REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité : Analyse numérique des EDP

Par :

Mme KAZI TANI-BOUGHERARA Asma

Sur le thème

Systèmes elliptiques quasi-linéaires avec dépendances du gradient et potentiel de Hardy-Leray singulier

---

Soutenue publiquement le **Mardi 22 Avril 2025** à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr. B. ABDELLAOUI	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr. A. ATTAR	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr. A. DIEB	Maître de Conférences A	Université de Tiaret	Examinateur
Mme. A. MATALLAH	Professeur	École Supérieure de management -Tlemcen	Examinatrice
Mr. S-E. MIRI	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Dédicaces

À les plus merveilleux parents, qui ont cru en moi, ma source de force et d'amour,
à vous maman et papa.
À mon grand-père et mes beaux-parents.
À mon mari Nabil et mes anges Yacine, Hadjer et Adem.
À mes sœurs Nadia, Ghizlene et mes beaux frères.
À mon frère Ali-Hichem et ma belle sœur.
À mes petits poussins Hazar, Rayene et Mourad.
À toute ma famille et mes amis.
À la mémoire de ma très chère grand-mère.

Remerciements

Cette présente thèse a été réalisée au niveau de la faculté des Sciences de l'Université de Tlemcen ABOU BEKR BELKAID.

Je remercie **ALLAH** Clément et Miséricordieux de m'avoir donné la force et la patience pour bien mener à terme ce travail de thèse.

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur ATTAR Ahmed pour son accueil chaleureux et son soutien tout le long de ce parcourt de recherche et qu'il a bien voulu diriger ce travail de thèse au sein du Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées (LANLMA). Je lui adresse également mes remerciements pour ses conseils précieux et ses suggestions toujours fructueuses, ainsi que pour sa précieuse expertise qui m'a permis d'aborder les défis de cette thèse avec confiance. Je le remercie pour la chance et l'opportunité qu'il m'a donné pour réaliser ce travail, Merci.

J'exprime ma profonde gratitude à notre cher Professeur Monsieur ABDELLAOUI Boumediene pour son accueil chaleureux, ses encouragements et de nous avoir honoré d'accepter de présider ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur le professeur MIRI Sofiane El Hadi pour l'honneur d'accepter de faire partie du jury et d'examiner cette thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent à Madame le professeur MATALLAH Atika d'avoir accepté de faire partie des membres de ce jury.

J'exprime ma gratitude à Monsieur DIEB Abdelrazek, Maitre de conférence à l'université de Tiaret, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail par sa précieuse collaboration et d'avoir accepter de faire partie du jury.

J'adresse aussi à Monsieur BIROUD Kheireddine, Maitre de conférence à École Supérieure de management, l'expression de mes sincères remerciements pour l'expertise de cette thèse.

Une pensée toute particulière est dédiée à la mémoire de Monsieur le Professeur TABTI BOUFELDJA, pour son soutien, ses encouragements ainsi que sa confiance. Paix à son âme.

Un grand Merci à mon exemple et mon inspiration, à mon mari le Pr KAZI TANI Nabil pour son soutien inconditionnel et sa patience qui m'ont permis d'atteindre cet objectif.

J'exprime ma sincère reconnaissance à ma famille ainsi qu'à mes amies pour leurs soutiens psychologiques et leurs encouragements tout au long de ce parcourt de recherche scientifique.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation, trouvent ici ma profonde reconnaissance.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
$sgn(u)$	Le signe de la fonction u
p'	Exposent conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$p^* = \frac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$meas(A) = \|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^N$
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$ / crochet de dualité X, X'
$\setminus$	Différence d'ensemble
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou$\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes de classe k sur Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ positives
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c-à-d espace des distributions

$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \mid u \text{ mesurable, } \int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \mid u$ mesurable $\exists C$ tal que $\|u(x)\| \leqslant C$ en p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espace des mesures de Radon dans Ω
$M^p(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{R}^N, \ \ mesurable : \Phi_f \leqslant Ck^p\}$ avec $C < \infty$.

Introduction

0.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) représentent l'un des outils les plus performant pour la résolution des problèmes de modélisation dans les différents domaines d'ingénierie, telles que la dynamique des structures, la mécanique des fluides, la thermodynamique,... ect. Le recours aux EDP pour les deux cas local et non-local, a connus une progression intense ces dernières décennies dans plusieurs disciplines permettant de contourner les singularités rencontrés dans les modèles développés pour la prédiction du comportement de plusieurs phénomènes observés en ingénierie structurelle, la mécanique de la rupture et d'endommagement, l'énergétique, l'aérospatiale et même dans les sciences médicales et biologiques.

Les équations elliptiques semi-linéaires avec potentiel singulier constituent un domaine de recherche en mathématiques qui explore les propriétés des solutions d'équations aux dérivées partielles de type elliptique, où le potentiel présente des singularités. Ces équations sont étudiées par la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) et sont importantes dans diverses applications scientifique en physique, la mécanique quantique, et d'autres branches des sciences appliquées.

Le terme singulier peut prendre différentes formes, par exemple, il peut être localisé en un point spécifique de l'espace, se comporter de manière particulière à l'infini, comme il peut introduire une non-linéarité qui change la nature de la solution de l'EDP.

L'étude du comportement asymptotique des solutions lorsque les paramètres deviennent plus ou moins grands ou petits est également important. Cela peut aider à comprendre comment les solutions convergent vers des états d'équilibre ou à analyser leur stabilité face à des perturbations.

Les méthodes de résolution pour les EDP non linéaires avec termes singuliers peuvent inclure des approches variées telles que les techniques de régularisation, les méthodes de décomposition, les techniques variationnelles, ainsi que des méthodes numériques adaptées pour gérer les singularités.

Cette thèse, vise à présenter une approche innovante permettant d'apporter de nouvelles perspectives pour donner les résultats de non existence des solutions des systèmes d'EDP elliptiques non-linéaires avec terme de Hardy dépendants du gradient et/ou du potentiel.

Un nouveau schéma itératif, plus général, est introduit, basé sur un argument qui permet d'améliorer la sommabilité des solutions dans les espaces de Lebesgue pondérés appropriés. Le processus adopté repose sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour garantir la résolution du problème linéaire faisant intervenir le potentiel de Hardy et l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Nous présentons également, pour chaque système étudié, la courbe optimale permettant de séparer les zones d'existence et de non-existence en fonction de p et de q et ce, après avoir démontrer le résultat de non-existence. En parallèle, dans la partie existence, nous construisons des sur-solutions radiales explicites dans le cas où $\Omega = B_1(0)$, la boule unité, puis par un argument de mise à l'échelle, nous produisons des sur-solutions dans des domaines bornés généraux.

Les principaux résultats présentés dans cette thèse sont relatifs à l'existence et la non-existence des solutions des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda\dfrac{u}{|x|^2} + f_1(v,\nabla v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &=& \lambda\dfrac{v}{|x|^2} + f_2(u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u,v &>& 0 & \text{dans } \Omega, \\ u=v &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{S}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, un ouvert borné régulier qui contient l'origine et $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$, avec $\Lambda_N := \frac{(N-2)^2}{4}$ est la meilleure constante de Hardy, $f_1,\ f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N :\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de Carathéodory. Dans ce travail, nous allons présenter les résultats d'existence et de non-existence pour les trois cas suivants :

— Premier cas : $f_1(v,\nabla v) \equiv v^p$ et $f_2(u,\nabla u) \equiv u^q$.

— Deuxième cas : $f_1(v,\nabla v) \equiv v^p$ et $f_2(u,\nabla u) \equiv |\nabla u|^q$.

— Troisième cas : $f_1(v,\nabla v) \equiv |\nabla v|^p$ et $f_2(u,\nabla u) \equiv |\nabla u|^q$

avec $p,\ q > 1$ qui parait être le cas le plus favorable. Nous démontrons l'existence d'une courbe critique optimale dans le plan $(p,\, q)$, qui sépare les régions d'existence et de non-existence pour une classe de systèmes elliptiques non-linéaires.

Le système (S) est lié à l'inégalité classique de Hardy, plus précisément, il est bien connu que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\Lambda_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2}{|x|^2} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx.$$

La constante $\Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ est optimale et elle n'est jamais atteinte. Pour plus de détails concernant Λ_N, on se réfère à [34].
Le cas d'une équation elliptique non-linéaire a été largement étudié dans la littérature, nous nous référons à [5, 19, 20, 29] pour plus d'exemples de problèmes similaires.
Il est bien connu que le problème

$$-\Delta w = \lambda \frac{w}{|x|^2} \quad \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

admet $w_i(x) = c_i|x|^{-\alpha_i}$ comme solution si $\lambda < \Lambda_N$ et $w_i(x) = c_i|x|^{-\alpha_1}\ln(|x|)$ si $\lambda = \Lambda_N$, pour $i = 1, 2$.
Notons que α_1, α_2 sont les solutions de l'équation algébrique

$$\mathcal{P}(\beta) := -\beta^2 + (N-2)\beta - \lambda = 0,$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_N - \lambda}, \qquad \alpha_2 = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_N - \lambda}. \tag{0.1.1}$$

avec $\mathcal{P}(\beta) > 0$ si et seulement si $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$.

Maintenant, Si nous considérons le problème

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + u^p \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où $\lambda \leqslant \Lambda_N$, alors il existe des sur-solutions si et seulement si

$$p < p^+ := \frac{2+\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{N-\alpha_2}{N-\alpha_2-2},$$

Dans le cas d'un terme dépendant du gradient, les auteurs dans [5] ont étudié l'équation ci-dessous :

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + |\nabla u|^q \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

et ils ont démontré l'existence des solutions sous la condition suivante :

$$q < q^+ = \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}.$$

Dans la référence [26], les auteurs considèrent le système Hamiltonien suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{u^p}{|x|^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \dfrac{v^q}{|x|^\mu} & \text{dans } \Omega, \\ u,v &\geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ u=v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant une approche variationnelle, ils ont prouvé l'existence d'une hyperbola critique, de sorte que la solution de ce système existe si et seulement si

$$\frac{N-\alpha}{p+1} + \frac{N-\mu}{q+1} > N-2,$$

et sous quelques hypothèses additionnelles sur les paramètres p, q, α, μ.

Récemment, dans [23], H. Chen et al. ont étudié le système de Lane-Emdem en introduisant le terme potentiel dans les deux équations du système,

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + v^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + u^q & \text{dans } \Omega, \\ u,v &\geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ u=v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant un schéma itératif dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$, ils ont pu démontrer l'existence d'une sur-solution positive (u, v) sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} q < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1} & \text{et} & \alpha_1(pq-1) < 2p+2, \\ & \text{ou} & \\ p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1} & \text{et} & \alpha_1(pq-1) < 2q+2, \end{cases}$$

avec α_1 est définie dans (0.1.1).
Le processus utilisé dans [23] repose sur une estimation ponctuelle clé de la singularité d'une solution (u, v) près de l'origine.

La structure principale de cette présente thèse est résumée dans la section suivante.

0.2 Description de la thèse :

Description du Chapitre 1

Dans le premier chapitre on présente les outils d'analyse non linéaires qui seront utilisés pour traiter les problèmes proposés. Nous présentons en premier lieu un rappel sur les espaces L^p pondérés ainsi que les espaces de Sobolev, nous définissons par la suite, la notion des solutions considérées. Les différents types des inégalités tel que, celle de Poincaré, Sobolev ainsi que l'inégalité de Hardy qui seront les outils essentiels dans ce présent travail de thèse, nous présentons aussi une nouvelle version généraliser de l'inégalité de Caffareli-Khon-Niremberg.

Description du Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous rappelons les résultats d'existence et de non-existence pour le cas d'une équation elliptique semi-linéaire avec termes dépendant du potentiel ou du gradient, il s'agit principalement du travail de L.Dupaigne [29] et celui de B.Abdelaoui et I.Peral [5].

Cas d'une équation

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + h(u, \nabla u) \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

- Premier cas : $h(u, \nabla u) \equiv u^p$.
- Deuxième cas : $h(u, \nabla u) \equiv |\nabla u|^p$.

L'existence et la non-existence de la solution dépend de la présence d'un exposant critique.
Dans le premier cas, l'exposant critique noté $p^+ = \dfrac{\alpha_1 + 2}{\alpha_1}$ (où α_1 est définit précédemment), pour $p < p^+$, il existe une solution non-négative et pour $p > p^+$, on n'a pas de solutions.

Pour le deuxième cas, l'exposant critique sera $p^+ = \dfrac{\alpha_1 + 2}{\alpha_1 + 1}$, où on peut garantir l'existence d'une solution pour $p < p^+$et la non-existence pour $p > p^+$.

La deuxième partie de ce chapitre est dédiée à présenter les résultats d'existence et de non-existence du système de Lane-Emden [23] par l'utilisation d'une nouvelle technique plus pratique. Le système étudié dans ce chapitre est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &=& \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + v^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &=& \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + u^q & \text{dans } \Omega, \\ u, v &>& 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans le cas ou $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ les auteurs dans [23] ont démontré l'existence et la non-existence suivant les exposants p et q, ce qui permet de trouver une zone d'existence et non-existence des sur-solutions radiales, l'argument proposé est purement ponctuel, pour lequel ils ont utilisé des estimations pour exploiter un processus d'existence, une question ouverte peut être posée concernant la courbe critique "existence-non-existence".

En complément du travail de [23], on a démontré le même résultat d'existence, en suivant un processus fonctionnel, ce qui nous permet d'avoir a travers cette technique des estimations plus fines.

L'importance majeure de la technique proposé se base sur le traitement d'un système avec dépendance du gradient.

Description du Chapitre 3

Le chapitre 3 englobe le résultat principal de cette thèse, plus précisément, on considère le problème mixte suivant : pour $p, q > 1$,

$$\begin{cases} -\Delta u &=& \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + v^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &=& \lambda \dfrac{v}{|x|^2} + |\nabla u|^q & \text{dans } \Omega, \\ u, v &>& 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Notre but est d'étudier l'interaction entre p et q de telle sorte à obtenir l'existence d'une solution positive.
Nous démontrons que l'existence de solutions positives, même au sens distributionnel, au système étudié n'est assurée que si les exposants p et q se situent en dessous d'une courbe critique, qui peut être illustré explicitement, dans le plan (p, q).

Nous avons pour but d'étudier l'interaction entre le terme du gradient et le terme singulier de telle sorte, que sous les hypothèses sur p et q, le problème admet une solution positive pour la classe la plus vaste possible de données.

Description du Chapitre 4

Dans ce chapitre, on étudie un système d'équations elliptiques avec dépendance de gradients, plus précisément on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + |\nabla v|^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda \dfrac{v}{|x|^2} + |\nabla u|^q & \text{dans } \Omega, \\ u, v &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Nous commençons par déterminer la région de non-existence, qui sera réalisée en utilisant l'inégalité de Hardy pondérée et un processus itératif approprié.

Une fois que la région de non-existence est trouvée, en prenant $\Omega = B_1(0)$ et les sur-solutions radiales, nous démontrons dans la deuxième partie de ce chapitre, l'existence des sur-solutions dans la région complémentaire. Cela montre l'optimalité du résultat de non-existence.

Description du Chapitre 5

Ce chapitre est dédié à étudier les systèmes avec poids, en utilisant notre technique et extraire les résultats d'existence et de non existence en fonction des paramètres γ et $\lambda_1 < \lambda_2$, plus précisément, on considère les systèmes avec poids dépendant du terme de gradient et/ou de potentiel suivants :

$$\begin{cases} -div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + g_1(v, |\nabla v|), & \text{in } \Omega, \\ -div(|x|^{-2\gamma}\nabla v) &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^{2(\gamma+1)}} + g_2(u, |\nabla u|), & \text{in } \Omega, \\ u, v &\geqslant 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$g_1(v, |\nabla v|) = v^p \text{ ou } |\nabla v|^p \quad \text{et} \quad g_2(u, |\nabla u|) = |\nabla u|^q$$

La première partie de ce chapitre est vise à présenter les principaux préliminaires pour ce type d'EDP, et par la suite, nous présentons les résultats d'existences et de non-existences pour les deux systèmes proposés ci-dessus.

La dernière partie de cette thèse vise à donner d'éventuelles extensions, perspectives et problèmes ouverts sur les systèmes traités ainsi que le processus fonctionnel proposé qui représente l'objet principal de ce présent travail de thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux outils mathématiques utilisés dans cette thèse. Les espaces de Lebesgue pondérés sont largement utilisés dans l'analyse des EDP et aussi dans la théorie des espaces de Banach, pour traiter des problèmes où le comportement local des fonctions joue un rôle crucial, nous commençons tout d'abord par présenter ces espaces.

1.1 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Nous commençons par une brève initiation aux espaces de Lebesgue, largement connus.

1.1.1 Espace de Lebesgue pondéré.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leqslant p < \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par

$$L^p(\Omega) := \Big\{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \ ; \ \int_\Omega |\phi(x)|^p dx < +\infty \Big\},$$

muni de la norme

$$||\phi||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\phi(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, alors

$$L^\infty(\Omega) := \Big\{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \ ; \ |\phi(x)| \leqslant M \ p.p. \text{ dans } \Omega \Big\},$$

avec M est une constante positive, et la norme associée

$$||\phi||_{L^\infty(\Omega)} = \inf \Big\{ M; \ |\phi(x)| \leqslant M \ p.p. \text{ dans } \Omega \Big\}.$$

L'espace de Lebesgue pondéré, noté $L^p(\Omega, \omega(x))$, est un espace fonctionnel généralisant les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ en intégrant une fonction de pondération ω. Les fonctions dans cet espace sont intégrées avec un poids ce qui permet de **contrôler leur comportement en fonction de** ω.

Soit $\omega : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ une fonction mesurable positive, l'espace de Lebesgue pondéré $L^p(\Omega, \omega(x))$ est défini par

$$L^p(\Omega, \omega(x)) = \Big\{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \; ; \|\phi\|_{L^p(\Omega,\omega(x))} < +\infty \Big\},$$

avec

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega,\omega(x))} = \Big(\int_\Omega |\phi(x)|^p \omega(x) dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

et

$$L^p_{loc}(\Omega, \omega(x)) = \Big\{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} | \forall K \subset\subset \Omega \;\; ; \int_K |\phi(x)|^p \omega(x) dx < +\infty \Big\},$$

- **Exemples de fonctions de pondération :**

1) Pondération constante : Si $\omega = 1$, alors pour tout $x \in \Omega$,

$$L^p(\Omega, \omega(x)) = L^p(\Omega).$$

2) Pondération polynomiale : $\omega(x) = |x|^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Pondération exponentielle : $\omega(x) = e^{b(x)}$ avec $b(x) \in \mathbb{R}$.

- **Propriétés :**

1) Linéarité : $L^p(\Omega, \omega(x))$ est un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|_{L^p(\Omega,\omega(x))}$.
2) Inclusion : Si ω_1 et ω_2 sont deux fonctions de pondération telles que : $\omega_1(x) \leqslant \omega_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$, alors
$$L^p(\Omega, \omega_2(x)) \subseteq L^p(\Omega, \omega_1(x))$$
3) Dualité : Le dual de $L^p(\Omega, \omega(x))$ est l'espace $L^q(\Omega, \omega(x))$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.1.2 Espace de Sobolev pondéré.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \geqslant 1$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ \phi \in L^p(\Omega) \; ; \; \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1...N \Big\}.$$

L'espace de Banach $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} ||\phi||_{W^{1,p}(\Omega)} &= ||\phi||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}, \\ &\simeq \left(||\phi||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla\phi||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Si $p = 2$, l'espace de Hilbert $W^{1,2}(\Omega) := H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$< \phi, \psi >_{H^1(\Omega)} = < \phi, \psi >_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} >_{L^2(\Omega)} .$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$. Ainsi, on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \left\{ \phi \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

Si Ω est borné, alors

$$||\phi||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = ||\nabla\phi||_{L^p(\Omega)}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, et puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $\omega : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, une fonction mesurable. L'espace de Sobolev pondéré $W^{1,p}(\Omega, \omega(x))$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega, \omega(x)) = \left\{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \ ; \|\phi\|_{W^{1,p}(\Omega,\omega(x))} < +\infty \right\},$$

avec

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,\omega(x))} := \left(\sum_{|\alpha| \leqslant 1} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, \omega(x) dx \right)^{1/p}.$$

De même

$$W_0^{1,p}(\Omega, \omega(x)) := \left\{ \phi \in W^{1,p}(\Omega, \omega(x)dx) \ ; \ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\};$$

et

$$W_{loc}^{1,p}(\Omega, \omega(x)) := \left\{ \phi \in L_{loc}^p(\Omega, w(x)) \ ; \ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L_{loc}^p(\Omega, \omega(x)) \text{ pour tout } i = 1...N \right\}.$$

Dans le cas où $\omega = 1$, on retrouve les espaces de Sobolev classiques $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.

1.1.3 Espaces de Marcinkiewicz.

Définition 1.1.1. *Soit Ω un espace mesurable de mesure μ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ une fonction mesurable. La fonction de distribution de f est définie par : $\Phi_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\Phi_f := \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}, \qquad k > 0$$

Φ_f est une fonction décroissante continue à droite.

Lemme 1.1.2. *Soit $f \in L^1(\Omega)$; alors*

$$\int_\Omega |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \Phi_f(t) dt.$$

Si $f \in L^q(\Omega)$ avec $1 < q < \infty$, alors

$$\int_\Omega |f(x)|^q d\mu = \int_0^{+\infty} t^{q-1} \Phi_f(t) dt.$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $0 < p < \infty$, l'espace de Marcinkiewicz (appelé aussi espace de Lebesgue faible) est défini par :

$$M^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^N, \ \ \textit{mesurable} : \Phi_f \leqslant C k^p\} \quad \text{avec } C < \infty.$$

muni de la norme

$$||f||_{M^p(\Omega)} := \inf\{C > 0 : \Phi_f(k) \leqslant C k^{-p} \quad \text{pour } k > 0\}$$

est un espace de Banach.

• **Propriétés :**

1) $L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega)$.
2) Si $1 < p < \infty$, alors $L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon}(\Omega), \ \ \forall \varepsilon > 0$.
3) Si $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, on a : $M^q(\Omega) \subset M^p(\Omega)$.

Nous introduisons à présent un résultat crucial dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques : le théorème de **Rellich-Kondrachov**. Ce théorème démontre l'injection entre les espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et certains espaces de Lebesgue. Ce résultat de compacité nous permet de passer efficacement d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.1.3 (Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ tel que Ω est de classe C^1,*

— *Si $p < N$ alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *, $\forall q \in [1, p^*[$ avec $p^* = \frac{pN}{N-p}$.*

— *Si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
— *Si* $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Si on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, alors les injections précédentes sont vérifiées indépendamment de la régularité du domaine* Ω*.*

La notion de troncature est un élément clé pour étudier les EDP avec donnée dans L^1 ou bien une mesure. Elle fait appel la fonctions $T_k(s)$ avec $k > 0$ définie ci-dessous :

$$T_k(s) = \begin{cases} s\,, & \text{si}|s| \leqslant k\,; \\ k\frac{s}{|s|}\,, & \text{si } |s| > k\,; \end{cases}$$

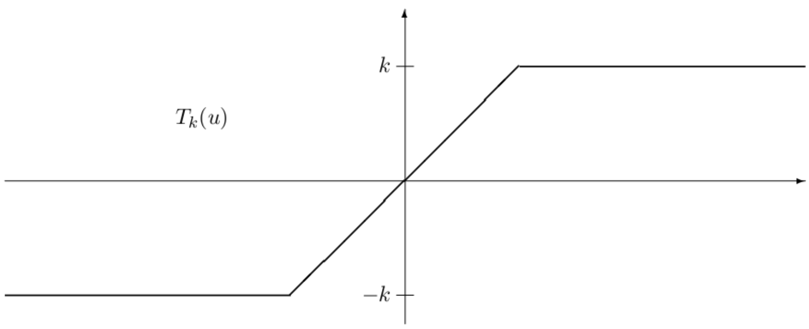

FIGURE 1.1 – La troncature

Afin de traiter les EDP elliptiques avec données non régulières, on commencera souvent par une approximation, puis on passera à la limite en imposant des résultats de compacité appropriés. L'un des résultats les plus importants et qui nous sera utile très souvent est le résultat de régularité de Baras-Pierre, la preuve se trouve dans [11].

Lemme 1.1.4. *Supposons que* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tel que* $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$*, alors pour tout* $p \in [0, \frac{N}{N-1})$*, et pour chaque ensembles ouverts* $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$*, il existe une constante positive* $C \equiv C(p, \Omega_1, \Omega_2, N)$ *telle que*

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leqslant C \int_{\Omega_2} (|u| + |\Delta u|)dx. \tag{1.1.1}$$

De plus, si $u \in L^1(\Omega)$ *et* $\Delta u \in L^1(\Omega)$*, alors l'estimation ci dessus à lieu globalement dans le domaine* Ω*.*

Rappelons aussi le lemme de Vitali mais avant de l'énoncer on a besoin de la définition suivante.

Définition 1.1.5. (Equi-Intégrabilité dans L^p) *Soit* X *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^N$ *et* $1 \leqslant p < \infty$*. On dit que la suite* $(f_n)_n \subset L^p(X)$ *est equi-intégrable si et seulement* *si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $E \subset X$ avec $|E| < \delta$, on a pour tout*

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

Théorème 1.1.6. (Théorème de Vitali) *Soit X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui verifie les deux conditions suivantes :*

1. *$(f_n)_n$ converge presque-partout vers f dans X.*
2. *$(f_n)_n$ est equi-intégrable.*

Alors, $(f_n)_n$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

1.2 Quelques outils pour les problèmes elliptiques

La méthode des sous et sur-solutions est l'une des méthodes largement utilisées pour résoudre les EDP de types elliptiques. C'est en fait, un résultat des théorèmes à point fixe et des algorithmes d'itération. Généralement, cette méthode est bien connue dans la théorie des EDP du fait de son association étroite avec le principe du maximum et les résultats de comparaison. Une généralisation importante de ce principe est contenue dans le lemme suivant de Brezis et Cabré, dont la preuve est bien détaillée dans [19].

1.2.1 Principes de comparaison et de maximum

Lemme 1.2.1. *Supposons que $h \geqslant 0$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Soit v la solution de*

$$\begin{cases} -\Delta v = h & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Alors,

$$\frac{v(x)}{\delta(x)} \geqslant c \int_\Omega h\delta dx \qquad \forall x \in \Omega,$$

où $c > 0$ est une constante qui dépend seulement de Ω et $\delta = dist(x, \partial\Omega)$.

Théorème 1.2.2. ***Principe de comparaison***
Soit $1 < p$ et soit f une fonction positive, continue telle que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$. Si $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sont telles que

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant f(x,u), & u > 0 \text{ in } \Omega, \\ -\Delta_p v \leqslant f(x,v), & v > 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Alors $u \geqslant v$ dans Ω.

On se réfère à [6] pour la démonstration. Comme on s'intéresse aussi aux problèmes avec dépendance en gradient, on aura besoin d'une généralisation du principe de Maximum classique qui a été obtenu par Alaa-Pierre dans [7].

Lemme 1.2.3. *Soit $\vec{a} \in L^{N+\varepsilon}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$, w la solution de*

$$w \in W_0^{1,1}(\Omega), \quad \Delta w \in L^1(\Omega),$$

$$\alpha w - \Delta w \leqslant \vec{a}\nabla w \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Alors $w \leqslant 0$.

Pour généraliser le Lemme 1.2.3, on utilisera souvent l'inégalité de Kato.

Lemme 1.2.4. Inégalité de Kato
Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors on a :

$$\Delta|u| \geqslant sgn(u)\Delta u \quad au\ sens\ de \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

Voir [21] pour la preuve.

Théorème 1.2.5. Principe du maximum faible
Soit u la solution unique du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad dans\ \Omega \\ u &= 0 \quad sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.3}$$

où f est une fonction continue. Si $f \geqslant 0$ alors $u \geqslant 0$ et si $f \leqslant 0$ alors $u \leqslant 0$.

1.2.2 Quelques inégalités

Étant donné que notre approche est basée sur un argument de régularité approprié, nous avons besoin de quelques inégalités présentées ci dessous,

— **Inégalité de Young :**
Soient $p, q \geqslant 1$, alors
$$\forall a, b \geqslant 0, ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

— **Inégalité de Hölder :**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et $1 < p \leqslant \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors : $f.g \in L^1(\Omega)$ de plus,

$$\int_\Omega |fg|dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

— **Inégalité de Poincaré :**
Soit Ω un domaine borné, $1 \leqslant p < +\infty$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \;\leqslant\; C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \;, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

— **Inégalité de Sobolev :**
Soit $1 \leqslant p < N$, il existe une constante c qui dépend uniquement de N et p telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Pour tout $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $p^* := \frac{Np}{N-p}$.
Par conséquent, l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [p, p^*]$.

— **Inégalité de Poincarré-Wirtinger :** (Voir [18])
Soit Ω un ouvert connexe de classe C^1 et soit $1 \leqslant p \geqslant \infty$. Alors il existe une constante C telle que :

$$||u - \bar{u}||_{L^p} \leqslant C||\nabla u||_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{avec } \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u.$$

D'où l'on déduit, grâce à l'inégalité de Sobolev que si $p < N$,

$$||u - \bar{u}||_{L^{p^*}} \leqslant C||\nabla u||_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

— **Inégalité de Hardy-Sobolev :** (voir [4])
Soit $1 < p < N$, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ alors,

- $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

- L'inégalité de Hardy

$$\Lambda_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx,$$

avec $\Lambda_N = (\frac{N-p}{p})^p$, est la constante optimale, qui n'est pas atteinte, et qui ne dépend pas du domaine.

Étant donné que nous allons aborder des problèmes avec données non régulières, il est nécessaire de préciser le sens de la solution.

