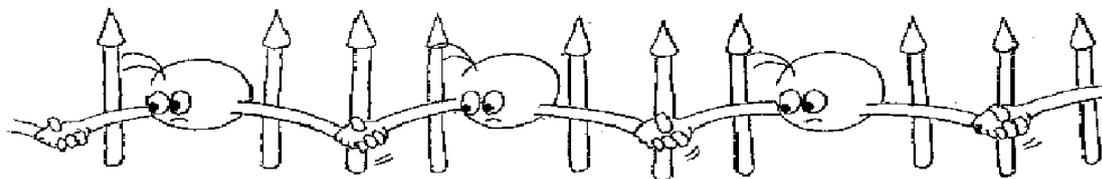


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Université de Tlemcen

Département de physique



MEMOIRE DE MAGISTER DE L'UNIVERSITE TLEMCEN

Spécialité : Physique Théorique

Présenté par

KOTBI LAKHDAR

Pour obtenir le grade de MAGISTER

ETUDE DE L'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE

Devant le jury composé de Messieurs :

| | | |
|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| LIANI Bachir | Président | Professeur Université Tlemcen |
| BENTALHA Zine El Abidine | Directeur de mémoire | MCA Université Tlemcen |
| BOUHAFS Benamar | Examineur | MCA Université Tlemcen |
| BENOSMANE Abdelhakim | Examineur | MCA Université Tlemcen |
| BEKHCHI Smaine | Examineur | MCA Université Tlemcen |

Année Universitaire: 2010/2011

Remerciements

J'exprime ici ma gratitude envers mon directeur de thèse, Monsieur BENTALHA pour m'avoir introduit et guidé dans ce champ de recherche qui m'était tout à fait inconnu.

Que Monsieur le Professeur B.LIANI qui me fait l'honneur de présider le jury d'examen, trouve ici l'expression de ma très vive gratitude.

Mes sincères remerciements vont à Messieurs les membres du jury, qui ont bien voulu m'honorer par leur acceptation d'examiner ce travail malgré leurs nombreuses occupations.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé de près où de loin à la collaboration de ce modeste travail.

SOMMAIRE

| | |
|--|----|
| Introduction | 4 |
| Chapitre 1 : L'Effet Hall Classique | 6 |
| 1.1- Electron dans un champ magnétique. | 7 |
| 1.2- Electron dans un champ magnétique et électrique. | 9 |
| 1.3- Tenseur de conductivité. | 10 |
| 1.4- Modèle de Drude. | 12 |
| 1.5- Mesures de conductivité. | 13 |
| Chapitre 2 : L'Effet Hall Quantique Entier | 14 |
| 2.1- Mise en évidence expérimentale | 15 |
| 2.2- Mouvement quantique de l'électron | 18 |
| 2.2.1- Hamiltonien quantique et Invariance de jauge | 20 |
| 2.2.2- La jauge de Landau | 20 |
| 2.2.3- La jauge symétrique | 21 |
| 2.2.4- La dégénérescence | 24 |
| 2.2.5- Le Facteur de remplissage | 26 |
| 2.3- La théorie de localisation bidimensionnelle | 27 |
| Chapitre 3 : L'Effet Hall Quantique Fractionnaire | 29 |
| 3.1- Mise en évidence expérimentale | 30 |
| 3.2- Le Problème Du Niveau De Landau le Plus bas | 32 |
| 3.2.1- Rôle des interactions | 32 |
| 3.2.2- Limite de champ magnétique fort | 33 |
| 3.2.3- Restrictions sur l'Hamiltonien | 34 |
| 3.2.4- Particularités de l'Hamiltonien | 36 |
| 3.3- Le concept de Quasi-particules | 36 |
| 3.4- Le mystère de l'EHQF | 37 |
| 3.5- La théorie de Laughlin | 38 |
| 3.6- La théorie des Fermions Composites | 40 |
| 3.6.1- Principe de base | 41 |
| 3.6.2- Lien entre l'EHQI et l'EHQF | 42 |
| 3.7- La Théorie des fermions composites de Chern–Simons | 49 |
| 3.7.1- La Théorie de Lopez-Fradkin | 49 |
| Chapitre 4 : Mécanique quantique d'un système des particules chargées dans un plan à 2 dimensions en présence d'un champ magnétique | 55 |
| 4.1- Résolution de l'équation de Schrödinger d'une particule chargée en coordonnée polaire. | 56 |
| 4.2- Résolution de l'équation de Schrödinger de deux particules chargées en coordonnée polaire. | 58 |
| Conclusion | 64 |
| Bibliographie | 65 |

Résumé :

Ce mémoire est consacré à l'étude de la quantification de la résistance de Hall dans l'Effet Hall Quantique Entier et l'Effet Hall Quantique Fractionnaire. Dans une tentative de bien comprendre cette quantification, une étude bibliographique détaillée a été considérée à savoir: la théorie de localisation bidimensionnelle, la théorie de Laughlin, la théorie des fermions composites et la théorie des fermions composites de Chern-Simons.

Dans ce mémoire, on a d'une part essayé de comprendre la mécanique quantique d'une particule chargée bidimensionnelle. Pour cela, l'équation de Schrödinger pour une et deux particules chargées dans un plan à deux dimensions en présence d'un champ magnétique a été résolu. Cette étude a révélé des propriétés fondamentales spécifiques pour les particules à deux dimensions différentes de ceux à trois dimensions. D'autre part, une tentative de faire apparaître une approche faisant appel à la paire d'électrons pour expliquer l'EHQF a été aussi considérée.

Mots-clés : L'Effet Hall Classique, l'Effet Hall Quantique Entier, l'Effet Hall Quantique Fractionnaire, la théorie de Laughlin, la théorie des fermions composites, la théorie des fermions composites de Chern-Simons.

Abstract:

This memory is devoted to the study of the quantification of the resistance of Hall in the Integer Quantum Hall Effect and Fractionary Quantum Hall effect. In an attempt to include understand this quantification well, a detailed bibliographical study was considered to know: the theory of two-dimensional localization, the theory of Laughlin, the theory of the composite fermions, and the theory of the composite fermions of Chern-Simons.

In this memory, one of a share tried to include understand the quantum mechanics of a particle charged two-dimensional. for this, the equation of Schrödinger for one and two particles charged in a plan with two dimension in the presence of a magnetic field was solved. This study with revealed fundamental properties specific for the particle to two dimensions different from those with three dimensions, in addition, an attempt to appear an approach calling upon the pair of electrons to explain the FQHE at summer also considered.

Keywords : Classical Hall effect , the Integer Quantum Hall effect, Fractionary Quantum Hall effect, the theory of Laughlin, the theory of the composite fermions, the theory of the composite fermions of Chern – Simons.

ملخص: هذه المذكرة مخصصة لدراسة تكميم مقاومة هول في مفعول هول الكمي بالقيم العددية الصحيحة و مفعول هول الكمي بقيم العددية الكسرية. في محاولة لفهم هذا التكميم، اعتمدنا على دراسة ببيلوغرافية وهي : نظرية التمرکز ذو بعدین، نظرية لوفلين، نظرية الفرميونات المركبة، نظرية الفرميونات المركبة لسارن سيمو.

في هذه المذكرة، بداية حاولنا إن نفهم ميكانيكا الكم لحركة إلكترون مشحون ذو بعدین. فقمنا بحل معادلة شرودي نغار لحركة إلكترون و إلكترونين في مستو ذو بعدین تحت تأثير حقل مغناطيسي ، هذه الدراسة مكنتنا من اكتشاف خصائص أساسية مختلفة تماما عما هي عليه في ثلاث أبعاد. في الأخير قمنا بوضع مقارنة مستنبطة من أزواج الإلكترونات لشرح مفعول هول الكمي بقيم العددية الكسرية.

الكلمات المفتاحية: مفعول هول الكلاسيكي ، مفعول هول الكمي بالقيم العددية الصحيحة، مفعول هول الكمي بالقيم العددية الكسرية، نظرية لوفلين، نظرية الفرميونات المركبة، نظرية الفرميونات المركبة لسارن سيمو.

Introduction

L'effet Hall quantique constitue certainement une des découvertes les plus remarquables de la fin du XX^e siècle en Physique. Sa caractéristique la plus spectaculaire est la mesure du rapport de constantes universelles h/e^2 avec une précision de 10^{-9} , ce qui a des conséquences immédiates en métrologie, en particulier dans la définition de l'étalon de résistance. L'effet Hall quantique consiste en fait en deux effets physiques différents.

- L'un en 1985 où Von Klitzing et al, ont découvert que la conductivité de Hall mesurée dans un gaz bidimensionnel d'électrons (2-DEG) soumis à un fort champ magnétique est quantifiée en multiples de e^2/h . C'est l'effet Hall entier aux caractéristiques particulièrement remarquables. En effet, la résistance de Hall ne dépend que des constantes fondamentales e et h et non pas des caractéristiques du système dans lequel il se manifeste (constante diélectrique, taille de l'échantillon), ce qui a ouvert la voie à des expériences de métrologie extrêmement précises. De plus, le courant qui traverse une barre de Hall est très peu dissipatif. Ces effets étonnants s'expliquent très bien par l'existence de gaps d'énergie entre les niveaux de Landau du spectre à un corps du système.

- L'autre, l'effet Hall fractionnaire découvert par Tsui et Stormer, avec sa conductivité quantifiée en fractions de e^2/h est rapidement apparu comme un problème à N corps ¹ beaucoup plus complexe à interpréter et par conséquent plus fructueux pour la théorie. L'existence d'un gap est également essentielle mais il n'est pas de même nature que dans l'effet Hall entier. Dans ce cas, le gap doit apparaître comme une conséquence de l'interaction de Coulomb entre électrons dégénérés en énergie. Au cours des tentatives de résolution de cette problématique complexe, Laughlin a produit une théorie très novatrice en écrivant une fonction d'onde à N corps pour le fondamental du système de fermions fortement corrélés. Cette théorie explique les propriétés essentielles de l'effet Hall fractionnaire. Elle fait apparaître l'existence de quasi-particules de charges fractionnaires et des gaps d'énergie associés.

¹ Le système est dit à N corps ou en interaction forte lorsque l'énergie des interactions n'est pas négligeable devant l'énergie cinétique, c'est le cas dans l'effet hall fractionnaire comme nous le verrons au chapitre 3.

A la suite de ces travaux fondateurs, de nouveaux concepts ou des idées jusque-là abstraites ont trouvé un champ d'application accessible aux expériences. On peut ainsi citer la possibilité de modifier la statistique des particules en leur attachant des tubes de flux fictifs qui a conduit à l'existence des fermions composites i.e. de particules de statistique intermédiaire entre fermions et bosons. Cette spécificité de la dimension $D = 2$ est à la base de la théorie de champ moyen de Chern-Simons. A partir des fermions composites, les états hiérarchiques de l'effet Hall fractionnaire apparaissent comme des états de l'effet Hall entier de ces fermions composites.

Ce mémoire comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous essayons de comprendre la physique de l'Effet Hall Classique à commencer par la dynamique d'électrons bidimensionnels dans un champ magnétique. Le mouvement cyclotron est présenté en premier lieu.

Dans le deuxième chapitre, nous passons alors à l'Effet Hall Quantique Entier où nous présentons les niveaux de Landau et montrons que leur pertinence comprend l'effet Hall entier. Le troisième chapitre concerne l'Effet Hall Quantique Fractionnaire, à commencer par la théorie de Laughlin, à la théorie de Jain des fermions composites et à la théorie du champ proposée par Fradkin et Lopez.

Dans la dernière partie, on s'est intéressé à la mécanique quantique des électrons bidimensionnels dans un champ magnétique en utilisant le système des coordonnées polaires (particules dans un champ magnétique uniforme), des résultats ont été obtenus concernant la définition du moment cinétique orbital d'une particule bidimensionnelle et sa projection ainsi que la statistique liée à ce type de particules. Une forme de généralisation au problème à N_e électrons a été aussi proposée.

Chapitre 1
L'Effet Hall Classique

Chapitre **1** L'effet Hall classique

Avant d'aborder l'effet Hall quantique, il est utile de rappeler les ingrédients physiques de l'effet Hall "classique", découvert un siècle auparavant par Edwin Hall (1879). Pendant sa thèse de doctorat, E. Hall essayait de répondre à une question soulevée par Maxwell, de savoir si la résistance était affectée par le champ magnétique, le courant devant "frotter" sur les côtés. Il montre expérimentalement que sous champ magnétique, un courant induit une tension dans la direction perpendiculaire et que ce courant est proportionnel au champ magnétique appliqué. Cette découverte remarquable, bien avant la découverte de l'électron par J.J. Thompson en 1897, permet de déterminer la densité des porteurs de charges, et E . Hall constate aussi que le signe de ces porteurs dépend du matériau. Ce signe "anormal" de l'effet Hall ne sera compris que 50 ans plus tard par la théorie des bandes et la notion de trou.

L'effet Hall n'est pas qu'une curiosité de laboratoire. Il a aussi des applications extrêmement importantes puisqu'il permet de détecter simplement un champ magnétique ou ses variations par une mesure de tension.

En particulier, l'industrie automobile utilise des capteurs à effet Hall pour mesurer la vitesse de rotation des moteurs, des boîtes de vitesses, des cardans, etc. (2 milliards de sondes de Hall sont fabriquées par an!).

1.1 Electron dans un champ magnétique.

Rappelons d'abord en quoi consiste l'effet Hall "classique". Considérons un gaz bidimensionnel d'électrons situé dans le plan xy . Un champ magnétique est appliqué suivant l'axe z . Les coordonnées suivant l'axe z de la position \mathbf{r} de l'électron et de sa vitesse \mathbf{V} sont nulles. Les coordonnées du champ magnétique sont $\mathbf{B} = (0,0,B)$. On note, à partir d'ici, m_b la masse effective de l'électron et $q_e = -e$ sa charge, avec $e > 0$. L'électron est soumis à la force de Lorentz et son équation du mouvement est donc :

$$m_b \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = q_e \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

Cette équation découle du Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_b V^2 + q_e V A \quad (1.2)$$

avec A le potentiel-vecteur correspondant au champ magnétique B . En effet, les équations d'Euler-Lagrange pour la composante x conduisent à

$$m_b \ddot{x} = q_e v_y B \quad (1.3)$$

En procédant de même pour la composante y , on retrouve bien (1.2). On déduit de ce Lagrangien le moment canonique p et l'Hamiltonien H :

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = m_b V + q_e A \quad (1.4)$$

Et

$$H = \frac{1}{2m_b} (p - q_e A)^2 \quad (1.5)$$

A partir de (1.1), il est relativement facile de déterminer les solutions des équations du mouvement. En formant, par exemple, la quantité $z = x + iy$ (à ne pas confondre avec la coordonnée z qui ne joue ici aucun rôle), le système d'équations (1.1) se réécrit

$$\ddot{z} = -\frac{iq_e B}{m} \dot{z} \quad (1.6)$$

La solution analytique des équations du mouvement s'obtient par intégration directe :

$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{i\omega_c t} \quad (1.7)$$

$$z = -\frac{i}{\omega_c} \dot{z}_0 (e^{i\omega_c t} - 1) + z_0$$

avec \dot{z}_0 la vitesse initiale, z_0 la position initiale et la pulsation cyclotron² $\omega_c = |q_e| B / m_b$.

Le mouvement classique suit des orbites cyclotrons, dont la trajectoire est un cercle de centre $R = (X, Y, 0)$ et de rayon $r_0 = m \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} / |q_e| B$. Ces deux paramètres sont déterminés par les conditions initiales. On peut ainsi exprimer la position et la vitesse de l'électron comme :

$$\begin{aligned} r &= R + r_0 (\cos(\omega_c t), \sin(\omega_c t), 0) \\ V &= r_0 \omega_c (-\sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t), 0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

² Dans notre traitement $q_e < 0$, la valeur absolue et le signe sont justifiés.

Dans les coordonnées $(\xi, \eta, 0)$ relatives au centre de l'orbite cyclotron, la solution devient :

$$r = (X + \xi, Y + \eta, 0) \quad (1.9)$$

$$V = w_c(-\eta, \xi, 0)$$

On peut également déterminer les coordonnées du moment canonique, en choisissant l'expression du potentiel-vecteur dans la jauge symétrique $A = (\frac{-B_y}{2}, \frac{B_x}{2}, 0)$:

$$p = \frac{1}{2}q_e B(-Y + \eta, X - \xi, 0) \quad (1.10)$$

L'énergie cinétique est donnée ³ par $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m_b w_c^2 r_0^2$. On peut enfin utiliser les coordonnées polaires pour déterminer la composante suivant la direction z du moment angulaire L :

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r \times p \Big|_z = \frac{1}{2}q_e B(R^2 - r_0^2) \quad (1.11)$$

Nous avons ainsi complètement déterminé la dynamique d'un électron classique bidimensionnel dans un champ magnétique perpendiculaire au 2-DEG.

