

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعلیم العالی والبحث العلمی

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd- Tlemcen -

Faculté de TECHNOLOGIE



## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Génie Mécanique

**Spécialité** : construction mécanique

**Par** : Hachemaoui Toufik

Hachemaoui Chahinez

### Sujet

*Etude des vibrations libres des poutres en matériaux composites avancés en graphène*

Soutenu publiquement, le 17 / 06 / 2025 , devant le jury composé de :

M. Hamza Chérif S.M.	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M. Boukhalfa Abdelkarim	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
M. Guenifed Abdelhalim	MAA	Université de Tlemcen	Encadreur
M. Bensaid Ismail	MCA	Université de Tlemcen	Co-Encadreur

Année universitaire :2024/2025

## ***Remerciements***

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude envers M.Guenifed et M. Bensaïd , dont l'aide précieuse et l'encadrement rigoureux ont été essentiels à la réalisation de ce travail. Leur patience, leur disponibilité constante, ainsi que la qualité exceptionnelle de leur accompagnement ont grandement contribué à la réussite de ce mémoire. Leur confiance et leurs conseils avisés ont été un soutien inestimable tout au long de ce projet de recherche.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble des professeurs du département de génie mécanique, pour la qualité de leur enseignement et les connaissances qu'ils nous ont transmises durant nos années d'études.

Nous souhaitons exprimer notre reconnaissance aux membres du jury, Professeur M. Hamza Chérif Sidi Mohamed pour avoir accepté de présider cette soutenance, ainsi qu'au Professeur M. Boukhalfa Abdelkarim pour avoir examiné ce mémoire.

Un remerciement particulier va à nos camarades de classe et amis, pour leurs encouragements, leurs échanges intellectuels enrichissants et les moments de partage tout au long de ce parcours.

Nous n'oublions pas nos familles, dont le soutien continu et la confiance ont été une source constante de motivation durant toute notre formation académique.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire. Que ce soit par des discussions enrichissantes, des conseils ou simplement leur présence, leur contribution a été précieuse. Ce mémoire est le fruit d'un travail collectif, et nous sommes profondément reconnaissants envers tous ceux qui nous ont accompagnés.

## ***Dédicaces***

### ***À nos chers parents***

*Aucun mot ne saurait exprimer pleinement toute notre gratitude et notre amour pour vous. Vous avez été nos piliers, nos guides et nos soutiens les plus fidèles tout au long de ce parcours académique. Votre patience infinie et vos encouragements constants ont été une source inépuisable de force et de détermination. Vous avez cru en nous lorsque le doute s'installait, et c'est grâce à vous que nous avons pu franchir cette étape cruciale de notre vie. Merci pour vos sacrifices, vos conseils avisés et votre présence rassurante à chaque instant. Ce projet est autant le vôtre que le nôtre, car sans vous, rien de tout cela n'aurait été possible.*

### ***À nos frères et sœurs***

*Merci d'avoir été à nos côtés tout au long de ce chemin. Votre soutien, vos encouragements et vos rires ont rendu ce voyage plus léger et plus joyeux. Vous avez été nos compagnons de route, nos confidents et nos sources d'inspiration. Chacun de vous occupe une place précieuse dans nos cœurs, et nous sommes profondément reconnaissants de vous avoir dans nos vies.*

## ***Résumé***

L'analyse modale consiste à examiner les propriétés dynamiques des structures et de leurs composants dans le domaine fréquentiel. Dans ce mémoire, on vise à déterminer les fréquences propres et les modes propres des poutres renforcées par les nano plaquettes GPL, répartition des nano plaquettes et conditions aux limites à l'aide de modèles mathématiques, puis à comparer les résultats avec ceux d'un modèle de poutre à gradient de propriétés FGM. La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timochenko sont utilisées pour l'analyse mathématique. Un programme en Matlab est établi pour calculer les fréquences propres. Les résultats obtenus sont satisfaisants et présentent une bonne corrélation.

**Mots clés :** Poutres composite, Graphène, Modes propres, Vibrations, Poutre (FGM), Fréquences naturelles .

## *Abstract*

Modal analysis involves examining the dynamic properties of structures and their components in the frequency domain. In this thesis, the aim is to determine the eigenfrequencies and eigenmodes of beams strengthened with GPL nanoplatelets, nanoplatelet distribution and boundary conditions using mathematical models, and then to compare the results with those of a Functionally Graded Material (FGM) beam model.

Euler-Bernoulli and Timochenko beam theory are used for the mathematical analysis. a MATLAB program was developed to calculate the natural frequencies. The results obtained are satisfactory and show good correlation.

**Key words:** Composite beams, Graphene, Eigenmodes, vibration, FGM beam, natural frequencies.

## ملخص

يتضمن التحليل النمطي فحص الخصائص الديناميكية للهياكل ومكوناتها في مجال التردد. الهدف من هذه الأطروحة هو تحديد الترددات الأصلية والأنماط الأصلية للحزم المعززة بكرات نانوية من نوع GPL، وتوزيع الكريات النانوية والظروف الحدية باستخدام نماذج رياضية، ثم مقارنة النتائج بنتائج نموذج حزمة FGM. تُستخدم نظرية أويلر-بيرنولي ونظرية شعاع تيموشينكو للتحليل الرياضي. يُستخدم برنامج MATLAB لحساب الترددات الطبيعية. النتائج التي تم الحصول عليها مرضية وتظهر ارتباطًا جيدًا.

**الكلمات المفتاحية:** العوارض المركبة، الغرافين، الأطوار الخاصة، الاهتزازات، عارضة ذات تدرج في الخصائص (FGM)، الترددات الطبيعية.

## Sommaire

Remerciements.....	I
Dédicaces.....	II
Résumé.....	III
Abstract.....	IV
ملخص.....	V
Sommaire.....	VI
Liste des figures.....	IX
Liste des tableaux.....	XII
Liste des symboles.....	XIII
Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites</b>	
1. Introduction.....	4
2. Les caractéristiques générales.....	4
3. Classification des matériaux composites .....	5
3.1 Classification effectuée par rapport au constituant de la matrice.....	6
3.2 Classification effectuée par rapport à la géométrie.....	6
3.2.1 Composites à fibres.....	6
3.2.2 Composites à particules.....	7
3.2.3 Composites structuraux.....	7
3.2.4 Les stratifiés.....	7
3.2.5 Les Composites tissés.....	8
4. Constituants des matériaux composites.....	9
4.1 Les matrices.....	9
4.1.1 Les résines thermoplastiques.....	10
4.1.2 Les résines thermodurcissables.....	11
4.1.3 Les résines en céramique.....	12
4.1.4 Les résines métalliques.....	12
4.2 Les renforts.....	12
4.2.1 Les fibres de verre.....	13

4.2.2	Fibres de carbone.....	15
4.2.3	Fibres d'aramide.....	16
4.2.4	Kevlar.....	16
4.2.5	Fibres céramiques.....	16
4.2.6	Autres types de fibres.....	17
4.3	Les charges.....	17
4.4	Les additifs.....	18
4.5	L'interface fibre/matrice.....	18
5.	Domaines d'applications de matériaux composites.....	19
6.	Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	21
7.	L'origine de Graphène.....	22
7.1	Les formes allotropiques classiques de carbone.....	23
7.1.1	Le diamant.....	23
7.1.2	Graphite.....	23
7.2	Les nouvelles formes de carbone.....	24
7.2.1	Les fullerènes.....	24
7.2.2	Les nanotubes de carbone (NTC) .....	25
7.2.3	Le graphène.....	26
7.3	La production du graphène .....	27
7.4	Les propriétés du Graphène.....	30
7.5	Les applications du graphène.....	31
	Conclusion .....	32
<b>Chapitre II : Théories des poutres composites</b>		
1.	Introduction.....	34
2.	Les différentes théories des poutres.....	35
2.1	Théorie d'Euler Bernoulli EBT ou bien théorie classique des poutres CBT.....	35
2.1.1	Hypothèses.....	35
2.1.2	Champ de déplacements.....	36
2.1.3	Relation contrainte déformation.....	36
2.2	Théorie de Timoshenko.....	37
2.3	Théorie d'ordre élevé HSDT.....	39

---

2.4 La théorie raffinée.....	41
2.5 La théorie de déformation quasi-3D.....	43
2.6 La théorie de déformation par cisaillement d'ordre zéro.....	44
2.7 La théorie de Levinson.....	44
Conclusion.....	46
<b>Chapitre III : Formulation mathématique</b>	
1. Introduction.....	48
2. Propriétés matérielles effectives des GPLRC.....	48
3. Formulations théoriques.....	50
3.1 Théorie d'Euler Bernoulli pour les poutres composites avancée en Graphène.....	50
3.1.1 Cinématique et Equations du mouvement.....	50
3.1.2. Relations constitutives.....	51
3.1.3 Les équations du mouvement.....	53
3.1.3.1 Principe de Hamilton.....	53
3.1.4 Méthode de solution.....	54
3.2 Théorie de Timoshenko.....	57
3.2.1 Cinématique et Equations du mouvement.....	57
3.2.2 Relations constitutives.....	57
3.2.3 Les équations du mouvement.....	58
3.2.3.1 Principe de Hamilton.....	61
3.2.4 Méthode de solution.....	62
Conclusion.....	66
<b>Chapitre IV : Résultats et interprétation</b>	
1. Introduction.....	68
2. Validation et interprétation des résultats .....	68
2.1 selon la théorie d'Euler Bernoulli.....	68
2.2 selon la théorie de Timochenko .....	70
3. Etude de Convergence.....	70
3.1 selon la théorie d'Euler Bernoulli.....	71

3.2 selon la théorie de Timochenko.....	72
4. Etude paramétrique.....	73
Conclusion.....	86
Conclusion générale.....	88
Références bibliographiques.....	89

## Liste des figures

### Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites

<b>Figure I- 1</b> : Schéma de matériau composite.....	5
<b>Figure I- 2</b> : Classification des matériaux composites. ....	6
<b>Figure I- 3</b> : Schéma d'un matériau composite .....	7
<b>Figure I- 4</b> : composite stratifié .....	8
<b>Figure I- 5</b> : Représentation d'un pli unidirectionnel.....	8
<b>Figure I- 6</b> : Structure sandwich .....	9
<b>Figure I- 7</b> : Différents constituants d'un matériau composite .....	9
<b>Figure I- 8</b> : Organigramme des différentes familles de matrice .....	10
<b>Figure I- 9</b> : Les différents types de renfort de base .....	13
<b>Figure I- 10</b> : Fibre de verre. ....	13
<b>Figure I- 11</b> : Les différents types de renfort de base .....	14
<b>Figure I- 12</b> : Fibres de Graphite (a), fibre de Carbone (b) .....	15
<b>Figure I- 13</b> : Fibres d'aramide. ....	16
<b>Figure I- 14</b> : Domaines d'applications de matériaux composites.....	21
<b>Figure I- 15</b> : Allotropes du carbone .....	23
<b>Figure I- 16</b> : Une photo d'une pierre de diamant avec la structure cristalline du diamant ....	24
<b>Figure I- 17</b> : la roche de graphite avec Structure du graphite hexagonal .....	25
<b>Figure I- 18</b> : (a) Structure du fullerène C60 ; (b) un ballon de foot .....	25
<b>Figure I- 19</b> : Représentation de la courbure d'une feuille de graphène en CNTs.....	26
<b>Figure I- 20</b> :Empilement d'une feuille de graphène pour former un nanotube de carbone ...	26
<b>Figure I- 21</b> : Structure du Graphène. ....	27
<b>Figure I- 22</b> : Illustration schématique des principales configurations expérimentales pour la production du graphène .....	30

### Chapitre II: Théories des poutres composites

<b>Figure II- 1</b> : Modèle de poutre Euler Bernoulli soumise à une charge transversale EB.....	35
<b>Figure II- 2</b> : Cinématique de Timoshenko .....	38
<b>Figure II- 3</b> : variation de la fonction de gauchissement .....	39
<b>Figure II- 4</b> : Cinématique de la théorie d'ordre élevé HSDT. ....	39

<b>Figure II- 5</b> : Variation de la fonction de cisaillement $f(z)$ des différents modèles d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la poutre. ....	41
<b>Figure II- 6</b> : La dérivée de la fonction de cisaillement $g(z)$ des différents modèles d'ordre élevé varie en fonction de l'épaisseur de la poutre. ....	41
<b>Figure II- 7</b> : Définition des déplacements positifs et des rotations .....	45
<b><u>Chapitre III</u> : Formulation mathématique</b>	
<b>FigureIII- 1</b> : Configuration et système de coordonnées d'une poutre GPLRC multicouche. ....	48
<b><u>Chapitre IV</u> : Résultats et interprétations</b>	
<b>Figure IV- 1</b> : Influence du nombre de couches (NL) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différents modèles (U. GPLRC, X. GPLRC, O. GPLRC, A. GPLRC) dans le système X-GPLRC S-S ( $n=1$ , $W_{GPL}=0.5\%$ , $L/h=5$ ) .....	71
<b>Figure IV- 2</b> : Influence du nombre de couches (NL) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différents types de distribution (U-GPLRC, X-GPLRC, O-GPLRC, A-GPLRC) .....	72
<b>Figure IV- 3</b> : Influence de la fraction massique des plaquettes de graphène $W_{GPL}$ (%) sur la fréquence adimensionnelle pour différents rapports d'élancement ( $L/h$ ) dans le système X-GPLRC S-S ( $n=1$ , $NL=20$ ) .....	73
<b>Figure IV- 4</b> : Influence du rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différentes fractions massiques de graphène ( $W_{GPL}=0\%$ , $0,3\%$ , et $0,5\%$ .) dans le système X-GPLRC, S-S, ( $n=1$ , $NL=20$ ). .....	74
<b>Figure IV- 5</b> : Influence du rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différents modèles (U. GPLRC, X. GPLRC, O. GPLRC, A. GPLRC) dans le système GPLRC S-S ( $NL=20$ , $n=1$ , $W_{GPL}=0.5\%$ ).....	75
<b>Figure IV- 6</b> : Influence du rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différentes conditions (mode) dans le système X-GPLRC S.S ( $W_{GPL}=0.5\%$ , $NL=20$ ) ...	76
<b>Figure IV- 7</b> : Influence du rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différentes conditions (S-S, C-S, C-C) dans le système X-GPLRC ( $NL=20$ , $W_{GPL}=0.5\%$ ). .....	77
<b>Figure IV- 8</b> : Influence du rapport $bgpl/tgpl$ sur la fréquence adimensionnelle pour.....	78
<b>Figure IV- 9</b> : Influence de la fraction massique des plaquettes de graphène ( $W_{GPL}$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différentes valeurs de rapport d'élancement $L/h$ .....	80
<b>Figure IV- 10</b> : Influence du rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différentes fractions massiques de graphène ( $W_{GPL}$ ). .....	81
<b>Figure IV- 11</b> : Influence du rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle $\omega$ pour différents modèles (U-GPLRC, X-GPLRC, O-GPLRC, A-GPLRC) avec GPLRC (S.S, $n=1$ , $NL=20$ , $W_{GPL}=0.5\%$ ).....	82

**Figure IV- 12** : Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\omega$  pour les trois premiers modes dans le système (X. GPLRC, S-S,  $W_{GPL}=0.5\%$ ,  $NL=20$ )..... 83

**Figure IV- 13** : Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\omega$  pour différentes conditions aux limites (C-C, S-S, C-S) dans le système X. GPLRC ( $n=1$ ,  $NL=20$ ,  $W_{GPL}=0.5\%$ )..... 84

**Figure IV- 14** : Effet du rapport  $bgpl/tgpl$  sur la fréquence adimensionnelle pour différentes valeurs du rapport  $agpl/bgpl$  dans les systèmes U-, X-, O- et A-GPLRC sous conditions aux limites S-S (avec  $NL=20$ ,  $L/h=5$ ,  $W_{GPL}=0,5\%$ )..... 85

## Liste des tableaux

<b>Tableau I- 1 :</b> Caractéristiques des résines thermoplastiques .....	11
<b>Tableau I- 2 :</b> Caractéristiques des résines thermodurcissables .....	11
<b>Tableau I- 3:</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de verre .....	15
<b>Tableau I- 4:</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone.....	16
<b>Tableau II- 1 :</b> Quelques fonctions de gauchissement des théories HSDT"pour des poutres.....	40
<b>Tableau IV- 1 :</b> Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre FGM simplement appuyés. ....	68
<b>Tableau IV- 2 :</b> Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre en composite stratifiée simplement appuyés .....	69
<b>Tableau IV- 3 :</b> Fréquences naturelles non dimensionnelles d'une poutre à gradation fonctionnelle simplement supportée .....	70

## Liste des symboles

$u, v, w$	Composants de déplacement le long des directions des coordonnées (x, y, z).
$u_0(x, t)$	Déplacement axiale de la fibre moyenne.
$w_0(x, t)$	Déplacement transversal de la fibre moyenne.
$w_b$	Composante de la flexion du déplacement transversal..
$w_s$	Composante du cisaillement du déplacement transversal.
$\epsilon_{xx}$	Déformation normale suivant x.
$\sigma_{xx}$	Contraintes normales suivant x.
$\tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement dans les plans (x, z).
$\gamma_{xz}$	La déformation tangentielle. (Déformation de distorsion)
$G_{xz}$	Module de cisaillement transversale.
$f(z)$	Fonction de cisaillement transversal (gauchissement).
$\varphi(x)$	Rotation suivant l'axe z.
$\phi_x(x), \phi_y(x), \phi_z(x)$	Rotations autour des axes x, y et z.
$\psi_x(x), \psi_y(x), \psi_z(x)$	Fonctions de formes pour la rotation autour de l'axe x, y et z.
$E_{GPL}, E_m$	Les modules de Young du GPL et de la matrice.
$\eta_L, \eta_T$	Les paramètres d'efficacité.
$\xi_L, \xi_T$	Les facteurs géométriques.
$\rho_{GPL}$	La masse volumique du GPL.
$\rho_m$	La masse volumique de la matrice..
$\nu$	Coefficient de poisson.
$V_{GPL}$	La fraction volumique des nanocharges de GPL.

$V_{GPL}^*$	Fraction volumique du GPL pour une poutre à distribution uniformes.
$a_{GPL}, b_{GPL}, t_{GPL}$	La longueur, la largeur et l'épaisseur des GPL.
$W_{GPL}$	La fraction pondérale (massique) totale de GPL.
$\delta U$	Energie de déformation (énergie potentielle) virtuelle.
$\delta T$	Energie cinétique virtuelle.
$\bar{\omega}$	Fréquence naturelle adimensionnelle.
[M], [k]	Matrices globales de masse et de rigidité de la poutre.
CPT	Théorie classique.
FSDT	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.
TSDT	Théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre .
HDST	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.
GPL	Indice des nano plaquettes de graphène.
FGM	Matériau à gradient de propriétés.
[]	Matrice.

## ***Introduction générale***

Dans un environnement industriel où la demande de matériaux à la fois légers, résistants et performants est de règle, les matériaux composites occupent une place prépondérante. Ils constituent d'une matrice et d'un renfort, peuvent, selon les besoins, superposer les propriétés individuelles de leurs constituants afin de renforcer les propriétés mécaniques, etc. Parmi les développements récents, les nano-composites renforcés par des plaquettes de nano-graphène (GPL) suscitent un intérêt croissant en raison de leurs propriétés remarquables.

Les nano-plaquettes de graphène, en raison de leur échelle nanométrique et de leurs excellentes propriétés mécaniques, offrent un large éventail d'applications visant à renforcer la rigidité, la résistance et la tenue aux chocs des matériaux composites. Leur incorporation dans des matrices polymères permet d'obtenir des structures plus légères et plus performantes, répondant aux exigences des secteurs de l'aéronautique, de l'automobile, du naval et du génie civil.

Ce mémoire s'inscrit dans cette dynamique en concentrant sa recherche sur les vibrations des poutres composites libres renforcées par des plaquettes de graphène nano-stratifiées. Les vibrations naturelles des poutres sont des paramètres importants à réguler afin de garantir leur stabilité et leur fiabilité dans les structures porteuses. Deux modèles mécaniques sont appliqués dans les principaux cas : la théorie classique d'Euler-Bernoulli, adaptée aux poutres minces, et la théorie de Timoshenko, qui prend en compte les effets de cisaillement.

L'objectif principal de ce travail est de déterminer l'impact des différentes distributions de plaquettes de graphène sur la fréquence naturelle des vibrations des poutres composites. À cette fin, une modélisation mathématique rigoureuse est mise en œuvre sur la base de techniques théoriques avancées et de simulations numériques sous MATLAB.

Ce travail de mémoire présente son contenu selon une structure chaînée, où chaque chapitre aborde une étape de fabrication d'un matériau composite à base de graphène (GPL).

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites, à leurs définitions, classifications, propriétés mécaniques essentielles, avantages et applications. Il élargit l'utilisation des composites avancés, et notamment de ceux renforcés par des nanomatériaux comme le graphène, en raison de leurs propriétés mécaniques, de leur faible

densité et de leur conductivité thermique.

Le deuxième chapitre s'intéresse aux principaux théorèmes de poutres en analyse vibratoire, notamment aux théories Bernoulli-Euler et Timoshenko pour les poutres soumises à un cisaillement. Ce chapitre pose des bases théoriques à la modélisation dynamique de poutres composites renforcées par des plis de graphène.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation mathématique des poutres composites renforcées au GPL. Il comprend la dérivation des équations du mouvement par le principe d'Hamilton, l'établissement des propriétés effectives des matériaux en fonction de la teneur en GPL et de la distribution (UD, FG-X, FG-O, FG-V), et la mise en œuvre numérique à l'aide de la méthode Galerkin simplifiée.

Enfin, le quatrième chapitre présente les résultats de la simulation numérique réalisée avec MATLAB. Il contient une discussion détaillée des effets des différents paramètres distribution GPL, ratio de renforcement, conditions aux limites, géométrie de la poutre, etc..... Ce chapitre comprend également une analyse critique des résultats, une comparaison avec les travaux existants et des recommandations pour les études futures.

***Chapitre I : Généralités sur les  
matériaux composites***

## 1. Introduction

Dans les travaux effectués, tout d'abord, les matériaux composites sont des matériaux en plusieurs constituants. Selon leur échelle de l'ordre du micromètre, et leur matériau de squelette, les éléments constituants sont si réduits qu'ils peuvent présenter une dimension, un comportement et un élanement de l'ordre des nanomètres. Dans ce cadre, l'intégration de nano-plaques de graphène (GPL) dans les matériaux composites préoccupe de plus en plus, en raison de leur capacité à augmenter les propriétés mécaniques et dynamiques des structures.

Un matériau composite structurel est constitué d'un renfort et d'une matrice, dont la combinaison optimise les propriétés mécaniques. Leur interaction repose sur une compatibilité assurée par un agent de liaison, garantissant ainsi leur cohésion et leur performance globale.[1].

Le terme composite désigne principalement des matériaux modernes constitués d'une matrice renforcée par des fibres (résines plastiques, céramiques, carbone ou métaux). Cependant, cette définition s'applique aussi à des matériaux anciens comme le torchis ou le béton armé, ainsi qu'à certains matériaux naturels tels que le bois ou le tissu osseux.

Les alliages métalliques ne sont généralement pas considérés comme des composites, sauf exceptions comme l'acier de Damas. Ce dernier possède une structure stratifiée alternant couches dures et ductiles, lui conférant un tranchant exceptionnel, une caractéristique commune aux matériaux composites. [2].

## 2. Les caractéristiques générales

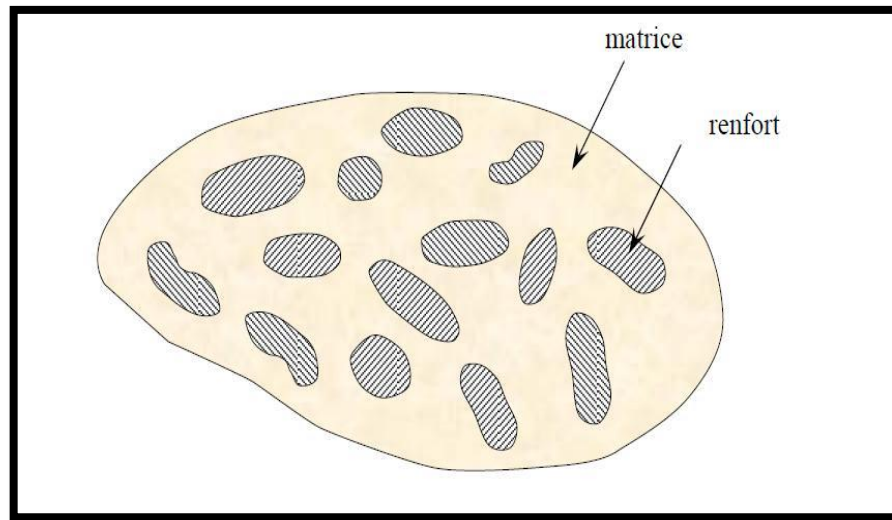
De manière générale, un matériau composite est constitué d'une ou plusieurs phases discontinues intégrées dans une phase continue. La phase discontinue, généralement plus résistante et dotée de meilleures propriétés mécaniques, est appelée "renfort", tandis que la phase continue, assurant la cohésion de l'ensemble, est désignée sous le nom de "matrice". Les performances des matériaux composites sont définies par les caractéristiques suivantes :

- Les caractéristiques des matériaux constitutifs.
- Leur organisation géométrique.
- Les interactions entre ces éléments.

Ainsi, pour décrire un matériau composite, il est nécessaire de spécifier :

- La nature et les propriétés des constituants.
- La forme et la répartition du renfort.

- Les caractéristiques de l'interface entre la matrice et le renfort .



**Figure I- 1** : Schéma de matériau composite

La géométrie du renfort sera caractérisée par : sa forme, sa taille, sa concentration et sa disposition (son orientation).