Définition 1.2.6. *Supposons que $p, q > 1$. On dit que $(u, v) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \times W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, avec $u, v \geqslant 0$, est une solution faible du système*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + f_1(v, \nabla v) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda \dfrac{v}{|x|^2} + f_2(u, \nabla u) \quad \text{dans } \Omega, \\ u, v &> 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S}$$

si $\dfrac{u}{|x|^2}, \dfrac{v}{|x|^2} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ et pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\varphi \nabla u \, dx &= \lambda \int_\Omega \frac{u}{|x|^2} \varphi \, dx + \int_\Omega f_1(v, \nabla v)\varphi \, dx, \\ &\quad \text{et} \\ \int_\Omega \nabla\psi \nabla v \, dx &= \lambda \int_\Omega \frac{v}{|x|^2} \psi \, dx + \int_\Omega f_2(u, \nabla u)\psi \, dx, \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

où

$$f_1(v, \nabla v) \equiv v^p \text{ ou } f_1(v, \nabla v) \equiv |\nabla v|^p \text{ et } f_2(u, \nabla u) \equiv u^q \text{ ou } f_2(u, \nabla u) \equiv |\nabla u|^q.$$

Remarque. *Comme $u, v \in L^1_{loc}(\Omega), \Delta u, \Delta v \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors d'après la référence [10] nous avons : $u, v \in W^{1,\sigma}_{loc}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$.*

Nous avons besoin aussi de la version pondérée de l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg présentée comme suit :

Théorème 1.2.7. *Supposons que $1 < \sigma < N$ et soit $-\infty < \gamma < \frac{N-\sigma}{\sigma}$. alors il existe une constante positive $C = \left(\frac{(N-\sigma(\gamma+1))}{\sigma}\right)^\sigma$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous avons*

$$\left(\frac{(N - \sigma(\gamma+1))}{\sigma}\right)^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx.$$

Par conséquent, nous obtenons l'extension suivante du Théorème 1.2.7.

Théorème 1.2.8. *Supposons que σ et γ vérifient les conditions ci-dessus. Alors, il existe une constante positive $C = C(\Omega, N, \sigma, \gamma)$ telle que pour tout $u \in W^{1,\sigma}(\Omega, |x|^{-\sigma\gamma}) \cap L^1(\Omega)$, nous avons :*

$$C(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_\Omega |u(x)| dx\right)^\sigma.$$

Démonstration.

Dans ce qui suit, nous désignons par $C_i(\Omega), i = 1, 2..$, toute constante positive qui dépend de Ω et les données N, σ, γ mais elles sont indépendantes de u.

Soit $u \in W^{1,\sigma}(\Omega, |x|^{-\sigma\gamma})$, nous considérons $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi \geqslant 0$, $\phi = 1$ dans $B_r(0)$, avec $B_{2r}(0) \subset\subset \Omega$, et $\phi = 0$ dans $\Omega \backslash B_{2r}(0)$. alors $u\phi \in W_0^{1,\sigma}(\Omega, |x|^{-\sigma\gamma})$.En utilisant le théorème 1.2.7, nous obtiendrons que :

$$\left(\frac{(N - \sigma(\gamma+1))}{\sigma}\right)^\sigma \int_\Omega \frac{|u(x)\phi(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int_\Omega |\nabla(u(x)\phi(x))|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx.$$

Notons qu'il existe deux constantes positives c_1, c_2 telle que :

$$|\nabla(u(x)\phi(x))|^\sigma \leqslant c_1 \phi^\sigma |\nabla u|^\sigma + c_2 |u|^\sigma |\nabla \phi|^\sigma.$$

ainsi

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u(x)\phi(x))|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx &\leqslant c_1 \int_\Omega \phi^\sigma(x) |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + c_2 \int_{\Omega\backslash B_r(0)} |u(x)|^\sigma |\nabla\phi(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx \\ &\leqslant C_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + C_2(\Omega) \int_{\Omega\backslash B_r(0)} |u(x)|^\sigma dx. \end{aligned}$$

D'un autre coté, comme $u \in W^{1,\sigma}(\Omega \backslash B_r(0))$, par une variation de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, nous obtenons que

$$\begin{aligned} C_3(\Omega) \int_{\Omega\backslash B_r(0)} |u(x)|^\sigma dx &\leqslant \int_{\Omega\backslash B_r(0)} |\nabla u(x)|^\sigma dx + \left(\int_{\Omega\backslash B_r(0)} |u(x)| dx\right)^\sigma \\ &\leqslant C_4(\Omega) \int_{\Omega\backslash B_r(0)} |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_{\Omega\backslash B_r(0)} |u(x)| dx\right)^\sigma \\ &\leqslant C_5(\Omega) \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_\Omega |u(x)| dx\right)^\sigma\right). \end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx &= \int_{B_r(0)} \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx + \int_{\Omega\backslash B_r(0)} \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{|u(x)\phi(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx + C_6(\Omega) \int_{\Omega\backslash B_r(0)} |u(x)|^\sigma dx \\ &\leqslant C_7(\Omega) \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_\Omega |u(x)| dx\right)^\sigma\right). \end{aligned}$$

■

Remarque. *Notons que si $\gamma + 1 > 0$, alors $W^{1,\sigma}(\Omega, |x|^{-\sigma\gamma}) \subset L^1(\Omega)$. Par conséquent, le*

Théorème 1.2.8 est valable pour tous $u \in W^{1,\sigma}(\Omega, |x|^{-\sigma\gamma})$.

1.3 Problème linéaire avec potentiel de Hardy.

Étant donné que nos systèmes introduisent le potentiel de Hardy, nous devons estimer la singularité de la solution au voisinage de l'origine.
Les lemmes suivants seront cruciaux pour atteindre cet objectif. Pour les preuves, nous renvoyons à [3, 5, 29].
Le système (S) est lié à l'inégalité classique de Hardy, plus précisément il est bien connu que pour tous $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\Lambda_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2}{|x|^2} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx.$$

La constante $\Lambda_N = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ est optimale et elle n'est jamais atteinte. Pour plus de détails concernant Λ_N, on se réfère la référence [34].
Le cas d'une équation elliptique non-linéaire a été largement étudié dans la littérature, nous nous référons à [5, 19, 20, 29] pour plus d'exemples de problèmes similaires.
Il est bien connu que le problème

$$-\Delta w = \lambda \frac{w}{|x|^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

admet $w(x) = c_i|x|^{-\alpha_i}$ comme solution si $\lambda < \Lambda_N$ et $w(x) = c_i|x|^{-\alpha_1}\ln(|x|)$ si $\lambda = \Lambda_N$, pour $i = 1, 2$.
Notons que α_1, α_2 sont les solutions de l'équation algébrique

$$\mathcal{P}(\beta) := -\beta^2 + (N-2)\beta - \lambda = 0, \tag{1.3.1}$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_N - \lambda}, \qquad \alpha_2 = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_N - \lambda}. \tag{1.3.2}$$

avec $\mathcal{P}(\beta) > 0$ si et seulement si $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$.

Lemme 1.3.1. *Supposons que w est une fonction mesurable positive telle que $w \gneqq 0$ avec $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\frac{w}{|x|^2} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supposons que w vérifie $-\Delta w - \lambda \frac{w}{|x|^2} \geqslant 0$ dans le sens faible. alors il existe une constante positive C et une boule au voisinage de l'origine $B_r(0) \subset \Omega$ telles que*

$$w(x) \geqslant C|x|^{-\alpha_1} \text{ p.p. dans } B_r(0),$$

avec α_1 est défini dans (1.3.2).

Pour la démonstration de ce lemme, on utilise le principe du maximum et de comparaison, on se réfère à [5] [Lemme 2.2] pour plus de détails.

Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda \dfrac{u}{|x|^2} & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

avec $f \in L^1(\Omega)$. Alors nous avons les résultats suivants concernant l'existence et le comportement d'une solution faible.

Lemme 1.3.2. *[23]*
• *Supposons que u est une sur-solution faible positive du problème (1.3.3) où $\lambda \leqslant \Lambda_N$. Alors $|x|^{-\alpha_1} f \in L^1_{loc}(\Omega)$, où α_1 est définie dans (1.3.2).*

• *À présent, si $f \in L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega f|x|^{-\alpha_1}\,dx < \infty$, alors le problème (1.3.3) admet une solution faible unique u telle que $u \in W_0^{1,a}(\Omega)$ pour tout $a < \frac{N}{N-1}$ et $\displaystyle\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2+\alpha_1}}dx < \infty$.*

• *Dans le cas où $f(x) = \dfrac{1}{|x|^\beta}$ avec $2 < \beta < N - \alpha_1$, alors la solution positive faible u du problème (1.3.3) vérifie*

$$u \geqslant |x|^{-\beta+2} \text{ dans } B_r(0) \subset\subset \Omega.$$

Démonstration.
• Supposons que u est une sur-solution faible positive du problème (1.3.3) avec $\lambda \leqslant \Lambda_N$, il suffit de vérifier la conclusion dans une boule qui contient l'origine $B_r(0)$.
Soit $f_n = T_n(f)$, on traite le problème approximé suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n - \lambda \dfrac{u_n}{|x|^2} & = & f_n & \text{dans } B_r(0), \\ u_n & = & 0 & \text{sur } \partial B_r(0), \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Puisque $T_n(f)$ est une fonction croissante en n, alors en utilisant le résultat de comparaison du Théorème 1.2.2, nous concluons que $\{u_n\}_n$ est une suite croissante en n. Soient $u_0 = 0$ une sous-solution et $\bar{u}$ une sur-solution, d'après le principe du maximum, il existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que : $u_0 \leqslant u_n \leqslant \bar{u}$, donc $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \bar{u}$.
Considérons maintenant ϕ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \phi - \lambda \dfrac{\phi}{|x|^2} & = & 1 & \text{dans } B_r(0), \\ \phi & = & 0 & \text{sur } \partial B_r(0), \end{cases} \tag{1.3.5}$$

d'après le Lemme 1.3.1, $\phi(x) \backsimeq c|x|^{-\alpha_1}$ au voisinage de 0, prenons ϕ comme fonction test dans l'équation (1.3.4), nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} u_n dx = \int_{B_r(0)} f_n \phi dx \geqslant c \int_{B_r(0)} f_n |x|^{-\alpha_1} dx$$

donc par passage à la limite,

$$\int_{B_r(0)} f|x|^{-\alpha_1} dx < \infty$$

d'où la démonstration du premier point du Lemme 1.3.2.

• Supposons maintenant que $f|x|^{-\alpha_1} \in L^1(\Omega)$ et montrons que le problème (1.3.4) admet une solution faible unique u telle que $u \in W_0^{1,a}(\Omega)$ pour tout $a < \frac{N}{N-1}$.

Considérons le problème approximé suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n - \lambda \dfrac{u_n}{|x|^2} &= f_n \quad \text{dans } B_r(0), \\ u_n &= 0 \quad \text{sur } \partial B_r(0), \end{cases} \tag{1.3.6}$$

avec $f_n \in L^\infty(\Omega)$, $f_n \to f \in L^1(\Omega)$.

Prenons $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (1.3.6), on trouve :

$$\int_{B_r(0)} -\Delta u_n T_k(u_n) dx - \lambda \int_{B_r(0)} \frac{u_n}{|x|^2} T_k(u_n) dx = \int_{B_r(0)} f_n T_k(u_n) dx$$

$$\Rightarrow \int_{B_r(0)} -\Delta u_n T_k(u_n) dx \leqslant k\Big(\lambda \int_{B_r(0)} \frac{u_n}{|x|^2} dx + \int_{B_r(0)} f_n dx\Big) \tag{1.3.7}$$

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \phi - \lambda \dfrac{\phi}{|x|^2} &= |x|^{-2} \quad \text{dans } B_r(0), \\ \phi &= 0 \quad \text{sur } \partial B_r(0), \end{cases} \tag{1.3.8}$$

d'après le Lemme 1.3.1, $\phi(x) \leqslant c|x|^{-\alpha_1}$ au voisinage de 0, prenons ϕ comme fonction test dans l'équation (1.3.6), nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} -\Delta u_n \phi dx - \lambda \int_{B_r(0)} \frac{u_n}{|x|^2} \phi dx = \int_{B_r(0)} f_n \phi dx$$

$$\Rightarrow \int_{B_r(0)} u_n (-\Delta \phi - \lambda \frac{\phi}{|x|^2}) dx = \int_{B_r(0)} f_n |x|^{-\alpha_1}$$

$$\Rightarrow \int_{B_r(0)} \frac{u_n}{|x|^2} dx = \int_{B_r(0)} f_n |x|^{-\alpha_1} < \infty \tag{1.3.9}$$

Donc,

$$\frac{1}{k}\int_{B_r(0)} |\nabla T_k(u_n)|^2 dx < \infty$$

utilisons maintenant l'espace de Marcinkiewicz, [12]

$$u_n \in M^{p_1}(\Omega) \text{ avec } p_1 = \frac{N}{N-2}$$

et

$$\nabla u_n \in M^{p_2}(\Omega) \text{ avec } p_2 = \frac{N}{N-1}$$

donc

$$u_n \in L^{p_1-\varepsilon}(\Omega) \text{ et } \nabla u_n \in M^{p_2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

d'où $u_n \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall q < \frac{N}{N-1}$ et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^1(\Omega)$ ($\| u_n \|_{L^1} \leqslant \| u_n \|_{L^{p_1-\varepsilon}} < c$) et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^1(\Omega)$. D'après le Théorème de Vitali 1.1.6,

$$\frac{u_n}{|x|^2} \longrightarrow \frac{u_n}{|x|^2} \text{ dans } L^1(\Omega)$$

Par passage à la limite, u est une solution du problème (1.3.3), ce qui nous conduit à démontrer le deuxième point du Lemme 1.3.2.

- Soit $f(x) = \dfrac{1}{|x|^\beta}$ avec $2 < \beta < N - \alpha_1$, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w - \lambda \dfrac{w}{|x|^2} = |x|^{-\beta} & \text{dans } B_R(0), \\ w = \eta & \text{sur } \partial B_R(0), \end{cases} \tag{1.3.10}$$

Par un calcul direct, on obtient : $w(r) \backsimeq cr^{-\beta+2}$ avec $r = |x|$. Comme u est une sur solution du problème (1.3.10), nous utilisons le principe du maximum et de comparaison pour conclure que $u(x) \geqslant |x|^{-\beta+2}$ dans $B_R(0)$. ■

Chapitre 2

Résultats d'existence et de non-existence du système de Lane-Emden

2.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est d'effectuer une généralisation des résultats obtenus dans [23] par une nouvelle approche, permettant de démontrer les résultats d'existence et de non-existence ainsi que l'ensemble des solutions pour le système elliptique avec des termes dépendants du potentiel.
Pour $p, q > 1$ et $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N = (\frac{N-2}{2})^2$, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + v^p \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + u^q \quad \text{dans } \Omega, \\ u, v &> 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S2}$$

où, Ω est un domaine borné régulier qui contient l'origine dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geqslant 3$.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la Section 2.2 nous rappelons quelques résultats d'existence et de non-existence pour le cas d'une équation elliptique dépendant du terme de potentiel et de gradient, la section qui suit 2.3 concerne la présentation d'une nouvelle technique permettant de démontrer le résultat principal de non-existence du système (S2) et d'identifier aussi les régions d'existence et de non-existence. Enfin, nous montrons dans la dernière partie de ce chapitre (Section 2.4) que ces résultats obtenus sont optimaux par la construction des sur-solutions radiales explicites dans le cas où

$\Omega = B_1(0)$ est la boule unité, puis par un argument de mise à l'échelle, nous produisons des sur-solutions dans des domaines bornés généraux.

2.2 Cas d'une équation elliptique

En ce qui concerne notre travail, nous nous somme focalisés sur le cas d'une équation elliptique non-linéaire, ces EDP ont été largement étudiées dans la littérature, nous nous référons à [5, 19, 20, 29] pour plus d'exemples de problèmes similaires.

Dans la thèse de L.Dupaigne [28], l'auteur a étudié le problème non linéaire avec un potentiel singulier de Hardy présenté comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{\lambda}{|x|^2}u & = & u^p + tf & \text{in } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{in } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_\lambda)$$

avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ et $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N = (\frac{N-2}{2})^2$, $p > 1$, et f une fonction positive.
Pour $t = 0$, cherchons tout d'abord des solutions pour l'équation sous la forme $u(|x|) = u(r) = Cr^{-\beta}$ avec $C \geqslant 0$, afin de trouver l'exposant critique.
Vue que : $\Delta u = u'' + \frac{N-1}{r}u'$, après un calcul simple nous obtenons :

$$C^{p-1} = (-\beta^2 + (N-2)\beta - \lambda) \quad \textbf{et} \quad \beta = \frac{2}{p-1}$$

Dans l'intervalle $]\alpha_1, \alpha_2[$, $\mathcal{P}_\lambda(\beta) = -\beta^2 + (N-2)\beta - \lambda > 0$, avec α_1, α_2 sont définis dans (1.3.2), par conséquent : ce problème admet une sur-solution si et seulement si : $p < \frac{\alpha_1+2}{\alpha_1} = p^+$ qui représente l'exposant critique pour ce type de problème.
Les résultats d'existence et de non existence se résument dans le Théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Supposons que $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$ et $p^+ = 1 + \frac{2}{\alpha_1}$, alors nous avons les résultats suivant :*
- *Si $1 < p < p^+$, il existe un $t_0 > 0$ dépendant de N, λ, p et f tel que :*
le problème (P_λ) admet au moins une solution forte classique dans le cas où $t < t_0$ et une solution faible dans le cas où $t = t_0$.
Si $t > t_0$, le problème (P_λ) n'admet pas de solutions.
- *Si $p \geqslant p^+$, alors pour tout $t > 0$, le problème (P_λ) n'admet pas de solutions.*

Ce résultat le motive pour étudier une classe plus large de problème avec potentiels singuliers, en considérant l'équation semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u - a(x)u &= f(x) + cb(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ et $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N = (\frac{N-2}{2})^2$, $p > 1$, et a, f, b sont des fonctions positives. Pour plus de détails on se réfère à [28, 30].

Pour le cas d'une équation elliptique quasi-linéaire avec potentiel singulier et terme dépendant du gradient, les auteurs dans [5] ont démontré les résultats d'existence et de non-existence en fonction de l'exposant critique pour le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} &= |\nabla u|^p + cf(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P'_λ}$$

avec $\Omega \in \mathbb{R}^N$ est un domaine qui contient l'origine, $N \geqslant 3$ et $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$.

Pour trouver l'exposant optimal p^+, nous cherchons une solution sous la forme $u(x) = C|x|^{-\beta}$ de l'équation, après un calcul simple, nous obtenons :

$$\beta^p C^{p-1} = \mathcal{P}_\lambda(\beta) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2-p}{p-1}$$

Comme $\beta^p C^{p-1} > 0$ alors, on doit prendre $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$,
Par conséquent,

$$p^- = \frac{2+\alpha_2}{1+\alpha_2} < p < \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1} = p^+.$$

où α_1, α_2 sont définis dans (1.3.2), par la suite, les auteurs dans [5] ont démontré le résultat de non-existence pour $p \geqslant p^+$ pour différents valeurs de λ.

Les résultats d'existence peuvent être résumés comme suit :

- Pour $p^- < p < p^+$ et $f \equiv 0$, le problème (P'_λ) admet une solution faible positive.
- Pour $1 < p < p^+$, le problème (P'_λ) admet une solution faible positive s'il existe un c_0 tel que $c < c_0$ et $f(x) \leqslant \frac{1}{|x|^2}$. Pour plus de détails, on s'envoie à la référence [5].

En résume que la zone d'existence peut être présentée dans l'intervalle $[1, p^+)$ pour le problème elliptique avec terme dépendant du potentiel (P_λ) et $[1, q^+)$ pour le problème avec terme de gradient (P'_λ). La question qui se pose : Dans le cas d'un système elliptique avec terme de potentiel et/ou de gradient, est ce qu'on peut élargir la zone d'existence en dehors d'un rectangle $[1, p^+) \times [1, q^+)$?

Le but du travail présenté dans [23], est de démontrer l'existence d'une courbe optimale qui sépare la zone d'existence et la zone de non existence en fonction de p et de q, pour cela, les auteurs ont utilisé un processus itératif reposant sur une estimation **ponctuelle** de la singularité de la solution (u, v) près de l'origine. Malheureusement, ce processus itératif n'est pas général, par exemple, nous ne pouvons pas l'utiliser pour le cas des systèmes dépendant du gradient vu qu'il n'est pas tout à fait clair comment l'estimation ponctuelle similaire de $|\nabla u|$ peut être obtenue.

Afin de contourner ces difficultés, nous introduisons un nouveau schéma itératif, encore plus général, basé sur un argument qui nous permet d'améliorer la sommabilité des solutions dans des espaces de Lebesgue pondérés appropriés. Notre processus est **fonctionnel** repose sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour garantir la résolution du problème linéaire impliquant le potentiel de Hardy.

Enfin, nous montrons que nos résultats sont optimaux en construisant des sur-solutions radiales explicites dans le cas où $\Omega = B_1(0)$, la boule unité, puis par un argument de mise à l'échelle, nous produisons des sur-solutions dans des domaines bornés généraux.

Dans la section qui suit, nous utilisons notre processus pour effectuer le même type d'analyse présentée dans la référence [23] sur une large classe de systèmes elliptiques non-linéaires.

2.3 Résultats de non-existence

L'objectif de cette partie est de montrer l'existence d'une courbe critique $\mathcal{G}(p, q)$ telle que l'existence et la non-existence de solutions au système (S2) dépendant de la position de (p, q) par rapport à cette courbe.
On note par c n'importe quelle constante qui dépend de Ω.

Définissons tout d'abord les puissances optimales pour le système (S2) :

$$p^+ := \frac{2 + \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2}}, \quad \bar{p} := \frac{N - \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2}},$$

$$q^+ := \frac{2 + \alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}}, \quad \bar{q} := \frac{N - \alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}}.$$

avec

$$\alpha_{1,i} = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_N - \lambda_i}, \qquad \alpha_{2,i} = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_N - \lambda_i} \tag{2.3.1}$$

sont les racines de l'équation algébrique $\mathcal{P}_{\lambda_i}(\beta) = -\beta^2 + (N-2)\beta - \lambda_i = 0$. pour $i = 1, 2$.

2.3.1 Présentation de la technique adoptée :

Afin de définir la courbe optimale qui sépare les régions d'existence/non-existence, nous allons montrer que si le système (S2) admet une solution (u, v), nous pouvons construire, en utilisant le processus présenté dans [16], deux suites croissantes $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_n}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_n}}\, dx < \infty.$$

Ce processus nous permet de trouver la courbe optimale d'existence dans le plan $(p,\, q)$. Pour simplifier la présentation, nous définissons

$$\mathcal{G}_1(p,q) = -\alpha_{1,1}(pq-1) + 2p + 2 \text{ et } \mathcal{G}_2(p,q) = -\alpha_{1,2}(pq-1) + 2q + 2.$$

et soient les ensembles A, B et C qui représentent les zones d'existence de sur-solutions positives pour le système (S2) tels que :

$$A = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tel que } 1 < p < p^+ \text{ et } 1 < q < q^+\Big\},$$

$$B = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tel que } p^+ < p < \bar{p}\ ,\ 1 < q < q^+ \text{ et } \mathcal{G}_2(p,q) > 0\Big\},$$

$$C = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tel que } 1 < p < p^+\ ,\ q^+ < q < \bar{q} \text{ et } \mathcal{G}_1(p,q) > 0\Big\}.$$

La région qui représente la partie non-existence est $\mathbb{R}^{+2} \setminus \overline{(A \cup B \cup C)}$.

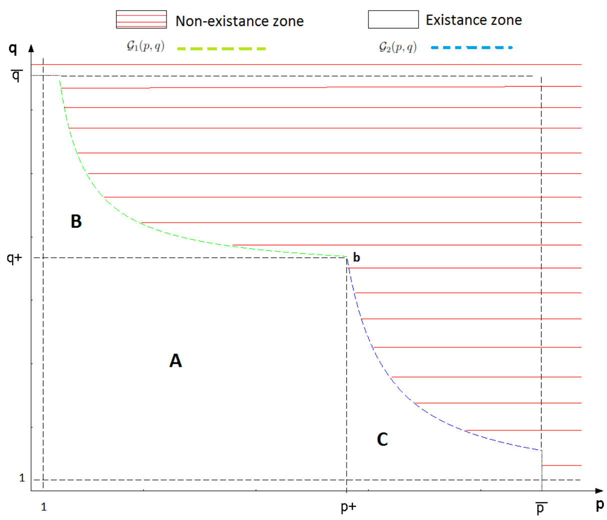

FIGURE 2.1 – Zones d'Existence et de Non-existence pour le système (S2)

Nous présentons dans le Théorème suivant le principal résultat de non-existence pour le système (S2).

Théorème 2.3.1. *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite pour* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ *et* $p, q > 1$ *:*

I) $p \geqslant \bar{p}$ *ou* $q \geqslant \bar{q}$.

II) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $q > \frac{\alpha_{1,2}+2}{\alpha_{1,2}p-2}$.

III) $q^+ < q < \bar{q}$ *et* $p > \frac{\alpha_{1,1}+2}{\alpha_{1,1}q-2}$.

alors le système (S2) *n'admet pas de sur-solutions faibles positives dans le sens de la Définition 1.2.6.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que le système (S2) admet une solution positive (u, v), cette démonstration se fait pour chaque cas.

Premier cas :

Soit $p \geqslant \bar{p}$ et $q \geqslant \bar{q}$, utilisant le lemme 1.3.2 on a :

$$\int_\Omega v^p |x|^{-\alpha_{1,1}}\, dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega u^q |x|^{-\alpha_{1,2}}\, dx < \infty. \tag{2.3.2}$$

comme $-\Delta u - \lambda_1 \frac{u}{|x|^2} \geqslant 0$ et $-\Delta v - \lambda_2 \frac{v}{|x|^2} \geqslant 0$, alors d'après le lemme 1.3.1, ils existent des constantes positives C_1, C_2 et $B_r(0) \in \Omega$ pour r assez petit tels que :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha_{1,1}q+\alpha_{1,2}}}\, dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha_{1,2}p+\alpha_{1,1}}}\, dx < \infty. \tag{2.3.3}$$

En supposnat que $p \geqslant \frac{N-\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2}}$ et $q \geqslant \frac{N-\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}}$ on obtient $p\alpha_{1,2}+\alpha_{1,1} \geqslant N$ et $q\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2} \geqslant N$, ce qui nous conduit à une l'absurde avec (2.3.3).

Deuxième cas : $p^+ < p < \bar{p}$ **et** $\mathcal{G}_2(p, q) < 0$

Dans ce cas la démonstration sera donnée en quelques étapes.

