vers l'unique équilibre endémique du système, ce qui indique l'épidémie.

Table des figures

1.1	B matrice irréductible	17
2.1	Des simulations numériques pour (2.1) avec les valeurs de paramètres dans le tableau 1.	28
2.2	Des simulations numériques pour (2.2) avec les valeurs de paramètres dans le tableau 2.	29

Bibliographie

- [1] A. Korobeinikov, *Global properties of SIR and SEIR epidemic models with multiple parallel infectious stages*, Bull. Math. Biol. 71 (2009) 75-83.
- [2] A. Lajmanovich, J.A. York, *A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population*, Math. Biosci. 28 (1976) 221-236.
- [3] D. Xiao, S. Ruan, *Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate*, Math. Biosci. 208 (2007) 419-429.
- [4] E. Beretta, V. Capasso, *Global stability results for a multigroup SIR epidemic model*, in : T.G. Hallam, L.J. Gross, S.A. Levin (Eds.), Mathematical Ecology, World Scientific, Teaneck, NJ, 1988, pp.317-342.
- [5] H. Guo, M.Y. Li, Z. Shuai, *A graph-theoretic approach to the method of global Lyapunov functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 2793-2802.
- [6] H. Guo, M.Y. Li, Z. Shuai, *Global stability of the endemic equilibrium of multigroup SIR epidemic models*, Can. Appl. Math. Q. 14 (2006) 259-284.
- [7] H.R. Thieme, *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [8] H.W. Hethcote, *The mathematics of infectious diseases*, SIAM Rev. 42 (2000) 599-653.
- [9] I.G. Laukó, *Stability of disease free sets in epidemic models*, Math. Comput. Modelling 43 (2006) 1357-1366.
- [10] L.M. Cai, X.Z. Li, *Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate*, Appl. Math. Modelling 33 (2009) 2919-2926.
- [11] M.Y. Li, Z. Shuai, C. Wang, *Global stability of multi-group epidemic models with distributed delays*, J. Math. Anal. Appl. 361 (2010) 38-47.
- [12] M.Y. Li, Z. Shuai, *Global-stability problem for coupled systems of differential equations on networks*, J. Differential Equations 248 (2010) 1-20.
- [13] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, New York, 1991.
- [14] P. van den Driessche, J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of diseases transmission*, Math. Biosci. 180 (2002) 29-48.
- [15] R.M. Anderson, R.M. May *Population biology of infectious diseases I*, Nature 280 (1979) 361-367.
- [16] R. Sun, *Global stability of the endemic equilibrium of multigroup SIR models with nonlinear incidence*, Computers and Mathematics with Applications 60 (2010) 2286-2291.
- [17] W. Huang, K.L. Cooke, C. Castillo-Chavez, *Stability and bifurcation for a multiple-group model for the dynamics of HIV/AIDS transmission*, SIAM J. Appl. Math. 52 (1992) 835-854.

- [18] Y.N. Kyrychko, K.B. Blyuss, *Global properties of a delayed SIR model with temporary immunity and nonlinear incidence rate*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 6 (2005) 495-507.
- [19] Z.H. Yuan, L. Wang, *Global stability of epidemiological models with group mixing and nonlinear incidence rates*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010) 995-1004.
- [20] Z.H. Yuan, X.F. Zou, *Global threshold property in an epidemic model for disease with latency spreading in a heterogeneous host population*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010) 3479-3490.
- [21] Z. Zhao, L.S. Chen, X.Y. Song, *Impulsive vaccination of SEIR epidemic model with time delay and nonlinear incidence rate*, Math. Comput. Simulation 79 (2008) 500-510.