La quantité de renfort est généralement évaluée à l'aide de la fraction volumique (rapport en volume) ou de la fraction massique (rapport en masse). Ce facteur influence de manière décisive les propriétés mécaniques du matériau composite.

À concentration constante, la manière dont le renfort est réparti dans le volume du composite est également un facteur essentiel. Une répartition uniforme contribue à assurer l'homogénéité du matériau composite.

Une répartition non uniforme du renfort favorise l'apparition de ruptures dans les zones les moins renforcées, ce qui réduit la résistance globale du composite. Pour les matériaux composites à renfort fibreux, l'orientation des fibres joue un rôle déterminant dans l'isotropie du matériau, constituant ainsi une caractéristique essentielle.

Les composites offrent la possibilité d'ajuster l'anisotropie du produit fini en optimisant sa conception et son procédé de fabrication en fonction des propriétés recherchées. [3] [4].

### 3. Classification des matériaux composites

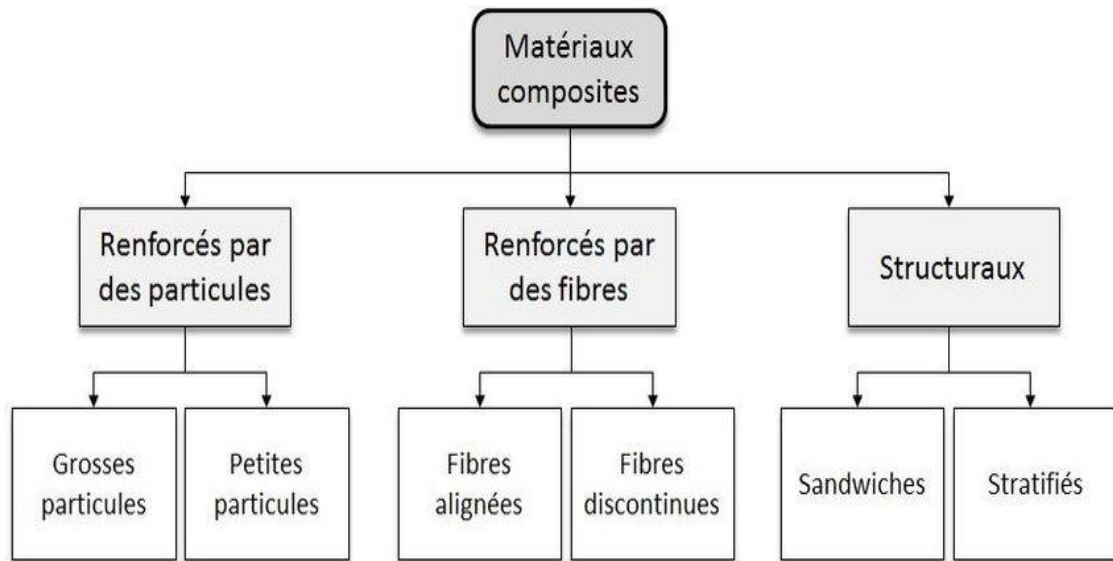


Figure I- 2: Classification des matériaux composites. [5]

#### 3.1 Classification effectuée par rapport au constituant de la matrice

Les composites se classent en plusieurs catégories principales : les composites à matrice polymère (PMC), les composites à matrice métallique (MMC), les composites à matrice céramique (CCM) et les composites à matrice de carbone (CMC). Le terme "composite à matrice organique" (OMC) désigne généralement les composites à matrice polymère (PMC) ainsi que ceux à matrice de carbone (CMC).

#### 3.2 Classification effectuée par rapport à la géométrie

##### 3.2.1 Composites à fibres

Un matériau composite est qualifié de composite à fibres lorsque son renfort est constitué de fibres. Celles-ci peuvent être soit continuées, soit discontinues (fibres coupées ou courtes). L'agencement et l'orientation des fibres jouent un rôle essentiel dans l'ajustement des propriétés mécaniques du matériau composite, permettant ainsi de concevoir des matériaux allant de fortement anisotropes à isotropes dans un plan. [6].

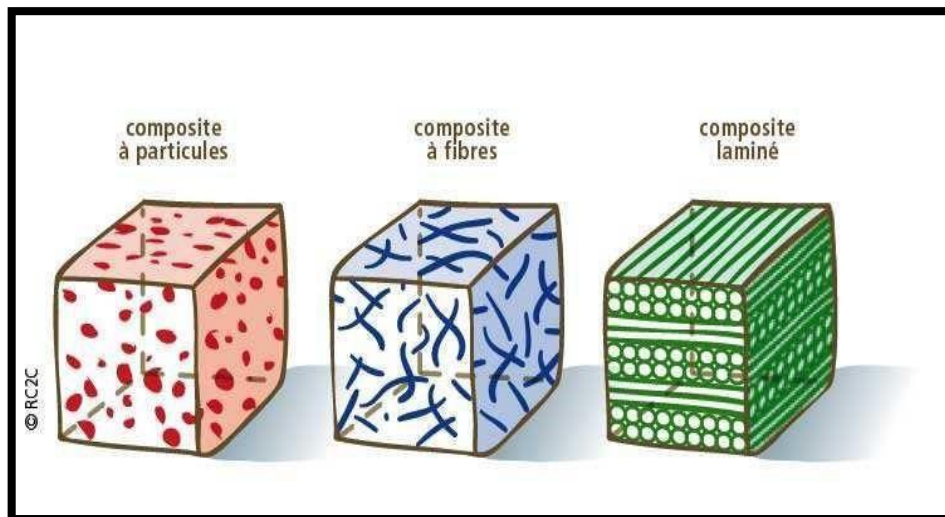


Figure I- 3 : Schéma d'un matériau composite [7].

### 3.2.2 Composites à particules

Un matériau composite est qualifié de composite à particules lorsque son renfort se présente sous forme de particules. Contrairement aux fibres, les particules ne possèdent pas de dimension privilégiée. Elles sont généralement ajoutées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, telles que la rigidité, la résistance aux hautes températures, la résistance à l'abrasion ou encore la réduction du retrait. Dans de nombreux cas, elles sont également utilisées comme charges afin de réduire le coût du matériau, sans altérer ses performances. [6].

### 3.2.3 Composites structuraux

Le renfort peut être fabriqué avec des fibres disposées de manière aléatoire ou orientées selon une ou plusieurs directions. Le tissage, basé sur le croisement de fils, permet de définir des axes de renforcement précis. Par ailleurs, des structures tridimensionnelles ont été développées afin d'optimiser le renforcement du matériau et de remédier aux problèmes de délaminage. [6].

### 3.2.4 Les stratifiés

Un stratifié se compose d'un empilement de monocouches, chacune ayant une orientation définie par un référentiel commun à toutes les couches, appelé référentiel du stratifié.

En ajustant l'ordre et l'orientation des couches, il est possible d'adapter avec précision les propriétés mécaniques du stratifié aux contraintes extérieures, permettant ainsi une optimisation avancée en disposant la matière de manière stratégique là où elle est la plus efficace. [6].

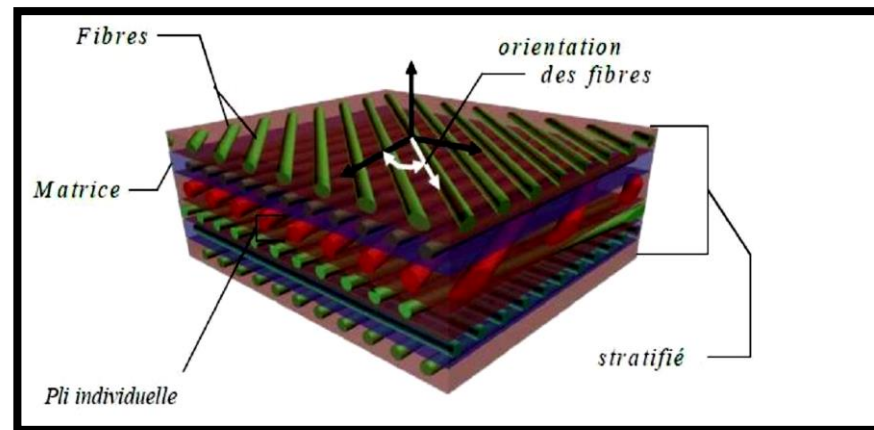


Figure I- 4 : composite stratifié [5].

### 3.2.5 Les Composites tissés

Dans ces structures, les fibres sont soit tressées, soit regroupées en « câbles » appelés torons ou fils, composés de plusieurs centaines à milliers de fibres. Ces fils sont ensuite tissés selon des motifs plus ou moins complexes, adaptés aux propriétés spécifiques recherchées pour le matériau. [6].

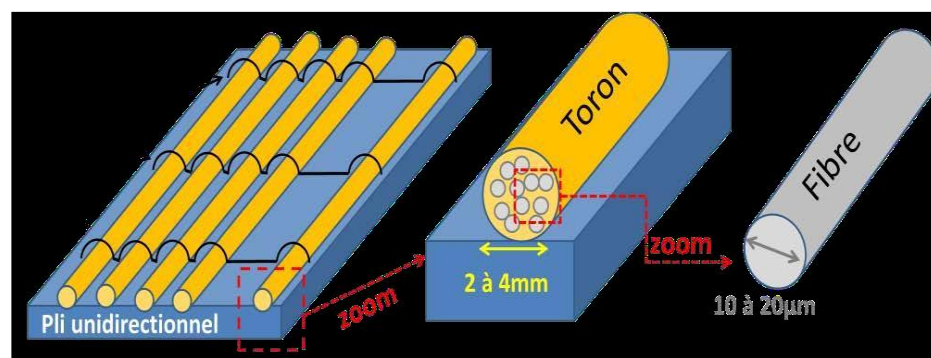


Figure I- 5 : Représentation d'un pli unidirectionnel. [6].

### 3.2.6 Les sandwichs

Les matériaux sandwich sont constitués de deux couches externes (ou peaux) minces et rigides, enveloppant un noyau épais mais de faible résistance. Cette configuration permet d'obtenir une structure particulièrement légère. Grâce à cette conception, le matériau sandwich offre une excellente résistance en flexion tout en conservant une grande légèreté. [6].

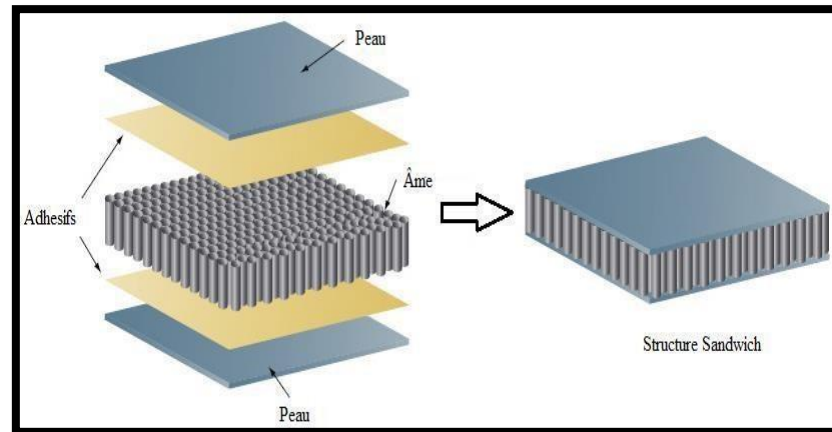


Figure I- 6 : Structure sandwich [9].

#### 4. Constituants des matériaux composites

Un matériau composite est constitué de l'association d'une matrice, d'un élément de renfort et de divers additifs ou adjuvants (tels que des agents de démoulage ou des stabilisants). Lorsqu'il est intact, la liaison entre la matrice et les renforts est optimale, empêchant tout glissement ou séparation entre les différentes phases de la structure, ce qui garantit de bonnes propriétés mécaniques.

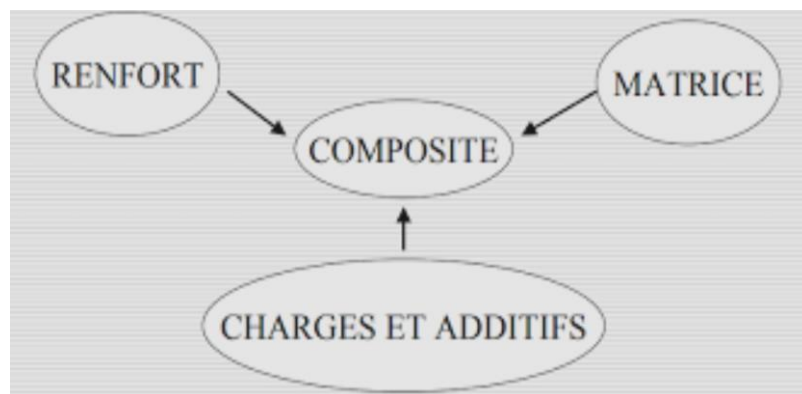


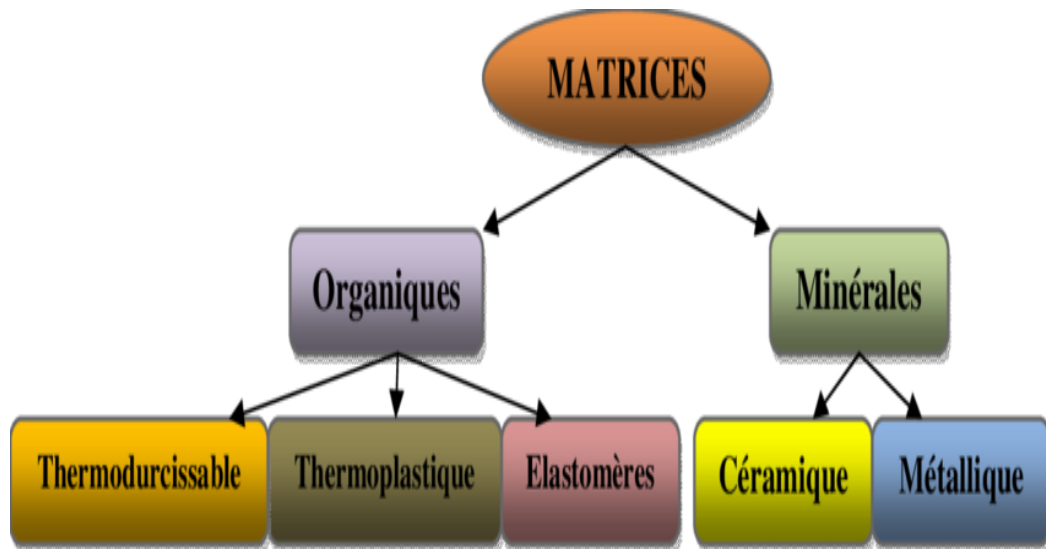
Figure I- 7 : Différents constituants d'un matériau composite [10].

##### 4.1 Les matrices

En raison de leur faible diamètre, généralement compris entre 10 et 20  $\mu\text{m}$ , les fibres ne peuvent pas être utilisées directement dans une application mécanique. C'est pourquoi elles sont intégrées dans une matrice polymère afin de former un composite à fibres.

Le terme "matrice" désigne généralement un liant polymérique qui, associé à un renfort, assure la cohésion de l'ensemble tout en maintenant sa forme et en permettant le transfert des

efforts. Elle confère également au matériau composite ses propriétés physico-chimiques. Son rôle principal est de maintenir les renforts de manière compacte tout en donnant au produit sa forme finale. De plus, la matrice protège les fibres contre l'abrasion et les agressions extérieures, tout en facilitant le transfert des charges entre elles. En fonction de sa nature, les matériaux composites sont classés en trois catégories : composites à matrice organique, métallique ou minérale. [11]



**Figure I- 8 :** Organigramme des différentes familles de matrice [11].

La matrice est constituée d'une résine (telle que le polyester ou l'époxy) associée à des charges visant à améliorer ses propriétés tout en réduisant le coût de production. On distingue deux grandes familles de résines polymères : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables. Ces deux types de résines ont la capacité d'être moulés ou mis en forme, permettant ainsi d'obtenir soit un produit fini, soit un produit semi-fini dont la forme peut être modifiée ultérieurement.

#### 4.1.1 Les résines thermoplastiques

Les thermoplastiques sont des polymères dont les chaînes sont reliées par de faibles Liaisons. Ils se présentent sous forme solide (granulés, plaques, etc.) et peuvent être mis en forme par chauffage pour les ramollir, puis solidifiés par refroidissement. Parmi les plus courants, on trouve le poly (chlorure de vinyle), utilisé dans la fabrication des tuyaux, le poly

(acétate de vinyle), présent dans les colles et adhésifs, le polyéthylène, employé pour les jouets, bouteilles et sacs de supermarché, le polypropylène, utilisé pour les boîtes alimentaires et les revêtements de sol, ainsi que le polystyrène, qui entre dans la composition des contenants alimentaires. Leur capacité à être recyclés et remodelés par la chaleur constitue un avantage majeur, de plus en plus valorisé pour la protection de l'environnement. [6]

**Tableau I- 1** : Caractéristiques des résines thermoplastiques [18].

Résines	Masse volumique (g/cm <sup>3</sup> )	Résistance (MPa)	Module d'Young (GPa)	Allongement (%)
Polypropylène	0.9	30	1.2	20-400
Polyamide	1.1	70	2	200

#### 4.1.2 Les résines thermodurcissables

Les thermodurcissables sont des polymères qui, une fois mis en forme, ne peuvent plus être remodelés ni recyclés. Toutefois, ils se distinguent par leurs excellentes propriétés mécaniques et thermomécaniques, supérieures à celles des thermoplastiques. [8].

Ils se présentent sous forme de liquide visqueux et sont mis en forme par une réaction chimique de polymérisation, déclenchée par l'ajout d'un durcisseur, conduisant ainsi à leur solidification. Parmi les plus courants, on retrouve les polyesters insaturés (tels que le vinyle ester, les dérivés allyliques et les polyesters condensés), les résines époxydes ainsi que les résines de condensation, comme les phénoliques et les aminoplastes. [6]. Ils offrent des avantages notables par rapport aux thermoplastiques, notamment une meilleure résistance aux chocs et à la fatigue, une durabilité accrue et une excellente protection contre la corrosion.

**Tableau I- 2** : Caractéristiques des résines thermodurcissables [18].

Résines	Masse volumique (g/cm <sup>3</sup> )	Résistance (MPa)	Module d'Young (GPa)	Allongement (%)
Polyesters	1.2	80	4	2.5
Epoxy	1.1-1.5	130	4.5	2

### 4.1.3 Les résines en céramique

Les matrices céramiques sont constituées d'un ou plusieurs métaux combinés à un élément, généralement l'oxygène, comme l'alumine ( $Al_2O_3$ ), la silice ( $SiO_2$ ) ou la magnésie ( $MgO$ ). Moins répandus que les composites à matrice organique en raison de leur coût élevé, ces composites à matrice céramique (CMC) sont principalement destinés aux applications nécessitant une résistance aux très hautes températures. On les retrouve notamment dans l'industrie spatiale, l'aéronautique militaire, ainsi que dans la fabrication de composants haut de gamme tels que les disques et plaquettes de frein. [6]. Les céramiques présentent de nombreux avantages pour ces applications : elles supportent des températures extrêmement élevées, sont plus légères que de nombreux métaux et offrent une excellente stabilité chimique. Cependant, leur grande fragilité restreint considérablement leur champ d'application.

### 4.1.4 Les résines métalliques

Les composites à matrice métallique associent la dureté des métaux à la rigidité de la céramique. Ces matériaux sont utilisés comme liants dans des applications exigeant de bonnes propriétés spécifiques et une excellente résistance aux hautes températures. Toutefois, en raison de leur coût de fabrication élevé et de la complexité de leur imprégnation, leur usage reste limité aux secteurs de haute technologie. À ce jour, les alliages d'aluminium sont les matrices les plus couramment employées, tandis que les renforts sont principalement constitués de fibres de carbone et de fibres céramiques. [6].

## 4.2 Les renforts

Les renforts, souvent sous forme de fibres, ont pour principal objectif d'améliorer les propriétés mécaniques des matériaux composites, telles que la rigidité, la résistance à la rupture et la dureté. Ils contribuent également à l'optimisation de certaines propriétés physiques, comme la résistance au feu et à l'abrasion, la tenue en température ou encore les caractéristiques électriques. Les renforts doivent posséder une faible masse volumique, être compatibles avec les matrices et offrir une mise en œuvre aisée. Ils se présentent sous différentes formes : linéaire (fils, mèches), surfacique (tissus, mats) et multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, tissage tri directionnel). [11]. La figure I-9 suivante présente la classification des différents types de renforts couramment utilisés. [15].

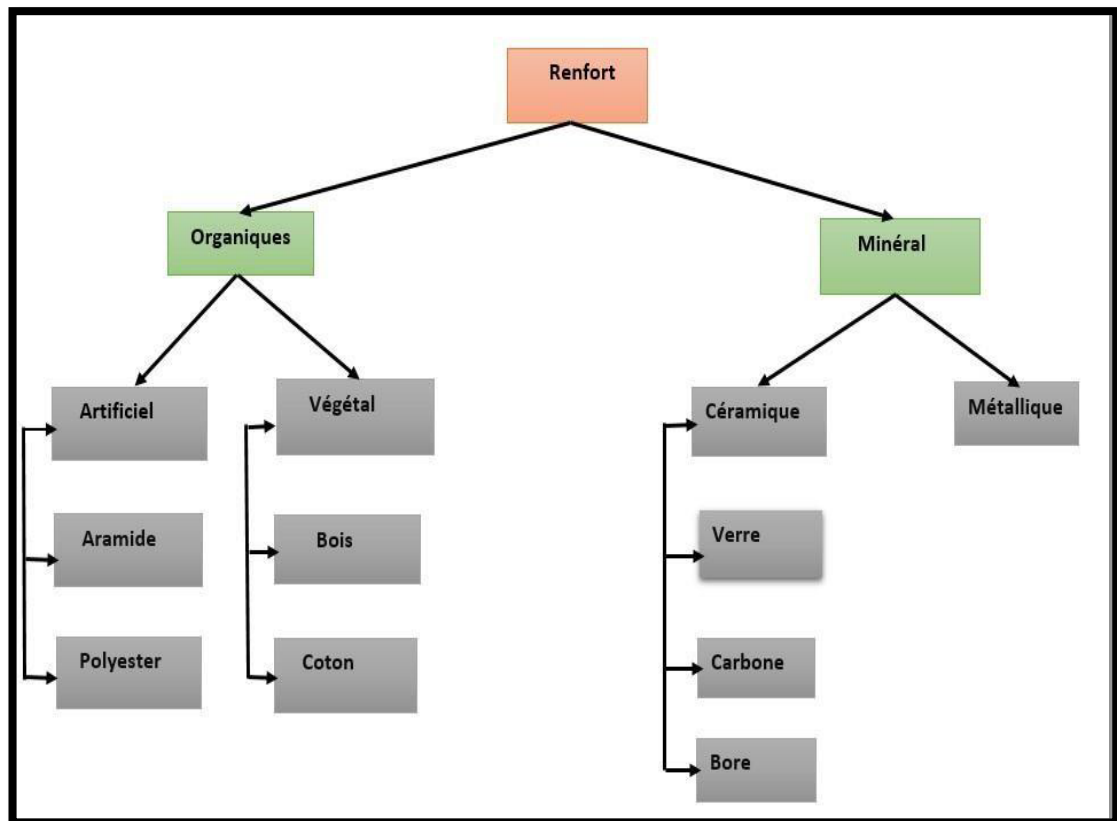


Figure I- 9 : Les différents types de renfort de base [15].

#### 4.2.1 Les fibres de verre

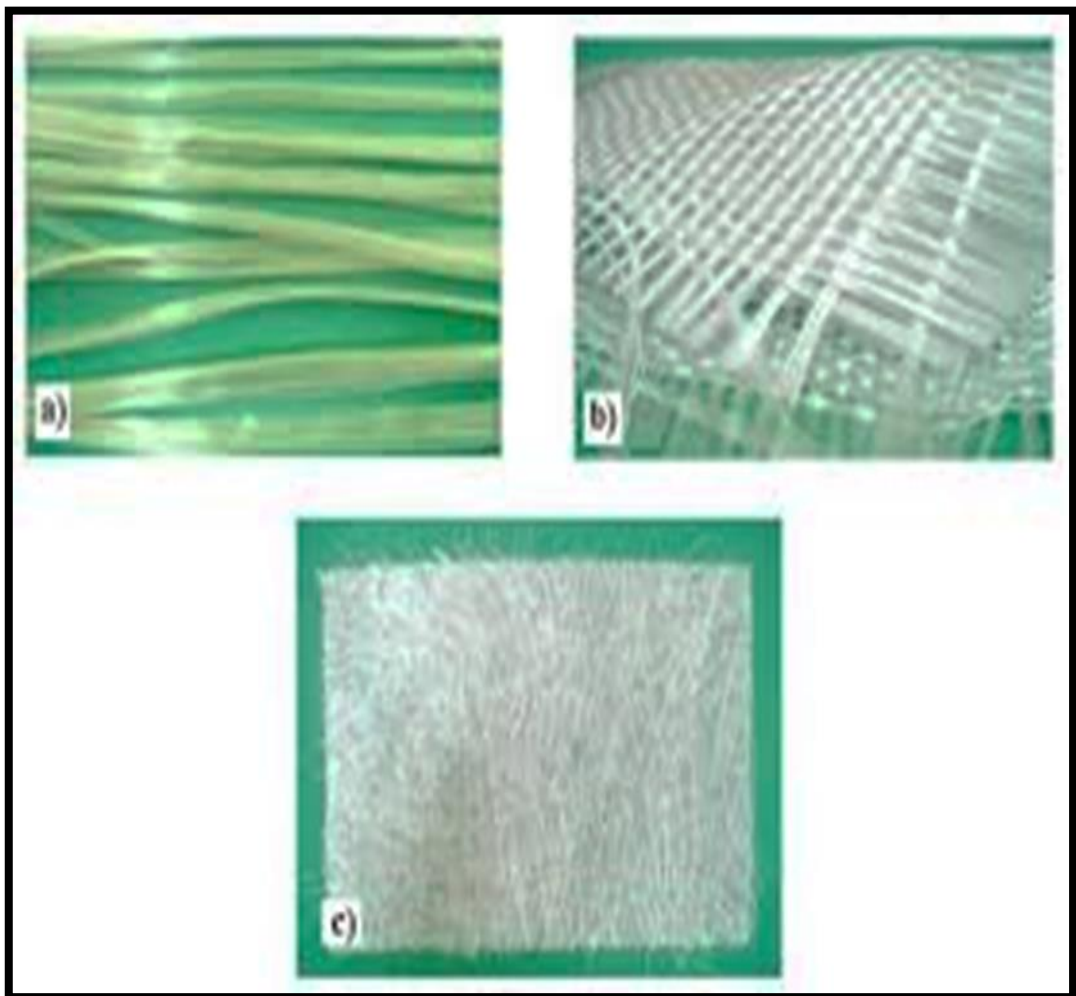
Les fibres de verre offrent un excellent compromis entre performance et coût, ce qui en fait le renfort le plus largement utilisé dans la fabrication de structures composites. Bien Qu'elles possèdent un module de traction relativement faible, elles se distinguent par une bonne résistance en traction. [13].