• **Étape 1** . Définissons $a_0 := \alpha_{1,2} + 2$ et $b_0 := \alpha_{1,1} + 2$, on doit montrer l'existence de $a_1 > a_0$ et $b_1 > b_0$ tels que :

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\, dx < \infty \quad \text{où} \quad \alpha_{1,2} + 2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_{1,2}}{p}$$

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty \quad \text{où} \quad \alpha_{1,1} + 2 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_0 - 2}{q}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et (2.3.2) on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\, dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1 - \frac{\alpha_{1,1}}{p} + \frac{\alpha_{1,1}}{p}}}\, dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{\alpha_{1,1}}}\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(a_1 - \frac{\alpha_{1,1}}{p})}}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(a_1 - \frac{\alpha_{1,1}}{p})}}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

si $a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_{1,1}}{p}$ alors $\displaystyle\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty$.
Comme $p^+ < p < \bar{p}$, nous avons

$$\alpha_{1,2} + 2 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_{1,1}}{p} < \alpha_{2,2} + 2$$

Maintenant, on doit démontrer l'existence de b_1 avec $\alpha_{1,1} + 2 < b_1 < \alpha_{2,1} + 2$ tel que,

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty$$

Fixons a_1 tel que : $\alpha_{1,2} + 2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_{1,1}}{p}$, et considérons θ la solution radiale du problème

$$\begin{cases} -\Delta\theta - \lambda_2 \frac{\theta}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{a_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta &= 0 \quad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\theta \simeq \frac{c'}{|x|^{a_1-2}}$ au voisinage de l'origine. Utilisons θ comme fonction test dans l'équation satisfaite par v, nous obtenons,

$$\int_\Omega \left(-\Delta\theta + \lambda_2 \frac{\theta}{|x|^2}\right) v\,dx = \int_\Omega u^q \theta\,dx,$$

ce qui nous donne :

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{a_1-2}}\,dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty,$$

donc

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{a_1-2}}\,dx < \infty. \tag{2.3.4}$$

Utilisant (2.3.4) et l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1 - \frac{a_1-2}{q} + \frac{a_1-2}{q}}}\,dx &\leqslant \left(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{a_1-2}}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(b_1 - \frac{a_1-2}{q})}}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant c\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(b_1 - \frac{a_1-2}{q})}}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

si $q'(b_1 - \frac{a_1-2}{q}) < N$ nous avons $\displaystyle\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty$, c'est à dire, il existe un b_1 tel que :

$$b_0 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1 - 2}{q}$$

Nous avons $\alpha_{1,2} + 2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_{1,1}}{p} := a^*$, nous affirmons qu'il faut choisir a_1 proche de a^* tels que

$$\frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2}{q} > \alpha_{1,1} + 2$$

et choisir b_1 avec

$$b_0 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2}{q}$$

Montrons tout d'abord que :

$$\frac{N}{q'} + \frac{a^* - 2}{q} > \alpha_{1,1} + 2 \tag{2.3.5}$$

Comme $p^+ < p < \bar{p}$, l'inégalité (2.3.5) est équivalente à : $q > \frac{N+2p-\alpha_{1,1}}{p(N-\alpha_{1,1}-2)}$, et comme $q > \frac{\alpha_{1,2}+2}{p\alpha_{1,2}-2}$, alors si

$$\frac{\alpha_{1,2} + 2}{p\alpha_{1,2} - 2} > \frac{N + 2p - \alpha_{1,1}}{p(N - \alpha_{1,1} - 2)} \tag{2.3.6}$$

nous avons l'inégalité désirée, en effet, (2.3.6) est équivalente à : $p < \frac{N-\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2}} = \bar{p}$, nous concluons que $\frac{N}{q'} + \frac{a^*-2}{q} > \alpha_{1,1} + 2$, donc nous pouvons choisir $a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_{1,1}}{p}$, tel que :

$$\frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2}{q} > \alpha_{1,1} + 2.$$

Par conséquent, nous pouvons choisir b_1 tel que :

$$\alpha_{1,1} + 2 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1 - 2}{q} < \alpha_{2,1} + 2$$

• **Étape 2** . Nous montrons maintenant qu'il existe $a_2 > a_1$ tel que :

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\, dx < \infty$$

pour cela fixons (a_1, b_1) définies dans la première étape et définissons $\psi \simeq \frac{C''}{|x|^{b_1-2}}$ la solution radiale du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\psi - \lambda_1 \frac{\psi}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{b_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \psi &= 0 \quad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prenons ψ comme fonction test dans l'équation satisfaite par u, on obtient :

$$\int_\Omega \left(-\Delta\psi + \lambda_1 \frac{\psi}{|x|^2}\right) u\, dx = \int_\Omega v^p \psi\, dx.$$

donc

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_1-2}}\, dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty. \tag{2.3.7}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder et (2.3.7) on trouve :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\,dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2-\frac{b_1-2}{p}+\frac{b_1-2}{p}}}\,dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_1-2}}\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(a_2-\frac{b_1-2}{p})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(a_2-\frac{\alpha_{1,1}}{p})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\,dx < \infty$ si et seulement si $a_2 < \frac{N}{p'} + \frac{b_1-2}{p}$.
Notons que

$$\frac{N}{p'} + \frac{b_1-2}{p} > \frac{N}{p'} + \frac{b_0-2}{p}.$$

Donc, nous pouvons choisir a_2 tel que :

$$\alpha_{1,2}+2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{b_0-2}{p} < a_2 < \frac{N}{p'} + \frac{b_1-2}{p} < \alpha_{2,1}+2$$

Maintenant, à partir de a_2, nous pouvons montrer facilement l'existence de b_2 tel que :

$$\alpha_{1,1}+2 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} < b_2 < \frac{N}{q'} + \frac{a_2-2}{q} < \alpha_{2,2}+2$$

et

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_2}}\,dx < \infty$$

En reprenant les mêmes procédures de calcul, on peut définir les suites croissantes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 = \alpha_{1,2} - 2$, $b_0 = \alpha_{1,1} + 2$, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{b_{n-2}-2}{p} < a_n < \dfrac{N}{p'} + \dfrac{b_{n-1}-2}{p}, \\[2ex] \dfrac{N}{q'} + \dfrac{a_{n-1}-2}{q} < b_n < \dfrac{N}{q'} + \dfrac{a_n-2}{q}. \end{cases}$$

De plus, nous avons :

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_n-2}}\,dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{a_n-2}}\,dx < \infty \tag{2.3.8}$$

Comme $u(x) \geqslant C_1|x|^{-\alpha_{1,1}}$ et $v(x) \geqslant C_2|x|^{-\alpha_{1,2}}$, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$p\alpha_{1,2} + b_n < N+2 \quad \text{et} \quad q\alpha_{1,1} + a_n < N+2.$$

Soient

$$\bar{a} = \lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \bar{b} = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Nous déduisons par passage à la limite que :

$$\begin{cases} \bar{a} &= \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\bar{b}-2}{p}, \\ \\ \bar{b} &= \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\bar{a}-2}{q}. \end{cases}$$

Après un calcul direct, nous obtenons :

$$\bar{b} = N - \frac{2p+2}{pq-1} \text{ et } \bar{a} = N - \frac{2q+2}{pq-1}.$$

• **Étape 3**. Démontrons maintenant le principal résultat de non-existence pour ce cas, nous avons supposé que $q > \frac{\alpha_{1,2}+2}{\alpha_{1,2}p-2}$.
D'après (2.3.8) et le lemme 1.3.1, nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_{1,2}+b_n-2}}\, dx \leqslant \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_n-2}}\, dx < \infty \text{ pour tout } n.$$

Ce qui nous donne

$$p\alpha_{1,2} + b_n - 2 < N,$$

et par passage à la limite, nous avons :

$$p\alpha_{1,2} + \bar{b} \leqslant N + 2.$$

Donc, nous pouvons conclure que $q \leqslant \frac{\alpha_{1,2}+2}{\alpha_{1,2}p-2}$, ce qui nous conduit à une contradiction avec l'hypothèse, d'où la démonstration du Théorème pour le deuxième cas.

Troisième cas : $q^+ < q < \bar{q}$ **et** $\mathcal{G}_1(p,q) < 0$
Dans ce cas, nous allons intervertir le rôle entre p et de q. La démonstration suit exactement la même approche comme dans le cas précédent, en effet :
• **Étape 1** . Commençons par montrer l'existence de $a_1 > a_0 := \alpha_{1,1} + 2$ et $b_1 > b_0 := \alpha_{1,2} + 2$ tels que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\, dx < \infty \text{ où } \alpha_{1,1} + 2 < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_{1,2}}{q} \tag{2.3.9}$$

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty \text{ où } \alpha_{1,2} + 2 < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p} \tag{2.3.10}$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder et (2.3.2), on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\,dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1-\frac{\alpha_{1,2}}{q}+\frac{\alpha_{1,2}}{q}}}\,dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{\alpha_{1,2}}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_1-\frac{\alpha_{1,2}}{q})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_1-\frac{\alpha_{1,2}}{q})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}$$

si $a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_{1,2}}{q}$, alors $\displaystyle\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty$.
Comme $q^+ < q < \bar{q}$, nous avons

$$\alpha_{1,1} + 2 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_{1,2}}{q} < \alpha_{2,1} + 2$$

Nous montrons maintenant l'existence de b_1 tel que

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty \quad \text{avec } \alpha_{1,2} + 2 < b_1 < \alpha_{2,2} + 2$$

Fixons a_1 tel que $\alpha_{1,1} + 2 < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_{1,2}}{q}$ et soit $\theta \simeq \frac{C'}{|x|^{a_1-2}}$, la solution radiale du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\theta - \lambda_1 \frac{\theta}{|x|^2} = \dfrac{1}{|x|^{a_1}} & \text{dans } \Omega,\\ \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

prenons θ comme fonction test dans la première équation du système (S2), on obtient :

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2}}\,dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty.$$

donc

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2}}\,dx < \infty \tag{2.3.11}$$

En utilisant (2.3.11) et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\,dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1-\frac{a_1-2}{p}+\frac{a_1-2}{p}}}\,dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2}}\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(b_1-\frac{a_1-2}{p})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(b_1-\frac{a_1-2}{p})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Alors $\displaystyle\int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty$ si et seulement si $b_0 < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1-2}{p}$.
Rappelons que $\alpha_{1,1} + 2 < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_{1,2}}{q} := a^*$, nous affirmons qu'il faut choisir a_1 proche de a^* tels que

$$\frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p} > \alpha_{1,2} + 2$$

et choisir b_1 avec

$$b_0 < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p}$$

Montrons tout d'abord que :

$$\frac{N}{p'} + \frac{a^* - 2}{p} > \alpha_{1,2} + 2 \tag{2.3.12}$$

Comme $q^+ < q < \bar{q}$, l'inégalité (2.3.12) est équivalente à : $p > \frac{N+2q-\alpha_{1,2}}{q(N-\alpha_{1,2}-2)}$, et comme $p > \frac{\alpha_{1,1}+2}{q\alpha_{1,1}-2}$, alors si

$$\frac{\alpha_{1,1} + 2}{q\alpha_{1,1} - 2} > \frac{N + 2q - \alpha_{1,2}}{q(N - \alpha_{1,2} - 2)} \tag{2.3.13}$$

nous avons l'inégalité désirée, en effet, (2.3.13) est équivalente à : $q < \frac{N-\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}} = \bar{q}$, nous concluons que $\frac{N}{p'} + \frac{a^*-2}{p} > \alpha_{1,2} + 2$, donc, nous pouvons prendre $a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_{1,2}}{q}$, tel que :

$$\frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p} > \alpha_{1,2} + 2.$$

Par conséquent, nous choisissons b_1 tel que :

$$\alpha_{1,2} + 2 < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p} < \alpha_{2,2} + 2$$

• **Étape 2** . Montrons maintenant l'existence de $a_2 > a_1$ tel que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_2}}\, dx < \infty.$$

Fixons (a_1, b_1), et définissons $\psi \simeq \frac{C''}{|x|^{b_1-2}}$ la solution radiale du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\psi - \lambda_2 \frac{\psi}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{b_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \psi &= 0 \quad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prenons ψ comme fonction test dans l'équation vérifiée par v, nous obtenons :

$$\int_\Omega \left(-\Delta\psi + \lambda_2 \frac{\psi}{|x|^2} \right) v\, dx = \int_\Omega u^q \psi\, dx.$$

Donc

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{b_1-2}}\, dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty. \tag{2.3.14}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder et (2.3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_2}}\,dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_2-\frac{b_1-2}{q}+\frac{b_1-2}{q}}}\,dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{b_1-2}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_2-\frac{b_1-2}{q})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_2-\frac{b_1-2}{q})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}$$

On doit prendre

$$a_2 < \frac{N}{q'} + \frac{b_1-2}{q},$$

pour avoir $\displaystyle\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_2}}\,dx < \infty$.
Notons que

$$\frac{N}{q'} + \frac{b_1-2}{q} > \frac{N}{q'} + \frac{b_0-2}{q}.$$

donc nous pouvons choisir a_2 tel que :

$$\alpha_{1,2}+2 < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{b_0-2}{q} < a_2 < \frac{N}{q'} + \frac{b_1-2}{q} < \alpha_{2,2}+2.$$

A partir de a_2, nous pouvons montrer l'existence de b_2 tel que :

$$\alpha_{1,1}+2 < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1-2}{p} < b_2 < \frac{N}{p'} + \frac{a_2-2}{p} < \alpha_{2,1}+2$$

Maintenant, nous pouvons définir deux suites croissantes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 = \alpha_{1,1}-2$, $b_0 = \alpha_{1,2}+2$, telles que, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \dfrac{N}{q'} + \dfrac{b_{n-2}-2}{q} & < a_n < \quad \dfrac{N}{q'} + \dfrac{b_{n-1}-2}{q},\\[2ex] \dfrac{N}{p'} + \dfrac{a_{n-1}-2}{p} & < b_n < \quad \dfrac{N}{p'} + \dfrac{a_n-2}{p}.\end{cases}$$

De plus, on a :

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_n-2}}\,dx < \infty \quad\text{et}\quad \int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{b_n-2}}\,dx < \infty \tag{2.3.15}$$

Comme $u(x) \geqslant C_1|x|^{-\alpha_{1,1}}$ et $v(x) \geqslant C_2|x|^{-\alpha_{1,2}}$, on obtient les inégalités suivantes :

$$p\alpha_{1,2} + a_n < N+2 \quad\text{et}\quad q\alpha_{1,1} + b_n < N+2$$

Soit

$$\hat{a} = \lim_{n\to+\infty} a_n \quad\text{et}\quad \hat{b} = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

Nous déduisons :

$$\begin{cases} \hat{a} &= \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\hat{b}-2}{q}, \\ \\ \hat{b} &= \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\hat{a}-2}{p}. \end{cases}$$

après un simple calcul, on obtient :

$$\hat{a} = N - \frac{2p+2}{pq-1} \text{ et } \hat{b} = N - \frac{2q+2}{pq-1}$$

• **Étape 3**. Démontrons maintenant le résultat de non-existence pour $q^+ < q < \bar{q}$ **et** $-\alpha_{1,1}(pq-1)+2p+2<0$ c-à-d $p > \frac{\alpha_{1,1}+2}{\alpha_{1,1}q-2}$.

D'après (2.3.15) et le lemme 1.3.1, nous avons :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\alpha_{1,1}+b_n-2}}\,dx \leqslant \int_{\Omega} \frac{u^q}{|x|^{b_n-2}}\,dx < \infty \text{ pour tout } n.$$

ce qui nous donne

$$q\alpha_{1,1} + b_n - 2 < N$$

et par passage à la limite, nous obtenons,

$$q\alpha_{1,1} + \hat{b} \leqslant N + 2.$$

Par conséquent, $p \leqslant \frac{\alpha_{1,1}+2}{\alpha_{1,1}q-2}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse pour ce cas. Du coup, la démonstration du Théorème est déduite.

■

2.4 Résultats d'existence

Nous présentons dans cette partie de ce chapitre le résultat d'existence du système (S2) dans $B_1(0)$ puis dans des domaines bornés généraux $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

Théorème 2.4.1. *soit $\Omega = B_1(0)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ et $p, q > 1$: satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $1 < p < p^+$ *et* $1 < q < q^+$

II) $q^+ \leqslant q < \bar{q}$ *et* $-\alpha_{1,1}(pq-1)+2p+2>0,$ *ou*

III) $p^+ \leqslant p < \bar{p}$ *et* $-\alpha_{1,2}(pq-1)+2q+2>0.$

alors le système (S2) admet au moins une sur-solution non triviale.

Démonstration. L'idée principale de cette démonstration est de construire des sur-solutions positives pour le système (S2) en utilisant des fonctions radiales pour chaque cas présentés ci-dessous,suivant l'analyse d'existence adoptée dans [23].

1^{er} **cas :** $1 < p < p^+$ et $1 < q < q^+$, **(zone A)**

Supposons $u(x) = c_1|x|^{-\alpha_{1,1}} - c_2|x|^{-\tau_1}$ où $\tau_1 = \alpha_{1,2}p - 2 < \alpha_{1,1}$ et $v(x) = c_3|x|^{-\alpha_{1,2}} - c_4|x|^{-\tau_2}$ où $\tau_2 = \alpha_{1,1}q - 2 < \alpha_{1,2}$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes positives telles que : $c_3^p \leqslant -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)$ et $c_1^q \leqslant -c_4\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)$.

(u, v) une sur-solution positive pour le système (S2) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$, en effet,

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_1 \frac{u}{|x|^2} &= -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-\tau_1-2} = -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-p\alpha_{1,2}} \\ &\geqslant (c_3|x|^{-\alpha_{1,2}} - c_4|x|^{-\tau_2})^p = v(x)^p. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda_2 \frac{v}{|x|^2} &= -c_4\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-\tau_2-2} = -c_4\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-q\alpha_{1,1}} \\ &\geqslant (c_1|x|^{-\alpha_{1,1}} - c_2|x|^{-\tau_1})^q = u(x)^q. \end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ **cas :** $q^+ < q < \bar{q}$ et $-\alpha_{1,1}(pq-1) + 2p + 2 > 0$, **(zone C)**

Définissons $\tau_1 = p(\alpha_{1,1}q - 2) - 2$ et $\tau_2 = q\alpha_{1,1} - 2$, comme $q^+ < q < \bar{q}$ et $-\alpha_{1,1}(pq-1) + 2p + 2 > 0$ nous avons $\tau_1 < \alpha_{1,1}$ et $\alpha_{1,2} < \tau_2 < \alpha_{2,2}$.

Soient $u(x) = c_1|x|^{-\alpha_{1,1}} - c_2|x|^{-\tau_1}$ et $v(x) = c_3|x|^{-\tau_2}$. avec c_1, c_2, c_3 sont des constantes positives telles que :

$$c_1^q \leqslant c_3\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2) \ \text{ et } \ c_3 \leqslant -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1),$$

(u, v) est une sur-solution positive du système (S2), en effet,

$$-\Delta u - \lambda_1 \frac{u}{|x|^2} = -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-\tau_1-2} = -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-p\tau_2} \geqslant v(x)^p.$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda_2 \frac{v}{|x|^2} &= c_3\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-\tau_2-2} = c_3\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-q\alpha_{1,1}} \\ &\geqslant (c_1|x|^{-\alpha_{1,1}} - c_2|x|^{-\tau_1})^q = u(x)^q. \end{aligned}$$

$3^{\text{ème}}$ **cas :** $p^+ < p < \bar{p}$ et $-\alpha_{1,2}(pq-1) + 2q + 2 > 0$, **(zone B)**

Soient $\tau_1 = p\alpha_{1,2} - 2$ et $\tau_2 = q\tau_1 - 2$, comme $p^+ < p < \bar{p}$ et $-\alpha_{1,2}(pq-1) + 2q + 2 > 0$, nous avons $\alpha_{1,1} < \tau_1 < \alpha_{1,1}$ et $\tau_2 < \alpha_{1,2}$.

considérons $u(x) = c_1|x|^{-\tau_1}$ et $v(x) = c_2|x|^{-\alpha_{1,2}} - c_3|x|^{-\tau_2}$ où c_1, c_2, c_3 sont des constantes positives telles que :

$$c_1^q \leqslant -c_3\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2) \ \text{ et } \ c_2^p \leqslant c_1\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1).$$

Dans ce cas (u, v) est une sur-solution positive pour le système (S2), en effet,

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_1 \frac{u}{|x|^2} &= c_1 \mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-\tau_1-2} = c_1 \mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-p\alpha_{1,2}} \\ &\geqslant (c_2|x|^{-\alpha_{1,2}} - c_3|x|^{-\tau_2})^p = v(x)^p, \end{aligned}$$

et

$$-\Delta v - \lambda_2 \frac{v}{|x|^2} = -c_3 \mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-\tau_2-2} = -c_3 \mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-q\tau_1} \geqslant u(x)^q$$

$4^{\text{ème}}$ **cas :** $q = q^+$ et $p < p^+$

Soient $u(x) = c_1|x|^{-\alpha_{1,1}} - |x|^{-\tau_1}$ où $\tau_1 = p\alpha_{1,2} - 2 + \varepsilon < \alpha_{1,1}$ pour un ε assez petit et $v(x) = |x|^{-\alpha_{1,2}}(-\ln|x|)$ avec

$$c_1^q \leqslant (N - 2 - 2\alpha_{1,2})$$

(u, v) est une sur-solution du système (S2), en effet,

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_1 \frac{u}{|x|^2} &= -\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-\tau_1-2} = -\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)|x|^{-p\alpha_{1,2}-\varepsilon} \\ &\geqslant (|x|^{-\alpha_{1,2}}(-\ln|x|))^p = v(x)^p, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda_2 \frac{v}{|x|^2} &= (N - 2 - 2\alpha_{1,2})|x|^{-\alpha_{1,2}-2}, \quad 2 = q\alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} \\ &= (N - 2 - 2\alpha_{1,2})|x|^{-q\alpha_{1,1}} \\ &\geqslant (c_1|x|^{-\alpha_{1,1}} - |x|^{-\tau_1})^q. \\ &= u(x)^q. \end{aligned}$$

$5^{\text{ème}}$ **cas :** $p = p^+$ et $q < q^+$.

Supposons que $u(x) = |x|^{-\alpha_{1,1}}(-\ln|x|)$ et $v = c_1|x|^{-\alpha_{1,2}} - |x|^{-\tau_1}$ où $\tau_1 = q\alpha_{1,1} - 2 + \varepsilon < -\alpha_{1.2}$, pour un ε assez petit avec c_1 est une constante positive vérifie $c_1^p \leqslant (N - 2 - 2\alpha_{1,1})$ Dans ce cas, (u, v) est une sur-solution positive du système (S2), en effet,

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_1 \frac{u}{|x|^2} &= (N - 2 - 2\alpha_{1,1})|x|^{-\alpha_{1,1}-2}, \quad p\alpha_{1,2} - \alpha_{1,1} = 2 \\ &= (N - 2 - 2\alpha_{1,1})|x|^{-p\alpha_{1,2}} \\ &\geqslant (c_1|x|^{-\alpha_{1,2}} - |x|^{-\tau_1})^p \\ &= v(x)^p, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda_2 \frac{v}{|x|^2} &= -\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_1)|x|^{-\tau_1-2} = -\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)|x|^{-q\alpha_{1,1}-\varepsilon} \\ &\geqslant (|x|^{-q\alpha_{1,1}}(-\ln|x|))^q = u(x)^q. \end{aligned}$$

■

Remarque. *Dans le cas de domaines bornés généraux, en utilisant un changement d'échelle, nous pouvons démontrer l'existence d'une sur-solution pour le système* (S2) *sous les mêmes* *conditions que le Théorème 2.4.1. Plus précisément, si* (u, v) *est une sur-solution faible radiale, alors* (u_R, v_R)*, avec*

$$u_R(x) = c_1 u(\frac{x}{R}) \text{ et } v_R(x) = c_2 v(\frac{x}{R}), \quad c_1, c_2 > 0$$

où R *est choisi de sorte que* $\Omega \subset B(0, R)$*, est une sur-solution faible sur* Ω*.*

Chapitre 3

Le système potentiel-gradient : Résultats optimaux d'existence et de non-existence.

Ce chapitre est le développement de la première partie de l'article [16].

3.1 Introduction

Le principal résultat de ce chapitre est de présenter les résultats d'existence et non-existence des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + v^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + |\nabla u|^q & \text{dans } \Omega, \\ u, v &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S3}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, un ouvert borné régulier qui contient l'origine et $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \Lambda_N$, avec $\Lambda_N := \frac{(N-2)^2}{4}$ est la constante de Hardy.
Pour p, $q > 1$ qui parait être le cas le plus favorable, nous démontrons l'existence d'une courbe critique optimale dans le plan (p, q), qui sépare aussi les régions d'existence et de non-existence pour le système (S3). Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Ce chapitre est structuré comme suit : Nous rappelons en premier lieu quelques inégalités pour le développement de notre processus. Dans la Section 3.2, nous énonçons et démontrons le résultat principal de non-existence pour le système (S3). Une fois que la région de non-existence est identifiée, nous prouvons l'existence d'une sur-solution dans la région complémentaire dans la section 3.3. Cela sera atteint en considérant le cas $\Omega = B_1(0)$ et en cherchant, tout d'abord, des super-solutions radiales, puis un argument de mise à l'échelle nous permet de traiter le cas général où Ω n'est pas nécessairement une boule.

Dans ce cas, le système dépend du terme de gradient $|\nabla u|^q$, pour pouvoir appliquer le processus utilisé dans le chapitre précédente nous avons besoin de la version suivante de l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg :
-L'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg : [Théorème 1.2.8]
Supposons que $1 < \sigma < N$ et soit $-\infty < \gamma < \frac{N-\sigma}{\sigma}$. Alors, il existe une constante positive $C = C(\Omega, N, \sigma, \gamma)$ telle que pout tout $u \in W^{1,\sigma}(\Omega, |x|^{-\sigma\gamma}) \cap L^1(\Omega)$, nous avons :

$$C(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_\Omega |u(x)| dx \right)^\sigma .$$

3.2 Résultats de non-existence : Courbe optimale

Notre objectif est de montrer l'existence d'une courbe critique $H(p,q)$ telle que l'existence et la non-existence de solutions du système précédent dépendant de la position de (p,q) par rapport à cette courbe.
Commençons par définir les constantes suivantes.

$$p^+ := \frac{2+\alpha_1}{\alpha_1}, \quad q^+ := \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1} \tag{3.2.1}$$

et

$$\bar{p} := \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \bar{q} := \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1}. \tag{3.2.2}$$

où α_1, α_2 sont définies dans (1.3.2). Notons que $N - \alpha_1 = \alpha_2 + 2$. Les constantes dans (3.2.1) (3.2.2) ont été introduites pour la première fois dans [20] et [5].
La première région de non-existence dans le plan (p,q) sera la suivante :

Théorème 3.2.1. *Soit $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$ fixé, supposons $p, q > 1$ telles que soit $p \geqslant \bar{p}$ ou $q \geqslant \bar{q}$. Alors le système (S3) n'admet pas de solution faible positive dans le sens de la Définition 1.2.6.*

Proposition 3.2.2. *Supposons que $1 < \sigma < N$ et soit $-\infty < \gamma < \frac{N-\sigma}{\sigma}$.*
Si $\sigma(\gamma+1) < N$ alors

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_\Omega |u(x)| dx \right)^\sigma .$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que le système (S3) possède une solution faible positive (u, v). Nous avons deux cas :

Premier cas : Supposons que $q \geqslant \bar{q}$. En utilisant l'équation vérifiée par v et le Lemme 1.3.1, nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q |x|^{-\alpha_1}\, dx < \infty.$$

Puisque $\alpha_1 < \frac{N-q}{q}$, nous pouvons utiliser le Théorème 1.2.8. Pour un r assez petit tel que $B_r(0) \subset\subset \Omega$, il existe une constante positive $C(r, \Omega)$ telle que :

$$\int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^q} |x|^{-\alpha_1}\, dx \leqslant C \int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-\alpha_1}\, dx + \left(\int_{B_r(0)} u dx \right)^q < \infty. \tag{3.2.3}$$

Rappelons que $-\Delta u - \lambda \dfrac{u}{|x|^2} \geqslant 0$, alors d'après le Lemme 1.3.1, il existe une constante positive $\bar{C}(r)$ telle que $u(x) \geqslant \bar{C} |x|^{-\alpha_1}$ dans $B_r(0)$. En revenant à (3.2.3), nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\alpha_1 + q + \alpha_1}}\, dx < \infty. \tag{3.2.4}$$

Comme $q \geqslant \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1} = \bar{q}$, alors $q\alpha_1 + q + \alpha_1 \geqslant N$, ce qui est en contradiction avec (3.2.4). Par conséquent, le résultat de la non-existence découle dans ce cas.

Deuxième cas : Supposons que $p \geqslant \bar{p}$. D'après l'équation vérifiée par u et le Lemme 1.3.2, nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} v^p |x|^{-\alpha_1}\, dx < \infty.$$

Comme $-\Delta v - \lambda \dfrac{v}{|x|^2} \geqslant 0$, en utilisant le Lemme 1.3.1, on trouve :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_1 + \alpha_1}}\, dx < \infty. \tag{3.2.5}$$

Comme $p \geqslant \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1} = \bar{p}$, alors $p\alpha_1 + \alpha_1 \geqslant N$. Ce qui nous conduit à une contradiction avec l'hypothèse (3.2.5). D'où la démonstration du Théorème 3.2.1. ∎

La région déduite par le Théorème 3.2.1 n'est pas optimale, dans le sens où la non-existence peut tenir dans un ensemble plus large du plan (p, q). Notre objectif dans ce qui suit est d'améliorer les résultats précédents, en montrant l'existence d'une courbe critique qui sépare les régions d'existence/non-existence. Nous allons montrer que si le système (S3) admet une solution (u, v), nous pouvons construire, en utilisant un processus approprié deux suites croissantes $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\int_{\Omega} \frac{u}{|x|^{a_n}}\, dx < \infty \text{ et } \int_{\Omega} \frac{v}{|x|^{b_n}}\, dx < \infty.$$

Ce processus nous permet de trouver la courbe optimale d'existence dans le plan $(p,\, q)$. Afin de simplifier la présentation, nous définissons

$$\mathcal{H}_1(p,q) = \frac{\alpha_1+1}{pq} + \frac{2}{q} - (\alpha_1+1) \text{ et } \mathcal{H}_2(p,q) = \frac{\alpha_1+2}{pq} + \frac{1}{p} - \alpha_1.$$

Nous considérons les ensembles :

$$A = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tel que } 1 < p < p^+ \text{ et } 1 < q < q^+\Big\},$$

$$B = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tel que } p^+ < p < \bar{p}\ ,\ 1 < q < q^+ \text{ et } \mathcal{H}_2(p,q) \geqslant 0\Big\},$$

$$C = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tel que } 1 < p < p^+\ ,\ q^+ < q < \bar{q} \text{ et } \mathcal{H}_1(p,q) \geqslant 0\Big\}.$$

La région qui représente la partie non-existence est ${\mathbb{R}^+}^2 \setminus \overline{(A \cup B \cup C)}$.

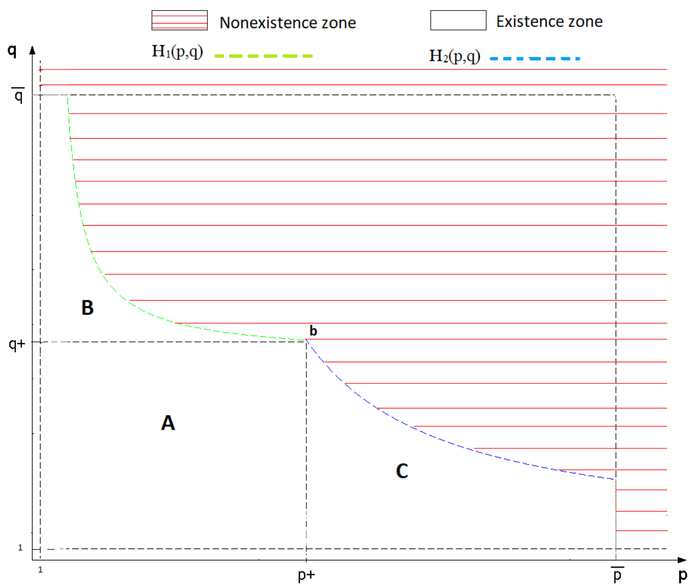

Figure 3.1 – Zones d'Existence et de Non-existence pour le système (S3)

Le résultat principal de cette partie est le Théorème de non-existence suivant :

Théorème 3.2.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné tel que $0 \in \Omega$ et $N \geqslant 3$. Supposons que $0 < \lambda < \Lambda_N$ et $p, q > 0$ satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $\mathcal{H}_2(p,q) < 0$, *c'est-à-dire* $q > \dfrac{\alpha_1+2}{p\alpha_1 - 1}$

II) $q^+ < q < \bar{q}$ *et* $\mathcal{H}_1(p,q) < 0$, *c'est-à-dire* $p > \dfrac{\alpha_1+2}{q(\alpha_1+1) - 2}$,

Alors, le système (S3) n'admet pas de solutions faibles positives dans le sens de la Définition 1.2.6.

Démonstration. Supposons par l'absurde que le système (S3) admet une solution (u, v). D'après le Lemme 1.3.2 nous avons

$$\int_\Omega v^p |x|^{-\alpha_1}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\alpha_1}\, dx < \infty. \tag{3.2.6}$$

Revenons au résultat de non-existence présenté dans le Théorèmre 3.2.1, nous pouvons supposer que $p < \bar{p} := \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1}$ et $q < \bar{q} := \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1}$.