1.2 Electron dans un champ magnétique et électrique.

Nous rajoutons un champ électrique constant et uniforme E dans la direction x , ce qui peut correspondre, comme nous le verrons plus bas, à un potentiel de confinement linéaire dû aux bords de l'échantillon suivant la direction y . Les coordonnées du champ électrique sont donc $E = (E, 0, 0)$. L'électron est maintenant soumis à la force de Lorentz suivante :

$$m_b \frac{d^2}{dt^2} r = q_e (E + V \times B) \quad (1.12)$$

Le traitement similaire à celui que l'on vient de réaliser conduit à l'expression suivante de la vitesse :

$$V = (-r_0 w_c \sin(w_c t), r_0 w_c \cos(w_c t) + v_0, 0) \quad (1.13)$$

Avec $v_0 = -E/B$ que l'on appelle la vitesse de dérive. On constate que le mouvement résulte de la superposition du mouvement cyclotron décrit précédemment et d'un mouvement de dérive à la vitesse constante $V = E \times B/B^2$ perpendiculaire à la fois au champ magnétique et

³ En utilisant $\xi^2 + \eta^2 = r_0^2$.

au champ électrique. Cette dérive a lieu le long des bords de l'échantillon. En effet, en l'absence d'impuretés, le potentiel électrostatique que subit l'électron est uniforme au centre de l'échantillon et s'incurve très fortement pour produire les parois de confinement qui constituent les bords. Cette variation spatiale du potentiel $U(x,y)$ est liée à un champ électrique $E = -\nabla(U)$ perpendiculaire au bord rectiligne concerné. Dans notre traitement, ce champ électrique dû au bord est dirigé suivant la direction x , produisant un mouvement de dérive suivant la direction y i.e. le long du bord. On peut observer les orbites cyclotrons et les états de bord classiques respectivement au centre et sur le bord de la barre de Hall de longueur L et de largeur W à la Fig. (1.1).

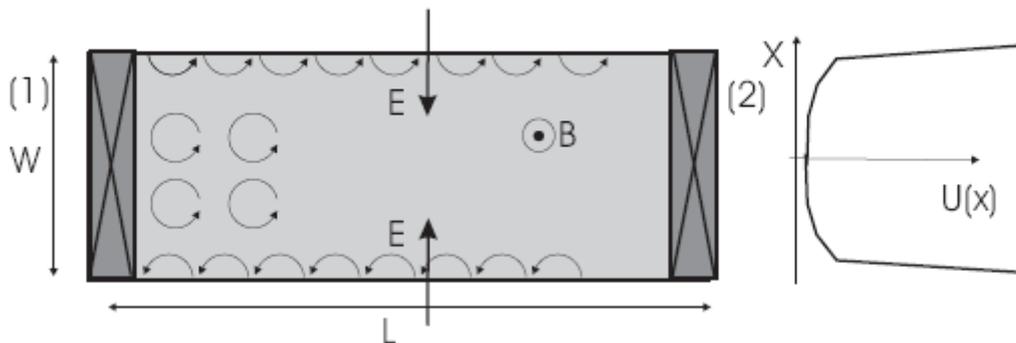


Fig. 1.1 – Description classique de la barre de Hall : (1) la barre de Hall de longueur L et de largeur W . On observe les orbites cyclotrons des électrons au centre de l'échantillon. Ces électrons ne se propagent pas. Les bords sont définis par un potentiel électrostatique $U(x)$ auquel est associé le champ E qui conduit les électrons à dériver perpendiculairement à E et à B . Les électrons au bord de l'échantillon se propagent. (2) profil de potentiel $U(x)$ des bords de l'échantillon.

1.3 Tenseur de conductivité.

Le champ électrique précédent provient donc du potentiel de confinement auquel est soumis le gaz bidimensionnel aux bords de l'échantillon et il est imposé par l'électrostatique du système. En revanche, un champ électrique supplémentaire ajustable est systématiquement présent dans les expériences de transport. Considérons donc un champ électrique extérieur appliqué suivant la direction y . On peut écrire la relation entre ce champ électrique et le courant, en introduisant la densité de courant i et le tenseur de conductivité σ :

$$i = \sigma \cdot E \quad (1.14)$$

Les relations entre composantes s'écrivent :

$$i_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y \quad (1.15)$$

$$i_y = \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y$$

Compte tenu de l'isotropie du système, nous obtenons les simplifications $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. La première quantité est la conductivité longitudinale, la deuxième est la conductivité de Hall. Les relations (1.15) entre la densité de courant et le champ électrique peuvent également s'exprimer via le tenseur de résistivité, i.e. l'inverse du tenseur de conductivité :

$$E_x = \rho_{xx} i_x + \rho_{xy} i_y \quad (1.16)$$

$$E_y = \rho_{yx} i_x + \rho_{yy} i_y$$

avec la résistivité longitudinale

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (1.17)$$

et la résistivité de Hall

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (1.18)$$

On peut calculer analytiquement le tenseur de conductivité d'un tel système en l'absence de diffusion par des impuretés. La densité de courant est donnée par :

$$i = n_e q_e V = \left(0, -\frac{n_e q_e E}{B}, 0 \right) \quad (1.19)$$

A partir de (1.14) on déduit les composantes

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad (1.20)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{n_e q_e}{B}.$$

La résistance de Hall s'en déduit immédiatement en prenant l'inverse de la matrice de conductivité $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0, \rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{B}{n_e q_e}$. La résistivité longitudinale est donc

nulle, et la résistivité de Hall varie linéairement avec le champ magnétique appliqué et l'inverse de la densité.

1.4 Modèle de Drude.

Dans un échantillon réel, le 2-DEG contient des impuretés et les porteurs sont soumis à des processus de diffusion élastiques et inélastiques. A champ magnétique de faible intensité, et en régime stationnaire, le taux auquel les électrons reçoivent un moment cinétique via le champ extérieur, est exactement égal au taux auquel ils perdent du moment cinétique par diffusion par les impuretés.

$$\left[\frac{dp}{dt}\right]_{diffusion} = \left[\frac{dp}{dt}\right]_{champ} \quad (1.21)$$

En faisant intervenir le temps de relaxation dû aux impuretés τ , les équations du mouvement des électrons en régime permanent deviennent

$$\frac{m_b V}{\tau} = q_e [E + V \times B] \quad (1.22)$$

Ce système d'équations et l'expression $i = n_e q_e V$ conduisent à l'expression de E_x en fonction de i_x et i_y .

$$E_x = \frac{m_b}{n_e \tau q_e^2} i_x + \frac{B}{n_e q_e} i_y \quad (1.23)$$

Le tenseur de résistivité est alors

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m_b}{n_e \tau q_e^2} \quad (1.24)$$

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{n_e q_e}$$

Ces deux dernières équations fournissent les résistivités de Drude. Ce modèle simple mais plus réaliste que le précédent prédit donc que la résistivité longitudinale est constante alors que la résistivité de Hall croit linéairement avec le champ magnétique.

1.5 Mesures de conductivité.

Ces quantités jouent un rôle fondamental dans la découverte et l'étude de l'effet Hall quantique. Elles sont mesurées par le dispositif représenté à la Fig. (1.2). Le courant I traverse un échantillon rectangulaire et on mesure les différences de potentiel appliquées $V_L = V_{AB}$ et $V_H = V_{AC}$ par les électrodes⁴. Notons que dans cette situation le champ électrique extérieur est appliqué suivant les direction x et y , contrairement au traitement précédent. Si on suppose que le courant est uniforme dans la direction x , $i_y = I/W$ et $i_x = 0$, où W est la largeur de l'échantillon. Les composantes du champ électrique sont données par $E_y = V_{AB}/L$ et $E_x = V_{AC}/W$. L est la distance entre les électrodes A et B . A partir de là, il est clair que $\rho_{yy} = \frac{V_{AB}W}{IL}$ et $\rho_{xy} = \frac{V_{AC}}{I} = R_H$. Remarquons que la résistivité de Hall est identique à la résistance de Hall $\frac{V_{AC}}{I}$ et qu'elle est indépendante des dimensions de l'échantillon. On peut maintenant mesurer le tenseur de conductivité d'un tel système en l'absence de diffusion par des impuretés. Dans la pratique, ces relations sont également utilisées pour caractériser la densité de porteur n_e de l'échantillon considéré en mesurant la résistance de Hall à champ magnétique donné.

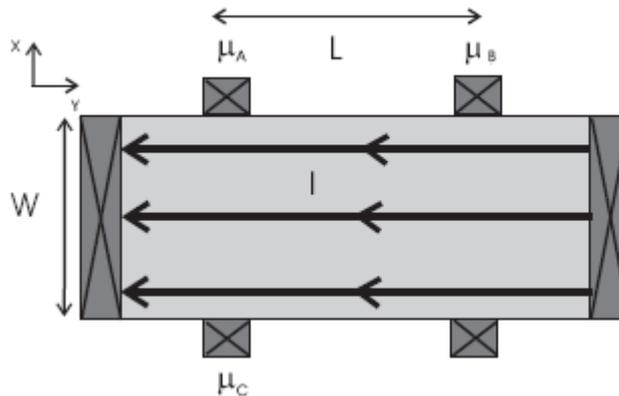


Fig. 1.2 – Barre de Hall et électrodes pour mesurer le tenseur de résistivité.

⁴ $q_e V_{AB} = \mu_B - \mu_A$ et $q_e V_{AC} = \mu_C - \mu_A$

Chapitre 2
L'Effet Hall Quantique Entier

2.1 Mise en évidence expérimentale

D'après la théorie de Drude qui semble réaliste au niveau classique, les résistivités longitudinale et de Hall sont données respectivement par : $\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m}{n_e \tau q_e^2}$, $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{n_e q_e}$ dans un champ magnétique faible. La résistivité de Hall décroît donc de manière inversement proportionnelle à la densité électronique, et elle ne dépend pas du temps de relaxation τ lié aux impuretés. Expérimentalement, à champ magnétique faible, la résistivité diagonale est effectivement approximativement constante et la résistivité de Hall augmente linéairement avec le champ. Le comportement réel en régime de champ magnétique fort est toutefois bien différent. Nous voyons à la Fig. (2.1), les résultats de l'expérience de Wakabayashi et al. en 1978 [4].

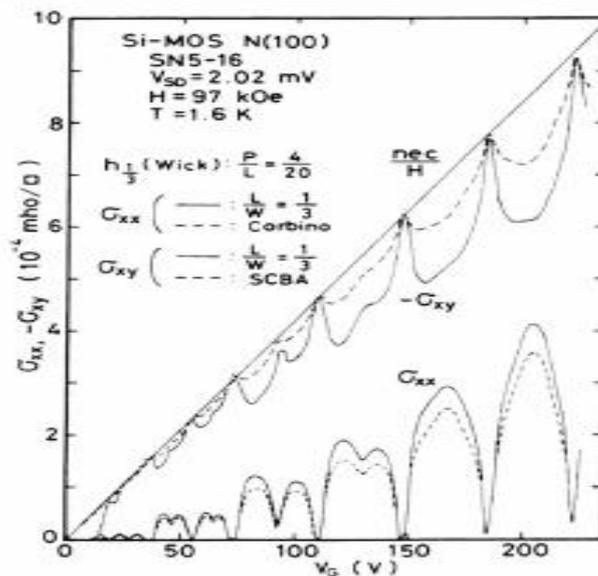


Fig. 2.1 – Conductivités longitudinale et de Hall en fonction de la tension de grille, donc de la densité électronique. Il apparaît des régions où la conductivité longitudinale σ_{xx} est très fortement réduite, simultanément la conductivité de Hall σ_{xy} s'approche de $n_e q_e / B$.

Wakabayashi et al ont mesuré les conductivités σ_{xx} et σ_{xy} dans un échantillon de Si-MOS. Ces résultats montrent qu'il existe des régions où la conductivité diagonale devient très faible; alors que simultanément, la conductivité de Hall se rapproche de l'inverse de ρ_{xy} dans la théorie de Drude.

Par ailleurs, Von Klitzing et al ont réalisé des mesures très précises du tenseur de résistivité dans un échantillon de Si-MOS en 1980 [5]. Ils ont obtenu les résultats des figures (2.2) et (2.3).

Ici, le champ magnétique est maintenu constant alors que la densité électronique varie par application d'un potentiel électrostatique via une grille posée sur l'échantillon.

Ils mettent en évidence deux caractéristiques majeures. D'une part, la résistivité longitudinale oscille fortement avec des minima quasi-nuls (cf. Fig. 2.2), alors que des plateaux apparaissent dans la résistivité de Hall qui reste alors constante quand la densité varie (cf. Fig. 2.3).

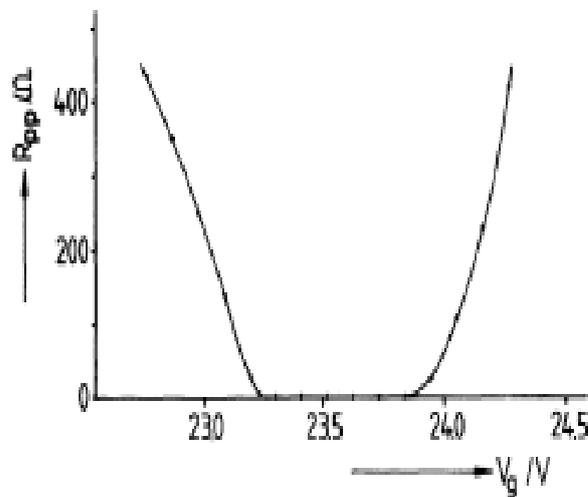


Fig. 2.2 – Résistivité longitudinale ρ_{xx} en fonction du potentiel de grille, et donc de la densité électronique. On observe l'oscillation de la résistivité jusqu'à l'annulation.

Ces régions de plateaux coïncident avec l'annulation de la résistivité longitudinale. Les oscillations de la résistivité longitudinale sont des oscillations de Shubnikov-de Haas.

D'autre part, la valeur de la résistivité de Hall dans la région des plateaux est exactement donnée par :

$$R_H = \frac{h}{e^2 n} \quad (2.1)$$

avec n , un nombre entier (cf. Fig. 2.3). Cela signifie que la conductivité de Hall σ_{xy} est quantifiée en multiple de ce que l'on appelle le quantum de conductance e^2/h . Cet effet est, à ce titre, qualifié d'Effet Hall Quantique Entier (EHQE).

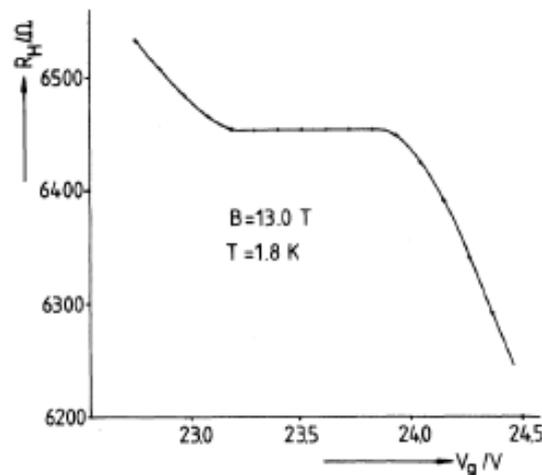


Fig. 2.3 – Résistivité de Hall ρ_{xy} en fonction du potentiel de grille, et donc de la densité électronique. On observe la formation d'un plateau aux valeurs de tension de grille correspondant à l'annulation de ρ_{xx} . La valeur de la résistivité de Hall à ce plateau est $\rho_{xy} \approx h/4e^2$ ($\frac{h}{e^2} = 25812$).

Il est important de souligner que la découverte de la quantification de la conductivité de Hall a ouvert la voie à des mesures extrêmement précises de la valeur de la constante physique e^2/h . La valeur obtenue à partir des plateaux découverts par von Klitzing coïncide avec la valeur de e^2/h , obtenue de manière indépendante avec une précision de cinq chiffres significatifs. Les raisons qui expliquent une telle particularité tiennent à la bidimensionnalité du système. Dans ce type de système $\rho_{xy} = R_H$; pour obtenir la résistivité de Hall, il suffit de mesurer précisément la différence de potentiel appliqué et le courant mais pas les dimensions de l'échantillon, comme c'est souvent le cas dans les expériences de métrologie. De plus, comme σ_{xx} et ρ_{xx} s'annulent au niveau des plateaux, il n'est pas nécessaire de positionner les électrodes A et C perpendiculairement au courant. Sans ces deux caractéristiques, la mesure précise de l'effet Hall serait presque impossible. Il a vite été montré que ces caractéristiques se retrouvaient dans d'autres systèmes et en particulier dans les hétérojonctions de

GaAs/AlGaAs. Dans la plupart des expériences réalisées à partir de ces hétérojonctions, la densité électronique est maintenue constante et les grandeurs σ_{xy} et ρ_{xy} sont mesurées dans un champ magnétique variable. Les plateaux se forment presque exclusivement dans la région de fort champ, ce qui donne des courbes expérimentales comme montré à la Fig. (2.4). On voit sur ces résultats que ρ_{xy} présente un profil en marche d'escalier. On constate que la conductivité de Hall à température très faible est quantifiée en multiple de e^2/h , et la résistivité diagonale s'annule dans la zone des plateaux. En réalisant des mesures beaucoup plus précises, les caractéristiques suivantes ont été mises en évidence. Les différences de valeur entre différents échantillons, entre différents types de substrat (Si MOSFET ou hétérojonctions à base de GaAs), et les différences entre les plateaux sont inférieures à 10^{-10} de la valeur quantifiée des plateaux.

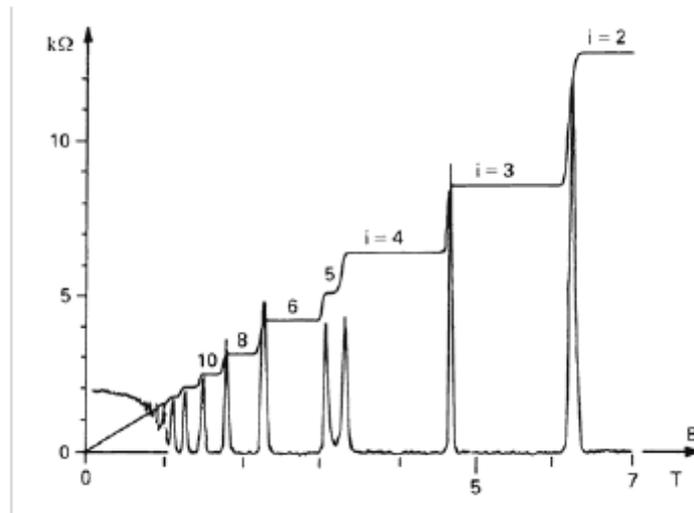


Fig. 2.4 – La résistivité de Hall varie par plateaux avec le champ magnétique, elle est quantifiée en h/e^2n avec n entier. La résistivité longitudinale est à peu près constante à champ faible, elle oscille fortement à fort champ, ses minima sont quasi-nuls et coïncident avec les plateaux de la résistance de Hall.

