REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAÏD
-TLEMCEN-
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

EN

Mathématiques

Spécialité: EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET APPLICATIONS

Présenté par:

BELHADJ AHLEM

THEME

Contrôle optimal de type distribué d'un système de convection-diffusion stationnaire et approche numérique

---

Soutenu le 20/09/2021, devant le jury

Mr A.BENSEDIK	MCB	Président	Université de Tlemcen
Mr. A.BENCHAIB	MAA	Examinateur	Université de Tlemcen
Mr. F.ABI-AYAD	MAA	Encadrant	Université de Tlemcen

Année universsitaire: 2020 – 2021

Résumé

Dans ce travail, on s'appuie sur la théorie du contrôle optimal de type distribué d'un système de convection-diffusion stationnaire et aux méthodes du gradient pour la résolution numérique du système d'optimalité associé à ce dernier et permettant l'approximation numérique du contrôle optimal.

Dans le premier chapitre, on aborde les principales notions de base qui sont divisées en trois parties : Les espaces de Sobolev qui permettent de définir le cadre fonctionnel des formulations variationnelles des équations aux dérivées partielles, la théorie de l'optimisation convexe qui a pour but d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes afin de s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution optimale du problème de minimisation exprimant ultérieurement le problème de contrôle optimal .

Le deuxième chapitre traite la théorie du contrôle optimal distribué dont on détermine l'unique solution du problème d'optimisation.

Enfin, le troisième chapitre est consacré aux méthodes numériques de résolution : Méthode du gradient sans et avec contraintes.

Abstract

In this work, we rely on the theory of optimal control of the distributed type of stationary diffusion convection system. We also depend on the gradient method for the numerical resolution of the optimality system associated with the latter allowing the numerical approximation of the optimal control.

In the first chapter, we approach the main basic notions which are divided into three parts : the Sobolev spaces which make it possible to solve the partial differential equations, the convex optimization theory for the purpose of obtaining the conditions necessary and sufficiant in addition to the formulation of the optimal control problem.

The second chapter treats the theory of distributed optimal control of which we determine the unique solution of the optimization problem.

At the end, the third chapter is devoted to the numerical methods of resolution : method of the gradient without and with constraints.

Dédicaces

Grâce à Allah «el Kadir»

Je dédie ce travail :

A mon premier exemple : mes chers parents pour leur soutien inconditionnel, leur amour, leurs sacrifices tout au long de mon cursus scolaire et universitaire et surtout la confiance qu'ils m'ont toujours témoignée. Qu'Allah les protège.

A mes chers grands parents.

A mon cher frère **Sofiane** le plus doux.

A ma sœur jumelle **Imene** ma moitié.

A ma petite sœur **Khadidja** la plus gâtée.

A mes cousins et cousines et à toute la famille **Belhadj** et **Senouci**.

A tous mes amis.

«Il n'y a point de bonheur sans courage, ni de vertu sans combat.»

Jean Jacques-Rousseau

Remerciments

Tout d'abord, je remercie **Allah**, le tout puissant de m'avoir accordé la force, le courage et la foi pour accomplir ce modeste travail.

J'exprime en premier lieu ma sincère gratitude à mon encadreur **Mr F.Abi-ayad** d'avoir dirigé ce mémoire. Je le remercie pour ses discussions utiles et fructueuses, ainsi que ses conseils qui m'ont été très précieux pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement **Mr A.Bensedik** d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie aussi **Mr A.Benchaib** d'avoir accepté d'examiner et de juger ce mémoire.

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires d'analyse fonctionnelle **2**
1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev 2
1.2 Formulation Faible 3
1.3 Existence et unicité de la solution d'un problème variationnel 4
1.3.1 Théorème de Lax-Milgram 4
1.3.2 Exemple 4
1.4 Rappels utiles d'optimisation convexe 6
1.4.1 Définitions 6
1.4.2 Existence de l'optimum pour un problème d'optimisation 7
1.4.3 Caractérisation des optima par la G-dérivée 7
1.4.4 Equation et inéquation d'Euler 9
1.4.5 Exemple 10
1.5 Formulation du problème de contrôle optimal 12
1.5.1 Définition 12
1.5.2 Exemples 13

2 Contrôle optimal d'un système de convection-diffusion stationnaire **15**
2.1 Introduction 15
2.2 Problème de convection-diffusion stationnaire 16
2.2.1 Formulation variationnelle 17
2.2.2 Existence et unicité de la solution du problème de convection-diffusion stationnaire 17
2.3 Contrôle distribué 22
2.3.1 Fonction coût 25

2.3.2 Minimisation de la fonction coût : Existence et unicité de la solution optimale 25
2.3.3 Introduction du Lagrangien associé au problème de la minimisation de la fonction coût 29
2.3.4 Détermination de l'état adjoint 30
2.3.5 Définition du système d'optimalité 32

3 Approche numérique : Algorithme de résolution du système d'optimalité 35
3.1 Définitions 35
3.2 Méthode du gradient dans un espace de Hilbert 35
3.2.1 Cas sans contraintes 36
3.2.2 Cas avec contraintes 39
3.3 Application au problème de contrôle optimal 42

Bibliographie 45

Introduction

La théorie du contrôle est l'étude des propriétés des systèmes contrôlés stationnaires ou dynamiques dépendant d'une variable t (le temps du contrôle). C'est, précisément, l'étude du transfert du système contrôlé d'un état initial à un état final.

La théorie du contrôle optimal permet, donc, de déterminer des solutions optimales pour un critère d'optimisation appelé le contrôle optimal, dont on rencontre l'application dans plusieurs domaines : économie, médecine, mécanique ... etc.

En mathématiques, un système contrôlé est dynamique dont l'état est présenté par une fonctions inconnue dite fonction d'état ou variable d'état qui vérifie une ou plusieurs équations (le plus souvent des équations différentielles).

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'application de la théorie du contrôle optimal distribué d'un système de convection-diffusion stationnaire supposé en état stable dans le but de déterminer l'unique solution du problème d'optimisation qui lui est associé.

Une approche numérique interviendra à la fin de ce mémoire afin de présenter un aperçu global sur les méthodes numériques utilisées pour résoudre, numériquement, ce type de problèmes.

Chapitre 1

Préliminaires d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions et résultats classiques qui seront utilisés ci-après. Les démonstrations et les détails peuvent facilement être trouvés dans les ouvrages [1], [2] et [3].

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, on va définir les espaces de Sobolev qui sont les espaces naturels de fonctions permettant de résoudre les problèmes variationnelles d'équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.1. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $p \in [1, +\infty[$,*
$m \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-indice, c'est-à-dire un vecteur à n composantes entières positives $\alpha_i > 0$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
On définit alors l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ , \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ pour \ |\alpha| \leq m \Big\}$$

$D^\alpha u$ étant la dérivée partielle de u d'ordre α au sens des distributions et L^p désignant l'espace de Lebesgue des fonctions dont la puissance p est intégrable sur Ω .
On munit l'espace vectoriel $W^{m,p}$ de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

Proposition 1.1.1. *[3]* $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}})$ *est un espace de Banach.*

Preuve:
voir [3] ■

Notation :
$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$; H^m est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2(\Omega)}$$

Définition 1.1.2. *L'espace de Sobolev* $H^1(\Omega)$ *est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \ , \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ , \ 1 \leq i \leq n \right\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ *est la dérivée partielle faible de* v *au sens des distributions.*
$H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire :*

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = < u, v >_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme : $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{< u, u >_{H^1(\Omega)}}$

L'espace $H_0^1(\Omega)$:

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.1.3. *Soit* $C_c^\infty(\Omega)$ *l'espace des fonctions de classe* C^∞ *à support compact dans* Ω. *L'espace de Sobolev* $H_0^1(\Omega)$*est défini comme l'adhérence de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ est en fait le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions nulles sur le bord :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \ v|_{\partial\Omega} = 0\} \subseteq H^1(\Omega)$$

1.2 Formulation Faible

Soit V un espace de Hilbert réel de norme $\|.\|_V$. On considère le problème variationnel général suivant :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ solution de } \ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \tag{1.1}$$

Les hypothèses sur a et L sont :

i. $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $v \mapsto L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C_L > 0$ tel que :

$$|L(v)| \leq C_L \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

ii. $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V c'est-à-dire que $u \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $u \in V$.

iii. $a(.,.)$ est continue c'est-à-dire qu'il existe $M_a > 0$ tel que :

$$|a(u,v)| \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

Définition 1.2.1. *La forme bilinéaire a est dite V-elliptique (ou coercive sur V) si seulement si $\exists \alpha_a > 0$ tel que :*

$$a(v,v) \geq \alpha_a \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Lemme 1.2.1. ***Inégalité de Poincaré :*** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

1.3 Existence et unicité de la solution d'un problème variationnel

1.3.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.3.1. *[1] Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V , $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et V-elliptique. Alors le problème variationnel (1.1) admet une solution unique $u \in V$.*
De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.

1.3.2 Exemple

Étude de l'existence de solution au sens des distributions du problème suivant :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$) de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, C^1 par morçeaux (selon [6]) :

$$(P) : \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \quad \text{où } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Cherchons une forme bilinéaire $a(.,.)$, une forme linéaire $L(.)$ et un espace de Hilbert V tel que : (P) soit équivalent à :

$$\text{Trouver } \ u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \tag{1.2}$$

On suppose d'abord que la solution $u \in H^2(\Omega)$, on multiplie l'équation du problème (P) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, et on intègre sur Ω , on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \int_\Omega f(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x$$

En appliquant la formule de Green, on aura pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ \mathrm{d}x \ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(s)\ v(s)\ \mathrm{d}s = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x \tag{1.3}$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'inégalité devient (1.3).

$$\int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \int_\Omega f(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x \tag{1.4}$$

Pour que le terme de gauche de (1.4) ait un sens il suffit que ∇u et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$ et pour que le terme de droite de (1.4) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$ (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$). Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les fonctions s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour le problème (P) est :

$$\text{Trouver } \ u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v\ \mathrm{d}x \ = \ \int_\Omega f v\ \mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.5}$$

Vérifions maintenant que le problème variationnel (1.5) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram dont nous vérifions les hypothèses :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ \mathrm{d}x \ \text{ et } \ L(v) = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x$$

On voit facilement que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ (moyennant l'utilisation de l'inégalité de Poincaré).
En effet,

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$|L(v)| \leq C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où $C(\Omega)$ est la constante de Poincaré.
De plus, la forme bilinéaire a est coercive, puisque :

$$a(v,v) = |v|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites , alors il existe une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (1.5).

