République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid   Tlemcen

FACULTE DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et applications

Présenté par

OMARI Yamna

Thème

Résultats d’Existence de Solutions Pour un Problème Elliptique Singulier Par la Méthode de Galerkin

Soutenu le 25/09/2025

Devant le jury composé de

Président	M. Sabri BENSID	Professeur	Université de Tlemcen
Examinateur	M. Mohamed MAMCHAOUI	M. C. A	Université de Tlemcen
Encadrant	M. Ahmed BENSEDIK	M. C. A	Université de Tlemcen

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Thème

RÉSULTATS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME ELLIPTIQUE SINGULIER PAR LA MÉTHODE DE GALERKIN

Spécialité: Équations aux dérivées partielles et applications

Présenté

par

OMARI Yamna

Soutenu le 25/09/2025, devant le jury

Président	M. Sabri BENSID	Pr Université de Tlemcen
Examinateur	M. Mohamed MAMCHAOUI	M.C.A Université de Tlemcen
Encadrant	M. Ahmed BENSEDIK	M.C.A Université de Tlemcen

2024_2025

Dédicaces

Grace à Allah le tout puissant j'ai pu terminer ce travail que je dédie particulièrement à:

L'esprit de ma mère, et de mes grands-parents, en espérant qu'Allah les bénisse de sa bonté et de sa miséricorde.

- A mon père qui m'a tant appris dans la vie: La détermination, la volonté et l'autonomie...
- À mes frères et soeurs.
- À ceux qui m'inspirent et me font avancer chaque jour.
- À ceux qui m'ont soutenue et encouragée dans les moments difficiles.
- Aux personnes bienveillantes qui illuminent mon chemin.

Remerciements

Après louange à Allah et gratitude envers Lui, ainsi que des bénédictions et la paix sur son Messager Mohammed, que la paix soit sur lui, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadrant Monsieur Ahmed BENSEDIK, pour le temps qu'il m'a consacré, sa patience, ses précieux conseils, ses encouragements et son soutien constant tout au long de ce travail de mémoire. Sa contribution m'a véritablement aidée à la réalisation de ce mémoire.

J'exprime aussi ma gratitude envers Messieurs Sabri BENSID et Mohamed MAMCHAOUI d'avoir accepté de présider et d'examiner ce modeste travail.

Je remercie également tous les professeurs qui m'ont enseignée tout au long de mon parcours académique.

Un remerciement spécial aux professeurs de mathématiques.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour m'avoir fourni les resources nécessaires pour réaliser ce mémoire.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers toutes les personnes dont les idées, les conseils et les discussions ont enrichi ce travail de manière significative.

Table des Matières

Introduction

La théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) joue un rôle essentiel dans la modélisation mathématique pour de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie.

Parmi les classes d'EDP, les problèmes elliptiques occupent une place particulièrement importante en raison de leur implication dans la description de phénomènes naturels variés, provenant de la physique, de l'astronomie, de la chimie, de la biologie etc...

L'axe principal dans l'étude des problèmes elliptiques est de démontrer l'existence de solutions adéquates. Parmi les méthodes utilisées dans la résolution des problèmes elliptiques on cite, entre autres, la méthode de Galerkin qui constitue un outil fondamental et un cadre puissant pour aborder les questions d'existence.

Dans ce mémoire nous allons utiliser cette méthode pour l'étude du problème elliptique singulier suivant:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \lambda g(x,\nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u(x) > 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\lambda \geq 0$ est un paramètre réel, f est une fonction à termes sous-linéaire et singulier, et g est une fonction continue.

Nous montrerons l'existence de solutions en présence du terme de convection g. La partie principale de ce travail est une relecture de l'article [2] .

Ce mémoire se compose de trois chapitres, décrits comme suit:

Le premier chapitre: comprend les outils nécessaires pour l'étude du problème proposé. Il contient également un rappel d'analyse fonctionnelle. La majorité de ces résultats sont tirés sauf mention contraire du livre [4] .

Le deuxième chapitre: est entièrement consacré à l'application de la méthode de Galerkin pour un problème elliptique.

Enfin dans le troisième chapitre, on s'intéressera à l'étude de l'existence de solutions du problème (P).

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Topologie faible

1.1.1 Définition et propriétés

Soit F un espace de Banach et soit $f \in F'$, F' étant le dual de F. On désigne par $\Psi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\Psi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit F' on obtient une famille $(\Psi_f)_{f \in F'}$ d'applications de F dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *La topologie faible $\sigma(F, F')$ sur F est la topologie la moins fine sur F rendant continues les applications Ψ_f pour f parcourant F'.*

Proposition 1 *La topologie faible $\sigma(F, F')$ est séparée.*

Proposition 2 *Soit (x_n) une suite de F. On a:*

1. $[x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(F, F')] \iff [\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \ \forall f \in F']$.
2. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *fortement, alors* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(F, F')$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(F, F')$, *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(F, F')$, *et si* $f_n \rightarrow f$ *fortement dans* F' (*i.e.* $\|f_n - f\|_{F'} \rightarrow 0$), *alors* $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

1.2 Espaces de Hilbert, espaces séparables, espaces réflexifs

Définition 1.2 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.*

Théorème 1.1 *Soit H un espace de Hilbert et (x_n) une suite bornée dans H. Alors il existe une sous suite notée (x_n) et $x \in H$ tels que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans H, i.e. pour tout $\mu \in H$, $(x_n, \mu) \to (x, \mu)$.*

Définition 1.3 *On dit qu'un espace métrique F est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset F$ dénombrable et dense.*

Soit F un espace de Banach et F' son dual muni de la norme duale définie par :

$$\|f\|_{F'} = \sup_{\substack{x \in F \\ \|x\|_F \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \, .$$

Soit F'' son bidual muni de la norme $\|g\|_{F''} = \sup\limits_{\substack{f \in F' \\ \|f\|_{F'} \leq 1}} |\langle g, f \rangle|$,

et soit l'injection canonique $J : F \to F''$ telle que pour tout $x \in F$ l'image Jx est définie par :

$$\langle Jx, f \rangle_{F'', F'} := Jx\,(f) = f\,(x) =: \langle f, x \rangle_{F', F} \qquad \forall f \in F'.$$

L'application J est linéaire et est une isométrie c'est-à-dire $\|Jx\|_{F''} = \|x\|_F$; en effet :

$$\|Jx\|_{F''} = \sup_{\substack{f \in F' \\ \|f\|_{F'} \leq 1}} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\substack{f \in F' \\ \|f\|_{F'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_F$$

Définition 1.4 *On dit que F est réflexif si J est surjective i.e $J(F) = F''$. En d'autres termes F est réflexif s'il est identifiable à F''.*

1.3 Espaces de Lebesgue

Définition 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $1 \leq p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si :*

1. f est mesurable sur Ω .

2. $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

On note $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$ où $L^1(\Omega)$ est l'espace de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)| \, dx$.

Définition 1.6 *On définit*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \textit{ mesurable, } \exists C > 0 \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{ p.p sur } \Omega\}$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_\infty = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.

Théorème 1.2 ***(Inégalité de Hölder).***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors pour tous $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et q défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy- Schwarz.

Théorème 1.3 ***(Fischer-Riesz)***

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.4 ***(de la convergence dominée)***

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$, qui converge simplement p.p. sur Ω vers une fonction u. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$
telle que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq f$ p.p. sur Ω. Alors :*

1. u est intégrable,

2. $\lim\limits_n \int_\Omega |u_n - u| dx = 0$ (autrement dit $\|u - u_n\|_1 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$),

3. $\lim\limits_n \int_\Omega u_n dx = \int_\Omega u \, dx$.

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels basés sur les espaces de Lebesgue, ces espaces constituent le cadre adéquat et rigoureux pour l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles. Ils permettent de généraliser la notion de dérivée à des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues, mais qui ont des dérivées généralisées dans un sens approprié.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, on note par $C_0^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω, c'est-à-dire:

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega, K \text{ compact; } u = 0 \ sur \ \Omega \backslash K\}$$

On rappelle que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si pour tout sous-ensemble compact K de Ω , la restriction $f_{|K}$ de f à K est un élément de $L^1(K)$.

Lemme 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, et soit $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors*

$$[\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega g(x)\phi(x)dx] \Leftrightarrow [f = g \quad p.p \ dans \ \Omega].$$

Définition 1.7 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega); \ \exists g_1, \ g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ tels \ que \\ pour \ tout \ i = 1, \ ..., N, \ \ \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \end{array} \right\}$$

Cette définition est équivalente à la suivante:

Définition 1.8 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}$$

où

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$$

et $\frac{\partial u}{\partial x_i} (1 \leq i \leq N)$ est la dérivée d'ordre 1 au sens des distributions de la fonction réelle u.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

ou parfois de la norme équivalente pour $1 < p < \infty$:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = [\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.9 *L'espace $W^{1,p}_0(\Omega)$ est l'adhérence de $C^\infty_0(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e :*

$$W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{(C^\infty_0(\Omega))}^{\|.\|_{W^{1,p}}}$$

L'espace dual de $W^{1,p}_0(\Omega)$ est noté par $W^{-1,q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.5 *On suppose que Ω est de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- *$u = 0$ sur $\partial\Omega$*
- *$u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.*

Remarque 1.1 *1. Si $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est noté par $H^1(\Omega)$ et $W^{1,2}_0(\Omega)$ est noté $H^1_0(\Omega)$.*
2. Comme $C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 1.6 *Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}_0(\Omega)$ sont des espaces*

- *de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
- *séparables pour $1 \leq p < \infty$.*
- *réflexifs pour $1 < p < \infty$.*

Remarque 1.2 *$H^1(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire suivant:*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx.$$

Théorème 1.7 *On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1, à frontière bornée. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On a les injections continues suivantes:*

- *si* $1 \leq p < N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *où* $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
- *si* $p = N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$,
- *si* $p > N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.8 (Rellich-Kondrachov).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné de classe* C^1*. Alors on a les injections compactes suivantes:*
- *si* $1 \leq p < N; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ *où* $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
- *si* $p = N; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty[$.
- *si* $p > N; W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Le théorème précédent nous permet de passer de la convergence faible à la convergence forte.

