Table des Matières

Introduction

Les équations de Ginzburg Landau sont des équations aux dérivées partielles non linéaires proposées dans les années 50 pour la modélisation de la supraconductivité.

Depuis, elles sont devenues un outil très courant dans de nombreux domaines de la physique où des tourbillons et /ou des défauts topologiques interviennent, comme par exemple les super-fluides.

De nouveaux problèmes de cette nature apparaissent constamment en physique (par exemple le ferromagnétisme, les condensats de Bose-Einstein,...). Depuis les années 90, des avancées importantes ont eu lieu dans la compréhension mathématique des équations de Ginzburg Landau. Elles font intervenir des techniques issues de nombreux domaines des mathématiques : EDP non linéaires, théorie géométrique de la mesure, effets de concentration, tourbillons, etc

Ce problème de minimisation dans son aspect mathématique a suscité beaucoup d'intérêts ces dernières années.

F. Bethuel, H. Brézis et F. Helein dans [1] et [2] ont longuement étudié la minimisation de l'énergie de Ginzburg Landau. Si Ω est un ouvert borné régulier, simplement connexe de $\mathbb{C}$, et si ε est un nombre réel strictement positif, cette énergie est la fonctionnelle définie sur $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$ par

$$E_\varepsilon(\mathrm{u}) \; = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|\mathrm{u}|^2\,)^2.$$

F. Bethuel et al ont considéré le problème de minimisation de cette énergie sur les espaces de la forme

$$\mathrm{H}^1_g(\Omega,\mathbb{C}) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega,\mathbb{C})/\mathrm{u} = g \text{ sur } \partial\Omega\}$$

où g est une fonction de classe C^1 de $\partial\Omega$ dans le cercle unité S^1.

Ils ont ainsi démontré l'existence des minimiseurs u_ε de cette énergie puis étudié leur comportement lorsque le paramètre ε tend vers 0. Ils se sont alors rendu compte que le comportement de ces minimiseurs dépendait fortement du degré d de la fonction g sur le bord.

Dans le cas où ce degré est nul, les minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg Landau convergent vers l'application harmonique u_* de Ω dans S^1 qui vaut g sur $\partial\Omega$.

Cette convergence a lieu dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega, \mathbb{C})$, dans les espaces de Hölder $C^{1,\alpha}(\Omega; \mathbb{C})$ pour tout α strictement inférieur à 1, on a même des estimations plus précises suivantes pour tout compact K de Ω, et pour tout ε suffisamment petit

$$\|u_\varepsilon - u_*\|_{C^k(K)} \leq c_{k,K}\, \varepsilon^2, \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Dans le cas où le degré d est non nul, le comportement des minimiseurs u_ε est radicalement différent, les minimiseurs convergent toujours vers une fonction harmonique u_* à valeurs dans S^1 qui n'est plus définie sur Ω. On constate en effet, l'apparition de $|d|$ vortex $a_1, ..., a_{|d|}$ au voisinage desquels l'application u_* a des singularités d'énergie infinie.

Ce comportement provient du fait que $H^1_g(\Omega, S^1)$ soit vide lorsque le degré de g est non nul, on ne peut donc espérer que la suite des minimiseurs converge vers une application de cet espace comme dans le cas du degré nul. On peut par ailleurs, préciser la convergence des minimiseurs vers u_* et le comportement de cette fonction.

Ainsi, si K est un compact de Ω, la convergence a lieu dans les espaces $C^k(K)$ pour tout entier k, mais, on n'a plus les estimations précédentes.

Quand à la fonction u_*, elle est caractérisée par le fait qu'elle minimise une certaine fonctionnelle dite énergie renormalisée, u_* a ainsi des degrés tous égaux à 1 ou -1 autour des points $a_1, ..., a_{|d|}$, selon que d soit positif ou négatif.

Le but était de comprendre mathématiquement les mécanismes d'apparition des vortex.

On se propose de donner une description physique du problème.

Description physique

Les résultats présentés dans ce mémoire présentent des analogies frappantes avec de nombreuses découvertes théoriques et expérimentales dans le domaine des supraconducteurs et des superfluides au cours des 40 dernières années. Des fonctionnelles ont été introduites initialement par V. Ginzburg et L. Landau dans l'étude des problèmes de transition de phase de la supraconductivité, des modèles similaires sont également utilisés dans les superfluides tel que l'hélium.