I- **Premier cas :** $p^+ < p < \bar{p}$ **et** $\mathcal{H}_2(p, q) < 0$

La démonstration sera présentée en plusieurs étapes.

• *Étape* 1. Définissons $a_0 = b_0 = \alpha_1 + 2$, alors nous affirmons l'existence de $a_1 > a_0$ et $b_1 > b_0$ tels que

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\, dx < \infty \text{ où } a_0 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p}, \tag{3.2.7}$$

et

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty \text{ où } b_0 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_0 - 2}{q} + 1. \tag{3.2.8}$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder et (3.2.6) nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\, dx = \int_\Omega v \frac{|x|^{\frac{\alpha_1}{p}}}{|x|^{a_1}} |x|^{-\frac{\alpha_1}{p}}\, dx &\leqslant \left[\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{\alpha_1}}\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |x|^{(\frac{\alpha_1}{p} - a_1)p'}\, dx\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant C \left[\int_\Omega |x|^{(\frac{\alpha_1}{p} - a_1)p'}\, dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, cette intégrale est finie si

$$(a_1 - \frac{\alpha_1}{p})p' < N.$$

c'est à dire

$$\alpha_1 + 2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p}.$$

Comme $\frac{\alpha_1+2}{\alpha_1} < p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1}$, alors $2 + \alpha_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} < \alpha_2 + 2$. D'où nous avons démontré la première affirmation.

Nous prouvons maintenant l'existence de $\alpha_1 + 2 < b_1 < \alpha_2 + 2$ avec

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty. \tag{3.2.9}$$

Fixons a_1 définie ci-dessus et considérons η_1 la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta \eta_1 - \lambda \dfrac{\eta_1}{|x|^2} = \dfrac{1}{|x|^{a_1}} & \text{dans } \Omega, \\ \eta_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\eta_1(x) \backsimeq \dfrac{c}{|x|^{a_1-2}}$ au voisinage de l'origine. En utilisant η_1 comme fonction test dans l'équation vérifiée par v dans le système (S3), nous obtenons

$$\int_\Omega \left(-\Delta\eta_1 - \lambda\frac{\eta_1}{|x|^2}\right) v\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^q \eta_1\,dx.$$

Rappelons (3.2.7), nous avons

$$C\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-a_1+2}\,dx \leqslant \int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty. \tag{3.2.10}$$

Par conséquent, d'après le Théorème 1.2.8, nous concluons que

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q}|x|^{-a_1+2}\,dx < \infty. \tag{3.2.11}$$

À présent, nous utilisons l'inégalité de Hölder et le Théorème 1.2.7 et (3.2.11) pour trouver une estimation de b_1, en effet

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx &= \int_\Omega \frac{u}{|x|}\frac{|x|^{\frac{a_1-2}{q}}}{|x|^{b_1-1}}|x|^{\frac{-a_1+2}{q}}\,dx \\
&\leqslant C\left[\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q}|x|^{-a_1+2}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |x|^{(\frac{a_1-2}{q}-b_1+1)q'}\,dx\right]^{\frac{1}{q'}} \\
&\leqslant C\left[\int_\Omega |\nabla u|^q|x|^{-a_1+2}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |x|^{(\frac{a_1-2}{q}-b_1+1)q'}\,dx\right]^{\frac{1}{q'}}.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie si

$$\Big(b_1 - 1 - \frac{a_1-2}{q}\Big)q' < N.$$

c'est à dire,

$$b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} + 1.$$

Rappelons que $\alpha_1 + 2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} := a^*$. Nous allons montrer qu'on peut choisir a_1 proche de a^* tel que $\frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2$ et choisir b_1 tel que

$$b_0 = \alpha_1 + 2 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} + 1.$$

Tout d'abord, montrons que

$$\frac{N}{q'} + \frac{a^*-2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2. \tag{3.2.12}$$

Par hypothèse, nous avons $\frac{\alpha_1+2}{\alpha_1} < p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1} = \bar{p}$, alors (3.2.12) équivaut à avoir $q > \frac{N+2p-\alpha_1}{p(N-(\alpha_1+1))}$.
Comme $q > \frac{\alpha_1+2}{p\alpha_1-1}$, alors si

$$\frac{\alpha_1+2}{p\alpha_1-1} > \frac{N+2p-\alpha_1}{p(N-(\alpha_1+1))}, \tag{3.2.13}$$

nous obtenons l'inégalité souhaitée. Remarquons que (3.2.13) équivaut au fait que $p < \frac{N}{\alpha_1}\frac{2p+1}{2p+3} - \frac{1}{2p+3}$. Ainsi, il nous reste à montrer la dernière estimation sous l'hypothèse principale sur p, en effet, comme $p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1}$, alors $p+1 < \frac{N}{\alpha_1}$, du coup nous avons

$$(p+1)\frac{2p+1}{2p+3} < \frac{N}{\alpha_1}\frac{2p+1}{2p+3}$$

Après un simple calcul, nous obtenons

$$p(1-\frac{2}{2p+3}) < \frac{N}{\alpha_1}(1-\frac{2}{2p+3}) - (1-\frac{2}{2p+3}).$$

donc

$$p < \frac{N}{\alpha_1}(1-\frac{2}{2p+3}) - \frac{2p+1}{2p+3} + \frac{2p}{2p+3}.$$

Par conséquent, l'estimation $p < \frac{N}{\alpha_1}\frac{2p+1}{2p+3} - \frac{1}{2p+3}$ est vérifiée.
Ce qui nous conduit à conclure que $\frac{N}{q'} + \frac{a^*-2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2$. Donc nous pouvons choisir $a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p}$, tel que $\frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2$. En conséquence, nous pouvons choisir b_1 tel que

$$\alpha_1 + 2 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} + 1 < \alpha_2 + 2.$$

- *Étape* 2. Maintenant, nous démontrons l'existence de $a_2 > a_1$ tel que

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\,dx < \infty.$$

Fixons tout d'abord (a_1, b_1) définies dans la première étape et soit θ_1, la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\theta_1 - \lambda\dfrac{\theta_1}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{b_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta_1 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors, $\theta_1(x) \backsimeq \dfrac{C}{|x|^{b_1-2}}$ au voisinage de 0. Utilisons θ_1 comme fonction test dans l'équation vérifiée par u, nous obtenons :

$$\int_\Omega v^p\theta_1\,dx = \int_\Omega \left(-\Delta\theta_1 - \lambda\frac{\theta_1}{|x|^2}\right) u\,dx$$

D'après (3.2.9), nous avons

$$C\int_{B_r(0)} v^p|x|^{-b_1+2}\,dx \leqslant \int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty. \tag{3.2.14}$$

D'où, (3.2.14) et l'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\,dx = \int_\Omega v\frac{|x|^{\frac{b_1-2}{p}}}{|x|^{a_2}}|x|^{\frac{-b_1+2}{q}}\,dx \leqslant C\left[\int_\Omega |x|^{(-a_2+\frac{b_1-2}{p})p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Cette intégrale est finie si et seulement si

$$a_2 < \frac{N}{p'} + \frac{b_1-2}{p}.$$

Notons que

$$\frac{N}{p'} + \frac{b_1-2}{p} > \frac{N}{p'} + \frac{b_0-2}{p},$$

alors nous pouvons choisir a_2 tel que

$$\alpha_1 + 2 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{b_0-2}{p} < a_2 < \frac{N}{p'} + \frac{b_1-2}{p} < \alpha_2 + 2.$$

Maintenant, comme dans la définition de b_1, nous obtenons l'existence de b_2 tel que

$$b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1-2}{q} + 1 < b_2 < \frac{N}{q'} + \frac{a_2-2}{q} + 1,$$

et

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_2}}\,dx < \infty.$$

En utilisant un processus itératif, nous obtenons l'existence de deux suites croissantes $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{b_{n-2}-2}{p} < a_n < \dfrac{N}{p'} + \dfrac{b_{n-1}-2}{p}, \\[2ex] \dfrac{N}{q'} + \dfrac{a_{n-1}-2}{q} + 1 < b_n < \dfrac{N}{q'} + \dfrac{a_n-2}{q} + 1. \end{cases} \tag{3.2.15}$$

Par conséquent, d'après les calculs précédents, nous déduisons que

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+a_n-2}}\,dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_n-2}}\,dx < \infty. \tag{3.2.16}$$

Comme, $u, v \geqslant C|x|^{-\alpha_1}$, nous avons

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\alpha_1+q+a_n-2}}\, dx < \infty \text{ et } \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_1+b_n-2}}\, dx < \infty. \tag{3.2.17}$$

Ainsi, il est nécessaire que

$$a_n < N + 2 - q(\alpha_1 + 1) \text{ et } b_n < N + 2 - p\alpha_1.$$

donc nous obtenons l'existence de $\bar{a}$, $\bar{b}$ telles que

$$\bar{a} = \lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \bar{b} = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Revenons à (3.2.15), nous déduisons que

$$\begin{cases} \bar{a} &= \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\bar{b}-2}{p}, \\ \bar{b} &= \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\bar{a}-2}{q} + 1. \end{cases}$$

Par un calcul direct, nous déduisons que

$$\bar{a} = N - \frac{q+2}{pq-1} \text{ et } \bar{b} = N + 1 - \frac{2p+1}{pq-1}.$$

• *Étape 3.* Nous démontrons dans cette partie le résultat principal de la non- existence dans ce cas. Rappelons que nous avons supposé que $q > \frac{\alpha_1+2}{p\alpha_1-1}$.

D'après (3.2.16) et le Lemme 1.3.1, nous avons

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_1+b_n-2}}\, dx \leqslant \int_{\Omega} \frac{v^p}{|x|^{b_n-2}}\, dx < \infty \text{ pour tout } n,$$

ce qui nous donne

$$p\alpha_1 + b_n - 2 < N \text{ pour tout } n,$$

et donc par passage à la limite

$$p\alpha_1 + \bar{b} \leqslant N + 2.$$

Par conséquent, nous pouvons conclure que $q \leqslant \frac{\alpha_1+2}{p\alpha_1-1}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse principale dans le cas I. Cela conclut la preuve du théorème pour le premier cas.

II- **Deuxième cas :** $q^+ < q < \bar{q}$ **et** $\mathcal{H}_1(p, q) < 0$**.**

Nous suivons les même étapes utilisé dans le premier cas en échangeant le rôle de p et q, en effet

• *Étape* 1. Nous commençons tout d'abord par démontrer l'existence de a_1, b_1, tels que

$$\alpha_1 + 2 < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1}{q} + 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 + 2 < b_1 < \alpha_2 + 2, \tag{3.2.18}$$

avec

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\, dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty. \tag{3.2.19}$$

Comme $q < \frac{N}{\alpha_1+1}$, utilisons (3.2.6) et le Théorème 1.2.8, nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\alpha_1}}\, dx < \infty.$$

Donc, d'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\, dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{1+\frac{\alpha_1}{q}}} \frac{1}{|x|^{a_1-1-\frac{\alpha_1}{q}}}\, dx \; &\leqslant \; \Big(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\alpha_1}}\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_1-1-\frac{\alpha_1}{q})}}\, dx\Big)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant \; c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_1-1-\frac{\alpha_1}{q})}}\, dx\Big)^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}.$$

L'intégrale ci-dessus est finie sous la condition suivante :

$$q'(a_1 - 1 - \frac{\alpha_1}{q}) < N,$$

c'est à dire

$$a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1}{q} + 1. \tag{3.2.20}$$

Comme $q^+ < q < \bar{q}$, nous avons :

$$\alpha_1 + 2 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1}{q} + 1 < \alpha_2 + 2$$

Afin de prouver l'existence de b_1, fixons a_1 définie ci-dessus (3.2.20) et soit ξ_1 la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\xi_1 - \lambda\dfrac{\xi_1}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{a_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \xi_1 &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\xi_1(x) \backsimeq \dfrac{C}{|x|^{a_1-2}}$ au voisinage de l'origine. Utilisons ξ_1 comme fonction test dans l'équation vérifiée par u, nous trouvons

$$\int_\Omega \Big(v^p + \lambda\frac{u}{|x|^2}\Big)\, \xi_1\, dx = \int_\Omega u(-\Delta\xi_1)\, dx.$$

Par conséquent, d'après (3.2.19)

$$\int_\Omega v^p \xi_1 \, dx \leqslant \int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}} \, dx < \infty.$$

Donc

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2}} \, dx < \infty. \tag{3.2.21}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Hölder et (3.2.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}} \, dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\frac{a_1-2}{p}}} \frac{1}{|x|^{b_1 - \frac{a_1-2}{p}}} \, dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2}} \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(b_1 - \frac{a_1-2}{p})}} \, dx \Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant c \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(b_1 - \frac{a_1-2}{p})}} \, dx \Big)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si et seulement si $p'(b_1 - \frac{a_1-2}{p}) < N$. C'est à dire

$$b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p}.$$

Nous avons : $\alpha_1 + 2 < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1}{q} + 1 := a^*$. Montrons qu'on peut choisir a_1 proche de a^* tel que $\frac{N}{p'} + \frac{a_1-2}{p} > \alpha_1 + 2$ et choisir b_1 tel que

$$b_0 = \alpha_1 + 2 < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2}{p}$$

Tout d'abord vérifions que

$$\frac{N}{p'} + \frac{a^* - 2}{p} > \alpha_1 + 2. \tag{3.2.22}$$

Par hypothèse, nous avons $\frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1} < q < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1+1} = \bar{q}$, alors (3.2.22) équivaut à avoir $p > \frac{N+q-\alpha_1}{q(N-\alpha_1-2)}$.
Comme $p > \frac{\alpha_1+2}{q(\alpha_1+1)-2}$, alors si

$$\frac{\alpha_1 + 2}{q(\alpha_1 + 1) - 2} > \frac{N + q - \alpha_1}{q(N - \alpha_1 - 2)}, \tag{3.2.23}$$

nous obtenons l'inégalité souhaitée. Remarquons que (3.2.23) équivaut au fait que

$$q < \frac{N}{\alpha_1 + 1}(1 + \frac{2}{q}) - \frac{3\alpha_1 + 2}{\alpha_1 + 1} - \frac{2\alpha_1}{q(\alpha_1 + 1)}.$$

Ainsi, il nous reste à montrer la dernière estimation sous l'hypothèse principale sur q, en effet, comme $q < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1+1}$, alors $q < \frac{N}{\alpha_1+1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$, du coup nous avons :

$$q(1+\frac{2}{q}) < \frac{N}{\alpha_1+1}(1+\frac{2}{q}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}(1+\frac{2}{q})$$

Après un simple calcul, nous obtenons

$$q < \frac{N}{\alpha_1+1}(1+\frac{2}{q}) - \frac{\alpha_1 q + 2\alpha_1}{q(\alpha_1+1)} - 2.$$

donc

$$q < \frac{N}{\alpha_1+1}(1+\frac{2}{q}) - \frac{3\alpha_1+2}{\alpha_1+1} - \frac{2\alpha_2}{q(\alpha_1+1)}.$$

Par conséquent, l'estimation (3.2.23) est vérifiée.
Ce qui nous conduit à conclure que $\frac{N}{p'} + \frac{a^*-2}{p} > \alpha_1 + 2$. Donc nous pouvons choisir $a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1}{q} + 1$, tel que $\frac{N}{p'} + \frac{a_1-2}{p} > \alpha_1 + 2$. En conséquence, nous pouvons choisir b_1 tel que

$$\alpha_1 + 2 < b_0 < \frac{N}{p'} + \frac{a_0-2}{p} < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1-2}{p}.$$

Ainsi, en argumentant comme pour le premier cas, nous pouvons définir deux suites croissantes $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geqslant 2$, nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{a_{n-1}-2}{p} & < b_n < & \dfrac{N}{p'} + \dfrac{a_n-2}{p}. \\ \\ \dfrac{N}{q'} + \dfrac{b_{n-2}-2}{q} + 1 & < a_n < & \dfrac{N}{q'} + \dfrac{b_{n-1}-2}{q} + 1. \end{cases} \tag{3.2.24}$$

De la même façon nous obtenons,

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+b_n-2}}\,dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_n-2}}\,dx < \infty. \tag{3.2.25}$$

Comme $u, v \geqslant C|x|^{-\alpha_1}$, nous avons le résultat suivant,

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\alpha_1+q+b_n-2}}\,dx < \infty \text{ et } \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_1+a_n-2}}\,dx < \infty.$$

Ce qui nous donne

$$b_n < N + 2 - q(\alpha_1+1) \text{ et } a_n < N + 2 - p\alpha_1. \tag{3.2.26}$$

Soient $a_n \to \hat{a}$ et $b_n \to \hat{b}$ (quand $n \to \infty$). D'après (3.2.24), par passage à la limite, nous obtenons,

$$\hat{a} = N + 1 - \frac{2p-1}{pq-1} \text{ et } \hat{b} = N - \frac{q+2}{pq-1}. \tag{3.2.27}$$

• *Étape* 2. Nous pouvons à ce stade là, compléter la démonstration de la non existence, en effet, rappelons que nous avons supposé que $p > \dfrac{\alpha_1+2}{q(\alpha_1+1)-2}$.
En utilisant (3.2.26), nous avons,

$$q(\alpha_1+1)+\hat{b}-2 < N.$$

Donc,

$$q(\alpha_1+1)+\hat{b} \leqslant N+2.$$

Revenons à (3.2.27), nous obtenons $p \leqslant \dfrac{\alpha_1+2}{q(\alpha_1+1)-2}$ ce qui conduit à une contradiction avec l'hypothèse sur p. D'où la démonstration de ce Théorème. ■

Dans ce qui suit, nous présentons la preuve de la Proposition 3.2.2.

Démonstration. Pour le système (S3), nous avons $p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1}$ et $q < \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1}$
Rappelons que : $u(x), v(x) \geqslant c|x|^{-\alpha_1}$ dans $B_1(0)$. Si (u,v) existe alors :

$$\int_\Omega v^p|x|^{-\alpha_1}dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q|x|^{-\alpha_1}\,dx < \infty. \tag{3.2.28}$$

d'un autre cotè, l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* est sous la forme suivante :

$$\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}}dx \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma|x|^{-\sigma\gamma}dx + \left(\int\limits_\Omega |u(x)|dx\right)^\sigma.$$

si et seulement si :

$$\sigma(\gamma+1) < N \Leftrightarrow \gamma < \frac{N-\sigma}{\sigma}.$$

Revenons au système (S3), comme $\gamma = \frac{\alpha_1}{q} < \frac{N-q}{q} \Leftrightarrow q < N-\alpha_1$
d'après l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg*,

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\alpha_1}}\,dx < \infty \tag{3.2.29}$$

Nous obtenons aussi en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_1}}\,dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}}\,dx < \infty. \tag{3.2.30}$$

avec un choix bien précis de μ_1 et ν_1
Pour définir $-\Delta\eta - \lambda\frac{\eta}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^{\nu_1}}$, on utilise $\nu_1+\alpha_1 < N \Leftrightarrow \nu_1 < N-\alpha_1$
Afin d'utiliser η comme fonction test, Nous pouvons procéder par approximation, puisque $\int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}}\,dx < \infty$, alors, indépendamment de la forme de la non-linéarité et de l'intégration

par parties, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} v(-\Delta\eta - \lambda\frac{\eta}{|x|^2})dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^q \eta dx$$

donc

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q |x|^{-(\nu_1-2)} dx < \infty$$

Si $\frac{\nu_1-2}{q} < \frac{N-q}{q} \Leftrightarrow \nu_1 - 2 < N-q \Leftrightarrow \nu_1 + q < N+2$, alors nous pouvons utiliser l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* Si $\nu_1 + q \geqslant N+2 \Leftrightarrow \nu_1 - 2 \geqslant N-q$ donc

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-(\nu_1-2)} dx \geqslant c \int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-(N-q)+q\varepsilon} dx, \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

nous avons $\frac{N-q-q\varepsilon}{q} < \frac{N-q}{q}$, donc nous pouvons appliquer l'inégalité de CKN pour l'intégrale $\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-(N-q)+q\varepsilon} dx$, nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^{q+(N-q-q\varepsilon)}} < \infty \Rightarrow \int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^{N-q\varepsilon}} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

d'un autre part, nous avons $u(x) \geqslant c|x|^{\alpha_1}$ dans $B_1(0)$ donc

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{N+q\alpha_1-q\varepsilon}} < \infty \Rightarrow \alpha_1 < \varepsilon$$

donc ce résultat est impossible dans le cas où $\varepsilon < \alpha_1$, d'où nous pouvons conclure qu'on peut supposer $\nu_1 < \frac{N-q}{q}$. □

Dans le cas critique $\lambda = \Lambda_N$, nous avons $\alpha_1 = \alpha_2$, les régions B et C sont vides pour ce cas. Plus précisément, nous présentons le résultat suivant :

Théorème 3.2.4. *Si $\lambda = \Lambda_N$, supposons que $p, q > 1$ tels que :*
soit $p \geqslant \frac{N+2}{N-2}$ ou $q \geqslant \frac{N+2}{N}$. Alors le système (S3) n'admet pas de solution positive faible au sens de la Définition 1.2.6.

Pour la démonstration de ce Théorème, nous suivons les même démarches présentées dans la preuve du Théorème 3.2.1 avec $\bar{p} = \frac{N+2}{N-2}$ et $\bar{q} = \frac{N+2}{N}$.

3.3 Résultats d'existence : sur-solutions radiales

Le but de cette sous-section est de montrer que les résultats de non-existence obtenus dans le Théorème 3.2.3 sont optimaux. Plus précisément, nous allons construire des sur-solutions pour le système (S3) dans la région complémentaire du plan (p, q). Pour ce faire, nous considérons d'abord le cas radial $\Omega = B_1(0)$.

Théorème 3.3.1. *Supposons que* $\Omega = B_1(0)$, $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$ *et* $p, q > 1$ *satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $1 < p < p^+$ *et* $1 < q < q^+$,

II) $q^+ \leqslant q < \bar{q}$ *et* $p < \dfrac{\alpha_1 + 2}{q(\alpha_1 + 1) - 2}$, *ou*

III) $p^+ \leqslant p < \bar{p}$ *et* $q < \dfrac{\alpha_1 + 2}{p\alpha_1 - 1}$.

Alors le système (S3) *admet au moins une sur-solution faible positive.*

Démonstration. La preuve sera donnée en plusieurs étapes en fonction des valeurs de p et q.

1. **La zone** A **:** $1 < p < p^+$ **et** $1 < q < q^+$**.**

   Soient $\beta > 0$ tel que $\alpha_1 < \beta < \min\{\frac{2}{p-1}, \frac{2-q}{q-1}\}$ et $(u(x), v(x)) = (c_1|x|^{-\beta}, c_2|x|^{-\beta})$ avec c_1, c_2 sont deux constantes positives satisfaisant

$$c_1\mathcal{P}(\beta) \geqslant c_2^p \text{ et } c_2\mathcal{P}(\beta) \geqslant c_1^q \geqslant \beta^q, \tag{3.3.1}$$

   où $\mathcal{P}$ est définie dans (1.3.1).

   Nous avons,

$$-\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} = c_1\mathcal{P}(\beta)|x|^{-\beta-2}.$$

   En utilisant le fait que $1 < p < \frac{\alpha_1+2}{\alpha_1} = p^+$, nous obtenons l'existence d'un $\beta > \alpha_1$ tel que $\beta < \frac{2}{p-1}$. D'après (3.3.1),

$$-\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} \geqslant v^p.$$

   Nous avons aussi,

$$-\Delta v - \lambda\frac{v}{|x|^2} = c_2\mathcal{P}(\beta)|x|^{-\beta-2}.$$

   Comme $1 < q < q^+$, nous choisissons $\beta < \frac{2-q}{q-1}$, pour obtenir

$$-\Delta v - \lambda\frac{v}{|x|^2} \geqslant |\nabla u|^q.$$

   D'où, le résultat pour ce cas est obtenu.

2. **La zone** B **:** $q^+ < q < \bar{q}$ **et** $p < \dfrac{\alpha_1 + 2}{q(\alpha_1 + 1) - 2}$**.**

   Définissons $\bar{\tau} := (\alpha_1+1)q-2$ et $\tau_p := ((\alpha_1+1)q-2)p-2$. Comme $q^+ < q < \bar{q}$, alors $\alpha_1 < \bar{\tau} < \alpha_2$. et en considérant que $p < \dfrac{\alpha_1 + 2}{q(\alpha_1 + 1) - 2}$, nous déduisons que $\tau_p < \alpha_1$.

   Soient

$$u(x) = c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau_p} \text{ et } v(x) = c_3|x|^{-\bar{\tau}},$$

avec c_1, c_2, c_3 sont les constantes positives telles que

$$(c_1\alpha_1)^q < c_3\mathcal{P}(\bar{\tau}) \text{ et } c_3^p < -c_2\mathcal{P}(\tau_p).$$

$(u,\, v)$ est une sur-solution du système (S3). En effet, nous utilisons la définition de τ_p et $\mathcal{P}(\cdot)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} = -c_2\mathcal{P}(\tau_p)|x|^{-\tau_p-2} &= -c_2\mathcal{P}(\tau_p)|x|^{-p\bar{\tau}} \\ &\geqslant c_3^p|x|^{-p\bar{\tau}} = v^p. \end{aligned}$$

D'un autre coté, utilisons la définition de $\bar{\tau}$, nous avons,

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda\frac{v}{|x|^2} = c_3\mathcal{P}(\bar{\tau})|x|^{-\bar{\tau}-2} &= c_3\mathcal{P}(\bar{\tau})|x|^{(-\alpha_1-1)q} \\ &\geqslant |c_1\alpha_1|x|^{-\alpha_1-1} - c_2\tau_p|x|^{-\tau_p-1}|^q = |\nabla u|^q. \end{aligned}$$

D'où $(u,\, v)$ est une sur-solution du système (S3).

3. **La zone** C **:** $p^+ < p < \bar{p}$ **et** $q < \dfrac{\alpha_1+2}{p\alpha_1-1}$**.**

Soient $\bar{\tau} := p\alpha_1 - 2$ et $\tau_q := q(p\alpha_1-1) - 2 = (\bar{\tau}+1)q - 2$. Comme $p^+ < p < \bar{p}$, $\alpha_1 < \bar{\tau} < \alpha_2$. En tenant en considération que $q < \dfrac{\alpha_1+2}{p\alpha_1-1}$, nous avons $\tau_q < \alpha_1$. Définissons

$$u(x) = c_3|x|^{-\bar{\tau}} \text{ et } v(x) = c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau_q},$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes positives telles que

$$(c_1)^p < c_3\mathcal{P}(\bar{\tau}), (c_3(\bar{\tau}))^q < -c_2\mathcal{P}(\tau_q) \text{ et } c_1 \geqslant c_2$$

Nous démontrons que $(u,\, v)$ est une sur-solution faible du système (S3). En effet, utilisons la définition de $\bar{\tau}$ et $\mathcal{P}(\cdot)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} = c_3\mathcal{P}(\bar{\tau})|x|^{-\bar{\tau}-2} &= c_3\mathcal{P}(\bar{\tau})|x|^{-\alpha_1 p} \geqslant c_1^p|x|^{-\alpha_1 p} \\ &\geqslant |c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau_q}|^p = v^p. \end{aligned}$$

D'un autre coté, utilisons la définition de τ_q, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda\frac{v}{|x|^2} = -c_2\mathcal{P}(\tau_q)|x|^{-\tau_q-2} &= -c_2\mathcal{P}(\tau_q)|x|^{-q(\bar{\tau}+1)} \\ &\geqslant (c_3(\bar{\tau}))^q|x|^{-q(\bar{\tau}+1)} = |\nabla u|^q. \end{aligned}$$

Donc $(u,\, v)$ est une sur-solution du système (S3).

4. **Le segment** $[p^+, b)$ **:** $p = p^+$ **et** $1 < q < q^+$**.**
Soit $\tau' = q(\alpha_1 + 1) - 2 + \varepsilon < \alpha_1$, pour un ε assez petit, définissons

$$u(x) = |x|^{-\alpha_1}(-\ln|x|) \text{ et } v(x) = c_1|x|^{-\alpha_1} - |x|^{-\tau'},$$

où $c_1^p \leqslant N - 2 - 2\alpha_1$. Alors

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} &= (N-2-2\alpha_1)|x|^{-\alpha_1-2} \\ &= (N-2-2\alpha_1)|x|^{-\alpha_1 p} \\ &\geqslant (c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau'})^p = v^p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda\frac{v}{|x|^2} = -\mathcal{P}(\tau')|x|^{-\tau'-2} &= -\mathcal{P}(\tau')|x|^{(-\alpha_1-1)q-\varepsilon} \\ &\geqslant (|x|^{-\alpha_1-1}|\alpha_1 \ln|x| - 1|)^q = |\nabla u|^q. \end{aligned}$$

Donc (u, v) est une sur-solution faible du système (S3).

5. **Le segment** $[q^+, b)$ **:** $q = q^+$ **et** $1 < p < p^+$**.**
Soient $u(x) = c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau''}$ et $v(x) = |x|^{-\alpha_1}(-\ln|x|)$ où $\tau'' = p\alpha_1 - 2 + \varepsilon < \alpha_1$ pour un ε assez petit.
Supposons que $(\alpha_1 c_1)^q \leqslant N - 2 - 2\alpha_1$ et $c_2 > 0$. Alors

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} = -c_2\mathcal{P}(\tau'')|x|^{-\tau''-2} &= -c_2\mathcal{P}(\tau'')|x|^{-p\alpha_1-\varepsilon} \\ &\geqslant (|x|^{-\alpha_1}(-\ln|x|))^p \\ &= v^p. \end{aligned}$$

D'un autre coté,

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda\frac{v}{|x|^2} = (N-2-2\alpha_1)|x|^{-\alpha_1-2} &= (N-2-2\alpha_1)|x|^{-(\alpha_1+1)q} \\ &\geqslant |-c_1\alpha_1|x|^{-\alpha_1-1} + c_2\tau''|x|^{-\tau''-1}|^q \\ &= |\nabla u|^q \end{aligned}$$

D'où (u, v) est une sur-solution du système (S3).