Théorème 1.9 ***(Inégalité de Poincaré).***
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $1 \leq p < \infty$*. Alors il existe une constante* $C(\Omega, p) > 0$ *telle que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 1.3 • *L'inégalité de Poincaré reste valable si* Ω *est de mesure finie, ou bien si* Ω *est borné dans au moins une direction.*
- *L'expression* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *équivalente à la norme induite par celle de* $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.10 ***(Inégalité de Hardy-Sobolev)*** *[15]*
Soit ϕ_1 *la fonction propre positive associée à la première valeur propre de l'opérateur* $\left(-\Delta,\ H_0^1(\Omega)\right)$ *et* $0 < \alpha < 1$*. Alors*

$$\exists C > 0, \int_\Omega \frac{|v(x)|}{\phi_1^\alpha(x)} dx \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

1.5 Autres Résultats

1.5.1 Principe de maximum classique

On considère l'opérateur différentiel suivant :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad \text{avec } a_{ij} = a_{ji}$$

où $x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega$, Ω étant un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. On dit que L est elliptique si la matrice $[a_{ij}(x)]$ est positive en tout point $x \in \Omega$, i.e.

$$0 < \frac{1}{\lambda}|x|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}x_i x_j \leq \lambda |x|^2$$

où $\lambda \geq 1$ est une constante positive. On suppose que les coefficients a_{ij}, b_i, et c sont continus.

Théorème 1.11 [14] *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $c \geq 0$ dans Ω.*
Si on a $Lu \geq 0$ dans Ω, alors

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

où $u^- = \max(-u, 0)$.

1.5.2 Les Théorèmes de Riesz-Fréchet, de Stampacchia et de Lax-Milgram

Théorème 1.12 ***(de représentation de Riesz-Fréchet).***
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$, et f une forme linéaire continue sur H; alors il existe un unique élément $h \in H$ tel que:

$$f(v) = \langle h, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

Définition 1.10 *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire a sur H est dite coercive si :*

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, \; a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

Théorème 1.13 ***(de Stampacchia).***
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H, et K un

sous-ensemble non vide convexe et fermé de H. Alors, pour tout $f \in H'$, dual de H, il existe un unique u de K vérifiant l'inéquation variationnelle:

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle_{H',\, H} \quad \forall v \in K.$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique élément de K vérifiant:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v)$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle_{H',\, H}$$

Corollaire 1.1 ***(Théorème de Lax-Milgram).***
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, a une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur H. Alors pour tout f de H', il existe un unique élément u de H tel que,

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H.$$

1.5.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 1.14 ***(de point fixe de Brouwer)***[17]
Soit $\overline{B}^N = \left\{ x \in \mathbb{R}^N,\ |x| \leq 1 \right\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$ muni de la norme euclidienne usuelle $|.|$. Alors toute application continue de $\overline{B}^N$ dans $\overline{B}^N$ admet au moins un point fixe.

Corollaire 1.2 *Soit $\rho > 0$ et $P : x \mapsto P(x)$ une application continue de $\mathbb{R}^N$ dans lui même telle que,*

$$(P(x), x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \ |x| = \rho,$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^N$, $|y| \leq \rho$ tel que $P(y) = 0$.

1.5.4 Quelques résultats de régularité

Commençons par le théorème de régularité de Schauder,

Théorème 1.15 ***(de régularité de Schauder)*** *Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{k+2,\theta}$ où*

k est un entier naturel et θ un réel, $0 < \theta < 1$. Soit $\chi \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ et $f \in C^{k,\theta}$ $(\overline{\Omega})$, alors la solution u du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad dans \ \Omega \\ u = \chi \ \ sur \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

appartient à l'espace de Hölder $C^{k+2,\theta}$ $(\overline{\Omega})$.

Passons à la régularité dans les espaces L^p, des solutions faibles d'équations elliptiques. On va citer les résultats de la régularité intérieure et celle au bord pour les solutions faibles du problème de Dirichlet.

Soit L l'opérateur différentiel elliptique linéaire d'ordre m défini dans $\overline{\Omega}$ par:

$$L(x,D) = \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où $D = (D_1, ..., D_N)$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$, $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_N)$ un multi-indice, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_N^{\alpha_N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$.

L'opérateur L est elliptique, il existe alors $\lambda \geq 1$ appelée constante d'ellipticité telle que:

$$\frac{1}{\lambda} |\nu|^m \leq |L(x,\nu)| \leq \lambda |\nu|^m, \forall (x,\nu) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.11 [1]

On dit que les coefficients de L satisfont la condition $[j : K]$ dans $\overline{\Omega}$, où j est un entier positif et $K > 0$, si :

i. $a_\alpha \in C^{|\alpha|+j-m}(\overline{\Omega})$ pour $|\alpha| > m - j$, tandis que les coefficients restants sont des fonctions mesurables bornées dans Ω.

ii. Les inégalités suivantes sont vérifiées dans Ω :

$$\left| D^\beta a_\alpha \right| \leq K \quad pour \quad |\alpha| > m - j,\ |\beta| \leq |\alpha| + j - m$$

et

$$|a_\alpha| \leq K \quad pour \quad |\alpha| \leq m - j$$

L'adjoint de L est l'opérateur défini par:

$$L^*(x,D)\,u = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha(x)}\ u \right).$$

La fonction u est une solution faible de l'équation $L^*u = f$, si

$$\int_\Omega u\overline{L\varphi}\ dx = \int_\Omega f\ \overline{\varphi}\ dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Énonçons les résultats de régularité dans le cadre de la théorie L^p. Commençons par les théorèmes de la régularité intérieure:

Théorème 1.16 [1]
Soit $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ pour un certain $q > 1$. Supposons que u est une solution faible de l'équation ci-dessus pour $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $p > 1$ avec L un opérateur elliptique d'ordre m. Supposons de plus que les coefficients de L vérifient la condition $[l : K]$ dans $\overline{\Omega}$, où l est un entier positif. Soit $j = \min\{l, m\}$. Alors $u \in W^{j,p}(\Omega)$, de plus pour tous sous-domaines Ω_0 et Ω_1 de Ω tels que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$, il existe $c > 0$ telle que

$$\|u\|_{W^{j,p}(\Omega_0)} \leq c \left(\|f\|_{L^p(\Omega_1)} + \|u\|_{L^p(\Omega_1)} \right),$$

la constante cdépend uniquement de N, m, p, λ, K, Ω_0 et Ω_1.

Théorème 1.17 [1]
Soit L un opérateur elliptique d'ordre m défini sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les coefficients de L satisfont la condition $[m : K]$ dans $\overline{\Omega}$. Soit Ω_0 tel que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, alors:

$$\exists c > 0,\ \forall u \in C_0^\infty(\Omega_0), \|u\|_{W^{m,p}(\Omega_0)} \leq c \left(\|Lu\|_{L^p(\Omega_0)} + \|u\|_{L^p(\Omega_0)} \right)$$

où $p > 1$.

Corollaire 1.3 *Si au lieu de la condition $[m : K]$, on suppose que les coeffiients des termes d'ordre m de L sont continus et les autres cofficients sont mesurables et bornés, alors la conclusion demeure vraie en remplaçant Ω_0 par Ω tout entier.*

Passons aux théorème relatifs à la régularité au bord.

On va énoncer un théorème de la régularité au bord dans L^p des solutions faibles du problème de Dirichlet.

Considérons un opérateur elliptique L d'ordre $2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, défini dans Ω:

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Notons $C_m^l\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{v \in C^l\left(\overline{\Omega}\right); D^\alpha v = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ 0 \leq |\alpha| \leq m-1\right\}$ avec $l \geq m$.

Théorème 1.18 [1]
Soit $u \in L^q(\Omega)$ pour un certain $q > 1$. Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $v \in C_m^{2m}(\overline{\Omega})$, on a l'inégalité suivante:

$$\left| \int_\Omega u\overline{Lv}\ dx \right| \leq C \parallel v \parallel_{W^{2m-j,\ p'}(\Omega)}$$

où j est un entier positif tel que $j \leq 2m$ et $p^{'} > 1$. Supposons également que les coefficients de L vérifient la condition $[j : K]$ dans $\overline{\Omega}$, et que Ω est de classe C^{2m}. Alors, $u \in W^{j,p}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ et

$$\parallel u \parallel_{W^{j,p}(\Omega)} \leq c_1(C + \parallel u \parallel_{L^p(\Omega)}),$$

où $c_1 = c_1\left(N,\ m,\ p,\ K,\ \lambda,\ \Omega\right)$.

A partir de ce théorème nous avons un résultat de régularité concernant les solutions faibles du problème suivant:

$$\begin{cases} L^* u = f & \text{dans } \Omega \\ D^\alpha u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$.

Théorème 1.19 [1]
Soit $u \in L^q\left(\Omega\right)$, $q > 1$. Supposons que u soit une solution faible du problème considéré en ce sens que

$$\int_\Omega u\overline{Lv}\ dx = \int_\Omega f\ \bar{v} dx, \quad \forall v \in C_m^{2m}(\overline{\Omega})$$

où L est l'opérateur elliptique d'ordre $2m$ et $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$. Supposons de plus que les coefficients de L vérifient la condition $[j : K]$, $1 \leq j \leq 2m$, et que Ω est de classe C^{2m}. Alors $u \in W^{j,p}(\Omega)$ et

$$\| u \|_{W^{j,p}(\Omega)} \leq c(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)})$$

où $c = c(N, m, p, K, \lambda, \Omega) > 0$.

1.5.5 Rappel d'un résultat sur les sous et sur-solutions

Nous énonçons un résultat de sous et sur-solution dû à Ambrosetti, Brézis et Cerami [3]. Considérons le problème suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta v = f(v) & \text{dans } \Omega \\ v > 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Définition 1.12 *On dit que $v_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est une sous-solution de (P) si*

$$\begin{cases} -\Delta v_1 \leq f(v_1) & \textit{dans } \Omega \\ v_1 > 0 & \textit{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De même, $v_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est une sur-solution de (P) si

$$\begin{cases} -\Delta v_2 \geq f(v_2) & \textit{dans } \Omega \\ v_2 > 0 & \textit{dans } \Omega \\ v_2 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Théorème 1.20 [3] *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \longmapsto t^{-1}f(t)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Soit v_1 une sous-solution et v_2 une sur-solution de (P). Alors, $v_2 \geq v_1$ dans Ω.*

1.6 Principe de la méthode de Galerkin

Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et L une forme linéaire continue. On suppose qu'il existe une solution unique $u \in H$ du problème:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H \tag{1.1}$$

On cherche une approximation $u_n \in H_n$ de la solution u, où H_n est un sous-espace de dimension finie de H. L'approximation u_n est solution du problème approché:

$$a(u_n, v_n) = L(v_n), \quad \forall v_n \in H_n \tag{1.2}$$

On suppose qu'il existe une solution u_n du problème approché (1.2), on compare (1.1) et (1.2) on obtient:

$$\forall v_n \in H_n \subset H, \ a(u, v_n) = L(v_n) = a(u_n, v_n)$$

ainsi on a

$$a(u - u_n, v_n) = 0 \ \ \forall v_n \in H_n.$$

L'erreur $e_n = u - u_n$ est donc $a-$orthogonale à l'espace H_n. C'est la formule qui permet d'analyser la convergence de la méthode de Galerkin.