2.2 Mouvement quantique de l'électron

Les résultats expérimentaux concernant la conductance de Hall indiquent clairement que le traitement classique du mouvement de l'électron est insuffisant pour décrire la richesse du phénomène. Il est nécessaire de procéder à la résolution quantique du problème.

2.2.1 Hamiltonien quantique et Invariance de jauge

Nous commençons par traiter la situation où aucun champ électrique extérieur n'est appliqué. Le système est alors isotrope. Cette situation correspond au système d'électrons dans le 2-DEG loin des parois de confinement de l'échantillon qui bordent le gaz. Les électrons sont alors dans le volume par opposition au bord. L'Hamiltonien quantique à une particule H est obtenu à partir de celui de la mécanique classique (1.4) :

$$H = \frac{1}{2m_b} \left(p + \frac{e}{c} A(r) \right)^2 \quad (2.2)$$

Ici, r est l'opérateur de position et p l'opérateur de moment canonique. Ils vérifient les relations de commutations canoniques $[p_u, r_v] = -i\hbar\delta_{uv}$ avec $u, v = x, y, z$. Pour un champ magnétique uniforme, $\nabla \times A = B\hat{z}$. Le potentiel vecteur A est une fonction linéaire des coordonnées spatiales. Il s'en suit que H est l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique bidimensionnel généralisé qui est quadratique dans toutes les deux coordonnées spatiales et dans l'impulsion canonique $p = -i\hbar\nabla$ et peut, en conséquence, être exactement diagonalisé.

L'équation de Schrödinger

$$H\psi = E\psi \quad (2.3)$$

est invariante sous la transformation de jauge:

$$A(r) \rightarrow A(r) + \nabla\xi(r), \quad (2.4)$$

$$\psi(r) \rightarrow \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\xi(r)\right]\psi(r). \quad (2.5)$$

Ceci s'appelle l'invariance de jauge.

Des calculs sont souvent exécutés avec un choix spécifique de la jauge pour le potentiel de vecteur. Nous parlerons de deux jauges populaires, à savoir, la jauge de Landau et la jauge symétrique. Les fonctions propres sont tout à fait différentes dans les deux jauges mais connexes.

2.2.2 La jauge de Landau

Pour la jauge de Landau,

$$A = B(-y, 0, 0), \quad (2.6)$$

L'Hamiltonien ne contient aucun x , et commute donc avec $l p_x$. Cela implique $p_x = \hbar k_x$ est un bon nombre quantique. L'unité pratique de la longueur est la longueur magnétique, définie comme :

$$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}. \quad (2.7)$$

En termes de quantités sans dimensions :

$$y' = \frac{y}{l} - l k_x \quad (2.8)$$

Et

$$p'_y = \frac{l p_y}{\hbar}, \quad (2.9)$$

Nous trouvons

$$H = \hbar \omega_c \left[\frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} (p'_y)^2 \right], \quad (2.10)$$

Qui est l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. Ici, $\hbar \omega_c$ est l'énergie de cyclotron. Les valeurs propres d'énergie sont quantifiées à

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \quad (2.11)$$

Avec $n = 0, 1, \dots$, appelés niveaux de Landau. Les énergies continues du champ magnétique nul combinent ainsi pour produire les niveaux de Landau dégénérés.

Les vecteurs propres sont

$$\Psi_{n, k_x}(r) = [\pi 2^{2n} (n!)]^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{l} - l k_x\right)^2\right] H_n\left(\frac{y}{l} - l k_x\right), \quad (2.12)$$

où H_n sont des polynômes de Hermite.

Nous nous référons au $n = 0$ comme niveau le plus bas de Landau, $n = 1$ comme deuxième niveau de Landau, et ainsi de suite.

2.2.3 La jauge symétrique

La jauge symétrique se rend au choix

$$A = \frac{B \times r}{2} = \frac{B}{2}(-y, x, 0). \quad (2.13)$$

Avec la longueur magnétique $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ et l'énergie de cyclotron $\hbar \omega_c = \frac{\hbar e B}{m_b c}$ choisies comme unités pour la longueur et l'énergie, l'Hamiltonien dans la jauge symétrique peut être exprimé comme :

$$H = \frac{1}{2m_b} \left[(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{ey}{c^2})^2 + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + B \frac{ex}{c^2})^2 \right] \quad (2.14)$$

Choix en tant que variables indépendantes

$$z \equiv x - iy, \quad \bar{z} \equiv x + iy \quad (2.15)$$

Les dérivés sont reliés comme :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (2.16)$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (2.17)$$

L'Hamiltonien devient :

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_c \left[-4l^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4l^2} z \bar{z} - z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]. \quad (2.18)$$

Nous définissons les ensembles d'opérateurs d'échelle suivants:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2l} + 2l \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.19)$$

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2l} - 2l \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad (2.20)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2l} - 2l \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.21)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2l} + 2l \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad (2.22)$$

Ceux qui ont la propriété suivante :

$$[a, a^+] = 1, \quad [b, b^+] = 1, \quad (2.23)$$

et tous autres commutateurs sont nul. En termes de ces opérateurs, l'Hamiltonien peut être écrit comme

$$H = \hbar\omega_c \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.24)$$

Comme dans l'oscillateur harmonique, les valeurs des énergies propres E_n sont discrètes et sont indicées par un entier n

$$H|n, m\rangle = E_n |n, m\rangle, \quad (2.25)$$

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.26)$$

où $m = -n, -n + 1, \dots$ est le nombre quantique d'impulsion angulaire.

La fonction d'onde $|0,0\rangle$ du l'état fondamental en représentation de coordonnées $\psi_{0,0}(r) = \langle r|0,0\rangle$ est obtenue en résolvant l'équation $a|0,0\rangle = b|0,0\rangle = 0$

$$\psi_{0,0}(r) = \langle r|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} e^{-\frac{1}{4l}z\bar{z}}, \quad (2.27)$$

On détermine les fonctions d'onde des autres états par :

$$\psi_{n,m}(r) = \langle r|n, m\rangle = \frac{(a^+)^n (b^+)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \psi_{0,0}(r) \quad (2.28)$$

Ainsi, les états propres de l'Hamiltonien et du moment cinétique s'expriment par des polynômes de Laguerre. Ces états à une particule décrivent des électrons de volume pour lesquels nous pouvons calculer la moyenne d'observables intéressantes.

Tous les états m dans un NL sont dégénères .pour de grandes valeurs de m les orbitales $\psi_{n,m}$ sont fortement localisées à l'intérieur d'un cercle de rayon

$$r_{n,m} = \sqrt{\langle \psi_{n,m} | z\bar{z} | \psi_{n,m} \rangle} = l\sqrt{2(m+n+1)}$$

Nous nous restreignons aux fonctions d'onde du niveau de Landau le plus bas :

$$\psi_{0,m}(r) = \langle r|0, m\rangle = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m l^2 m!}} e^{-\frac{1}{4l}z\bar{z}} \quad (2.29)$$

Cette fonction d'onde représente un électron localisé sur une couronne comme le montre la Fig. (2.5). Le maximum de densité de probabilité de $|\psi_{0,m}(r)|^2$ se trouve sur une couronne centrée sur l'origine, de rayon :

$$r_{0,m} = \sqrt{\langle \psi_{0,m} | r^2 | \psi_{0,m} \rangle} \sim l\sqrt{2m}. \quad (2.30)$$

l'extension radiale de la fonction d'onde est de l'ordre de l . Il est important de ne pas confondre le cercle en question avec l'orbite cyclotron classique. En effet, les calculs de moment angulaire et d'énergie montrent clairement que le rayon cyclotron pour le premier niveau de Landau est l . L'état $|0, m\rangle$ est une combinaison linéaire de différentes orbites cyclotrons de rayon l et dont les centres sont placés sur un cercle de rayon $l\sqrt{2m}$ (cf. Fig. 2.6). Considérons maintenant un système de forme circulaire d'aire $S = \pi R^2$, les états pour lesquels $2ml^2 > R^2$ peuvent être négligés. Ainsi, le nombre total d'états à un électron dans le premier niveau de Landau est $S / 2\pi l^2$.

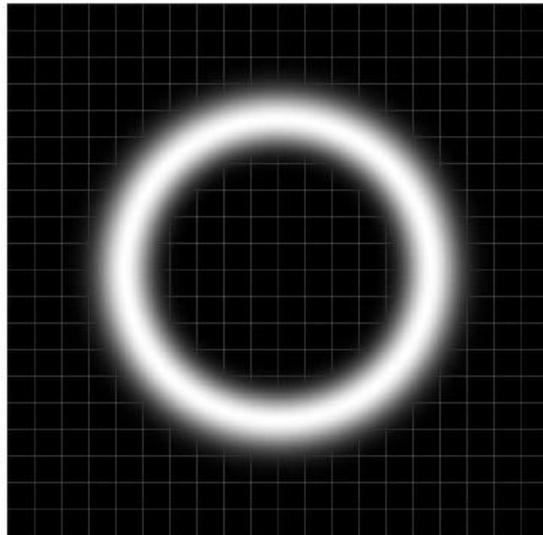


Fig. 2.5– Densité de probabilité $|\psi_{0,m}(r)|^2$ pour $m = 16$

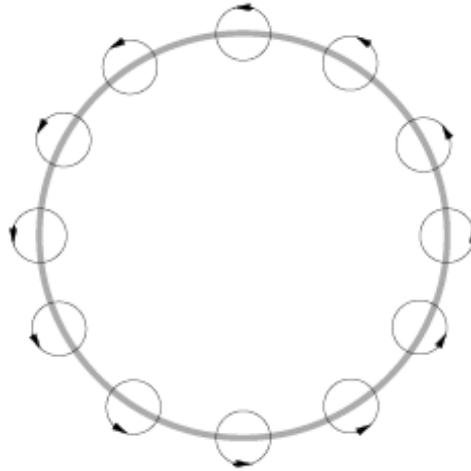


Fig. 2.6 – Image classique associée à 1.11

Notons une caractéristique très spécifique des fonctions d'onde du niveau de Landau le plus bas. La représentation en notation complexe (2.29) est en effet composée d'un monôme en z à la puissance m et d'une composante exponentielle indépendante de m . Toutes les fonctions d'onde de ce niveau étant dégénérées, n'importe quelle combinaison de ces fonctions d'onde est encore une fonction propre de H à la même énergie propre. Ainsi, la fonction d'onde suivante est une fonction propre du niveau de Landau le plus bas

$$\psi(r) = f(z)e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \quad (2.31)$$

avec $f(z)$ un polynôme arbitraire en z . La seule restriction tient au fait que le système étant de taille finie, le degré M du polynôme $f(z)$ est contraint par la relation $\leq R^2/2l^2$.

2.2.4 La dégénérescence

Dans la jauge de Landau et la jauge symétrique, chaque niveau de Landau a les orbitales dégénérées que l'on note par les nombres quantiques k_x et m . La dégénérescence par unité de surface est la même dans chaque niveau de Landau, mais dépend du champ magnétique. Dans la jauge de Landau, l'orbitale notée par k_x est localisée à : $y = k_x l^2$. Déterminons la dégénérescence D d'un niveau de Landau, c'est-à-dire le nombre d'états possibles par niveau

de Landau. Pour faciliter le compte des états, nous prendrons un échantillon de longueur L_x dans la direction x , et imposerons les conditions périodiques dans la direction x .

$$e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x x}. \quad (2.32)$$

Les valeurs permises du k_x , sont alors :

$$k_x = 2\pi \frac{n_x}{L_x}. \quad (2.33)$$

Nous comptons maintenant le nombre d'états dans un secteur donné, disons la région du secteur $L_x L_y$ définie par $y = 0$ et $y = L_y$. (L'échantillon lui-même se prolonge infiniment dans la direction y . Nous ne souhaitons pas compliquer l'issue avec de vrais bords ici.). L'état à $y = 0$ est noté par $n_x = 0$ et $y = L_y$ par le vecteur d'onde $k_x = L_y/l^2$, ou par le nombre entier

$$N_x = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2} \quad (2.34)$$

Négligeant des effets de $O(1)$, N_x est le nombre d'états dans le secteur $L_x L_y$, la dégénérescence par unité de surface s'écrit donc :

$$D = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2} = \frac{SB}{\phi_0} = \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.35)$$

Où ϕ est le flux magnétique total et S la surface de l'échantillon. Le dernier terme nous indique qu'il y a avec précision un état par quantum de flux ($\phi_0 = \hbar c/e$) dans chaque niveau de Landau.

La dégénérescence de niveau de Landau peut également être obtenue aisément dans la jauge symétrique. Considérer un disque de rayon r centré sur l'origine, et demander combien d'états se trouvent à l'intérieur de celui-ci, dans un niveau de Landau donné. Prenons, pour la simplicité, le niveau le plus bas de Landau. La plus grande valeur de m pour laquelle le vecteur propre se trouve à l'intérieur du disque est donnée d'après l'équation (2.30) par $m_{max} = \frac{r^2}{2l^2}$, qui n'est autre que le nombre total des vecteurs propres à l'intérieur du disque dans le DNL (en négligeant les termes de l'ordre de l'unité), Autrement dit, il y a un état électronique par unité

d'aire $2\pi l^2$. Ceci est également vrai pour les niveaux de Landau supérieurs ; dans un système d'aire S , chaque niveau de Landau a une dégénérescence de :

$$\frac{Sm_{max}}{\pi r^2} = \frac{S}{2\pi l^2} = \frac{eBS}{hc} = \frac{BS}{\phi_0} = \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.36)$$

Si on suppose que le niveau de fermi est *accroché* sur des états spatialement localisés par des impuretés dont l'énergie se situe entre deux niveaux de Landau n et $n + 1$, le nombre d'électrons N est le produit du nombre de niveaux occupés (n) par la dégénérescence $D = \frac{\phi}{\phi_0}$ de chaque niveau⁵. La conductivité de Hall après l'équation (1.20) est alors quantifiée

$$\sigma_{xy} = \frac{e}{\phi} n \frac{\phi}{\phi_0} = n \frac{e^2}{h} \quad (2.37)$$

en multiples entiers de $\frac{e^2}{h}$, à condition que le niveau de fermi soit juste entre deux niveaux de Landau. Cependant, cet argument ne saurait, en aucune façon, tenir compte de l'existence des plateaux de conductivité qui ont été découverts expérimentalement par K.Von Klitzing, G.Dorda et R. Pepper.

2.2.5 Le Facteur de remplissage

Le nombre quantique n dans le coefficient de Hall quantique s'avère être indiqué par le facteur de remplissage de niveau de Landau défini comme le nombre d'électrons par cellule :

$$\nu = \frac{N_e \phi_0}{SB} = \frac{N_e}{\frac{\phi}{\phi_0}} = \frac{N_e}{D} = \frac{\rho \phi_0}{B} = \frac{N_e}{N_x} \quad (2.38)$$

En raison du principe de Pauli, une cellule peut être occupée par un seul électron. Par conséquent, chaque fois que le coefficient de remplissage atteint un nombre entier, un niveau d'énergie se remplit et l'électron suivant doit être ajouté au niveau d'énergie prochaine qui se trouve à une énergie $\hbar\omega_c$ au-dessus. Il s'agit du régime de Hall quantique entier. Cette approche simple cependant, indique que l'effet Hall quantique entier devrait être observé qu'à spécifique valeur du champ magnétique pour laquelle ν donnée par (2.38) est un entier au lieu

⁵ la densité électronique n_e est donc donnée par $n_e = N_e/S$.

de certaines régions étendues de B , comme observé expérimentalement. Aussi, l'explication pour les valeurs fractionnaires de ν est hors de ce chapitre.

2.3 La théorie de localisation bidimensionnelle

La découverte de l'EHQ autour des années (1979-1982) est une coïncidence curieuse car à cette époque, un consensus [7] se développait au sein de la communauté de la physique déclarant la non-existence d'états étendus dans un système électronique bidimensionnel désordonné. Du fait, tous les états électronique sont faiblement localisés. Ce concept qui affirme donc qu'il ne peut pas y avoir de phase « métallique » bidimensionnelle a été discuté et revu d'une manière extensive dans la littérature ; il fait souvent référence à ce que l'on appelle communément « théorie d'échelle de localisation » ou bien « localisation faible ».

Aujourd'hui, il est clair que l'existence d'états localisés dans les queues des NsL et d'états étendus aux centres de ces derniers, est essentielle pour tout mode, tout modèle ayant pour but l'explication de la quantification de R_H

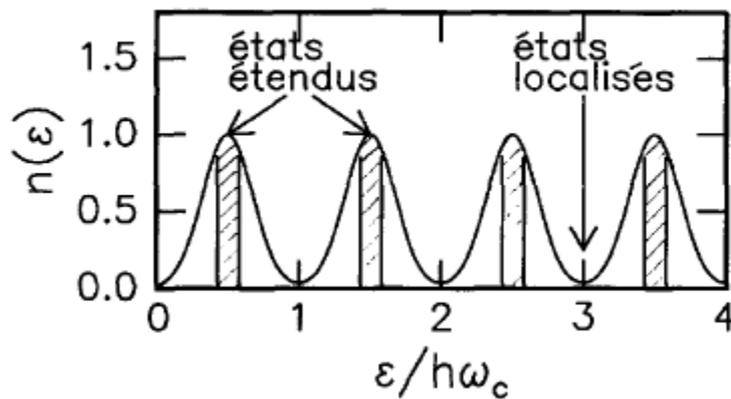


Fig.2.7 - Densité d'états d'un gaz d'électrons bidimensionnels désordonnés en champ fort. Les niveaux de Landau sont élargis par le désordre. Seuls les états au centre de chaque niveau de Landau sont «étendus» et contribuent au transport des charges. Les états entre chaque niveau de Landau sont « localisés » et ne peuvent pas porter un courant.