■

Nous traitons maintenant le cas où $\lambda = \Lambda_N$, alors $p^+ = \bar{p} = \frac{N+2}{N-2}$ et $q^+ = \bar{q} = \frac{N+2}{N}$. Pour ce cas, les régions B et C sont vides. Par conséquent, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.3.2. *Soient $\lambda = \Lambda_N$ et $\Omega = B_\eta(0)$ avec $\eta < 1$. Supposons que $p < p^+ = \frac{2+\alpha_1}{\alpha_1}$ et $q < q^+ = \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}$. Définissons $w(x) = |x|^{-\alpha_1}(\ln(\frac{1}{|x|}))^\beta$ avec $0 < \beta < 1$. Alors ils existent c_1, c_2 telles que :$(u(x), v(x)) = (c_1 w(x), c_2 w(x))$, nous concluons que (u, v) est une sur-solution positive du système (S3).*

Démonstration. Comme $\lambda = \Lambda_N$, alors $\alpha_1 = \frac{N-2}{2}$. Fixons $p < p^+ = \frac{2+\alpha_1}{\alpha_1}$ et $q < q^+ = \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}$, c'est à dire, nous somme dans la zone A. Définissons $w(x) = |x|^{-\alpha_1}(\ln(\frac{1}{|x|}))^\beta$ avec β est une constante positive assez petite que nous choisirons ci-dessous. Comme $\lambda = \Lambda_N$, alors $w \in W^{1,\sigma}(B_\eta(0))$ pour tout $\sigma < 2$. Par un calcul direct, nous obtenons que, pour $|x| < \eta < 1$,

$$-\Delta w - \lambda \frac{w}{|x|^2} = \frac{\beta(1-\beta)}{|x|^{2+\alpha_1}}(\ln(\frac{1}{|x|}))^{\beta-2}$$

et

$$|\nabla w| = |x|^{-\alpha_1-1}\Big(\alpha_1 \ln(\frac{1}{|x|}) + \beta(\ln(\frac{1}{|x|}))^{\beta-1}\Big)$$

Donc

$$w^p(x) = |x|^{-p\alpha_1}(\ln(\frac{1}{|x|}))^{p\beta}$$

et

$$|\nabla w|^q = |x|^{-q(\alpha_1+1)}\Big(\alpha_1 \ln(\frac{1}{|x|}) + \beta(\ln(\frac{1}{|x|}))^{\beta-1}\Big)^q$$

Comme $p < \frac{2+\alpha_1}{\alpha_1}$, $q < \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}$, en posant $(u(x), v(x)) = (c_1 w(x), c_2 w(x))$, avec c_1, c_2 assez petites, nous déduisons que (u, v) est une sur-solution du système (S3). ∎

Remarque. *Dans le cas de domaines bornés généraux, en utilisant un changement d'échelle, nous pouvons démontrer l'existence d'une sur-solution pour le système (S3) sous les mêmes conditions que le Théorème 3.3.1. Plus précisément, si $(u,\, v)$ est une sur-solution faible radiale, alors $(u_R,\, v_R)$, avec*

$$u_R(x) = c_1 u(\frac{x}{R}) \ \text{et}\ v_R(x) = c_2 v(\frac{x}{R}), \quad c_1, c_2 > 0$$

où R est choisi de sorte que $\Omega \subset B(0,R)$, est une sur-solution faible sur Ω.

Remarque. *Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, notre technique peut être utilisée pour trouver la courbe optimale qui sépare la zone d'existence et de non-existence du système suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} & = & v^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v - \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} & = & |\nabla u|^q & \text{dans } \Omega, \\ u,\, v & > & 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Sp3}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, un ouvert borné régulier qui contient l'origine et $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$. Ces résultats peuvent être résumés dans les Théorèmes suivants :

Théorème 3.3.3. *(Résultats de non-existence)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné tel que $0 \in \Omega$ et $N \geqslant 3$. Supposons que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ et $p, q > 1$ satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :

I) $p \geqslant \bar{p}$ *ou* $q \geqslant \bar{q}$,

II) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $q > \frac{\alpha_{1.2}+2}{p\alpha_{1.2}-1}$,

III) $q^+ < q < \bar{q}$ *et* $p > \frac{\alpha_{1,1}+2)}{q(\alpha_{1.1}+1)-2}$.

Alors, le système (Sp3) ne possède pas de solutions faibles positives dans le sens de la Définition 1.2.6.

Théorème 3.3.4. *(Résultats d'existence)*

Supposons que $\Omega = B_1(0)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ et $p, q > 1$ satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :

I) $1 < p < p^+$ *et* $1 < q < q^+$,

II) $p^+ \leqslant p < \bar{p}$ *et* $q < \frac{\alpha_{1.2}+2}{p\alpha_{1.2}-1}$,

III) $q^+ \leqslant q < \bar{q}$ *et* $p < \frac{\alpha_{1,1}+2}{q(\alpha_{1.1}+1)-2}$.

Alors le système (Sp3) admet au moins une sur-solution faible positive.

avec

$$p^+ := \frac{2+\alpha_{1.1}}{\alpha_{1.2}}, \quad \bar{p} := \frac{N-\alpha_{1.1}}{\alpha_{1.2}},$$
$$q^+ := \frac{2+\alpha_{1.2}}{\alpha_{1.1}+1}, \quad \bar{q} := \frac{N-\alpha_{1.2}}{\alpha_{1.1}+1}.$$

où $\alpha_{1,i}$et $\alpha_{2,i}$ pour $i = 1, 2$, sont définies dans 2.3.1.

Chapitre 4

Résultats d'existence et de non-existence du système gradient-gradient.

Ce chapitre est le développement de la deuxième partie de l'article [16].

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié pour l'étude du système gradient-gradient. Plus précisément nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda \dfrac{u}{|x|^2} &= |\nabla v|^p \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v - \lambda \dfrac{v}{|x|^2} &= |\nabla u|^q \quad \text{dans } \Omega, \\ u,\, v &> 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S4}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $p, q > 1$ et $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$. Remarquons que le système (S4) a une structure symétrique.

La principale difficulté pour ce cas, comparé au cas du système (S3), est le fait que nous devons reproduire le processus d'itération dans les deux équations en utilisant en même temps la variante de l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* prouvée dans le Théorème 1.2.8.

Ce chapitre est organisé comme suit : La Section 4.2 est dédiée aux résultats de non-existence pour le système (S4) avec des non-linéarités de type gradient, nous commençons

par déterminer la région de non-existence, cela sera réalisé en utilisant l'inégalité de Hardy pondérée et un processus itératif approprié.
Dans la section 4.3, nous démontrons l'existence des sur-solutions du système (S4) dans la région complémentaire déduite de la section précédente, a travers l'utilisation des sur-solutions radiales pour chaque cas.

4.2 Résultats de non-existence : La courbe optimale

Définissons maintenant les constantes optimales pour le système (S4),

$$p^+ = q^+ = \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}, \qquad \bar{p} = \bar{q} = \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1}.$$

En suivant de près l'approche utilisée dans l'analyse du système (S3), nous commençons cette partie par la construction de la courbe optimale associée au système (S4). La première région de non-existence dans le plan (p, q) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Fixons $0 < \lambda \leqslant \Lambda_N$ et supposons $p, q > 1$ tels que : soit $p \geqslant \bar{p}$ ou $q \geqslant \bar{q}$. Alors le système (S4) n'admet pas de sur-solution positive faible dans le sens de la Définition 1.2.6.*

Proposition 4.2.2. *Supposons que $1 < \sigma < N$ et soit $-\infty < \gamma < \frac{N-\sigma}{\sigma}$.*
Si $\sigma(\gamma+1) < N$ alors

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int_\Omega |u(x)| dx \right)^\sigma.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que le système (S4) admet une solution faible (u, v) au sens de la définition 1.2.6. Utilisons le Lemme 1.3.1, nous obtenons,

$$\int_\Omega |\nabla v|^p |x|^{-\alpha_1} dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\alpha_1} \, dx < \infty. \tag{4.2.1}$$

Puisque $p, q < \frac{N}{\alpha_1+1}$, d'après le Théorème 1.2.8, nous avons,

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q} |x|^{-\alpha_1} \, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^p} |x|^{-\alpha_1} \, dx < \infty. \tag{4.2.2}$$

D'où, nous obtenons d'après (4.2.2) et le Lemme 1.3.1,

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\alpha_1+q+\alpha_1}} \, dx < \infty, \quad \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_1+p+\alpha_1}} \, dx < \infty. \tag{4.2.3}$$

Donc $q < \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1} = \bar{q}$ et $p < \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1} = \bar{p}$, ce qui nous conduit à une contradiction avec les hypothèses supposées. D'où, le résultat de non-existence est obtenu pour ce cas. ■

Pour déterminer la courbe critique exacte, nous suivrons de près les calculs utilisés dans les chapitres précédents. Nous soulignons que pour ce cas, de nouvelles difficultés apparaissent en raison de la présence d'un terme de gradient dans les deux équations. Définissons

$$\mathcal{H}_3(p,q) = \frac{\alpha_1+2}{pq} + \frac{1}{q} - (\alpha_1+1), \qquad \mathcal{H}_4(p,q) = \frac{\alpha_1+2}{pq} + \frac{1}{p} - (\alpha_1+1).$$

et considérons les ensembles suivants :

$$D = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tels que } 1 < p < p^+ \text{ et } 1 < q < q^+\Big\},$$

$$E = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tels que } 1 < p < p^+ \text{ avec } q^+ < q < \bar{q} \text{ et } \mathcal{H}_3(p,q) > 0\Big\}.$$

$$F = \Big\{(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ tels que } p^+ < p < \bar{p} \text{ avec } 1 < q < q^+ \text{ et } \mathcal{H}_4(p,q) > 0\Big\},$$

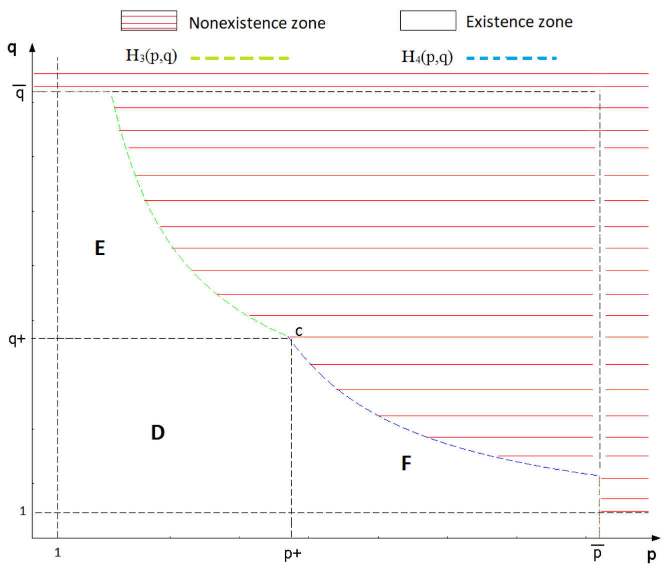

FIGURE 4.1 – Zones d'existence et de non-existence pour le système (S4)

Le résultats principal de non-existence pour le système (S4) est présenté dans le Théorème suivant :

Théorème 4.2.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné tel que $0 \in \Omega$ et $N \geqslant 3$. Supposons que $0 < \lambda < \Lambda_N$ et $p, q > 1$ satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $p^+ < p < \bar{p}$ et $\mathcal{H}_4(p,q) < 0$, c'est à dire $q > \dfrac{\alpha_1 + 2}{p(\alpha_1+1) - 1}$

II) $q^+ < q < \bar{q}$ and $\mathcal{H}_3(p,q) < 0$, c'est à dire $p > \dfrac{\alpha_1 + 2}{q(\alpha_1+1) - 1}$,

Alors, le système (S4) ne possède pas de sur-solutions positives faibles dans le sens de la Définition 1.2.6.

Selon le Théorème 4.2.3, le résultat de la non-existence est valable pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^{+2} \setminus \overline{(D \cup E \cup F)}$.

Remarque. *Observons que la courbe critique présente une symétrie par rapport aux valeurs de p et q ce qui implique que les ensembles E et F sont symétriques par rapport à l'axe $\{p = q\}$.*

Maintenant, de manière similaire au cas du système (S3), l'idée principale de la démonstration est de prouver que toute solution positive (u,v) du système (S4) possède une propriété d'auto-amélioration de la sommabilité. Autrement dit, pour des valeurs appropriées $\nu_0 > \alpha_1$ et $\mu_0 > 0$, nous pouvons construire des suites croissantes $\big(\nu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\mu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_n}}\,dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_n}}\,dx < \infty. \tag{4.2.4}$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que le système (S4) admet une solution (u,v) dans le sens de la définition 1.2.6. D'après le Lemme 1.3.2, nous avons :

$$\int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\alpha_1}\,dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla v|^p |x|^{-\alpha_1}\,dx < \infty. \tag{4.2.5}$$

Comme $u, v \in L^1(\Omega)$ et $p, q < \frac{N}{\alpha_1+1}$, alors en utilisant le Théorème 1.2.8, il s'ensuit que

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\alpha_1}}\,dx < \infty, \quad \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p+\alpha_1}}\,dx < \infty \tag{4.2.6}$$

Tenant en considération le résultat de non-existence présenté dans le Théorème 4.2.1, nous pouvons supposer que $p, q < \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1}$.

I-Premier cas : $p^+ < p < \bar{p}$ et $\mathcal{H}_4(p,q) < 0$:

La démonstration sera effectuée en plusieurs étapes comme suit :

- *Étape* 1. Supposons $\nu_0 = \mu_0 = \alpha_1 + 2$, alors nous affirmons qu'ils existent $\nu_1 > 0, \mu_1 > 0$ tels que :

$$\alpha_1 + 2 < \nu_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} + 1 < \alpha_2 + 2, \tag{4.2.7}$$

et

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}} dx < \infty. \tag{4.2.8}$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder et la relation (4.2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}}\, dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|} \frac{|x|^{\alpha_1+1}}{|x|^{\nu_1}} |x|^{-\alpha_1}\, dx &\leqslant \left[\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p+\alpha_1}}\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |x|^{-(\nu_1-\alpha_1-1)p'-\alpha_1}\, dx\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant C\left[\int_\Omega |x|^{-(\nu_1-\alpha_1-1)p'-\alpha_1}\, dx\right]^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si et seulement si

$$(\nu_1 - \alpha_1 - 1)p' - \alpha_1 < N.$$

Autrement dit,

$$\nu_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} + 1 = \frac{N}{p'} + \frac{\mu_0 - 2}{p} + 1.$$

Comme $p^+ < p < \bar{p}$, alors

$$2 + \alpha_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} + 1 < 2 + \alpha_2.$$

Nous démontrons maintenant l'existence de μ_1 tel que

$$\alpha_1 + 2 < \mu_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_1 - 2}{q} + 1, \tag{4.2.9}$$

et

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_1}} dx < \infty. \tag{4.2.10}$$

En effet, fixons ν_1 définie ci-dessus et soit η_1 la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\eta_1 - \lambda\dfrac{\eta_1}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{\nu_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \eta_1 &= 0 \quad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $\eta_1(x) \backsimeq \dfrac{c}{|x|^{\nu_1-2}}$ au voisinage de l'origine, prenons η_1 comme fonction test dans l'équation vérifiée par v, en utilisant (4.2.8), nous avons :

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-\nu_1+2}\, dx \leqslant \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}}\, dx < \infty. \tag{4.2.11}$$

Par conséquent, d'après le Théorème 1.2.8 nous obtenons :

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q} |x|^{-\nu_1+2}\, dx < \infty. \tag{4.2.12}$$

Utilisons encore une fois l'inégalité de Hölder et le Théorème 1.2.7 pour avoir le résultat suivant :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_1}}\,dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|}\frac{|x|^{\nu_1-2}}{|x|^{\mu_1-1}}|x|^{-\nu_1+2}\,dx \leqslant \ C\left[\int_\Omega |\nabla u|^q|x|^{-\nu_1+2}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |x|^{(\nu_1-\mu_1-1)q'-\nu_1+2}\,dx\right]^{\frac{1}{q'}}$$

Nous avons besoin que :

$$\mu_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_1 - 2}{q} + 1$$

Rappelons que $\alpha_1 + 2 < \nu_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} + 1 := \bar{\nu}$.
Nous montrons qu'on peut prendre ν_1 proche de $\bar{\nu}$ tel que $\frac{N}{q'} + \frac{\nu_1-2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2$ et choisir μ_1 tel que

$$\mu_0 = \alpha_1 + 2 < \mu_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_1 - 2}{q} + 1$$

Tout d'abord, montrons que

$$\frac{N}{q'} + \frac{\bar{\nu} - 2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2. \tag{4.2.13}$$

Par hypothèse, nous avons $\frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1} < p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1+1} = \bar{p}$, alors (4.2.13) équivaut à avoir $q > \frac{N+q-\alpha_1}{p(N-\alpha_1-1)}$.
Comme $q > \frac{\alpha_1+2}{p(\alpha_1+1)-1}$, alors si

$$\frac{\alpha_1 + 2}{p(\alpha_1 + 1) - 1} > \frac{N + p - \alpha_1}{p(N - \alpha_1 - 1)}, \tag{4.2.14}$$

nous obtenons l'inégalité souhaitée. Remarquons que (4.2.14) équivaut au fait que

$$p < \frac{N}{\alpha_1 + 1}(1 + \frac{1}{p}) - \frac{\alpha_1(2p + 1)}{p(\alpha_1 + 1)} - \frac{1}{\alpha_1 + 1}.$$

Ainsi, il nous reste à montrer la dernière estimation sous l'hypothèse principale sur p, en effet, comme $p < \frac{N-\alpha_1}{\alpha_1+1}$, alors $p < \frac{N}{\alpha_1+1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$, du coup nous avons :

$$p(1 + \frac{1}{q}) < \frac{N}{\alpha_1 + 1}(1 + \frac{1}{q}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1}(1 + \frac{1}{q})$$

après un simple calcul, nous obtenons

$$p < \frac{N}{\alpha_1 + 1}(1 + \frac{1}{p}) - \frac{\alpha_1(2p + 1)}{p(\alpha_1 + 1)} - \frac{1}{\alpha_1 + 1}.$$

Par conséquent, l'estimation (4.2.14) est vérifiée.
Ce qui nous conduit à conclure que $\frac{N}{q'} + \frac{\bar{\nu}-2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2$. Donc nous pouvons choisir

$\nu_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\alpha_1}{q} + 1$, tel que $\frac{N}{q'} + \frac{\nu_1 - 2}{q} + 1 > \alpha_1 + 2$. En conséquence, prendre μ_1 de telle sorte,

$$\alpha_1 + 2 = \mu_0 < \frac{N}{p'} + \frac{\nu_0 - 2}{p} < \mu_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\nu_1 - 2}{p} + 1.$$

• *Étape* 2. Fixons maintenant (ν_1, μ_1) définies ci-dessus, nous pouvons démontrer l'existence de $\nu_2 > \nu_1$ tel que

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_2}} < \infty, \tag{4.2.15}$$

et

$$\nu_2 < \frac{N}{p'} + \frac{\mu_1 - 2}{p} + 1 < \alpha_2 + 2. \tag{4.2.16}$$

Soit θ_1 la solution de problème

$$\begin{cases} -\Delta\theta_1 - \lambda\dfrac{\theta_1}{|x|^2} & = & \dfrac{1}{|x|^{\mu_1}} & \text{dans } \Omega, \\ \theta_1 & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\theta_1(x) \backsimeq \dfrac{c}{|x|^{\mu_1 - 2}}$ au voisinage de 0. Donc en utilisant θ_1 comme fonction test dans l'équation vérifiée par u et le comportement de θ_1 prés de l'origine, il en résulte que

$$\int_{B_r(0)} |\nabla v|^p |x|^{-\mu_1 + 2}\, dx < \infty.$$

Comme $p < \frac{N}{\mu_1 + 1}$ alors, d'après le Théorème 1.2.8, nous avons :

$$\int\limits_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p + \mu_1 - 2}} dx < \infty.$$

Donc d'après l'inégalité de Hölder, il s'ensuit que :

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_2}}\, dx = \int_\Omega \frac{v}{|x|^1} \frac{|x|^{\mu_1 - 2}}{|x|^{\nu_2 - 1}} |x|^{-\mu_1 + 2}\, dx \leqslant \left[\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p + \mu_1 - 2}}\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |x|^{(\mu_1 - 2 - \nu_2 + 1)p' - \mu_1 + 2}\, dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Par conséquent, le côté droit est fini si

$$\nu_2 < \frac{N}{p'} + \frac{\mu_1 - 2}{p} + 1.$$

Il est clair que : $\frac{N}{p'} + \frac{\alpha_1}{p} + 1 < \frac{N}{p'} + \frac{\mu_1 - 2}{p} + 1$, donc nous pouvons choisir ν_2 tel que :

$$\alpha_1 + 2 < \nu_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\mu_0 - 2}{p} + 1 < \nu_2 < \frac{N}{p'} + \frac{\mu_1 - 2}{p} + 1 < \alpha_2 + 2.$$

Fixons maintenant ν_2 définie ci-dessus et soit η_2 la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\eta_2 - \lambda\dfrac{\eta_2}{|x|^2} &= \dfrac{1}{|x|^{\nu_2}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \eta_2 &= 0 \quad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappelons que $\eta_2(x) \backsimeq \dfrac{c}{|x|^{\nu_2-2}}$ près de l'origine.
En prenant η_2 comme fonction test dans l'équation vérifiée par v, En suivant les arguments ci-dessus, nous concluons que

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-\nu_2+2}\,dx \leqslant \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_2}}\,dx < \infty.$$

Donc, d'après le Théorème 1.2.8, nous avons

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q}|x|^{-\nu_2+2}\,dx < \infty.$$

Ainsi, comme dans la première étape, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons que

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_2}}\,dx \leqslant C\bigg(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q}|x|^{-\nu_2+2}\,dx\bigg)^{\frac{1}{q}}\bigg(\int_\Omega |x|^{(\nu_2-\mu_2-1)q'-\nu_2+2}\,dx\bigg)^{\frac{1}{q'}}$$

Cette intégrale est finie si et seulement si :

$$\mu_2 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_2 - 2}{q} + 1.$$

En tenant compte de $\frac{N}{q'} + \frac{\nu_1-2}{q} + 1 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_2-2}{q} + 1$, alors nous pouvons choisir μ_2 de telle sorte que

$$\mu_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_1 - 2}{q} + 1 < \mu_2 < \frac{N}{q'} + \frac{\nu_2 - 2}{q} + 1.$$

De manière itérative, nous définissons les suites croissantes $\big(\nu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\mu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\mu_{n-2} - 2}{p} + 1 &< \nu_n &< \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\mu_{n-1} - 2}{p} + 1, \\ \\ \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\nu_{n-1} - 2}{q} + 1 &< \mu_n &< \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\nu_n - 2}{q} + 1. \end{cases} \tag{4.2.17}$$

De plus, pour tout $n \geqslant 0$, nous avons

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\nu_n-2}}\,dx < \infty, \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p+\mu_n-2}}\,dx < \infty. \tag{4.2.18}$$

Rappelons que $u, v \geqslant C|x|^{-\alpha_1}$ dans $B_r(0)$, alors

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\alpha_1+q+\nu_n-2}}\,dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\alpha_1+p+\mu_n-2}}\,dx < \infty. \tag{4.2.19}$$

Donc

$$\nu_n < N + 2 - q(\alpha_1 + 1) \text{ et } \mu_n < N + 2 - p(\alpha_1 + 1). \tag{4.2.20}$$

Par conséquent, nous obtenons l'existence de $\bar{\nu}$, $\bar{\mu}$ tels que

$$\bar{\nu} = \lim_{n\to+\infty} \nu_n \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$$

Par un calcul direct, nous constatons que $\bar{\nu}, \bar{\mu}$ satisfont

$$\begin{cases} \bar{\nu} &= \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\bar{\mu}-2}{p} + 1, \\ \\ \bar{\mu} &= \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\bar{\nu}-2}{q} + 1. \end{cases}$$

Donc

$$\bar{\mu} = N + 1 - \frac{p+1}{pq-1} \text{ et } \bar{\nu} = N + 1 - \frac{q+1}{pq-1}. \tag{4.2.21}$$

- *Étape* 3. Nous sommes maintenant en mesure de terminer la démonstration de la non-existence pour le premier cas I.

Rappelons que $q > \dfrac{\alpha_1+2}{p(\alpha_1+1)-1}$, Par passage à la limite dans la deuxième inégalité dans (4.2.20), nous concluons que

$$\bar{\mu} \leqslant N + 2 - p(\alpha_1 + 1).$$

En utilisant la valeur de $\bar{\mu}$, il s'ensuit que $q \leqslant \dfrac{\alpha_1+2}{p(\alpha_1+1)-1}$, ce qui nous donne une contradiction avec l'hypothèse sur q. D'où la démonstration du résultat de non-existence pour le premier cas du Théorème 4.2.3.

II-**Deuxième cas :** $q^+ < q < \bar{q}$ **et** $\mathcal{H}_3(p,q) < 0$.
Prenant en considération la structure symétrique du système (S4), le résultat de non-existence se démontre en échangeant le rôle de p et q. Cela conclut la preuve du Théorème.
■

Démontrons maintenant la Proposition 4.2.2 :

Démonstration. Pour le système (S4), nous avons $p, q < \frac{N-\alpha_1}{1+\alpha_1}$, $p > \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}$ et $q < \dfrac{\alpha_1+2}{p(\alpha_1+1)-1}$

Rappelons que : $u(x), v(x) \geqslant c|x|^{-\alpha_1}$ dans $B_1(0)$. Si (u,v) existe alors :

$$\int_\Omega |\nabla v|^p |x|^{-\alpha_1} dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\alpha_1}\, dx < \infty. \tag{4.2.22}$$

d'un autre cotè, l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* est sous la forme suivante :

$$\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^\sigma}{|x|^{\sigma(\gamma+1)}} dx \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^\sigma |x|^{-\sigma\gamma} dx + \left(\int\limits_\Omega |u(x)| dx\right)^\sigma.$$

si et seulement si :

$$\sigma(\gamma+1) < N \Leftrightarrow \gamma < \frac{N-\sigma}{\sigma}.$$

Revenons au système (S4), comme $\sigma_1 = \frac{\alpha_1}{q} < \frac{N-q}{q} \Leftrightarrow q < N - \alpha_1$
et $\sigma_2 = \frac{\alpha_1}{p} < \frac{N-p}{p} \Leftrightarrow p < N - \alpha_1$
d'après l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg*,

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\alpha_1}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p+\alpha_1}}\, dx < \infty. \tag{4.2.23}$$

Nous obtenons aussi en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_1}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}}\, dx < \infty. \tag{4.2.24}$$

avec un choix bien précis de μ_1 et ν_1
Pour définir $-\Delta\eta - \lambda\frac{\eta}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^{\nu_1}}$, on utilise $\nu_1 + \alpha_1 < N \Leftrightarrow \nu_1 < N - \alpha_1$
Afin d'utiliser η comme fonction test, Nous pouvons procéder par approximation, puisque $\int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_1}}\, dx < \infty$, alors, indépendamment de la forme de la non-linéarité et de l'intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_\Omega v(-\Delta\eta - \lambda\frac{\eta}{|x|^2}) dx = \int_\Omega |\nabla u|^q \eta dx$$

donc

$$\int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-(\nu_1-2)} dx < \infty$$

Si $\frac{\nu_1-2}{q} < \frac{N-q}{q} \Leftrightarrow \nu_1 - 2 < N - q \Leftrightarrow \nu_1 + q < N+2$, alors nous pouvons utiliser l'inégalité de *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* Si $\nu_1 + q \geqslant N+2 \Leftrightarrow \nu_1 - 2 \geqslant N - q$ donc

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-(\nu_1-2)} dx \geqslant c \int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-(N-q)+q\varepsilon} dx, \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

nous avons $\frac{N-q-q\varepsilon}{q} < \frac{N-q}{q}$, donc nous pouvons appliquer l'inégalité de CKN pour l'intégrale $\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-(N-q)+q\varepsilon} dx$, nous obtenons :

$$\int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^{q+(N-q-q\varepsilon)}} < \infty \Rightarrow \int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^{N-q\varepsilon}} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

d'un autre part, nous avons $u(x) \geqslant c|x|^{\alpha_1}$ dans $B_1(0)$ donc

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{N+q\alpha_1-q\varepsilon}} < \infty \Rightarrow \alpha_1 < \varepsilon$$

donc ce résultat est impossible dans le cas où $\varepsilon < \alpha_1$, d'où nous pouvons conclure qu'on peut supposer $\nu_1 < \frac{N-q}{q}$, idem pour p. $\square$

Dans le cas critique $\lambda = \Lambda_N$, nous avons $p^+ = q^+ = \bar{p} = \bar{q}$ et les zones E et F sont vides. Le résultat de non-existence pour ce cas sera illustré dans le Théorème suivant :

Théorème 4.2.4. *Supposons que $\lambda = \Lambda_N$ et $p, q > 1$ tels que, soit $p \geqslant \frac{N+2}{N}$ ou $q \geqslant \frac{N+2}{N}$. Alors le système (S4) n'admet pas de sur-solutions positives faibles dans le sens de la Définition 1.2.6.*

Pour la démonstration de ce Théorème, nous suivons les même démarches présentées dans la preuve du Théorème 4.2.1 avec $\bar{p} = \bar{q} = \frac{N+2}{N}$.

4.3 Résultats d'existence

Dans cette partie de ce chapitre, nous établissons un résultat d'existence pour le système (S4) dans les régions E, D et F du plan (p, q). En fait, comme détaillé dans le Théorème suivant, nous construirons des sur-solutions en fonction de la position de (p, q).

Théorème 4.3.1. *Supposons que $\Omega = B_1(0)$, $0 < \lambda < \Lambda_N$ et $p, q > 1$ satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $p < p^+$ *et* $q < q^+$

II) $p^+ \leqslant p < \bar{p}$ *et* $q < \frac{\alpha_1+2}{p(\alpha_1+1)-1}$

III) $q^+ \leqslant q < \bar{q}$ *et* $p < \frac{\alpha_1+2}{q(\alpha_1+1)-1}$

Alors, le système (S4) admet au moins une sur-solution positive.