Lemme 1.2 ***(de Céa)*** [17]
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de solutions du problème approché alors on a l'inégalité suivante:

$$\|u - u_n\| \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|$$

où $\|a\| = \sup \{|a(u, v)| ; u, v \in H, \|u\|, \|v\| \leq 1\}$ et α est le coefficient de coercivité de a, et H_n est l'espace de Galerkin.

Chapitre 2

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

2.1 Introduction:

La méthode de Galerkin est une technique numérique utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles, en particulier les problèmes elliptiques [9, 10, 17]. Elle consiste à rechercher une solution approximée dans un espace de fonctions choisi, offrant ainsi une approche efficace pour le traitement de divers problèmes.

En considérant un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on cherche une approximation dans des sous-espaces de dimension finie. On résout d'abord le problème approximé dans ces sous-espaces, ensuite on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini, on obtient alors la solution du problème de départ.

L'idée consiste donc à approcher la solution u par une solution u_n appartenant à un espace de dimension finie dont la connaissance ne nécessite que la résolution d'un système ou d'un problème (linéaire ou non) en dimension finie.

Les espaces peuvent être choisis en fonction de plusieurs critères, tels que la régularité de la solution, la structure géométrique du domaine, les conditions aux limites et les propriétés physiques du problème.

2.2 Stabilité, convergence faible et convergence forte

On s'intérèsse à l'équation

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \tag{*}$$

où A est une matrice carrée. Supposons qu'il existe $f_n \in H^{-1}(\Omega)$ et $u_n \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant cette équation. Posons-nous la question suivante:
Si $f_n \to f$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et u est la solution de (*). A-t-on $u_n \to u$?

Commençons par le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soit A une matrice bornée et coercive, soit f_n tendant vers f dans $H^{-1}(\Omega)$, alors la solution faible u_n de l'équation $-\operatorname{div}(A\nabla u_n) = f_n$ converge faiblement, à une sous-suite près, vers $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'équation $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$.*

Pour sa démonstration nous aurons besoin des résultats suivants:

Proposition 3 *(Estimation a priori)*
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'équation $-div(A\nabla u) = f$, avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors il existe $C > 0$ indépendante de f telle que

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{H^{-1}} .$$

Preuve: Prenons u comme fonction test dans la formulation faible, grace à la coercivité et la continuité de la forme linéaire on a:

$$\alpha \|u\|^2_{H_0^1} \leq \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u \, dx = \langle f, u\rangle \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u\|_{H_0^1}$$

donc

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}} .$$

D'où le résultat. ■

En conséquence de cette proposition, si la suite f_n converge, elle est bornée dans $H^{-1}(\Omega)$ et donc la suite u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et admet une sous-suite qui converge faiblement vers un élément $u \in H_0^1(\Omega)$.

En multipliant l'équation relative à u_n par v et en intégrant sur Ω on trouve:

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla v\ dx = \langle f_n, v\rangle .$$

Or

$$A\nabla u_n.\nabla v = \langle A\nabla u_n, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle \nabla v, A\nabla u_n\rangle_{\mathbb{R}^N} = \left\langle {}^tA\nabla v, \nabla u_n\right\rangle_{\mathbb{R}^N} = ({}^tA\nabla v).\nabla u_n$$

On a $v \in H_0^1(\Omega)$ et $A \in (L^\infty(\Omega))^{N\times N}$, ${}^tA\nabla v \in (L^2(\Omega))^N$, la convergence faible donne

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla v dx = \int_\Omega ({}^tA\nabla v)\nabla u_n dx \to \int_\Omega ({}^tA\nabla v)\nabla u dx = \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v dx.$$

En passant au second membre on a :

$$|\langle f_n - f, v\rangle| \leq \|f_n - f\|_{H^{-1}} \|v\|_{H_0^1}$$

et puisque f_n converge vers f dans H^{-1} alors $|\langle f_n - f, v\rangle| \to 0$, soit

$$\langle f_n, v\rangle \to \langle f, v\rangle .$$

Et à la limite, u vérifie

$$\int_\Omega (A\nabla u)\nabla v dx = \langle f, v\rangle .$$

d'où la stabilité.

Montrons la convergence forte de la suite (u_n). En soustrayant les deux formulations concernant u_n et u on trouve

$$\int_\Omega (A\nabla(u_n - u))\nabla v dx = \langle f_n - f, v\rangle$$

En posant $v = u_n - u \in H_0^1(\Omega)$ on aura:

$$\int_\Omega (A\nabla(u_n - u))\nabla(u_n - u) dx = \langle f_n - f, u_n - u\rangle .$$

De la coercivité de A et de la continuité de la forme linéaire $f_n - f$ on trouve

$$\alpha \left\| \nabla u_n - \nabla u \right\|_{L^2}^2 \leq \left| \int_\Omega (A\nabla(u_n - u))\nabla(u_n - u)dx \right| = \left| \langle f_n - f, u_n - u \rangle \right| \leq \left\| f_n - f \right\|_{H^{-1}} \left\| u_n - u \right\|_{H_0^1}$$

donc

$$\alpha \left\| u_n - u \right\|_{H_0^1}^2 \leq \left\| f_n - f \right\|_{H^{-1}} \left\| u_n - u \right\|_{H_0^1}$$

par suite

$$\left\| u_n - u \right\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \left\| f_n - f \right\|_{H^{-1}} \to 0$$

Nous concluons ainsi que (u_n) converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Résumons ceci dans le corollaire suivant:

Corollaire 2.1 *Soit A une matrice bornée et coercive. Soit (f_n) une suite qui converge fortement dans $H^{-1}(\Omega)$ vers f et $u_n \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla v dx = \langle f_n, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

alors la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et on a

$$\int_\Omega (A\nabla u)\nabla v dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ce résultat peut-être réécrit sous une forme plus compacte.

Proposition 4 *Soit A coercive et bornée, soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et telle que*

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx \to \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u dx$$

alors (u_n) converge vers u fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve: On a

$$\int_\Omega (A\nabla(u_n - u))\nabla(u_n - u)dx = \int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx - \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u_n dx - \int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u dx + \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u dx$$

On a $\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx \to \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u dx$ par hypothèse, $\int_\Omega (A\nabla u)\nabla u_n dx \to \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u dx$ car u_n converge faiblement vers u. Pour le troisième terme on a

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u dx = \int_\Omega ({}^tA\nabla u)\nabla u_n dx \to \int_\Omega ({}^tA\nabla u)\nabla u dx = \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u dx.$$

En passant à la limite les termes s'éliminent, et on obtient $\int_\Omega (A\nabla(u_n - u))\nabla(u_n - u)dx \to 0$. Par coercivité de A, on a donc

$$\alpha \|u_n - u\|^2_{H^1_0} \leq \int_\Omega (A\nabla(u_n - u))\nabla(u_n - u)dx \to 0$$

ainsi u_n converge fortement vers u dans $H^1_0(\Omega)$. C'est le résultat demandé. ■

2.3 Application de la méthode de Galerkin

Revenons au problème de départ: Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que $-div(A\nabla u) = f$ où A est une matrice coercive bornée et $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Il s'agit de manière équivalente de résoudre le problème variationnel suivant:

$$\text{trouver } u \in H^1_0(\Omega);\ \forall v \in H^1_0(\Omega),\ \int_\Omega (A\nabla u).\nabla v\ dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H^1_0}$$

Lorsque l'on applique la méthode de Galerkin pour résoudre le problème précédent plusieurs théorèmes s'impliquent pour garantir l'existence, l'unicité, la convergence et la stabilité de solution.

Théorème 2.2 *Soient A une matrice bornée et coercive, $f \in H^{-1}(\Omega)$. Soit (H_n) une suite d'espaces de dimension finie n dans $H^1_0(\Omega)$. Alors il existe une solution unique u dans $H^1_0(\Omega)$ de*

$$\int_\Omega (A\nabla u)\nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \tag{2.1}$$

et u_n solution unique dans H_n de

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla v_n dx = \langle f, v_n\rangle \quad \forall v_n \in H_n(\Omega). \tag{2.2}$$

Si $d(v, H_n) = \min\limits_{w \in H_n(\Omega)} \|v - w\| \to 0$ *pour tout* $v \in C_0^\infty(\Omega)$*, alors* (u_n) *converge fortement vers* u *dans* $H_0^1(\Omega)$*. De plus, on a l'estimation d'erreur*

$$\|u - u_n\|_{H^1} \leq Cd(u, H_n).$$

Preuve: L'existence et l'unicité de u sont assurées par le théorème de Lax-Milgram. Rappelons que H_n est de dimension finie il est alors complet pour la norme induite par $H_0^1(\Omega)$. Ainsi H_n est un espace de Hilbert et on a l'existence et l'unicité de u_n grâce au même théorème.

Autre méthode pour montrer l'unicité de u_n: Soit $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ la base orthonormale de $H_0^1(\Omega)$, où les φ_i sont, par exemple, les fonctions propres de l'opérateur $\big(-\triangle,\ H_0^1(\Omega)\big)$. En prenant $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ comme base de H_n, nous obtenons alors une suite croissante de sous-espaces H_n de $H_0^1(\Omega)$ et telle que leur réunion $\bigcup\limits_{n \geq 1} H_n$ soit dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Le problème en u_n devient:

Trouver les scalaires u^1, ... ,u^n (coordonnées de u_n dans la base de H_n) tels que

$$\sum_{k=1}^{n} u^k \int_\Omega (A\nabla\varphi_k)\nabla\varphi_j dx = \langle f, \varphi_j \rangle \tag{2.3}$$

pour tout $1 \leq j \leq n$. On a donc un système linéaire de n équations et n inconnues. Il suffit donc de montrer l'unicité pour un second membre nul

$$\sum_{k=1}^{n} u^k \int_\Omega (A\nabla\varphi_k)\nabla\varphi_j dx = 0.$$

Multiplions la $j^{ème}$ équation par u^j $(1 \leq j \leq n)$ et faisons la somme des n équations obtenues, nous avons alors:

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx = 0.$$

Par coercivité de A, on a

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx \geq \alpha \|\nabla u_n\|_{L^2}^2$$

donc $\nabla u_n = 0$ et comme u_n s'annule sur le bord on a $u_n = 0$.