Essayons de voir ce qui se passe lorsque nous augmentons le champ magnétique. Le fait d'incrément : le champ magnétique crée de nouveaux états puisque la dégénérescence est proportionnelle à B . Ceci permet aux électrons d'occuper des états de plus en plus bas, mais quand un NL se vide, il existe un gap d'énergie le séparant du prochain état vacant dans le NL suivant. Ce gap se constitue uniquement d'états localisés dus aux impuretés dans l'échantillon, voir la (fig.2.7). En conséquence, quand le potentiel chimique (niveaux de

fermi) passe à travers le gap, les électrons des états localisés et donc ne contribuent pas aux phénomènes de transport électronique. Ceci étant la cause principale de l'apparition des plateaux dans la résistance transverse jusqu'à ce que le NL suivant soit atteint et ainsi de suite....

Enfin, pour résumer, quand le potentiel chimique réside dans les états localisés, loin des centres des NsL⁶ ($\mu \neq E_n^C$), les valeurs de σ_{xx} et σ_{xy} à $T = 0$ K sont données par :

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (2.39)$$

et

$$\sigma_{xy} = \frac{\nu e^2}{h} \quad (2.40)$$

Où ν , le facteur de remplissage, est le nombre des NsL complètement remplis, et qui est en fait égal au nombre des états étendus occupés puisqu'il existe exactement un état étendu (E_n^C) au centre de chaque NL, (fig.2.7). Quand le potentiel chimique passe à travers l'énergie critique (E_n^C), il y a une transition isolant-métal-isolant (à $T = 0$ K) où le système est isolant pour $\mu = E_n^C \pm \delta$, avec δ infinitésimal, et est métallique précisément à $\mu = E_n^C$. La résistance de hall quantifie partout (i.e.. Toutes les valeurs du potentiel chimique), excepté à $\mu = E_n^C$. Où il saute d'un plateau quantifié à un autre, et la conductibilité longitudinale σ_{xy} est nulle sauf en E_n^C . Les valeurs quantifiées de la conductibilité de Hall sont donc données par :

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} \frac{\nu e^2}{h}, & \mu < E_n^C - \delta \\ \frac{(\nu+1)e^2}{h}, & \mu > E_n^C + \delta \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\sigma_{xx} = 0, \mu \neq E_n^C \quad (2.42)$$

où δ est une énergie infinitésimale.

Une autre façon d'expliquer l'EHQE $\nu = n$ est de dire que le système est particulièrement «stable» quand un nombre entier de NsL est rempli. De cette manière, l'EHQE s'explique simplement en termes d'électrons sans interaction. Réciproquement, nous pouvons compter $\nu = 1/3$, l'effet hall se produit quand un électron occupe trois cellules à lui tout seul ! Ce verrouillage de la séparation entre les électrons ne peut pas être expliqué par le principe de Pauli. L'autre explication est qu'il est dû aux interactions entre les électrons. C'est le départ de la théorie de Laughlin de l'effet hall fractionnaire. Cet aspect sera abordé dans le prochain chapitre[8].

⁶ La notation NsL dénote les Niveaux de Landau

Chapitre 3

L'Effet Hall Quantique Fractionnaire

3.1 Mise en évidence expérimentale

Les progrès des techniques cryogéniques ainsi que l'usage d'hétérojonctions de $A_xGa_{1-x}As$ de mobilité bien plus grande que les Si-MOS ont permis aux expérimentateurs de réaliser des mesures plus propres de conductivité longitudinale et de Hall. Grâce à ces techniques, ils ont eu la surprise de découvrir de nouveaux plateaux correspondant à une conductivité de Hall en fraction de e^2/h . A la Fig. (3.1), sont reproduits les résultats de Tsui et al. obtenus en 1982 [13].

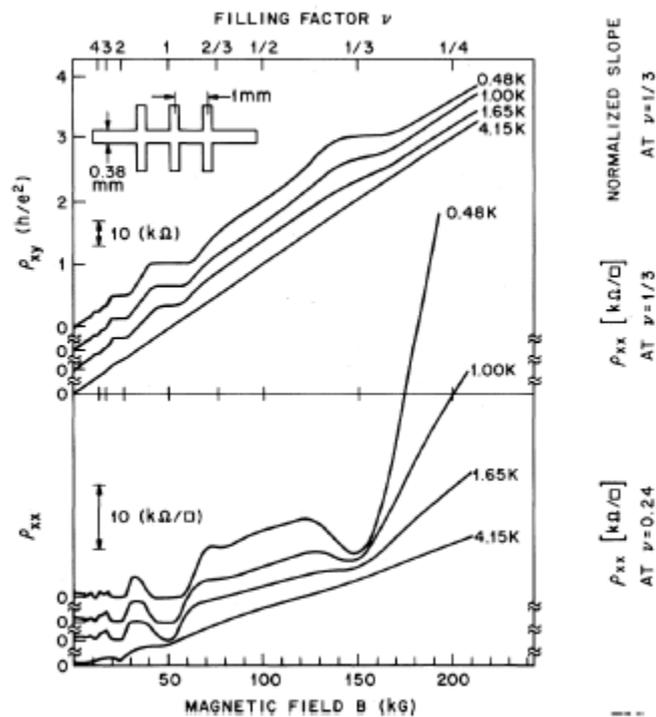


Fig.3.1– Résistivités diagonale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué.

On observe que la résistivité diagonale est toujours finie, et que les plateaux de la résistivité de Hall ne sont pas très visibles. Toutefois, ce résultat montre clairement une tendance à la formation de plateaux où la conductivité de Hall est quantifiée en $1/3$ et $2/3$ de $\frac{e^2}{h}$. Ces caractéristiques furent effectivement observées sans aucune ambiguïté à plus basse

température [14]. Sur la Fig. (3.2) il apparaît de très nombreux plateaux dans la résistivité de Hall en fonction du champ magnétique à densité n_e fixée. Les premiers plateaux correspondent à une conductivité en multiple entier de $\frac{e^2}{h}$ comme nous l'avons vu dans l'effet Hall quantique entier, mais les plateaux suivants se produisent à des fractions rationnelles de $\frac{e^2}{h}$ de dénominateur impair. La formation de ces plateaux ainsi que l'annulation de la résistivité longitudinale pour ces mêmes valeurs du champ correspondent à l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF).

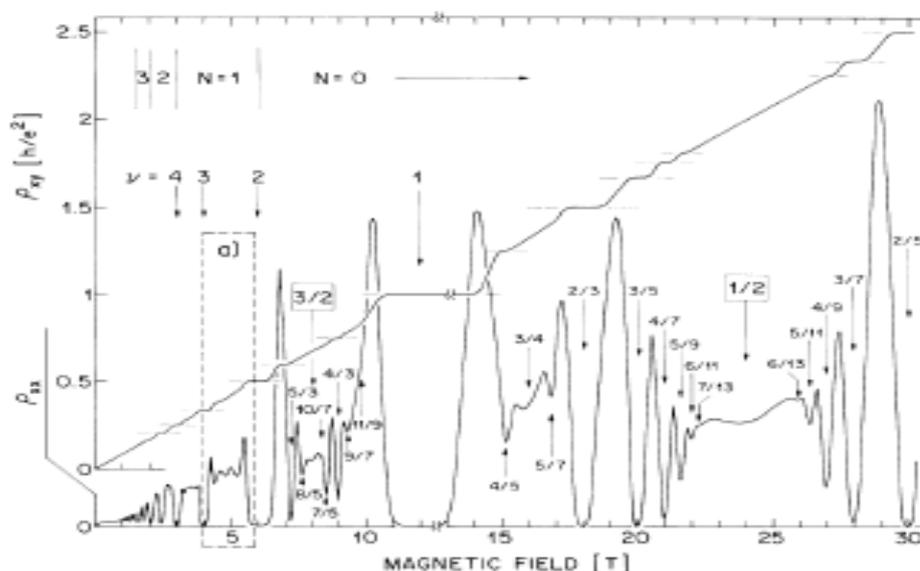


Fig.3.2– Résistivités diagonale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué.

Notons que les valeurs de champ magnétique auxquelles se produisent ces plateaux de conductance lorsque la densité est fixée, peuvent être mesurées par le facteur de remplissage de Landau $\nu = N_e / (\frac{S}{2\pi l^2})$ où N_e est le nombre total d'électrons dans le système. Le facteur de remplissage est le nombre d'électrons divisés par le nombre d'états accessibles dans un niveau de Landau. Il mesure donc le nombre de niveaux de Landau occupés⁷.

Comme $\nu = n_e 2\pi l^2 = 2\pi \hbar n_e / |q_e| B$, on peut transposer les valeurs du champ B en valeur du facteur de remplissage. A densité fixée, les valeurs du champ pour lesquelles se produisent les plateaux dans la conductance de Hall de l'effet Hall entier correspondent aux valeurs de ν entières et pour l'effet Hall fractionnaire, les plateaux apparaissent à des fractions de

⁷ $\nu = 1/2$ correspond au premier niveau de Landau à moitié plein

dénominateur impair comme indiqués sur la Fig. (3.2). C'est également à ces valeurs de ν que se produisent la réduction de résistivité longitudinale. On peut toutefois observer à la Fig. (3.3) quelques anomalies par rapport à cette règle, avec des réductions de résistivité à des fractions dites exotiques comme $\nu = 3/8$ ou $\nu = 3/10$ qui illustrent la complexité du phénomène. L'effet Hall fractionnaire le plus typique se produit à $\nu = \frac{1}{3}$ ou $\nu = \frac{2}{3}$ et ces expériences mettent clairement en évidence les manquements de la théorie quantique à un corps. Seule la prise en compte des interactions entre électrons allait permettre d'interpréter ce phénomène.

3.2 Le Problème Du Niveau De Landau le Plus bas

3.2.1 Rôle des interactions

Les résultats surprenants de l'EHQF concernant les fractions $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$ apparaissent à champ magnétique suffisamment élevé (ou réciproquement, à densité électronique suffisamment basse) pour que les facteurs de remplissage soient inférieurs à 1. Dans ces conditions, les électrons n'occupent que partiellement le premier niveau de Landau.

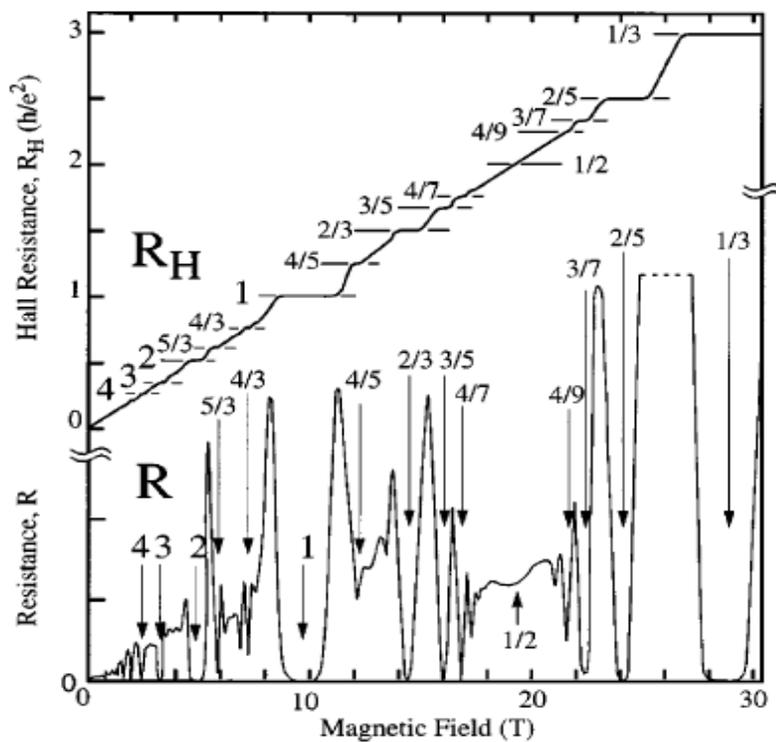


Fig.3.3 – Résistivités diagonale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué.

Il y a précisément un électron pour trois états électroniques à un corps à $\nu = 1/3$. Or, loin des bords, les états occupés sont les états de volume qui présentent une dégénérescence totale en énergie. Il est alors clair que l'interaction coulombienne entre ces électrons est susceptible de lever la dégénérescence entre états et doit être prise en compte pour tenter d'interpréter la formation de plateaux aux fractions $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$. Le traitement de l'EHQF apparaît alors comme un problème à N corps nécessairement plus complexe que l'effet Hall quantique entier qui s'explique via la résolution de l'équation de Schrödinger à une particule

3.2.2 Limite de champ magnétique fort

Nous allons donc considérer un système bidimensionnel d'électrons sans potentiel de confinement latéral i.e. sans champ électrique. On est dans la situation de la section 2.2. En présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan électronique, il se forme des niveaux de Landau. Chacun d'entre eux est indicé par n et est constitué d'états de volume qui sont tous dégénérés à l'énergie $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$. Deux électrons aux positions r et r' interagissent via l'interaction de Coulomb $V(r - r') = q^2 e / 4\pi\epsilon |r - r'|$ que nous avons négligée jusqu'ici. L'ordre de grandeur de l'interaction coulombienne est $V_0 \propto q_e^2 / 4\pi\epsilon l$ avec ϵ la constante diélectrique de $AxGa_{1-x}As$, soit $V_0 \propto \sqrt{B}$. La séparation entre les niveaux de Landau est $\hbar\omega_c \propto B$. Dans la limite de fort champ magnétique, l'énergie cinétique $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ tend donc à dominer le terme d'interaction coulombienne V_0 .

Dans les gaz bidimensionnels des hétérojonctions $AxGa_{1-x}As$, pour un champ $B \sim 10T$, $V_0 \sim 150K$, et $\hbar\omega_c \sim 200K$, le terme d'interaction devient effectivement sous-dominante par rapport à l'énergie cyclotron. Lorsque l'on néglige les interactions, le fondamental est constitué des électrons qui occupent les niveaux de Landau dans l'ordre croissant. Dans le régime de champ fort, le terme d'interaction coulombienne apparaît comme un terme correctif à l'énergie du fondamental et il est légitime de considérer que le fondamental du système en interaction ne sera pas dramatiquement modifié par rapport au cas sans interaction. Ainsi, dans le cas d'un facteur de remplissage $\nu = 1$, le fondamental sera obtenu en remplissant totalement le premier niveau de Landau, même en présence d'interactions. Naturellement, l'interaction mélange les états des électrons appartenant à différents niveaux de Landau, mais la proportion de niveaux supérieurs mélangés avec le premier est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{B}}$ et peut être négligée dans la limite de champ magnétique fort. Ainsi, le mélange des différents niveaux

de Landau ne joue pas un rôle central dans l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous allons donc traiter cet effet dans la limite où la séparation entre niveaux de Landau $\hbar\omega_c$ est considérée comme infinie, et le mélange entre états de différents niveaux est négligeable. Nous pouvons maintenant écrire l'Hamiltonien.

3.2.3 Restrictions sur l'Hamiltonien

L'Hamiltonien du système d'électrons de volume soumis à l'interaction coulombienne est la somme de l'Hamiltonien cinétique H_{kin} (2.2) et du terme d'interaction H_{int} .

$$H = H_{kin} + H_{int} \quad (3.1)$$

Avec

$$H_{kin} = \sum_j \frac{1}{2m_b} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j + \frac{e}{c} A(r_j) \right]^2 \quad (3.2)$$

et

$$H_{int} = \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{j < k} \frac{1}{|r_j - r_k|} \quad (3.3)$$

Cette expression est générale, et dans la limite de fort champ magnétique dans laquelle nous plaçons, nous pouvons réduire la taille de l'espace de Hilbert à un espace de Hilbert restreint pour lequel le nombre d'électrons dans chaque niveau de Landau est constant. Quand le facteur de remplissage ν n'est pas un entier, les $n = [\nu]$ (le plus grand entier inférieur à ν) premiers niveaux de Landau sont entièrement remplis et considérés comme inertes. Le niveau de Landau suivant est partiellement rempli avec $\frac{N_e(\nu-n)}{\nu}$ électrons. Le terme d'énergie cinétique peut alors être supprimé. En effet, en supposant que les états de différents niveaux ne sont pas mélangés par les interactions, les éléments de matrices de H_{kin} sont constants et égaux dans n'importe quelle base de l'espace de Hilbert restreint. De plus, à part les électrons du dernier niveau, tous les autres donnent des éléments de matrice de H_{int} constants dans cet espace et peuvent être supprimés de la sommation. Ainsi, après ces simplifications, l'Hamiltonien effectif est réduit au terme d'interaction entre états du dernier niveau et ne dépend pas de la partie entière du facteur de remplissage. On peut conserver dans l'Hamiltonien effectif uniquement les fonctions d'onde appartenant au même niveau de Landau n , et supprimer cet indice.