L'inconnue u représente un paramètre d'ordre complexe. Dans la littérature physique, u est souvent notée ψ est appelée une fonction d'onde des électrons condensés. Le paramètre ε, qui a la dimension d'une longueur, dépend du matériau et sa température. Dans la littérature physique, il est appelé la longueur de cohérence et il est souvent désigné par $\zeta = \zeta(T)$.

Pour la température $T < T_c$ avec T pas trop près de T_c, ζ est extrêmement petit de l'ordre de quelques centaines d'Angströms dans les supraconducteurs, par conséquent, il est intéressant d'étudier le comportement asymptotique en ε, même si le problème limite ($\varepsilon = 0$) n'a aucun sens physique.

L'objectif de ce mémoire a été de reconstruire le raisonnement de F. Bethuel, H. Brézis et F. Helein afin d'analyser les mécanismes et de le généraliser au problème de type p-Ginzburg-Landau avec contrainte suivant les valeurs du degré topologique.

Ce rapport se décompose en trois chapitres. Dans **le premier chapitre,** on rappelle quelques résultats qui seront utilisés dans les chapitres qui suivent. **Le deuxième chapitre** traite le comportement asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg Landau suivant les valeurs du degré topologique (deg$(g, \partial\Omega)$= 0)et (deg$(g, \partial\Omega) \neq 0$), et **le troisième chapitre** est consacré à l'étude du problème de minimisation d'une fonctionnelle de Ginzburg-Landau contenant l'opérateur p-Laplacien avec contrainte dans le cas où le degré est nul.

Notations

Ω: ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$

$\Gamma = \partial\Omega$: frontière de Ω

$C^0(\Omega)$: l'espace des fonctions continues sur Ω

$C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω $(k \in \mathbb{N})$

$C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \{\ \mathrm{u} \in C(\Omega)\,;\, \sup \frac{|\mathrm{u(x)} - \mathrm{u(y)}|}{|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^{\alpha}} < \infty\}$ avec $0 < \alpha < 1$

$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \{\mathrm{u} \in C^k(\Omega)\,;\, \mathrm{D^j u} \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)\ \forall\ \mathrm{j},\ |\mathrm{j}| \leq \mathrm{k}\ \}$

$C^\infty(\Omega) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\Omega)$

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω

$\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des distributions

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ intégrable tel que } \int_\Omega |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

$L^1_{loc}(\Omega)$: l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}_+\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\},\ 1 < p < \infty$

$$L^p(\Omega; \mathbb{R}^n) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p}$$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } c \text{ tel que } |f(x)| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega\}$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c;\ |f(x)| \leq c\ \ p.p \text{ sur } \Omega\}$

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1, n} \right\}$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v\rangle_{H^1(\Omega)}} = \left[\int_\Omega \left(v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right]^{1/2}$$

∇f : le gradient de la fonction f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t = \nabla f$

Δf : le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f$

div u : la divergence d'un vecteur u est div u$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial x_i}$

d : degré topologique de l'application g

$\mathrm{S}^1 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 / \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 1\}$ (le cercle unité)

$\mathrm{u} \wedge \mathrm{v} = \mathrm{u}_1\mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_2\mathrm{v}_1$, avec $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$ et $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$

Chapitre 1

Préliminaires

Ce premier chapitre a pour but de présenter (ou de rappeler) un certain nombre de résultats qui seront utilisés dans la suite du mémoire.

1.1 Degré topologique

1.1.1 Quelques définitions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, régulier et simplement connexe. Posons $\Omega = \mathrm{B}_1$.

Soit $g : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ une fonction continue. On considère l'application continue $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1$ définie par $\widetilde{g}(\mathrm{t}) = g(e^{\mathrm{it}})$, $\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\widetilde{g} = e^{i\Psi}$. En effet, on fixe $\mathrm{t}_0 \in \mathbb{R}$ et on considère le nombre réel $\Psi(\mathrm{t}_0)$ tel que

$$g(e^{\mathrm{it}_0}) = e^{\mathrm{i}\Psi(\mathrm{t}_0)}$$

Par le théorème d'inversion locale, l'application $\mathrm{x} \to e^{\mathrm{ix}}$ est un difféomorphisme local. Donc, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si

$$\left| g(e^{\mathrm{it}}) - g(e^{\mathrm{it}_0}) \right| < \delta$$

alors il existe un unique réel $\Psi(\mathrm{t})$ tel que

$$g(e^{\mathrm{it}}) = e^{\mathrm{i}\Psi(\mathrm{t})} \quad \text{et} \quad |\Psi(\mathrm{t}) - \Psi(\mathrm{t}_0)| < \varepsilon \, .$$

En utilisant la continuité de $\widetilde{g}$, il existe $\eta > 0$ tel que les mêmes propriétés ont lieu si $|\mathrm{t} - \mathrm{t}_0| < \eta$.