1.4 Rappels utiles d'optimisation convexe

Cette partie est principalement basée sur la théorie d'optimisation convexe, on s'intéresse aux questions d'existence de l'optimum des problèmes d'optimisation, nous allons chercher à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité (pour plus de détails , voir [2]).

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1. *Soit $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle, où V un espace de Banach. J est dite faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i) si :*

$$v_n \rightharpoonup v \quad \Longrightarrow \quad J(v) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf\ J(v_n)$$

Définition 1.4.2. *J est dite coercive sur V si :*

$$\lim_{\|v\|_V\to+\infty} J(v) \ = \ +\infty$$

1.4.2 Existence de l'optimum pour un problème d'optimisation

V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, K convexe fermé non vide de V et s.c.i, considérons le problème suivant :

$$(P) : \inf_{v \in K} J(v)$$

Théorème 1.4.1. *[2] Si la fonctionnelle J est convexe, s.c.i et coercive, ou si le convexe fermé non vide K est borné, alors le problème (P) admet au moins une solution optimale notée u et on écrit :*

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$

Si, de plus, J est strictement convexe alors la solution optimale u est unique.

Pour la preuve de ce théorème je vous invite à voir [2].

1.4.3 Caractérisation des optima par la G-dérivée

Définition 1.4.3. *On appelle la dérivée directionnelle de J en u dans la direction w si :*

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{J(u + \theta w) \ - \ J(u)}{\theta} \qquad \textit{existe et est finie}$$

on note alors

$$< J'(u), w > = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{J(u + \theta w) \ - \ J(u)}{\theta}$$

Proposition 1.4.1. *Si la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ est Gâteaux- différentiable dans V , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. J *est convexe sur* V.

ii. $J(v) \geq J(u) + \ < J'(u), v - u > \quad \forall u, v \in V.$

iii. $< J'(v) \ - \ J'(u), v - u > \geq 0 \quad \forall u, v \in V.$

Preuve:

$$"i \implies ii"$$

J est convexe sur $V \iff \forall u, v \in V, \ \forall \, \theta \in [0, 1],$

$$J(\theta v + (1 - \theta)u) = J(u + \theta(v - u)) \leq J(u) + \theta(J(v) - J(u))$$

$$\Longrightarrow \frac{J(u+\theta(v-u))-J(u)}{\theta} \leq J(v)-J(u) \quad (\text{pour } \ \theta \neq 0)$$

par passage à la limite ($\theta \to 0^+$), on obtient :

$$< J'(u), v-u > \leq \ J(v)-J(u)$$

$$\text{d'où} \qquad J(v) \geq J(u) + \ < J'(u), v-u > \quad \forall u, v \in V.$$

$$"ii \implies iii"$$

On a : $J(v) \geq J(u) + \ < J'(u), v-u > \quad \forall u, v \in V$

et $J(u) \geq J(v) + \ < J'(v), u-v > \quad \forall u, v \in V$

en faisant la somme, on aura :

$$J(v)+J(u) \geq J(u)+J(v)+ < J'(u), v-u > + < J'(v), u-v >$$

$$\Longrightarrow \ - < J'(u), u-v > + < J'(v), u-v > \leq 0$$

$$\Longrightarrow < J'(v) \ - \ J'(u), v-u > \geq 0 \quad \forall u, v \in V.$$

$$"iii \implies i"$$

posons, pour $\theta \in [0,1]$, $\quad \varphi : \ [0,1] \ \to \ \mathbb{R}$

$$\varphi(\theta) = J(u+\theta(v-u))$$

$$\Longrightarrow \ \varphi'(\theta) = < J'(u+\theta(v-u)), v-u >$$

$\varphi(1) = J(v) \quad , \quad \varphi(0) = J(u) \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = < J'(u), v-u >$

On a par hypothèse : $< J'(v) \ - \ J'(u), v-u > \geq 0 \quad \forall u, v \in V$

$$\Longrightarrow < J'(u+\theta(v-u)) - J'(u), \theta(v-u) > \geq 0$$

$$\Longrightarrow < J'(u+\theta(v-u)) - J'(u), v-u > \geq 0 \qquad \text{avec } \theta \geq 0$$

$$\Longrightarrow < J'(u+\theta(v-u)), v-u > - < J'(u), v-u > \geq 0$$

$$\Longrightarrow \ \varphi'(\theta) - \varphi'(0) \geq 0 \quad \forall \theta \in [0,1]$$

Posons alors :
$\psi(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(0) - \theta\varphi'(0)$

$\Longrightarrow \ \psi'(\theta) = \varphi'(\theta) - \varphi'(0) \geq 0 \implies \psi$ est croissante sur $[0,1]$

alors $\psi(1) \geq \psi(0)$

Or $\psi(1) = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0) \geq \psi(0) = 0$

$\Longrightarrow \psi(1) = J(v) - J(u) - < J'(u), v - u > \geq 0$

$\Longrightarrow J(v) \geq J(u) + < J'(u), v - u >$

qui est une condition équivalente à la convexité d'après la première partie de la proposition 1.4.1. ■

Remarque 1. *Sous les conditions de la proposition 1.4.1, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. *J est strictement convexe sur V.*

ii. $J(v) > J(u) + < J'(u), v - u > \quad \forall u, v \in V$ *tel que* $u \neq v$.

iii. $< J'(v) - J'(u), v - u > > 0 \quad \forall u, v \in V$ *tel que* $u \neq v$.

1.4.4 Equation et inéquation d'Euler

$J : V \to \mathbb{R}$ fonctionnelle convexe, Gâteaux-différentiable, K convexe fermé non vide de V, on cherche $u \in V$ tel que :

$$(P) : \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$

Théorème 1.4.2. *Pour que u soit une solution de (P), il faut et il suffit que :*

$$< J'(u), v - u > \geq 0 \quad \forall v \in K, \ u \text{ fixé (solution optimale de (P))}$$

Cette dernière est appelée ***l'inéquation d'Euler****.*
Dans le cas où $K = V$ (c-à-d sans contraintes), une condition nécessaire et suffisante pour que u soit une solution de (P) est :

$$J'(u) = 0_V$$

que l'on appelle ***l'équation d'Euler****.*

Preuve:

$$" \Longrightarrow "$$

u étant une solution de (P) : $J(u) = \inf\limits_{v \in K} J(v)$

$\Longrightarrow J(u + \theta(v-u)) \geq J(u) \;\; \forall \theta \in [0,1], \; \forall v \in K$

$\Longrightarrow J(u + \theta(v-u)) \geq J(u) \; \forall \theta \in]0,1], \; \forall v \in K$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{1}{\theta}\Big[J(u + \theta(v-u)) - J(u)\Big] \geq 0 \; \forall v \in K$

$\Longrightarrow < J'(u), v-u > \geq 0 \;\; \forall v \in K.$

L'implication inverse du théorème découle de la proposition 1.4.1 :

$$J(v) \geq J(u) + < J'(u), v-u > \geq J(u) \; \forall v \in K$$

Pour le cas sans contraintes ($K = V$), on peut toujours poser :
$v = u \pm \varphi \quad, \forall \varphi \in V$ (car $\forall v \in V, \; \exists \varphi \in V$ tel que $v = u \pm \varphi$)

$$< J'(u), v-u > = < J'(u), \pm\varphi > \geq 0 \qquad \forall \varphi \in V$$

$$\Longrightarrow \; \pm < J'(u), \varphi > \geq 0 \quad \forall \varphi \in V$$

$$\Longrightarrow < J'(u), \varphi > = 0 \quad \forall \varphi \in V$$

$$\Longrightarrow \; J'(u) = 0_V.$$

Nous avons montré la condition nécessaire dans le cas $K = V$.
Pour la condition suffisante, et si $J'(u) = 0_V$, on a :

$$J(v) \geq J(u) + < J'(u), v-u > = J(u) \quad \forall v \in V$$

$$\Longrightarrow \; J(u) = \inf_{v \in V = K} J(v).$$

■

1.4.5 Exemple

Dans un espace de Hilbert V, $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$ et V-elliptique et $L \in V'$ alors,

$$(P) : \;\; a(u,v) = L(v) \;\; \forall v \in V$$

admet une solution unique notée u et,

$$(P) \iff (P_{min})$$

où

$$(P_{min}):\ J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$$

avec $J(v) = \frac{1}{2}\ a(v,v) - L(v)$
En effet, J est Gâteaux-différentiable telle que :

$$< J'(v), w >= a(v,w) - L(w)$$

On montre alors que J est convexe, continue et coercive :

i. Convexité de J :
   J est convexe $\iff \forall v, w \in V,\ < J'(v) - J'(w), v - w >_V \geq 0$
   On a :
$$< J'(v), v - w >_V = a(v, v - w) - L(v - w)$$
$$< J'(w), v - w >_V = a(w, v - w) - L(v - w)$$
   par soustraction membre à membre on obtient :
$$\begin{aligned} < J('v) - J'(w), v - w >_V &= a(v - w, v - w) \\ &\geq \alpha_a \|v - w\|_V^2 \ \ (\text{car } a \text{ est } V\text{-elliptique}, \alpha_a > 0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$
   donc, J' est monotone ce qui implique que J est convexe.
   De plus J est strictement convexe car, si $v \neq w$ alors :
$$< J('v) - J'(w), v - w >_V > 0 \ \ \forall v, w \in V \ \ \text{avec } v \neq w.$$

ii. Continuité de J :
   $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$, $(v,w) \mapsto a(v,w)$ continue sur $V \times V$,
   en particulier, si $v = w$ on a $v \mapsto a(v,v)$ continue sur V.
   $L(.)$ est continue sur V, $v \mapsto L(v)$ continue sur V.
   Et comme J est la différence de deux fonctionnelles continues sur V alors J est continue sur V.

iii. La coercivité de J :
   On a :
$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \geq \frac{\alpha_a}{2} \|v\|_V^2 - L(v)$$

et $L \in V' \iff L$ est linéaire et continue

$\iff \exists C_L > 0, \ \forall v \in V, \ |L(v)| \leq C_L \|v\|_V$

$\iff -C_L\|v\|_V \ \leq \ L(v) \ \leq \ C_L\|v\|_V$
donc

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{\alpha_a}{2}\|v\|_V^2 - C_L\|v\|_V \\ &= \|v\|_V\Big(\frac{\alpha_a}{2}\|v\|_V - C_L\Big) \xrightarrow[\|v\|_V \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

On en conclut que le problème (P_{min}) admet une solution optimale unique notée $u \in V \implies J'(u) = 0_V$.
c'est-à-dire, $< J'(u), v >_V = 0 \ \ \forall v \in V$

$\iff < J'(u), v >_V = 0 = a(u,v) - L(v), \quad \forall v \in V$

$\iff a(u,v) = L(v) \ \ \forall v \in V$ qui est le problème (P) dont la solution unique est u.