Figure I- 10 : Fibre de verre.

Elles sont formées de silicates et sont caractérisées par leur anisotropie.

- ❖ **Verre E** : Utilisation générale avec de bonnes propriétés électriques.
- ❖ **Verre D** : Excellentes propriétés diélectriques, adapté aux applications électroniques (circuits imprimés).
- ❖ **Verre C** : Grande résistance chimique, utilisé pour les couches superficielles des structures exposées à des environnements chimiques.
- ❖ **Verres R et S** : Haute résistance mécanique, idéaux pour la fabrication de pièces *structurales*.



a – Roving de verre

b – Tissu de verre

c – Mat de verre

**Figure I- 11** : Les différents types de renfort de base [16]

**Tableau I- 3:** Caractéristiques mécaniques des fibres de verre [17].

Caractéristiques	Type E	Type D	Type C	Type R	Type S
Résistance en traction (MPa)	3500	2450	2800	4650	4650
Module en traction (GPa)	73,5	52,5	70	86,5	86,5
Allongement à la rupture (%)	4,5	4,5	4,0	5,3	5,3

#### 4.2.2 Fibres de carbone

Les fibres de carbone sont de fins filaments constitués de carbone élémentaire, dont la structure évolue du carbone amorphe au graphite cristallin. Elles sont obtenues à partir d'un polymère de base, appelé précurseur, dont les propriétés chimiques et physiques influencent directement celles des fibres de carbone finales. [7].

Les fibres de carbone se distinguent par leurs excellentes propriétés mécaniques, avec une résistance pouvant atteindre entre 200 et 300 GPa. Elles sont couramment utilisées comme renfort dans les composites polymères rigides. [14].



(a)

(b)

**Figure I- 12 :** Fibres de Graphite (a), fibre de Carbone (b) [6].

**Tableau I- 4:** Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone [17].

Caractéristique	Fibres HR	Fibres HM	Fibres IM
Résistance en traction (MPa)	3400/4500	2000/2500	4800
Module en traction (GPa)	230/250	390/450	296
Allongement à la rupture (%)	1.4/1.8	0.5/0.6	2.0
Résistance en compression (MPa)	2200/2800	1300/1700	–

### 4.2.3 Fibres d'aramide

Les polyamides aromatiques contenant plus de 85 % de groupes aromatiques sont appelés aramides. Parmi les fibres d'aramide les plus connues figure le Kevlar. Ces fibres possèdent d'excellentes propriétés mécaniques en traction, comparables à celles du carbone, mais présentent une faible résistance à la compression. Cette faiblesse mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice du composite. Pour y remédier, il est possible d'utiliser des enzymes spécifiques aux fibres. De plus, l'intégration de fibres hybrides dans les composites constitue une solution efficace pour pallier les limitations des fibres d'aramide. [13]. Les renforts hybrides verre-Kevlar ou carbone-Kevlar sont largement utilisés dans la fabrication d'équipements de loisirs comme les skis et les raquettes de tennis.

**Figure I- 13 :** Fibres d'aramide. [13]

#### 4.2.4 Kevlar

Le Kevlar est un polymère composé de noyaux aromatiques (benzène) reliés par des groupements amides, ce qui le classe parmi les fibres d'aramides. Il a été découvert en 1965 par des chercheurs de la société Du Pont. Ce n'est qu'en 1971 que la première usine de production a été mise en place, permettant la fabrication des premiers kilos de Kevlar. [8]

#### 4.2.5 Fibres céramiques

Les matériaux composites à base de céramique sont généralement composés d'une matrice et de renforts en céramique. Les fibres sont produites par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Elles sont particulièrement adaptées aux applications soumises à des températures extrêmes, allant de 500°C à 2000°C. [13].

Les fibres céramiques les plus utilisées sont :

- ✓ Fibres de carbure de silicium.
- ✓ Fibres de bore.
- ✓ Fibres de bore recouvertes de carbure de silicium.

#### 4.2.6 Autres types de fibres

Cette section rassemble les fibres non encore mentionnées, principalement utilisées pour des applications spécifiques telles que les papiers spéciaux ou l'optimisation de la conductivité électrique. Leur module d'élasticité reste relativement faible comparé à celui des fibres précédemment citées. [8].

Les fibres concernées sont :

- Fibres d'origine végétale : cellulose, lin, chanvre, etc.
- Fibres d'origine minérale : amiante, silice.
- Fibres synthétiques : tergal, nylon, issues de polyesters, de polypropylène ou de polyéthylène.
- Fibres métalliques : acier, cuivre, aluminium, généralement utilisées avec des matrices métalliques.

Ces fibres sont valorisées pour plusieurs avantages, notamment :

- ✓ Leur coût de fabrication réduit.
- ✓ Leur grande capacité d'isolation thermique.

- ✓ Leur bonne conductivité thermique et électrique.
- ✓ Leurs excellentes propriétés d'isolation acoustique.

### 4.3 Les charges

L'ajout de charges renforçantes a pour objectif d'améliorer les propriétés mécaniques de la résine ou de réduire son coût tout en préservant ses performances. Ces charges se présentent généralement sous forme de microbilles ou de particules (poudre). [12].

Les charges les plus couramment employées :

- Des microbilles en divers matériaux tels que le verre, le carbone, l'époxy, le phénolique ou le polystyrène.
- Des poudres ou paillettes métalliques, comme le cuivre, le fer ou l'aluminium.
- Des particules de carbone, notamment le noir de carbone.

### 4.4 Les additifs

Ils jouent un rôle essentiel en garantissant une bonne adhérence entre le renfort fibreux et la matrice, tout en modifiant l'apparence ou les propriétés de la matière à laquelle ils sont incorporés. [12].

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

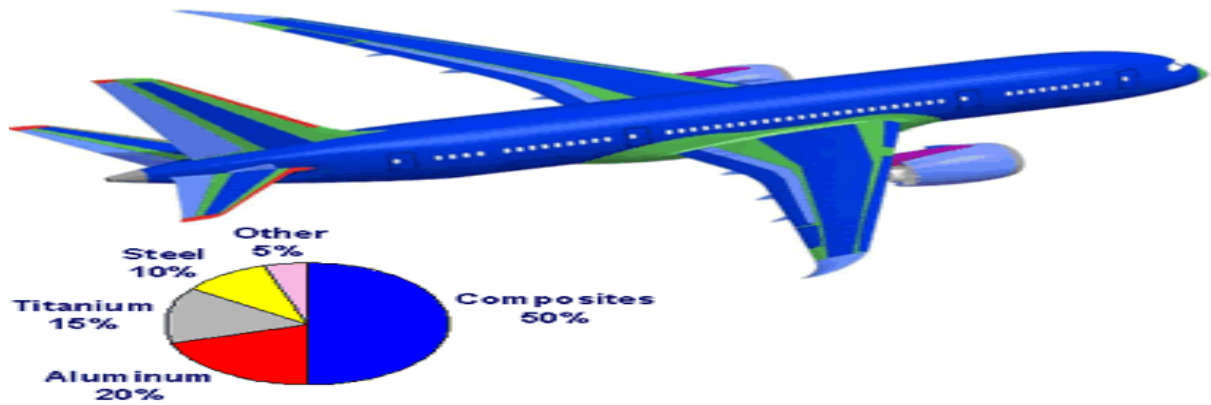
- Agents lubrifiants et de démoulage.
- Pigments et colorants.
- Additifs anti-retrait.
- Stabilisants anti-UV.
- Accélérateurs.
- Catalyseurs

### 4.5 L'interface fibre/matrice

En plus des fibres et de la matrice, une interface est nécessaire pour assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Son rôle est de transmettre les contraintes entre ces deux composants sans déplacement relatif, garantissant ainsi une bonne adhérence en couche fine. Par ailleurs, certains produits chimiques, tels que l'interphase, peuvent influencer le comportement mécanique du composite, bien qu'ils ne soient généralement pas pris en compte dans les calculs de structure. [12]

## 5. Domaines d'applications de matériaux composites

- 5.a Aéronautique

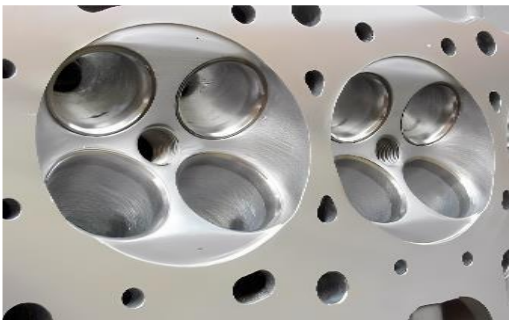


Revêtements aéronautiques

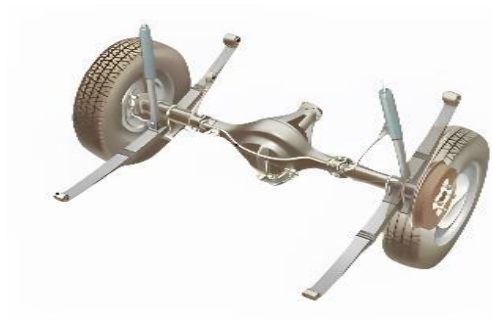


Moteurs d'avions

- 5.b Secteur Industriels



Chambre de combustion



Ressort à lames

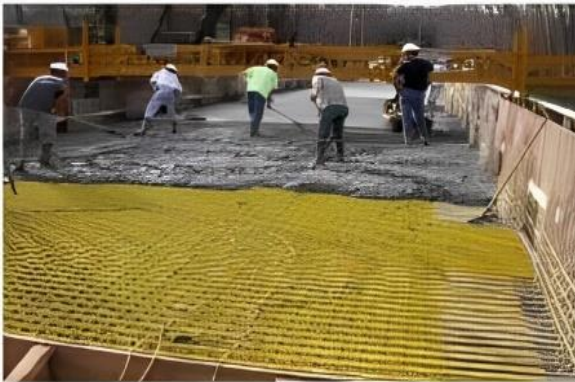


Volants



Piston De Moteur Diesel

- 5.c Génie civil



- 5.d Automobile et transport



- 5.e Équipements de sport



- 5.f Implants dentaires

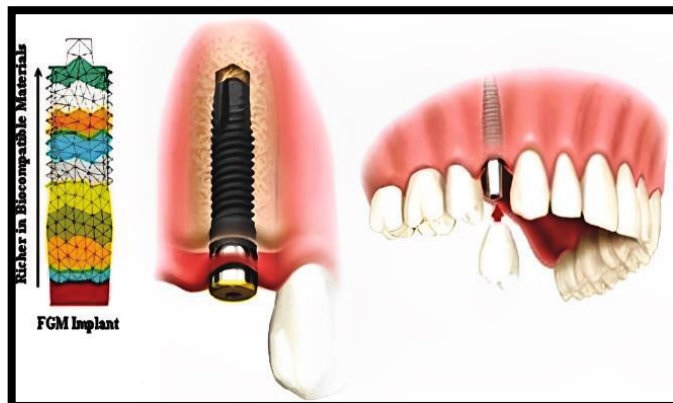


Figure I- 14 : Domaines d'applications de matériaux composites.

## 6. Avantages et inconvénients des matériaux composites

Les composites possèdent des atouts remarquables par rapport aux matériaux monolithiques, parmi lesquels :

- ✓ Une excellente résistance à la fatigue
- ✓ Une bonne tenue aux températures élevées,
- ✓ Une rigidité accrue,
- ✓ Une légèreté significative, permettant de réduire considérablement le poids des avions et, par conséquent, leur consommation de carburant,
- ✓ Une résistance aux produits chimiques tels que les huiles et les liquides hydrauliques,
- ✓ Une disponibilité durable et abondante, contrairement aux métaux dont le prix ne cesse d'augmenter,
- ✓ Une grande flexibilité de fabrication, offrant la possibilité de concevoir des matériaux aux formes et épaisseurs variées selon les besoins,
- ✓ Une faible sensibilité aux variations de température et de pression, un critère essentiel en aviation commerciale, ainsi qu'une bonne résistance à l'humidité, à la chaleur et à la corrosion.

Les inconvénients des composites incluent :

- ✓ Un vieillissement accéléré au contact de l'eau,
- ✓ Une sensibilité accrue aux impacts, où une petite fissure peut provoquer d'importantes déformations,
- ✓ Une détection des défauts complexe, nécessitant une grande rigueur lors de leur fabrication et de leur assemblage,
- ✓ Une mise en œuvre des réparations plus difficile et technique.

## 7. L'origine de Graphène

Dans la nature, le carbone existe sous deux formes allotropiques principales : le diamant et le graphite. En 1924, John Desmond Bernal a identifié la structure cristalline du graphite [22]. Au début des années 1950, Rosalind Franklin a approfondi cette étude en différenciant le

carbone graphitisé, caractérisé par des plans de graphite parfaitement ordonnés, du carbone non graphitisé, où ces plans sont désorganisés [23] Parallèlement, la synthèse du diamant est devenue possible dès 1955. [24].

Cependant, c'est en 1985, avec la découverte d'une troisième forme allotropique, les fullerènes [26], que l'intérêt pour le carbone s'est intensifié. Depuis, d'autres structures carbonées ont été mises en évidence, notamment les nanotubes de carbone et les feuilles de graphène. (Figure I-15).

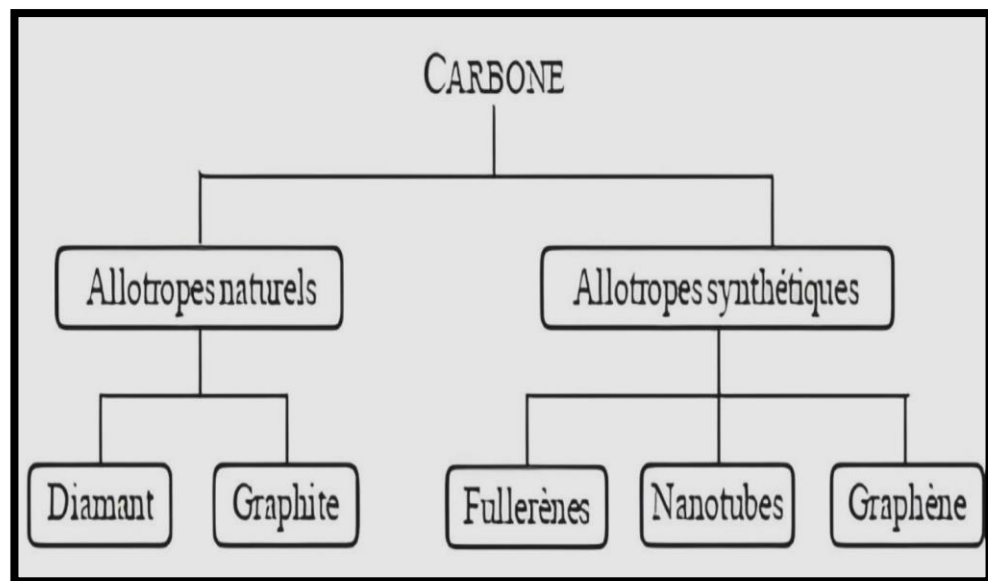


Figure I- 14 : Allotropes du carbone

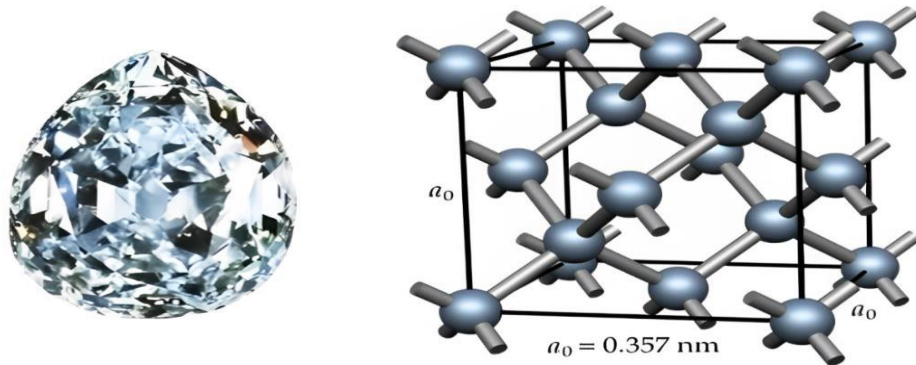
Le carbone existe sous différentes formes allotropiques dotées de structures cristallines bien établies, comme le graphite et le diamant, présents naturellement sous forme de roches. Cependant, des avancées scientifiques ont permis la découverte de nouvelles structures carbonées, notamment les fullerènes (C<sub>60</sub>), les nanotubes de carbone à simple paroi et les nanotubes à parois multiples.

## 7.1 Les formes allotropiques classiques de carbone

### 7.1.1 Le diamant

Le diamant constitue la forme la plus dense du carbone. Sa formation naturelle requiert des conditions extrêmes de haute température et de haute pression (supérieures à 1000 °C et plusieurs gigapascals). Théoriquement, il n'est stable qu'à des pressions élevées, mais en tant que forme métastable du carbone, il peut persister dans des conditions ambiantes.

Sa structure cristalline est de type cubique à faces centrées, avec la moitié des sites tétraédriques occupés (voir figure I-16)., conférant à ce matériau une grande rigidité. C'est cette structure cristalline unique qui fait du diamant le minéral naturel le plus dur.



**Figure I- 15 :** Une photo d'une pierre de diamant avec la structure cristalline du diamant. [27]

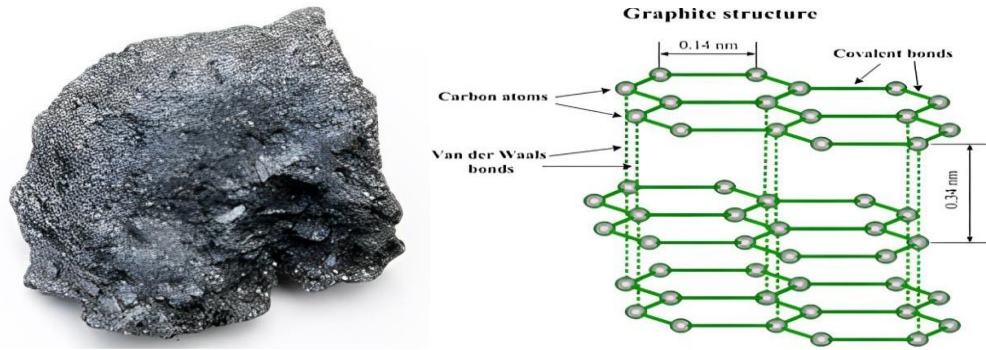
### 7.1.2 Graphite

Le graphite possède une structure lamellaire constituée de feuillets superposés, appelés plans de graphène, où les atomes de carbone sont arrangés en un réseau hexagonal. Son paramètre de maille est de 0,243 nm, avec une longueur de liaison C-C de 0,142 nm.

Il existe deux formes cristallines distinctes de graphite selon le mode d'empilement des feuillets :

- ✚ Le graphite hexagonal, qui est la forme stable [28]. Ses feuillets sont empilés avec un espacement inter-plans de 0,335 nm (voir figure I-17).
- ✚ Le graphite rhomboédrique, une forme moins stable, où chaque feuillet est décalé d'une longueur de liaison par rapport au précédent.

Le graphite monocristallin est rare, bien que sa croissance soit possible. En revanche, le graphite courant, comme celui des mines de crayon, est un polycristallin composé de cristallites de graphite hexagonal disposés de manière aléatoire.



**Figure I- 17 :** la roche de graphite avec Structure du graphite hexagonal [33]

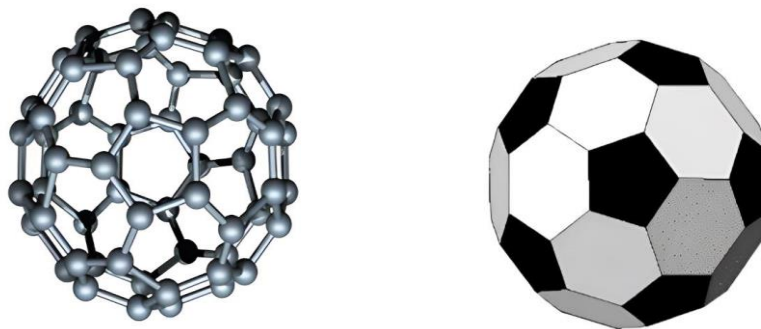
## 7.2 Les nouvelles formes de carbone

### 7.2.1 Les fullerènes

Les fullerènes ont été synthétisés pour la première fois par Kroto, Curl et Smalley grâce à la méthode de l'arc électrique [29]. La découverte du fullerène de Buckminster (C<sub>60</sub>) résulte d'une étude combinant chimie de synthèse, spectroscopie hyperfréquence et radioastronomie.[26]

Ces molécules sont constituées d'atomes de carbone agencés en 20 hexagones et 12 pentagones, formant ainsi une cage sphérique fermée à symétrie icosaédrique (Figure I-18 (a)). Chaque atome de carbone y est lié à trois autres, ce qui confère à la structure une grande stabilité. Pour expliquer cette organisation, un modèle structural inspiré du ballon de football a été proposé, où les sommets correspondent aux atomes de carbone (Figure I-18 (b)) [26].

Les fullerènes existent sous différentes formes, allant des homologues inférieurs comme C<sub>60</sub> et C<sub>70</sub> aux structures plus complexes telles que C<sub>240</sub>, C<sub>540</sub> et C<sub>720</sub>. Grâce à leurs propriétés uniques, ils font l'objet de nombreuses recherches, notamment dans les domaines des matériaux, de l'électronique et de la nanotechnologie.



**Figure I- 18 :** (a)"Structure du fullerène C<sub>60</sub> ; (b) un ballon de foot » [30]

### 7.2.2 Les nanotubes de carbone (NTC)

Découverts en 1991 [31], les nanotubes de carbone (NTCs) sont constitués de feuillets de graphène enroulés sur eux-mêmes, avec des extrémités refermées par des structures hémisphériques similaires aux fullerènes. Leur structure repose sur le graphène, un matériau bidimensionnel (2D) d'une épaisseur d'un atome, ce qui confère aux nanotubes des propriétés uniques. (Voir Figure I-20).

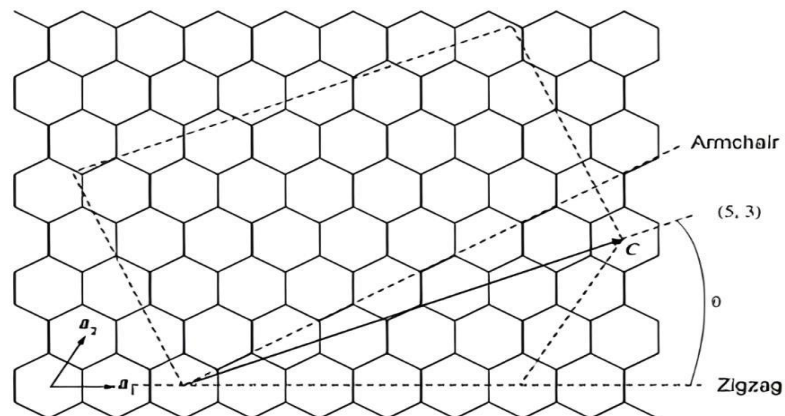


Figure I- 19 : "Représentation de la courbure d'une feuille de graphène en CNTs". [34]

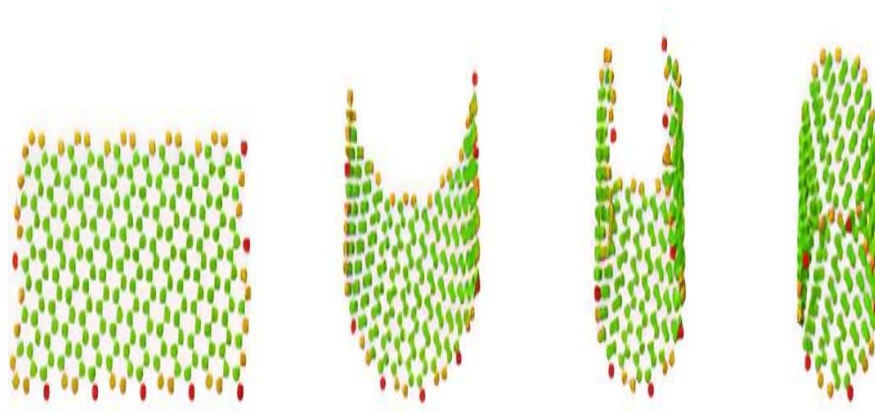


Figure I- 16 : "Empilement d'une feuille de graphène pour former un nanotube de carbone".[32]

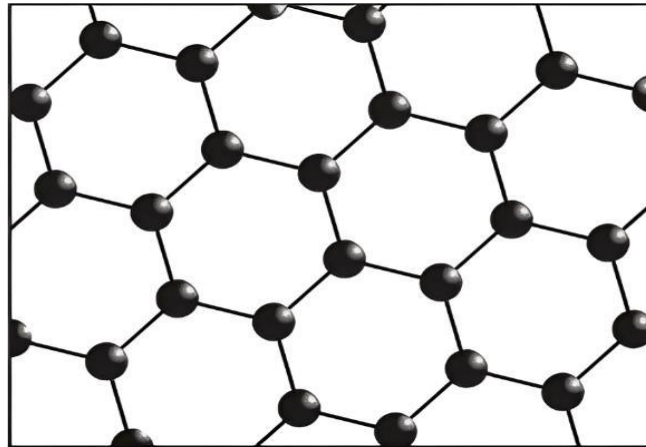
### 7.2.3 Le graphène

Le graphène est un cristal bidimensionnel constitué d'une unique couche d'atomes de carbone arrangés de manière régulière sur un réseau hexagonal en nid d'abeille. Il représente la structure élémentaire de plusieurs autres formes allotropiques du carbone [19]. Plus

simplement, il s'agit d'une fine couche de carbone pur, où les atomes sont fortement liés dans une configuration hexagonale.