Ensuite, on fait varier t_0 sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$, de sorte qu'on puisse recouvrir cet intervalle par un nombre fini de voisinages $(\mathrm{t_i} - \eta,\ \mathrm{t_i} + \eta)$ sur lesquels on a construit un relèvement continu Ψ_i. Sur l'intersection de tels deux voisinages, les fonctions Ψ_i et Ψ_j diffèrent par un multiple entier de 2π. On peut donc construire un relèvement continu Ψ sur tout l'intervalle compact, en recollant bout à bout les fonctions Ψ_j et en translatant $\Psi_\mathrm{j+1}$ modulo une constante telle que

$$\Psi_{/(t_{\mathrm{j+1}}-\eta, t_{\mathrm{j+1}}+\eta)} = \Psi_{\mathrm{j+1}} - \left[\Psi_{\mathrm{j+1}} - \Psi_\mathrm{j}\right]_{/(t_\mathrm{j}-\eta, t_\mathrm{j}+\eta)\cap(t_{\mathrm{j+1}}-\eta, t_{\mathrm{j+1}}+\eta)}$$

On choisit alors des intervalles compacts $[-\mathrm{n},\mathrm{n}\ ]$ sur lesquels on construit des relèvements Ψ_n qui coïncident à nouveau, quitte à translater $\Psi_\mathrm{n+1}$ relativement à Ψ_n. Il résulte que

$$\Psi(\mathrm{t} + 2\pi) - \Psi(\mathrm{t}) \in 2\pi\mathbb{Z}, \ \ \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$$

Comme Ψ est continue, il existe un unique k entier tel que, $\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\mathrm{t} + 2\pi) - \Psi(\mathrm{t}) = 2\mathrm{k}\pi$$

On pose par définition

$$\deg(g, \mathrm{S}^1) = \mathrm{k}.$$

Il est aussi évident que le degré ne dépend pas du choix de Ψ puisque deux relèvements diffèrent par une constante.

On peut dire que le degré de g sur $\partial\Omega$ compte le nombre de tours (signés) que $g(\mathrm{x})$ fait autour de 0 lorsque x parcourt $\partial\Omega$ en laissant l'intérieur de Ω sur la gauche (sens positif)
.

1.1.2 Quelques propriétés du degré

On commence par la proposition suivante :

Proposition 1 *Si $g, h \in C(\partial\Omega,\ S^1)$ alors*

$$deg\ (gh) = deg\ g + deg\ h$$

$$deg\ (g/h) = deg\ g - deg\ h$$

Preuve: On va faire la démonstration dans le cas $\Omega = B_1$. Alors

$$g(e^{it}) = e^{i\Psi(t)} \quad \text{et} \qquad h(e^{it}) = e^{i\zeta(t)}.$$

Soient k =deg g, l =deg h. Alors, par la définition du degré,

$$\Psi(\mathrm{t} + 2\pi) - \Psi(\mathrm{t}) = 2\mathrm{k}\pi$$

$$\zeta(\mathrm{t} + 2\pi) - \zeta(\mathrm{t}) = 2\mathrm{l}\pi$$

donc

$$(\Psi + \zeta)(\mathrm{t} + 2\pi) - (\Psi + \zeta)(\mathrm{t}) = 2(\mathrm{k} + \mathrm{l})\pi$$

Et

$$(gh)(e^{it}) = e^{i(\Psi+\zeta)(t)},$$

Il en résulte que

$$\deg(gh) = \mathrm{k} + \mathrm{l} = \deg\ g + \deg\ h.$$

L'autre égalité se montre avec les mêmes arguments ■

Proposition 2 *Si $g \in C^1(\partial\Omega,\ S^1)$, alors*

$$deg\ g = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} g \wedge g_\tau \tag{1.1}$$