A partir d'ici, nous considérerons un unique niveau de Landau et tout se passe comme si $\nu \leq 1$.

$$H = P_{NLB} \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{j < k} \frac{1}{|r_j - r_k|} P_{NLB} \quad (3.4)$$

La simplicité de l'énoncé du problème est trompeuse. L'équation (3.4) révèle déjà la difficulté fondamentale. Dans des problèmes de nombreux-corps, le point de départ d'une investigation théorique d'un phénomène est souvent obtenu par un changement de l'interaction tout à fait. Mais l'interaction n'est pas faible par rapport au reste de notre problème, parce qu'il n'y a rien d'autre. L'interaction est la seule énergie à notre problème, et ne peut donc pas être négligée. L'équation (3.4) ne contient pas de petit paramètre. Prenant la longueur magnétique l comme l'unité de longueur, et $\frac{e^2}{\epsilon l}$ Comme unité d'énergie, nous pouvons réécrire l'équation. (3.4) comme :

$$H = P_{NLB} \sum_{i < j} \frac{1}{|r_j - r_i|} P_{NLB}, \quad (3.5)$$

où toutes les quantités sont sans dimension. Ce formulaire indique que le problème n'a pas de véritables paramètres que ce soit. La quantité habituelle caractérisant la force des corrélations. À savoir, le rapport entre l'énergie d'interaction à l'énergie cinétique est infini, parce que ce dernier est absent. L'état de l'EHQF est l'un des systèmes les plus fortement corrélés dans le monde.

Remarque: Sans la restriction de NLB, le côté droit de l'équation. (1.23) est classique, comme il ne contient pas d'opérateurs commutant. La projection NLB se transforme en un problème quantique non trivial. L'interaction de Coulomb peut être formellement projetée dans le plus bas de niveau de Landau

3.2.4 Particularités de l'Hamiltonien

Nous allons donc considérer l'Hamiltonien (3.5), qui se résume uniquement à un terme d'interaction, pour un facteur de remplissage $\nu \leq 1$. En premier lieu, il convient de déterminer le fondamental de ce système. Dans le cas des électrons dans un métal, l'énergie cinétique domine le terme d'interaction et le problème peut être traité en perturbation. Ici, l'énergie cinétique domine bien le terme d'interaction mais constitue un terme constant dans la limite de fort champs ; elle n'est donc pas prise en compte dans la détermination du fondamental. En conséquence, H_{int} est le seul terme de l'Hamiltonien et l'approche perturbative n'a pas de sens. La seule manière de traiter un tel problème est donc de trouver l'état propre de l'Hamiltonien H_{int} qui possède la plus petite énergie.

On peut penser que la détermination de ce fondamental est très simple. Il s'agit simplement de l'état qui minimise le terme d'interaction entre électrons. Cet état est obtenu en séparant spatialement les électrons autant que possible, pour une densité fixée. Toutefois, ce fondamental n'est pas correct pour l'Hamiltonien (3.5), comme nous le verrons par la suite. La détermination du fondamental d'un système pour lequel le traitement perturbatif n'est pas possible et où le fondamental intuitif n'est pas correct, ne peut se faire que par diagonalisation exacte (i.e. numérique) de l'Hamiltonien ou par méthode variationnelle.

3.3 Le concept de Quasi-particules

Lorsque nous nous trouvons face à un phénomène dans la physique de la matière condensée, il est souvent facile de connaître la nature des particules qui définissent le problème initial. Cependant, et c'est souvent le cas, quand ces particules sont mises ensemble, elles se comportent collectivement d'une manière profondément différente du cas où nous les considérons comme étant des particules indépendantes, et ceci à un tel point que toute théorie de perturbation est vouée à un échec certain. Ce qui est encore plus remarquable, ce système fortement corrélé ressemble à un système self dual formé d'un nouveau type d'objets faiblement couplés, et qui sont des états liés ou bien des objets collectifs plus compliqués quand ils sont exprimés en terme des particules avec lesquelles nous avons commencé. Dans la littérature, nous appelons ces objets des quasi-particules. Une fois que ces vrais quasi-particules sont identifiées, les choses qui semblaient être mystérieuses et difficiles, voire impossibles à comprendre, s'expliquent trivialement comme les propriétés des quasi-particules sans interaction. En effet, l'adjectif fortement corrélé est souvent utilisé pour un

système dont les quasi-particules sont qualitativement distinctes des particules introduites à l'origine, écartant ainsi toute théorie de perturbation.

Le message de base que nous retenons de cette discussion est qu'à chaque fois que nous essayons de comprendre un nouveau phénomène, la première tâche à faire est d'identifier les quasi-particules. Le principe fondamental est donc la possibilité de comprendre les faits de base en négligeant les interactions entre les quasi-particules. Dans cet état d'esprit, l'objectif principal de ce travail est de discuter des états liquides d'électrons en interactions dans le dernier NL, qui ne peuvent pas être compris en termes d'électrons, en traitant leur interaction par une approche perturbatrice. Nous allons voir que les quasi-particules de ce système sont des objets fondamentalement nouveaux, appelés fermions composites (FC).

3.4 Le mystère de l'EHQF

Ce n'est pas souvent que la nature nous présente un mystère aussi bien défini que le phénomène de l'effet hall quantique fractionnaire. Les questions auxquelles la théorie est défiée pour y répondre ne pourraient être plus précisément posées.

❖ Qu'est-ce que la physique de L'effet Hall Quantique fractionnaire ? L'apparition des nombres quantiques et la dissipation de transport dans un système de l'état solide contenant beaucoup d'électrons est une signature du comportement coopératif. Quelles sont les corrélations dans l'état d'EHQF et pourquoi se manifestent-elles dans le mode d'une telle richesse, pourtant étonnamment simple? Pourquoi les gaps s'écartent à certains facteurs de remplissage fractionnaires du niveau de Landau le plus bas? Les expériences montrent ainsi quelque chose d'unique de l'état fondamental spécial à certains facteurs particuliers de remplissage. Dans quel ordre les amène-t-ils à propos de cette singularité?

❖ Beaucoup d'informations concrètes sont contenues dans les fractions qui sont observées et l'ordre dans lequel elles apparaissent. Cela impose des contraintes rigoureuses sur la théorie. Avec la multiplication des fractions, certaines tendances frappantes sont apparues. Plusieurs fractions brillent par leur absence. Par exemple, la plus simple fraction $\nu = 1/2$ n'a pas été observée. En fait, aucune sous-fraction de l'unité avec même dénominateurs n'a été observée. Un autre aspect remarquable, c'est que les fractions ne sont pas isolées, mais qui appartiennent à certaines séquences. Par exemple, dans la Fig. 3.2, les fractions $1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, \dots$ suivent la séquence $\nu = n/(2n + 1)$. Ces observations conduisent aux questions suivantes: Pourquoi certaines fractions apparaissent et d'autres non?

- ❖ Pourquoi apparaissent-elles dans les séquences? Qu'est-ce qui détermine l'ordre de leur stabilité? Pourquoi ont-elles un même dénominateur des fractions absentes (à une exception près)?
 - ❖ Quelle est la description microscopique de cet état? Quelle théorie fournira des prévisions quantitatives pour diverses quantités mesurables par l'expérience?
 - ❖ Quelle est la nature de l'état au même dénominateur des fractions?
 - ❖ L'abondance de l'EHQF dans le niveau le plus bas de Landau est en contraste frappant avec une absence de l'EHQF dans le niveau de Landau le plus élevé. Pourquoi?
- Toute théorie qui tente d'expliquer l'EHQF doit répondre à ces questions fondamentales.

3.5 La théorie de Laughlin

Une méthode permet de déterminer analytiquement le fondamental de l'Hamiltonien (3.5). Elle consiste à choisir une fonction d'onde d'essai ψ_α dépendant d'un paramètre α , comme candidat pour le fondamental. On calcule ensuite la valeur moyenne de l'Hamiltonien $\langle \psi_\alpha | H | \psi_\alpha \rangle / \langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle$. L'énergie de cet état est toujours supérieure ou égale à l'énergie du fondamental. Il convient ensuite de faire varier α pour obtenir le minimum de la valeur moyenne ; la fonction d'onde correspondante est alors approximativement la fonction d'onde du fondamental. Il est évident que le choix de la fonction d'essai est essentiel dans cette approche.

Dans ce cadre, Laughlin a posé une fonction d'essai sur la base d'une série de simplifications et de remarques. Dans la jauge symétrique, une fonction d'onde propre électronique à un corps est donnée par (2.29) :

$$\psi(r) = f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4}} \quad (3.6)$$

Où f est une fonction polynomiale quelconque. La fonction d'onde à N_e électrons peut s'exprimer comme combinaison linéaire de déterminants de Slater à partir de la base des fonctions à un corps

$$\psi_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_{N_e}) = F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e}) e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4} \quad (3.7)$$

avec $F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e})$ un polynôme à plusieurs variables z_1, z_2, \dots, z_{N_e} correspondant aux positions des électrons 1, 2, ..., N_e . En particulier, on peut choisir la base des fonctions à un

corps déjà vues (2.29). Le terme général de cette fonction F est de la forme $a \prod_i z_i^{m_i}$ où a est un coefficient. Ce terme correspond à un état où l'électron i possède un moment angulaire fixé à $\hbar m_i$. Le déterminant de Slater a donc un moment angulaire total $M\hbar = \sum_i m_i \hbar$. Comme l'Hamiltonien d'interactions conserve le moment angulaire total, on peut diagonaliser simultanément l'Hamiltonien et l'opérateur de moment angulaire total. On peut donc restreindre la fonction d'essai de sorte que chaque terme du polynôme $F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e})$ ait le même degré total M . F sera donc choisi comme un polynôme homogène. Enfin, étant une fonction d'onde à N_e corps fermioniques, ψ_α doit être totalement antisymétrique.

En plus de ces simplifications, il est évident que l'interaction coulombienne a tendance à séparer les électrons les uns des autres au maximum et que la fonction d'onde s'annulera lorsque les positions de deux électrons coïncident. On peut ainsi supposer que le polynôme $F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e})$ est une fonction de la distance inter-électronique $(z_i - z_j)$ seulement. Avec une fonction de cette forme, nous ne prenons pas en compte les corrélations à trois corps ou plus.

En regroupant toutes ces restrictions, Laughlin a proposé une fonction d'essai qui ne contient qu'un paramètre entier $\alpha = q$, forcément impair :

$$\psi_q(r_1, r_2, \dots, r_{N_e}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N_e} (z_i - z_j)^q e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2} \quad (3.8)$$

Observons à la Fig. (3.4) la densité électronique de cette fonction d'onde. Elle est uniforme

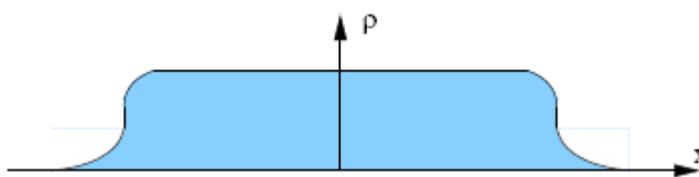


Fig. 3.4 – Densité électronique du fondamental du système de Hall à $\nu = 1/3$.

sur une galette de rayon de $\sqrt{2(M+1)}l$. Dans la partie polynômiale de cette fonction d'onde, chaque terme z_i a un degré maximal de $M = (N_e - 1)q$. M est le moment angulaire maximal que l'électron de coordonnée z_i peut posséder, dans ce cas, son orbite est centrée sur l'origine avec un rayon de $\sqrt{2(M+1)}l$. Dans l'état de Laughlin, tous les électrons sont à l'intérieur de ce cercle. L'aire de cette orbite est $S = 2(M+1)\pi l^2$. La densité électronique

est uniforme à l'intérieur de cette orbite.

Le facteur de remplissage est $\nu = \frac{N_e}{\frac{s}{2\pi l^2}} = \frac{N_e}{(M+1)} = \frac{N_e}{((N_e-1)q+1)} \cong 1/q$ dans la limite $N_e \rightarrow \infty$.

Ainsi, le paramètre libre de la fonction d'essai (3.8) est en fait complètement déterminé par le remplissage, à la fraction magique $\nu = 1/q$, avec q impair.

Cette fonction d'onde de Laughlin décrit un état de densité uniforme au facteur de remplissage $\nu = 1/q$. En particulier, pour $q = 3$, il décrit un état à $\nu = 1/3$, la fraction qui avait été observée sur le temps de travail de Laughlin. Des calculs détaillés (par exemple, Haldane et Rezayi [15]) confirment que la fonction d'onde de Laughlin est une représentation valable et précise les États fondamentaux à $\nu = 1/3$ et $\nu = 1/5$. Les fractions $\nu = 1/q$ sont dénommées *fractions de Laughlin*. L'apparition ultérieure d'un grand nombre d'autres fractions, dont la théorie de Laughlin ne s'applique pas, nous dit que cette théorie est incomplète. Par exemple, en se référant à la Fig.3.2, la fonction d'onde de Laughlin est pertinente à $1/3$ et $2/3$ mais pas pour les autres fractions, trente environ, vues sur cette figure dans le rang < 1 .

Le reste de ce chapitre est consacré à un nouveau principe: *la formation de particules topologiques appelés les fermions composites* (qui sera défini ci-dessous). Ils mettent en évidence la physique générale de l'EHQF, donnant une compréhension physique des raisons pour lesquelles les lacunes ouvertes aux remplissages fractionnaires. La théorie des FC explique toutes les fractions de façon unifiée, et révèle également une structure sous-jacente qui englobe d'autres phénomènes que l'EHQF.

Qu'est-ce la fonction d'onde de Laughlin? La théorie des FC récupère la fonction d'onde de Laughlin comme un cas particulier. La «dérivation» des FC à partir de la fonction d'onde de Laughlin produit un long chemin logique différent de celui décrit ci-dessus, l'enrichissement de cette fonction d'onde avec une interprétation physique nouvelle et manifeste son appartenance à une structure conceptuelle plus large. En revanche, les fermions composites ne sont ni en dehors, ni dérivés de la fonction d'onde de Laughlin.

3.6 La théorie des Fermions Composites

En 1989, Jain identifia avec succès les vrais quasi particules responsables de l'EHQF et auxquelles, il donna le nom de **fermions composites**.

En remarquant que les observations expérimentales de l'EHQE et l'EHQF sont essentiellement identiques, à la seule différence des valeurs quantifiées de la résistance de hall, Jain présenta un travail théorique permettant une interprétation unique des deux phénomènes et ce, en les considérant comme étant deux manifestations différentes d'une même physique sous-jacente.

3.6.1 Principe de base

Le Modèle des Fermions Composites est basé sur l'hypothèse simple où, dans un certain rang de facteur de remplissage, les électrons captèrent un chiffre pair des vortex de la fonction d'onde pour devenir des fermions composites pouvant être traités comme des particules libres sans interaction.

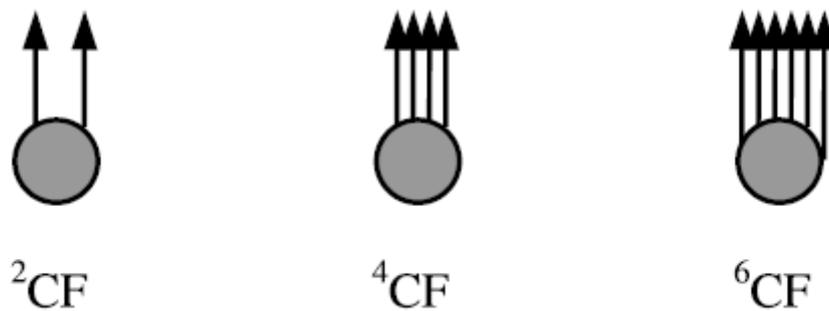


Fig.3.5 - vue Schématique de trois saveurs de fermions composites transportant deux (a), quatre (b) et six (c) vortex . Ils sont respectivement désignés par ${}^2\text{CF}$, ${}^4\text{CF}$ et ${}^6\text{CF}$. Chaque flèche représente un vortex quantifié. Ces vortex sont modélisés comme des quanta de flux dans la description du champ moyen.

Une représentation picturale de quelques saveurs de fermions composites est montrée dans la Fig.3.5, où chaque flèche représente un vortex. Parfois les fermions composites sont présentés comme des états liés d'électrons et d'un nombre pair de quantum de flux magnétique (un quantum de flux est défini comme $\phi_0 = \frac{hc}{e}$), qui est la façon dont ils ont d'abord été introduits. Ce modèle de fermions composites tire sa justification de la propriété d'un point de quantum de flux et un vortex qui sont "topologiquement" similaires, dans le sens où elles produisent toutes deux le même enroulement de phases. Un vortex, par définition, produit une 2π phase d'un chemin fermé autour de lui, qui est aussi la phase Aharonov-Bohm produite par un quantum de flux pour une boucle fermée d'électrons encerclés. Le flux lié de l'état d'électrons, cependant, n'est qu'un brut de modèle pour les fermions composites "Vrai".

Il est intuitivement utile car il fournit une belle image, mais il ne doit pas être pris littéralement. Aucun flux réel n'est lié à des électrons.

3.6.2 Lien entre l'EHQI et l'EHQF

Cette sous-section nous guide à travers le chemin d'or reliant l'effet Hall quantique entier à l'effet Hall quantique fractionnaire [16]. Pour illustration, nous commençons par considérer les facteurs de remplissage particuliers $\nu^* = n$. La connexion est établie par les étapes suivantes :

- **Etape I** : Prenons des électrons sans interaction à $\nu^* = n$. Le système est incompressible, c'est-à-dire que l'état fondamental est non dégénéré et est séparé des autres états propres par un écart (égal à l'énergie de cyclotron).