1.5 Formulation du problème de contrôle optimal

1.5.1 Définition

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière , on considère un système physique régi par une équation aux dérivées partielles.
De façon générale, un problème de contrôle se formule selon les caractéristiques fondamentales suivantes :

- **L'état du système :** Représente la solution à chercher et est notée $y(x)$, avec $x \in \Omega$.
  Par exemple, $y(x)$ température d'un fluide au point $x \in \Omega$.

- **Contrôle :** On distingue deux types de contrôle :
  i. **Le contrôle distribué :** Représente une fonction d'action sur l'état du système et ceci à l'intérieur de Ω. On la note $v : x \mapsto v(x), \ x \in \Omega$.
  Par exemple, on peut agir sur la température $y(x)$ par $v(x)$ répartie dans Ω entier.
  ii. **Le contrôle frontière :** Dans ce cas la fonction d'action v agit sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

Le système physique est en général représenté par une équation d'état :

$$Ay = f + v$$

A étant un opérateur aux dérivées partielles et f donnée.

- **Contraintes :** On définit par fois un ensemble de contraintes appelé ensemble de contrôles admissibles dans lequel se trouve le contrôle v, et on le note U_{ad} où U_{ad} est sous-ensemble convexe et fermé de $L^2(\Omega)$.

- **Fonction coût :** Représente la fonctionnelle du contrôle dont la minimisation permettra de déterminer le contrôle optimal cherché.

1.5.2 Exemples

1.

$$(P_1) : \begin{cases} -\Delta y = & f + v \quad \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

La fonction v représente un contrôle de type distribué, l'équation est elliptique avec condition de Dirichlet.
La fonction coût associée à (P_1) est donnée par :

$$J(v) = \int_\Omega |y - z_d|^2 \, \mathrm{d}x \; + \; N \int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x$$

où $z_d(x)$ s'appelle état désiré
et la quantité $N \displaystyle\int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x$ représente le coût du contrôle.
Aussi le problème de contrôle optimal s'exprime comme suit :

$$\text{Trouver } u \in U_{ad} \subset L^2(\Omega), \text{ tel que : } J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$$

où y est lié à v par (P_1) et $y = y(x, v(x))$.

2.

$$(P_2) : \begin{cases} -\Delta y + y & = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & = v \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Le contrôle v est de type frontière, il agit par une condition de Neumann, l'équation étant elliptique.
On définit alors la fonction coût par :

$$J(v) = \int_\Gamma |y - y_d|^2 \, \mathrm{d}\sigma \; + \; N \int_\Gamma v^2 \, \mathrm{d}\sigma$$

Dans ce cas y_d est l'état désiré sur $\Gamma = \partial\Omega$ et on a alors une observation frontière.
Minimiser $J(v)$ revient à chercher le contrôle u qui soit le plus petit possible (en norme $\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma v^2 \mathrm{d}\sigma$) tel que : l'état du système $y(v)$ soit le plus proche de l'état désiré y_d : $\|y - y_d\|_{L^2(\Gamma)} \to 0$.

Chapitre 2

Contrôle optimal d'un système de convection-diffusion stationnaire

A ce niveau, on définit le système de convection-diffusion stationnaire dans le cas multidimensionnel avec une condition de Dirichlet. La première partie consiste à étudier théoriquement ce système en utilisant la forme faible qui nous permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution, et dans un second temps, on se penche sur la théorie du contrôle optimal qui a l'objectif de déterminer la solution unique d'un problème d'optimisation associé , c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal ([4] et [5]).

2.1 Introduction

La combinaison des équations de diffusion et de convection est définie par un ensemble de phénomènes physiques où des particules, de l'énergie ou d'autres grandeurs physiques sont transférées dans un système physique où se produisent deux processus : la diffusion et la convection.
La formule générale de l'équation de diffusion-convection stationnaire est donnée par :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\Delta y - div(\overrightarrow{\omega} y) + f$$

où
y : la variable d'intérêt,
k : le coefficient de diffusion (qui est une constante),
$\overrightarrow{\omega}$: le champ de vitesse de faible intensité avec lequel la quantité de particules

se déplace (le déplacement des particules étant dans ce cas très lent),
f : décrit les sources ou les puits de la grandeur y,
Δ : représente le laplacien.
Dans cette équation on a deux termes dans le second membre :
Le premier $(k\Delta y)$ décrit la diffusion alors que le second $(-div(\overrightarrow{\omega} y))$ décrit la convection ou l'advection.

2.2 Problème de convection-diffusion stationnaire

Considérons que le problème précédent est en état stable, i.e : $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, tel que le champs de vitesse $\overrightarrow{\omega}$ décrit un écoulement incompressible (c'est-à-dire qu'il a une divergence nulle $div\overrightarrow{\omega} = 0$).
On définit alors le problème de convection-diffusion stationnaire suivant :
Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$\begin{cases} -k\Delta y + \overrightarrow{\omega}.\nabla y = f & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_n)^T$
avec $\omega_i \in L^\infty(\Omega)$ * ($\iff \forall i = \overline{1,n}\ \exists \xi_i > 0\ \ |\omega_i(x)| \leq \xi_i\ \forall x \in \Omega$)
et $\omega_i \geq 0\ \forall i = \overline{1,n}$ sur Ω.

De plus $\exists i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tel qu'il existe une constante $\beta > 0$ de façon à ce que $\omega_{i_0}(x) \geq \beta > 0\ \forall x \in \Omega$.
$k > 0$ est le coefficient de diffusion et

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\overrightarrow{\omega}.\nabla = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On étudie alors l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1), en cherchant une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une forme linéaire $L(.)$ telles que (2.1) soit équivalent à :

$$\text{Trouver } y \in V \text{ tel que } \ a(y,z) = L(z) \ \ \forall z \in V$$

*. $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions bornées sur Ω :

$$h \in L^\infty(\Omega) \iff \|h\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |h(x)| < +\infty$$

$$\exists \lambda > 0, |h(x)| \leq \lambda\ \forall x \in \Omega \ \text{ où } \lambda = \|h\|_\infty$$

2.2.1 Formulation variationnelle

On pose $V = H_0^1(\Omega)$ et on suppose que la solution $u \in H^2(\Omega)$.
En multipliant l'équation du problème (2.1) par une fonction test $z \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-k\int_\Omega \Delta y(x)z(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \overrightarrow{\omega}(x).\nabla y(x)z(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)z(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff -k\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}(x)z(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x)\right)z(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)z(x)\mathrm{d}x$$

En utilisant la formule de Green, l'équation devient :

$$k\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial x_i}(x)\frac{\partial z}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \overrightarrow{n}} z\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \omega_i(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x)z(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)z(x)\mathrm{d}x$$

$\overrightarrow{n}$ étant le vecteur normal extérieur.
Comme $z \in H_0^1(\Omega)$, on a alors :

$$k\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial x_i}(x)\frac{\partial z}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \omega_i(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x)z(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)z(x)\mathrm{d}x.$$

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour le problème (2.1) est :

$$\text{Trouver } y \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(y,z) = L(z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega) \tag{2.2}$$

où

$$a(y,z) = k\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial x_i}(x)\frac{\partial z}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \omega_i(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x)z(x)\mathrm{d}x$$

et

$$L(z) = \int_\Omega f(x)z(x)\mathrm{d}x$$

2.2.2 Existence et unicité de la solution du problème de convection-diffusion stationnaire

On vérifie maintenant que le problème variationnel (2.2) admet une solution unique. Pour cela on utilise le théorème de Lax-Milgram pour lequel on doit montrer que la forme bilinéaire a est continue sur $V \times V$, V-elliptique et que la forme linéaire L est continue sur V.

i. Continuité de a :
Soient $z_1, z_2 \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(z_1,z_2)| &= \Big|k\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial z_1}{\partial x_i}(x)\frac{\partial z_2}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \omega_i(x)\frac{\partial z_1}{\partial x_i}(x)z_2(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq k\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \Big|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}(x)\Big|\Big|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}(x)\Big|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\omega_i(x)|\Big|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}(x)\Big||z_2(x)|\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or on a : $|\omega_i(x)| \leq \xi_i \; \forall x \in \Omega \; \forall i = \overline{1,n}$ car $\omega_i \in L^\infty(\Omega) \; \forall i = \overline{1,n}$,
alors

$$\begin{aligned} |a(z_1,z_2)| &\leq k\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}\Big\|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}\|z_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}\Big\|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \xi \sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}\|z_2\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

avec $\xi_i \leq \xi = \max\limits_{1\leq i\leq n} \xi_i$.
D'après l'inégalité de Poincaré, on aura :

$$|a(z_1,z_2)| \leq k\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}\Big\|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \xi\, C(\Omega)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|\nabla z_2\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.3}$$

où $\|\nabla z_2\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$.
Par ailleurs, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les suites finies on a :

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| = \sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot 1 = (|a_1|,\cdots,|a_n|)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n}1^2\Big)^{\frac{1}{2}}}_{\sqrt{n}}$$

quelle que soit la suite finie réelle $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, on peut alors écrire ce qui suit pour le second terme du second membre de (2.3) :

$$\begin{aligned} |a(z_1,z_2)| \leq k&\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{n}\;\xi\; C(\Omega)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}^2\Big\|_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial z_2}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$|a(z_1, z_2)| \leq (k + \sqrt{n}\ \xi\ C(\Omega)) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial z_1}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial z_2}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en conclut alors que :

$$|a(z_1, z_2)| \leq M_a \|z_1\|_{H_0^1(\Omega)} \|z_2\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall z_1, z_2 \in H_0^1(\Omega)$$

avec $M_a = k + \sqrt{n}\ \xi\ C(\Omega)$ est la constante de continuité de "a".