Preuve: Soit $\Omega = B_1$, En paramétrant g par rapport à l'angle $\theta \in (0,\ 2\pi)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} g \wedge g_\tau &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta) \wedge \frac{dg}{d\theta}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\Psi(\theta)} \wedge \frac{d}{d\theta}[e^{i\Psi(\theta)}] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi'(\theta) d\theta = \frac{\Psi(2\pi) - \Psi(0)}{2\pi} = \deg(g,\ \mathrm{S}^1).
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que

$$\begin{aligned} e^{i\Psi(\theta)} \wedge \frac{d}{d\theta}[e^{i\Psi(\theta)}] &= (\cos\Psi(\theta), \sin\Psi(\theta)) \wedge (-\Psi'(\theta)\sin\Psi(\theta), \Psi'(\theta)\cos\Psi(\theta)) \\ &= \Psi'(\theta)(\cos^2\Psi + \sin^2\Psi) = \Psi'(\theta). \end{aligned}$$

■

1.2 Inégalité du type Gagliardo-Nirenberg

Théorème 1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et régulier, $1 \leq p,q \leq +\infty$. Si $f \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$, alors*

On a

$$\|\nabla f\|^2_{\mathrm{L^r}} \leq C\, \|f\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{L^p}} . \|\triangle f\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{W^{2,q}}} ,\ \mathrm{C} = \mathrm{C}(\Omega).$$

où $\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}})$.

Preuve: Pour simplifier, on suppose que $f = 0$ sur $\partial\Omega$ et r$< \infty$.

Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla f|^{\mathrm{r}} &= \int_\Omega |\nabla f|^{\mathrm{r}-2}.\nabla f.\nabla f \\ &= -\int_\Omega \nabla(|\nabla f|^{\mathrm{r}-2}).\nabla f.f - \int_\Omega |\nabla f|^{\mathrm{r}-2}.\Delta f.f \\ &= -(\mathrm{r}-2)\int_\Omega |\nabla f|^{\mathrm{r}-3} \\ &\leq \mathrm{C_r}\int_\Omega |\nabla f|^{\mathrm{r}-2}.|D^2 f|.|f| \end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder pour les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 qui appartiennent respectivement aux espaces $\mathrm{L^{p_1}}$, $\mathrm{L^{p_2}}$ et $\mathrm{L^{p_3}}$ où

$$\frac{1}{\mathrm{p_1}} + \frac{1}{\mathrm{p_2}} + \frac{1}{\mathrm{p_3}} = 1$$

$$\int_\Omega |f_1.f_2.f_3| \leq \|f_1\|_{\mathrm{L^{p_1}}}\, \|f_2\|_{\mathrm{L^{p_2}}}\, \|f_3\|_{\mathrm{L^{p_3}}}$$

avec $\begin{cases} f_1 = & |\nabla f|^{\mathrm{r}-2} \\ f_2 = & |D^2 f| \\ f_3 = & |f| \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathrm{p}_1 = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}-2} \\ \mathrm{p}_2 = \mathrm{q} \\ \mathrm{p}_3 = \mathrm{p} \end{cases}$

On observe que

$$\frac{1}{\mathrm{p}_1} + \frac{1}{\mathrm{p}_2} + \frac{1}{\mathrm{p}_3} = 1 \text{ si et seulement si } \frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}}).$$

Alors, on a

$$\|\nabla f\|^{\mathrm{r}}_{\mathrm{L}^{\mathrm{r}}} \leq \mathrm{C}_r \|\nabla f\|^{\mathrm{r}-2}_{\mathrm{L}^{\mathrm{r}}} . \left\|D^2 f\right\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{q}}} . \|f\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p}}}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par $\|\nabla f\|^{\mathrm{r}-2}_{\mathrm{L}^{\mathrm{r}}}$, on obtient

$$\|\nabla f\|^2_{\mathrm{L}^{\mathrm{r}}} \leq \mathrm{C}_{\mathrm{r}} \left\|D^2 f\right\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{q}}} . \|f\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p}}} \quad .$$