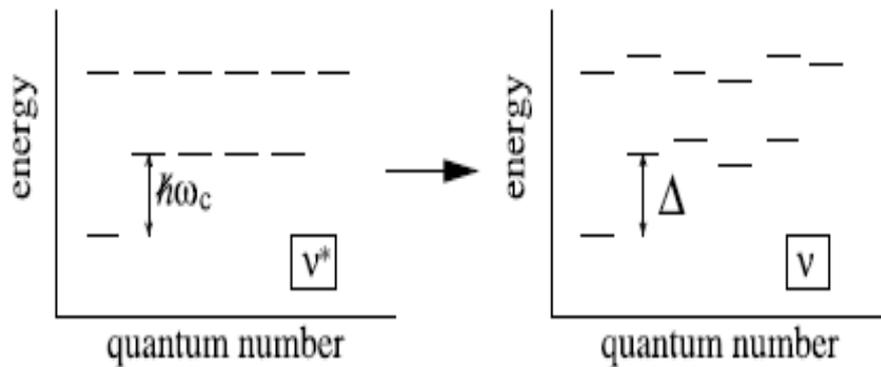


Fig.3.5 - La structure générale du spectre d'énergie du système à N_e corps à un remplissage entier $\nu^* = n$. L'état fondamental est non dégénéré, un chevauchement de N niveaux de Landau entièrement occupés (indiqué dans la Fig.3.4). Les états excités forment des bandes séparées par l'énergie de cyclotron. La théorie du champ moyen des FC prédit que le spectre de basse énergie de remplissages fractionnaires à $\nu = n/(2pn \pm 1)$ a une structure identique, sauf que les États en ν sont des quasi-dégénérés et l'écart cyclotron évolue dans un gap Δ .

Le spectre d'énergie des nombreuses particules est montré dans la Fig.3.5. L'état fondamental à des N niveaux de Landau remplis, schématisés dans la colonne de gauche de la fig.3.6. Le plus bas niveau d'énergie excité est une paire de particule-trou, ou un exciton, affiché dans la colonne de gauche de la fig.3.7 (d) pour $\nu^* = 3$. Ces diagrammes ont des fonctions d'onde précises associés avec eux. On désigne le champ magnétique par B^* , qui peut être soit positif ou négatif. Elle est liée au facteur de remplissage par :

$$\nu^* = \frac{\rho\phi_0}{|B^*|} = n. \quad (3.9)$$

- **Étape II** : Maintenant que nous attachons à chaque électron sans masse, un solénoïde magnétique portant $2p$ quantum de flux pointant dans la direction $+z$, il convertit des électrons en fermions composites. Le flux supplémentaire de cette manière est non observable.

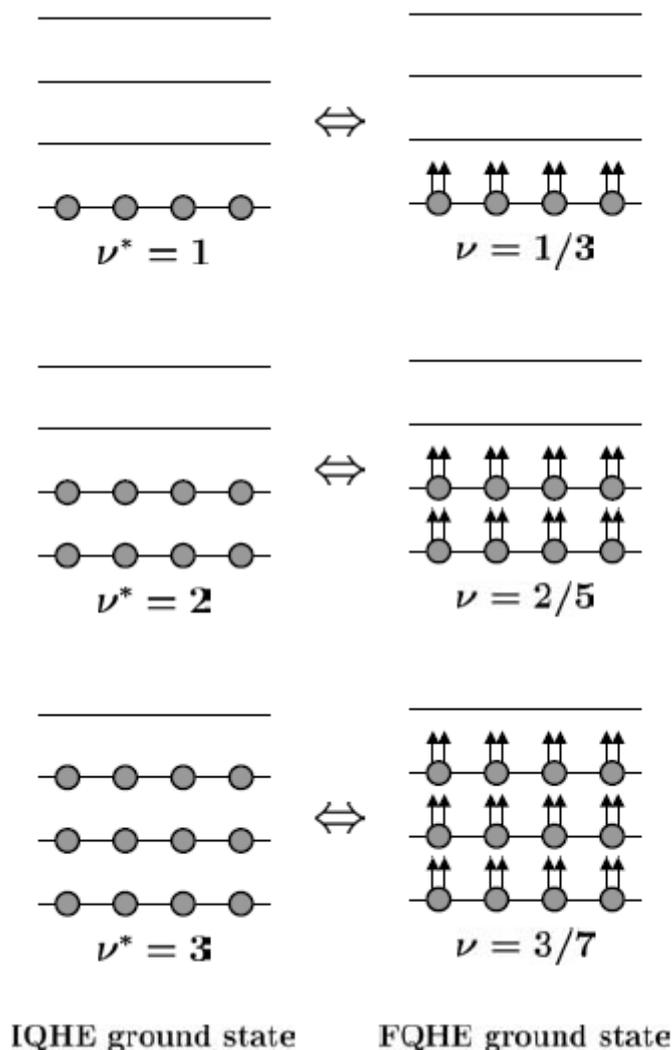


Fig.3.6 - Vue schématique de l'état fondamental des électrons à $\nu^* = n$ (colonne gauche). Les colonnes de droite montrent la vision des états fondamentaux de FC à $\nu = n/(2n + 1)$, comme n Niveaux remplis de fermions composites. (Les niveaux de fermions composites sont analogues à des niveaux de Landau des électrons à ν^* , mais se situent dans le niveau le plus bas de Landau des électrons à ν .) Les lignes horizontales dans la colonne de gauche représentent les niveaux de Landau des électrons, et ceux de droite sont les niveaux des fermions composites.

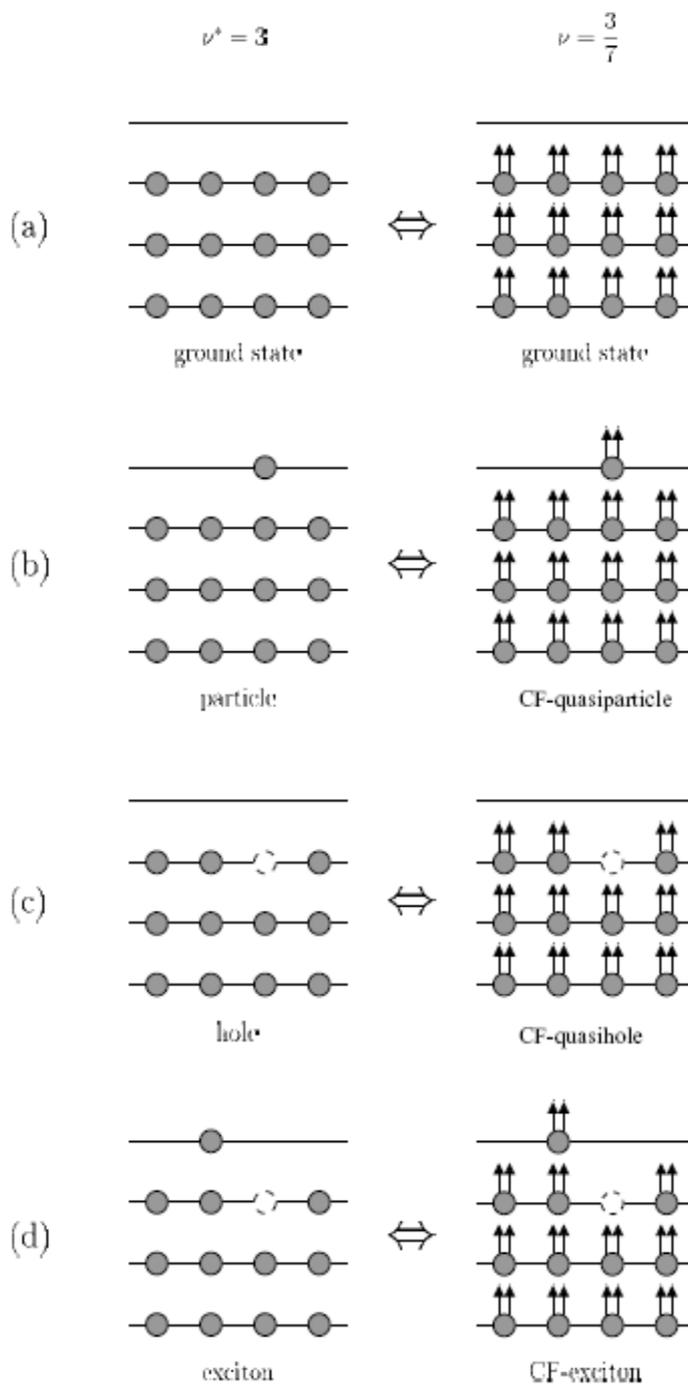


Fig.3.7- Vue schématique de la correspondance entre l'état fondamental et des excitations à $\nu = \frac{3}{7}$, considéré $\nu^* = 3$ comme de fermions composites, avec les états-analogues des électrons à $\nu^* = 3$. Affichés sur la droite: (a) l'état fondamental des FC, (b) un CF-quasi article ; (c) d'un CF-quasi trou et (d) d'un CF-exciton. Les lignes horizontales dans la colonne de gauche représentent les niveaux de Landau des électrons, et ceux de droite sont les Niveaux des fermions composites.

- **Etape III** : Cette reformulation exacte prépare le problème pour une approximation de champ moyen qui n'était pas disponible dans la langue d'origine. Laissez-nous écarter le flux attaché à chaque électron jusqu'à ce qu'il devienne une partie du champ magnétique uniforme, (parce que l'état initial a la densité d'électrons uniforme). Le flux supplémentaire, lié à la densité, produit un champ magnétique uniforme. À la fin, nous obtenons des particules se déplaçant dans un champ magnétique B amélioré, donné par :

$$B = B^* + 2P\rho\phi_0. \quad (3.10)$$

La relation $|B^*| = \rho\phi_0/n$ implique que B est toujours positif (pointant dans la direction z).

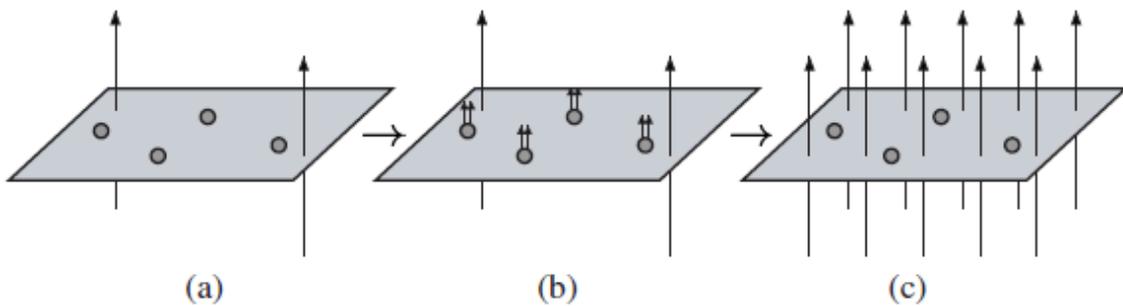


Fig.3.8 - le chemin d'or de l'EHQE vers l'EHQF. Nous commençons avec un état de l'EHQE (a); attachons à chaque électron deux quantum de flux magnétique pour le transformer en un fermion composite (b), et étendons le flux attaché pour obtenir des électrons dans un champ magnétique plus élevé, qui est un état de l'EHQF (c).

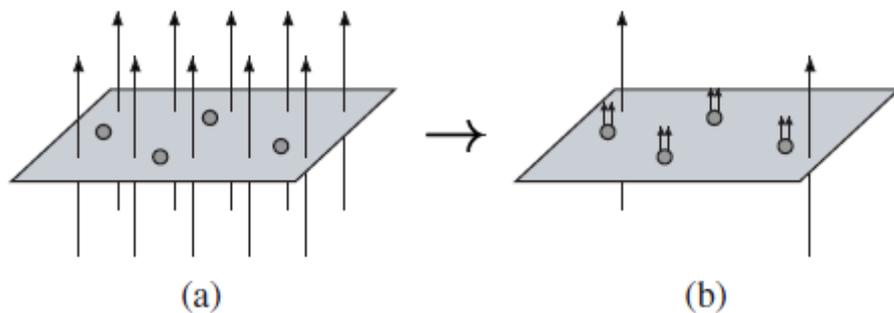


Fig.3.9 - Chaque électron capture deux quantum de flux et se transforme en un fermion composite. Les fermions composites ressentent le champ magnétique résiduel, qui est beaucoup plus petit que le champ magnétique appliqué.

Le facteur de remplissage correspondant est donné par :

$$\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}, \quad (3.11)$$

qui résulte des relations $\nu = \rho\phi_0/B$ et $\nu^* = n = \rho\phi_0/|B^*|$. Le symbole $+(-)$ inscrit dans le dénominateur correspond à B^* pointant dans la $+z(-z)$ direction.

- **Etape IV : théorie quantitative** : La physique des FC décrite ci-dessus est suffisante pour une explication d'une grande partie de la phénoménologie de l'EHQF. Peut-elle nous aider également à écrire des fonctions d'onde pour l'état microscopique de l'EHQF ? Comme le montre la Fig.3.10, la solution directement pour la fonction d'onde ψ_ν de l'état de l'FQHE n'est pas possible. Cependant, la théorie des FC ouvre une nouvelle voie. Celle des fermions agissant l'un sur l'autre faiblement au $\nu^* = n$, l'itinéraire (de ϕ_n à ψ_ν en fig. 3.10) qui suit, n'est pas une dérivation rigoureuse, mais une tentative de construire des fonctions d'ondes vibrationnelles basées sur une image physique. Les fonctions d'ondes obtenues à l'extrémité doivent être confirmées par des moyens indépendants. Nous arrivons d'abord à des fonctions d'ondes par les postulats des fermions composites, puis on les dérive en B^* et ν^* . Prenons la description de champ moyen indiqué dans la fig.3.8.b, dans lequel les particules possèdent un champ magnétique uniforme extérieur B^* et capturent aussi $2p$ quantum de flux.

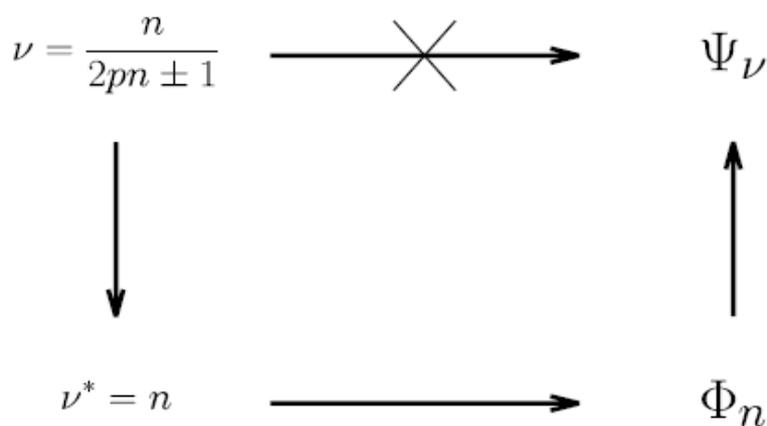


Fig.3.10 - L'itinéraire de fermion composite à la fonction d'onde de l'EHQF.

Le potentiel vecteur A , qui lie des quantum de flux aux électrons, est donné par

$$a(r_i) = \frac{2p}{2\pi} \phi_0 \sum_j \nabla_i \theta_{ij}, \quad (3.12)$$

Où le prime indique la condition $i = j$, et

$$\theta_{jk} = i \ln \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \quad (3.13)$$

est l'angle relatif entre les particules J et K . Note que $\theta_{jk} = \theta_{kj} \pm (2m + 1)\pi$, m nombre entier, mais au-dessous nous n'avons besoin que le gradient de cet angle, ce qui satisfait

$$\nabla_j \theta_{jk} = \nabla_j \theta_{kj}. \quad (3.14)$$

$a(r_i)$ génère un champ magnétique

$$b_i = \nabla_i \times a(r_i) = 2p\phi_0 \sum_l \delta^{(2)}(r_i - r_l) \quad (3.15)$$

C'est-à-dire, chaque électron voit un tube de flux de force $2p\phi_0$ sur chaque autre électron. Ceci suggère l'Hamiltonien dans la théorie du champ moyen pour des fermions composites en B^*

$$H_{CM} = \frac{1}{2m_b} \sum_i (p_i + \frac{e}{c} A^*(r_i) + \frac{e}{c} a(r_i))^2, \quad (3.16)$$

Où A^* produit un champ magnétique uniforme B^* . Nous supposons que les fermions composites sont libres; le débat actuel est trop grossier pour un traitement explicite de l'interaction entre particules.

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger

$$H_{CM} \psi^{CM} = E \psi^{CM}. \quad (3.17)$$

Le potentiel vecteur a peut être éliminé en faisant de la transformation de jauge

$$\psi^{CM} = \phi e^{-i2p \sum_{j < k} \theta_{jk}} = \phi \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|} \right)^{2p}, \quad (3.18)$$

avec ϕ déterminée par

$$\frac{1}{2m_b} \sum_i (p_i + \frac{e}{c} A^*(r_i))^2 \phi = E \phi. \quad (3.19)$$

C'est l'équation de Schrödinger pour des électrons sans interaction à $v^* = n$, pour connaître la solution. En particulier, la fonction d'onde d'état fondamental, notée $\phi_{\pm n}(B)$, est un exemple

de Déterminant de Slater avec les niveaux n les plus bas de Landau entièrement occupés, où le signe \pm se rapporte à la direction $\pm z$ pour B^* . Comme la commutation de la direction du champ magnétique est équivalente au complexe conjugué, nous avons, en général

$$\phi_{-v^*}(B^*) = [\phi_{v^*}(B^*)]^* \quad (3.20)$$

Ainsi, nous obtenons pour l'état fondamental

$$\psi_{\frac{2pn \pm 1}{n}}^{CM}(B) = \phi_{\pm n}(B^*) \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p}. \quad (3.21)$$

Cette fonction d'onde «champ moyen" est insuffisante pour les raisons suivantes:

- ❶ il n'établit pas des corrélations favorables entre les électrons.
- ❷ ψ_v^{CM} comporte le chevauchement significatif à des niveaux plus élevés de Landau.
- ❸ à $\nu = \frac{1}{2p+1}$, ne réduit pas à la fonction d'onde de Laughlin.