où $\xi := \max\limits_{1 \leq i \leq n} \xi_i$ et $\xi_i = \|\omega_i\|_\infty$ avec $\overrightarrow{\omega} = (\omega_i)_{i=1}^n$.

ii. V-ellipticité de a :
Soit $z \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(z, z) &= k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \omega_i(x) \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) z(x) \mathrm{d}x \\ &\geq k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x + \beta \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) z(x) \mathrm{d}x \\ &\geq k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial z^2}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x \\ &\geq k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta}{2} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^2}{\partial x_i}(x) \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^2}{\partial x_i}(x) = div\,(Z(x))$$

où

$$Z(x) = \left(z^2(x), ..., z^2(x) \right) = z^2(x) \eta$$

avec $\eta = (1, \cdots, 1)^T$.
Ainsi

$$a(z, z) \geq k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta}{2} \int_\Omega div\, \left(z^2(x) \eta \right) \mathrm{d}x.$$

D'après la formule de Stokes on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega div(z^2 \eta) \mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} z^2 \eta \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}\sigma(x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} z^2 n_i \mathrm{d}\sigma(x) \end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{n} = (n_1, \cdots, n_n)^T$ est le vecteur normal extérieur.
Comme $z \in H_0^1(\Omega)$, il est clair que :

$$z_{|\partial\Omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad z^2_{|\partial\Omega} = 0.$$

Ainsi , on a :

$$\int_\Omega div(z^2\eta)\mathrm{d}x = 0$$

et par suite

$$a(z,z) \geq k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Finalement

$$a(z,z) \geq k\|z\|^2_{H_0^1}(\Omega).$$

D'où la V-ellipticité de la forme bilinéaire "a".

iii. Continuité de L : $\forall z \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(z)| &\leq \int_\Omega |f(x)z(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega |f(x)||z(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|z\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a :

$$|L(z)| \leq C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Longrightarrow |L(z)| \leq C_L\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)$$

avec $C_L = C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}$ est la constante de continuité de "L".

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème variationnel (2.2) admet une solution unique $y \in H_0^1(\Omega)$.

iv. Continuité de la solution par rapport aux données :
y solution unique de (2.2) :

$$a(y,z) = L(z) \quad \forall y, z \in H_0^1(\Omega)$$

où

$$a(y,z) = k\int_\Omega \nabla y.\nabla z \ \mathrm{d}x + \int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla y)z \ \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla y.\nabla z \ \mathrm{d}x = \frac{1}{k}a(y,z) - \frac{1}{k}\int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla y)z \ \mathrm{d}x \qquad (2.4)$$

et

$$L(z) = \int_\Omega f \ z \ \mathrm{d}x$$

Or $y \in H_0^1(\Omega) \Longrightarrow \|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla y|^2 \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla y.\nabla y \ \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \frac{1}{k}a(y,y) - \frac{1}{k}\int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla y)y \ \mathrm{d}x \quad \text{(où l'on a remplacé dans (2.4) } z \text{ par } y\text{)} \\
&= \frac{1}{k}L(y) - \frac{1}{k}\int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla y)y \ \mathrm{d}x \quad \text{(dans (2.2) on remplace } z \text{ par } y\text{)} \\
&= \frac{1}{k}\int_\Omega f \ y \ \mathrm{d}x - \frac{1}{k}\int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla y)y \ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{k}\int_\Omega |f| \ |y| \ \mathrm{d}x + \frac{1}{k}\int_\Omega |\overrightarrow{\omega}.\nabla y| \ |y| \ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{k}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|y\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi}{k}\|\nabla y\|_{L^2(\Omega)^n}\|y\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C(\Omega)}{k}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|y\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{C(\Omega)}{k}\sqrt{n} \ \xi\|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{(d'après Poincaré)}
\end{aligned}$$

On rappelle que $\xi = \|\overrightarrow{\omega}\|_\infty << 1$.

$$\Longrightarrow \|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega)}{k}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C(\Omega)}{k}\sqrt{n} \ \xi\|y\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow \left(1 - \frac{C(\Omega)}{k}\sqrt{n} \ \xi\right)\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega)}{k}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

ξ suffisamment petit pour que $\frac{C(\Omega)}{k}\sqrt{n} \ \xi < 1$.

On pose alors : $C_y = \dfrac{C(\Omega)}{k\left(1 - \frac{C(\Omega)}{k}\sqrt{n} \ \xi\right)}$.

Ce qui permet de conclure que :

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_y\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.3 Contrôle distribué

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ régulier de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, considérons le système suivant :

$$(P1) : \begin{cases} -k\Delta y + \overrightarrow{\omega}.\nabla y &= f + v \quad \text{dans } \Omega \\ y &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec $x \mapsto v(x)$, $x \in \Omega$ le contrôle, $x \mapsto y(x, v(x))$ l'état du système,
$f \in L^2(\Omega)$, $v \in U_{ad}$ un ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et $y \in V = H_0^1(\Omega)$.

Pour simplifier les calculs, on suppose dorénavant le champs de vitesse $\overrightarrow{\omega}$ constant avec, bien entendu, $\|\overrightarrow{\omega}\|_\infty << 1$ (où $\|\overrightarrow{\omega}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \omega_i$
$\omega_i \in \mathbb{R}^+$ $\forall i = \overline{1,n}$ et $\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$).
On a alors

$$\begin{cases} a(\varphi,\psi) = k\displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi(x)\ \nabla\psi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\overrightarrow{\omega}.\nabla\varphi(x)\Big)\psi(x)\mathrm{d}x \quad \forall\varphi,\psi \in H_0^1(\Omega) \\ < g,\psi >= \displaystyle\int_\Omega g(x)\ \psi(x)\mathrm{d}x, \quad g \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Lemme 2.3.1. *La solution y de $(P1)$ est définie par :*

$$(P2) : \begin{cases} y \in H_0^1(\Omega) \\ a(y(v),\varphi) =< f,\varphi >_{L^2(\Omega)} + < v,\varphi >_{L^2(\Omega)} \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On dit alors que $(P2)$ est la forme faible de $(P1)$.

Preuve:
On multiplie l'équation du problème $(P1)$ par une fonction test $\varphi \in D(\Omega)$ et on intègre sur Ω tout en utilisant la formule de Green.
φ étant à support compact dans Ω, $y = 0$ sur Γ et se rappelant que $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned} -k\int_\Omega \Delta y\ \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \overrightarrow{\omega}.\nabla y\ \varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega (f+v)(x)\ \varphi(x)\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow k\int_\Omega \nabla y\ \nabla\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\overrightarrow{\omega}.\nabla y\Big)\ \varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega (f+v)(x)\ \varphi(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ a(y(v),\varphi) =< f,\varphi >_{L^2(\Omega)} + < v,\varphi >_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \text{ et par densité } \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Inversement si y vérifie $(P2)$ alors y vérifie $(P1)$ au sens des distributions dans $D'(\Omega)$ puisque $y \in H_0^1(\Omega)$ ce qui implique que $y = 0$ sur Γ et $\forall \varphi \in D'(\Omega)$ on a :

$$a(y(v), \varphi) = < f, \varphi >_{L^2(\Omega)} + < v, \varphi >_{L^2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow -k \int_\Omega \Delta y \, \varphi(x) \mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\overrightarrow{\omega}.\nabla y \right) \varphi(x) \mathrm{d}x \; = \; \int_\Omega (f+v)(x) \, \varphi(x) \mathrm{d}x \;\; \forall \varphi \in D(\Omega)$$

d'où l'équation du problème $(P1)$ au sens des distributions. ■

Lemme 2.3.2. *L'application* $\begin{array}{llll} \mathit{Appl} : & L^2(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ & v & \longmapsto & y(v) \end{array}$ *est affine continue.*

Preuve:
On montre que l'application *Appl* est affine et pour cela il suffit de montrer que *Appl* peut s'écrire sous la forme :

$$\mathit{Appl}(v) = y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$$

où $\begin{array}{llll} \mathcal{A} : & L^2(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ & v & \longmapsto & \mathcal{A}v \end{array}$ est linéaire

et $\mathcal{B} \in H_0^1(\Omega)$

y vérifie $(P1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -k\Delta y(v) + \overrightarrow{\omega}.\nabla y(v) \;=\; f + v \quad \text{dans } \Omega \\ y(v) \;=\; 0 \quad \text{sur } \Gamma \qquad (y(v) \in H_0^1(\Omega)). \end{array} \right.$

Puisque, d'après $(P1)$, on a :

$$-k\Delta y(v) + \overrightarrow{\omega}.\nabla y(v) \;=\; f + v$$

$$\Longrightarrow y(v)\Big(- k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla \Big) = f + v$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow y(v) \;&=\; \Big(- k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla \Big)^{-1} \Big(f + v \Big) \\ &=\; \Big(- k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla \Big)^{-1} f + \Big(- k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla \Big)^{-1} v \end{aligned}$$

$\Big(- k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla \Big)$ étant inversible sur $H_0^1(\Omega)$ car le système homogène :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Big(- k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla \Big) y = 0 \;\; \text{dans } \Omega \\ y = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

admet comme seule solution la solution triviale $y = 0$.

Alors on peut prendre comme opérateur linéaire $\mathcal{A}$, l'opérateur :

$$\mathcal{A} : v \longmapsto \mathcal{A}v = \begin{cases} \Big(k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla\Big)^{-1} v \ \text{ dans } \Omega \\ y = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

sachant que la fonction $\mathcal{B}$ est indépendante de v :

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \Big(k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla\Big)^{-1} f \ \text{ dans } \Omega \\ y = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ est linéaire par rapport à v car $\Big(k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla\Big)^{-1}$ est linéaire puisque $\Big(k\Delta + \overrightarrow{\omega}.\nabla\Big)$ est linéaire (somme de deux opérateurs différentiels linéaires). Ce qui montre que $Appl : v \longmapsto Appl(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ est affine par rapport à v, avec $\mathcal{A}$ linéaire sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ et $\mathcal{B} \in H_0^1(\Omega)$.

Reste à montrer que $Appl$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il faut montrer que $v \longmapsto y(v)$ est continue par rapport à $v \in L^2(\Omega)$.

Comme la solution y de $(P1)$ est affine par rapport à v c'est-à-dire composée d'une application $\mathcal{A}$ linéaire par rapport à v et une fonction $\mathcal{B}$ qui ne dépend pas de v, il suffit de montrer que l'application linéaire $\mathcal{A}$ est continue par rapport à v .