Nous concluons que l'équation (2.3) admet une unique solution u_n.

Prenons $v_n = u_n$ dans (2.2) nous obtenons alors

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx = \langle f, u_n\rangle$$

et utilisons la coercivité, on a $\|u_n\|_{H_0^1} \leq C$ où $C = \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^{-1}}$. Il existe alors une sous suite (u_n) qui converge faiblement vers $\overline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit v tel que $d(v, H_n) \to 0$ pour $n \to \infty$ avec $d(v, H_n) = \min\limits_{w\in H_n} \|v - w\|_{H_0^1}$.
Il existe donc une suite $(w_n) \subset H_n$ telle que $\|v - w_n\| \to 0$, c'est-à-dire que (w_n) converge fortement vers v. On a donc pour chaque n

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla w_n dx = \langle f, w_n\rangle$$

puisque u_n converge faiblement, nous aurons en passant à la limite:

$$\int_\Omega (A\nabla \overline{u})\nabla v dx = \langle f, v\rangle$$

pour tout v tel que $d(v, H_n) \to 0$.

Supposons que $d(v, H_n) \to 0$ pour un ensemble dense dans $H_0^1(\Omega)$ alors on aura

$$\int_\Omega (A\nabla \overline{u})\nabla v dx = \langle f, v\rangle$$

pour tout $v \in H_0^1$ donc par unicité de la solution, $\overline{u} = u$ et on vient donc de montrer que (u_n) converge vers u faiblement. Ainsi $\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$ si bien qu'en utilisant les deux équations en u_n et en u, on a

$$\int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla u_n dx \to \int_\Omega (A\nabla u)\nabla u dx,$$

ainsi, grâce à la proposition vue plus haut, u_n converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous venons de montrer donc la convergence forte de u_n vers u dès que, par exemple, $d(v, H_n) \to 0$ pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$. $\blacksquare$

On peut aussi montrer une estimation d'erreur: soit $v \in H_n$, choisissons alors $v - u_n \in H_n$

comme fonction test dans les formulations en u et u_n, alors par soustraction

$$\int_\Omega (A\nabla(u-u_n)\nabla(v-u_n)dx = 0$$

ainsi

$$\int_\Omega (A\nabla(u-u_n)\nabla(u-u_n)dx = \int_\Omega (A\nabla(u-u_n)\nabla(u-v)dx + \int_\Omega (A\nabla(u-u_n)\nabla(v-u_n)dx$$

et comme le dernier terme est nul, en utilisant Cauchy-Schwarz, la coercivité et la bornitude de A,

$$\alpha \left\|u-u_n\right\|^2_{H_0^1} \leq C \left\|u-u_n\right\|_{H_0^1} \left\|u-v\right\|_{H_0^1}$$

donc

$$\left\|u-u_n\right\|_{H_0^1} \leq C' \left\|u-v\right\|_{H_0^1}.$$

Soit w_* réalisant le minimum $d(u,H_n) = \min_{w\in H_n} \|u-w\| = \|u-w_*\|$. Puisque l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout v elle l'est pour w_*:

$$\left\|u-u_n\right\|_{H_0^1} < C' \left\|u-w_*\right\|_{H_0^1} = C'd(u,H_n)$$

Si $d(u,H_n) \to 0$ on a alors

$$\left\|u-u_n\right\|_{H_0^1} \to 0$$

donc (u_n) converge vers u fortement dans $H_0^1(\Omega)$, et on a même une estimation de l'erreur entre solution exacte et approchée.

Démontrons maintenant le lemme de Céa pour le problème $\left[-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \ H_0^1(\Omega)\right]$.

On multiplie l'équation de notre problème par une fonction test v et on intègre sur le domaine Ω, cela donne la formulation variationnelle du problème:

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(A\nabla u)v dx = \int_\Omega f v dx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient:

$$\int_\Omega (A\nabla u).\nabla v dx = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On introduit un espace d'approximation $H_n \subset H_0^1(\Omega)$. La solution approchée $u_n \in H_n$ satisfait:

$$\int_\Omega (A\nabla u_n).\nabla v_n dx = \int_\Omega f v_n dx \quad \forall v_n \in H_n$$

On définit l'erreur $e_n = u - u_n$.

On utilise la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \nabla v dx$:

$$\left|\int_\Omega (A\nabla u).\nabla v dx\right| \leq M \left\|u\right\|_{H_0^1} \left\|v\right\|_{H_0^1} \;; \qquad \int_\Omega (A\nabla u).\nabla u dx \geq \alpha \left\|u\right\|_{H_0^1}^2$$

où M et α sont des constantes positives.

On a alors,

$$\alpha \|e_n\|_{H_0^1}^2 \leq a(e_n, e_n)$$

En utilisant l'orthogonalité de Galerkin (i.e relative à la forme bilinéaie $a(.,.)$), on a:

$$a(u - u_n, w_n) = 0, \; \forall w_n \in H_n$$

Ainsi, on a:

$$a(e_n, e_n) = a(u - u_n, u - v_n), \; \forall v_n \in H_n.$$

en effet, $a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - v_n) + a(u - u_n, v_n - u_n) = a(u - u_n, u - v_n)$, car $v_n - u_n \in H_n$.

On utilise la continuité de la forme $a(.,.)$, alors on a:

$$a(e_n, e_n) = a(u - u_n, u - v_n) \leq M \|u - u_n\|_{H_0^1} \|u - v_n\|_{H_0^1}$$

On combine les inégalités, on a :

$$\alpha \|u - u_n\|_{H_0^1}^2 \leq M \|u - u_n\|_{H_0^1} \|u - v_n\|_{H_0^1}.$$

D'où l'estimation:

$$\|u-u_n\|_{H_0^1} \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_n\|_{H_0^1} \qquad \forall v_n \in H_n$$

On prend l'infimum sur tous les $v_n \in H_n$, on obtient:

$$\|u-u_n\|_{H_0^1} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} \|u-v_n\|_{H_0^1}.$$

Chapitre 3

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME ELLIPTIQUE SINGULIER PAR LA MÉTHODE DE GALERKIN

3.1 Introduction

Les équations elliptiques singulières sont des équations elliptiques présentant des singularités dans leurs domaines. Ces singularités peuvent être causées par des conditions aux limites ou des termes sources qui ne sont pas suffisamment réguliers, ou même par l'opérateur différentiel de l'équation.

L'existence de solutions pour les équations elliptiques singulières contenant un terme de convection peut être établie par la méthode de Galerkin. Malgré la présence d'un terme de convection singulier, il est souvent possible de montrer l'existence et l'unicité des solutions dans des espaces de dimension infinie. L'approche est basée sur la méthode des sous et sur solutions.

Le rôle des termes de convection dans les équations aux dérivées partielles est, par exemple, de prendre en compte le transport d'une quantité par un fluide en mouvement.

La convection dans ce cas peut être classée en deux catégories principales: La convection forcée et la convection naturelle. La convection forcée se produit lorsque le mouvement du fluide est entrainé par une force extérieure, telle qu'une pompe ou un ventilateur. La convection naturelle, quant à elle, se produit lorsque le mouvement du fluide est entrainé par des forces dues aux changements de densités causés par des variations de température.g

Les équations elliptiques singulières sont importantes en physique mathématique, en mécanique des fluides, en mécanique des solides, les catalyseurs chimiques hétérogènes, les fluides non newtoniens, la formation de modèles biologiques, et dans d'autres domaines de la physique.

3.2 Présentation du problème et cadre fonctionnel

Ce chapitre concerne l'étude du problème suivant:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \lambda g(x, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, λ est un paramètre réel positif, la fonction f est sous-linéaire et singulière, et g est une fonction continue.

Avant d'énumérer les différentes hypothèses sur f et g, signalons quelques points relatifs au problème (P).

Si le terme de convection est nul i.e. $g = 0$, plusieurs auteurs ont étudié ce problème. On cite les travaux $[5-8]$. Les auteurs ont utilisé les techniques de sous et sur-solutions, les théorèmes de point fixe, la théorie de bifurcation et la méthode de Galerkin.

Et en présence du terme de convection i.e. $g \neq 0$,on peut citer les articles $[12, 13, 16, 18]$ où les techniques de sous et sur-solutions et les théorèmes de point fixe ont été également utilisés. A noter que dans l'article [11] et toujours en présence du terme de convection, les auteurs se sont basés sur une méthode variationnelle pour prouver les résultats d'existence.

Terminons ces remarques par signaler la diffétence entre les différents articles cités plus haut et le présent travail.

Dans les articles cités, les auteurs supposent la fonction f monotone et g homogène, par contre pour le problème (P) la fonction f est non monotone et g est non homogène.

Passons aux hypothèses de f et g. Nous supposons que les fonctions f et g sont telles que:

(H1) Les fonctions $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sont continues et localement höldériennes .

(H2) Il existe des constantes $b > 0$, $0 < r_i < 1$ $(i = 1, 2, 3)$ avec $r_1 < r_2$ et des fonctions continues positives $a_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ telles que

$$b\,|\mu|^{r_1} \leq f(x,\mu) \leq a_1(x) + a_2(x)\,|\mu|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|\mu|^{r_3}}, \qquad \forall (x,\mu) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe une constante $0 < r_4 < 1$, et des fonctions continues positives a_4 et a_5 telles que

$$0 \leq g(x,\eta) \leq a_5(x) + a_4(x)\,|\eta|^{r_4}\,, \qquad \forall (x,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Donnons un exemple de problème entrant dans le cadre de ces hypothèses:

$$-\Delta u = |x|^2 + |u|^{\frac{1}{3}} + |u|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-|x|\right) + \frac{1}{|u|^{\frac{1}{2}}} + \lambda\,|\nabla u|^{\frac{1}{4}} \qquad x \in \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Finalement nous entendons par solution de (P) toute fonction positive $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ satisfaisant l'équation au sens classique dans Ω.