Dans le cas q= $+\infty$: soit $f \in \mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega) \cap \mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$ tel que $f = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Df|^{2\mathrm{p}} &= \int_\Omega |Df|^{2\mathrm{p}-1}|Df| \\
&= -\int_\Omega D(|Df|^{2\mathrm{p}-1}).f\ Df \\
&= -(2\mathrm{p}-1)\int_\Omega |Df|^{2\mathrm{p}-2}.(D^2 f).f \\
&\leq (2\mathrm{p}-1)\,\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \int_\Omega |Df|^{2\mathrm{p}-2}.|D^2 f| \\
&\leq (2\mathrm{p}-1)\,\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} . \left\|D^2 f\right\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p}}} . \|Df\|^{2\mathrm{p}-2}_{\mathrm{L}^{2\mathrm{p}}} \quad .
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par $\|Df\|^{2\mathrm{p}-2}_{L^{2\mathrm{p}}}$, on obtient

$$\|Df\|^2_{\mathrm{L}^{2\mathrm{p}}} \leq C \left\|D^2 f\right\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{p}}} . \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \quad .$$

■

1.3 Théorème de Relich-Kondrachov

On suppose que Ω est borné et de classe C^1 . On a

1. Si $N < 2$ alors $\mathrm{H}^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$
2. Si $N = 2$ alors $\mathrm{H}^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow\hookrightarrow} \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$ pour tout $\mathrm{q} \in [1, +\infty[$
3. Si $N > 2$ alors $\mathrm{H}^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow\hookrightarrow} \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$ pour tout q$\in \left]1, \frac{2N}{N-2}\right[$ .En particulier, on a toujours
$$H^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

Théorème 1.2 *(De convergence de Lebesgue) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω et qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{p.p sur } \Omega$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$$

Théorème 1.3 *(Injections de Sobolev) Soit* $0 \leq s \leq \frac{N}{2}$

1. Si $s = \frac{N}{2}$ alors $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^N) \underset{\text{continu}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\mathrm{q} \in]2, \infty[$
2. Si $0 \leq s < \frac{N}{2}$ alors $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^N) \underset{\text{continu}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout q$\in \left]2, \frac{2N}{N-2s}\right[$

Corollaire 1.1 *Lorsque Ω est un ouvert de classe C^α($\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq 1$) avec $\partial\Omega$ bornée ou lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N_+$*

1. Si $m > \frac{N}{2+k}$, k$\in \mathbb{N}$, $\alpha \geq$k alors $\mathrm{H}^m(\Omega) \underset{\text{continu}}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$
2. Si $m =\frac{N}{2}$ alors $\mathrm{H}^m(\Omega) \underset{\text{continu}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$ pour tout $\mathrm{q} \in]2, \infty[$
3. Si $0 \leq m < \frac{N}{2}$ alors $\mathrm{H}^m(\Omega) \underset{\text{continu}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$ pour tout $\mathrm{q} \in \left]2, \frac{2N}{N-2s}\right[$.

Chapitre 2

Sur l'énergie de Ginzburg Landau

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique de l'énergie de p-Ginzburg Landau dans le cas p =2

2.1 Cas où le degré de la donnée au bord est nul

Durant l'intégralité de ce chapitre, Ω désigne un ouvert régulier (i.e C^∞), borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, et $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathrm{S}^1$ une application régulière.

On va étudier le problème

$$\min_{\mathrm{u}\in\, \mathrm{H}^1_g\left(\Omega;\mathrm{S}^1\right)} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}|^2 \tag{P}$$

avec $\mathrm{H}^1_g\left(\Omega\ ;\mathrm{S}^1\right) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1\left(\Omega\ ;\ \mathbb{R}^2\right),\ |\mathrm{u}|= 1 \text{ et } \mathrm{u} = g \text{ sur } \partial\Omega\}$

2.1.1 Résolution du problème bien posé

On démontre en premier lieu le résultat suivant

Théorème 2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, borné, régulier et simplement connexe et soit $g \in H^{1/2}\left(\partial\Omega\ ;\ S^1\right)$. Alors*

$$H^1_g\left(\Omega\ ;\ S^1\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow\ deg(g\ ,\ \partial\Omega) = 0$$

La démonstration du théorème fait intervenir le lemme suivant

Lemme 2.1 *On a, deg(g ,∂Ω) = 0 si et seulement si* $\exists\ \eta \in H^{1/2}(\partial\Omega\ ;\mathbb{R})$ *telle que :g =*$e^{i\eta}$

Preuve: (Du théoreme) ∎

Soit deg(g , ∂Ω)= 0, donc par le lemme 2.1, il existe $\eta \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega\ ;\mathbb{R})$ telle que $g = e^{\mathrm{i}\eta}$.

Soit $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega\ ;\mathbb{R})$ telle que $\eta = \mathrm{tr}\ \varphi$, donc $\mathrm{u} = e^{i\varphi} \in \mathrm{H}_g^1\left(\Omega\ ;\mathrm{S}^1\right)$.