Or $\mathcal{A}$ correspond à $y(v) = \mathcal{A}v$ avec $\mathcal{B} = 0$ ($\iff$ $f = 0$) et $y(v)$ solution du système homogène suivant :

$$(P1_{hom}) : \begin{cases} -k\Delta y(v) + \overrightarrow{\omega}.\nabla y(v) \ = \ v \quad \text{dans } \Omega \\ y(v) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On se rappelle que $y(v)$ est une solution unique de $(P1)$ et que cette solution dépend continûment des données $f, v \in L^2(\Omega)$, ce qui nous permet d'écrire : $\exists C > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \|y(v)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C\|f + v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\Big) \end{aligned}$$

Puisque $f = 0$, donc la continuité de y est exprimée par :

$\|\mathcal{A}v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|y(v)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in L^2(\Omega) \implies \mathcal{A}$ est continue sur $L^2(\Omega)$.

Finalement, l'application *Appl* est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

2.3.1 Fonction coût

On présente ici la fonctionnelle du contrôle dont la minimisation donne le contrôle optimal cherché.
La fonction coût associée à $(P1)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |y(v) - z_d|^2 \mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\|y(v) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

avec $z_d \in L^2(\Omega)$ et $N > 0$.

2.3.2 Minimisation de la fonction coût : Existence et unicité de la solution optimale

Lemme 2.3.3. *La fonctionnelle* $J : \begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ v & \longmapsto & J(v) \end{array}$ *est continue, strictement convexe et coercive.*

Preuve:

i. Convexité stricte de J :
Pour montrer que J est strictement convexe il suffit de montrer que J est strictement monotone, c'est-à-dire :
$\forall v, w \in L^2(\Omega), \; < J'(v) - J'(w), v - w >> 0$.
Calculons d'abord $< J'(v), w >$:

$$\begin{aligned} < J'(v), w >&= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{\theta}\Big(J(v+\theta w) - J(v)\Big) \\ &= \lim_{\theta\to 0^+} \bigg[\frac{1}{2\theta}\int_\Omega \Big(y(v{+}\theta w){-}z_d\Big)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2\theta}\int_\Omega \Big(y(v){-}z_d\Big)^2 \mathrm{d}x \\ &\qquad + \frac{N}{2\theta}\int_\Omega (v+\theta w)^2 \mathrm{d}x - \frac{N}{2\theta}\int_\Omega v^2 \mathrm{d}x\bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow < J'(v), w >= \lim_{\theta\to 0^+} & \Bigg[\frac{1}{2\theta}\int_\Omega \Big(y^2(v+\theta w)+z_d^2-2y(v+\theta w)z_d-y^2(v)-z_d^2+2y(v)z_d\Big)\ \mathrm{d}x \\
& + \frac{N}{2\theta}\int_\Omega (v^2+\theta^2 w^2+2\theta\ v\ w-v^2)\ \mathrm{d}x\Bigg] \\
= \lim_{\theta\to 0^+} & \Bigg[\frac{1}{2\theta}\int_\Omega \Big(y^2(v+\theta w)-y^2(v)\Big)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_\Omega \Big(y(v+\theta w)-y(v)\Big) z_d\ \mathrm{d}x\Bigg] \\
& + N\int_\Omega v\ w\ \mathrm{d}x \\
= \int_\Omega \lim_{\theta\to 0^+} & \frac{1}{2\theta}\Big(y^2(v+\theta w)-y^2(v)\Big)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(y(v+\theta w)-y(v)\Big) z_d\ \mathrm{d}x \\
& + N\int_\Omega v\ w\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

D'une part, on remarque que :

$$
\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big(y^2(v+\theta w)-y^2(v)\Big) = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big(y(v+\theta w)-y(v)\Big)\Big(y(v+\theta w)+y(v)\Big).
$$

C'est-à-dire que :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big(y^2(v+\theta w)-y^2(v)\Big) &= \left[\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(y(v+\theta w)-y(v)\Big)\right] \\
& \qquad \left[\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2}\underbrace{\Big(y(v+\theta w)+y(v)\Big)}_{\xrightarrow[\theta\to 0^+]{} 2y(v)}\right] \\
&= \ < y'(v)\ ,\ w >\ \ y(v).
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a :

$$
\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(y(v+\theta w)-y(v)\Big) z_d := < y'(v), w > z_d.
$$

D'où l'on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
< J'(v), w > &= \int_\Omega < y'(v), w > y(v)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega < y'(v), w > z_d\ \mathrm{d}x + N\int_\Omega v\ w\ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big(y(v)-z_d\Big) < y'(v), w >\ \mathrm{d}x + N\int_\Omega v\ w\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2.3.2, la solution $y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ de $(P1)$ est une fonction affine continue par rapport à v alors on peut évaluer la dérivée directionnelle de y en v dans la direction w :

$$\begin{aligned} < y'(v), w > &= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\Big(y(v+\theta w) - y(v)\Big) \\ &= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\Big(\mathcal{A}(v+\theta w) + \mathcal{B} - \mathcal{A}v - \mathcal{B}\Big) \\ &= \mathcal{A}w \quad \text{(par linéarité de } \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$< J'(v), w >= \int_\Omega \Big(y(v) - z_d\Big)\mathcal{A}w \ \mathrm{d}x + N\int_\Omega v \ w \ \mathrm{d}x.$$

De plus, comme on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w-v) = \mathcal{A}w - \mathcal{A}v &= \mathcal{A}w + \mathcal{B} - \mathcal{A}v - \mathcal{B} \\ &= y(w) - y(v) \end{aligned}$$

alors, on peut écrire :

$$< J'(v), v-w >= \int_\Omega \Big(y(v) - z_d\Big)\mathcal{A}(v-w) \ \mathrm{d}x + N\int_\Omega v \ (v-w) \ \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow < J'(v), v-w >= \int_\Omega \Big(y(v)-z_d\Big)\Big(y(v)-y(w)\Big) \ \mathrm{d}x + N\int_\Omega v \ (v-w) \ \mathrm{d}x \tag{2.5}$$

et

$$< J'(w), v-w >= \int_\Omega \Big(y(w)-z_d\Big)\Big(y(v)-y(w)\Big) \ \mathrm{d}x + N\int_\Omega w \ (v-w) \ \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

En faisant la différence entre les équations (2.5) et (2.6) on obtient :

$$\begin{aligned} < J'(v)-J'(w), v-w >= &\int_\Omega \Big(y(v)-z_d\Big)\Big(y(v)-y(w)\Big) \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \Big(y(w)-z_d\Big)\Big(y(v)-y(w)\Big) \ \mathrm{d}x \\ &+ N\int_\Omega v \ (v-w)\mathrm{d}x - N\int_\Omega w \ (v-w) \ \mathrm{d}x \\ = &\int_\Omega \Big(y(v)-z_d-y(w)+z_d\Big)\Big(y(v)-y(w)\Big) \ \mathrm{d}x + N\int_\Omega (v-w) \ (v-w) \ \mathrm{d}x \\ = &\int_\Omega \Big(y(v)-y(w)\Big)^2 \ \mathrm{d}x + N\int_\Omega (v-w)^2 \ \mathrm{d}x \\ \geq &\ 0 \quad \forall v, w \in L^2(\Omega) \quad (N > 0) \end{aligned}$$

donc, J' est monotone sur $L^2(\Omega)$ ce qui implique que J est convexe sur $L^2(\Omega)$.
De plus,

$$\begin{aligned} < J'(v) - J'(w), v - w > &\geq N \int_\Omega (v-w)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= N\|v-w\|^2_{L^2(\Omega)} > 0 \quad \forall v, w \in L^2(\Omega) \text{ avec } v \neq w \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Jest strictement convexe.

ii. Continuité de J :
Il est clair que J est continue par rapport à $v \in L^2(\Omega)$ puisque c'est la somme de deux fonctions composées de fonctions continues :

$$J(v) = \frac{1}{2}\|y(v) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$v \longmapsto y(v)$ continue d'après le lemme 2.3.2, $v \longmapsto z_d$ continue car constante par rapport à v, la fonction $v \longmapsto y(v) - z_d$ continue et enfin la fonction norme $v \longmapsto \|v\|_{L^2(\Omega)}$ est continue.
Donc J est continue $\Longrightarrow$ J est faiblement semi-continue inférieurement (J étant aussi convexe).

iii. Coercivité de J :
J est coercive puisque :

$$J(v) \geq N \int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x = N\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[\|v\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty]{} +\infty.$$

■

Théorème 2.3.1. *U_{ad} étant un convexe fermé de $L^2(\Omega)$*
Il existe $u \in U_{ad}$ unique tel que :

$$(P): \qquad J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$$

u est le contrôle optimal.

Preuve:
En effet, le problème (P) admet une solution optimale unique notée $u \in U_{ad}$ puisque la fonctionnelle J vérifie toutes les conditions nécessaires et suffisantes (selon le lemme 2.3.3) : J convexe, continue sur U_{ad} (car J convexe et continue sur $L^2(\Omega)$) et aussi coercive.