Depuis sa première isolation expérimentale en 2004 à partir du graphite, le graphène a suscité un vif intérêt scientifique, tant sur le plan fondamental qu'appliqué. Ce matériau révolutionnaire se distingue par des propriétés physiques remarquables, telles que l'effet Hall quantique à température ambiante, une mobilité électronique exceptionnelle [19], une conductivité électrique élevée, une grande résistance mécanique et une bande interdite ajustable [21].

Des feuilles de graphène ont été isolées par André Geim et Konstantin Novoselov, ouvrant la voie à de nouvelles études et recherches.

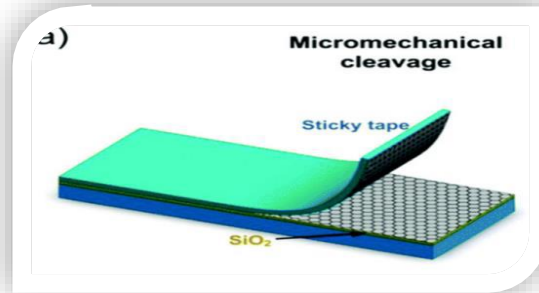


**Figure I- 21** : Structure du Graphène. [32]

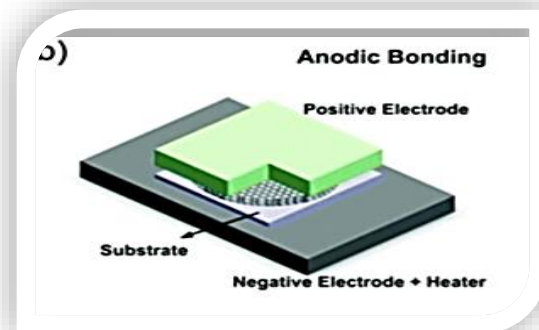
### 7.3 La production du graphène

La production du graphène repose sur plusieurs techniques basées sur sa configuration structurale. Parmi les principales méthodes, on distingue :

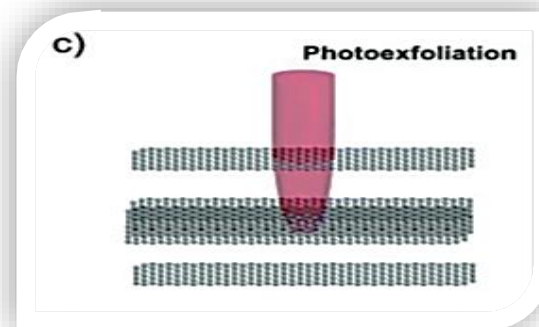
- a) Le clivage micromécanique, qui consiste à exfolier mécaniquement des couches de graphène à partir du graphite.



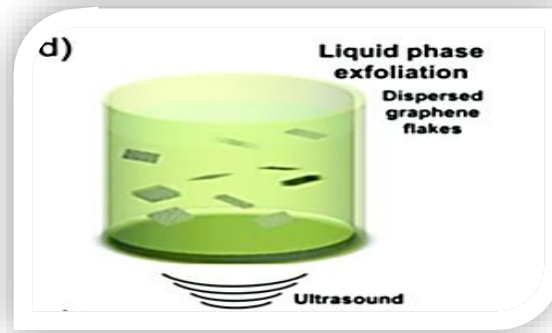
b) La liaison anodique, permettant l'adhésion du graphène sur un substrat sous l'effet d'un champ électrique.



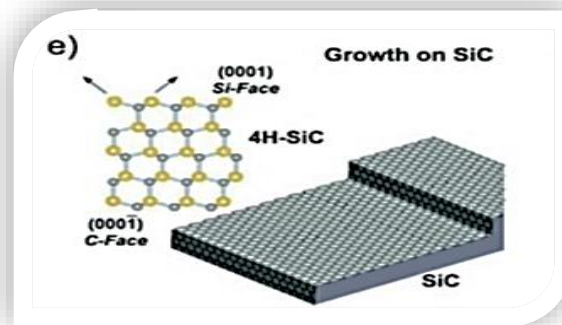
c) La photo-exfoliation, qui utilise des impulsions lumineuses pour détacher des couches de graphène.



d) L'exfoliation en phase liquide, où le graphite est dissous dans un solvant pour obtenir des feuillets de graphène.



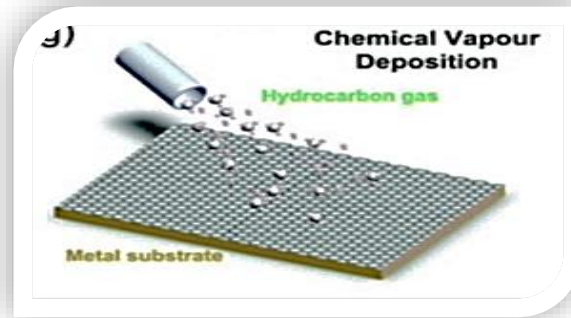
e) La croissance sur SiC, où la sublimation du silicium laisse une surface riche en carbone, favorisant la formation du graphène.



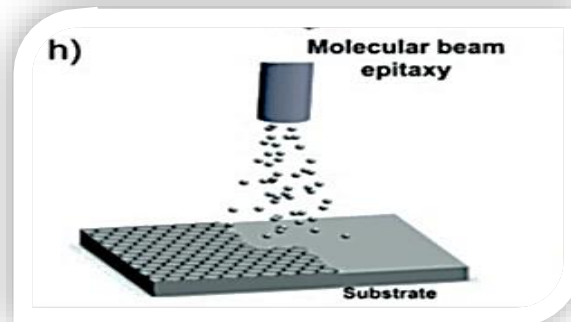
f) La précipitation à partir d'un substrat métallique contenant du carbone, qui libère du graphène lors du refroidissement.



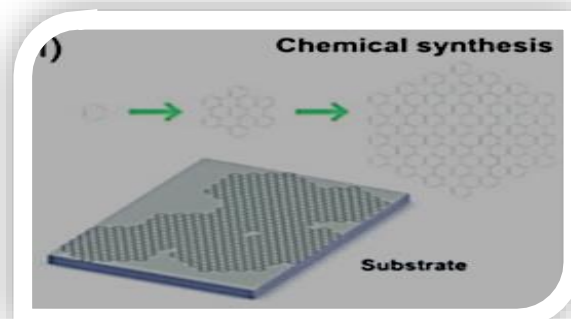
g) Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD), une technique largement utilisée pour produire du graphène de haute qualité sur des surfaces métalliques.



h) L'épitaxie par faisceau moléculaire, un procédé permettant de déposer des couches de graphène de manière contrôlée.



i) La synthèse chimique, utilisant le benzène comme bloc de construction pour assembler des structures de graphène.



**Figure I- 22 :** Illustration schématique des principales configurations expérimentales pour la production du graphène. [20]

Ces différentes méthodes exploitent diverses sources de carbone et substrats (tels que Sic, Si, etc.), ouvrant ainsi la voie à de nombreuses applications dans la recherche et l'industrie.

## 7.4 Les propriétés du Graphène

Le Graphène possède des propriétés exceptionnelles qui corrigent plusieurs défauts observés dans d'autres matériaux, comme les nanotubes de carbone ou le graphite. [19]. On définit quelque propriété du Graphène.

- ✚ Matériau le plus robuste jamais testé.
- ✚ Résistance à la traction exceptionnelle : **130 GPa**, ce qui lui permet de supporter des charges élevées avant de se rompre.
- ✚ Module de Young extrêmement élevé : environ **1 TPa**, une rigidité comparable à celle du diamant.
- ✚ Ultra-léger : une feuille de **1 m<sup>2</sup>** de graphène ne pèse que **0,77 mg**, soit **1000** fois plus léger qu'une feuille de papier de même taille.
- ✚ Rapport résistance/poids exceptionnel : une fine couche de graphène peut supporter un poids **5 millions** de fois supérieur au sien, illustré par l'exemple d'un chat de **4 kg** reposant sur une feuille de **1 m<sup>2</sup>**. [25].

## 7.5 Les applications du graphène

Voici quelques applications probables dont on peut employer le graphène, [35]

### ➤ Batteries

En 2011, des ingénieurs de l'Université Nort western ont démontré que les anodes en graphène présentaient une capacité de stockage d'énergie largement supérieure à celle des anodes en graphite, tout en autorisant un temps de recharge jusqu'à dix fois plus rapide. En mai dernier, des scientifiques de l'Université Rice ont démontré que l'intégration de graphène à l'oxyde de vanadium, un matériau plutôt économique, permettait la création de cathodes pour batteries qui peuvent se recharger en juste 20 secondes tout en conservant 90 % de leur capacité d'origine.

### ➤ **Cellule d'énergie**

En 2013, des recherches ont révélé que le graphène pouvait être utilisé pour alimenter les cellules solaires et constituer une alternative au platine, un matériau couramment employé dans ces applications mais coûteux. Grâce à sa conductivité catalytique, il permet d'exploiter et de convertir l'énergie solaire de manière plus efficace.

### ➤ **Circuits informatiques**

L'année dernière, des ingénieurs du MIT et de Harvard ont réussi à utiliser des modèles d'ADN pour façonner des structures de graphène à l'échelle nanométrique, pouvant ensuite être reproduites dans des circuits électroniques. Cependant, les chercheurs doivent encore perfectionner la précision du procédé avant d'envisager le remplacement du silicium par le graphène dans les puces informatiques.

### ➤ **Traitement des eaux et environnement**

Utilisé comme membrane pour la purification et le dessalement de l'eau, ainsi que pour le piégeage de diverses substances chimiques, telles que le CO<sub>2</sub>, les métaux lourds et les déchets radioactifs.

### ➤ **Pharmaceutique**

L'élaboration de nouveaux traitements, en particulier pour la lutte contre le cancer par l'intermédiaire de l'effet thermomagnétique, et la création d'appareils bioniques capables de se relier directement aux neurones humains.

## **Conclusion**

Pour conclure, les matériaux composites s'approprient les qualités des divers composants qui les lui composent pour obtenir de hautes performances. En associant une matrice (polymère, métal, céramique) à des renforts (fibre, particule) variés, il est possible d'obtenir un matériau adapté à de nombreuses applications allant de l'industrie au secteur aéronautique jusqu'au sport. La réussite réside dans la compréhension et le contrôle de la façon dont s'interfèrent la matrice et le renfort et dont leur organisation contribue au comportement du matériau. Ces matériaux sont indispensables pour développer des solutions alliant légèreté, résistance et durabilité, capables de faire face aux défis technologiques d'aujourd'hui et de demain.

***Chapitre II : Théories des poutres  
composites***

## 1. Introduction

La poutre représente un élément fondamental de la structure avec une dimension longitudinale largement supérieure à ses dimensions transversales. Elle est employée à l'intérieur de la construction de bâtiments depuis fort longtemps mais aussi de navires ou de machines et fait donc l'objet de nombreux modèles et études concernant son comportement sous différents types de charges. Les bases de la théorie des poutres ont été établies dans la première moitié du 17<sup>ème</sup> siècle par de grands noms tels que Galilée, Léonard de Vinci, Euler ou de Bernoulli puis ont évolué au fil du temps pour mieux traduire la réalité physique se construisant ainsi des formulations prenant notamment en compte des effets de cisaillement.

Ce chapitre présente un panorama des principales théories des poutres allant de la théorie classique d'Euler-Bernoulli aux approches plus modernes et sophistiquées de Timoshenko et des théories d'ordre supérieur en mettant en avant les hypothèses, les limites et les applicabilités des modèles qui forment outres des outils de conception des structures.

De nombreuses recherches fondées sur la théorie des poutres ont été développées pour l'analyse analytique des phénomènes de flexion, de vibration et de flambement. Parmi les principales théories proposées par les chercheurs pour l'étude des poutres, on distingue :

- **La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EBT : Euler-Bernoulli Beam Theory)**, qui ne prend pas en compte l'effet du cisaillement. [36]
- **La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT : First-Order Shear Déformation Theory)**, aussi appelée théorie de Timoshenko (TBT : Timoshenko Beam Theory), qui intègre l'effet du cisaillement en imposant un coefficient de correction. [38]
- **La théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT : Higher-Order Shear Deformation Theory)**, qui affine la prise en compte de l'effet du cisaillement à travers plusieurs modèles, notamment :
- **La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT : Third-Order Shear Deformation Theory)**, développée par Reddy. [41]
- **La théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT : Sinusoidal Shear Deformation Theory)**, introduite par Touratier. [42]
- **La théorie de la déformation de cisaillement exponentielle (ESDT : Exponentiel**

- Shear Deformation Theory), proposée par Karama et al. [43]

Ces différentes théories offrent des approches complémentaires pour mieux modéliser et comprendre le comportement des poutres en prenant en considération l'effet du cisaillement avec différents niveaux de précision.

## 2. Les différentes théories des poutres

### 2.1 Théorie d'Euler Bernoulli EBT ou bien théorie classique des poutres CBT

Plusieurs théories des poutres ont été élaborées en s'appuyant sur différentes hypothèses, entraînant des niveaux de précision variables. La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, également appelée théorie classique des poutres (CBT), est l'une des plus simples et des plus répandues. Introduite pour la première fois en 1751 par Leonhard Euler et Daniel Bernoulli, elle a été initialement développée pour analyser les vibrations des poutres minces soumises à diverses conditions aux extrémités. Malgré son ancienneté, cette théorie demeure une référence et est couramment utilisée. [44]. Elle offre une précision acceptable pour l'analyse des poutres de faible épaisseur.

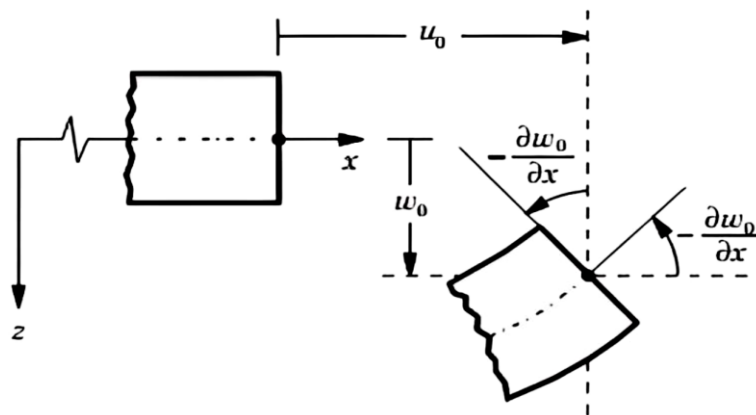


Figure II- 1 : Modèle de poutre Euler Bernoulli soumise à une charge transversale EBT" [45]

#### 2.1.1 Hypothèses

Les calculs réalisés avec le modèle d'Euler-Bernoulli reposent sur les hypothèses suivantes [37] :

- La section droite de la poutre reste indéformable après la déformation.
- Elle demeure perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation.

- L'effet du cisaillement induit par l'effort tranchant est négligé.

L'hypothèse de Bernoulli permet d'écarter l'influence du cisaillement en flexion. Ainsi, la rupture est principalement attribuée à l'extension des fibres, tandis que la flèche résulte du moment fléchissant. Toutefois, cette hypothèse devient inapplicable aux poutres courtes, qui sortent du cadre de validité du modèle de poutre. En effet, pour que le modèle reste pertinent, les dimensions des sections transversales doivent être faibles par rapport à la longueur de la courbe moyenne.

### 2.1.2 Champ de déplacements

L'expression générale du champ de déplacement associée à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli peut être formulée comme suit :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

Où :

- $u_0$  représente le déplacement longitudinal le long de l'axe  $x$  de la ligne moyenne.
- $w_0$  Correspond au déplacement transversal selon l'axe  $z$  de la ligne moyenne.
- $\frac{\partial w_0}{\partial x}$  Désigne la rotation de la section droite de la poutre.

### 2.1.3 Relation contrainte déformation

La déformation de la poutre s'exprime par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du(x,z,t)}{dx} = u_{0,x} - zw_{0,xx}(x, t) \quad (2)$$

La contrainte normale selon l'axe  $x$  est déterminée par la loi de Hooke.

$$\sigma_x = \varepsilon_{xx}E = E[u_{0,x} - zw_{0,xx}] \quad (3)$$

$E$  : Module d'élasticité dans la direction longitudinale.

## 2.2 Théorie de Timoshenko

En 1921, Timoshenko a intégré la déformation par cisaillement dans l'élaboration des équations gouvernantes des poutres [38] [39]. Cette approche, connue sous le nom de théorie des poutres de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDBT) ou théorie des poutres

de Timoshenko (TBT), diffère de la théorie classique en prenant en compte les déformations de cisaillement transversales

Contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli, où la section transversale reste perpendiculaire à l'axe neutre après déformation, la TBT suppose que la section plane reste plane mais perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre. Cependant, comme cette théorie considère une déformation transversale uniforme sur toute l'épaisseur, un facteur de correction du cisaillement est nécessaire.

Les expressions établies par la TBT pour les déplacements d'une poutre soumise à une charge transversale sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) + z\phi(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw_0}{dx} + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

$u_0(x)$  et  $w_0(x)$  représentent les déplacements de la surface moyenne de la poutre, tandis que  $\gamma_{xz}^0(x)$  correspond à la distorsion (déformation angulaire) observée au niveau de la ligne moyenne de la poutre.

$$\phi(x) = \gamma_{xz}^0(x) - z \frac{dw_0}{dx} \quad (6)$$

$\phi(x)$  désigne la rotation globale de la section, évaluée au niveau de la ligne moyenne de la poutre, correspondant à sa rotation autour de l'axe  $y$ .

La distorsion s'exprime par la relation suivante :

$$\gamma_{xz}^0(x, z, t) = \frac{du(x, z, t)}{dz} + \frac{dw(x, z, t)}{dx} \quad (7)$$

Étant donné que la contrainte de cisaillement est définie par :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0(x, t) \quad (8)$$

$G_{xz}$ : Représente le module de cisaillement transversal, considéré comme constant dans le cas d'une poutre isotrope.

Ce modèle suppose une déformation de cisaillement transversal uniforme à travers l'épaisseur, ce qui nécessite l'introduction d'un coefficient de correction  $k$ , déterminé en fonction de la géométrie de la section. Pour une poutre de section rectangulaire, ce coefficient est  $k=5/6$ .

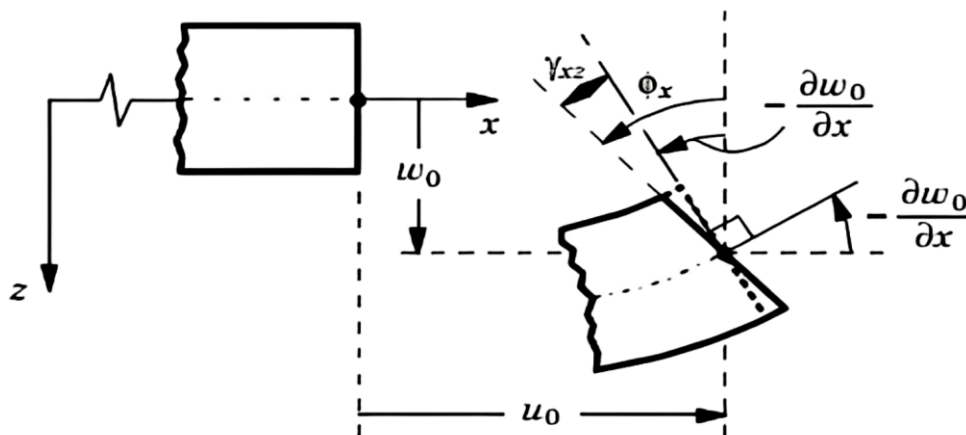
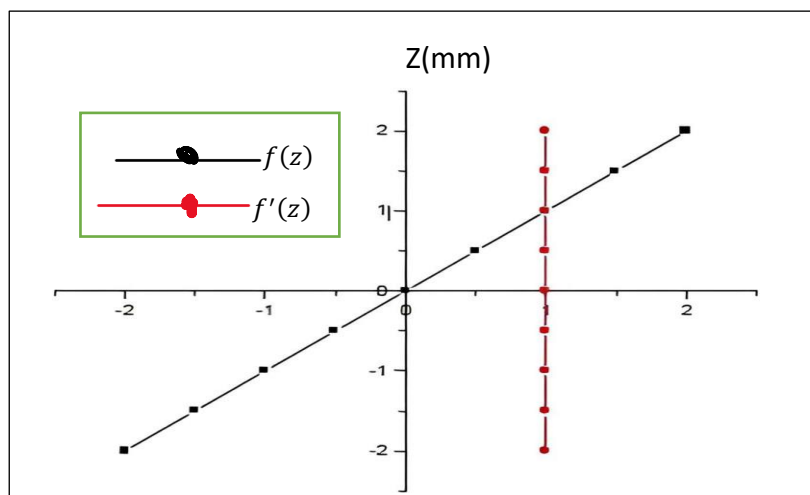


Figure II- 2 : "Cinématique de Timoshenko" [40]

La théorie de Timoshenko constitue une extension plus avancée et plus générale de la théorie classique des poutres, en intégrant une fonction supplémentaire. Cette approche permet d'améliorer la précision des solutions analytiques obtenues par la théorie élémentaire.

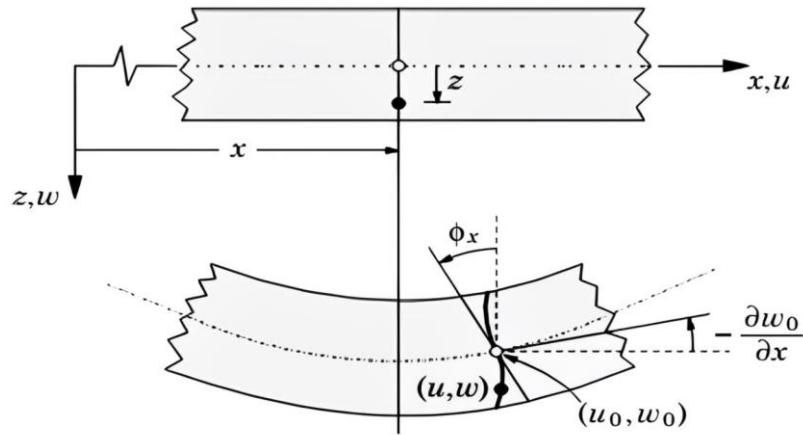
Toutefois, la présence de contraintes tangentielles non nulles aux extrémités de la poutre ainsi que l'introduction des coefficients de correction du cisaillement ont conduit certains chercheurs à développer une alternative ne tenant pas compte de ces aspects : la « théorie d'ordre élevé ».



**Figure II- 3 :** variation de la fonction de gauchissement  $f(z) = z$  et  $f'(z)$  en fonction de l'épaisseur.

### 2.3 Théorie d'ordre élevé HSDT

Lorsqu'une poutre se déforme, sa section plane subit une torsion, modifiant ainsi sa planéité et sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne. Cette complexité nécessite l'élaboration de nouvelles formulations prenant en compte une distribution non linéaire des champs de déplacement au sein de la section de la poutre. Contrairement aux théories CPT et FSDT, qui supposent une répartition linéaire des déplacements à travers l'épaisseur, cette approche permet une modélisation plus précise. C'est dans cette optique que la théorie HSDT a été développée par de nombreux chercheurs afin de mieux représenter la distribution des déformations et de mieux comprendre les phénomènes physiques affectant les poutres.