Réciproquement, supposons $\mathrm{H}_g^1\left(\Omega\ ;\mathrm{S}^1\right) \neq \emptyset$ et soit $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1\left(\Omega\ ;\mathrm{S}^1\right)$ telle que u= g sur ∂Ω, comme Ω est simplement connexe, il existe $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega\ ;\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{u} = e^{i\varphi}$, donc $\mathrm{u}_{|\partial\Omega} = e^{i\varphi_{|\partial\Omega}}$, il résulte que, $g = e^{i\varphi_{|\partial\Omega}}$, où $\varphi_{|\partial\Omega} \in \mathrm{H}^{1\backslash 2}(\partial\Omega\ ;\mathbb{R})$. Par le lemme 2.1 on déduit que deg(g,∂Ω) = 0

Théorème 2.2 *Soit* $g = e^{i\varphi_0}$ *telle que deg(g ,∂Ω) = 0. Alors le problème (P) admet une solution unique* u_* *(modulo 2π). De plus* $u_* = e^{i\varphi_0}$ *avec* φ_0 *l'extension harmonique de* φ *sur Ω.*

Preuve: On montre d'abord l'existence d'une solution.

Soit $(\mathrm{u_n}) \subset \mathrm{H}_g^1\left(\Omega;\mathrm{S}^1\right)$ une suite minimisante. Alors $|\mathrm{u_n}| = 1$ dans Ω, $\mathrm{u_n} = g$ sur ∂Ω et

$$\int_\Omega |\nabla \mathrm{u_n}|^2 \longrightarrow \min_{\mathrm{H}_g^1\left(\Omega\ ;\mathrm{S}^1\right)} \int_\Omega |\nabla \mathrm{u}|^2 .$$

Donc $(\mathrm{u_n})$ est bornée dans H^1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\mathrm{u}_* \in \mathrm{H}^1$ telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{u_n} &\rightharpoonup \mathrm{u}_* \ \text{ dans } \mathrm{H}^1 \\ \mathrm{u_n} &\rightharpoonup \mathrm{u}_* \ \text{ dans } \mathrm{L}^2 \ \text{ et } \ \text{p.p} \end{aligned}$$

En particulier, $|\mathrm{u}_*| = 1$ p.p sur Ω. De plus, l'opérateur trace $\gamma : \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ est linéaire et continu, donc

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n}_{|\partial\Omega}} \longrightarrow \mathrm{u}_{*_{|\partial\Omega}} \text{ dans } \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)\ .$$

Comme $\mathrm{u_n} = g$ sur ∂Ω, il résulte que $\mathrm{u}_* = g$ sur ∂Ω, donc $\mathrm{u}_* \in \mathrm{H}_g^1\left(\Omega;\mathrm{S}^1\right)$.

De plus, par semi-continuité inférieure par rapport à la topologie faible, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathrm{u}_*|^2 \leq \liminf \int_{\Omega} |\nabla \mathrm{u}_{\mathrm{n}}|^2 .$$

Ce qui montre que u_* est une solution du problème (P) .

En revanche, pour l'unicité, on ne peut pas utiliser l'argument habituel qui consiste à considérer la demi somme de deux solutions, car $\mathrm{H}^1_g\left(\Omega;\mathrm{S}^1\right)$ n'est pas un espace vectoriel.

Pour montrer l'unicité de la solution, on fixe $\mathrm{u}_* \in \mathrm{H}^1_g\left(\Omega;\, \mathrm{S}^1\right)$ qui réalise le minimum dans (P), alors il existe $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega;\, \mathbb{R})$ telle que $\mathrm{u}_* = e^{i\varphi}$.

Comme $\mathrm{u}_* = g$ sur $\partial\Omega$ on a

$$\frac{\partial \mathrm{u}_*}{\partial \mathrm{x_j}} = ie^{i\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x_j}},$$

donc $|\nabla \mathrm{u}| = |\nabla \varphi|$.

Par conséquent, le problème de minimisation devient

$$\min_{\mathrm{H}^1_{\varphi,\partial\Omega}} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2$$

i.e Min $\left\{\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 ; \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega;\, \mathbb{R}),\ \varphi = \arg(g)\ \text{ sur }\ \partial\Omega\right\}$ ■

On a ainsi obtenu un problème de Dirichlet classique en dimension 1 pour lequel on sait qu'il y a unicité de solution.