Remarquons que la fonction f peut présenter une singularité en $\mu = 0$. Ainsi pour détourner cette singularité, nous approchons (P) par une famille de problèmes elliptiques non singuliers (P_ε), où ε est réel positif destiné à tendre vers 0. De façon précise, nous considérons le problème

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} -\Delta u = f(x, |u| + \varepsilon) + \lambda g(x, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ainsi si (P_ε) admet une solution u_ε, en faisant tendre ε vers 0; nous obtenons une solution pour (P).

3.3 Etude des problèmes (P) et (P_ε)

Commençons par énoncer le théorème concernant le résultat d'existence de solutions pour le problème (P).

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3) le problème (P) admet une solution pour tout $\lambda \geq 0$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous présentons un résultat de régularité relatif à la solution de (P_ε).

Lemme 3.1 *Si, sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), le problème (P_ε) admet une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Preuve: *Posons $h(x) = f(x, |u| + \varepsilon) + \lambda g(x, \nabla u)$. Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$, de (H2) et (H3) nous concluons que $h \in L^{\frac{2}{r}}(\Omega)$, où $r = \max\{r_2, \ r_4\}$. Ainsi, par le Théorème 1.19 du premier chapitre, appliqué au problème*

$$(A) \begin{cases} -\Delta u(x) = h(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

toute solution u de (A), appartient à $W^{2,s_1}(\Omega)$, où $s_1 = \frac{2}{r}$ et donc $(u, \nabla u) \in (L^{s_1}(\Omega))^{N+1}$ et $h \in L^{\frac{s_1}{r}}(\Omega)$. En utilisant à nouveau [1], on obtient $u \in W^{2,s_2}(\Omega)$ avec $s_2 = \frac{2}{r^2}$. Puisque $r \in (0,1)$, en répétant cet argument k fois, de telle sorte que $s_k = \frac{2}{r^k} > \frac{N}{2}$, il s'ensuit de l'injection de Sobolev que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, pour un certain α, $0 < \alpha < 1$. Ainsi, par le théorème de régularité de Schauder et (H1), on conclut que $u \in C^2(\Omega)$. Le lemme est démontré. ■

Passons au résultat d'existence de solutions pour le problème (P_ε).

Théorème 3.2 *Supposons que $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$ sont satisfaites. Alors le problème (P_ε) admet une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Preuve: La démonstration repose sur la méthode de Galerkin. Soit alors $B = \{e_m\}_{m \geq 1}$ une base orthonormée de l'espace $H_0^1(\Omega)$. Considérons pour tout $m \geq 1$ le sous-espace V_m de

$H_0^1(\Omega)$ engendré par les m premiers éléments de la base B, i.e. $V_m = \text{span}\{e_i; 1 \leq i \leq m\}$. Nous avons $\dim V_m = m$, il existe alors un isomorphisme entre V_m et l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$:

$$T : V_m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i e_i\right) = (c_1, \ ..., \ c_m) := c$$

où les c_i $1 \leq 1 \leq m$ sont les coordonnées de $v \in V_m$. En munissant V_m de la norme induite par la norme $\|.\|$ de $H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$\|v\| = |c| = |T(v)|$$

où $|.|$ est la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^m$. Ainsi V_m et $\mathbb{R}^m$ sont isométriques et nous pouvons identifier tout élément $v \in V_m$ à son vecteur de coordonnées $(c_1, \ ..., \ c_m) = c \in \mathbb{R}^m$,

$$V_m \ni v = \sum_{i=1}^{m} c_i e_i \leftrightarrow (c_1, \ ..., \ c_m) = c \in \mathbb{R}^m.$$

Considérons maintenant la fonction $F = (F_1, ..., F_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$F_i(c) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_i dx - \int_\Omega \left[f(x, |v| + \varepsilon) + \lambda g(x, \nabla v)\right] e_i dx, \qquad 1 \leq i \leq m$$

Montrons que les hypothèses du corollaire 1.2 sont satisfaites pour F, i.e. il existe des réels ρ, $r > 0$ tels que

$$(F(c), \ c) \geq r, \ \ \forall c \in \mathbb{R}^m, \ \ |c| = \rho.$$

Nous avons $(F(c), \ c) = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i(c) c_i$ et

$$F_i(c) c_i = \int_\Omega \nabla v \nabla c_i e_i - \int_\Omega \left[f(x, |v| + \varepsilon) c_i e_i + \lambda g(x, \nabla v) c_i e_i\right] dx$$

d'où

$$(F(c), \ c) = \int_\Omega \nabla v \nabla \sum_{i=1}^{m} c_i e_i - \int_\Omega \left[f(x, |v| + \varepsilon) \sum_{i=1}^{m} c_i e_i + \lambda g(x, \nabla v) \sum_{i=1}^{m} c_i e_i\right] dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega [f(x, |v| + \varepsilon)v + \lambda g(x, \nabla v)v] \, dx, \qquad \text{car } v = \sum_{i=1}^{m} c_i e_i.$$

Les fonctions f et g sont positives d'où

$$(F(c), \ c) \geq \|v\|^2 - \int_\Omega f(x, |v| + \varepsilon) |v| \, dx - \lambda \int_\Omega g(x, \nabla v) |v| \, dx$$

Dans la suite, et pour simplifier, nous noterons la norme de l'espace $L^p(\Omega)$ par $|.|_p$.

Nous avons d'après $(H2)$

$$\begin{aligned} f(x, |v| + \varepsilon) &\leq a_1(x) + a_2(x) (|v| + \varepsilon)^{r_2} + \frac{a_3(x)}{(|v| + \varepsilon)^{r_3}} \\ &\leq a_1(x) + a_2(x)\varepsilon^{r_2} + a_3(x)\varepsilon^{-r_3} + a_2(x) |v|^{r_2}, \quad \text{car } 0 < r_2 < 1. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x, |v| + \varepsilon) |v| \, dx &\leq \int_\Omega \left(a_1(x) + a_2(x)\varepsilon^{r_2} + a_3(x)\varepsilon^{-r_3}\right) |v| \, dx + \int_\Omega a_2(x) |v|^{r_2+1} \, dx \\ &\leq \left(|a_1|_2 + \varepsilon^{r_2} |a_2|_2 + \varepsilon^{-r_3} |a_3|_2\right) |v|_2 + |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} |v|_2^{r_2+1}, \end{aligned}$$

le premier terme du dernier membre découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le second terme est obtenu par application de l'inégalité de Hölder avec les exposants $p = \frac{2}{r_2+1} > 1$ et $p' = \frac{2}{1-r_2}$, et en remaquant que a_2 est continue sur le compact $\overline{\Omega}$ alors

$$\int_\Omega a_2(x) |v|^{r_2+1} \, dx \leq |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} \cdot \left| |v|^{r_2+1} \right|_{\frac{2}{r_2+1}} = |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} \left(\int_\Omega \left(|v|^{r_2+1}\right)^{\frac{2}{r_2+1}} dx \right)^{\frac{r_2+1}{2}} = |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} |v|_2^{r_2+1}.$$

D'autre part, par $(H3)$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega g(x, \nabla v) |v| \, dx &\leq |a_5|_2 |v|_2 + \int_\Omega (a_4(x) |\nabla v|^{r_4}) |v| \, dx \\ &\leq |a_5|_2 |v|_2 + |a_4 |\nabla v|^{r_4}|_2 |v|_2 \end{aligned}$$

et comme par l'inégalité de Hölder nous avons

$$|a_4 |\nabla v|^{r_4}|_2^2 = \int_\Omega a_4^2 |\nabla v|^{2r_4} \, dx \leq \left|a_4^2\right|_{\frac{1}{1-r_4}} \left| |\nabla v|^{2r_4} \right|_{\frac{1}{r_4}} = \left|a_4^2\right|_{\frac{1}{1-r_4}} |\nabla v|_2^{2r_4}$$

nous déduisons que

$$\int_\Omega g(x, \nabla v) |v| \, dx \leq |a_5|_2 \, |v|_2 + \left|a_4^2\right|_{\frac{1}{1-r_4}}^{\frac{1}{2}} |\nabla v|_2^{r_4}$$

Enfin en faisant appel à l'inégalité de Poincaré nous obtenons,

$$(F(c), \ c) \geq \|v\|^2 - \left(|a_1|_2 + \varepsilon^{r_2} |a_2|_2 + \varepsilon^{-r_3} |a_3|_2 + |a_5|_2\right) C_P \|v\| - |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} C_P^{r_2+1} \|v\|^{r_2+1} - \left|a_4^2\right|_{\frac{1}{1-r_4}}^{\frac{1}{2}} C_p^{r_4} \|v\|^{r_4}$$

où $C_P > 0$ est une constante ne dépendant que de Ω.

Or, sachant que $\|v\| = |c|$ $(c \in \mathbb{R}^m)$, nous écrivons

$$(F(c), \ c) \geq |c|^2 - \left(|a_1|_2 + \varepsilon^{r_2} |a_2|_2 + \varepsilon^{-r_3} |a_3|_2 + |a_5|_2\right) C_P |c| - |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} C_P^{r_2+1} |c|^{r_2+1} - \left|a_4^2\right|_{\frac{1}{1-r_4}}^{\frac{1}{2}} C_p^{r_4} |c|^{r_4}$$

Remarquons que le second membre est une expression polynômiale de degré 2 en $|c|$, elle tend vers $+\infty$ quand $|c| \to +\infty$. Par conséquent,

$$\exists \rho, r > 0; \ \ (F(c), \ c) \geq r > 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^m \ \text{ tel que } \ |c| = \rho.$$

Puisque F est continue, d'après le corollaire 1.2, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$\exists C_m = (c_1, \dots, \ c_m) \in \mathbb{R}^m, \quad |C_m| \leq \rho \ \text{ et } \ F(C_m) = 0.$$

Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $v_m = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m \in V_m \subset H_0^1(\Omega)$. Alors $\|v_m\| = |C_m| \leq \rho$ et donc $F(v_m) = 0$.