**Figure II- 4 :** Cinématique de la théorie d'ordre élevé HSDT.[45]

L'expression du champ de déplacement total pour une poutre, conformément à la théorie HSDT, peut être formulée de la manière suivante :

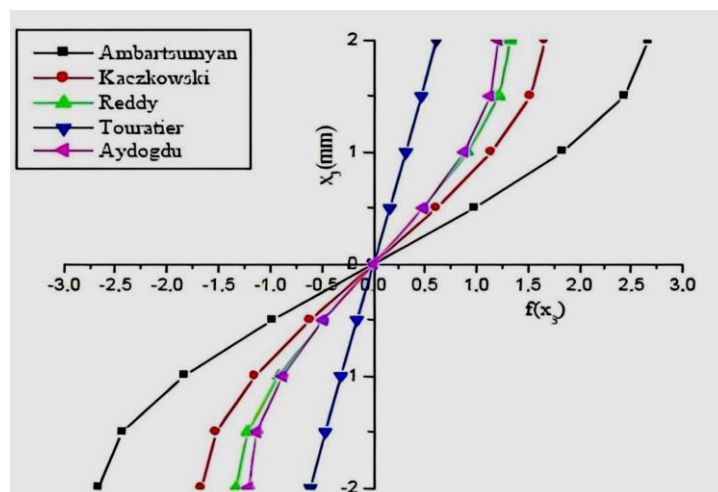
$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x) - z \frac{dw(x)}{dx} + f(z)\phi_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (9)$$

La fonction  $f(z)$  représente la distribution du cisaillement transversal, tandis que  $\phi(x)$  correspond à la rotation autour de l'axe  $x$ . Sa définition varie en fonction de la théorie employée. De nombreuses recherches ont été menées sur les théories d'ordre supérieur, apportant des avancées significatives dans ce domaine. Le tableau suivant présente certaines

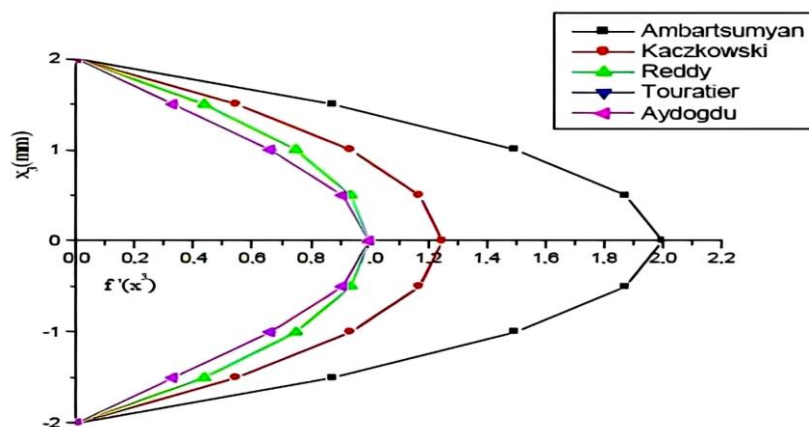
des principales contributions à ces théories. Celles-ci considèrent une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce qui les rend applicables aussi bien aux poutres épaisses qu'aux poutres minces.

**Tableau II- 1** : Quelques fonctions de gauchissement des théories HSDT pour des poutres.

Théorie	Fonction $f(z)$
CBT (Ghugal & Shimpi, 2001)	$f(z)=0$
FSDT (TBT) (Timoshenko, 1921)	$f(z)=z$
TSDT (Reddy, 2007)	$f(z) = z \left( 1 - \frac{4 \times z^3}{3h^2} \right)$
TrSDT (Touratier, 1991)	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right)$
ESDT (Karama, Afaq et al., 2003)	$f(z) = z e^{-2(z/h)^2}$
HSDT (Wattanasakulpong et al., 2013)	$f(z) = h \sin h \left( \frac{z}{h} \right) - z \cosh \left( \frac{1}{2} \right)$



**Figure II- 5 :** Variation de la fonction de cisaillement  $f(z)$  des différents modèles d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la poutre. [46]



**Figure II- 6 :** La dérivée de la fonction de cisaillement  $g(z)$  des différents modèles d'ordre élevé varie en fonction de l'épaisseur de la poutre. [46]

À la lumière des figures II-5 et II-6, on observe que les approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski diffèrent quelque peu des autres fonctions de forme. Néanmoins, elles ont constitué une base essentielle pour l'élaboration de fonctions plus affinées, mieux adaptées à l'analyse tridimensionnelle.

## 2.4 La théorie raffinée

La théorie raffinée RBT fait partie des théories de déformation en cisaillement du troisième ordre. Son développement repose sur l'hypothèse que les déformations et contraintes de cisaillement varient de manière parabolique à travers l'épaisseur de la poutre, tout en

respectant les conditions limites imposant une traction nulle sur les faces supérieure et inférieure. Un des principaux atouts de ce modèle est qu'il ne comporte que deux variables, réduisant ainsi le nombre d'inconnues à quatre, contre cinq dans la théorie HSDT. De plus, il permet d'obtenir une précision élevée dans l'analyse du comportement mécanique des poutres, sans nécessiter l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement.

Le champ de déplacement associé à la théorie RBT est défini selon les hypothèses suivantes :

Les déformations restent infinitésimales, car les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur des nano poutres.

- Le déplacement transversal  $w$  se compose de deux éléments : une composante de flexion  $w_b$  et une composante de cisaillement  $w_s$ , qui ne dépendent que de la coordonnée  $x$ .
- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est considérée comme négligeable par rapport à la contrainte plane  $\sigma_x$ .
- Dans la direction  $x$ , le déplacement  $u$  comprend également deux contributions : une due à la flexion et une autre au cisaillement.
- La composante de flexion  $u_b$  est supposée correspondre au déplacement prévu par la théorie classique des poutres.

Le champ de déplacement de la théorie raffinée est :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{dw_b}{dx} - f(z) \frac{dw_s}{dx} \\ w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \end{cases} \quad (10)$$

Le déplacement  $u_0$  correspond au mouvement d'un point du plan médian de la poutre selon la direction  $x$ . Les composantes  $w_b$  et  $w_s$  représentent respectivement la flexion et le cisaillement du déplacement transversal, tandis que  $f(z)$  est une fonction décrivant la distribution du cisaillement transversal.

L'utilisation de la théorie des plaques de Reissner-Mindlin (RPT) s'est largement répandue dans l'analyse des problèmes de flexion et de vibration des plaques composites stratifiées. Les solutions analytiques issues de la méthode de Navier ont joué un rôle essentiel dans l'estimation de la déflexion et des fréquences naturelles des plaques simplement appuyées [47] [48].

Par ailleurs, la solution de type Levy a été exploitée en association avec la RPT pour étudier le flambement des plaques orthotropes, permettant ainsi de calculer les charges critiques

de flambement pour des plaques comportant deux bords opposés simplement appuyés, tandis que les autres sont soumis à des conditions limites arbitraires [49].

## 2.5 La théorie de déformation quasi-3D

En décomposant le mouvement transversal en plusieurs composantes, telles que la flexion et le cisaillement, et en tenant compte de l'effet d'étirement en fonction de l'épaisseur de la plaque, des méthodes avancées ont été développées. Parmi elles, on trouve les théories quasi-tridimensionnelles introduites par Zenkour (2007) [50], puis développées par Mantari et Guedes Soares (2012) [51]. Ces théories impliquent six inconnues, rendant leur formulation plus complexe que celle de la théorie du premier ordre. Cela permet l'élaboration de modèles d'ordre supérieur offrant des analyses plus détaillées. Dans cette optique, Thai et Kim (2013) ont proposé une théorie quasi-3D de déformation au cisaillement sinusoïdal, basée sur cinq inconnues, afin de mieux appréhender le comportement en flexion des plaques à gradients de propriétés (FGMs). [52]

Le champ de déplacement repose sur une théorie d'ordre supérieur à quatre variables, avec une particularité introduite dans la composante de déplacement transversal afin de la rendre variable selon l'épaisseur. Pour cela, une fonction non linéaire en ( $z$ ) est intégrée, conduisant à l'expression suivante du champ de déplacement :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{dw_0}{dx} + f(z)\phi_x(x) \\ w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) + g(z)\phi_z(x) \end{cases} \quad (11)$$

Le symbole  $u_0$  désigne le déplacement le long de l'axe  $x$  pour un point situé sur le plan médian de la poutre. Les composantes  $w_b$  et  $w_s$  représentent respectivement le déplacement transversal dû à la flexion et au cisaillement, tandis que  $f(z)$  est une fonction décrivant la répartition du cisaillement transverse. Enfin,  $\phi$  représente un déplacement supplémentaire intégrant l'effet de la force normale, également appelé effet d'étirement.

$$\text{Avec} \quad g(z) = 1 - f'(z) \quad (12)$$

## 2.6 La théorie de déformation par cisaillement d'ordre zéro

Récemment, Shimpi (1999) a développé une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre zéro (ZSDT), capable de fournir des résultats précis pour les plaques isotropes, qu'elles soient épaisses ou minces. Cette approche présente plusieurs avantages par rapport à la CLPT et à la FSDT. Notamment, elle satisfait aux conditions de cisaillement transversal nul sur les faces supérieure et inférieure des plaques, élimine le besoin d'un facteur de correction du cisaillement et prévient le phénomène de blocage en cisaillement. Par exemple, elle impose des contraintes de cisaillement transversal nulles sur les faces supérieure et inférieure des lamelles, supprimant ainsi le besoin de facteurs de correction du cisaillement et évitant le blocage en cisaillement. Toutefois, cette théorie n'a pas encore été appliquée à l'analyse des structures composites stratifiées. Dans cette perspective, des efforts ont été déployés pour développer une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre zéro adaptée aux lamelles composites stratifiées. [53]

En s'appuyant sur la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre zéro des poutres, le champ de déplacement peut être exprimé comme suit [54] :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{dw_0}{dx} + \frac{1}{\lambda_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] Q_x(z) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (13)$$

Où  $Q_x$  désigne la force de cisaillement transversal et  $\lambda_x$  est une constante inconnue, déterminée à partir de la définition des forces de cisaillement transversal, selon l'expression suivante :

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (14)$$

## 2.7 La théorie de Levinson

Levinson (1980) a développé une théorie des plaques en abandonnant complètement l'hypothèse de Kirchhoff-Love, qui stipule que les lignes normales à la surface médiane non déformée restent droites et perpendiculaires à la surface médiane déformée. À la place, il propose une nouvelle approche où, en tenant compte d'une éventuelle dépendance temporelle, le déplacement transversal  $w$  est supposé indépendant de  $z$ , ce qui signifie qu'aucun étirement en épaisseur n'est pris en compte. Ces hypothèses cinématiques permettent un cisaillement non uniforme des sections transversales et garantissent, comme imposé ci-dessous, le respect des

conditions aux limites sans cisaillement sur les faces de la plaque en  $z = \pm h / 2$ . Ici,  $\psi_x$  et  $\psi_y$  désignent les rotations au niveau du plan médian de la plaque, tandis que, dans les théories de Reissner et de Mindlin, les rotations équivalentes correspondent plutôt à des rotations moyennes des sections transversales [55]. Les termes  $\phi_x$  et  $\phi_y$  peuvent être interprétés comme des fonctions de gauchissement. Les déplacements  $u$  et  $v$  ont été définis conformément aux équations suivantes :

$$\begin{cases} u = z\psi_x(x, y, t) + z^3\phi_x((x, y, t)) \\ v = z\psi_y(x, y, t) + z^3\phi_y((x, y, t)) \end{cases} \quad (15)$$

Il suffit de souligner que ces expressions correspondent aux formes antisymétriques de plus bas ordre en  $z$ , permettant de satisfaire aux conditions de libre cisaillement sur  $z = \pm h/2$ . Le respect de ces conditions exige la validation des expressions données dans les équations (II-14).

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{4}{3h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \phi_y &= \frac{4}{3h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

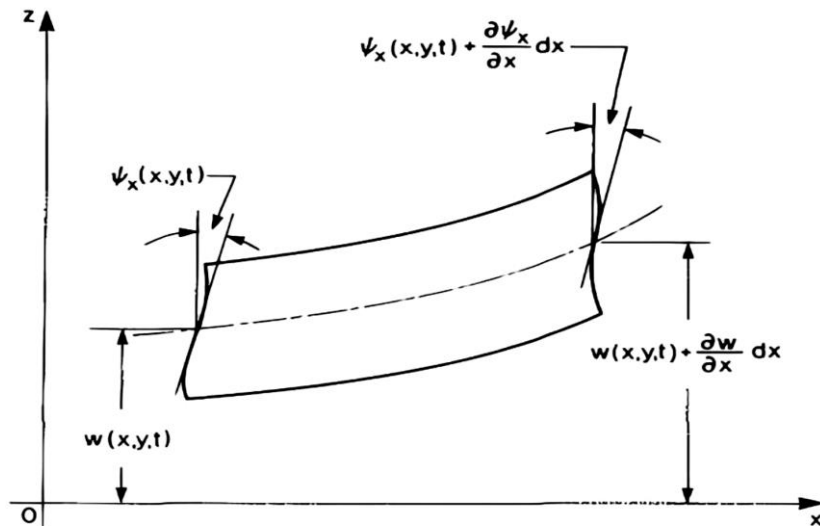


Figure II- 7 : Définition des déplacements positifs et des rotations [55].

## **Conclusion**

Ce chapitre présente un résumé des principales théories des poutres, notamment la théorie classique des poutres (CBT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSST), la théorie de déformation quasi-3D, la théorie de déformation par cisaillement d'ordre zéro et la théorie raffinée. Ensuite, nous passons en revue différents modèles développés dans la littérature à partir de ces théories.

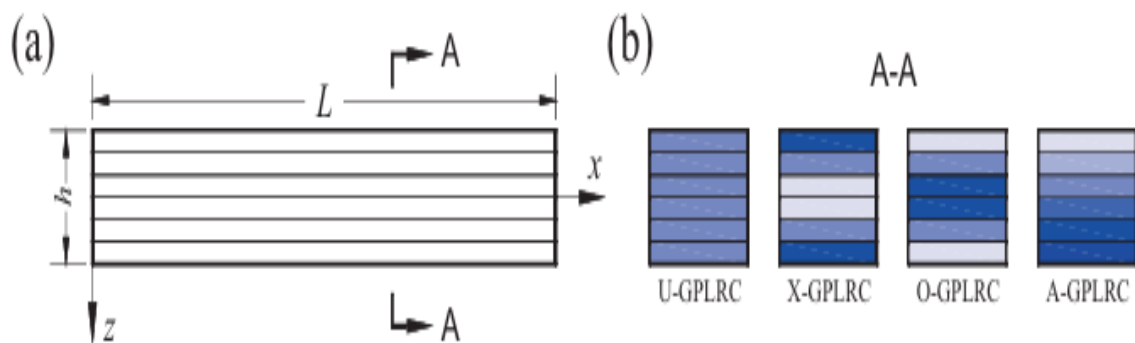
***Chapitre III : Formulation  
mathématique***

## 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des poutres multicouches élaborées à partir des matériaux composites novateurs. Il traite tout d'abord des structures et des propriétés effectives des matériaux GPLRC, avec une mise en exergue de l'effet de la distribution et de la concentration des nanoparticules de graphène sur les propriétés globales de la matière. Le texte précise ensuite les formulations théoriques permettant de modéliser le comportement de ces poutres, en s'appuyant sur les modèles classiques d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

Ce travail d'analyse et de calcul sur ces nouveaux matériaux vise ainsi à fournir une compréhension fine des exigences analytiques et des spécificités des traitements d'optimisation pour envisager l'usage de ces matériaux en dimensionnement de structures avancées.

## 2. Propriétés matérielles effectives des GPLRC



**Figure III- 1** : Configuration et système de coordonnées d'une poutre GPLRC multicouche.

La figure (III.1(a)) représente une poutre multicouche constituée de couches de GPLRC, parfaitement liées et de même épaisseur  $h_L$ . Chaque couche de GPLRC est supposée être un mélange homogène et isotrope, composé d'une matrice polymère isotrope intégrant des GPL rectangulaires, répartis de manière uniforme et orientés aléatoirement. Le module de Young effectif de ces couches peut être estimé à l'aide du modèle micromécanique de Halpin-Tsai. [56][57]

$$E = \frac{3}{8} \frac{1+\xi_L \eta_L V_{GPL}}{1-\eta_L V_{GPL}} * E_m + \frac{5}{8} \frac{1+\xi_T \eta_T V_{GPL}}{1-\eta_T V_{GPL}} * E_m \quad (1)$$

Où les paramètres  $\eta_L$  et  $\eta_T$  prennent les formes suivantes :

$$\eta_L = \frac{(E_{GPL}/E_m)^{-1}}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_L} \quad \eta_T = \frac{(E_{GPL}/E_m)^{-1}}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_T} \quad (2)$$

Où  $E_{GPL}$  et  $E_m$  représentent respectivement les modules de Young du GPL et de la matrice.  $V_{GPL}$  Désigne la fraction volumique des nanocharges de GPL. Il est important de noter que l'équation (1) intègre l'influence de la géométrie et des dimensions du GPL à travers les facteurs géométriques  $\xi_L$  et  $\xi_T$  définis par : [56]

$$\xi_L = 2(a_{GPL}/t_{GPL}) \quad \xi_T = 2(b_{GPL}/t_{GPL}) \quad (3)$$

Où  $a_{GPL}$ ,  $b_{GPL}$  et  $t_{GPL}$  désignent respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur des GPL

D'après la règle du mélange, la masse volumique  $\rho$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  du GPLRC sont donnés par :

$$\rho = \rho_m V_m + \rho_{GPL} V_{GPL} \quad (4)$$

$$\nu = \nu_m V_m + \nu_{GPL} V_{GPL} \quad (5)$$

De même,  $\rho_{GPL}$  et  $\rho_m$  correspondent aux masses volumiques, tandis que  $\nu_{GPL}$  et  $\nu_m$  représentent les coefficients de Poisson ; les fractions volumiques  $V_{GPL}$  et  $V_m$  vérifient la relation  $V_m + V_{GPL} = 1$ .

La figure (III .1(b)) illustre les différentes distributions des nanocharges de GPL selon l'épaisseur du faisceau, notamment la distribution uniforme (U) et les distributions fonctionnellement graduées (X, O et A). La couleur la plus foncée indique une concentration plus élevée en GPL dans la couche.

Dans le cas de la distribution uniforme, la teneur en GPL est identique dans toutes les couches, faisant du U-GPLRC un faisceau homogène et isotrope. En revanche, pour les distributions fonctionnellement graduées, la fraction massique de GPL varie d'une couche à l'autre. Dans un faisceau X-GPLRC, les couches supérieures et inférieures sont plus riches en GPL, tandis que dans un faisceau O-GPLRC, ce sont les couches intermédiaires qui

contiennent la plus forte concentration de GPL. Enfin, dans un faisceau A-GPLRC, la teneur en GPL augmente progressivement de la couche supérieure vers la couche inférieure.

$$\text{U-GPLRC : } V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^* \quad (6)$$

$$\text{X-GPLRC : } V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^* |2k - N_L - 1| / N_L \quad (7)$$

$$\text{O-GPLRC : } V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^* (1 - |2k - N_L - 1| / N_L) \quad (8)$$

$$\text{A-GPLRC : } V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^* (2k - 1) / N_L \quad (9)$$

Où  $N_L$  représente le nombre total de couches de la poutre, avec  $k = 1, 2, \dots, N_L$ .

La fraction volumique totale de GPL  $V_{GPL}^*$  est définie par :

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + (\rho_{GPL} / \rho_m)(1 - W_{GPL})} \quad (10)$$

Où  $W_{GPL}$  représente la fraction pondérale totale de GPL dans l'ensemble de la poutre. Comme l'indiquent les équations (6) à (9), les fractions volumiques totales de GPL sont identiques pour les faisceaux U, X, O et A-GPLRC.

### 3. Formulations théoriques

#### 3.1 Théorie d'Euler Bernoulli pour les poutres composites avancée en Graphène

##### 3.1.1 Cinématique et Equations du mouvement

Selon la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, le champ de déplacement général s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (11)$$

Où :

- $u_0$  représente le déplacement longitudinal le long de l'axe  $x$  de la ligne moyenne.

- $w_0$  Correspond au déplacement transversal selon l'axe  $z$  de la ligne moyenne.
- $\frac{\partial w_0}{\partial x}$  Désigne la rotation de la section droite de la poutre.

### 3.1.2 Relations constitutives

La relation entre la déformation linéaire et le déplacement s'exprime comme Suit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (12)$$

La rigidité réduite en contrainte plane,  $Q_{11}$  est définie par :

$$Q_{11} = E \quad (13)$$

La relation linéaire reliant la contrainte à la déformation s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = Q_{11}(z) \varepsilon_{xx} = Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (14)$$

Effort normal résultant (force par unité de largeur) :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) dz \quad (15)$$

Moment fléchissant résultant :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) dz \quad (16)$$

La  $k$  ième couche GPLRC est positionnée entre les coordonnées  $z = z_k$  et  $z = z_{k+1}$  selon l'épaisseur.  $Q_{11}^{(k)}$  Représente la valeur de  $Q_{11}$ , pour la  $k$  ième couche GPLRC. Les composantes de rigidité sont définies comme suit :

$$A_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{11}^{(k)} dz \text{ (Rigidité membrane)} \quad (17)$$

$$B_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{11} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z Q_{11}^{(k)} dz \text{ (Couplage membrane-flexion)} \quad (18)$$

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 Q_{11} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 Q_{11}^{(k)} dz \quad (\text{Rigidité en flexion}) \quad (19)$$

Alors l'effort normal résultant (force par unité de largeur)  $N_x$ , le moment fléchissant résultant  $M_x$  s'exprime comme suit :

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (20)$$

$$M_x = -B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (21)$$

L'énergie cinétique virtuelle  $\delta T$  et l'énergie de déformation virtuelle  $\delta U$  s'expriment comme suit :

$$\delta T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] dz dx \quad (22)$$

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) \right] dz dx \quad (23)$$

$$\delta T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} - z \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dz dx \quad (24)$$

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \sigma_{xx} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dz dx \quad (25)$$

Les termes associés à l'inertie s'expriment comme suit :

$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \{1, z, z^2\} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} \{1, z, z^2\} dz \quad (26)$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \quad M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz \quad (27)$$

Après le remplacement de ces termes dans 24 et 25 on obtient :

$$\delta T = \int_0^L \left( I_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} - I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} - I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + I_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx \quad (28)$$

$$\delta U = \int_0^L \left( N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dx \quad (29)$$

$$\delta T = \int_0^L \left( I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_0 - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 + I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_0 + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 \right) dx \quad (30)$$

$$\delta U = \int_0^L \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta w_0 \right) dx \quad (31)$$

### 3.1.3 Les équations du mouvement

#### 3.1.3.1 Principe de Hamilton

Les équations régissant le comportement de la poutre sont obtenues en appliquant le principe de Hamilton :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt \quad (32)$$

En substituant  $\delta T$  et  $\delta U$  des équations (30) et (31) dans l'expression du travail virtuel donnée par l'équation (32), puis en intégrant sur l'épaisseur de la poutre, on obtient

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[ \left( -\frac{\partial N_x}{\partial x} + I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \delta w_0 \right] dx dt \quad (33)$$

En tenant compte des équations (20) et (21) et en annulant séparément les coefficients de  $\delta u_0$  et  $\delta w_0$  dans l'équation (33), on obtient les équations gouvernantes en termes de déplacements, formulées comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \quad (34)$$

$$-B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (35)$$

### 3.1.3.2 Méthode de solution

Les solutions de ces équations selon la méthode de Galerkin ce sera comme suit :

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \quad (36)$$

$$w_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n X_m(x) e^{i\omega_n t} \quad (37)$$

Avec :

$$X_m = \sin(\lambda * x); \quad \% S-S$$

$$X_m = (\sin(\lambda * x))^2; \quad \% C-C \quad (37-a)$$

$$X_m = \sin(\lambda * x) * (\cos(\lambda * x) - 1); \quad \% C-S$$

$$\text{Et } \lambda = \frac{n * \Pi}{L}$$

$X_m$ : fonctions admissibles qui représente les conditions aux limites

On va calculer les termes suivants  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2}$ , qui sont inclus dans les équations précédentes :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{\partial^3 X_m(x)}{\partial x^3} e^{i\omega_n t} \quad (38)$$

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \frac{\partial^3 X_m(x)}{\partial x^3} e^{i\omega_n t} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_n \omega_n^2 \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} W_n \omega_n^2 \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \quad (41)$$

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{\partial^4 X_m(x)}{\partial x^4} e^{i\omega_n t} \quad (42)$$

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{\partial^4 X_m(x)}{\partial x^4} e^{i\omega_n t} \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} W_n \omega_n^2 X_m(x) e^{i\omega_n t} \quad (44)$$

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} U_n \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} e^{i\omega_n t} \quad (45)$$

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} W_n \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} e^{i\omega_n t} \quad (46)$$

Après le remplacement de ces termes par ces valeurs dans les équations (34) et (35) Nous pouvons obtenir :

$$A_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n e^{i\omega_n t} - B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} W_n e^{i\omega_n t} + I_0 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n e^{i\omega_n t} - \quad (47)$$

$$I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} W_n e^{i\omega_n t} = 0$$

$$-B_{11} \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} U_n e^{i\omega_n t} + D_{11} \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} W_n e^{i\omega_n t} + I_0 \omega_n^2 X_m W_n e^{i\omega_n t} - \quad (48)$$

$$I_1 \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} U_n e^{i\omega_n t} + I_2 \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} W_n e^{i\omega_n t} = 0$$

Nous divisons les deux côtés des équations par  $e^{i\omega_n t}$  :

$$A_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n - B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} W_n + I_0 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n - I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} W_n = 0 \quad (49)$$

$$-B_{11} \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} U_n + D_{11} \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} W_n + I_0 \omega_n^2 X_m W_n - I_1 \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} U_n + I_2 \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} W_n = 0 \quad (50)$$

Nous multiplions les deux côtés des équations (1) par  $\frac{\partial X_m}{\partial x}$  et les deux côtés de l'équation (2) par  $X_m$  :

$$A_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n - B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} w_n + I_0 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n - I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} w_n = 0 \quad (51)$$

$$-B_{11} \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m U_n + D_{11} \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m w_n + I_0 \omega_n^2 X_m X_m w_n - \quad (52)$$

$$I_1 \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m U_n + I_2 \omega_n^2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m w_n = 0$$

Nous intégrons par rapport la longueur de la poutre de 0 à L on obtient :

$$A_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx U_n - B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx w_n + I_0 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx U_n - \quad (53)$$

$$I_1 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx w_n = 0$$

$$-B_{11} \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx U_n + D_{11} \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx w_n + I_0 \omega_n^2 \int_0^L X_m X_m dx w_n - \quad (54)$$

$$I_1 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx U_n + I_2 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx w_n = 0$$

L'écriture de ces équations sous forme matricielle s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & -B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \\ -B_{11} \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx & D_{11} \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ w_n \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$-\omega_n^2 \begin{bmatrix} -I_0 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & I_1 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \\ I_1 \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx & -I_0 \int_0^L X_m X_m dx - I_2 \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ w_n \end{bmatrix} = 0$$

On pose que :

$K_{uu} = A_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$	$M_{uu} = -I_0 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$
$K_{uw} = -B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$	$M_{uw} = I_1 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$
$K_{wu} = -B_{11} \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx$	$M_{wu} = I_1 \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx$
$K_{ww} = D_{11} \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx$	$M_{ww} = -I_0 \int_0^L X_m X_m dx - I_2 \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx$

Donc la forme matricielle s'exprime comme ceci :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} \\ K_{wu} & K_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uw} \\ M_{wu} & M_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix} = 0 \quad (56)$$

On pose que :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} \\ K_{wu} & K_{ww} \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uw} \\ M_{wu} & M_{ww} \end{bmatrix} \quad \{q\} = \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix}$$

Où  $[K]$  ,  $[M]$  et  $\{q\}$  représentent la matrice raideur, la matrice masse et le vecteur de déplacements modaux.

$$[K]\{q\} - \omega^2[M]\{q\} = 0$$

$$([K] - \omega^2[M])\{q\} = 0$$

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

## 3.2 Théorie de Timoshenko

### 3.2.1 Cinématique et Equations du mouvement

Considérons une poutre GPLRC multicouche de longueur L et d'épaisseur totale h

D'après la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), les déplacements d'un point arbitraire le long des axes  $x$  et  $z$  sont donnés par :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\varphi(x, t) \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (57)$$

Où  $u_0$  et  $w_0$  représentent respectivement les composantes du déplacement longitudinal et transversal dans le plan médian  $z = 0$  ;  $\varphi$  désigne l'angle de rotation de la normale au plan médian, et  $t$  le temps.