La référence [16] note que ces problèmes peuvent être réparés, en grande partie, en enlevant le facteur $|z_j - z_i|^{2p}$ du dénominateur, ce qui donne

$$\psi_{\frac{2pn \pm 1}{n}}^{CM}(B) = \phi_{\pm n}(B^*) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p} \quad (3.22)$$

$\prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p}$ est le facteur de Jastrow qui décourage vivement les électrons de s'approcher les uns des autres car la fonction d'onde s'annule avec une grande puissance en fonction de la distance relative entre deux électrons. Cet argument montre clairement pourquoi les fonctions d'onde des FC produisent de faibles énergies d'interaction. Le chevauchement avec des niveaux plus élevés de Landau est considérablement réduit, mais pas complètement éliminé. Puisque nous sommes intéressés par l'EHQF qui correspond à la limite extrême $B \rightarrow \infty$, nous devons avoir une fonction d'onde strictement confinée dans le dernier NL, il suffit simplement de projeter $\psi_{\frac{2pn \pm 1}{n}}^{CM}(B)$ sur le dernier NL :

$$\psi_{\frac{2pn \pm 1}{n}}^{CM}(B) = p_{DNL} \phi_{\pm n} \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p}, \quad (3.23)$$

Où p_{DNL} est l'opérateur de projection sur le dernier NL. Ces fonctions d'onde ¹² ne contiennent pas de paramètres ajustables. Les excitations élémentaires sont obtenues quand un FC est promu depuis le dernier NL-FC occupé vers le premier NL-FC inoccupé (fig.3.7.b). Notons que les fonctions d'onde de Laughlin ne sont qu'un cas particulier correspondant à $\nu = \frac{1}{2p+1}$ i.e., $n = 1$.

La prochaine étape sera consacrée au développement d'une théorie microscopique détaillée basée sur la physique intuitive des FC décrite ci-dessus. Une issue possible est de rechercher un nouveau mode d'interaction qui peut être résolu exactement pour des FC. Pour le moment, ceci reste impossible. Une autre approche est de réécrire le problème original d'une façon à ce que la physique des FC soit la solution d'un champ moyen, et en égard des perturbations. Nous retrouvons cette philosophie dans la théorie du champ de Chern-simons appliquée aux FC.

3.7 La Théorie des fermions composites de Chern–Simons

Les interactions non-locales peuvent être exprimées via un champ de jauge et des interactions locales. Dans le cadre des systèmes bidimensionnels d'électrons, le champ de jauge de Chern-Simons joue un rôle central pour l'Effet Hall quantique Fractionnaire car il modifie la statistique des particules.

3.7.1 La Théorie de Lopez- Fradkin

Dans l'approche des fermions de Chern-Simons, le système d'électron est soumis à une transformation mathématique qui le convertit en nouveau système des fermions. Cela, en plus de l'interaction ordinaire de coulomb, a une interaction par l'intermédiaire d'un potentiel vecteur effectif, connu comme champ de Chern-Simons. La transformation est parfois décrite en disant qu'un chiffre pair de quantum de flux magnétique effectif sont attachés à chaque électron.

Nous avons commencé, à la section 3.6.2 avec les électrons à B^* , par ajouter $2p$ quantum de flux pour chaque électron, et ensuite, nous avons fait une approximation de champ moyen d'aboutir avec des fermions à B . Lopez-Fradkin [22] débute la construction avec des électrons à B , attache $2p$ quantum de flux pointant dans la direction opposée à B , et effectue ensuite

l'approximation du champ moyen d'annuler une partie du champ extérieur, produisant des fermions en B^* à la fin. L'idée de base est indiquée dans Fig.3.11

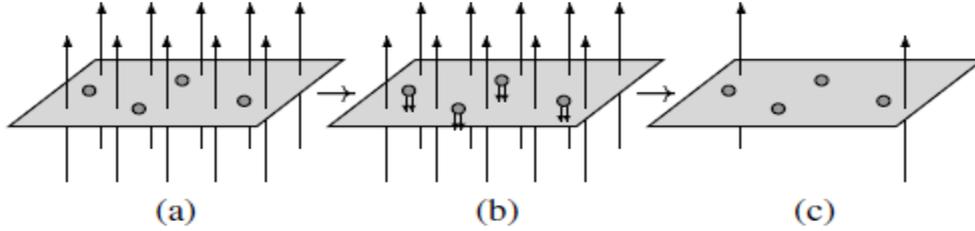


Fig.3.11- l'idée physique de la théorie de Lopez-Fradkin. Le système de l'EHQF est donné en (a). Deux quantum de flux magnétique sont attachés à chaque électron pointant en direction du bas pour convertir l'électron en fermion composite (b). Les Fermions Composites répondent à une combinaison des champs réels et annexés, et par conséquent, se comportent comme s'ils étaient dans un plus petit champ magnétique (c).

Nous considérons l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{1}{2m_b} \sum_i (p_i + \frac{e}{c} A(r_i))^2 + V \right] \psi = E\psi \quad (3.24)$$

Où V est l'interaction. Par une transformation singulière exacte de jauge définie par :

$$\psi = \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \psi_{CS} , \quad (3.25)$$

Connue comme la transformation de FCCs, le problème des valeurs propres peut être exprimé comme :

$$H' \psi_{CS} = E \psi_{CS} , \quad (3.26)$$

$$H' = \left[\frac{1}{2m_b} \sum_i (p_i + \frac{e}{c} A(r_i) - \frac{e}{c} a(r_i))^2 + V \right], \quad (3.27)$$

$$a(r_i) = \frac{2p}{2\pi} \phi_0 \sum_j \nabla_i \theta_{ij} , \quad (3.28)$$

Suivant l'algèbre semblable à celui de la section 3.6.2, le potentiel vecteur $-a$ revient à attacher un flux de quantum $(-2p\phi_0)$ à chaque électron. C'est le modèle de départ pour un fermion composite pour la théorie de Lopez-Fradkin.

De nouveaux progrès ne sont possibles que si des approximations sont faites. L'approche habituelle consiste à faire un rapprochement de "champ moyen", ce qui revient à la diffusion du flux de CS sur chaque fermion composite dans un champ magnétique de CS uniforme, et en supposant que, pour l'ordre zéro, les particules répondent à la somme des CS et des champs externes. Formellement, on écrit :

$$A - a = A^* + \delta A , \quad (3.29)$$

$$\nabla \times A^* = B^* \hat{z} , \quad (3.30)$$

$$B^* = B - 2p\rho\phi_0, \quad (3.31)$$

Où B^* est le champ magnétique efficace éprouvé par les fermions composites.

L'Hamiltonien transformé peut maintenant être écrit comme suit :

$$H' = \left[\frac{1}{2m_b} \sum_i (p_i + \frac{e}{c} A^*(r_i))^2 + V + V' \right] = H'_0 + V + V' , \quad (3.32)$$

où V' contient des termes proportionnels à δA . La solution de H'_0 est triviale, décrivant des fermions libres dans un champ magnétique effectif B^* .

Nous avons donc décomposé l'Hamiltonien en deux parties: H'_0 peuvent être résolues de façon exacte et le reste $V + V'$, doit être traité par la théorie de perturbation. L'extension de l'approximation du champ moyen autour de H'_0 est un élément crucial, étape non-perturbatrice.

Une transformation de CS mathématiquement exacte peut être faite pour toute quantité de flux, entier ou non entier, à chaque électron. Mais parce que la résolution du problème transformé est exactement pas plus possible, qu'il devrait résoudre le problème original.

Lopez et Fradkin ont rectifié le problème dans la langue des intégrales fonctionnelles, qui est adaptée à l'étude des corrections à la théorie des champs moyens.

La fonction de partition à la température zéro est écrite comme

$$Z = \int D\psi D\psi^* Da e^{\left(\frac{i}{\hbar}S\right)}, \quad (3.33)$$

$$S = \int d^2r \int dt L, \quad (3.34)$$

$$L = \psi^*(i\partial_t - a_0)\psi + \frac{1}{2m_b} \left| \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}A - \frac{e}{c}a \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{2p\phi_0} a_0 \nabla \times a + \int d^2r' (\rho(r) - \bar{\rho}) V(r - r') (\rho(r') - \bar{\rho}), \quad (3.35)$$

Où ψ et ψ^* sont les variables de Grassmann, $\bar{\rho}$ est la densité moyenne, et $V(r - r')$ est l'interaction entre les électrons. L'attachement de Flux est introduit par un multiplicateur de Lagrange a_0 . Parce que a_0 entrée linéairement dans l'action, il peut être intégré et tendre à produire une fonction delta qui impose la contrainte

$$\nabla \times a(r) = 2p\phi_0\rho(r) = 2p\phi_0\psi^*(r)\psi(r). \quad (3.36)$$

Ce formalisme est intérieurement lié à la théorie de champ de Chern -Simons topologique (CS). Le lagrangien de CS à la forme

$$L_{CS} \sim \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} = 2\epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \quad (3.37)$$

Avec

$$F_{\nu\lambda} = \partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu \quad (3.38)$$

Ici $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$, soit le tenseur antisymétrique de levy -Civita, avec $\epsilon^{012} = 1$. L'indice μ prend des valeurs 0,1,2, le premier étant la composante temporelle et les composantes de l'espace. L'action CS est invariante, jusqu'aux termes de surface, sous une transformation de jauge, parce que la variation fonctionnelle $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ entraîne une modification de L_{CS} qui est une dérivée totale

$$\begin{aligned} \delta L_{CS} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda} \delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu \delta A_\lambda \\ &= 2\epsilon^{\mu\nu\lambda} \delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda \\ &= -2\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (A_\lambda \partial_\mu \Lambda). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Zhang, Hansson, et Kivelson [27,28] ont noté que le terme proportionnel au $a_0 \nabla \cdot a$ dans l'équation (3.35), ce qui assure l'attachement de flux, est précisément égal au Lagrangien de Chern-Simons dans la jauge de Coulomb. Ce point est précisé par écrit :

$$\begin{aligned} L_{CS} &= \frac{1}{4p\phi_0} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \\ &= \frac{1}{4p\phi_0} \epsilon^{ij} a_0 \partial_i a_j - \frac{1}{4p\phi_0} \epsilon^{ij} a_i \partial_0 a_j \end{aligned} \quad (3.40)$$

Où i, j représentent les composantes spatiales ($i, j = 1, 2$); les composantes temporelles ont été affichées de manière explicite dans la deuxième étape ($\partial_0 = \partial_t$). Le premier terme sur le côté droit de l'équation (3.40) est identique au troisième terme du côté droit de l'équation (3.35). Qu'en est-il du dernier terme de l'équation (3.40)? Dans l'espace de Fourier, elle est proportionnelle au :

$$\epsilon^{ij} a_i(q, w) (-iw) a_j(-q, -w). \quad (3.41)$$

En choisissant l'axe des x le long de q , la condition de jauge de Coulomb $q \cdot a = 0$ implique $a_2(q, w) = 0$, garantissant que le dernier terme de l'équation (3.40) est identiquement zéro. La contrainte de l'équation (3.36) est utilisée pour éliminer les deux facteurs de densité dans le dernier terme de l'équation (3.35) en faveur de $(2p\phi_0)^{-1} \nabla \times a$. L'action est alors quadratique dans le champ de fermions, qui peut être intégrée dehors. Diverses fonctions de réponse peuvent être exprimées en fonction de corrélation du champ de vecteur potentiel et de leurs moyennes sur les configurations de champ de CS, elles sont évaluées par des méthodes de perturbation de diagramme standard.

Les solutions de l'Hamiltonien H'_0 non perturbé, sont loin de la solution réelle, comme on peut le voir à la fois à partir des valeurs de l'énergie et les fonctions propres. Pour $\nu = \frac{n}{(2pn+1)}$, le «non perturbé» gap énergétique est donné par :

$$\Delta = \hbar \omega_c^* = \hbar \frac{eB^*}{m_b c} = \frac{\hbar}{(2pn+1)} \frac{eB}{m_b c} \quad (3.42)$$

Avec $B^* = B / (2pn + 1)$. Le gap d'énergie réelle dans le problème de niveau de Landau le plus bas, en revanche, est proportionnel à $e^2 / \epsilon l \sim \sqrt{B}$, l'échelle de l'énergie que dans le problème de DNL, et est indépendant de la masse de l'électron. Venons à les «non perturbé» fonctions propres, notons $\phi_n^\alpha(B^*)$ les fonctions propres de H'_0 au champ magnétique B^* .

La disparition de la transformation CFCS donne les fonctions d'ondes d'électrons des champs moyens (en utilisant l'équation 3.25)

$$\psi_v^\alpha(B) = \prod_{i < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \phi_n^\alpha(B^*), \quad (3.43)$$

Qui ne sont que les fonctions d'onde rencontrées précédemment dans l'équation. (3.18).

Résumé

Avant de conclure ce chapitre, nous avons voulu énumérer quelques résultats qui sont en fait les premiers fruits d'une théorie de conception simple et générale, celle des Fermions Composites.

(i) La théorie de FC donne une image physique intuitive de l'origine de l'incompressibilité dans un niveau de Landau partiellement rempli, quand les fermions composites occupent un nombre entier de Ns-FC

(ii) L'EHQF des électrons est interprété comme L'EHQI des fermions composites. Par exemple, les états de HQF aux facteurs des remplissages $1/3, 2/5, 3/7$ etc. ... sont complètement analogues aux états de HQI des facteurs des remplissages 1, 2, 3, etc.... De cette façon, les deux phénomènes sont unifiés.

(iii) La théorie de FC explique toutes les fractions d'une manière complètement équivalente.

En résumé, la théorie des Fermions Composites faiblement interagissant donne une explication simple et unifiée de la phénoménologie manifestement riche de tous les états liquides dans le dernier NL connus jusqu'à maintenant, malgré cela, cette dernière est incapable de répondre à plusieurs questions fondamentales simples, elle n'explique même pas ce qu'est un fermion composite. Ou sous une autre forme, si la physique étudie le système réel, est-ce que l'attachement de flux satisfait dans un système réel. De même, les fermions composites sont des objets beaucoup plus grands que des électrons pour avoir la même densité, et que beaucoup d'autres obstacles n'ont pas été discutés ici.

Chapitre 4

*Mécanique quantique d'un système
de particules chargées dans un plan à 2
dimensions en présence d'un champ magnétique*

4.1 Résolution de l'équation de Schrödinger d'une particule chargée en coordonnée polaire :

En coordonnée polaire

$$z = x - iy = re^{-i\theta} \quad , \quad \bar{z} = x + iy = re^{i\theta} \quad . \quad (4.1)$$

Les dérivés sont reliés comme :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{e^{i\theta}}{2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{ie^{i\theta}}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{-i\theta}}{2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{ie^{-i\theta}}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

L'hamiltonien (2.42) devient :

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{4} r^2 \right) \quad (4.3)$$

et l'équation de Schrödinger ⁸:

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{4} r^2 \right) \psi = E\psi \quad (4.4)$$

Nous chercherons la solution sous la forme :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(r) e^{im\theta} \quad (4.5)$$

et nous obtenons, pour la fonction radiale, l'équation :

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left[2E - m - r^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (4.6)$$

⁸ On choisira la longueur magnétique $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} = 1$ et l'énergie de cyclotron $\hbar\omega_c = \frac{\hbar eB}{m_b c} = 1$

Introduisant la nouvelle variable indépendante $\xi = \frac{1}{2}r^2$, nous recopierons cette équation sous la forme :

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{m^2}{4\xi}\right) R = 0, \quad \beta = E - \frac{m}{2} \quad (4.7)$$

Lorsque $\xi \rightarrow \infty$, la fonction cherchée se comporte comme $e^{-\frac{\xi}{2}}$, et lorsque $\xi \rightarrow 0$ comme $\xi^{\frac{|m|}{2}}$. En conséquence, nous chercherons la solution sous la forme

$$R = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|m|}{2}} w(\xi) \quad (4.8)$$

et nous obtiendrons, pour $w(\xi)$, l'équation de la fonction hypergéométrique dégénérée :

$$\xi w(\xi)'' + (m + 1 - \xi)w(\xi)' + \left(\beta - \frac{|m|}{2} - \frac{1}{2}\right) w(\xi) = 0 \quad (4.9)$$

Possédant la solution suivante :

$$w = F\left\{-\left(\beta - \frac{|m|+1}{2}\right), |m| + 1, \xi\right\}. \quad (4.10)$$

Pour que la fonction d'onde soit partout finie, la quantité $\beta - \frac{|m|+1}{2}$ doit être un entier positif. Alors, les vecteurs propres de l'hamiltonien sont donnés par :

$$\psi_{n_\rho, m}(\theta, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|m|}{2}} F\{-n_\rho, |m| + 1, \xi\}. \quad (4.11)$$

l'indice n_ρ dénote le niveau de Landau (NL) tel que $n_\rho = 1, 2, \dots$, le moment angulaire $m = -n_\rho, -n_\rho + 1, \dots$, et les valeurs propres sont :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) + m, \quad (4.12)$$

En comparant la fonction hypergéométrique de l'équation (4.11) avec la fonction hypergéométrique de la fonction d'onde de l'électron de l'atome hydrogène, on peut interpréter $|m|$ comme le moment orbital (ℓ) de l'électron bidimensionnel ainsi, sera énoncée la définition suivante :

Dans un plan à 2-dimensions, le moment orbital de l'électron est donné par $|m|$ où m est la projection Z du moment orbital et ne peut prendre que les valeurs $\pm|m|$.