Par conséquent $F_i(v_m) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, d'où par combinaison linéaire

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla w dx = \int_\Omega \left[f(x, |v_m| + \varepsilon) w + \lambda g(x, \nabla v_m) w\right] dx \qquad \forall w \in V_m$$

La suite (v_m) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, elle contient donc une sous-suite encore notée (v_m) telle que

$$v_m \rightharpoonup v \in H_0^1(\Omega) \text{ et } v_m \longrightarrow v \ \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En fait, on démontrera plus tard que (v_m) converge fortement vers v dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $m \geq k$, alors pour tout $w \in V_k$ nous avons

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla w dx = \int_\Omega [f(x, |v_m| + \varepsilon)w + \lambda g(x, \nabla v_m)w]\, dx \tag{3.1}$$

car $V_k \subset V_m$. En faisant tendre m vers l'infini, nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega (f(x, |v| + \varepsilon)w + \lambda g(x, \nabla v)w) dx \tag{3.2}$$

Soit maintenant ϕ un élément quelconque $H_0^1(\Omega)$, alors ϕ s'écrira dans la base B, $\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$, où $(\lambda_i) \subset \mathbb{R}$ et par troncation aux k premiers éléments de B nous obtenons la suite

$$\phi_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in V_k$$

qui converge fortement vers ϕ dans $H_0^1(\Omega)$. Prenons $w = \phi_k$ dans (3.2) et faisons tendre $k \to \infty$, nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx = \int_\Omega (f(x, |v| + \varepsilon)\phi + \lambda g(x, \nabla v)\phi) dx, \tag{3.3}$$

celle-ci est vraie pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Nous déduisons que v est solution faible de (P_ε). Et d'après le Lemme 3.1, v est une solution classique de (P_ε).

Montrons à présent que la suite (v_m) converge fortement vers v. De la convergence faible nous avons pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla w \; dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla w \; dx. \tag{3.4}$$

En plus de $(H1), (H2)$ et le théorème de la convergence dominée on a

$$\int_\Omega f(x, |v_m| + \varepsilon)w \; dx \to \int_\Omega f(x, |v| + \varepsilon)w \; dx, \tag{3.5}$$

$$\int_\Omega f(x, |v_m| + \varepsilon)(v_m - v) \; dx \to 0, \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega f(x, |v| + \varepsilon)(v_m - v) \; dx \to 0. \tag{3.7}$$

Traitons le terme concernant la fonction g.

Posons pour simplifier $G_m(x) := g(x, \nabla v_m(x))$, $m \in \mathbb{N}^*$. D'après (H3), on a

$$|G_m|_2 \leq |a_5|_2 + (\int_\Omega a_4^2(x)|\nabla v_m|^{2r_4}dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilisons l'inégalité de Hölder pour le deuxième terme du membre de droite. Sachant que $|\nabla v_m|^{2r_4} \in L^{\frac{1}{r_4}}(\Omega)$

$$\int_\Omega a_4^2(x)|\nabla v_m|^{2r_4}dx \leq \left|a_4^2\right|_{\frac{1}{1-r_4}} \left||\nabla v_m|^{2r_4}\right|_{\frac{1}{r_4}} = |a_4|^2_{\frac{2}{1-r_4}} |\nabla v_m|_2^{2r_4}$$

Ce qui donne

$$|G_m|_2 \leq |a_5|_2 + |a_4|^2_{\frac{2}{1-r_4}} \|v_m\|^{2r_4} \leq M\left(1+\rho^{2r_4}\right)$$

où $M \geq \max\left(|a_5|_2,\ \ |a_4|^2_{\frac{2}{1-r_4}}\right)$. Donc il existe une fonction $G \in L^2(\Omega)$ telle que

$$G_m \rightharpoonup G \ \text{ i.e. } \int_\Omega G_m(x)\,\phi\ dx \to \int_\Omega G(x)\,\phi\ dx \qquad \forall \phi \in L^2(\Omega) \tag{3.8}$$

et par suite (3.1) donne

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f(x, |v| + \varepsilon) v dx - \lambda \int_\Omega G(x) v dx = 0.$$

D'autre part,

$$\|v_m - v\|^2 = \|v_m\|^2 + 2\langle v, v - v_m\rangle - \|v\|^2 = \|v_m\|^2 - \|v\|^2 + o_m(1),$$

$$\int_\Omega f(x, |v_m| + \varepsilon) v dx = \int_\Omega f(x, |v| + \varepsilon) v dx + o_m(1), \tag{3.9}$$

$$\int_\Omega G(x) v_m dx = \int_\Omega G(x) v dx + o_m(1). \tag{3.10}$$

Il en résulte que

$$\|v_m - v\|^2 = \int_\Omega (f(x, |v_m| + \varepsilon) v_m dx + \lambda \int_\Omega G_m(x) v_m dx - \int_\Omega (f(x, |v| + \varepsilon) v dx - \lambda \int_\Omega G(x) v dx + o_m(1)$$

$$= \int_\Omega (f(x, |v_m| + \varepsilon) v_m dx - \int_\Omega (f(x, |v_m| + \varepsilon) v dx + \lambda \int_\Omega G_m(x) v_m dx - \lambda \int_\Omega G(x) v_m dx + o_m(1)$$

$$= \int_\Omega (f(x,|v_m|+\varepsilon) - f(x,|v|+\varepsilon))v_m dx + \lambda \int_\Omega (G_m(x) - G(x))v_m dx + o_m(1),$$

maitenant on ajoute et on retranche les termes qu'il faut pour faire apparaître la difféence $v_m - v$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|v_m - v\|^2 &= \int_\Omega (f(x,|v_m|+\varepsilon) - f(x,|v|+\varepsilon))(v_m - v)dx + \lambda \int_\Omega (G_m(x) - G(x))(v_m - v)dx \\ &\quad + \int_\Omega (f(x,|v_m|+\varepsilon) - f(x,|v|+\varepsilon))v dx + \lambda \int_\Omega (G_m(x) - G(x))v dx + o_m(1) \end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 à cause de (3.9) et (3.10) . En utilisant la convergence faible $v_m \rightharpoonup v$ dans $H_0^1(\Omega)$, (3.6), (3.7) et (3.8) nous avons la convergence vers 0 des deux pemiers termes, et par suite

$$\|v_m - v\| \to 0$$

Ceci implique que $v_m \to v$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. La démonstration du théorème 3.2 est alors achevée. ■

Démontrons à présent le résultat d'existence de solutions pour le problème (P) énoncé par le Théorème 3.1

Preuve: (du théorème 3.1) Nous venons de voir que le problème (P_ε) admet, pour tout $\varepsilon > 0$, une solution dans $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Prenons $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et notons la solution correspondante par u_n, donc

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f(x, u_n + \frac{1}{n}) + \lambda g(x, \nabla u_n) & \text{dans } \Omega \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

et par suite pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx = \int_\Omega f(x, u_n + \frac{1}{n})\phi dx + \lambda \int_\Omega g(x, \nabla u_n)\phi dx$$

En prenant $\phi = u_n$ et en utilisant $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$ nous obtenons par les inégalités de Hölder et de Poincaré

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &\leq (\int_\Omega a_1^{\frac{1}{2}} dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega u_n^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega a_2^{\frac{2}{1-r_2}} dx)^{\frac{1-r_2}{2}} (\int_\Omega u_n^2 dx)^{\frac{r_2+1}{2}} \\
&+ (\int_\Omega a_2^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega u_n^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega a_3^{\frac{2}{1+r_3}} dx)^{\frac{1+r_3}{2}} (\int_\Omega u_n^2 dx)^{\frac{1-r_3}{2}} \\
&+ \lambda \int_\Omega a_5^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega u_n^2 dx)^{\frac{1}{2}} + \lambda (\int_\Omega a_4^2 |\nabla u_n|^{2r_4} dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega u_n^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 |a_1|_2 \|u_n\| + C_2 |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} \|u_n\|^{r_2+1} + C_3 a_3 |a_2|_2 \|u_n\| \\
&+ C_4 |a_3|_{\frac{2}{1+r_3}} \|u_n\|^{1-r_3} + \lambda C_6 |a_5|_2 \|u_n\| + \lambda C_5 |a_4|_{\frac{2}{1-r_4}} \|u_n\|^{r_4+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &\leq C_2 |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} \|u_n\|^{r_2+1} + \lambda C_5 |a_4|_{\frac{2}{1-r_4}} \|u_n\|^{r_4+1} + \\
&(C_1 |a_1|_2 + C_3 a_3 |a_2|_2) \|u_n\| + C_4 |a_3|_{\frac{2}{1+r_3}} \|u_n\|^{1-r_3}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Comme $0 < 1 - r_3 < r_2 + 1, r_4 + 1 < 2$, nous déduisons qu'il existe $M > 0$ tel que $\|u_n\| \leq M$. D'où, à une sous-suite près, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad u_n(x) \to u(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Le but maintenant est de montrer u est une solution faible du problème (P). Par (H2), nous avons $f(x, \mu) \geq b |\mu|^{r_1}$ ainsi u_n est une sur-solution du problème

$$\begin{cases}
-\Delta v = b v^{r_1}, & \text{dans } \Omega \\
v > 0 & \text{dans } \Omega \\
v = 0 & \text{sur } \partial\Omega.
\end{cases}$$

Par la méthode variationnelle, on montre que ce problème admet une solution $w \in H_0^1(\Omega)$. Ensuite en combinant la régularité dans les espaces $L^p(\Omega)$ et celle de Schauder ainsi que la technique de Bootstrap [1], on montre que $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Enfin par le principe du maximum nous déduisons que $w > 0$ dans Ω. Nous avons, puisque u_n est une sur-solution

$$u_n(x) \geq w(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Rappelons à ce niveau un résultat dû à Ambrosetti, Brézis et Cerami [3] selon lequel

$$w(x) \geq C\phi_1(x) \quad \forall x \in \Omega$$

où ϕ_1 est une fonction propre associée à la première valeur propre de l'opérateur $\left(-\Delta,\ H_0^1(\Omega)\right)$ et C est une constante positive. Donc

$$u_n(x) \geq C\phi_1(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3.13}$$

et à la limite

$$u(x) \geq C\phi_1(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } \Omega$$