### 3.2.2 Relations constitutives

Les relations entre la déformation linéaire et le déplacement s'expriment comme Suit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \quad (58)$$

Les rigidités réduites en contrainte plane,  $Q_{11}$  et  $Q_{55}$ , sont définies par :

$$Q_{11} = E \quad Q_{55} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (59)$$

Les relations linéaires reliant les contraintes aux déformations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = Q_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) \quad (60)$$

Effort normal résultant (force par unité de largeur) :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz \quad (61)$$

Moment fléchissant résultant :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz \quad (62)$$

Effort tranchant :

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) dz = \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}(z) dz \quad (63)$$

La  $k$ ième couche GPLRC est positionnée entre les coordonnées  $z = z_k$  et  $z = z_{k+1}$  selon l'épaisseur.  $Q_{11}^{(k)}$ ,  $Q_{55}^{(k)}$  représentent respectivement les valeurs de  $Q_{11}$ ,  $Q_{55}$  pour la  $k$ ième couche GPLRC. Les composantes de rigidité sont définies comme suit :

$$A_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{11}^{(k)} dz \quad (\text{Rigidité membrane}) \quad (64)$$

$$B_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z Q_{11} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z Q_{11}^{(k)} dz \quad (\text{Couplage membrane-flexion}) \quad (65)$$

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 Q_{11} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 Q_{11}^{(k)} dz \quad (\text{Rigidité en flexion}) \quad (66)$$

$$A_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}(z) dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{55}^{(k)} dz \quad (\text{La rigidité globale en cisaillement}) \quad (67)$$

Alors l'effort normal résultant (force par unité de largeur)  $N_x$ , le moment fléchissant résultant  $M_x$  et l'effort tranchant  $Q_x$  s'exprime comme suit :

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (68)$$

$$(69)$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (70)$$

$$Q_x = A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right)$$

En réalité, pour une poutre, la distribution réelle des contraintes de cisaillement sur son épaisseur n'est pas uniforme. Alors, cette dernière suit une répartition parabolique, notamment pour une section rectangulaire. C'est pourquoi pour prendre en considération de cette vérité définitive et corriger l'approximation d'une distribution uniforme, on peut introduire un coefficient de correction, noté  $k$ . Cependant, il dépend de la forme de la section. Pour une section rectangulaire homogène, une valeur typique est utilisée, et donc, la formule corrigée suivante est écrite de la manière suivante :

$$Q_x = kA_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \quad (71)$$

Et finalement, l'effort normal résultant (force par unité de largeur)  $N_x$ , le moment fléchissant résultant  $M_x$  et l'effort tranchant sont :

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (72)$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (73)$$

$$Q_x = kA_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \quad (74)$$

L'énergie cinétique virtuelle  $\delta T$  et l'énergie de déformation virtuelle  $\delta U$  s'expriment comme suit :

$$\delta T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] dz dx \quad (75)$$

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \varphi \right) \right] dz dx \quad (76)$$

$$\delta T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + z \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dz dx \quad (77)$$

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + z \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \tau_{xy} \delta \varphi) dz dx \quad (78)$$

Les termes associés à l'inertie s'expriment comme suit :

$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \{1, z, z^2\} dz = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} \{1, z, z^2\} dz \quad (79)$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \quad M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz \quad Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (80)$$

Après le remplacement de ces termes dans 20 et 21 on obtient :

$$\delta T = \int_0^L \left( I_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + I_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + I_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx \quad (81)$$

$$\delta U = \int_0^L (N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + Q_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + Q_x \delta \varphi) dx \quad (82)$$

$$\delta T = \int_0^L \left( I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta \varphi + I_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta u_0 + I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 \right) dx \quad (83)$$

$$\delta U = \int_0^L \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \varphi + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w_0 + Q_x \delta \varphi \right) dx \quad (84)$$

### 3.2.3 Les équations du mouvement

#### 3.2.3.1 Principe de Hamilton

Les équations régissant le comportement de la poutre sont obtenues en appliquant le principe de Hamilton :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt \quad (85)$$

En substituant  $\delta T$  et  $\delta U$  des équations (83) et (84) dans l'expression du travail virtuel donnée par l'équation (85), puis en intégrant sur l'épaisseur de la poutre, on obtient :

$$0 = \int_{t_2}^{t_1} \int_0^L \left[ \left( -\frac{\partial N_x}{\partial x} + I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta u_0 + \left( -\frac{\partial Q_x}{\partial x} + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) \delta w_0 + \left( -\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta \varphi \right] dx dt \quad (86)$$

Où les résultantes des forces et des moments dans le plan sont déterminées à partir les équations (72) à (74).

En tenant compte des équations (72) à (74) et en annulant séparément les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta \varphi$  dans l'équation (86), on obtient les équations gouvernantes en termes de déplacements, formulées comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (87)$$

$$kA_{55} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (88)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + kA_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (89)$$

### 3.2.4 Méthode de solution

Les solutions de ces équations selon la méthode de Galerkin ce sera comme suit :

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \quad (90)$$

$$w_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n X_m(x) e^{i\omega_n t} \quad (91)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \quad (92)$$

On va calculer les termes suivants  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  qui sont inclus dans les équations précédentes :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n e^{i\omega_n t} \quad (93)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n e^{i\omega_n t} \quad (94)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} W_n e^{i\omega_n t} \quad (95)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -\omega_n^2 X_m W_n e^{i\omega_n t} \quad (96)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \Phi_n e^{i\omega_n t} \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n e^{i\omega_n t} \quad (98)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \Phi_n e^{i\omega_n t} \quad (99)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial X_m}{\partial x} W_n e^{i\omega_n t} \quad (100)$$

Après le remplacement de ces termes par ces valeurs dans les équations (87) (88) et (89) Nous pouvons obtenir :

$$A_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n e^{i\omega_n t} + B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \Phi_n e^{i\omega_n t} + I_0 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n e^{i\omega_n t} + I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n e^{i\omega_n t} = \quad (101)$$

0

$$kA_{55} \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} W_n e^{i\omega_n t} + \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \Phi_n e^{i\omega_n t} \right) + I_0 \omega_n^2 X_m W_n e^{i\omega_n t} = 0 \quad (102)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n e^{i\omega_n t} + D_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \Phi_n e^{i\omega_n t} - kA_{55} \left( \frac{\partial X_m}{\partial x} W_n e^{i\omega_n t} + \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} \Phi_n e^{i\omega_n t} \right) + \quad (103)$$

$$I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n e^{i\omega_n t} + I_2 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n e^{i\omega_n t} = 0$$

Nous divisons les deux côtés des équations par  $e^{i\omega_n t}$  :

$$A_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n + B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \Phi_n + I_0 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n + I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n = 0 \quad (104)$$

$$kA_{55} \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} W_n + \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \Phi_n \right) + I_0 \omega_n^2 X_m W_n = 0 \quad (105)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} U_n + D_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \Phi_n - kA_{55} \left( \frac{\partial X_m}{\partial x} W_n + \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} \Phi_n \right) + I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n + \quad (106)$$

$$I_2 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n = 0$$

Nous multiplions les deux côtés des équations (1) et (3) par  $\frac{\partial X_m}{\partial x}$  et les deux côtés de l'équation (2) par  $X_m$  :

$$A_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n + B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n + I_0 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n + I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n = 0 \quad (107)$$

$$kA_{55} \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m W_n + \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m \Phi_n \right) + I_0 \omega_n^2 X_m X_m W_n = 0 \quad (108)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n + D_{11} \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n - kA_{55} \left( \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} W_n + \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n \right) + I_1 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} U_n + I_2 \omega_n^2 \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} \Phi_n = 0 \quad (109)$$

Nous intégrons par rapport la longueur de la poutre de 0 à L on obtient :

$$A_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx U_n + B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \Phi_n + I_0 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx U_n + I_1 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \Phi_n = 0 \quad (110)$$

$$kA_{55} \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx W_n + kA_{55} \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx \Phi_n + I_0 \omega_n^2 \int_0^L X_m X_m dx W_n = 0 \quad (111)$$

$$B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx U_n + D_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \Phi_n - kA_{55} \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx W_n - kA_{55} \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \Phi_n + I_1 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx U_n + I_2 \omega_n^2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \Phi_n = 0 \quad (112)$$

L'écriture de ces équations sous forme matricielle s'exprime comme suit :

$$\left[ \begin{array}{ccc}
 A_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & 0 & B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \\
 0 & kA_{55} \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx & kA_{55} \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx \\
 B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & -kA_{55} \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & D_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx + -kA_{55} \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx
 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} U_n \\ W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} -I_0 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & 0 & -I_1 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \\ 0 & -I_0 \int_0^L X_m X_m dx & 0 \\ -I_1 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx & 0 & -I_2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} = 0 \quad (113)$$

On pose que :

$K_{uu} = A_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$	$M_{uu} = -I_0 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$
$K_{uw} = 0$	$M_{uw} = 0$
$K_{u\varphi} = B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$	$M_{u\varphi} = -I_0 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$
$K_{wu} = 0$	$M_{wu} = 0$
$K_{ww} = kA_{55} \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx$	$M_{ww} = -I_0 \omega_n^2 \int_0^L X_m X_m dx$
$K_{w\varphi} = kA_{55} \int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx$	$M_{w\varphi} = 0$
$K_{\varphi u} = B_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$	$M_{\varphi u} = -I_1 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$

$K_{\varphi w} = -kA_{55} \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$ $K_{\varphi\varphi} = D_{11} \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx + -kA_{55} \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$	$M_{\varphi w} = 0$ $M_{\varphi\varphi} = -I_2 \int_0^L \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx$
---	---

Donc la forme matricielle s'exprime comme ceci :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\varphi} \\ K_{wu} & K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi w} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uw} & M_{u\varphi} \\ M_{wu} & M_{ww} & M_{w\varphi} \\ M_{\varphi u} & M_{\varphi w} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} = 0 \quad (114)$$

On pose aussi que :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\varphi} \\ K_{wu} & K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi w} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uw} & M_{u\varphi} \\ M_{wu} & M_{ww} & M_{w\varphi} \\ M_{\varphi u} & M_{\varphi w} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad \{q\} = \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \\ \Phi_n \end{bmatrix}$$

Où  $[K]$  ,  $[M]$  et  $\{q\}$  représentent la matrice raideur, la matrice masse et le vecteur de déplacements modaux.

$$[K]\{q\} - \omega^2[M]\{q\} = 0$$

$$[[K] - \omega^2[M]]\{q\} = 0$$

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0$$

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé une solution générale du comportement en vibration libre des nano poutres renforcées par des plaquettes de Graphene en utilisant la théorie d'Euler Bernoulli ou le nombre d'inconnus est deux et celui de Timoshenko est trois avec différentes conditions aux limites. Les solutions sont obtenues par la méthode de Galerkin.

***Chapitre IV : Résultats et  
interprétation***

## 1. Introduction

Dans ce travail, une attention particulière est portée sur le rôle joué par les conditions microstructurales et géométriques des GPL sur les propriétés de vibration des poutres composites avancées (GPLRC) quant à la fréquence adimensionnelle. Au travers plusieurs analyses paramétriques, différentes configurations de distribution des GPL (U, X, O, A), la fraction massique de renfort, le nombre de couches, le rapport d'élanement ( $L/h$ ) et les conditions aux limites sont étudiés, au travers du but d'être en mesure d'identifier les mécanismes de la rigidité dynamique de ces matériaux avancés.

## 2. Validation et interprétation des résultats

### 2.1 selon la théorie d'Euler Bernoulli

#### ➤ Validation 1

Pour valider notre programme qui calcul la premier paramètre fréquence de base, on a comparé les résultats calculer avec les références avec Şimşek (2010a) [58] et Ebrahimi et al. (2016) [59] des matériaux FGM. On constater pour des rapports d'élanement  $L/h=5$  et 20, et pour différentes valeurs de l'indice de fraction volumique  $k$ . tel que présenté dans le tableau 1.

**Tableau IV- 1 :** Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre FGM simplement appuyé.

$L/h$	Modèle	Indice de fraction volumique ( $k$ )				
		0	0.2	0.5	1	5
5	Şimşek (2010a)	5.3953	5.0219	4.5936	4.1483	3.7793
	Ebrahimi et al. (2016)	5.3953	5.0206	4.5931	4.1483	3.7793
	Présent	5.3953	5.0230	4.5941	4.1483	3.5948
20	Şimşek (2010a)	5.4777	5.0980	4.6645	4.2163	3.8471
	Ebrahimi et al. (2016)	5.4777	5.0967	4.6641	4.2163	3.8471
	Présent	5.4777	5.0991	4.6651	4.2163	3.6628

Les fréquences obtenues à l'aide du modèle développé dans cette étude présentent une excellente concordance avec les résultats de références disponibles dans la littérature,

notamment ceux de Şimşek (2010a) [58] et Ebrahimi et al. (2016) [59], pour des rapports d'élanement  $L/h=5$  et 20, ainsi que pour des valeurs de fraction volumique  $k$  comprises entre 0 et 1. Cette bonne correspondance confirme la robustesse du modèle proposé, en particulier dans sa capacité à représenter avec précision les propriétés mécaniques effectives des matériaux composites.

Une légère différence est observée pour un  $k = 5$ . En effet, les fréquences calculées par le modèle sont inférieures de manière marginale aux fréquences des références. Cette disparité peut être imputée aux simplifications introduites dans la distribution des propriétés mécaniques à haute fraction volumique. L'écart relatif maximal observé s'établit à 0,96 % pour un rapport de  $L/h = 5$ , et demeure inférieur à 0,01 % pour un rapport de  $L/h = 20$ . Cette marge d'erreur extrêmement réduite atteste de la robustesse et de la fiabilité du modèle proposé pour l'analyse vibratoire des poutres composites.

### ➤ Validation 2

Pour validation est proposée avec une poutre composite stratifiée dans l'orientation  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , avec un rapport de module  $E1/E2 = 40$ , pour différentes valeurs du rapport d'élanement  $L/h$ , comme indiqué dans le tableau 2.

**Tableau IV- 2 :** Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre en composite stratifiée simplement appuyé .

Schéma de lamination	E1/E2	Source	L/h				
			5	10	20	40	80
0°/90°/0°	40	Présent	17.4448	17.6569	17.7112	17.7265	17.7287
		Sayyad (2018)	17.421	17.632	-	-	-

Le modèle numérique proposé a été validé par comparaison avec les travaux de Sayyad et Ghugal (2018) [60], qui ont étudié l'effet de rapport d'élanement sur le comportement dynamique, les fréquences naturelles des poutres laminées.

Le modèle présent fournit des fréquences fondamentales très proches de celles de Sayyad et Ghugal (2018) [60]. pour plusieurs rapports d'élanement et configurations de stratification, ce

qui confirme la justesse de la modélisation, notamment la prise en compte des effets d'étirement en épaisseur et la distribution des couches.

Le modèle proposé est validé par une excellente correspondance avec les résultats de Sayyad et Ghugal (2018) [60].

## 2.2 selon la théorie de Timochenko

### ➤ Validation 1

Concernant le modèle de Timochenko un programme est établi, les résultats sont comparés avec ceux de la littérature pour une poutre FGM simplement appuyée en variant le rapport d'élanement ( $L/h$ ) et l'indice de loi de puissance ( $p$ ), d'après les résultats du tableau IV- 3.

**Tableau IV- 3 :** Fréquences naturelles non dimensionnelles d'une poutre à gradation fonctionnelle simplement supportée .

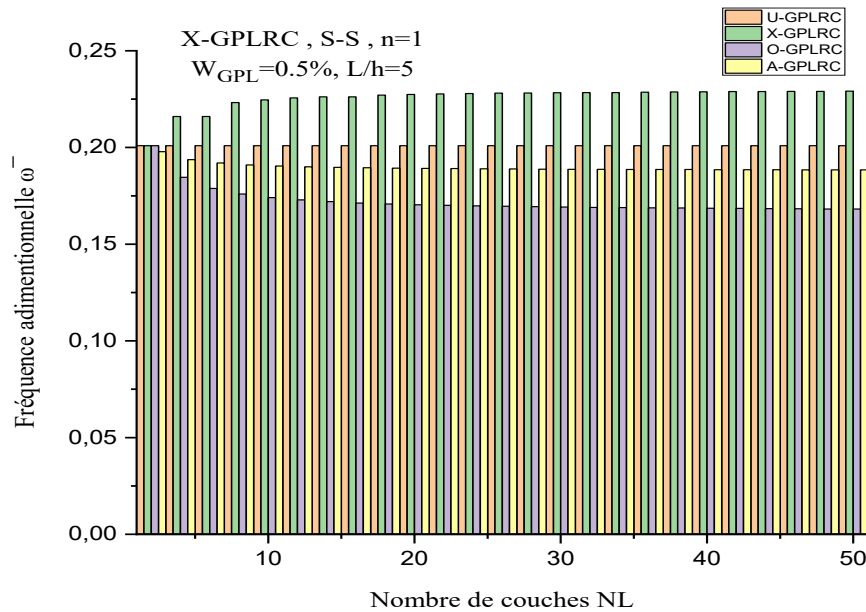
L/h	P					
		0	1	2	5	10
5	Présent	5.1524	3.9902	3.6343	3.4311	3.3134
	Şimşek(2010)	5.1527	3.9904	3.6261	3.4012	3.2816
	Thai & Vo (2012)	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
20	Présent	5.4603	4.2050	3.8367	3.6508	3.5415
	Şimşek (2010)	5.4603	4.2050	3.8361	3.6485	3.5389
	Thai & Vo (2012)	5.4603	4.2050	3.8361	3.6484	3.5389

Le tableau IV-3 présente les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une poutre fonctionnellement graduée (FGM). simplement appuyée, calculées pour différents rapports d'élanement ( $L/h$ ) et indices de loi de puissance ( $p$ ). Les résultats obtenus par le modèle présent sont comparés à ceux de la littérature, notamment Şimşek (2010) [61] et Thai & Vo (2012) [62], on remarque une grande proximité entre nos résultats et ceux de la littérature dans l'analyse vibratoire des poutres fonctionnellement graduées (FGM).

Dans le cas  $L/h=5$  et  $p=0$ , la fréquence obtenue est identique à celle de Şimşek (2010) [61] et Thai & Vo (2012) [62]. L'écart maximal reste inférieur à 0,97 % entre nos résultats et ceux de Şimşek (2010) ou Thai & Vo (2012) pour  $L/h=5$ , et descend à 0,07 % pour  $L/h=20$ . Ces faibles écarts confirment la fiabilité et la précision du modèle développé .

## 3. Etude de Convergence

### 3.1 Selon la théorie d' Euler Bernoulli



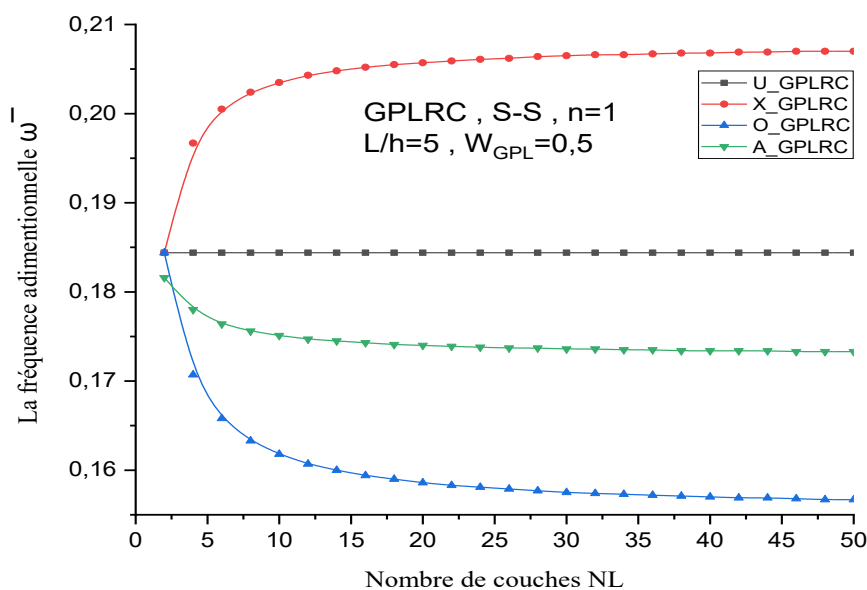
**Figure IV- 1:** Influence du nombre de couches (NL) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différents modèles (U. GPLRC, X. GPLRC, O. GPLRC, A. GPLRC) dans le système X-GPLRC S-S ( $n=1$ ,  $W_{GPL}=0.5\%$ ,  $L/h=5$ )

- La fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  reste pratiquement constante lorsque le nombre de couches augmente, quelle que soit la distribution de graphène. Cela montre que, pour une fraction massique de graphène fixée, augmenter le nombre de couches n'a qu'un effet négligeable sur la fréquence propre de la poutre.
- Contrairement à ce qui a été mentionné précédemment, le graphe montre que la distribution **X-GPLRC** donne la fréquence la plus élevée, suivie de **U-GPLRC**, puis **A-GPLRC**, et enfin **O-GPLRC** qui donne la fréquence la plus basse. Cela indique que la manière dont le graphène est réparti dans la poutre influence la rigidité globale et donc la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$ , mais l'écart reste relativement faible entre les différentes distributions.

#### Résumé

Pour assurer une bonne convergence de la poutre composite renforcés des nano plaquette sous divers types de distribution en prendre  $NL=20$ .

### 3.2 Selon la théorie de Timochenko



**Figure IV- 2 :** Influence du nombre de couches (NL) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différents types de distribution (U-GPLRC, X-GPLRC, O-GPLRC, A-GPLRC)

**Figure (IV-2)** étudie l'influence du nombre de couches (NL) sur la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre composite renforcée de nano-plaquettes de graphène (GPLRC), en comparant quatre modes de répartition des GPL :

- Quand le nombre de couches NL augmente, la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  tend vers une valeur limite pour chaque type de distribution.
- Pour des valeurs du nombre (NLsup à 18) de couches la fréquence se stabilise.
- X\_GPLRC (rouge) donne les valeurs de fréquence les plus élevées, ce qui signifie une meilleure rigidité dynamique.
- \_GPLRC (bleu) donne les valeurs les plus faibles, donc une rigidité plus faible.
- U\_GPLRC (noir) reste constant, ce qui suggère que cette distribution est insensible au nombre de couches dans ce cas précis.
- A\_GPLRC (vert) a une tendance intermédiaire, meilleure que O mais moins bonne que U.

#### Résumé

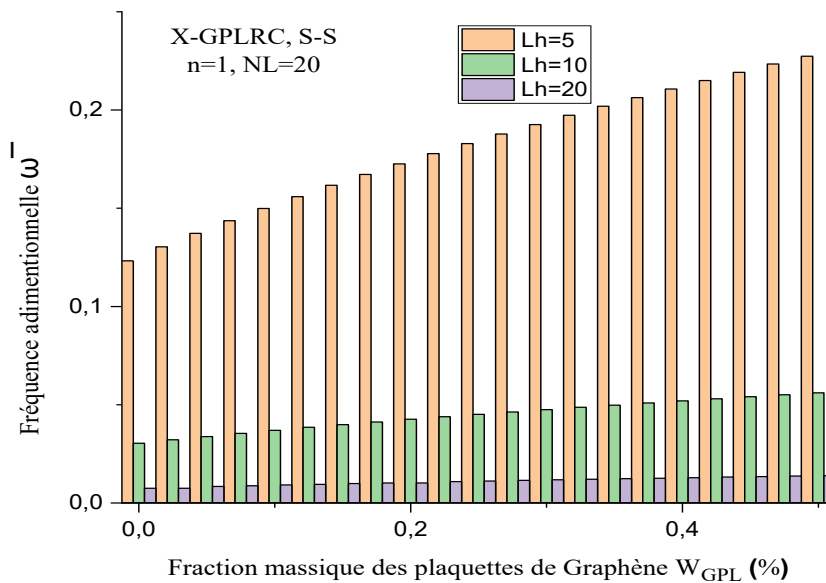
Pour assurer une bonne convergence de la poutre composite renforcés des nano plaquette sous divers types de distribution en prendre NL=20.