En réalité, on est entrain d'étudier la mécanique quantique d'un type de particules vivant dans un espace à deux dimensions. Dans la littérature, ce type de particules sont appelés anyons [33,34]. Ces derniers ont une statistique arbitraire : ils ne sont ni des bosons, ni des fermions, mais quelque chose entre les deux [35].

4.2 Résolution de l'équation de Schrödinger de deux particules chargées en coordonnée polaire :

Le problème du mouvement de deux particules dans un champ magnétique où aucun champ électrique extérieur n'est appliqué peut être réduit en mécanique quantique à celui d'une seule particule. L'hamiltonien de deux particules (de même masse m_b) sans interaction s'écrit sous la forme :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_b} (p_1 + \frac{e}{c} A(r_1))^2 + \frac{1}{2m_b} (p_2 + \frac{e}{c} A(r_2))^2 \quad (4.13)$$

L' hamiltonien dans la jauge symétrique peut être exprime comme :

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{2} \left[-4 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{1}{4} z_1 \bar{z}_1 - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[-4 \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} + \frac{1}{4} z_2 \bar{z}_2 - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

z_1, z_2 étant les coordonnées des particules dans l'espace complexe, introduisons au lieu des z_1, z_2 les nouvelles variables Z et z (z et Z sont les coordonnées relatives et de centre de masse) telle que :

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (4.15)$$

$$z = z_1 - z_2$$

Et les dérivées sont reliées comme

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial z}$$

Nous obtenons après cette transformation l'hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{2} \left[-2 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \bar{Z}} + \frac{1}{2} Z \bar{Z} - Z \frac{\partial}{\partial Z} + \bar{Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[-8 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{8} z \bar{z} - z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nous définissons les variables Z et z dans les coordonnées polaires comme suit :

$$\begin{aligned} Z = \eta e^{i\varphi} \quad , \quad \bar{Z} = \eta e^{-i\varphi} \\ z = r e^{i\theta} \quad , \quad \bar{z} = r e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

L'hamiltonien devient :

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{2\partial\eta^2} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial}{\partial\varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \\ + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta^2} - i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{8} r^2 \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(-\frac{1\partial^2}{2\partial\eta^2} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial}{\partial\varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \psi_{12} + \\ \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta^2} - i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{8} r^2 \right) \psi_{12} = i\hbar \frac{\partial\psi_{12}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cherchons une solution de l'équation de la forme :

$$\psi_{12}(\eta, r) = \psi_G(\eta) \psi_c(r) \quad (4.21)$$

Reportée dans l'équation (4.19) elle devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(-\frac{1\partial^2}{2\partial\eta^2} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial}{\partial\varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \psi_G(\eta) + \\ \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta^2} - i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{8} r^2 \right) \psi_c(r) = i\hbar \left[\frac{\partial\psi_G(\eta)}{\partial t} + \frac{\partial\psi_c(r)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \psi_G(\eta) = i\hbar \frac{\partial \psi_G(\eta)}{\partial t}, \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} - i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{8} r^2 \right) \psi_c(r) = i\hbar \frac{\partial \psi_c(r)}{\partial t}. \quad (4.24)$$

Désignons par E_G et E_C les énergies correspondantes. On a :

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \psi_G(\eta) = E_G \psi_G(\eta), \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} - i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{16} r^2 \right) \psi_c(r) = E_C \psi_c(r). \quad (4.26)$$

Nous chercherons les solutions sous la forme :

$$\psi_G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(\eta) e^{iM\varphi}, \quad (4.27)$$

$$\psi_c(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(r) e^{im\theta}.$$

et nous obtenons, pour les fonctions radiales, les équations :

$$R''(\eta) + \frac{1}{\eta} R'(\eta) + \left[4E_G - 2M - \eta^2 - \frac{M^2}{\eta^2} \right] R(\eta) = 0, \quad (4.28)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left[E_C - \frac{m}{2} - \frac{1}{16} r^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (4.29)$$

Introduisons les nouvelles variables indépendantes $\xi_1 = \eta^2$, $\xi_2 = \frac{1}{4}r^2$, nous recopierons ces équations sous la forme :

$$\xi_1 R_1''(\xi_1) + R_1'(\xi_1) + \left(-\frac{\xi_1}{4} + \beta_1 - \frac{M^2}{4\xi_1}\right) R_1(\xi_1) = 0, \quad \beta_1 = E_G - \frac{M}{2} \quad (4.30)$$

$$\xi_2 R_2''(\xi_2) + R_2'(\xi_2) + \left(-\xi_2 + \beta_2 - \frac{m^2}{4\xi_2}\right) R_2(\xi_2) = 0, \quad \beta_2 = E_c - \frac{m}{2} \quad (4.31)$$

lorsque $\xi_1 \rightarrow \infty$ et $\xi_2 \rightarrow \infty$, les fonctions cherchées se comportent comme

$$e^{-\frac{\xi_1}{2}}, e^{-\frac{\xi_2}{2}}, \text{ et lorsque } \xi_1 \rightarrow 0 \text{ et } \xi_2 \rightarrow 0 \text{ comme } \xi_1^{\frac{|M|}{2}}, \xi_2^{\frac{|m|}{2}}.$$

En conséquence, nous chercherons les solutions sous la forme

$$R_1(\xi_1) = e^{-\frac{\xi_1}{2}} \xi_1^{\frac{|M|}{2}} w(\xi_1) \quad (4.32)$$

$$R_2(\xi_2) = e^{-\frac{\xi_2}{2}} \xi_2^{\frac{|m|}{2}} w(\xi_2)$$

et nous obtiendrons, pour $w(\xi_1)$ et $w(\xi_2)$, les équations de la fonction hypergéométrique dégénérée :

$$\xi_1 w_1''(\xi_1) + (M + 1 - \xi_1) w_1'(\xi_1) + \left(\beta_1 - \frac{|M|}{2} - \frac{1}{2}\right) w_1(\xi_1) = 0 \quad (4.33)$$

$$\xi_2 w_2''(\xi_2) + (m + 1 - \xi_2) w_2'(\xi_2) + \left(\beta_2 - \frac{|m|}{2} - \frac{1}{2}\right) w_2(\xi_2) = 0 \quad (4.34)$$

Possédant les solutions suivantes :

$$w_1(\xi_1) = F\left\{-\left(\beta_1 - \frac{|M|+1}{2}\right), |M| + 1, \xi_1\right\}. \quad (4.35)$$

$$w_2(\xi_2) = F\left\{-\left(\beta_2 - \frac{|m|+1}{2}\right), |m| + 1, \xi_2\right\}.$$

*Chapitre 4 : Mécanique quantique d'un système
de particules chargées dans un plan à 2 dimensions en présence
d'un champ magnétique*

Pour que les fonctions d'ondes soient partout finies, les quantités $\beta_1 - (\frac{|M|+1}{2})$, $\beta_2 - (\frac{|m|+1}{2})$, doivent être des entiers positifs. Alors, les vecteurs propres de l'hamiltonien sont donnés par :

$$\psi_{12} = \frac{1}{2\pi} e^{iM\varphi} e^{-\frac{\xi_2}{2}} e^{-\frac{\xi_1}{2}} \xi_1^{\frac{|M|}{2}} e^{im\theta} \xi_2^{\frac{|m|}{2}} \times F\{-n_\rho, |m| + 1, \xi_2\} F\{-n_{\rho'}, |M| + 1, \xi_1\}. \quad (4.36)$$

Les indices n_ρ , $n_{\rho'}$ dénotent le niveau de Landau (NL) tel que $n_\rho = 1, 2, \dots, n_{\rho'} = 1, 2, \dots$ le moment angulaire relatif $m = -n_\rho, -n_\rho + 1, \dots$, et le moment angulaire de centre de masse $M = -n_{\rho'}, -n_{\rho'} + 1, \dots$,

On rappelle que le phénomène de la supraconductivité a été expliqué par les auteurs BCS en utilisant la notion de paire d'électrons. Il se trouve que cette paire d'électrons possède une impulsion totale nulle ($p_1 + p_2 = 0$) et par la suite, le moment orbital de centre de masse de la paire est aussi nul, alors si on essaye de suivre cette idée de la paire d'électrons la fonction (4.36) devient :

$$\psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} e^{-\frac{\xi_2}{2}} \xi_2^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{\xi_1}{2}} F\{-n_\rho, |m| + 1, \xi_2\} \quad (4.37)$$

- La permutation des particules se traduit par le changement suivant $\theta \rightarrow \theta + \pi$, nous obtenons :

$$\psi'_{12} = (-)^m \psi_{12} \quad (4.38)$$

Par conséquent, ces particules ont la statistique des fermions si m est impair, des bosons si m est pair et des anyons si on ajoute le facteur de phase $e^{i\frac{\theta}{\theta_0}}$ qui tient compte de la dégénérescence des états de Landau.

*Chapitre 4 : Mécanique quantique d'un système
de particules chargées dans un plan à 2 dimensions en présence
d'un champ magnétique*

Après les transformations (4.15), (4.18), la fonction (4.37) devient :

$$\psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(m+|m|)\arg(z_1-z_2)} \times (z_1 - z_2)^{|m|} e^{-\frac{1}{4}(|z_1|^2+|z_2|^2)} F\{-n_\rho, |m| + 1, |z_1 - z_2|^2\} \quad (4.39)$$

Avec $e^{i(m+|m|)\arg(z_1-z_2)}$ étant une phase qui rend l'équation de Schrödinger invariante, alors, on peut écrire la fonction d'onde comme suit:

$$\psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (z_1 - z_2)^{|m|} e^{-\frac{1}{4}(|z_1|^2+|z_2|^2)} F\{-n_\rho, |m| + 1, |z_1 - z_2|^2\} \quad (4.40)$$

- La fonction d'onde (4.40) n'est autre que la fonction d'onde de 'Laughlin' mais à deux électrons à une fonction hypergéométrique multiplicatif prés.

$$\psi_{12}^{Lg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (z_1 - z_2)^{|m|} e^{-\frac{1}{4}(|z_1|^2+|z_2|^2)} \quad (4.41)$$

Il est possible que Laughlin s'est inspiré son choix de la fonction d'onde de la fonction simplifiée (4.41). Une généralisation à un système à N_e électrons se fait juste en effectuant le produit des fonctions ψ_{ij}^{Lg} :

$$\psi^{Lg} = \prod_{i<j} \psi_{ij}^{Lg} \quad (4.42)$$

Conclusion

Nous nous trouvons parfois en face d'un phénomène physique étonnant, comme par exemple l'Effet Hall Quantique. Nous aimerions comprendre ce que nous voyons dans ce phénomène, et nous nous demandons quelle est sa nature ? D'où est-il arrivé ? Et pourquoi est-il ce qu'il est ? Y a-t-il une théorie capable de résoudre toutes les énigmes que contient le phénomène ?

Dans une tentative de répondre à ces questions, on a adopté dans notre mémoire certaines théories. Parmi elles, la théorie de Laughlin pour les fractions $\nu = 1/(2k + 1)$... avec k un nombre entier positif, la théorie des fermions composites pour les fractions $\nu = \frac{n}{(2nk \pm 1)}$ où $n > 1$ et k des entiers positifs. Chacune de ces deux théories explique le phénomène, avec des approches que nous pouvons qualifier de comparables mais différentes dans l'interprétation.

La théorie de Jain paraît plus générale que la théorie de Laughlin, puisqu'elle nous fournit plus de fractions. Mais on se demande si les fermions composites existent vraiment. Alors si c'est le cas, quelle est la dynamique qui laisse les fermions capturer ($2p$ flux quantum).

C'est dans le but de se rapprocher plus de la réalité de ce phénomène que nous avons essayé de maîtriser mieux les bases théoriques sur lesquelles reposent les théories de Jain et de Laughlin. Ceci nous a conduit à étudier en détail la mécanique quantique d'un électron dans un plan à 2-dimensions en présence d'un champ magnétique. Cette étude a révélé que les nombres quantiques qui définissent l'état de l'électron comme le moment cinétique orbital et sa projection sont différents de ceux d'un électron dans un espace à trois dimensions. Le problème à deux électrons a été aussi étudié comme un premier pas pour une possible généralisation aux problèmes à N_e électrons. Nous avons trouvé aussi que la statistique de la particule bidimensionnelle est la même que celle à trois dimensions, celle des bosons pour ($S=0$) et celle des fermions pour ($S=1$), mais elle peut basculer vers une statistique arbitraire, celle des anyons si on ajoute le facteur de phase $e^{i\frac{\theta}{\theta_0}}$ qui tient compte de la dégénérescence des états de Landau.

Bibliographie

- [1] Benoît Douçot, Bertrand Duplantier, Vincent Pasquier, Vincent Rivasseau .
The Quantum Hall Effect, (Poincaré Seminar 2004).
- [2] ”conduction quantique et physique mesoscopique”, école polytechnique Gilles
Montambaux janvier 2010.
- [3] Manuel Aranzana, étude des jonctions entre canaux de bord de l’effet hall quantique
fractionnaire (Laboratoire Pierre Aigrain, 2005).
- [4] J. Wakabayashi et s. kawaji, j. phys. soc. jpn44, 1839 (1978).
- [5] K. Von Klitzing, G. Dorda et M/ Pepper Phys. Rev. Lett45, 494 (1980).
- [6] Jainendra K.Jain, Composite Fermions (the Pennsylvania state university,2007).
- [7] E. Abrahams, P.W.Anderson, D.C.Licciardello, and T.V.Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett.
42,673 (1979); D.Vollhardt and P.wolfle, Phys.Rev.lett.45, 483(1980); P.W.Anderson, E.
Abrahams And T.V.Ramakrishnan, Phys.Rev.Lett.43, 781(1979); L.P.Gorkov, A.I.Larkin,
and D.E.Khmel’nitskii,JETP Lett. 30,248(1979).
- [8] R.B.Laughlin, phys.Rev.b23,5632(1981)
- [9] A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. 64, 220 (1984)
- [10] S.Mohamed Khefif, Etude Quantitative de l’Effet Hall Quantique Fractionnaire,
fermions composites dans l’espace de Hilbert du niveau électronique de Landau le plus
bas (Université Aboubakr Belkaide de Tlemcen, Institut de Physique ,1999)
- [11] Laurent-Patrick Levy, Magnétisme et supraconductivité, CNRS Editions
- [12] D.C. Tsui, H.L. Stormer et A.C. Gossard Phys. Rev. Lett48, 1559 (1982).
- [13] R. Willett, J.P. Eisenstein, H.L. Stormer, D.C. Tsui, A.C. Gossard et J. English Phys.
Rev.Lett59, 1776 (1987).
- [14] D. Yoshioka, The Quantum Hall Effect (Springer, New York, 1998).
- [15] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Finite-size studies of the incompressible state of the
fractionally quantized Hall effect and its excitations.Phys.Rev . Lett.54, 237(1985).
- [16] J. K. Jain, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall Effect.
Phys.Rev. Lett. 63, 199 (1989).
- [17] J. K. Jain, The composite fermion: A quantum particle and its quantum fluids. Physics
Today.53 (4), 39 (2000).
- [18] Karol Iwysokinski,integer and fractional quantum hall effects,eur.j.phys-21(2000)535-
548.printed in the uk.

-
- [19] Jain JK (1989) composite-fermion approach for the fractional quantum hall effect ,
physical Review Letters 63:199-202.
- [20] J. K. Jain, The role of analogy in unraveling the fractional-quantum-Hall-effect
mystery. *Physica .E* 20, 79 (2003).
- [21] Jain JK, *fractional quantum hall effect* ,(The Pennsylvania State University Park,
AA, USA, 2006)
- [22] A. Lopez and E. Fradkin, Fractional quantum Hall effect and Chern–Simons gauge
Theories. *Phys.Rev.B* 44, 5246 (1991).
- [23] A. Lopez and E. Fradkin, Response functions and spectrum of collective excitations
of fractional-quantum-Hall-effect systems. *Phys.Rev.B* 47, 7080 (1993).
- [24] A. Lopez and E. Fradkin, Fermionic Chern–Simons theory for the fractional
quantum Hall effect in bilayers. *Phys.Rev .B* 51, 4347 (1995).
- [25] A. Lopez and E. Fradkin, Fermionic Chern–Simons field theory for the fractional
quantum Hall effect. In *composite fermions* , ed. O. Heinonen (New York:World
Scientific, 1998).
- [26] A. Lopez and E. Fradkin, Fermion Chern–Simons theory of hierarchical fractional
quantum Hall states. *Phys.Rev .B* 69, 155322 (2004).
- [27] S. C. Zhang, H. Hansson, and S. Kivelson, Effective-field-theory model for the
fractional quantum Hall effect. *Phys.Rev .Lett.* **62**, 82 (1989).
- [28] S. C. Zhang, The Chern–Simons–Landau–Ginzburg theory of the fractional
quantum Hall effect. *Int.J.Mod.Phys.B* 6, 25 (1992).
- [29] Keshav N. Shrivastava, Comments on “Fractional Quantum Hall Effect of Composite
Fermions” by W. Pan et al *Phys. Rev.Lett.* 90, 016801 (2003)
- [30] M.I. Dyakonov, Twenty years since the discovery of the Fractional Quantum Hall Effect:
Current state of the theory
- [31] A. M. Chang, *Rev. Mod. Phys.* 75, 1449 (2003).
- [32] L.Landau et E.Lifchitz landau, *Mécanique Quantique*, (Editions Mir, Moscou ,1967)
- [33] J.M.Leinaas and J.Myrhiem, ”on the theory of identical particles”
Nuovo Cimonto, **B37**, 1- 23 (1977).
- [34] Fiwilczek, *Phys.Rev.Lett* **49**,957(1982).
- [35] Z.Bentalha, B.Liani and M.Tahiri, *Chin.phys.Lett.*22:1207-1209,2005.