La suite de la démonstration repose sur la proposition suivante. ■

Proposition 5 *La suite* (u_n) *est telle que*

$$\int_\Omega f(x, u_n + \frac{1}{n})v dx \to \int_\Omega f(x,u)v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.14}$$

$$\int_\Omega f(x, u_n + \frac{1}{n})(u_n - u)dx \to 0, \tag{3.15}$$

$$\int_\Omega f(x,u)(u_n - u)dx \to 0. \tag{3.16}$$

Preuve: De l'hpothèse (H2), de l'inégalité (3.13) et de la contitnuité des fonctions a_i sur le compact $\overline{\Omega}$ nous avons:

$$|f(x, u_n + \frac{1}{n})v| \leq c_1|v| + c_2|v|\,|u_n|^{r_2} + c_3\frac{|v|}{\phi_1^{r_3}}, \tag{3.17}$$

$$|f(x, u_n + \frac{1}{n})(u_n - u)| \leq c_1|u_n - u| + c_2|u_n - u||u_n|^{r_2} + c_3\frac{|u_n - u|}{\phi_1^{r_3}}, \tag{3.18}$$

$$|f(x,u)(u_n - u)| \leq c_1|u_n - u| + c_2|u_n - u||u|^{r_2} + c_3\frac{|u_n - u|}{\phi_1^{r_3}}. \tag{3.19}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives. D'après l'inégalité de Hardy-Sobolev, nous avons, puisque $0 < r_3 < 1$,

$$\exists C > 0, \int_\Omega \frac{|v(x)|}{\phi_1^{r_3}(x)} dx \leq C \|v\|, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui implique que

$$\frac{|v|}{\phi_1^{r_3}} \in L^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.20}$$

On a aussi

$$\frac{|u_n - u|}{\phi_1^{r_3}} \to 0 \quad \text{dans } L^1(\Omega)$$

En effet, en prenant $v = u_n - u$,

$$\int_\Omega \frac{|u_n(x) - u(x)|}{\phi_1^{r_3}(x)} dx \leq C \|u_n - u\| \leq C(\|u_n\| + \|u\|) \leq C(M + \|u\|) = K$$

Ce qui signifie que la suite $\left(|u_n - u|\phi_1^{-r_3}\right)$ est uniformément bornée dans $L^1(\Omega)$, et comme

$$\frac{|u_n - u|}{\phi_1^{r_3}} \longrightarrow 0 \ \text{ p.p. dans } \Omega$$

nous concluons que

$$\frac{|u_n - u|}{\phi_1^{r_3}} \to 0 \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection compacte de Sobolev, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n - u||u|^{r_2} dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u||u_n|^{r_2} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n - u| dx = 0, \tag{3.21}$$

car $H_0^1(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ de façon compacte, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n - u| dx = 0$.

Pour le terme en $|u_n|^{r_2}$ on a

$$\int_\Omega |u_n - u||u_n|^{r_2} dx \leq \left(\int_\Omega |u_n - u|^{\frac{2}{2-r_2}} dx\right)^{\frac{2-r_2}{2}} \left(\int_\Omega |u_n|^2 dx\right)^{\frac{r_2}{2}} = |u_n - u|_{\frac{2}{2-r_2}} |u_n|_2^{r_2}$$

et puisque $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^{\frac{2}{2-r_2}}(\Omega)$ et (u_n) est bornée dans $L^2(\Omega)$ il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u||u_n|^{r_2} dx = 0.$$

De la même façon nous avons le résultat pour le terme en $|u|^{r_2}$. De ces trois limites et de (3.18) et (3.19) découlent (3.15) et (3.16).

Montrons (3.14). La fonction f étant continue nous avons donc pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$f(x, u_n + \frac{1}{n})v(x) \longrightarrow f(x, u)v(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et de (H2) et de (3.13) nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned} \left| f(x, u_n + \frac{1}{n})v \right| &\leq \left| \left(a_1(x) + a_2(x)(1 + u_n)^{r_2} + \frac{a_3(x)}{\phi_1^{r_3}} \right) v \right| \\ &\leq \left(|a_1|_\infty + |a_2|_\infty + |a_2|_\infty u_n^{r_2} + \frac{|a_3|_\infty}{\phi_1^{r_3}} \right) |v| \end{aligned} \tag{3.22}$$

sachant que $u_n^{r_2} \in L^{\frac{2}{r_2}}(\Omega)$ et $v \in L^{\frac{2}{2-r_2}}(\Omega)$ car $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2}{2-r_2}}(\Omega)$ avec injection compacte du fait que $1 < \frac{2}{2-r_2} < 2^*$, 2^* étant l'exposant critique de Sobolev, nous déduisons par l'inégalité de Hölder que

$$\int_\Omega |u_n^{r_2} v|\, dx \leq |u_n^{r_2}|_{\frac{2}{r_2}} |v|_{\frac{2}{2-r_2}} = |u_n|_2^{r_2} |v|_{\frac{2}{2-r_2}} \leq C\, |v|_{\frac{2}{2-r_2}}$$

car (u_n) est bornée dans $L^2(\Omega)$. De cette dernière inégalité et de (3.20) nous concluons que le troisième membre de (3.22) appartient à $L^1(\Omega)$ et par le théorème de la convegence dominée nous obtenons

$$\int_\Omega f(x, u_n + \frac{1}{n})v(x)\, dx \longrightarrow \int_\Omega f(x, u)v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est le point (3.14). la Propopsition 5 est donc démontrée.

Maintenant en reprenant les mêmes calculs faits dans la démonstration de la convergence forte de la suite (v_m) dans $H_0^1(\Omega)$ à la fin de la démonstration du Théorème 3.2, en plus de la Proposition 5 nous obtenons la convergence forte de (u_n) vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et par suite nous aurons

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, u)\phi + \lambda g(x, \nabla v)\phi dx \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ainsi u est une solution faible pour le problème (P). Sachant que $u \geq C\phi_1 > 0$ dans Ω, le terme $a_3 u^{-r_3}$ est localement borné dans Ω, donc $f(x, u)$ est régulier et par suite le second membre de l'équation de (P) est localement höldérien dans Ω. Par le théorème de Schauder nous déduisons que $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ où $0 < \alpha < 1$, et donc $u \in C^2(\Omega)$. Finalement $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ceci termine la démonstration du Théorème 3.1. $\blacksquare$

Remarque 6 *Le paramètre $\lambda \geq 0$ n'a pas influencé sur l'existence des solutions pour le problème (P), à cause de la présence d'un terme sous-linéaire (et singulier). On dit que le problème est non résonant.*

3.4 Etude d'un problème résonant

Traitons à présent un cas de résonance lié au problème (P). Supposons que les hypothèses supplémentaires suivantes soient satisfaites:

(H4) Les conditions de (H2) sont satisfaites avec $r_2 < \min\left\{\frac{4}{N-2}, 1\right\}$ pour $N \geq 3$ et $\frac{a_3}{\phi_1^{r_3}} \in L^p(\Omega)$ pour un certain $p > \frac{N}{2}$, où ϕ_1 est définie précédemment.

(H5) Il existe une fonction G continue et localement höldérienne définie sur $[0, +\infty)$ telle que $g(x, \eta) = G(|\eta|)$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}^N$ avec $G(0) = 0$ et $G(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(H6) Il existe $M^* > 0$ et $0 < \beta < \frac{2}{N}$ tels que

$$\sup_{t \in (0,M)} \frac{G(t)}{t^\beta} = \frac{G(M)}{M^\beta}, \quad \forall M \geq M^*.$$

Nous avons le théorème suivant montrant l'effet de la présence du paramètre λ sur l'existence des solutions.

Théorème 3.3 *Supposons que $(H1)$, $(H4)$, $(H5)$ et $(H6)$ soient vérifiées, alors il existe $\lambda^* > 0$ telle que (P) admet une solution pour tout $\lambda \in [0, \lambda^*]$.*

Preuve: Nous allons nous mettre dans les conditions de l'application du Théorème 3.1. Puisque d'après (H5) la fonction g (égale à G) croît en $|\eta|$, définissons la troncation suivante: Pour tout $M > M^*$ posons

$$g_M(t) = \begin{cases} G(t) & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ \frac{G(M)}{M^\beta} t^\beta & \text{si } t \geq M. \end{cases}$$

Remarquons que l'on a par (H6), pour tous $t > 0$ et $M \geq M^*$,

$$\frac{g_M(t)}{t^\beta} \leq \frac{G(M)}{M^\beta} \quad \text{i.e.} \quad \frac{M^\beta}{G(M)} g_M(t) \leq t^\beta.$$

Considérons maintenant le problème suivant

$$(P_M) \begin{cases} -\Delta u = f(x, |u|) + \lambda g_M(|\nabla u|) & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La fonction g_M verifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3) donc d'après le Théorème 3.1, pour tous $\lambda > 0$ et $M > M^*$, le problème (P_M) admet une solution positive $u_{\lambda,M} \in H_0^1(\Omega)$.

Si l'on parvient à démontrer que $|\nabla u_{\lambda,M}| \leq M$, alors par définition de g_M, $u_{\lambda,M}$ serait une solution du problème (P).

Remarquons d'abord que si on prend $u_{\lambda,M}$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de (P_M) nous obtenons, en prenant $\lambda \leq \lambda^* = \frac{M^\beta}{G(M)}$, par (H4), (H5), (H6) et les inégalités de Hölder et Poincaré

$$\begin{aligned} \|u_{\lambda,M}\|^2 &= \int_\Omega f(x, u_{\lambda,M}) u_{\lambda,M}\, dx + \lambda \int_\Omega g_M(|\nabla u_{\lambda,M}|) u_{\lambda,M}\, dx \\ &\leq \int_\Omega \left(a_1 + a_2 u_{\lambda,M}^{r_2} + a_3 u_{\lambda,M}^{-r_3}\right) u_{\lambda,M} dx + \int_\Omega |\nabla u_{\lambda,M}|^\beta u_{\lambda,M} dx \\ &\leq |a_1|_2 |u_{\lambda,M}|_2 + |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}} |u_{\lambda,M}|_2^{1+r_2} + |a_3|_{\frac{2}{1+r_3}} |u_{\lambda,M}|_2^{1-r_3} + C_P |\nabla u_{\lambda,M}|_2^{1+\beta} \\ \|u_{\lambda,M}\|^2 &\leq \hat{C} \left(\|u_{\lambda,M}\|^{1+r_2} + \|u_{\lambda,M}\|^{1+\beta} + \|u_{\lambda,M}\| + \|u_{\lambda,M}\|^{1-r_3}\right) \end{aligned}$$

où $\hat{C}$ est constante positive dépendant de a_i, r_i $(i = 1, 2, 3)$, β, mes(Ω) et de la constante de Poincaré. Nous déduisons de cette dernière inégalité que:

$$\exists C > 0, \|u_{\lambda,M}\| \leq C, \forall M > M^*, \forall \lambda \leq \lambda^*.$$

■

Nous auons besoin de montrer l'assertion suivante.