Démonstration. La démonstration sera donnée en cinq cas selon les valeurs de p et de q.

1. **La zone D :** $1 < p < p^+$ **et** $1 < q < q^+$
   Soient $(u(x), v(x)) = (c_1|x|^{-\beta}, c_2|x|^{-\beta})$ où $\alpha_1 < \beta < \min\{\frac{2-p}{p-1}, \frac{2-q}{q-1}\}$ et c_1, c_2 sont des constantes positives telles que

$$c_1 \mathcal{P}(\beta) \geqslant c_2^p \beta^p \text{ et } c_2 \mathcal{P}(\beta) \geqslant c_1^q \beta^q. \tag{4.3.1}$$

(u, v) est une sur-solution du système (S4), en effet,

$$-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = c_1 \mathcal{P}(\beta)|x|^{-\beta-2}$$

Comme $p < \frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1} = p^+$, il existe $\beta > \alpha_1$ tel que $p < \frac{\beta+2}{\beta+1}$, donc,

$$-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} \geqslant c_2 \mathcal{P}(\beta)|x|^{-(\beta+1)p} = |\nabla v|^p.$$

D'autre part, en utilisant le fait que $q < \frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1} = q^+$, nous pouvons fixer $\beta > \alpha_1$ tel que $p < \frac{\beta+2}{\beta+1}$, d'où

$$-\Delta v - \lambda \frac{v}{|x|^2} = c_2 \mathcal{P}(\beta)|x|^{-\beta-2} \geqslant c_1^q \beta^q |x|^{-(\beta+1)q} = |\nabla u|^q$$

2. **La zone F :** $p^+ < p < \bar{p}$ **et** $q < \frac{\alpha_1+2}{p(\alpha_1+1)-1}$**.**
Définissons $(u(x), v(x)) = (c_1|x|^{-\tau_1}, c_2|x|^{-\alpha_1} - c_3|x|^{-\tau_2})$ avec $\tau_1 = p(\alpha_1+1)-2$, $\alpha_1 < \tau_1 < \alpha_2$, $\tau_2 = q(p(\alpha_1+1)-1)-2 < \alpha_1$ et c_1, c_2, c_3 sont des constantes positives choisies de sorte que

$$\begin{cases} c_3 \leqslant c_2 \leqslant \left[\dfrac{\mathcal{P}(\tau_1)(-\mathcal{P}(\tau_2))^{\frac{1}{q}}}{\alpha_1^p \tau_1}\right]^{\frac{q}{pq-1}} \\ \\ c_1 \leqslant \left[\dfrac{\mathcal{P}(\tau_1)(-\mathcal{P}(\tau_2))^p}{\alpha_1^p \tau_1^{pq}}\right]^{\frac{1}{pq-1}}. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

$(u,\ v)$ est une sur-solution faible du système (S4), en effet, d'après les inégalités (4.3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} &= c_1 \mathcal{P}(\tau_1)|x|^{-\tau_1-2} = c_1 \mathcal{P}(\tau_1)|x|^{-(\alpha_1+1)p} \\ &\geqslant |-c_2\alpha_1|x|^{-\alpha_1-1} + c_3\tau_2|x|^{-\tau_2-1}|^p = |\nabla v|^p, \end{aligned}$$

et

$$-\Delta v - \lambda \frac{v}{|x|^2} = -c_3 \mathcal{P}(\tau_2)|x|^{-\tau_2-2} \geqslant c_1^q \tau_1^q |x|^{(-\tau_1-1)q} = |\nabla u|^q.$$

3. **La zone E :** $q^+ < q < \bar{q}$ **et** $p < \frac{\alpha_1+2}{q(\alpha_1+1)-1}$**.**
Soient $(u(x), v(x)) = (c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau_3}, c_3|x|^{-\tau_4})$ où $\tau_3 = p(q(\alpha_1+1)-1)-2 < \alpha_1$, $\tau_4 = q(\alpha_1+1)-2$, $\alpha_1 < \tau_4 < \alpha_2$ et c_1, c_2, c_3 sont les constantes positives satisfaisant :

$$\begin{cases} c_2 \leqslant c_1 \leqslant \left[\dfrac{\mathcal{P}(\tau_4)^p(-\mathcal{P}(\tau_3))}{\alpha_1^{pq}\tau_4^p}\right]^{\frac{1}{pq-1}} \\ \\ c_3 \leqslant \left[\dfrac{\mathcal{P}(\tau_4)(-\mathcal{P}(\tau_3))^q}{\alpha_1^q \tau_4^{pq}}\right]^{\frac{1}{pq-1}}. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

En utilisant (4.3.3), il en résulte que :

$$-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = -c_1 \mathcal{P}(\tau_3)|x|^{-\tau_3 - 2} \geqslant c_3^p \tau_4^p |x|^{-(\tau_4+1)^p} = |\nabla v|^p$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda \frac{v}{|x|^2} = c_3 \mathcal{P}(\tau_4)|x|^{-\tau_4 - 2} \ &\geqslant \ | - c_1 \alpha_1 |x|^{-\alpha_1 - 1} + c_2 \tau_3 |x|^{-\tau_3 - 1}|^q \\ &= \ |\nabla u|^q \end{aligned}$$

Donc, (u, v) est une sur-solution positive du système (S4) pour ce cas.

4. **Le segment** $[p^+, c)$ **:** $p = p^+$ **et** $q < q^+ = \frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1}$**.**
   $(u(x), v(x)) = (|x|^{-\alpha_1}(-\ln|x|), c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau_5})$ est une sur-solution du système (S4) dans $B_1(0)\backslash\{0\}$ avec $\tau_5 = q(\alpha_1+1)-2+\varepsilon < \alpha_1$ pour $\varepsilon << 1$ et c_1, c_2 satisfaisant

$$\frac{\alpha_1^q}{(-\mathcal{P}(\tau_5))} \leqslant c_2 \leqslant c_1 \leqslant \frac{c_3^{\frac{1}{p}}}{\alpha_1} = \frac{[N-2-2\alpha_1]^{\frac{1}{p}}}{\alpha_1}.$$

   En effet,

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} \ &= \ c_3|x|^{-\alpha_1 - 2} \ \text{ où } \ c_3 = N-2-2\alpha_1 \geqslant 0 \\ &= \ c_3|x|^{-(\alpha_1+1)p} \geqslant | - c_1\alpha_1|x|^{-\alpha_1-1} + c_2\tau_5|x|^{-\tau_5-1}|^p \\ &= \ |\nabla v|^p, \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda \frac{v}{|x|^2} \ &= \ -c_2\mathcal{P}(\tau_5)|x|^{-\tau_5-2} = -c_2\mathcal{P}(\tau_5)|x|^{-(\alpha_1+1)q-\varepsilon} \\ &\geqslant \ |x|^{-(\alpha_1+1)q}|\alpha_1(\ln|x|) - 1|^q \ \text{ pour } \ \varepsilon >> 1 \ \text{ et } \ x \in B_1(0)\backslash\{0\} \\ &= \ |\nabla u|^q. \end{aligned}$$

5. **Le segment** $[q^+, c)$ **:** $q = q^+$ **et** $p < p^+ = \frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1}$**.**
   Considérons $(u(x), v(x)) = (c_1|x|^{-\alpha_1} - c_2|x|^{-\tau_6}, |x|^{-\alpha_1}(-\ln|x|))$ avec $\tau_6 = p(\alpha_1 + 1) - 2 + \varepsilon < \alpha_1$ et $\varepsilon << 1$ assez petit. Nous choisissons c_1, c_2 telles que

$$\frac{\alpha_1^p}{(-\mathcal{P}(\tau_6))} \leqslant c_2 \leqslant c_1 \leqslant \frac{[N-2-2\alpha_1]^{\frac{1}{q}}}{\alpha_1}.$$

   Alors, pour un $x \in B_1(0)\backslash\{0\}$, nous avons

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} \ &= \ -c_2\mathcal{P}(\tau_6)|x|^{-\tau_6-2} = -c_2\mathcal{P}(\tau_6)|x|^{-(\alpha_1+1)p-\varepsilon} \\ &\geqslant \ |x|^{-(\alpha_1+1)p}(-\alpha_1\ln|x| + 1)^p = |\nabla v|^p, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta v - \lambda \frac{v}{|x|^2} &= (N-2-2\alpha_1)|x|^{-\alpha_1-2} = (N-2-2\alpha_1)|x|^{(-\alpha_1-1)q} \\ &\geqslant |-c_1\alpha_1|x|^{-\alpha_1-1} + c_2\tau_6|x|^{-\tau_6-1}|^q = |\nabla u|^q. \end{aligned}.$$

Donc (u, v) est une sur-solution positive pour le système (S4) dans $B_1(0)\backslash\{0\}$.

■

Considérons maintenant le cas où $\lambda = \Lambda_N$, alors $p^+ = q^+ = \bar{p} = \bar{q} = \frac{N+2}{N}$ et les régions E et F sont vides. Nous obtenons le résultat d'existence suivant pour ce cas :

Théorème 4.3.2. *Soient $\lambda = \Lambda_N$ et $\Omega = B_\eta(0)$ avec $\eta < 1$. Supposons que $p, q < \frac{N+2}{N}$. Définissons $w(x) = |x|^{-\alpha_1}(\ln(\frac{1}{|x|}))^\beta$ avec $0 < \beta < 1$. Alors ils existent $c_1, c_2 > 0$ telles que, en posant $(u(x), v(x)) = (c_1 w(x), c_2 w(x))$, alors (u, v) est une sur-solution positive du système (S4).*

Démonstration. Comme $\lambda = \Lambda_N$, alors $\alpha_1 = \frac{N-2}{2}$ et $p^+ = q^+ = \bar{p} = \bar{q} = \frac{N+2}{N}$. Soient $p, q < p^+$, c'est à dire nous somme dans la zone D. En posant $w(x) = |x|^{-\alpha_1}(\ln(\frac{1}{|x|}))^\beta$ avec $0 < \beta < 1$, alors, pour $|x| < \eta < 1$,

$$-\Delta w - \lambda \frac{w}{|x|^2} = \frac{\beta(1-\beta)}{|x|^{2+\alpha_1}}(\ln(\frac{1}{|x|}))^{\beta-2}$$

et

$$|\nabla w| = |x|^{-\alpha_1-1}\Big(\alpha_1 \ln(\frac{1}{|x|}) + \beta(\ln(\frac{1}{|x|}))^{\beta-1}\Big)$$

Donc

$$|\nabla w|^p = |x|^{-p(\alpha_1+1)}\Big(\alpha_1 \ln(\frac{1}{|x|}) + \beta(\ln(\frac{1}{|x|}))^{\beta-1}\Big)^p$$

Comme $p, q < \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}$, alors, ils existent des constantes positives c_1, c_2 assez petites telles que, en posant $(u(x), v(x)) = (c_1 w(x), c_2 w(x))$, nous obtenons que (u, v) est une sur-solution positive du système (S4). ■

Remarque. *Dans le cas de domaines bornés généraux, en utilisant un changement d'échelle, nous pouvons démontrer l'existence d'une sur-solution pour le système (S4) sous les mêmes conditions que le Théorème 4.3.1. Plus précisément, si $(u,\ v)$ est une sur-solution faible radiale, alors $(u_R,\ v_R)$, avec*

$$u_R(x) = c_1 u(\frac{x}{R}) \text{ et } v_R(x) = c_2 v(\frac{x}{R}), \quad c_1, c_2 > 0$$

où R est choisi de sorte que $\Omega \subset B(0, R)$, est une sur-solution faible sur Ω.

Remarque. *Dans le cas où* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$, *le système sera :*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} = |\nabla v|^p & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v - \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} = |\nabla u|^q & \text{dans } \Omega, \\ u,\, v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Sg4}$$

Nous appliquons les mêmes calculs présentés pour le système (S4), pour trouver les résultats d'existence et de non-existence suivant la courbe optimale.
Les résultats d'existence et de non-existence seront illustrés dans les Théorèmes suivants :

Théorème 4.3.3. *(Résultats de non-existence)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine borné tel que* $0 \in \Omega$ *et* $N \geqslant 3$. *Supposons que* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ *et* $p, q > 1$ *satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $p \geqslant \bar{p}$ *ou* $q \geqslant \bar{q}$,

II) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $q > \frac{\alpha_{1.2}+2}{p(\alpha_{1.2}+1)-1}$,

III) $q^+ < q < \bar{q}$ *et* $p > \frac{\alpha_{1.1}+2}{q(\alpha_{1.1}+1)-1}$.

Alors, le système (Sg4) n'admet pas de solutions faibles positives dans le sens de la Définition 1.2.6.

Théorème 4.3.4. *(Résultats d'existence)*
Supposons que $\Omega = B_1(0)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ *et* $p, q > 1$ *satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :*

I) $1 < p < p^+$ *et* $1 < q < q^+$,

II) $p^+ \leqslant p < \bar{p}$ *et* $q < \frac{\alpha_{1.2}+2}{p(\alpha_{1.2}+1)-1}$,

III) $q^+ \leqslant q < \bar{q}$ *et* $p < \frac{\alpha_1(\lambda_1+2)}{q(\alpha_{1.1}+1)-1}$.

Alors le système (Sg4) admet au moins une sur-solution faible positive.

Avec

$$p^+ := \frac{2+\alpha_{1.1}}{1+\alpha_{1.2}}, \quad \bar{p} := \frac{N-\alpha_{1.1}}{1+\alpha_{1.2}},$$

$$q^+ := \frac{2+\alpha_{1.2}}{1+\alpha_{1.1}}, \quad \bar{q} := \frac{N-\alpha_{1.2}}{1+\alpha_{1.1}}.$$

où $\alpha_{1,i}$ et $\alpha_{2,i}$, pour i=1,2 sont définies dans 2.3.1.

Chapitre 5

Résultats d'existence et de non-existence des systèmes avec poids

Ce chapitre est le développement de l'article [17].

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'existence et de non-existence pour des systèmes elliptiques avec poids en introduisant des termes potentiel et/ou gradient suivants pour $p, q > 1$, $0 < \lambda_1 \neq \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma} = (\frac{N-2(\gamma+1)}{2})^2$ avec $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$,

$$\begin{cases} -div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + g_1(v, |\nabla v|), & \text{dans } \Omega, \\ -div(|x|^{-2\gamma}\nabla v) &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^{2(\gamma+1)}} + g_2(u, |\nabla u|), & \text{dans } \Omega, \\ u, v &\geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ tel que $0 \in \Omega$, $N \geqslant 3$, avec

$$g_1(v, |\nabla v|) = v^p \text{ ou } |\nabla v|^p \text{ et } g_2(u, |\nabla u|) = |\nabla u|^q$$

Ce chapitre sera organisé comme suit : Nous introduisons tout d'abord les solutions de l'équation avec poids dépendant du terme de potentiel ainsi que de gradient, la section 5.2 est dédiée au principaux outils mathématiques indispensables pour pouvoir traiter les systèmes de ce chapitre en utilisant l'approche proposée. Par la suite, nous présentons les principaux résultats d'existence et de non-existence pour chaque système.
En utilisant un changement de variable, une autre façon de traiter le système (5.1.1) avec

$g_1(x, v, |\nabla v|) = v^p$ et $g_2(x, u, |\nabla u) = |\nabla u|^q$ sera présentée dans la dernière partie de ce chapitre afin de localiser la courbe optimale qui sépare les zones d'existence et de non-existence.

Rappelons tout d'abord l'inégalité de Hardy avec poids présenté de la manière suivante :

Soit $N \geqslant d > 1$ et $-\infty < \gamma < \frac{N-d}{d}$. Alors pour tout $u \in W^{1,d}(\Omega, |x|^{-d\gamma})$, nous avons :

$$\Lambda_{N,\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^d}{|x|^{d(\gamma+1)}}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-d\gamma} |\nabla u|^d \, dx, \quad \Lambda_{N,\gamma,d} = \left(\frac{N - d(\gamma+1)}{d} \right)^d. \tag{5.1.2}$$

De plus $\Lambda_{N,\gamma,d}$ est optimale et elle n'est jamais atteinte.

Nous présentons dans la partie qui suit les solutions radiales de l'équation elliptique semi-linéaire avec potentiel de Hardy :

$$-div(|x|^{-2\gamma} \nabla u) - \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = 0 \;\text{ dans }\; B_r(0) \subset \mathbb{R}^N \tag{5.1.3}$$

Supposons que $u(|x|) = u(r) = C_1 r^{-\beta}$, avec $C_1 > 0$, nous avons :

$$-div(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = -r^{2\gamma} u^{''}(r) + (2\gamma - N + 1) u^{'}(r) r^{(-2\gamma-1)}$$

donc

$$-div(|x|^{-2\gamma} \nabla u) - \lambda_1 \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = 0 \Rightarrow C_1 r^{-\beta-2(\gamma+1)} [-\beta^2 + \beta(N - 2(\gamma+1)) - \lambda] = 0$$

les racines de $\mathcal{P}_\lambda(\beta) := -\beta^2 + (N - 2(\gamma+1))\beta - \lambda$, sont

$$\sigma_1 = \frac{N - 2(\gamma+1)}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,\gamma} - \lambda} \quad \text{et} \qquad \sigma_2 = \frac{N - 2(\gamma+1)}{2} + \sqrt{\Lambda_{N,\gamma} - \lambda}. \tag{5.1.4}$$

Notons que $\mathcal{P}_\lambda(\beta) > 0$ dans $]\sigma_1, \sigma_2[$

La problème (5.1.3) admet les solutions radiales symétriques suivantes

$$\Phi_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^{-\sigma_2} & \text{si } \; \lambda < \Lambda_{N,\gamma} \\ |x|^{-\frac{N-2(\gamma+1)}{2}} (-\ln|x|) & \text{si } \; \lambda = \Lambda_{N,\gamma} \end{cases}, \;\text{ et }\; \Gamma_\lambda(x) = |x|^{-\sigma_1}$$

Maintenant, cherchons l'exposant critique du problème suivant :

$$-div(|x|^{-2\gamma} \nabla u) - \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = u^p \;\text{ dans }\; B_r(0) \subset \mathbb{R}^N \tag{5.1.5}$$

Le problème (5.1.5) admet une sur-solution si et seulement si $p < p^+$ avec $p^+ = \frac{\sigma_1 + 2(\gamma+1)}{\sigma_1}$, en effet, supposons que : $u(|x|) = u(r) = C_1 r^{-\beta}$, avec $C_1 > 0$, nous avons :

$$C_1 r^{-\beta-2(\gamma+1)}[-\beta^2 + \beta(N - 2(\gamma+1)) - \lambda] \geqslant C_1^p r^{-\beta p}$$

si $\sigma_1 < \beta < \sigma_2$, $\mathcal{P}_\lambda(\beta) > 0$ alors $r^{-\beta-2(\gamma+1)} \geqslant r^{-\beta p}$
ce qui implique que :

$$p < p^+ = 1 + \frac{2(\gamma+1)}{\sigma_1}$$

De même, pour le problème avec terme de gradient suivant :

$$-div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) - \lambda\frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = |\nabla u|^p \ \text{ dans } \ B_r(0) \subset \mathbb{R}^N \tag{5.1.6}$$

nous avons

$$C_1 r^{-\beta-2(\gamma+1)}[-\beta^2 + \beta(N - 2(\gamma+1)) - \lambda] \geqslant C_1^p \beta^p r^{(-\beta-1)p}$$

pour $\sigma_1 < \beta < \sigma_2$, nous avons : $\mathcal{P}_\lambda(\beta) > 0$, donc $r^{-\beta-2(\gamma+1)} \geqslant r^{(-\beta-1)p}$
Le problème (5.1.6) admet des sur-solutions si et seulement si,

$$p < \frac{\sigma_1 + 2(\gamma+1)}{\sigma_1 + 1}$$

qui représente l'exposant critique pour le problème (5.1.6)

En se basant sur ces données, nous posons la question suivante : Quelles sont les résultats d'existence et de non-existence obtenus pour un système mixte dépendant des termes potentiel et gradient ?

5.2 Préliminaires

Dans cette partie, nous allons fournir quelques outils mathématiques utiles pour trouver la courbe optimale pour les systèmes de ce chapitre. En effet, précisons tout d'abord la définition d'une solution au sens des distributions.

Définition 5.2.1. *Supposons que $p, q > 1$. On dit que $(u, v) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$, avec $u, v \geqslant 0$, est une solution faible du système (5.1.1) si $(u, v) \in W_0^{1,1}(\Omega, |x|^{-2\gamma}) \times W_0^{1,1}(\Omega, |x|^{-2\gamma})$, $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ et pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, nous avons :*

$$\int_\Omega |x|^{-2\gamma}\nabla u \nabla\varphi = \lambda_1 \int_\Omega \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}}\varphi + \int_\Omega g_1(v, |\nabla v|)\varphi$$

et

$$\int_\Omega |x|^{-2\gamma}\nabla v \nabla\psi = \lambda_2 \int_\Omega \frac{v}{|x|^{-2(\gamma+1)}}\psi + \int_\Omega g_2(u, |\nabla u)\psi.$$

avec

$$g_1(v, |\nabla v|) = v^p \text{ ou } |\nabla v|^p \text{ et } g_2(u, |\nabla u) = |\nabla u|^q$$

Nous avons besoin aussi des lemmes suivants pour appliquer notre processus pour les systèmes avec poids.

Lemme 5.2.2. *Supposons que $u \geqslant 0$ dans Ω, $u \neq 0$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si u vérifie $-div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) - \lambda\frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} \geqslant 0$ au sens des distributions, alors il existe une constante positive C et une boule $B_R(0) \subset \Omega$, pour R assez petit, tel que :*

$$u(x) \geqslant C|x|^{-\sigma_1} \text{ p.p. dans } B_R(0),$$

où σ_1 est définie dans (5.1.4).

Démonstration. Fixons un $R > 0$ et soit $w \in W^{1.2}(B_r(0))$ la solution positive du problème :

$$\begin{cases} -div(|x|^{-2\gamma}\nabla w) - \lambda\dfrac{w}{|x|^{2(\gamma+1)}} & = & 0, \quad \text{dans } B_R(0), \\ w & = & \eta \quad \text{sur } \partial B_R(0), \end{cases} \tag{5.2.1}$$

après un calcul direct, on obtient $w(r) = Cr^{-\sigma_1}$ où $\sigma_1 = \frac{N-2(\gamma+1)}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,\gamma} - \lambda}$ et $C = \eta R^{\sigma_1}$, comme u est une solution positive du problème (5.2.1), d'après le principe du maximum fort et de comparaison, on a $u \geqslant w$ dans $B_R(0)$, donc $u(x) \geqslant C|x|^{-\sigma_1}$ dans $B_R(0)$. ∎

Lemme 5.2.3. *Considérons l'équation suivante :*

$$-div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) - \lambda\frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} = g \qquad \text{dans } \Omega. \tag{5.2.2}$$

avec $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $g \geqslant 0$ et $\lambda \leqslant \Lambda_{N,\gamma}$.

- *Supposons que u est une sur-solution faible positive du problème (5.2.2) où $\lambda \leqslant \Lambda_N$. Alors $|x|^{-\sigma_1}g \in L^1_{loc}(\Omega)$, où σ_1 est définie dans (5.1.4).*

- *Si $g \in L^1(\Omega)$ et $\int_\Omega g|x|^{-\sigma_1}\,dx < \infty$, alors le problème (5.2.2) admet une solution faible unique u telle que $u \in W^{1,a}_0(\Omega)$ pour tout $a < \frac{N}{N-1}$ et $\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)+\sigma_1}}dx < \infty$.*

- *Dans le cas où $g(x) = \dfrac{1}{|x|^\beta}$ avec $2 < \beta < N - \sigma_1$, alors la solution positive faible u du problème (5.2.2) vérifie $u \geqslant |x|^{-\beta+2(\gamma+1)}$ dans $B_R(0) \subset\subset \Omega$.*

Démonstration. En adoptant une approche similaire à celle utilisée pour démontrer le Théorème 1.3.2, on peut établir ce Théorème. ∎

5.3 Résultats de non-existence et d'existence du système avec poids avec données potentiel-gradient

Par le biais du procédé itératif présenté dans les chapitres précédents, nous pouvons trouver la courbe optimale qui sépare les zones d'existence et de non-existence, commençons tout d'abord par présenter dans la section ci-dessous le résultat principal de non-existence pour le système (5.1.1) avec $g_1(v, |\nabla v|) = v^p$ et $g_2(u, |\nabla u|) = |\nabla u|^q$.

5.3.1 Courbe optimale : résultats de non-existence

Cette partie de ce chapitre est dédiée aux résultats de non-existence du système suivant pour $p, q > 1$ et $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma}$

$$\begin{cases} -div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + v^p, & \text{dans } \Omega, \\ -div(|x|^{-2\gamma}\nabla v) &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^{2(\gamma+1)}} + |\nabla u|^q, & \text{dans } \Omega, \\ u, v &\geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S5p}$$

Afin d'utiliser notre méthode pour définir la courbe optimale qui sépare la zone d'existence et de non-existence, nous avons besoin d'introduire les exposants critiques associés au système (S5p) présenté comme suit :

$$p^+ = \frac{\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)}{\sigma_{1,2}}, \quad q^+ = \frac{\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1)}{\sigma_{1,1} + 1}$$

et

$$\bar{p} = \frac{N - \sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}}, \quad \bar{q} = \frac{N - \sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1} + 1}$$

avec

$$\sigma_{1,i} = \frac{N - 2(\gamma+1)}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,\gamma} - \lambda_i}, \qquad \sigma_{2,i} = \frac{N - 2(\gamma+1)}{2} + \sqrt{\Lambda_{N,\gamma} - \lambda_i} \tag{5.3.1}$$

Notons que $N - \sigma_{1,i} = \sigma_{2,i} + 2(\gamma+1)$, pour $i = 1, 2$.
Dans ce qui suit, nous supposons : $\mathcal{L}_{\lambda_i}(u) = -div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) - \lambda_i \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}}$
Dans le théorème ci-dessous, nous présentons le résultat de non-existence pour le système (S5p) :

Théorème 5.3.1. *Supposons que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite pour $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma}$ et $p, q > 1$:*

1) $p > \bar{p}$ ou $q > \bar{q}$.

2) $p_+ < p < \bar{p}$ *et* $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p\sigma_{1,2}-2\gamma-1}$.

3) $q_+ < q < \bar{q}$ *et* $p > \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1)-2(\gamma+1)}$.