Ce qui implique que (P) admet au moins une solution optimale et comme J est strictement convexe, alors cette solution u est unique. ∎

Théorème 2.3.2. *Le contrôle optimal $u \in U_{ad}$ est caractérisé par :*

$$(P2) : \begin{cases} y \in H_0^1(\Omega) \\ a(y(u), \varphi) = < f, \varphi >_{L^2(\Omega)} + < u, \varphi >_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et u vérifie l'inéquation d'Euler sur U_{ad} c'est-à-dire :

$$< J'(u), v - u > \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Preuve:
Le problème $(P2)$ vérifie le lemme 2.3.1, donc c'est évident pour $u \in U_{ad}$.
D'après ce qui précède on a :

$$< J'(v), w > = \int_\Omega \Big(y(v) - z_d\Big) \mathcal{A}w \ \mathrm{d}x + N \int_\Omega v \ w \ \mathrm{d}x$$

on remplace v par u et w par $v - u$, on obtient :

$$< J'(u), v - u > = \int_\Omega \Big(y(u) - z_d\Big) \mathcal{A}(v - u) \ \mathrm{d}x + N \int_\Omega u \ (v - u) \ \mathrm{d}x$$

Or $\mathcal{A}(v - u) = \mathcal{A}v - \mathcal{A}u = \mathcal{A}v + \mathcal{B} - \mathcal{A}u - \mathcal{B} = y(v) - y(u)$
on en déduit alors que :

$$< J'(u), v-u > = \int_\Omega (y(u)-z_d)\Big(y(v)-y(u)\Big) \ \mathrm{d}x + N \int_\Omega u \ (v-u) \ \mathrm{d}x \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

car u solution optimale de (P) et par suite u vérifie l'inéquation d'Euler sur U_{ad}. ∎

2.3.3 Introduction du Lagrangien associé au problème de la minimisation de la fonction coût

L'idée de la méthode du Lagrangien c'est de minimiser la fonctionnelle $J(v, z)$ sous les contraintes d'égalité dans :

$$\begin{cases} -k\Delta z + \overrightarrow{\omega}.\nabla z = f + v \quad \text{dans } \Omega \\ z = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec v et z deux variables indépendantes pour J.
On définit alors le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(v,z,q) = J(v,z) - \int_\Omega q\Big(- k\Delta z + \overrightarrow{\omega}.\nabla z - f - v\Big)\mathrm{d}x$$

où

$$J(v,z) = \frac{1}{2}\int_\Omega (z-z_d)^2\mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2\mathrm{d}x$$

et $q \in H_0^1(\Omega)$ le multiplicateur de Lagrange de l'équation de l'état.

2.3.4 Détermination de l'état adjoint

Définition 2.3.1. *On dit que (u,y,p) est un point-selle de $\mathcal{L}$ sur $U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ si seulement si :*

$$\mathcal{L}(u,y,q) \leq \mathcal{L}(u,y,p) \leq \mathcal{L}(v,z,p) \qquad \forall (v,z,q) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

On définit, maintenant, l'état adjoint à partir du Lagrangien en considérant la G-dérivée partielle du Lagrangien $\mathcal{L}$ par rapport à z.

Par une double application de la formule de Green, le Lagrangien devient :

$$\mathcal{L}(v,z,q) = \frac{1}{2}\int_\Omega (z-z_d)^2\,\mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega k\,z\,(-\Delta q)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega z\,\overrightarrow{\omega}.\nabla q\,\mathrm{d}x - \int_\Omega q(-f-v)\,\mathrm{d}x.$$

En effet et pour vu que $\overrightarrow{\omega}$ soit constant, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla z)\mathrm{d}x &= \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\Big) q\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i} q\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On applique la formule de Green de première espèce, on aura :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\overrightarrow{\omega}.\nabla z)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \omega_i \Big[- \int_\Omega z\frac{\partial q}{\partial x_i}\mathrm{d}x + \underbrace{\int_\Gamma z\ q\ n_i \mathrm{d}\sigma}_{=0\ (\text{car } z,q\in H_0^1(\Omega))} \Big] \\ &= -\sum_{i=1}^n \omega_i \int_\Omega z\frac{\partial q}{\partial x_i}\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega z(\overrightarrow{\omega}.\nabla q)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

où n_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur normal extérieur $\overrightarrow{n}$.

On dérive $\mathcal{L}$ par rapport à z :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v,z,p),\varphi\Big\rangle &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\mathcal{L}(v,z+\theta\varphi,p)-\mathcal{L}(v,z,p)\Big) \qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\\
&= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega (z+\theta\varphi-z_d)^2\mathrm{d}x-\int_\Omega k\,(z+\theta\varphi)\,(-\Delta p)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega (z+\theta\varphi)\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x\\
&\qquad -\frac{1}{2}\int_\Omega (z-z_d)^2\mathrm{d}x+\int_\Omega k\,z\,(-\Delta p)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega z\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big(\int_\Omega (z+\theta\varphi-z_d)^2\mathrm{d}x-\int_\Omega (z-z_d)^2\mathrm{d}x\Big)\\
&\qquad -\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\int_\Omega k\,(z+\theta\varphi)\,(-\Delta p)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega k\,z\,(-\Delta p)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&\qquad +\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\int_\Omega (z+\theta\varphi)\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega z\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x\Big)
\end{aligned}$$

puisque les termes :

$$N\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad -\int_\Omega q(-f-v)\,\mathrm{d}x$$

ne dépendent pas de z et c'est pour cette raison que leur G-dérivée par rapport à z est nulle.

On peut donc faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v,z,p),\varphi\Big\rangle &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big(\int_\Omega \Big((z-z_d)^2+\theta^2\varphi^2+2\theta\varphi(z-z_d)-(z-z_d^2\Big)\mathrm{d}x\Big)\\
&\qquad +\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\int_\Omega \Big(k\,z\,\Delta p+k\theta\,\varphi\,\Delta p-k\,z\,\Delta p\Big)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&\qquad +\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\int_\Omega \Big(z\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x+\theta\,\varphi\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x-z\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\Big)\mathrm{d}x\Big)\\
&= \int_\Omega \varphi(z-z_d)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega k\,\varphi\,\Delta p\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \varphi\,\overrightarrow{\omega}.\nabla p\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(u,y,p) étant un point selle de $\mathcal{L}$ ce qui implique :

$$\Big\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(u,y,p),\varphi\Big\rangle = 0 \qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$$

c'est l'équation d'Euler vérifiée pour $y \in H_0^1(\Omega)$.

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\int_\Omega \varphi(y - z_d)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega k\ \varphi\ \Delta p\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi\ \overrightarrow{\omega}.\nabla p\ \mathrm{d}x = 0\ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow\ \int_\Omega \Big(- k\Delta p - \overrightarrow{\omega}.\nabla p\Big)\varphi\ \mathrm{d}x = \int_\Omega (y - z_d)\varphi\ \mathrm{d}x\ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

On établit alors le système de l'état adjoint :

$$(P3) : \begin{cases} -k\Delta p - \overrightarrow{\omega}.\nabla p = y - z_d & \text{dans } \Omega \\ \qquad p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(au sens de distributions dans } H^{-1}(\Omega)).$$

2.3.5 Définition du système d'optimalité

Le système d'optimalité regroupe le système de l'état direct $(P1)$, le système de l'état adjoint $(P3)$ et l'inéquation d'Euler exprimée en fonction du contrôle optimal u et l'état adjoint p, c'est-à-dire il nous reste, à présent, à déterminer l'expression finale de l'inéquation d'Euler à partir de la G-dérivée partielle du Lagrangien $\mathcal{L}$ par rapport à $v \in U_{ad}$:

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, z, p), w \Big\rangle &= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\Big(\mathcal{L}(v + \theta w, z, p) - \mathcal{L}(v, z, p)\Big) \quad \forall w \in L^2(\Omega) \\ &= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\Big(J(v + \theta w, z) - J(v, z)\Big) \\ &\quad - \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\Big(\int_\Omega p(-f - v - \theta w)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega p(-f - v)\ \mathrm{d}x\Big). \end{aligned}$$

Toutes les quantités dans l'expression de $\mathcal{L}(v, z, p)$ qui ne dépendent pas de v ont une G-dérivée par rapport à v qui est nulle, à savoir :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |z - z_d|^2\ \mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad \int_\Omega p(k\ \Delta z - \overrightarrow{\omega}\ \nabla z)\ \mathrm{d}x.$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(J(v{+}\theta w,z){-}J(v,z)\Big) &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big(N\int_\Omega (v{+}\theta w)^2\,\mathrm{d}x{-}N\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{N}{2\theta}\Big(\int_\Omega (v^2{+}\theta^2\,w^2{+}2\theta\,v\,w{-}v^2)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{N}{2}\int_\Omega \theta\,w^2\,\mathrm{d}x+\ N\ \int_\Omega v\,w\,\mathrm{d}x\\
&=\ N\ \int_\Omega v\,w\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \forall w\in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\Big(\int_\Omega p(-f{-}v{-}\theta w)\mathrm{d}x{-}\int_\Omega p(-f{-}v)\mathrm{d}x\Big) &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\int_\Omega p(-f{-}v)\mathrm{d}x{-}\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\int_\Omega p\,\theta\,w\mathrm{d}x\\
&\quad -\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\int_\Omega p(-f{-}v)\mathrm{d}x\\
&= -\int_\Omega p\,w\,\mathrm{d}x\quad \forall w\in L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

On en conclut alors que :

$$\Big\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(v,z,p),w\Big\rangle =\ N\ \int_\Omega v\,w\,\mathrm{d}x+\int_\Omega p\,w\,\mathrm{d}x \quad \forall w\in L^2(\Omega).$$

(u,y,p) étant un point selle de $\mathcal{L}$ sur $U_{ad}\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, on a alors :

$$\mathcal{L}(u,y,p)\le\mathcal{L}(v,z,p)\qquad \forall(v,z)\in U_{ad}\times H_0^1(\Omega)$$

A p fixé (u,y) réalise le minimum de $\mathcal{L}$ et est par conséquent, solution optimale de :

$$\mathcal{L}(u,y,p)=\inf_{(v,z)\in U_{ad}\times H_0^1(\Omega)}\mathcal{L}(v,z,p)$$

ce qui entraîne que :

$$\Big\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(u,y,p),v-u\Big\rangle\ge 0\qquad \forall v\in U_{ad}$$

c'est l'inéquation d'Euler par rapport à v.
Donc si on prend $v=u,\ z=y$ et $w=v-u$ dans l'expression de la G- dérivée de $\mathcal{L}$ par rapport à v on obtient :

$$\Big\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(u,y,p),v-u\Big\rangle =\ N\ \int_\Omega u(v-u)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega p(v-u)\,\mathrm{d}x\ge 0\quad \forall v\in U_{ad}.$$

Finalement, l'inéquation d'Euler en fonction de l'état adjoint p et le contrôle optimal u peut s'écrire comme suit :

$$\int_{\Omega}(p+Nu)(v-u)\ \mathrm{d}x \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. *Le contrôle optimal u est caractérisé par le système d'optimalité suivant :*

$$(S.O):\begin{cases} \begin{cases} -k\Delta y(u) + \overrightarrow{\omega}.\nabla y(u) = f + u & \textit{dans } \Omega \\ y = 0 & \textit{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -k\Delta p - \overrightarrow{\omega}.\nabla p = y(u) - z_d & \textit{dans } \Omega \\ p = 0 & \textit{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega}(p+Nu)(v-u)\ \mathrm{d}x \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad} \end{cases}$$

.