Proposition 7 *Il existe $K > 0$ telle que $\|u_{\lambda,M}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq K$ pour tous $M \geq M^*$ et $\lambda \leq \lambda^*$.*

Preuve: Posons

$$F_{\lambda,M}(x) = f(x, u_{\lambda,M}(x)) + \lambda g_M(|\nabla u_{\lambda,M}(x)|)$$

Nous avons d'après (H4), (H6)

$$|F_{\lambda,M}(x)| \leq a_1(x) + a_2(x)|u_{\lambda,M}(x)|^{r_2} + c_7 \frac{a_3(x)}{\phi_1^{r_3}(x)} + |\nabla u_{\lambda,M}(x)|^{\beta} \qquad \forall \lambda \leq \lambda^*.$$

Montrons que $F_{\lambda,M} \in L^q(\Omega)$ pour un certain $q > \frac{N}{2}$. Les fonctions a_i sont bornées sur $\overline{\Omega}$, $|u_{\lambda,M}|^{r_2} \in L^{\frac{2}{r_2}}(\Omega)$ car $u_{\lambda,M} \in L^2(\Omega)$. $|\nabla u_{\lambda,M}|^{\beta} \in L^{\frac{2}{\beta}}(\Omega)$ et $\frac{a_3}{\phi_1^{r_3}} \in L^p(\Omega)$ pour un $p > \frac{N}{2}$. Donc $F_{\lambda,M} \in L^q(\Omega)$ où $q = \min\left\{\frac{2}{r_2}, \frac{2}{\beta}, p\right\}$. Si $N = 3$ on a bien $q > \frac{N}{2}$. Si $N \geq 4$ on utilise un argument de Bootstrap en partant du fait que $u \in L^{2^*}(\Omega)$ car $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, et on applique cet argument jusqu'à obtenir $F_{\lambda,M} \in L^q(\Omega)$ pour certain $q \gtrapprox \frac{N}{2}$. Nous avons finalement

$$|F_{\lambda,M}|_q \leq C_1, \quad \forall \lambda \leq \lambda^*, \ M \geq M^*. \tag{3.23}$$

Puisque $u_{\lambda,M}$ est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = F_{\lambda,M}(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par le Théorème 1.19 du premier chapitre, $u_{\lambda,M} \in W^{2,q}(\Omega)$ et il existe $C_3 > 0$, indépendante de $u_{\lambda,M}$, telle que

$$\|u_{\lambda,M}\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_3 |F_{\lambda,M}|_q$$

En utilisant l'injection continue $W^{2,q}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$, nous obtenons

$$\|u_{\lambda,M}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C_4 |F_{\lambda,M}|_q. \tag{3.24}$$

D'après (3.23) et (3.24), il existe $K = C_1 C_4 > 0$ telle que

$$\|u_{\lambda,M}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq K \quad \forall \lambda \leq \lambda^*, \ \ \forall M \geq M^*.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 7. ■

Terminons la preuve du Théorème 3.3

Preuve: (Suite) En prenant $M \geq \max\{K,\ M^*\}$ et $\lambda \leq \lambda^*$, nous obtenons

$$|\nabla u_{\lambda,M}(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega$$

donc

$$g_M\left(|\nabla u_{\lambda,M}(x)|\right) = G\left(|\nabla u_{\lambda,M}(x)|\right) = g\left(x, \nabla u_{\lambda,M}(x)\right) \quad \forall x \in \Omega$$

et par conséquent $u_{\lambda,M}$ est une solution du problème (P). Ce qu'il fallait démontrer. ■

Conclusion

Le travail de ce mémoire aborde de manière théorique une problématique liée aux équations elliptiques singulières avec un terme de convection. La méthode utilisée pour l'étude du problème est basée sur l'approche de Galerkin. Les principales constatations sont les suivantes:

L'étude présente des résultats théoriques significatifs sur l'existence et la régularité des solutions pour ce type d'équations singulières. Elle démontre l'importance des non-linéarités et des termes de convection dans les équations elliptiques singulières, soulignant l'application de techniques mathématiques avancées pour résoudre ce type de problèmes.

La méthode de Galerkin est une méthode générale d'approximation numérique qui peut être appliquée à divers problèmes mathématiques, en particulier ceux modélisés par des équations aux dérivées partielles.

Elle peut être utilisée pour résoudre des équations différentielles ordinaires, en projetant la solution sur un sous-espace de dimension finie. Cela revient à résoudre un système d'équations différentielles ordinaires approché.

Plus généralement, elle s'applique à la résolution des problèmes variationnels dans des espaces de Hilbert. Le problème consiste à trouver une fonction u dans un espace V vérifiant une équation variationnelle du type $a(u, v) = L(v)$ pour tout v dans V, où a et L sont respectivement des formes bilinéaire et linéaire continues.

Notons qu'il est essentiel de choisir judicieusement les espaces d'approximation pour obtenir des solutions précises.

L'étude de l'existence de solutions aux équations elliptiques singulières avec des termes de convection par la méthode de Galerkin met en lumière la capacité de cette approche à traiter des phénomènes physiques variés et des conditions aux limites complexes. En s'appuyant sur des formulations variationnelles et des approximations spatiales, elle permet de résoudre de manière efficace ces problèmes mathématiques exigeants, et offre une contribution significative à la compréhension des problèmes physiques complexes et aux méthodes de résolution numérique.

Les plus importants résultats obtenus avec cette méthode dans la résolution de problèmes mathématiques et de physique sont les résolution de problèmes aux limites, adaptabilité à divers domaines, approximation numérique, et stabilité qui garantit la convergence des solutions obtenues vers la solution exacte du problème initial, assurant ainsi la fiabilité des résultats dans des contextes variés. Cette propriété est essentielle pour l'application de la méthode à des problèmes réels.

Bibliographie

[1] S. Agmon; The L^P Approach to the Dirichlet problem, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 405-448.

[2] C. O. Alves, P. C. Carrião, L. F. O. Faria; Existence of solutions to singular elliptic equations with convection terms via the Galerkin method, Electronic Journal of Differential Equations, 12 (2010), 1-12.

[3] A. Ambrosetti, H. Brézis, G. Cerami; Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, Journal of functional analysis, 122 (1994), 519-543.

[4] H. Brézis; Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson (1987).

[5] M. M. Coclite, G. Palmieri; On a singular nonlinear Dirichlet problem, Comm. Partial Diff.Equat. 14(1989) 1315-1327.

[6] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, L. Tartar; On a Dirichlet problem with singular nonlinearity, Comm. Partial Diff. Equat. 2 (1977) 193-222.

[7] J. Davila, M. Montenegro; Positive versus free boundary solutions to a singular elliptic equation. J.Anal. Math. 90 (2003), 303-335.

[8] J. I. Diaz, J. M. Morel, L. Oswald; An elliptic equation with singularity nonlinearity, Comm. Partial Diff. Equat. 12 (1987) 1333-1344.

[9] H. Le Dret; Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer (2013).

[10] A. Ern, J. L. Guermond; Theory and practice of finite elements, AMS 159, Springer (2004).

[11] D. G. De Figueiredo, M. Girardi, M. Matzeu, Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain pass techniques, Diff. and Integral Equat., 17(2004) 119-126.

[12] E. Giarruso, G. Porru; Problems for elliptic singular equations with a gradient term, Nonlinear Analysis 65(2006) 107-128.

[13] M. Ghergu, V. Radulescu; On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005) 635-646.

[14] D. Gilbarg, N. S. Trundinger; Elliptic partial differential Equations of second order, Springer (1998).

[15] O. Kavian; Inégalité de Hardy-Sobolev et applications, thèse de doctorat de 3^e cycle, Université de Paris IV (1978).

[16] A.V. Lair, A. W. Wood; Large solutions of semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms, Int. J. Math. Sci., 22 (1999), 869-883.

[17] J. L. Lions; Quelques Méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires; Dunod (1969).

[18] Z. Zhang; Nonexistence of positive classical solutions of a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term, Nonlinear Analysis 8 (1996) 957-961.

ملخص /

تهدف هذه المذكرة إلى تطبيق طريقة غاليركين على مسألتين إهليلجيتين. تتمثل المسألة الأولى في الصيغة التباعدية وتشكل نموذجاً أساسياً لتطبيق منهجية غاليركين. أما المسألة الثانية فهي مسألة تفردية تحتوي على حد حمل حراري . تكمن متانة الطريقة المستخدمة (طريقة غاليركين) في قدرتها على تخطي التفردات الموجودة في الطرف الأيمن. يقوم مبدأ هذه الطريقة على إسقاط المسألة على فضاءات جزئية ذات أبعاد محدودة، وحلها في هذه الفضاءات الجزئية، ثم جعل البعد يؤول إلى مالانهاية. تترافق هذه الطريقة مع الصياغة الضعيفة ونظريات انتظامية الحلول وهذا لضمان وجود حل تقليدي للمسألة المطروحة.

Abstract: This thesis focuses on the application of the Galerkin method to two elliptic problems. The first problem is presented in divergence form and serves as a model problem for applying the Galerkin approach. The second problem is a singular problem containing a convection term. The robustness of the employed method, namely the Galerkin method, lies in its ability to circumvent singularities present in the right-hand side. The principle of this method relies on projecting the problem onto finite-dimensional subspaces, solving it within these subspaces, and then letting the dimension tend to infinity. The method is accompanied by weak formulation and various regularity theorems that ensure the existence of a classical solution for the given problem.

Résumé: Le présent mémoire a pour objet l'application de la méthode de Galerkin à deux problèmes elliptiques. Le premier se présente sous la forme divergentielle. Il s'agit d'un problème modèle pour l'application de l'approche de Galerkin.

Quant au deuxième, c'est un problème singulier contenant un terme de convection. La robustesse de la méthode utilisée, à savoir celle de Galerkin réside dans sa capacité à contourner les singularités présentes dans le second membre. Le principe de cette méthode repose sur la projection du problème sur des sous espaces de dimensions finies et le résoudre dans ces sous espaces ensuite faire tendre la dimension vers l'infini. La méthode est accompagnée par la formulation faible et les différents théorèmes de régularité assurant l'existence de solution classique pour le problème donné.