#### 4. Etude paramétrique

L'analyse paramétrique menée sur les poutres composites renforcées par des nano-plaquettes de graphène (GPL) met en évidence plusieurs facteurs influençant la fréquence fondamentale adimensionnelle :

#### 4.1 Selon la théorie d' Euler Bernoulli

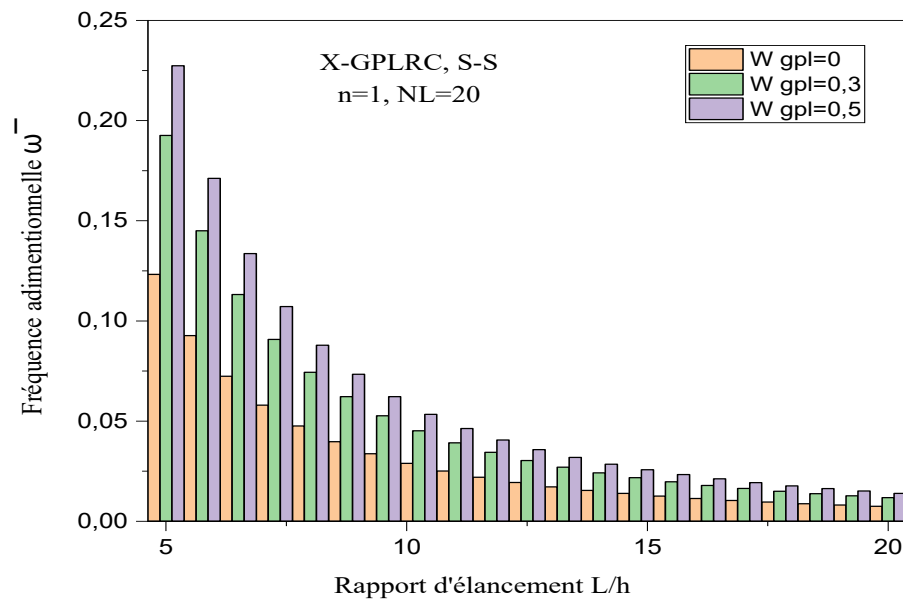
- **Effet de la fraction massique de Graphene**



**Figure IV- 3 :** Influence de la fraction massique des plaquettes de graphène  $W_{GPL}$  (%) sur la fréquence adimensionnelle pour différents rapports d'élançement ( $L/h$ ) dans le système X-GPLRC S-S ( $n=1$ ,  $NL=20$ )

- Pour chaque rapport d'élançement ( $L/h$ ), la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  augmente de façon quasi-linéaire avec l'augmentation de la fraction massique de graphène. Cela signifie que plus la quantité de graphène dans la poutre est élevée, plus la rigidité du matériau composite augmente, ce qui se traduit par une fréquence propre plus élevée.
- À fraction de graphène constante, la fréquence adimensionnelle est la plus élevée pour  $L/h = 5$  (poutre la moins élançée, donc la plus rigide), puis décroît pour  $L/h = 10$  et atteint sa valeur la plus basse pour  $L/h = 20$  (poutre la plus élançée, donc la plus flexible).
- Cela traduit le comportement classique des poutres : plus elles sont longues et fines, plus leur fréquence propre diminue.

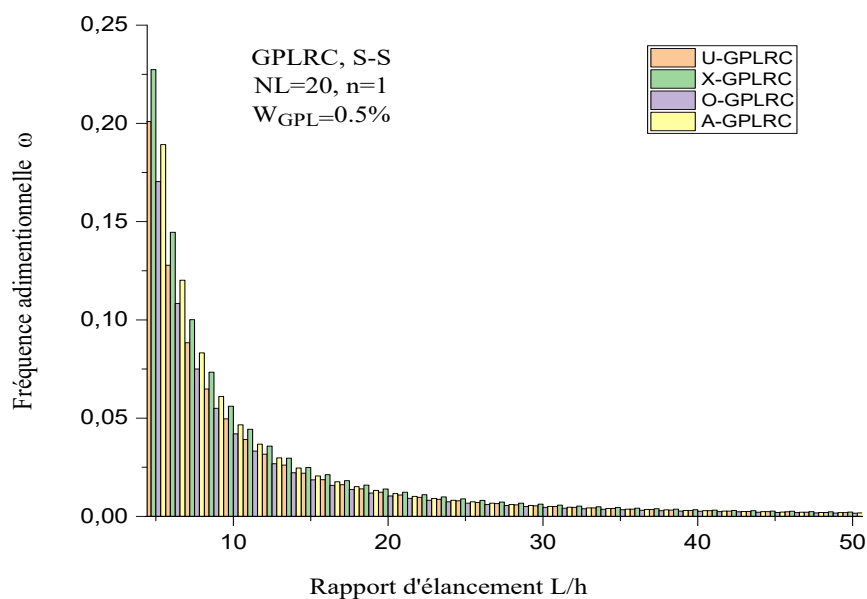
- **Impact du rapport d'élançement**



**Figure IV- 4 :** Influence du rapport d'élanement (L/h) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes fractions massiques de graphène ( $W_{GPL}=0\%$ ,  $0,3\%$ , et  $0,5\%$ .) dans le système X-GPLRC, S-S, ( $n=1$ ,  $NL=20$ ).

**Figure (IV-4)** présente l'évolution de la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) en fonction du rapport d'élanement (L/h) pour une poutre composite à gradient fonctionnel renforcée par des nano-plaquettes de graphène (X-GPLRC), sous conditions (S-S), avec  $n=1$  et  $NL=20$  couches. Sous Trois valeurs de fraction massique de graphène ( $W_{GPL}=0$ ,  $0,3$ ,  $0,5$ ).

- On remarque que la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue rapidement lorsque le rapport L/h augmente. Cela signifie que plus la poutre est longue par rapport à son épaisseur, plus elle devient flexible, et donc plus sa fréquence naturelle de vibration est faible.
- Pour chaque valeur de L/h, la fréquence est plus élevée lorsque la fraction de graphène augmente. Ainsi, la barre violette  $W_{GPL}=0,5$  est toujours au-dessus de la barre verte  $W_{GPL}=0,3$ , qui elle-même est au-dessus de la barre orange  $W_{GPL}=0$ .
- Cela montre que l'ajout de graphène dans la poutre augmente sa rigidité et donc sa fréquence propre.
- L'écart entre les différentes fractions de graphène est plus marqué pour les faibles valeurs de L/h (poutres peu élancées), puis il se réduit lorsque L/h augmente.



**Figure IV- 5 :** Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différents modèles (U. GPLRC, X. GPLRC, O. GPLRC, A. GPLRC) dans le système GPLRC S-S ( $NL=20$ ,  $n=1$ ,  $W_{GPL}=0.5\%$ ).

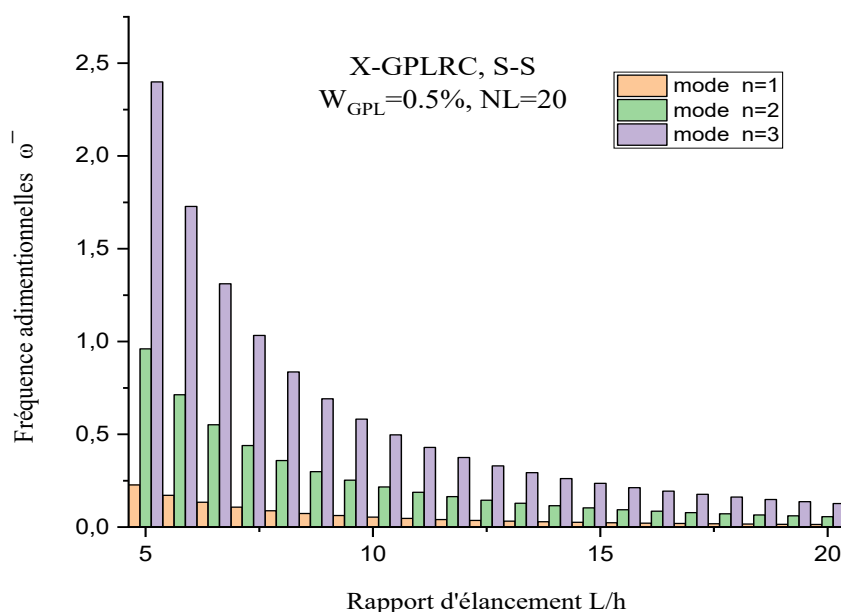
**Figure (IV-5)** analyse l'impact du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  d'une poutre composite renforcée par des nano-plaquettes de graphène (GPLRC), pour quatre configurations de distribution des GPL (U, X, O, A).

- Lorsque le rapport  $L/h$  augmente, la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue fortement au début puis tend à se stabiliser pour les valeurs élevées de  $L/h$ . Cela traduit une diminution de la rigidité en flexion de la poutre lorsqu'elle devient plus élancée, ce qui est typique du comportement vibratoire des poutres.
- Les différentes courbes (U, X, O, A) sont très proches, ce qui indique que la manière dont le graphène est réparti dans la poutre n'a qu'un effet limité sur la fréquence propre pour ce faible taux de renfort (0.5).

#### ✚ Résumé

Toutefois, selon la distribution, il peut y avoir de très légères différences de rigidité et donc de fréquence.

#### • Etude des modes vibratoires

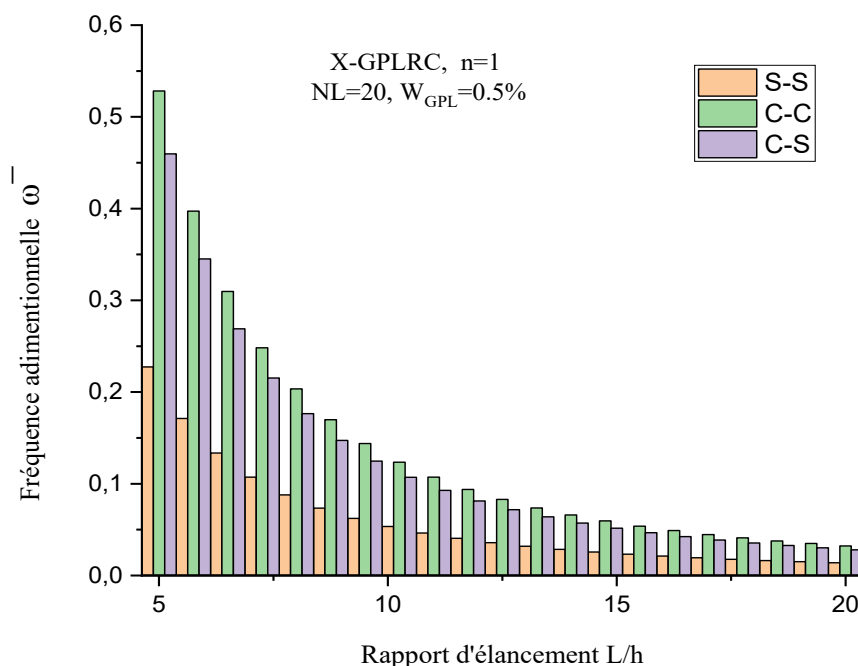


**Figure IV- 6 :** Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes conditions (mode) dans le système X-GPLRC S.S ( $W_{GPL}=0.5\%$ ,  $NL=20$ )

**Figure (IV-6)** analyse l'influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur les fréquences adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) pour des trois premiers modes de vibration ( $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ ) d'une poutre composite X. GPLRC, sous conditions aux limites S-S.

- Pour chaque mode ( $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ ), la fréquence adimensionnelle diminue rapidement lorsque le rapport d'élanement augmente, puis tend à se stabiliser.
- Les barres violettes (mode  $n=3$ ) sont systématiquement plus élevées que les barres vertes ( $n=2$ ), qui elles-mêmes sont plus élevées que les barres orange ( $n=1$ ), ce qui est typique des modes vibratoires supérieurs qui possèdent des fréquences plus élevées.
- À faible rapport d'élanement ( $L/h \approx 5$ ), les fréquences sont maximales, puis elles décroissent de façon marquée jusqu'à  $L/h \approx 10$ , au-delà de quoi la décroissance ralentit.

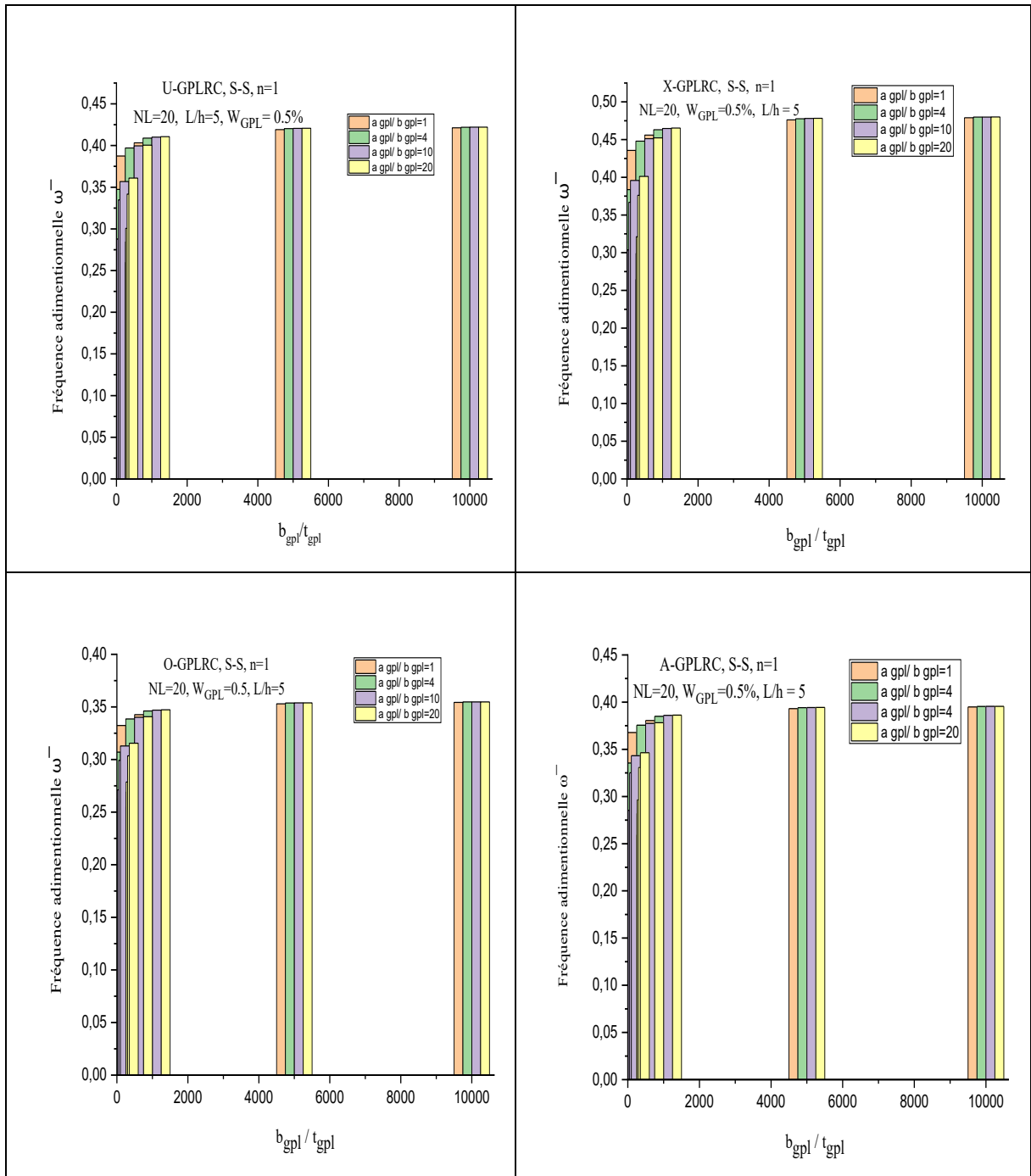
- Effet des conditions aux limites



**Figure IV- 7 :** Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes conditions (S-S, C-S, C-C) dans le système X-GPLRC (NL=20,  $W_{GPL}=0.5\%$ ).

**Figure (IV-7)** analyse l'impact du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre composite X-GPLRC, dans les trois conditions aux limites (S-S, C-S, C-C).

- ✚ La fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue avec l'augmentation du rapport  $L/h$ , puis se stabilise pour les valeurs élevées de ce rapport. Les conditions aux limites influencent fortement la réponse vibratoire : les fréquences sont maximales pour la configuration encastree aux deux extrémités (C-C), intermédiaires pour la configuration encastree-appuyée (C-S), et minimales pour la configuration simplement appuyée (S-S). Cet effet est plus marqué pour les faibles rapports  $L/h$ , puis s'atténue lorsque la poutre devient plus élancée.



**Figure IV- 8 :** Influence du rapport  $b_{gpl}/t_{gpl}$  sur la fréquence adimensionnelle pour Différentes valeurs du rapport  $a_{gpl}/b_{gpl}$  dans les systèmes U-, X-, O- et A-GPLRC sous conditions aux limites S-S (avec  $NL=20$ ,  $L/h=5$ ,  $W_{GPL}=0,5\%$ ).

La Figure (IV-8) présente quatre graphes qui analysent l’effet du rapport ( $b_{gpl}/t_{gpl}$ ) des nano-plaquettes de graphène sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes valeurs du rapport longueur/largeur ( $a_{gpl}/b_{gpl}$ ) et selon quatre distributions spatiales des GPL (U, X, O, A), soumis à des conditions (S-S), avec  $NL=20$ ,  $L/h=5$  et  $W_{GPL}=0,5\%$ .

Dans tous les graphes, la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  augmente avec l'augmentation du rapport (bgpl/tgpl). Cela signifie que des nano-plaquettes plus larges et plus fines renforcent davantage la rigidité de la poutre composite, ce qui élève la fréquence naturelle de vibration.

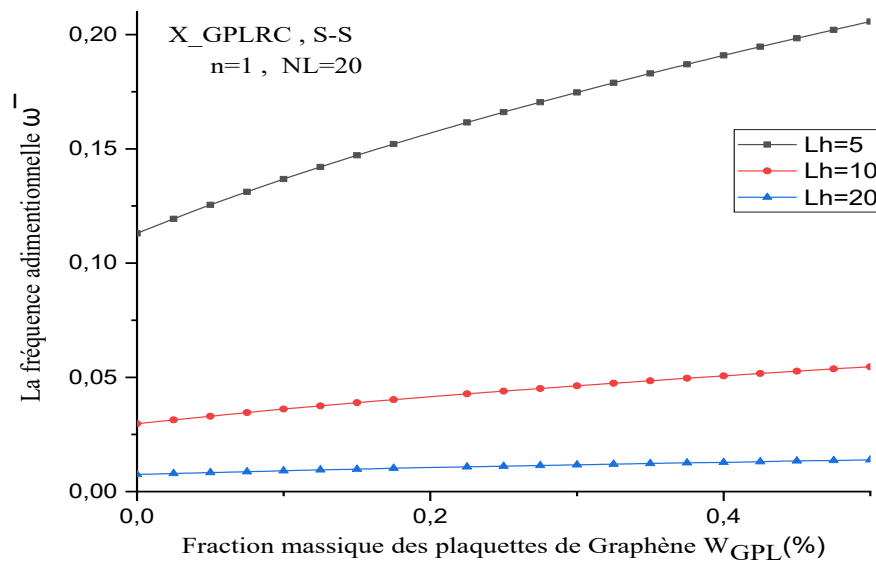
- Pour chaque distribution, une augmentation de agpl/bgpl (c'est-à-dire des nano-plaquettes plus allongées) conduit à une hausse de  $\bar{\omega}$ . Cette tendance s'explique par une meilleure efficacité du transfert de contraintes et une meilleure interaction entre les GPL et la matrice polymère.
- La distribution **X-GPLRC** offre la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  la plus élevée, indiquant une meilleure performance vibratoire grâce à une organisation optimale des GPL qui maximise le renforcement.
- La distribution **U-GPLRC** (uniforme) vient en deuxième position, offrant une bonne homogénéité et un renforcement efficace, surtout à faible fraction massique.
- Les distributions **A-GPLRC** et **O-GPLRC** présentent des performances inférieures, avec des valeurs de  $\bar{\omega}$  plus faibles, traduisant une moindre efficacité du renforcement due à une distribution moins favorable des GPL.

#### **Résumé**

Pour toutes les distributions, l'augmentation de  $\bar{\omega}$  tend à se stabiliser pour des valeurs élevées de bgpl/tgpl (typiquement au-delà de 8000–10000), suggérant qu'au-delà d'un certain seuil, l'augmentation de la largeur relative des nano-plaquettes n'apporte plus de gain significatif en rigidité.

## **4.2 Selon la théorie de Timochenko**

- **Effet de la fraction massique de Graphène**

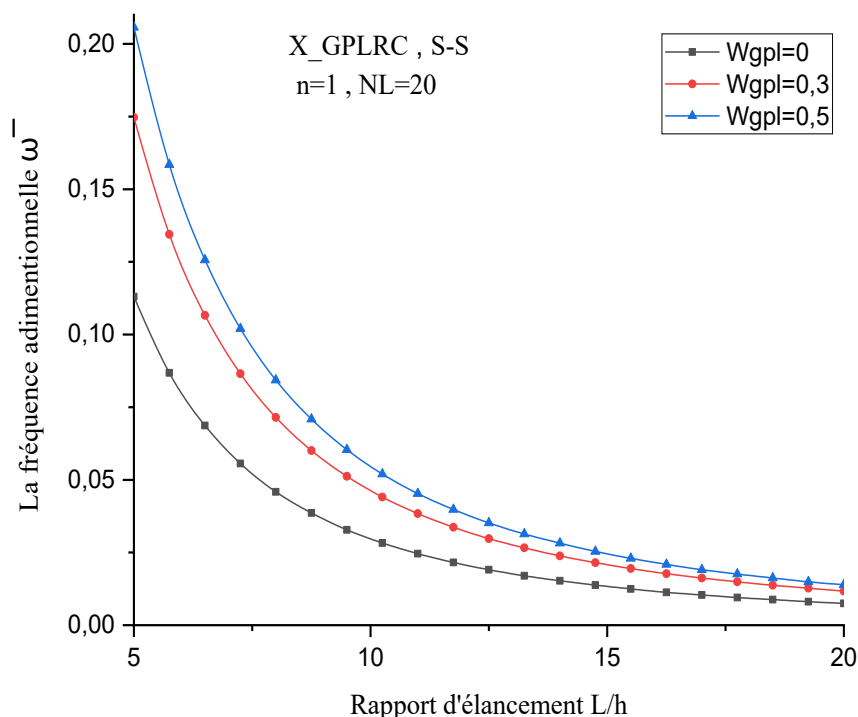


**Figure IV- 9 :** Influence de la fraction massique des plaquettes de graphène ( $W_{GPL}$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes valeurs de rapport d'élanement  $L/h$

**Figure (IV-9)** illustre l'impact combiné de la teneur en plaquettes de graphène ( $W_{GPL}$ ) et du rapport ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre composite. On remarque que :

- Plus la fraction massique de graphène augmente, plus la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  augmente pour chaque valeur de  $L/h$ .
- Pour un même taux de graphène, la fréquence est plus élevée lorsque  $L/h$  est plus petit  $L/h = 5$  (courbe noire), et plus faible lorsque  $L/h$  est plus grand pour  $L/h = 20$  (courbe bleue).
- L'effet de l'ajout de graphène est donc plus prononcé pour les faibles valeurs de  $L/h$ .
- Cela suggère que la rigidité du matériau composite dépend à la fois de la quantité de graphène et des propriétés géométriques représentées par  $L/h$ .

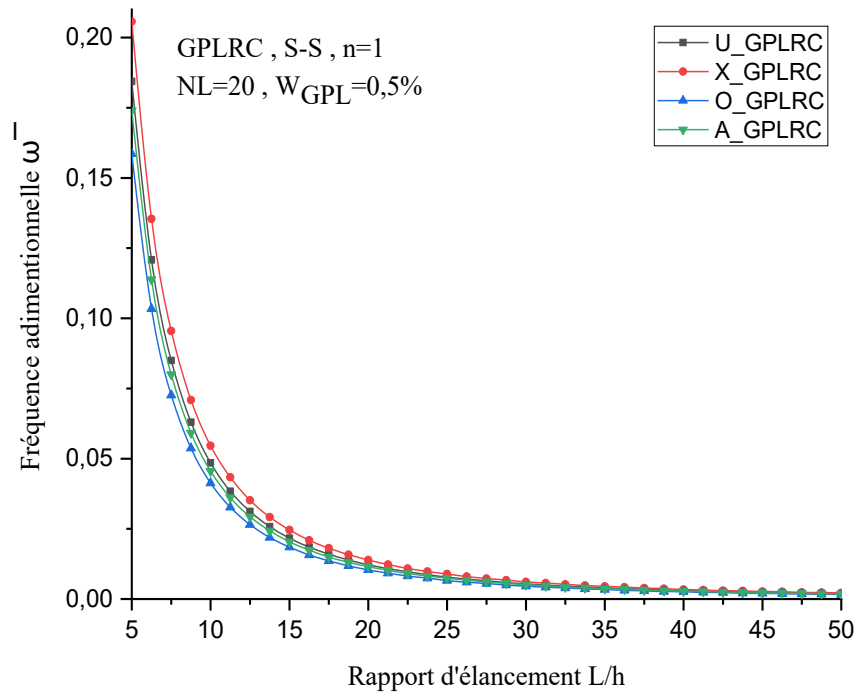
- **Influence du rapport d'élanement**



**Figure IV- 10** : Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes fractions massiques de graphène ( $W_{GPL}$ ).