Chapitre 3

Approche numérique : Algorithme de résolution du système d'optimalité

Le but de ce chapitre est de présenter un algorithme permettant d'approcher la solution du système d'optimalité précédemment obtenu ([2] et [7]).

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. *Soit J une fonctionnelle définie sur un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert V et à valeurs réelles. J est dite α-convexe avec $\alpha > 0$ si seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

i. $J(v) \geq J(w) + \Big\langle J'(w), v - w \Big\rangle + \frac{\alpha}{2}\|v - w\|_V \quad \forall v, w \in V$

ii. $\Big\langle J'(v) - J'(w), v - w \Big\rangle_V \geq \alpha\|v - w\|_V^2 \quad \forall v, w \in V$

Définition 3.1.2. *On suppose que la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ est α-convexe. Alors J' est lipschitzien sur V, s'il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\|J'(v) - J'(w)\|_V \leq M\|v - w\|_V \quad \forall v, w \in V$$

3.2 Méthode du gradient dans un espace de Hilbert

On appelle méthode du gradient toute méthode de type :

$$u^{n+1} = u^n - \rho_n J'(u^n) \quad , n \in \mathbb{N}$$

où ρ_n est appelé le pas de descente de la méthode et $u^n, J'(u^n) \in V$.

3.2.1 Cas sans contraintes

On commence par étudier la résolution pratique du problème d'optimisation en l'absence de contraintes.
Soit V un espace de Hilbert ce qui permet d'identifier V à son dual V' $(V = V')$.
Considérons alors le problème sans contrainte suivant :

$$(P): \ J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$$

J admet un unique minimum sur V noté u.

On définit la méthode du gradient à pas fixe :
Dans cette méthode, il s'agit de construire une suite u^n définie par :

$$u^{n+1} = u^n - \rho J'(u^n) \quad n \in \mathbb{N}$$

où ρ est une constante strictement positive fixée.

Théorème 3.2.1. *J est α-convexe et J' est lipschitzien. Alors, s'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que : $\sigma \leq \rho \leq \frac{1}{M} - \sigma$, la méthode du gradient à pas fixe converge i.e :*

$$u^n \xrightarrow[n \to +\infty]{sur\ V} u$$

u étant l'unique solution optimale de (P).

Preuve:
Pour la preuve de ce théorème on passe par quatre étapes :

Etape1 : On montre que J est décroissante sur la suite des points itérés $u^n \ (n \in \mathbb{N})$ i.e :

$$n < n+1 \implies J(u^n) \geq J(u^{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il suffit, pour cela, de montrer que la suite réelle $\Big(J(u^n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
J étant convexe (car α-convexe sur V) alors on a :

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \Big\langle J'(u^{n+1}), u^n - u^{n+1} \Big\rangle_V$$

comme $u^{n+1} = u^n - \rho J'(u^n)$ alors :

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \rho \Big\langle J'(u^{n+1}), J'(u^n) \Big\rangle_V$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \ J(u^n) - J(u^{n+1}) &\geq \rho \Big\langle J'(u^n), J'(u^n) \Big\rangle_V + \rho \Big\langle J'(u^{n+1}) - J'(u^n), J'(u^n) \Big\rangle_V \\ &= \rho \|J'(u^n)\|_V^2 + \rho \Big\langle J'(u^{n+1}) - J'(u^n), J'(u^n) \Big\rangle_V \end{aligned}$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} \left| \Big\langle J'(u^{n+1}) - J'(u^n), J'(u^n) \Big\rangle_V \right| &\leq \|J'(u^{n+1}) - J'(u^n)\|_V \|J'(u^n)\|_V \\ &\leq M\|u^{n+1} - u^n\|_V \|J'(u^n)\|_V \quad (J' \text{ lipschitzien sur } V) \\ &= M \ \rho \ \|J'(u^n)\|_V^2 \quad (\text{car } \|u^{n+1} - u^n\|_V = \rho\|J'(u^n)\|_V) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ \Big\langle J'(u^{n+1}) - J'(u^n), J'(u^n) \Big\rangle_V \geq -M\rho\|J'(u^n)\|_V^2$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} J(u^n) - J(u^{n+1}) &\geq \rho\|J'(u^n)\|_V^2 - M \ \rho^2 \ \|J'(u^n)\|_V^2 \\ &\geq (\rho - M \ \rho^2)\|J'(u^n)\|_V^2 \\ &\geq \rho(1 - M \ \rho)\|J'(u^n)\|_V^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Donc $\Big(J(u^n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
En effet,

$$0 < \sigma \leq \rho \leq \frac{1}{M} - \sigma \implies -M \ \sigma \geq -M \ \rho \geq M \ \sigma - 1 \implies 1 - M \ \sigma \ \geq 1 - M \ \rho \geq M \ \sigma > 0$$

Donc $\rho > 0$ et $1 - M \ \rho > 0$ sachant que $\|J'(u^n)\|_V > 0$ car sinon si $\|J'(u^n)\|_V = 0 \implies J'(u^n) = 0_V \implies u^n$ solution optimale unique de (P) et $u^n = u$.

Etape 2 : On montre que :$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, \ \|u^{n+1} - u^n\|_V \xrightarrow[n>N_1]{} 0$

J étant convexe sur V, $\Big(J(u^n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par (P)
$\Longrightarrow \Big(J(u^n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et convergente
$\Longrightarrow \forall n > N_1, \ |J(u^{n+1}) - J(u^n)| \xrightarrow[n>N_1]{} 0$

On utilise l'α-convexité de J :

$$J(u^n) \geq J(u^{n+1}) + \left\langle J'(u^{n+1}), u^n - u^{n+1} \right\rangle_V + \frac{\alpha}{2}\|u^n - u^{n+1}\|_V$$

Cauchy-Schwarz nous permet d'écrire :

$$\left|\left\langle J'(u^{n+1}), u^n - u^{n+1} \right\rangle_V\right| \leq \|J'(u^{n+1})\|_V \|u^n - u^{n+1}\|_V$$

$$\Longrightarrow \left\langle J'(u^{n+1}), u^n - u^{n+1} \right\rangle_V \geq -\|J'(u^{n+1})\|_V \|u^n - u^{n+1}\|_V$$

et

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \leq \left|J(u^n) - J(u^{n+1})\right|$$

alors

$$\frac{\alpha}{2}\|u^n - u^{n+1}\|_V - \|J'(u^{n+1})\|_V \|u^n - u^{n+1}\|_V \leq \left|J(u^n) - J(u^{n+1})\right|$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} - \|J'(u^{n+1})\|_V\right)\|u^n - u^{n+1}\|_V \leq \left|J(u^n) - J(u^{n+1})\right| \xrightarrow[n>N_1]{} 0$$

donc si $\|J'(u^{n+1})\|_V < \frac{\alpha}{2}$ pour $n > N_2$ $(n \in \mathbb{N})$ assez grand alors on prend :

$$N = \sup(N_1, N_2) \quad \text{et} \quad \|u^n - u^{n+1}\|_V \xrightarrow[n>N]{} 0$$

Montrons, à présent, que pour $n > N_2$ assez grand

$$\|J'(u^n)\|_V \to 0$$

C'est justement l'objet de l'étape 3.

Etape 3 : On montre que $J'(u^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_V$
On avait trouvé à l'étape 1 que :

$$\begin{aligned} \rho(1 - M\ \rho)\|J'(u^n)\|_V^2 &\leq J(u^n) - J(u^{n+1}) \\ &\leq \left|J(u^n) - J(u^{n+1})\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|J'(u^n)\|_V \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \left(\text{car } \rho,\ (1 - M\ \rho) > 0\right)$$

$$\Longrightarrow J'(u^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_V.$$

Etape 4 : Enfin, on montre que $u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ où u solution optimale de $(P):\ J(u) = \inf\limits_{v\in V} J(v)$
On utilise la définition $ii.$ de l'α-convexité de J et la condition d'optimalité du problème de minimisation sans contraintes de (P) :
u solution optimale de $(P) \iff J'(u) = 0_V$ (équation d'Euler).

$$\begin{aligned}
J\ \alpha\text{−convexe} \implies & \alpha\|u^n-u\|_V^2 \leq \left\langle J'(u^n)-J'(u), u^n-u\right\rangle_V = \left\langle J'(u^n), u^n-u\right\rangle_V \\
\implies & \alpha\|u^n-u\|_V^2 \leq \|J'(u^n)\|_V\|u^n-u\|_V \\
\implies & \|u^n-u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|J'(u^n)\|_V \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
\implies & \|u^n-u\|_V \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{sur } V} u.
\end{aligned}$$

Conclusion : La méthode du gradient à pas fixe converge. ■

3.2.2 Cas avec contraintes

On suppose que J est α-convexe définie sur un sous ensemble U_{ad} convexe fermé d'un espace de Hilbert V. On considère alors le problème avec contrainte suivant :

$$(P^*):\ J(u) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v)$$

On introduit, à présent, la méthode du gradient à pas fixe avec projection appelée aussi la méthode du gradient projeté. Elle est définie par l'itération :

$$u^{n+1} = P_{U_{ad}}(u^n - \rho J'(u^n))$$

où $P_{U_{ad}}$ désigne l'opérateur de projection sur U_{ad} et $\rho > 0$ est une constante positive représentant toujours le pas du processus itératif.

Théorème 3.2.2. *On suppose que J α- convexe et J' lipschitzien. Alors, si ρ est suffisamment petite, la méthode du gradient projeté converge i.e :*

$$u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{sur } V} u$$

et la convergence est au moins géométrique, c'est-à-dire , $\exists\beta \in [0,1[$ tel que :

$$\|u^n - u\|_V \leq \beta^n\|u^0 - u\|_V \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où u solution optimale unique de (P^*).

Preuve:
Pour la preuve on doit utiliser le théorème suivant, dit théorème de projection :

Théorème de projection :
Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert E. Tout élément $x \in E$ a une unique meilleure approximation de x sur C.
Si $P_C(x)$ désigne cette meilleure approximation alors le point $P_C(x)$ est caractérisé par la propriété :

$$\forall x \in E,\ \exists! P_C(x) \in C,\ \|x - P_C(x)\|_E = \min_{y \in C} \|x - y\|_C$$

par ailleurs, $P_C(x)$ vérifie l'inégalité variationnelle :

$$\Big\langle P_C(x) - x, P_C(x) - y \Big\rangle_E \leq 0 \quad \forall y \in C$$

Autrement dit, si $\exists z \in C$, tel que :

$$\forall y \in C \ \ \Big\langle z - x, z - y \Big\rangle_E \leq 0 \implies z = P_C(x)$$

en vertu de l'unicité de $P_C(x)$.