Alors le système (S5p) *n'admet pas de sur-solutions positives faibles dans le sens de la Définition 5.2.1.*

Nous présentons ci-dessous quelques exemples de courbes, permettant de séparer les zones d'existence et de non existence, pour les deux cas de figures à savoir, $\gamma = 0.02$ et $\gamma = -0.02$

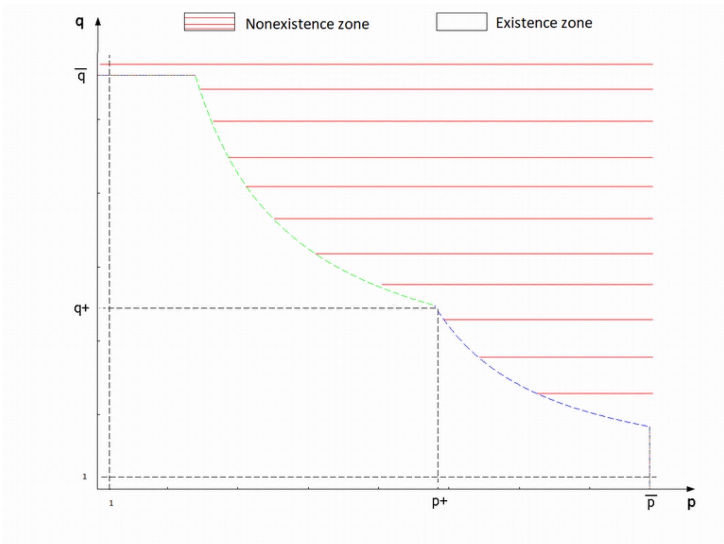

FIGURE 5.1 – Zones d'existence et de non-existence pour le système (S5p) pour $N = 7$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ et $\gamma = 0.02$

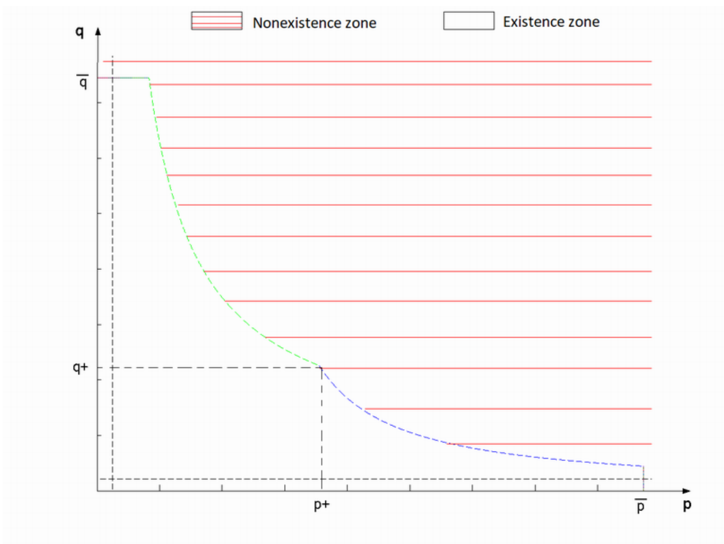

FIGURE 5.2 – Zones d'existence et de non-existence pour le système (S5p) pour $N = 7$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ et $\gamma = -0.02$

Démonstration. Supposons par contradiction que le système(S5p) admet une sur-solution faible $(u,\, v)$.
1^{er} **cas :** $p > \bar{p}$ ou $q > \bar{q}$.
En utilisant le Lemme 5.2.3 pour la première équation du système, nous obtenons :

$$\int_\Omega v^p |x|^{-\sigma_{1,1}}\, dx < \infty. \tag{5.3.2}$$

Comme $-div(|x|^{-2\gamma}\nabla v) - \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^{2(\gamma+1)}} \geqslant 0$, d'après le Lemme 5.2.2 il existe une constante positive C et une boule $B_r(0) \subset \Omega$ pour r assez petit tel que : $v(x) \geqslant C|x|^{-\sigma_{1,2}}$ dans $B_r(0)$. D'après (5.3.2) on obtient :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,2}+\sigma_{1,1}}}\, dx < \infty \Rightarrow p < \frac{N-\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}}. \tag{5.3.3}$$

ce qui nous donne une contradiction avec l'hypothèse $p > \frac{N-\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}} = \bar{p}$, donc (u, v) n'est pas une sur-solution pour ce cas.
En utilisant la deuxième équation du système (S5p) et le Lemme 5.2.3, nous avons :

$$\int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx < \infty.$$

Puisque $q < \frac{N}{\sigma_{1,2}+1}$, nous avons d'après l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg [Théorème 1.2.8], pour un r assez petit tel que $B_r(0) \subset\subset \Omega$, il existe une constante positive $C(r, \Omega)$ telle que :

$$\int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^q} |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx \leqslant C \int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx + \left(\int_{B_r(0)} u dx\right)^q < \infty. \tag{5.3.4}$$

par conséquent, d'après le Lemme 5.2.2, on obtient :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q(\sigma_{1,1}+1)+\sigma_{1,2}}}\, dx < \infty \Rightarrow q < \frac{N-\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}+1} = \bar{q}. \tag{5.3.5}$$

ce qui nous conduit à une contradiction avec l'hypothèse $q < \bar{q}$, d'où la démonstration de la non-existence découle pour le premier cas.
$2^{\text{ème}}$ **cas :** $p_+ < p < \bar{p}$ **et** $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p\sigma_{1,2}+1-2(\gamma+1)}$**.**
On a supposé que le système (S5p) admet une sur-solution $(u,\, v)$, d'après le Lemme 5.2.3 nous avons

$$\int_\Omega v^p |x|^{-\sigma_{1,1}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx < \infty. \tag{5.3.6}$$

Pour démontrer la non-existence dans ce cas, nous appliquons notre processus pour un système avec poids, le principe de notre méthode est de construire deux suites croissantes

$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_n}} < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_n}} < \infty. \tag{5.3.7}$$

avec $a_0 = \sigma_{1,2} + 2(\gamma+1)$ et $b_0 = \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)$.
Cette démonstration se décompose en trois étapes :
• *Étape* 1. Soient $a_0 = \sigma_{1,2} + 2(\gamma+1)$ et $b_0 = \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)$, démontrons tout d'abord l'existence de $a_1 > a_0$ et $b_1 > b_0$ tels que

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty \text{ où } a_0 < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\sigma_{1,1}}{p}, \tag{5.3.8}$$

et

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty \text{ où } b_0 < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_0 - 2(\gamma+1)}{q} + 1. \tag{5.3.9}$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder et (5.3.6) nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\,dx = \int_\Omega v\frac{|x|^{\frac{\sigma_{1,1}}{p}}}{|x|^{a_1}}|x|^{-\frac{\sigma_{1,1}}{p}}\,dx \;&\leqslant\; \left[\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{\sigma_{1,1}}}\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |x|^{(\frac{\sigma_{1,1}}{p}-a_1)p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant\; C\left[\int_\Omega |x|^{(\frac{\sigma_{1,1}}{p}-a_1)p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, cette intégrale est finie si

$$\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1) < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\sigma_{1,1}}{p}.$$

Comme $p^+ < p < \bar{p}$, alors $\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1) < \frac{N}{p'} + \frac{\sigma_{1,1}}{p} < \sigma_{2,2} + 2(\gamma+1)$. Donc nous avons démontré l'existence de a_1.
Prouvons maintenant l'existence de $\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1) < b_1 < \sigma_{2,1} + 2(\gamma+1)$ avec

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty. \tag{5.3.10}$$

Fixons a_1 définie précédemment et considérons η_1 la solution du problème

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\lambda_2}(\eta) &= \dfrac{1}{|x|^{a_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad \eta_1 &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\eta_1(x) \backsimeq \dfrac{c}{|x|^{a_1-2(\gamma+1)}}$ au voisinage de l'origine. En utilisant η_1 comme fonction test dans l'équation vérifiée par v dans le système, nous obtenons

$$\int_\Omega \mathcal{L}_{\lambda_2}(\eta) v\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^q \eta\,dx.$$

Rappelons (5.3.8), nous avons

$$C\int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-a_1+2(\gamma+1)}\, dx \leqslant \int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_1}}\, dx < \infty. \tag{5.3.11}$$

Par conséquent, d'après le Théorème 1.2.8, nous concluons que

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q} |x|^{-a_1+2(\gamma+1)}\, dx < \infty. \tag{5.3.12}$$

À présent, nous utilisons l'inégalité de Hölder et le Théorème 1.2.7 pour trouver une estimation de b_1, en effet

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\, dx &= \int_\Omega \frac{u}{|x|} \frac{|x|^{\frac{a_1-2(\gamma+1)}{q}}}{|x|^{b_1-1}} |x|^{\frac{-a_1+2(\gamma+1)}{q}}\, dx \\ &\leqslant C\left[\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^q}|x|^{-a_1+2(\gamma+1)}\, dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |x|^{(\frac{a_1-2(\gamma+1)}{q}-b_1+1)q'}\, dx\right]^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant C\left[\int_\Omega |\nabla u|^q|x|^{-a_1+2(\gamma+1)}\, dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |x|^{(\frac{a_1-2(\gamma+1)}{q}-b_1+1)q'}\, dx\right]^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\, dx < \infty$ si et seulement si

$$b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{q} + 1.$$

Rappelons que $\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1) < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\sigma_{1,1}}{p}$, supposons que $a^* = \frac{N}{p'} + \frac{\sigma_{1,1}}{p}$. Montrons maintenant qu'on peut choisir a_1 proche de a^* tel que $\frac{N}{q'} + \frac{a_1-2(\gamma+1)}{q} + 1 > \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)$ et b_1 tel que

$$b_0 = \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1) < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{q} + 1.$$

Tout d'abord, montrons que

$$\frac{N}{q'} + \frac{a^* - 2(\gamma+1)}{q} + 1 > \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1). \tag{5.3.13}$$

Par hypothèse, nous avons $\frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{\sigma_{1,2}} < p < \frac{N-\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}} = \bar{p}$, alors (5.3.13) équivaut à avoir $q > \frac{N+2p(\gamma+1)-\sigma_{1,1}}{p(N-\sigma_{1,1}-2\gamma-1)}$. Comme $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p\sigma_{1,2}-2\gamma-1}$, alors si

$$\frac{\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1)}{p\sigma_{1,2} - 2\gamma - 1} > \frac{N + 2p(\gamma+1) - \sigma_{1,1}}{p(N - \sigma_{1,1} - 2\gamma - 1))}, \tag{5.3.14}$$

Nous obtenons l'inégalité souhaitée. Après calcul, nous remarquons que (5.3.14) équivaut à $p < \frac{N-\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}} = \bar{p}$. Donc, la dernière estimation (5.3.13) est bien vérifiée.

Pour ce cas, nous pouvons choisir $a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{\sigma_{1,1}}{p}$, tel que $\frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{q} + 1 > \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)$. par conséquent, nous choisissons b_1 avec

$$\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1) < b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{q} + 1 < \sigma_{2,1} + 2(\gamma+1).$$

- *Étape* 2. Dans cette étape, nous démontrons l'existence de $a_2 > a_1$ tel que

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\,dx < \infty. \tag{5.3.15}$$

Fixons tout d'abord (a_1, b_1) définies dans la première étape et soit θ, la solution du problème

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\lambda_1}(\theta) &= \dfrac{1}{|x|^{b_1}} & \text{dans } \Omega, \\ \theta_1 &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\theta(x) \backsimeq \dfrac{C}{|x|^{b_1 - 2(\gamma+1)}}$ au voisinage de 0, prenons θ comme fonction test dans l'équation vérifiée par u, on obtient

$$\int_\Omega v^p \theta\,dx = \int_\Omega -\mathcal{L}_{\lambda_1}(\theta) u\,dx$$

D'après (5.3.10), nous avons

$$C \int_{B_r(0)} v^p |x|^{-b_1 + 2(\gamma+1)}\,dx \leqslant \int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty. \tag{5.3.16}$$

D'où, (5.3.16) et l'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_\Omega \frac{v}{|x|^{a_2}}\,dx = \int_\Omega v \frac{|x|^{\frac{b_1 - 2(\gamma+1)}{p}}}{|x|^{a_2}} |x|^{\frac{-b_1 + 2(\gamma+1)}{q}}\,dx \leqslant C \left[\int_\Omega |x|^{(-a_2 + \frac{b_1 - 2(\gamma+1)}{p})p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Cette intégrale est finie si et seulement si

$$a_2 < \frac{N}{p'} + \frac{b_1 - 2(\gamma+1)}{p}.$$

Notons que

$$\frac{N}{p'} + \frac{b_1 - 2(\gamma+1)}{p} > \frac{N}{p'} + \frac{b_0 - 2(\gamma+1)}{p},$$

Alors nous pouvons choisir a_2 tel que

$$\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1) < a_1 < \frac{N}{p'} + \frac{b_0 - 2(\gamma+1)}{p} < a_2 < \frac{N}{p'} + \frac{b_1 - 2(\gamma+1)}{p} < \sigma_{2,2} + 2(\gamma+1).$$

En utilisant la définition de b_1 et a_2, nous obtenons l'existence de b_2 tel que

$$b_1 < \frac{N}{q'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{q} + 1 < b_2 < \frac{N}{q'} + \frac{a_2 - 2(\gamma+1)}{q} + 1,$$

et

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{b_2}}\, dx < \infty.$$

Par un processus itératif, nous obtenons l'existence de deux suites croissantes $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\Big(b_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour $n \geqslant 2$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{b_{n-2} - 2(\gamma+1)}{p} < & a_n & < \dfrac{N}{p'} + \dfrac{b_{n-1} - 2(\gamma+1)}{p}, \\[2ex] \dfrac{N}{q'} + \dfrac{a_{n-1} - 2(\gamma+1)}{q} + 1 < & b_n & < \dfrac{N}{q'} + \dfrac{a_n - 2(\gamma+1)}{q} + 1. \end{array}\right. \tag{5.3.17}$$

Par conséquent, d'après les calculs précédent, nous déduisons que

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+a_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty. \tag{5.3.18}$$

comme, $u(x) \geqslant C|x|^{-\sigma_{1,1}}$ et $v(x) \geqslant C'|x|^{-\sigma_{1,2}}$, nous avons

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\sigma_{1,1}+q+a_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ et } \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,2}+b_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty. \tag{5.3.19}$$

Ainsi, il est nécessaire d'avoir

$$a_n < N + 2(\gamma+1) - q(\sigma_{1,1}+1) \text{ et } b_n < N + 2(\gamma+1) - p\sigma_{1,2}.$$

Soient $\bar{a}$, $\bar{b}$, tels que,

$$\bar{a} = \lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \bar{b} = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Revenons à (5.3.17), nous déduisons que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{a} & = & \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\bar{b} - 2(\gamma+1)}{p}, \\ \bar{b} & = & \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\bar{a} - 2(\gamma+1)}{q} + 1. \end{array}\right.$$

Par un calcul direct, nous déduisons que

$$\bar{b} = N - \frac{2(\gamma+1) + 2p(\gamma+1) - pq}{pq-1}.$$

- *Étape 3.* Nous pouvons au niveau de cette étape démontrer le résultat principal de la

non- existence pour $p^+ < p < \bar{p}$.
Rappelons que nous avons supposé que $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p\sigma_{1,2}-2\gamma-1}$.
D'après (5.3.18) et le Lemme 5.2.3, nous avons

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,1}+b_n-2(\gamma+1)}}\,dx \leqslant \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{b_n-2(\gamma+1)}}\,dx < \infty \text{ pour tout } n. \tag{5.3.20}$$

ce qui nous donne

$$p\sigma_{1,2} + b_n - 2(\gamma+1) < N \text{ pour tout } n$$

et donc par passage à la limite

$$p\sigma_{1,2} + \bar{b} \leqslant N + 2(\gamma+1)$$

Par conséquent, nous pouvons conclure que $q \leqslant \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p\sigma_{1,2}-2\gamma-1}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse principale pour ce cas. Cela conclut la preuve du théorème pour le deuxième cas.

$3^{\text{ème}}$ **cas :** $q_+ < q < \bar{q}$ **et** $p > \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,1}+1)-2(\gamma+1)}$**.**
Nous suivons les même étapes utilisées dans le premier cas en échangeant le rôle de p et q, en effet
• *Étape* 1. Nous commençons tout d'abord par démontrer l'existence de a_1, b_1, tels que

$$\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1) < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\sigma_{1,2}}{q} + 1$$

et

$$\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1) < b_1 < \sigma_{2,2} + 2(\gamma+1).$$

avec

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\,dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\,dx < \infty. \tag{5.3.21}$$

En utilisant (5.3.6) et le Théorème 1.2.8, nous avons

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\sigma_{1,2}}}\,dx < \infty.$$

Donc, d'après l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\,dx = \int_\Omega \frac{u}{|x|^{1+\frac{\sigma_{1,2}}{q}}}\frac{1}{|x|^{a_1-1-\frac{\sigma_{1,2}}{q}}}\,dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\sigma_{1,2}}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_1-1-\frac{\sigma_{1,2}}{q})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{q'(a_1-1-\frac{\sigma_{1,2}}{q})}}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}$$

L'intégrale ci-dessus est finie sous la condition suivante :

$$a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\sigma_{1,2}}{q} + 1. \tag{5.3.22}$$

Comme $q^+ < q < \bar{q}$, nous avons :

$$\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1) < \frac{N}{q'} + \frac{\sigma_{1,2}}{q} + 1 < \sigma_{2,1} + 2(\gamma+1)$$

Afin de prouver l'existence de b_1, fixons a_1 définie ci-dessus (5.3.22) et soit ξ la solution du problème :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\lambda_1}(\xi) &= \dfrac{1}{|x|^{a_1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \xi_1 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\xi(x) \backsimeq \dfrac{c}{|x|^{a_1-2(\gamma+1)}}$ au voisinage de l'origine. Utilisant ξ comme fonction test dans l'équation vérifiée par u, on trouve

$$\int_\Omega -\mathcal{L}_{\lambda_1}(u)\xi\, dx = \int_\Omega v^p \xi\, dx.$$

Par conséquent, d'après (5.3.21)

$$\int_\Omega v^p \xi\, dx \leqslant \int_\Omega \frac{u}{|x|^{a_1}}\, dx < \infty.$$

Donc

$$\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty. \tag{5.3.23}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Hölder et (5.3.23), pour trouver b_1, en effet,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{v}{|x|^{b_1}}\, dx &\leqslant \Big(\int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_1-2(\gamma+1)}}\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(b_1-\frac{a_1-2(\gamma+1)}{p})}}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant c\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{p'(b_1-\frac{a_1-2(\gamma+1)}{p})}}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si et seulement si $p'(b_1 - \frac{a_1-2(\gamma+1)}{p}) < N$.
C'est à dire

$$b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{p}.$$

Nous avons : $\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1) < a_1 < \frac{N}{q'} + \frac{\sigma_{1,2}}{q} + 1 := a^*$. Nous pouvons facilement montrer qu'on peut choisir a_1 proche de a^* tel que $\frac{N}{q'} + \frac{a_1-2(\gamma+1)}{q} + 1 > \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)$ et choisir b_1

tel que

$$\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1) < b_0 < \frac{N}{p'} + \frac{a_0 - 2(\gamma+1)}{p} < b_1 < \frac{N}{p'} + \frac{a_1 - 2(\gamma+1)}{p}.$$

Ainsi, en argumentant comme pour le premier cas, nous pouvons définir deux suites croissantes $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geqslant 2$, nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{a_{n-1} - 2(\gamma+1)}{p} < b_n < \dfrac{N}{p'} + \dfrac{a_n - 2(\gamma+1)}{p}. \\[2ex] \dfrac{N}{q'} + \dfrac{b_{n-2} - 2(\gamma+1)}{q} + 1 < a_n < \dfrac{N}{q'} + \dfrac{b_{n-1} - 2(\gamma+1)}{q} + 1. \end{cases} \tag{5.3.24}$$

et,

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+b_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{a_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty. \tag{5.3.25}$$

Comme $u(x) \geqslant |x|^{-\sigma_{1,1}}$ et $v \geqslant C|x|^{-\sigma_{1,2}}$, nous obtenons le résultat suivant,

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\sigma_{1,1}+q+b_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ et } \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,2}+a_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty.$$

Ce qui nous donne

$$b_n < N + 2(\gamma+1) - q(\sigma_{1,1}+1) \text{ et } a_n < N + 2(\gamma+1) - p\sigma_{1,2}. \tag{5.3.26}$$

Soient $a_n \to \hat{a}$ et $b_n \to \hat{b}$ (quand n tend vers ∞). D'après (5.3.24), et par passage à la limite, nous obtenons,

$$\hat{a} = N + \frac{pq - 2p(\gamma+1) - 2(\gamma+1)}{pq-1} \text{ et } \hat{b} = N - \frac{q(2(\gamma+1)-1) + 2(\gamma+1)}{pq-1}. \tag{5.3.27}$$

• *Étape* 2. Maintenant, nous pouvons achever la démonstration de la non-existence. En effet, rappelons que nous avons supposé que $p > \dfrac{\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1)}$.
mais, en utilisant (5.3.26) et (5.3.27), nous obtenons $p \leqslant \dfrac{\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1)}$ ce qui conduit à une contradiction. D'où la démonstration de ce Théorème. ■

5.3.2 Résultats d'existence du système (S5p)

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'existence du système (S5p) en fonction des valeurs de p et q. Ces résultats sont détaillés dans le théorème ci-dessous :

Théorème 5.3.2. *Soient $p, q > 1$, $\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$, et $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma}$, supposons que l'une des hypothèse suivante est vérifiée dans $B_1(0)$*

1) $p < p^+$ *et* $q < q^+$.
2) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $q < \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{\sigma_{1,2}p-2\gamma-1}$.
3) $q_+ < q < \bar{q}$ *et* $p < \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1)-2(\gamma+1)}$
4) $p = p^+$ *et* $q < q^+$ *ou* $q = q^+$ *et* $p < p^+$

Alors le système (S5p) possède au moins une sur-solution positive faible au sens de la Définition 5.2.1 dans $B_1(0)$.

Démonstration. Le principe de la cette démonstration est de construire des sur-solutions dans $B_1(0)$ pour chaque cas, en se basant sur les solutions radiales symétriques exposées dans la première section de ce chapitre.

1^{er} **cas :** $1 < p < p^+$ et $1 < q < q^+$

Ils existent β_1, β_1' avec $\sigma_{1,1} < \beta_1 < \frac{2(\gamma+1)}{p-1}$ et $\sigma_{1,2} < \beta_1' < \frac{2(\gamma+1)-q}{q-1}$ tels que $(u_1(x) = c_1|x|^{-\beta_1}, v_1(x) = c_2|x|^{-\beta_1'})$ est une sur-solution du système (S5p) dans $B_1(0)\backslash\{0\}$ où $c_1\mathcal{P}_\lambda(\beta_1) \geqslant c_2^p$ et $c_2\mathcal{P}_\lambda(\beta_1') \geqslant c_1^q\beta_1^q$, en effet :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}u_1(x) = c_1\mathcal{P}(\beta_1)|x|^{-\beta_1-2(\gamma+1)} \geqslant v_1(x)^p$$

et

$$\mathcal{L}_{\lambda_2}v_1(x) = c_2\mathcal{P}(\beta_1')|x|^{-\beta_1'-2(\gamma+1)} \geqslant |\nabla u_1(x)|^q = c_1^q\beta_1^q|x|^{(-\beta_1-1)q}$$

$2^{\text{ème}}$ **cas :** $p^+ < p < \bar{p}$ et $q < \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{\sigma_{1,2}p-2(\gamma+1)+1}$

soient $u_2(x) = c_3|x|^{-\beta_2}$ avec $\sigma_{1,1} < \beta_2 = p\sigma_{1,2} - 2(\gamma+1) < \sigma_{2,1}$ et $c_3\mathcal{P}(\beta_2) \geqslant 1$.

et $v_2(x) = |x|^{-\sigma_{1,2}} - c_4|x|^{-\beta_2'}$ avec $\beta_2' = q(\sigma_{1,2}p - 2(\gamma+1)+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,2}$ et $-c_4\mathcal{P}(\beta_2') \geqslant c_3^q\beta_2^q$.

Nous avons :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}u_2(x) = c_3\mathcal{P}(\beta_2)|x|^{-\beta_2-2(\gamma+1)} = c_3\mathcal{P}(\beta_2)|x|^{-p\sigma_{1,2}} \geqslant v_2(x)^p$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda_2}v_2(x) &= -c_4\mathcal{P}(\beta_2')|x|^{-\beta_2'-2(\gamma+1)} = -c_4\mathcal{P}(\beta_2')|x|^{-q(\sigma_{1,2}p-2(\gamma+1)+1)} \\ &= -c_4\mathcal{P}(\beta_2')|x|^{(-\beta_2-1)q} \geqslant |\nabla u_2(x)|^q\end{aligned}$$

donc (u_2, v_2) est une sur-solution pour le système (S5p) dans $B_1(0)$.

$3^{\text{ème}}$ **cas :** $q^+ < q < \bar{q}$ et $p < \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{(\sigma_{1,1}+1)q-2(\gamma+1)}$

Dans ce cas, supposons que : $u_3(x) = |x|^{-\sigma_{1,1}} - c_5|x|^{-\beta_3}$ où $\beta_3 = p((\sigma_{1,1}+1)q - 2(\gamma+1)) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,1}$ et $-c_5\mathcal{P}(\beta_3) \geqslant c_6^p$

et $v_3(x) = c_6|x|^{-\beta_3'}$ où $\sigma_{1,2} < \beta_3' = q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{2,2}$ et $c_6\mathcal{P}(\beta') \geqslant \sigma_{1,1}^q$
Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_1} u_3(x) &= -c_5\mathcal{P}(\beta_3)|x|^{-\beta_3-2(\gamma+1)} = -c_5\mathcal{P}(\beta_3)|x|^{-p((\sigma_{1,1}+1)q-2(\gamma+1))} \\
&= -c_5\mathcal{P}(\beta_3)|x|^{-\beta_3' p} \geqslant v_3(x)^p
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_2} v_3(x) &= c_6\mathcal{P}(\beta_3')|x|^{-\beta_3'-2(\gamma+1)} = c_6\mathcal{P}(\beta')|x|^{(-\sigma_{1,1}-1)q} \\
&\geqslant |-\sigma_{1,1}|x|^{-\sigma_{1,1}-1} + c_5\beta_3|x|^{-\beta_3-1}|^q \geqslant |\nabla u_3(x)|^q
\end{aligned}$$

Alors (u_3, v_3) est une sur-solution du système (S5p) dans $B_1(0)$.
$4^{\text{ème}}$ **cas :** $p = p^+$ et $q < q^+$
Soient $u_4(x) = |x|^{-\sigma_{1,1}}(-\ln|x|)$ et $v_4(x) = |x|^{-\sigma_{1,2}} - c_7|x|^{-\beta_4}$ avec $\beta_4 = q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,2}$
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_1} u_4(x) &= c_8|x|^{-\sigma_{1,1}-2(\gamma+1)} \quad \text{où} \quad c_8 = N - 2(\gamma+1) - 2(\gamma+1)\sigma_{1,1} \geqslant 0 \\
&= c_8|x|^{-\sigma_{1,2}p} \geqslant v_4(x)^p
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_2} v_4(x) &= c_8|x|^{-\beta_4-2(\gamma+1)} \quad \text{où} \quad c_8 \geqslant 0 \\
&= c_8|x|^{(-\sigma(\lambda_1)-1)q} \geqslant |-\sigma_{1,1}|x|^{-\sigma_{1,1}-1}(-\ln|x|) - |x|^{-\sigma_{1,1}-1}|^q \\
&= |x|^{(-\sigma(\lambda_1)-1)q}|\ln|x| - 1|^q = |\nabla u|^q
\end{aligned}$$

donc (u_4, v_4) est une sur-solution du système (S5p) in $B_1(0)$.
$5^{\text{ème}}$ **cas :** $q = q^+$ et $p < p^+$
Dans ce dernier cas, (u_5, v_5) est une sur-solution du système (S5p), avec :
$u_5(x) = |x|^{-\sigma_{1,1}} - |x|^{-\beta_5}$ et $v_5(x) = |x|^{-\sigma_{1,2}}(-\ln|x|)$ où $\beta_5 = p\sigma_{1,2} - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,1}$
en effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_1} u_5(x) &= c_9|x|^{-\sigma_{1,1}-2(\gamma+1)} \quad \text{où} \quad c_9 \geqslant 0 \\
&= c_9|x|^{-\sigma_{1,2}p} \geqslant v_4(x)^p
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda_2} v_5(x) &= c_{10}|x|^{-\sigma_{1,2}-2(\gamma+1)} \quad \text{où} \quad c_{10} \geqslant 0 \\ &= c_{10}|x|^{(-\sigma_(\lambda_1)+1)q} \geqslant |-\sigma_{1,1}|x|^{-\sigma_{1,1}-1} + \beta_5|x|^{-\beta_5}|^q = |\nabla u|^q\end{aligned}$$

■

5.4 Résultats d'existence de de non-existence pour un système avec poids avec données gradient-gradient

Dans cette partie de ce chapitre, nous présentons les principaux résultats d'existence et de non-existence pour un système avec poids et potentiels gradient-gradient, en effet, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} -div(|x|^{-2\gamma}\nabla u) &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + |\nabla v|^p, \quad \text{dans } \Omega, \\ -div(|x|^{-2\gamma}\nabla v) &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^{2(\gamma+1)}} + |\nabla u|^q, \quad \text{dans } \Omega, \\ u, v &\geqslant 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S5g}$$

Pour $p, q > 1$, $0 < \lambda_1 \neq \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma} = (\frac{N-2(\gamma+1)}{2})^2$ avec $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ tel que $0 \in \Omega$, $N \geqslant 3$.

5.4.1 Résultats de non-existence

Introduisons tout d'abord les exposants critiques correspondants au système étudié (S5g),

$$p^+ = \frac{\sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)}{\sigma_{1,2}+1}, \quad q^+ = \frac{\sigma_{1,2} + 2(\gamma+1)}{\sigma_{1,1}+1}$$

et

$$\bar{p} = \frac{N - \sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}+1}, \quad \bar{q} = \frac{N - \sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}+1}$$

avec $\sigma_{1,i}$ et $\sigma_{2,i}$ sont définies dans (5.3.1). Notons que $N - \sigma_{1,i} = \sigma_{2,i} + 2(\gamma+1)$, pour $i = 1, 2$.

Les résultats de non-existence sont présentés dans le Théorème qui suit :

Théorème 5.4.1. *Supposons que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite pour $p, q > 1$, $0 < \lambda_1 \neq \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma}$ et $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$,* *1)* $p > \bar{p}$ *ou* $q > \bar{q}$.

2) $p_+ < p < \bar{p}$ *et* $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,2}+1)-2\gamma-1}$.

3) $q_+ < q < \bar{q}$ *et* $p > \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1)-2\gamma-1}$.

Alors, le système (S5g) *ne possède de sur-solutions positives au sens de la Définition 5.2.1.*

Remarquons que le système (S5g) a une structure symétrique, en utilisant les même démarches de démonstration pour le système (S5p),

Pour déterminer la courbe critique qui sépare la zone d'existence et de non-existence, nous suivrons de près les calculs utilisés pour le système précédent.

Nous soulignons que pour ce cas, de nouvelles difficultés apparaissent en raison de la présence d'un terme de gradient dans les deux équations.

Maintenant et de manière similaire au cas du système (S5p), l'idée principale de la démonstration est de prouver que toute solution positive (u, v) du système (S5g) possède une propriété d'auto-amélioration de la sommabilité. Autrement dit, pour des valeurs appropriées $\nu_0 > \sigma_1$ et $\mu_0 > 0$, nous pouvons construire des suites croissantes $\left(\nu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_n}}\,dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_n}}\,dx < \infty. \tag{5.4.1}$$

Nous illustrons dans les figures ci-dessous, les courbes permettant de séparer les zones d'existence et de non existence, pour les deux cas de figures à savoir, $\gamma = 0.6$ et $\gamma = -0.6$

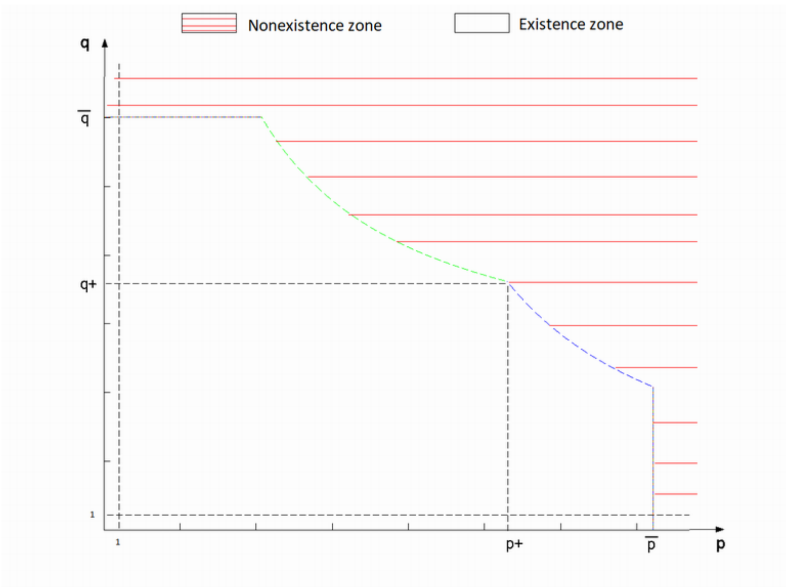

FIGURE 5.3 – Zones d'existence et de non-existence pour le système (S5g) pour $N = 7$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ et $\gamma = 0.6$

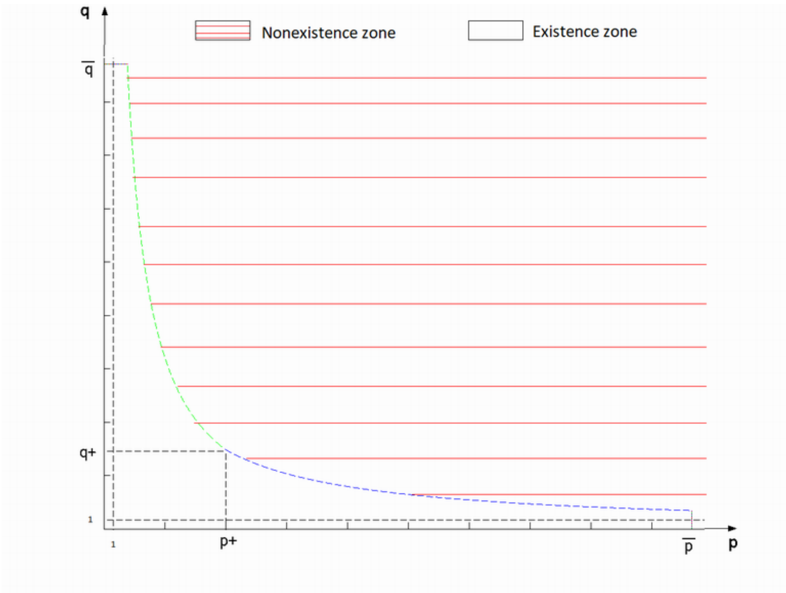

Figure 5.4 – Zones d'existence et de non-existence pour le système (S5g) pour $N = 7$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ et $\gamma = -0.6$

Démonstration. Supposons par contradiction que le système(S5g) admet une sur-solution faible (u, v).