**Figure (IV-10)** montre comment le rapport d'élanement ( $L/h$ ) et la fraction massique de graphène ( $W_{GPL}$ ) influencent conjointement la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre composite renforcée par des nano-plaquettes de graphène.

- Lorsque le rapport  $L/h$  augmente la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue rapidement.
- Cette diminution est plus marquée pour les faibles valeurs de  $L/h$  (poutre plus épaisse), puis la courbe se stabilise pour les grandes valeurs de  $L/h$  (poutre plus élancée).
- Pour une même valeur de  $L/h$ , la fréquence adimensionnelle augmente avec la fraction massique de graphène. Autrement dit, plus la poutre contient de graphène, plus elle présente une fréquence élevée et une bonne rigidité.
- L'écart entre les courbes est plus important pour les faibles  $L/h$  et diminue lorsque  $L/h$  augmente.

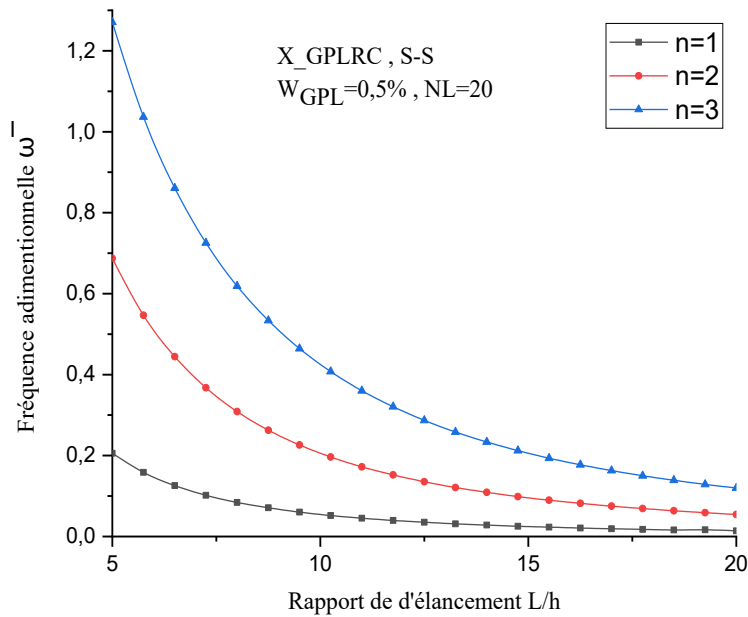


**Figure IV- 11 :** Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différents modèles (U-GPLRC, X-GPLRC, O-GPLRC, A-GPLRC) avec GPLRC (S.S,  $n=1$ ,  $NL=20$ ,  $W_{GPL}=0,5\%$ )

**Figure (IV-11)** étudie l'influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  d'une poutre en nano composite GPLRC, en considérant quatre motifs de distribution des nano-plaquettes de graphène : configurations U, X, O et A.

- Lorsque  $L/h$  augmente (poutre plus longue ou plus fine), la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue fortement.
- Cette diminution est très rapide pour les faibles valeurs de  $L/h$ , puis la courbe tend vers une asymptote pour les grandes valeurs de  $L/h$ .
- Les différentes distributions (U, X, O, A) donnent des courbes très proches, presque superposées.
- Cela signifie que, pour une fraction massique de 0,5% et 20 couches, la distribution des plaquettes de graphène a un effet très limité sur la fréquence adimensionnelle de la poutre dans cette configuration.

- **Étude des modes vibratoires**

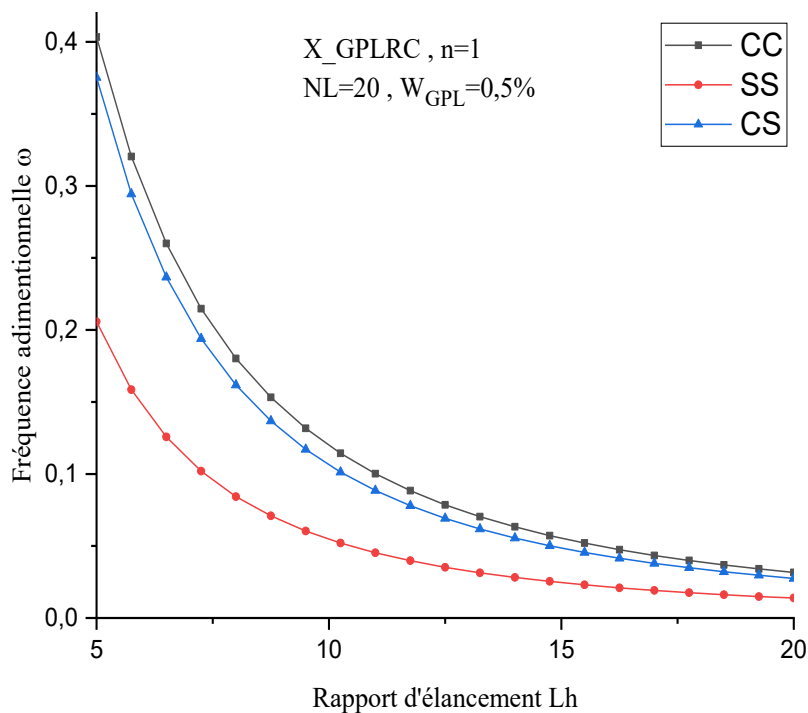


**Figure IV- 12 :** Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour les trois premiers modes dans le système (X. GPLRC, S-S,  $W_{GPL}=0.5\%$ ,  $NL=20$ )

**Figure (IV-12)** étudie l'effet du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur les fréquences adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) associées aux trois premiers modes vibratoires ( $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ ) d'une poutre composite X. GPLRC sous conditions S-S. on observe que :

- Pour chaque mode ( $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ ), la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue rapidement lorsque le rapport  $L/h$  augmente.
- Cela signifie que plus la poutre est longue ou fine (grand  $L/h$ ), plus sa fréquence propre de vibration est faible.
- La diminution de fréquence adimensionnelle est particulièrement marquée pour les faibles valeurs de  $L/h$  : la fréquence chute rapidement, puis tend à se stabiliser pour les grandes valeurs de  $L/h$ .
- Les fréquences augmentent avec le numéro du mode : la courbe noire ( $n=1$ ) est la plus basse, suivie de la rouge ( $n=2$ ), puis de la bleue ( $n=3$ ).
- Cela reflète le comportement classique des poutres : les modes supérieurs correspondent à des fréquences de vibration plus élevées.

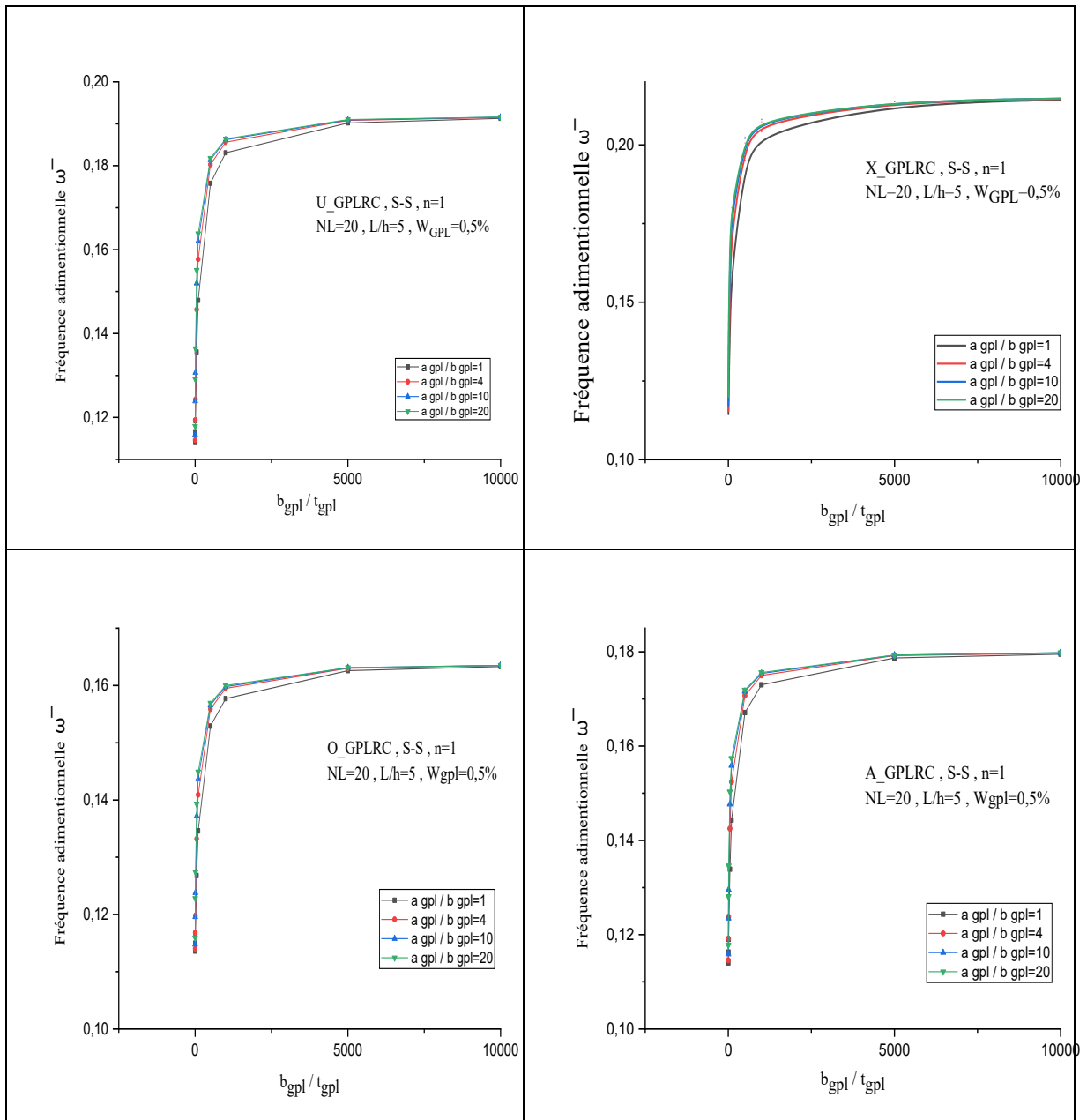
- **Effet des conditions aux limites**



**Figure IV- 13 :** Influence du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes conditions aux limites (C-C, S-S, C-S) dans le système X. GPLRC ( $n=1$ ,  $NL=20$ ,  $W_{GPL}=0,5\%$ )

**Figure (IV-13)** analyse l'impact du rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre composite renforcée par des nano-plaquettes de graphène (X. GPLRC), dans trois conditions aux limites : (C-C, S-S, C-S).

- Dans les trois cas, la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  diminue de façon non linéaire lorsque le rapport d'élanement  $L/h$  augmente.
- La courbe S-S (rouge) présente les valeurs de fréquence les plus basses pour chaque valeur de  $L/h$ , tandis que la courbe C-C (noire) montre les valeurs les plus élevées. La courbe C-S (bleue) se situe entre les deux.
- Cela signifie que la configuration S-S est la moins rigide (ou la plus flexible), tandis que la configuration C-C est la plus rigide.



**Figure IV- 14 :** Effet du rapport  $b_{gpl}/t_{gpl}$  sur la fréquence adimensionnelle pour différentes valeurs du rapport  $a_{gpl}/b_{gpl}$  dans les systèmes U-, X-, O- et A-GPLRC sous conditions aux limites S-S (avec  $NL=20$ ,  $L/h=5$ ,  $W_{GPL}=0,5\%$ ).

La figure (IV-14) présente quatre graphes qui illustrent l'évolution de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction du rapport géométrique  $b_{gpl}/t_{gpl}$  (largeur/épaisseur des nanoplaquettes de graphène) pour différentes valeurs de  $a_{gpl}/b_{gpl}$  (longueur/largeur des GPL) et quatre distributions spatiales (U, X, O, A) dans des poutres composites renforcées de GPL, sous conditions (S-S), avec  $NL=20$ ,  $L/h=5$  et  $W_{GPL}=0.5\%$ .

Dans tous les cas, la fréquence adimensionnelle augmente rapidement avec l'accroissement de  $b_{gpl}/t_{gpl}$ , traduisant un renforcement de la rigidité du composite, avant de se stabiliser au-delà d'un certain seuil (entre 5000 et 8000). Par ailleurs, une augmentation du rapport  $a_{gpl}/b_{gpl}$  (plaquettes plus allongées) conduit également à une hausse de la fréquence, indiquant une meilleure efficacité du transfert de contraintes et un renforcement plus performant quel que soit le type de distribution spatiale.

- **X-GPLRC** (graphique 2) : Cette distribution présente les fréquences adimensionnelles les plus élevées pour toutes les valeurs de  $b_{gpl}/t_{gpl}$  et  $a_{gpl}/b_{gpl}$ , traduisant une organisation optimale des GPL qui maximise le renforcement.
- **U-GPLRC** (graphique 1) : La distribution uniforme vient en deuxième position, offrant une bonne homogénéité et un renforcement efficace, surtout à faible fraction massique.
- **A-GPLRC** (graphique 4) et **O-GPLRC** (graphique 3) : Ces distributions présentent des fréquences légèrement inférieures, indiquant une efficacité de renforcement plus faible due à une répartition moins favorable des GPL dans la matrice.

#### Résumé

L'augmentation du rapport largeur/épaisseur des nano-plaquettes renforce initialement la rigidité du composite et sa fréquence propre, mais cet effet atteint un seuil au-delà duquel la fréquence se stabilise.

## Conclusion

L'analyse effectuée met en avant l'influence prépondérante de la fraction massique de graphène, du rapport d'élancement, du nombre de couches et de la distribution spatiale des nano-plaquettes sur la fréquence adimensionnelle des poutres composites renforcées de GPL. L'élévation d'une petite proportion de graphène contribue de manière très significative à la rigidification et à l'élévation de la fréquence propre des poutres. L'étude a révélé que la géométrie des GPL et les conditions aux limites influencent sur la fréquence naturelle. Toutefois, pour de faibles fractions massiques de graphène, ces effets restent peu prononcés. Leur impact devient significatif avec l'augmentation du taux de renfort.

Le nombre de couches et la distribution des GPL agissent également sur la fréquence mais cette amélioration tend à se stabiliser au-delà d'un certain seuil. La prise en compte des conditions aux limites et de la géométrie des GPL a également montré un intérêt, mais l'écart

entre les différentes configurations demeurait faible pour de faibles taux de renfort. Ces résultats ouvrent des pistes concrètes vers une conception optimisée de structures composites à hautes performances vibratoires, en tirant également parti des propriétés singulières du graphène.

## ***Conclusion générale***

Ce travail de recherche nous a permis d'étudier de manière approfondie le comportement vibratoire des poutres composites renforcées par des nano-plaquettes de graphène (GPL), en s'appuyant sur des modèles mathématiques rigoureux basés sur les théories classiques d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. La modélisation numérique développée, mise en œuvre via un programme MATLAB, a permis de déterminer les fréquences propres et les modes de vibration en tenant compte des différentes distributions des nano-renforts, des conditions aux limites, ainsi que des paramètres géométriques et matériels.

Les résultats obtenus montrent une excellente corrélation avec les travaux de référence, notamment pour les poutres fonctionnellement graduées (FGM) et les poutres composites stratifiées, ce qui confirme la validité et la fiabilité des approches adoptées. L'analyse détaillée des effets des paramètres géométriques (rapport d'élancement, nombre de couches, dimensions des nano-plaquettes) et des propriétés matérielles a permis de mieux comprendre leur influence sur la dynamique des structures étudiées.

Ces résultats ouvrent des perspectives intéressantes pour le développement de matériaux composites avancés, légers et résistants, adaptés aux exigences des secteurs aéronautique, automobile et génie civil.

Enfin, ce travail pose les bases pour des études futures intégrant des effets plus complexes, tels que les non-linéarités, les interactions thermomécaniques, l'effet de l'amortissement et du flambage, afin d'élargir la compréhension et l'application des nano-composites renforcés.

## ***Références bibliographiques***

- [1] J.M. BERTHELOT, (2002). Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures, TEC et DOC 4eme édition.
- [2] Lionel, (2011), Matériaux composites et structures composites. CACHAN Ecole normale supérieure. Université Paris-SACLAY
- [3] HERMES.D.G. (2005). Matériaux composites, 5eme édition.
- [4] C. BATHIAS, matériaux composites, édition DUNOD, année 2005
- [5] RAHMANE, A. (2018). Étude du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs. Thèse de doctorat, Université Des Frères Mantouri-Constantine 1.
- [6] Vasconcellos, D, Touchard S, F. Chocinski-Arnault, L. (2014). Tension–tension fatigue behaviour of woven hemp fibre reinforced epoxy composite : A multiinstrumented damage analysis, Int. J. Fatigue.
- [7] Goret, L. (6 Apr 2010). Généralités sur les matériaux composites. Cel-00470296, version1.
- [8] Boukhalfa Abdelkrim, Comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites, mémoire de doctorat 2009.
- [9] BOUDJEMA, H. (2016). Elaboration de matériaux composites biodégradables issus de ressources renouvelables, thèse de doctorat, Institut de Maintenance et de sécurité Industrielle- Université d’Oran 2.
- [10] Berthelot, J.M. (2005). Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures Livre, éditions : Lavoisier
- [11] MIDOUN, A. (2019). Étude comparative du comportement mécanique des matériaux composites à matrice polymère : cas d’un matériau composite élastique unidirectionnel à fibres de verre et d’un matériau composite élastique unidirectionnel à fibres de carbone, mémoire de master, UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN
- [12] DJELBOUN, Y. (2018). Généralités sur les matériaux composites, université de Biskra.
- [13] Saidani, k. (2014). Analyse de composites sandwich et qualification de leur intégrité vis-à-vis a la ruine. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri-Tizi-Ouzou.

- [14] Ghrabi, S. (2005). Comportement viscoélastique des matériaux orthotropes, mémoire de magister, université Mentouri-Constantine.
- [15] TOUMI, W. (2019). Optimisation de la configuration des tubes en matériaux composites sous pression. Mémoire de master, Université Mohamed Khider -Biskra,
- [16] METTOUCHI, L. (2018) Influence de la charge particule de cuivre et du renfort couches de fibres de verre sur le comportement mécanique d'un composite. Mémoire Master. Université Mouloud Mammeri - Tizi-Ouzou.
- [17] CEDRIC, T. (2011). Etude des mécanismes d'endommagement des composites fibres de carbone / matrice polyamide : application à la réalisation de réservoirs de stockage de gaz sous haute pression de type IV. L'École nationale supérieure des mines de Paris.
- [18] HAMI, B. (2010). Elaboration et caractérisation d'un matériau composite à base de fibres de verre et de résine polyester et étude de son comportement au choc. Mémoire de Magistère. Université M'Hamed Bougara-Boumerdes.
- [19] -Baghdadi farida, Master Académique Etude de graphène et de Gr FET 2015/2016 Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [20] - Zakariae BOUSSABOUN Synthèse et caractérisation de nano composites d'argile et de graphène Formés à partir de précurseurs organiques Département de génie de la construction à l'École de technologie Supérieure UNIVERSITÉ DU QUÉBEC 2016.
- [21] - OUAZAR Razika, LAHOUM Sylia, Le graphène et ses applications en électronique UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DETIZI-OUZOU 2017/2018.
- [22]. Bernal, J.D., (1924). "The Structure of Graphite. Proceedings of the Royal Society of London Series" "A 106, 749–773."
- [23] Franklin, R.E., (1951). "The structure of graphitic carbons". "Acta Cryst 4, 253–261."
- [24] Bundy, F.P., Hall, H.T., Strong, H.M., Wentorfjun., R.H., (1955). "Man-Made Diamonds". "Nature 176, 51–55".
- [25] C. Lee, X. Wei, J.W. Kysar, and J. Hone Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene Science 321, 385 (2008).

- [26] Kroto, H.W., Heath, J.R., O'Brien, S.C., Curl, R.F., Smalley, R.E., (1985). "C60 : Buckminsterfullerène". "Nature 318, 162–163
- [27] Diamant Cullinan : Un diamant très célèbre [WWW Document], n.d. URL <https://zshopb.site/ProductDetail.aspx?iid=130058925&pr=57.88> (accessed 12.14.23).
- [28] Park, E.B., Shim, J.W., Choi, H.J., Park, Y.W., (1993). "Anomalous thermoelectric power of the alkali metal doped and the pyrolyzed fullerene". "Synthetic Metals, Proceedings of the International Conference on Science and Technology of Synthetic Metals 56, 3258–3263." [https://doi.org/10.1016/0379-6779\(93\)90112-A](https://doi.org/10.1016/0379-6779(93)90112-A)
- [29] Lange, H., Sioda, M., Huczko, A., Zhu, Y.Q., Kroto, H.W., Walton, D.R.M., (2003). "Nanocarbon production by arc discharge in water". "Carbon 41, 1617–1623."
- [30] Technology, N.N., (2019). "General Information About Fullerene C60, Also Known As Buckyballs". Medium.
- [31] Iijima, S., Ichihashi, T., (1993). "Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter". "Nature 363, 603–605".
- [32]], n Graphen Layer [WWW Document].d. URL <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e0/GraphenLayer.svg/langfr-800px-GraphenLayer.svg.png> (accessed 12.15.23). GraphenLayer [WWW Document], n.d. URL <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e0/GraphenLayer.svg/langfr-800px-GraphenLayer.svg.png> (accessed 12.15.23).
- [33] Graphite [SubsTech], n.d.
- [34] Thostenson, E.T., Ren, Z., Chou, T.-W., (2001). "Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review". "Composites Science and Technology 61, 1899–1912".
- [35] G.-H. Lee, R. C. Cooper, S. J. An, S. Lee, A. van der Zande, N. Petrone, A. G. Hammerberg, C. Lee, B. Crawford, W. Oliver, J. W. Kysar, and J. Hone High-strength Chemical-Vapor-Deposited graphene and grain boundaries Science 30, 1073 (201

- [36] Ghugal, Y.M., Shimpi, R.P., (2001). "A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams". *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 20, 255–272."
- [37] cours David Ryckelynck, INTRODUCTION A LA THEORIE DES POUTRES, 16 mars 2012
- [38] Timoshenko, S.P., (1921). LXVI. "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41, 744–746.
- [39] Timoshenko, S.P., (1922). "On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section". *Philosophical Magazine Series 1*."
- [40] Timoshenko, S., Gere, J.M., (1972). "Mechanics of materials". "Van Nostrand Reinhold Co, New York."
- [41] Heyliger, P.R., Reddy, J.N., (1988). "A higher order beam finite element for bending and vibration problems". *Journal of Sound and Vibration* 126, 309–326."
- [42] Touratier, M., (1991). "An efficient standard plate theory". *International Journal of Engineering Science* 29, 901–916."
- [43] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., (2003). "Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity". *International Journal of Solids and Structures* 40, 1525–1546. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9)
- [44] Bauchau, O.A., Craig, J.I., 2009. "Three-dimensional beam theory, in: Bauchau, O.A., Craig, J.I. (Eds.), *Structural Analysis, Solid Mechanics and Its Applications*." "Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 223–259."
- [45] Reddy, J.N., (1997). "Mechanics of laminated plates: theory and analysis."
- [46] Bakhadda, B., BOUIADJRA, M., 2021. "Etude du comportement mécanique des structures en nano composites."(Thesis).
- [47] Kim, S.E., Thai, H.T., Lee, J., (2009). "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory". *Thin-Walled Structures* 47, 455–462.

- [48] Thai, H.-T., Kim, S.-E., (2010). “Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory”. "International Journal of Mechanical Sciences 52, 626–633."
- [49] Thai, H.-T., Kim, S.-E., (2011). “Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory”. "Composite Structures 93, 1738–1746."
- [50] Zenkour, A.M., (2007). “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate». «Arch Appl Mech 77, 197–214".
- [51] Mantari, J.L., Guedes Soares, C., (2012). “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”. "Composite Structures 94, 1991–2000."
- [52] Thai, H.-T., Kim, S.-E., (2013). “A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”. "Composite Structures 99, 172–180."
- [53] Shimpi, R.P., (1999). “Zeroth-Order Shear Deformation Theory for Plates”. "AIAA Journal 37, 524–526."
- [54] Bensaid, I., Houalef, I., Saimi, A., Cheikh, A., (2022). “Free Vibration Analysis of Nano-beams Made of Graded Metal Ceramic based on refined zeroth-order shear deformation theory.”
- [55] Levinson, M., (1980). “An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”. "Mechanics Research Communications 7, 343–350."
- [56] Halpin J, Kardos J. The Halpin-Tsai equations: a review. Polym Eng Sci 1976;16 (5):344–52.
- [57] Harris B. Engineering Composite Materials. Institute of metals London; 1986.
- [58] Simsek, M. (2010), “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher order beam theories”, Nucl. Eng. Des., 240(4), 697-705. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>.
- [59] Ebrahimi, F., Ghasemi, F. and Salari, E. (2016), “Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities”, Mechanical, 51, 223-249. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0208-y>

- [60] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. (2018), “Effect of thickness stretching on the static deformations, natural frequencies, and critical buckling loads of laminated composite and sandwich beams”, J. Brazil Soc. Mech. Sci. Eng., 40, 296. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1222-5>.
- [61] Simsek, Mesut & Kocatürk, T.. (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. Composite Structures. 90. 465-473. 10.1016/j.compstruct.2009.04.024.
- [62] Huu-Tai Thai, Thuc P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 62, Issue 1, 2012, Pages 57-66, ISSN 0020-7403, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>.