Revenant à la démonstration du théorème : (3.2.2) :
u solution optimale de $(P^*) \iff u$ est caractérisée par l'inéquation d'Euler $\Big\langle J'(u), v - u \Big\rangle_V \geq 0,\ \forall v \in U_{ad}$ (J convexe)

$$\iff \rho \Big\langle J'(u), v - u \Big\rangle_V = \Big\langle \rho J'(u), v - u \Big\rangle_V \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad},\ \rho > 0$$

$$\iff \Big\langle u - u + \rho J'(u), v - u \Big\rangle_V \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

$$\iff \Big\langle u - \Big(u - \rho J'(u)\Big), v - u \Big\rangle_V \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

$$\iff \Big\langle u - \Big(u - \rho J'(u)\Big), u - v \Big\rangle_V \leq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

$$\iff u = P_{U_{ad}}\Big(u - \rho J'(u)\Big)$$

en vertu du théorème de projection où l'on a posé :

$$z = u, \quad x = u - \rho J'(u), \quad y = v, \quad C = U_{ad}.$$

On en conclut alors que u est l'unique meilleure approximation de $\Big(u - \rho J'(u)\Big)$ sur U_{ad}. Ceci nous permet de constater que u apparaît, pour tout $\rho > 0$, comme un point fixe* de l'application :

$$g : v \in V \longmapsto g(v) = P_{U_{ad}}\Big(v - \rho J'(v)\Big) \in U_{ad}.$$

On en déduit alors, l'algorithme du point fixe :

$$u^{n+1} = g(u^n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et à la limite, on doit trouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} u^n = \lim_{n\to+\infty} g(u^{n-1}) = u = g(u).$$

On peut alors écrire :

$$u^{n+1} = P_{U_{ad}}\Big(u^n - \rho J'(u^n)\Big)$$

et sachant que la projection $P_{U_{ad}}$ est 1_lipschitzienne, donc :

$$\begin{array}{rcl} \|u^{n+1} - u\|_V & = & \Big\|P_{U_{ad}}\Big(u^n - \rho J'(u^n)\Big) - P_{U_{ad}}\Big(u - \rho J'(u)\Big)\Big\|_V \\ & \leq & \|u^n - \rho J'(u^n) - u + \rho J'(u)\|_V \end{array}$$

c'est-à-dire $\|u^{n+1} - u\|_V \leq \Big\|u^n - u - \rho\Big(J'(u^n) - J'(u)\Big)\Big\|_V$

En utilisant l'α-convexité de J et le fait que J' est M-lipschitzien, on obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow \ \|u^{n+1} - u\|_V^2 & \leq & \|u^n - u\|_V^2 - 2\rho\Big\langle u^n - u, J'(u^n) - J'(u)\Big\rangle_V + \rho^2\|J'(u^n) - J'(u)\|_V^2 \\ & \leq & \|u^n - u\|_V^2 - 2\alpha\ \rho\|u^n - u\|_V^2 + \rho^2 M^2\|u^n - u\|_V^2 \\ & \leq & \Big(1 - 2\ \alpha\ \rho + \rho^2 M^2\Big)\|u^n - u\|_V^2. \end{array}$$

On considère maintenant la fonction $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rho & \longmapsto & \varphi(\rho) = 1 - 2\rho\ \alpha + \rho^2 M^2 \end{array}$

pour ρ assez petit $\Big($on peut prendre par exemple $\rho \in \Big]0, \frac{2\alpha}{M^2}\Big[\Big)$.

*. u est un point fixe de g si seulement si : $u = g(u)$

Comme
$$\varphi(0) = \varphi\Big(\frac{2\alpha}{M^2}\Big) = 1$$
et
$$\varphi'\Big(\frac{\alpha}{M^2}\Big) = 0 \text{ et } \varphi''\Big(\frac{\alpha}{M^2}\Big) \geq 0$$
$$\Longrightarrow \ \frac{\alpha}{M^2} \text{ réalise le min de } \varphi \text{ sur } \Big]0, \frac{2\alpha}{M^2}\Big[$$
avec $\varphi\Big(\frac{\alpha}{M^2}\Big) = 1 - \frac{2\alpha^2}{M^2} + \frac{\alpha^2}{M^4}M^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{M^2} \geq 0 \quad \text{car} \quad \alpha \leq M$
$$\Longrightarrow \ \forall \rho \in \Big]0, \frac{2\alpha}{M^2}\Big[, \quad \varphi(\rho) \geq 0$$
donc
$$\|u^{n+1} - u\|_V \leq \sqrt{\varphi(\rho)}\|u^n - u\|_V.$$
Enfin, si on choisit le pas $\varphi \in \Big]0, \frac{2\alpha}{M^2}\Big[$ alors on a $0 < \sqrt{\varphi(\rho)} < 1$ et on obtiendra :
$$u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{sur } V} u.$$
Cette dernière limite assure la convergence de la méthode du gradient projeté et cette convergence est, dans ce cas, géométrique.

En effet, on prend $\beta = \sqrt{\varphi(\rho)}$ et par suite on peut écrire :
$$\|u^n - u\|_V \leq \beta\|u^{n-1} - u\|_V \leq \beta^2\|u^{n-2} - u\|_V \leq \cdots \leq \beta^n\|u^0 - u\|_V$$
où $\beta^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ ■

3.3 Application au problème de contrôle optimal

On considère les itérations de résolution numérique du système d'optimalité $(S.O)$:

$$(S.O) : \begin{cases} \begin{cases} -k\Delta y + \overrightarrow{\omega}.\nabla y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -k\Delta p - \overrightarrow{\omega}.\nabla p = y - z_d & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega (p + Nu)(v - u)\ \mathrm{d}x \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}$$

dont la solution est un point selle (u, y, p) :
où
u est la solution optimale de (P^*) : $J(u) = \inf\limits_{v \in U_{ad} \subseteq V} J(v)$

$y(u)$ est la solution théorique du système de l'état direct :

$$(P1) : \begin{cases} -k\Delta y + \overrightarrow{\omega}.\nabla y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$p(u)$ est la solution théorique du système de l'état adjoint :

$$(P3) : \begin{cases} -k\Delta p - \overrightarrow{\omega}.\nabla p = y - z_d & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Soit $J : \; L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$\quad v \longmapsto J(v) = \frac{1}{2}\Big(\|y(v) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + N\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \Big).$

J est G-dérivable sur$L^2(\Omega)$.
On vérifie alors que J est N-convexe et J' est N-lipschitzien c'est-à-dire J' est un opérateur lipschitzien dont la constante de Lipschitz est N.
En effet, d'après la définition $ii.$ de l'α-convexité de J on a :
J α-convexe sur $V \iff \forall v, w \in V \; \Big\langle J'(v) - J'(w), v - w \Big\rangle_V \geq \alpha\|v - w\|^2_V$
Dans notre cas on prend $V = L^2(\Omega)$ et d'après les calculs précédents on a :

$$\begin{aligned} \Big\langle J'(v) - J'(w), v - w \Big\rangle_{L^2(\Omega)} &= \|y(v) - y(w)\|^2_{L^2(\Omega)} + N\|v - w\|^2_V \\ &\geq N\|v - w\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall v, w \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

d'où la N-convexité de J.
Par ailleurs, on a pu écrire aussi que :

$$\Big\langle J'(u), v - u \Big\rangle_{L^2(\Omega)} = \Big\langle p + Nu, v - u \Big\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Comme v est quelconque dans $L^2(\Omega)$, alors $w = v - u$ l'est aussi on obtient donc,

$$\Big\langle J'(u), w \Big\rangle_{L^2(\Omega)} = \Big\langle p + Nu, w \Big\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in L^2(\Omega)$$
$$\Longrightarrow J'(u) = p + Nu \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

J' est exprimé en fonction du contrôle optimal u.
On peut généraliser cette écriture à tout élément de $L^2(\Omega)$:

$$J'(v) = p + Nv \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

On en déduit alors que :

$$J'(v) - J'(w) = p + Nv - p - Nw = N(v - w)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \|J'(v) - J'(w)\|_{L^2(\Omega)} &= N\|v - w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq N\|v - w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que J' est N-lipschitzien.

Toutes les conditions du théorème de convergence sont bien vérifiées dans le cas "sans contraintes" : minimisation de J sur l'espace $V = L^2(\Omega)$ et aussi dans le cas "avec contraintes" : minimisation de J sur l'ensemble U_{ad} convexe fermé de $L^2(\Omega)$.

L'algorithme de résolution numérique itérative du système d'optimalité s'écrit alors comme suit :

Cas sans contraintes :

$$\begin{cases} \begin{cases} -k\Delta y^n + \overrightarrow{\omega}.\nabla y^n = f + u^n \quad \text{dans } \Omega \\ y^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -k\Delta p^n - \overrightarrow{\omega}.\nabla p^n = y^n - z_d \quad \text{dans } \Omega \\ p^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ J'(u^n) = p^n + Nu^n \\ \\ u^{n+1} = u^n - \rho_n J'(u^n) \end{cases}$$

Cas avec contraintes :

$$\begin{cases} \begin{cases} -k\Delta y^n + \overrightarrow{\omega}.\nabla y^n = f + u^n \quad \text{dans } \Omega \\ y^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -k\Delta p^n - \overrightarrow{\omega}.\nabla p^n = y^n - z_d \quad \text{dans } \Omega \\ p^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \\ J'(u^n) = p^n + Nu^n \\ \\ u^{n+1} = P_{U_{ad}}\Big(u^n - \rho J'(u^n)\Big). \end{cases}$$

Bibliographie

[1] G.Allaire & F.Alouges, *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2015-2016.

[2] G.Allaire, *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2012.

[3] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et application*, Masson, 1983.

[4] J.L.Lions ; *Contrôle optimal des système gouvernés par des EDPs*, Dunod, 1968.

[5] M.Fortin & R.Glowinski, *Méthodes de Lagrangien Augmenté : Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*, Dunod, 1982.

[6] P.A.Raviart & J.M.Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1988.

[7] P.G.Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunond, Paris, 1998.