- L'équation d'Euler associée au problème de minimisation (P) est l'équation des applications harmoniques

$$\begin{cases} -\triangle \mathrm{u}_* = \ \mathrm{u}_* |\nabla \mathrm{u}_*|^2 \quad \text{dans } \ \Omega \\ \mathrm{u}_* = g \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système d'équations non linéaires couplées par le facteur $|\nabla \mathrm{u}_*|^2$, et pour trouver ce système on a, $\mathrm{u}_* = e^{i\varphi}$, donc

$$\begin{aligned} (\mathrm{u}_*)_{\mathrm{x}} &= ie^{i\varphi}\varphi_{\mathrm{x}}\ ;\ (\mathrm{u}_*)_{\mathrm{xx}} = \left(i\varphi_{\mathrm{xx}} - \varphi^2_{\mathrm{x}}\right)e^{i\varphi} \\ (\mathrm{u}_*)_{\mathrm{y}} &= ie^{i\varphi}\varphi_{\mathrm{y}}\ ;\ (\mathrm{u}_*)_{\mathrm{xx}} = \left(i\varphi_{\mathrm{yy}} - \varphi^2_{\mathrm{y}}\right)e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\triangle \mathrm{u}_* = ie^{i\varphi}\triangle\varphi - e^{i\varphi}|\nabla\varphi|^2 \ .$$

On sait que φ est une fonction harmonique, donc

$$\triangle \mathrm{u}_* = -e^{i\varphi} \left|\nabla\varphi\right|^2 = -u_* \left|\nabla \mathrm{u}_*\right|^2 \quad \text{car} \left|\nabla \mathrm{u}\right| = \left|\nabla\varphi\right| \ .$$

2.1.2 Résultats asymptotiques

À présent, nous avons l'existence et l'unicité de la solution du problème (P), notée u_*, nous allons alors nous intéresser à l'approcher de manière raisonnable à l'aide de fonctions régulières qui ne sont pas forcément uni modulaires.

L'approche va se faire à l'aide de $(\mathrm{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, avec u_ε solution du problème de minimisation

$$\min_{\mathrm{u}\in\, \mathrm{H}^1_g(\Omega;\mathbb{C})} E_\varepsilon\left(\mathrm{u}\right) \tag{P_ε}$$

où

$$E_\varepsilon\left(\mathrm{u}\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla \mathrm{u}\right|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \left(1-\left|\mathrm{u}\right|^2\right)^2 .$$

Faisons dès lors quelques remarques :

1. $E_\varepsilon : \mathrm{H}^1_g(\Omega;\, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie. En effet, si $\mathrm{u}\in \mathrm{H}^1(\Omega)$, alors par les injections de Sobolev, $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^4(\Omega)$ donc E_ε est bien définie.

2. u_ε est une solution du problème (P_ε). En effet, soit $(\mathrm{u}_\mathrm{n}) \subset \mathrm{H}^1_g(\Omega;\, \mathbb{C})$ une suite minimisante de E_ε, alors (u_n) est bornée dans $\mathrm{H}^1_g(\Omega;\, \mathbb{C})$ puisque $\left(\nabla \mathrm{u}_\mathrm{n}\right)_\mathrm{n}$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega;\, \mathbb{C})$ et la suite des traces est constante.

Donc, par le théorème d'injection compacte de Rellich Kondrachov, quitte à extraire une sous-suite, il y a convergence forte dans $\mathrm{L}^4(\Omega)$ et faible dans $\mathrm{H}^1(\Omega;\, \mathbb{C})$ vers u_ε.Or on sait que $\mathrm{H}^1_g(\Omega;\, \mathbb{C})$ est un convexe fermé de $\mathrm{H}^1(\Omega;\, \mathbb{C})$ donc faiblement fermé, alors par convergence faible de $\left(\mathrm{u}_\mathrm{n}\right)$, on obtient $E_\varepsilon\left(\mathrm{u}_\varepsilon\right) \leq E_\varepsilon\left(\mathrm{u}_\mathrm{n}\right) \forall$ n, et $\mathrm{u}_\varepsilon \in \mathrm{H}^1_g(\Omega;\, \mathbb{C})$, d'où u_ε solution de (P_ε).