1^{er} **cas :** $p > \bar{p}$ ou $q > \bar{q}$.

D'après Le Lemme 5.2.3, nous obtenons :

$$\int_\Omega |\nabla v|^p |x|^{-\sigma_{1,1}}\, dx < \infty \ \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx < \infty. \tag{5.4.2}$$

Comme $p < \frac{N}{\sigma_{1,1}+1}$ et $q < \frac{N}{\sigma_{1,2}+1}$, nous pouvons utiliser maintenant l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg [Théorème 1.2.8]. Pour un r assez petit tel que $B_r(0) \subset\subset \Omega$, ils existent des constantes positives $C_1(r, \Omega)$, $C_1(r, \Omega)$ telles que :

$$\int_{B_r(0)} \frac{v^p}{|x|^p} |x|^{-\sigma_{1,1}}\, dx \leqslant C \int_{B_r(0)} |\nabla v|^p |x|^{-\sigma_{1,1}}\, dx + \left(\int_{B_r(0)} v dx \right)^p < \infty. \tag{5.4.3}$$

et

$$\int_{B_r(0)} \frac{u^q}{|x|^q} |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx \leqslant C \int_{B_r(0)} |\nabla u|^q |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx + \left(\int_{B_r(0)} u dx \right)^q < \infty. \tag{5.4.4}$$

Comme $\mathcal{L}_{\lambda_1}(u) \geqslant 0$ et $\mathcal{L}_{\lambda_2}(v) \geqslant 0$, d'après le Lemme 5.2.2, ils existent des constantes positives C_1, C_2 et une boule $B_r(0) \subset \Omega$ pour r assez petit tel que : $v(x) \geqslant C_2|x|^{-\sigma_{1,2}}$ dans $B_r(0)$ et $u(x) \geqslant C_1|x|^{-\sigma_{1,1}}$. D'après (5.4.3) et (5.4.4) on obtient :

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p(\sigma_{1,2}+1)+\sigma_{1,1}}}\, dx < \infty \Rightarrow p \leqslant \frac{N - \sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}+1}. \tag{5.4.5}$$

et

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q(\sigma_{1,1}+1)+\sigma_{1,2}}}\, dx < \infty \Rightarrow q \leqslant \frac{N-\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}+1}. \tag{5.4.6}$$

ce qui nous donne une contradiction avec l'hypothèse $p > \bar{p}$, et $q > \bar{q}$, d'où la démonstration de la non-existence découle pour le premier cas.

$2^{\text{ème}}$ **cas :** $p_+ < p < \bar{p}$ **et** $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,2}+1)-2\gamma-1}$.

Nous avons supposé que le système (S5g) admet une sur-solution $(u,\, v)$, d'après le Lemme 5.2.3 nous avons

$$\int_\Omega |\nabla v|^p |x|^{-\sigma_{1,1}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^q |x|^{-\sigma_{1,2}}\, dx < \infty. \tag{5.4.7}$$

Le principal outil pour démontrer ce résultat est le processus proposé dans les chapitres précédents, il est basé sur la construction des suites croissantes $\big(\mu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\nu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\int_\Omega \frac{u}{|x|^{\mu_n}} < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v}{|x|^{\nu_n}} < \infty.$$

avec $\mu_0 = \sigma_{1,2} + 2(\gamma+1)$ et $\nu_0 = \sigma_{1,1} + 2(\gamma+1)$.

Par le biais le procédé itératif présenté précédemment, nous arrivons à démontrer l'existence de deux suites croissantes. $\big(\mu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\nu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\nu_{n-2}-2(\gamma+1)}{p} + 1 < & \mu_n & < \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\nu_{n-1}-2(\gamma+1)}{p} + 1, \\ \\ \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\mu_{n-1}-2(\gamma+1)}{q} + 1 < & \nu_n & < \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\mu_{n}-2(\gamma+1)}{q} + 1. \end{cases} \tag{5.4.8}$$

En conséquence, sur la base des calculs précédents, nous déduisons que :

$$\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^{q+\mu_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ et } \int_\Omega \frac{v^p}{|x|^{p+\nu_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty. \tag{5.4.9}$$

Nous avons aussi, $u(x) \geqslant C|x|^{-\sigma_{1,1}}$ et $v(x) \geqslant C'|x|^{-\sigma_{1,2}}$, donc

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\sigma_{1,1}+q+a_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ et } \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,2}+b_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty.$$

Ainsi, il est nécessaire que

$$\mu_n < N + 2(\gamma+1) - q(\sigma_{1,1}+1) \text{ et } \nu_n < N + 2(\gamma+1) - p(\sigma_{1,2}+1).$$

Définissons $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ telles que

$$\bar{\mu} = \lim_{n\to+\infty} \mu_n \text{ et } \bar{\nu} = \lim_{n\to+\infty} \nu_n.$$

Revenons à (5.4.8), nous déduisons que

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \dfrac{N}{p'} + \dfrac{\bar{\nu} - 2(\gamma+1)}{p} + 1, \\ \\ \bar{\nu} &= \dfrac{N}{q'} + \dfrac{\bar{\mu} - 2(\gamma+1)}{q} + 1. \end{cases}$$

En effectuant un calcul direct, il s'ensuit que

$$\bar{\nu} = N + \frac{pq + (1 - 2(\gamma+1))p - 2(\gamma+1)}{pq - 1}.$$

À ce stade, nous démontrons le résultat principal de la non-existence pour $p^+ < p < \bar{p}$.
Rappelons que nous avons supposé que $q > \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,2}+1)-2\gamma-1}$
D'après (5.4.9) et le Lemme 5.2.3, nous avons

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,1}+p+\nu_n-2(\gamma+1)}}\, dx \leqslant \int_{\Omega} \frac{v^p}{|x|^{q+\nu_n-2(\gamma+1)}}\, dx < \infty \text{ pour tout } n.$$

ce qui nous donne $p\sigma_{1,2} + b_n - 2(\gamma+1) < N$ pour tout n et donc par passage à la limite

$$p(\sigma_{1,1}+1) + \bar{\nu} \leqslant N + 2(\gamma+1)$$

Par conséquent, en remplaçant $\bar{\nu}$ par sa valeur, nous pouvons conclure que $q \leqslant \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,2}+1)-2\gamma-1}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse principale pour ce cas. Cela conclut la preuve du théorème pour le deuxième cas.
$3^{\text{ème}}$ **cas :** $q_+ < q < \bar{q}$ **et** $p > \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1)-2\gamma-1}$**.**
En prenant en considération la symétrie du système (S5g), la non-existence s'établit en inversant les rôles de p et q. Cela conclut la démonstration du Théorème. ■

5.4.2 Résultats d'existence

Dans cette partie, nous exposons les résultats d'existence relatifs au système (S5g) pour les différentes valeurs de p et de q. Ces résultats sont énoncés dans le théorème suivant :

Théorème 5.4.2. *Soient $p, q > 1$, $\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$, et $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma}$, supposons que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée dans $B_1(0)$*

1) $p < p^+$ et $q < q^+$.

2) $p^+ < p < \bar{p}$ et $q < \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,2}+1)-2\gamma-1}$.

3) $q_+ < q < \bar{q}$ et $p < \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1)-2\gamma-1}$

4) $p = p^+$ et $q < q^+$ ou $q = q^+$ et $p < p^+$

Alors le système (S5g) admet au moins une sur-solution positive faible au sens de la Définition 5.2.1 dans $B_1(0)$.

Démonstration. Suivant les mêmes arguments utilisées précédemment, construisons des sur-solutions dans $B_1(0)$ pour chaque cas, par le biais des solutions radiales.

1^{er} **cas :** $1 < p < p^+$ et $1 < q < q^+$

Supposons $u(x) = c_1|x|^{-\sigma_{1,1}} - c_2|x|^{-\tau_1}$ où $\tau_1 = p(\sigma_{1,2}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,1}$

et $v(x) = c_3|x|^{-\sigma_{1,2}} - c_4|x|^{-\tau_2}$ où $\tau_2 = q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,2}$

Si les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 vérifiant les conditions suivantes : $c_3^p\sigma_{1,2}^p \leqslant -c_2\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau_1)$ et $c_1^q\sigma_{1,1}^q \leqslant -c_4\mathcal{P}_{\lambda_2}(\tau_2)$, alors (u, v) est une sur-solution positive pour le système (S5g) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$.

$2^{\text{ème}}$ **cas :** $p^+ < p < \bar{p}$ et $q < \frac{\sigma_{1,2}+2(\gamma+1)}{p(\sigma_{1,2}+1)-2\gamma-1}$.

Soient $u(x) = c_1|x|^{-\tau_1}$ avec $\sigma_{1,1} < \tau_1 = p(\sigma_{1,2}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{2,1}$,

et $v(x) = |x|^{-\sigma_{1,2}} - c_2|x|^{-\tau_2}$ avec $\tau_2 = q(p(\sigma_{1,2}+1) - 2(\gamma+1) + 1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,2}$.

Si $c_1\mathcal{P}(\tau_1) \geqslant |c_2\tau_2 - \sigma_{1,2}|^p$ et $c_1\mathcal{P}(\tau_1) \geqslant |c_2\tau_2 - \sigma_{1,2}|^p$, alors (u, v) est une sur-solution pour le système (S5g) dans $B_1(0)$.

$3^{\text{ème}}$ **cas :** $q^+ < q < \bar{q}$ et $p < \frac{\sigma_{1,1}+2(\gamma+1)}{q(\sigma_{1,1}+1)-2\gamma-1}$

Dans ce cas, supposons que : $u(x) = |x|^{-\sigma_{1,1}} - c_1|x|^{-\tau_1}$ où $\tau_1 = p((\sigma_{1,1}+1)q - 2(\gamma+1) + 1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,1}$.

et $v_(x) = c_2|x|^{-\tau_2}$ où $\sigma_{1,2} < \tau_2 = q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{2,2}$.

(u, v) est une sur-solution du système (S5g) dans $B_1(0)$ si et seulement si $-c_1\mathcal{P}(\tau_1) \geqslant c_2^p\tau_2^p$ et $c_2\mathcal{P}(\tau_2) \geqslant |c_1\tau_1 - \sigma_{1,1}|^q$.

$4^{\text{ème}}$ **cas :** $p = p^+$ et $q < q^+$

Soient $u(x) = |x|^{-\sigma_{1,1}}(-\ln|x|)$ et $v(x) = |x|^{-\sigma_{1,2}} - c_1|x|^{-\tau}$ avec $\tau = q(\sigma_{1,1}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,2}$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_1}u(x) &= C|x|^{-\sigma_{1,1}-2(\gamma+1)} \quad \text{où} \quad C = N - 2(\gamma+1) - 2(\gamma+1)\sigma_{1,1} \geqslant 0 \\
&= C|x|^{(-\sigma_{1,2}-1)p} \geqslant |\nabla v_(x)|^p
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_2}v(x) &= -c_1\mathcal{P}(\tau)|x|^{-\tau-2(\gamma+1)} = -c_1\mathcal{P}(\tau)|x|^{(-\sigma(\lambda_1)-1)q} \\
&\geqslant |-\sigma_{1,1}|x|^{-\sigma_{1,1}-1}(-\ln|x|) - |x|^{-\sigma_{1,1}-1}|^q = |x|^{(-\sigma(\lambda_1)-1)q}|\ln|x| - 1|^q = |\nabla u|^q
\end{aligned}$$

d'où (u, v) est une sur-solution positive du système (S5g) dans $B_1(0)$.

$5^{\text{ème}}$ **cas :** $q = q^+$ et $p < p^+$

Dans ce dernier cas, (u, v) est une sur-solution du système (S5g), avec :
$u(x) = |x|^{-\sigma_{1,1}} - |x|^{-\tau}$ et $v(x) = |x|^{-\sigma_{1,2}}(-\ln|x|)$ où $\tau = p(\sigma_{1,2}+1) - 2(\gamma+1) < \sigma_{1,1}$
en effet,

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u(x) = -\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau)|x|^{-\tau-2(\gamma+1)} = -\mathcal{P}_{\lambda_1}(\tau)|x|^{-(\sigma_{1,2}-1)p} \geqslant |x|^{(-\sigma(\lambda_2)-1)p}|\ln|x| - 1|^p = |\nabla v|^p$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\lambda_2} v(x) &= C|x|^{-\sigma_{1,2}-2(\gamma+1)} \quad \text{où} \quad C = N - 2(\gamma+1)(\sigma_{1,2}+1) \geqslant 0 \\
&= C|x|^{(-\sigma_(\lambda_1)-1)q} \\
&\geqslant |-\sigma_{1,1}|x|^{-\sigma_{1,1}-1} + \tau|x|^{-\tau}|^q = |\nabla u|^q
\end{aligned}$$

■

Remarque. *Supposons que :* $(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) = (C_1|x|^{-\beta-2\gamma}, C_2|x|^{-\beta-2\gamma})$ *, pour* $(u(x), v(x)) = (c_1|x|^{-\beta}, c_2|x|^{-\beta})$*, nous avons*

$$(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) = (u(x)|x|^{-2\gamma}, v(x)|x|^{-2\gamma})$$

Par conséquent

$$\nabla\tilde{u} = C_1|x|^{-2\gamma}\nabla u(x) \quad \textit{et} \quad \nabla\tilde{v} = C_2|x|^{-2\gamma}\nabla u(x)$$

Ce changement de variable, nous permet de trouver le système ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
-\Delta\tilde{u} - \lambda_1\dfrac{\tilde{u}}{|x|^2} &=& v^p|x|^{2\gamma p} & \textit{dans } \Omega, \\
-\Delta\tilde{v} - \lambda_2\dfrac{\tilde{v}}{|x|^2} &=& |\nabla\tilde{u}|^q|x|^{2\gamma q} & \textit{dans } \Omega, \\
\tilde{u},\, \tilde{v} &>& 0 & \textit{dans } \Omega, \\
\tilde{u} = \tilde{v} &=& 0 & \textit{sur } \partial\Omega,
\end{array}\right. \tag{S6}$$

Résultats de non-existence : Courbe optimale

Notre objectif est de montrer l'existence d'une courbe critique telle que l'existence et la non-existence de solutions du système précédent dépendent de la position de (p, q) *en fonction de* γ *par rapport à cette courbe.*

Commençons par définir les exposants critiques corresponds à ce système,

$$p^+ := \frac{\sigma_{1,1}+2}{\sigma_{1,2}-2\gamma}, \quad q^+ := \frac{\sigma_{1,2}+2}{\sigma_{1,1}+1-2\gamma} \tag{5.4.10}$$

et

$$\bar{p} := \frac{N-\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}-2\gamma}, \quad \bar{q} := \frac{N-\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}-2\gamma+1}. \tag{5.4.11}$$

avec

$$\sigma_{1,i} = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_N - \lambda_i}, \qquad \sigma_{2,i} = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_N - \lambda_i} \tag{5.4.12}$$

sont les racines de l'équation algébrique $\mathcal{P}_{\lambda_i}(\beta) = -\beta^2 + (N-2)\beta - \lambda_i = 0$. *pour* $i = 1, 2$.

La première région de non-existence dans le plan (p, q) *sera la suivante :*

Théorème 5.4.3. *Soit* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_N$ *fixé, supposons* $p, q > 1$ *et* $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$ *telles que soit* $p \geqslant \bar{p}$ *ou* $q \geqslant \bar{q}$. *alors le système* (S6) *n'admet pas de solution faible positive dans le sens de la Définition 1.2.6.*

Démonstration. *Par contradiction, supposons que le système* (S6) *possède une solution faible positive* $(\tilde{u}, \tilde{v})$. *Nous avons deux cas :*

Premier cas : *Supposons que* $q \geqslant \bar{q}$. *Utilisant l'équation vérifiée par* $\tilde{v}$ *et le Lemme 1.3.1, nous obtenons*

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^q |x|^{-\sigma_{1,2}+2\gamma q}\, dx < \infty.$$

Alors, d'après le Théorème 1.2.8, pour un r *assez petit tel que* $B_r(0) \subset\subset \Omega$, *il existe une constante positive* $C(r, \Omega)$ *telle que :*

$$\int_{B_r(0)} \frac{\tilde{u}^q}{|x|^q} |x|^{-\sigma_{1,2}+2\gamma q}\, dx \leqslant C \int_{B_r(0)} |\nabla \tilde{u}|^q |x|^{-\sigma_{1,2}+2\gamma q}\, dx + \left(\int_{B_r(0)} \tilde{u} dx \right)^q < \infty. \tag{5.4.13}$$

Rappelons que $-\Delta \tilde{u} - \lambda \dfrac{\tilde{u}}{|x|^2} \geqslant 0$, *alors d'après le Lemme 1.3.1, il existe une constante positive* $\bar{C}(r)$ *telle que* $\tilde{u}(x) \geqslant \bar{C}|x|^{-\sigma_{1,1}}$ *dans* $B_r(0)$. *En revenant à* (5.4.13), *nous avons :*

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{q\sigma_{1,1}+q+\sigma_{1,2}-2\gamma q}}\, dx < \infty. \tag{5.4.14}$$

Comme $\frac{N-\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}-2\gamma+1} = \bar{q}$, *alors* $q\sigma_{1,1} + q + \sigma_{1,2} - 2\gamma q \geqslant N$, *ce qui est en contradiction avec* (5.4.14). *Par conséquent, le résultat de la non-existence découle dans ce cas.*

Deuxième cas : *Supposons que* $p \geqslant \bar{p}$. *D'après l'équation vérifiée par* $\tilde{u}$ *et le Lemme 1.3.2, nous obtenons :*

$$\int_{B_r(0)} \tilde{v}^p |x|^{-\sigma_{1,1}+2\gamma p}\, dx < \infty. \tag{5.4.15}$$

Comme $-\Delta\tilde{v} - \lambda\dfrac{\tilde{v}}{|x|^2} \geqslant 0$, *en utilisant le Lemme 1.3.1, nous avons :*

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{p\sigma_{1,2}+\sigma_{1,1}-2\gamma p}}\,dx < \infty. \tag{5.4.16}$$

Comme $\frac{N-\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,2}-2\gamma} = \bar{p}$, *alors* $p\sigma_{1,2}+\sigma_{1,1}-2\gamma p \geqslant N$. *ce qui nous conduit à une contradiction avec l'hypothèse (5.4.16). D'où la démonstration du Théorème 5.4.3.* ■

Nous présentons dans le Théorème suivant la courbe critique qui sépare les régions d'existence er de non-existence pour le système (S6)

En utilisant notre processus itératif avec les poids $\tilde{v}^p|x|^{2\gamma p}$ ***et*** $|\nabla\tilde{u}|^q|x|^{2\gamma q}$***, nous obtenons le résultat de non-existence suivant :***

Théorème 5.4.4. *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaisante pour* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \Lambda_N$, $p, q > 1$ *et* $\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$ *:*

I) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $q > \frac{\sigma_{1,2}+2}{p(\sigma_{1,2}-2\gamma)-2\gamma-1}$.

II) $q^+ < q < \bar{q}$ *et* $p > \frac{\sigma_{1,1}+2}{q(\sigma_{1,1}-2\gamma+1)-2\gamma-2}$.

alors le système (S6) n'admet pas de sur-solutions faibles positives.

Nous pouvons maintenant déduire la zone d'existence donnée ci-dessous :

Théorème 5.4.5. *Soient* $p, q > 1$, $\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$, *et* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda_{N,\gamma}$, *supposons que l'une des hypothèse suivante est vérifiée dans* $B_1(0)$

1) $p < p^+$ *et* $q < q^+$.

2) $p^+ < p < \bar{p}$ *et* $q < \frac{\sigma_{1,2}+2}{p(\sigma_{1,2}-2\gamma)-2\gamma-1}$.

3) $q_+ < q < \bar{q}$ *et* $p < \frac{\sigma_{1,1}+2}{q(\sigma_{1,1}-2\gamma+1)-2\gamma-2}$

4) $p = p^+$ *et* $q < q^+$ *ou* $q = q^+$ *et* $p < p^+$

Alors le système (S6) possède au moins une sur-solution positive faible au sens de la Définition 1.2.6 dans $B_1(0)$.

Perspectives et problèmes Ouverts

L'objet de cette partie est d'énoncer quelques perspectives et de présenter les problèmes ouverts rencontrés durant l'élaboration de cette thèse.

• L'existence ou la non-existence de solutions positives sur les courbes critiques semble être un problème intéressant. L'idée principale pour le cas d'une équation avec un exposant critique est d'obtenir un comportement plus précis de la solution près de l'origine. Cela, se fait en utilisant un argument de comparaison approprié. Cette approche ne semble pas applicable dans notre contexte et de nouvelles idées peuvent être proposées.

• Pour le cas des systèmes liés à l'opérateur non-linéaire $-\Delta_p$, puisque l'intégration par parties n'est pas possible nous ne pouvons pas utiliser le processus d'itération proposé dans cette thèse. Cependant, pour certains cas particuliers, par l'utilisation des inégalités appropriées, nous serons en mesure de traiter le système en question. Ce qui fait l'objet de nos prochains travaux de recherche dans cette thématique.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, E.-H. Laamri, *On the existence of positive solutions to semilinear elliptic systems involving gradient term.* Appl. Anal. 98 (2019), no. 7, 1289–1306.

[2] B. Abdellaoui, A. Attar, S.-E. Miri, *Nonlinear singular elliptic problem with gradient term and general datum.* J. Math. Anal. Appl. 409 (2014) 362-377.

[3] B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio, I. Peral, *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient.* J. Differential Equations. 222 (2006), 21–62.

[4] B. Abdellaoui, I. Peral, *On quasilinear elliptic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities.* Comm. Pure Appl. Anal. 2, 539-566 (2003).

[5] B. Abdellaoui, I. Peral, *The equation* $-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = |\nabla u|^p + cf(x)$ *The optimal power.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci (5). Vol. (2007), 159-183.

[6] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacien with a critical potential* ,Ann. di .Math,**182**,(2003), 247-270.

[7] N. E. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures.* SIAM J. Math. Anal, 24, (1993), 23–35.

[8] A. Attar, R. Bentifour, *Existence of positive solutions to nonlinear elliptic systems involving gradient term and reaction potential* . Electronic Journal of Differential Equations. (2017), no. 113, 1–10.

[9] A. Attar, R. Bentifour, E.-H. Laamri, *Nonlinear Elliptic systems with coupled gradient terms.* Acta Appl Math. https ://doi.org/10.1007/s10440-020-00329-7.

[10] P. Baras, M. Pierre, *Critère d'existence des solutions positives pour des équations semi-lineaires non monotones.* Ann. I.H.P. 2, (3) (1985), 185-212.

[11] P. Baras, M. Pierre *Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires,* Ann. Inst. Fourier **34**, no. 1 (1984), 185-206.

[12] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouet, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez*An* L^1*-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,* Ann Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 22, n^{0}2 (1995), 241-273

[13] L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat, *A unified representation of two existence results for problems with natural growth.* Research Notes in Mathematics 296 (1993), 127–137.

[14] L. Boccardo, L. Orsina, A. Porretta, *Strongly coupled elliptic equations related to mean-field games systems*, J. Differential Equations **261**(2016), 1796–1834.

[15] L. Boccardo, L. Orsina, J.-P. Puel, *A quasilinear elliptic system with natural growth terms.* Annali di Matematica. 194, no. 3 (2015), 1733–1750.

[16] A. Bougherara, A. Attar, A. Dieb, B. Abdellaoui, Existence and Nonexistence results for non-linear elliptic systems involving Hardy potential and potential-gradient terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S.*doi :10.3934/dcdss.2024106.

[17] A. Bougherara, A. Attar, A. Dieb, B. Abdellaoui, Critical curve for semi-linear systems with potential and gradient terms. *Preprint.*

[18] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et application, Ed, Masson, (1983).

[19] H. Brezis, X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solution,* Boll. Unione. Mat. Ital. Sez. B, 8 (1998), 223-262.

[20] H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei, *On a semilinear elliptic equation with inverse-square potential*, Selecta Math. (N.S.) 11, 1-7 (2005).

[21] H. Brezis, A. C. Ponce *Kato's inequality when Δu is a measure* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser(2004).

[22] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights.* Compositio Math. 53 (1984), no. 3, 259–275.

[23] H. Chen, D.Rădulescu, B.Zhang, *Positive supersolutions for the Lane-Emden system with inverse-square potentials.*2020. https ://arxiv.org/pdf/2011.02074.pdf.

[24] H. Chen, F. Zhou, *Isolated singularities for elliptic equations with Hardy operator and source nonlinearity*, Discrete and continuous dynamical systems .Volume 38, Number 6, June 2018.

[25] S. Clain, J. Rappaz, M. Swierkosz, R. Touzani, *Numerical modeling of induction heating for two dimentional geometrie,* Math. Models Methods Appl. Sci. 3, (1993), no. 6, 805–822.

[26] D.G. De Figueiredo, I. Peral, J. Rossi, *The critical hyperbola for a Hamiltonian elliptic system with weights*, Annali di Matematica Pura ed Applicata. 187(2008), 531-545.

[27] J. I. Diaz, M. Lazzo, P. G. Schmidt, *Large solutions for a system of elliptic equation arising from fluid dynamics.* Siam Journal on Mathematical Analysis, 37 (2005), 490–513.

[28] L. Dupaigne, *Équations elliptiques semilineaires avec potentiel singulier.*, Mathematics [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. English. NNT :tel-00002721.

[29] L. Dupaigne, *A nonlinear elliptic PDE with the inverse square potential*, J. Anal. Math. 86 (2002), 359-398.

[30] L. Dupaigne, G.Nedev, *Semilinear elliptic PDE's with singular potential.* Adv.Differential Equations, 7 (2002), 973-1002.

[31] C. Escudero, I. Peral, *Some fourth order nonlinear elliptic problems related to epitaxial growth.* J. Differential Equations, 254 (2013), 2515–2531.

[32] K. Hansson, V. G. Maz'ya, I. E. Verbitsky, *Criteria of solvability for multidimensional Riccati equations.* Ark. Mat. 37, (1999), 87–120.

[33] M. Jleli, B. Samet, *On the critical behavior for a Sobolev-type inequality with Hardy potential.* Comptes Rendus. Mathématique, Vol. (362), (2024), 87-97.

[34] I. Peral, F. Soria, *Elliptic and Parabolic Equations involving the Hardy-Leray Potential,* De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. 38 (2021).

[35] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 15 (1965), 189–258.

Résumé:

Cette thèse propose une approche innovante pour résoudre des systèmes d'EDP non linéaires elliptiques avec des termes dépendant du gradient et/ou du potentiel. Un nouveau schéma itératif est proposé dans les espaces de Lebesgue pondérés par le biais des inégalités de Hardy et de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Une courbe optimale est présentée pour distinguer les zones d'existence et de non-existence selon les paramètres p et q. Des sur-solutions radiales explicites sont également construites pour des domaines bornés.

Mots clés: Système d'EDP elliptique; Inégalité de Hardy; Espace de Sobolev pondéré; Termes gradient/Potentiel.

Abstract:

This thesis proposes an innovative approach to solving nonlinear elliptic PDE systems with gradient-dependent and/or potential terms. A new iterative scheme is introduced in weighted Lebesgue spaces through Hardy and Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. An optimal curve is presented to distinguish the existence and non-existence regions based on the parameters p and q. Explicit radial supersolutions are also constructed for bounded domains.

Key words: Elliptic PDE system; Hardy inequality; Weighted Sobolev space; Gradient/Potential terms.

ملخص

تقترح هذه الأطروحة نهجًا مبتكرًا لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية الإهليلجية مع مصطلحات تعتمد على التدرج و/أو المحتمل. يتم تقديم مخطط تكراري جديد في فضاءات ليبيغ الموزونة من خلال متراجحات هاردي وكافاريلي-كون-نيرينبيرج. يتم تقديم منحنى أمثل لتمييز مناطق الوجود وعدم الوجود بناءً على المعاملات p و q. كما يتم بناء حلول فوقية شعاعية صريحة للمجالات المحدودة.

الكلمات المفتاحية: نظام المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية؛ متراجحة هاردي؛ فضاء سوبوليف الموزون؛ مصطلحات التدرج/المحتمل.