3. Chaque solution u_ε de (P_ε) vérifie l'équation de Ginzburg Landau

$$\begin{cases} -\triangle \mathrm{u}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathrm{u}_\varepsilon \left(1-\left|\mathrm{u}_\varepsilon\right|^2\right) & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{u}_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{S_ε}$$

En effet, soit $v \in C_c^1(\Omega)$, et $t \in \mathbb{R}$, $u \in H_g^1\left(\Omega; S^1\right)$

En posant $\Psi(t) = E_\varepsilon(u_\varepsilon + tv)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi(t)-\Psi(0)}{t} &= \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v + \frac{1}{2} t\left|\nabla v\right|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \left(2u_\varepsilon.v + t\left|v\right|^2\right)\left(2\left|u\right|^2 + 2tv.u_\varepsilon + t^2\left|v\right|^2 - 2\right) \\
&= \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \left(\left|u\right|^2 - 1\right) u.v + O(t) \qquad \text{quand } t \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

On en conclut que Ψ est dérivable en 0. De plus si u_ε est un point critique de E_ε, alors $\Psi'(0) = 0$.

Il s'en suit que les points critiques de E_ε vérifient (S_ε) puisque

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \left(1 - \left|u_\varepsilon\right|^2\right) u_\varepsilon.v_\varepsilon$$

est la forme faible de

$$-\triangle u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon \left(1 - \left|u_\varepsilon\right|^2\right) \ .$$

4. u_ε est régulière (ie $u_\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{\Omega}; \mathbb{C}\right)$). Ce résultat repose sur

- La régularité elliptique : Soit

$$\begin{cases} -\ \triangle u = f & \text{dans } \Omega \ \ (\text{avec } \Omega \ \in C^\infty) \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

si $g \in C^\infty$ et $f \in W^{k,p}(\Omega)$ alors $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$

- L'injection de Morrey :

Si $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ alors, $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, p>2

- $W^{k,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une algèbre .

Alors on a :

$$\begin{cases} -\triangle u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\, u_\varepsilon \left(1 - \left|u_\varepsilon\right|^2\right) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ces résultats de convergence sont formulés par le théorème suivant :

$u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$implique que $u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ donc, $f \in L^p(\Omega)$ par conséquent, $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ alors, $u \in C^1$(en particulier $u \in L^\infty(\Omega)$)

on a :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega) \\ u \in L^\infty(\Omega) \end{cases} \quad \text{ce qui implique que } f \in W^{2,p}(\Omega).$$

$$\text{Alors, } u_\varepsilon \in W^{4,p} \implies u_\varepsilon \in C^3$$

et ainsi de suite.

Donc on aura $u_\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Le résultat principal dans cette section est donné par le théorème suivant

Théorème 2.3 *Soient u_ε un minimiseur de E_ε dans $H^1_g(\Omega, \mathbb{C})$ et u_* la solution du problème (P), alors*

1. Pour tout $0 < \alpha < 1$ on a

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \tag{1.1}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } C^k_{loc}(\Omega) \tag{1.2}$$

C'est -à-dire pour tout $k \in \mathbb{N}$ et K un compact dans Ω

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } C^k(K) \tag{1.3}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1-|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \to |\nabla u_*|^2 \text{ dans } C^k_{loc}(\Omega) \tag{1.4}$$

De plus on a les estimations suivantes

4.

$$\|u_\varepsilon - u_*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \tag{1.5}$$

$C=C(\Omega , g)$

5.

$$\|u_\varepsilon - u_*\|_{C^k(K)} \leq C_{k,K}\, \varepsilon^2 \tag{1.6}$$

6.

$$\|\triangle u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \tag{1.7}$$

7.
$$\left\| \frac{1-|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \text{ - } |\nabla u_*|^2 \right\|_{C^k(K)} \leq C_{k,K}\, \varepsilon^2 \tag{1.8}$$

Remarque 2.1 *La convergence globale des u_ε est limitée à $C^{1,\,\alpha}$, non pas parce que la méthode employée n'est pas optimale mais parce que , si g n'est pas constante, alors on n'a pas de convergence dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ pour les u_ε.*

Supposons le contraire, on a

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u_* \text{ dans } C^2\left(\overline{\Omega}\right) \text{ implique que } \triangle u_\varepsilon \rightarrow \triangle u_* \text{ dans } C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ donc, } \triangle u_\varepsilon \rightarrow \triangle u_* \text{dans } C(\partial\Omega) \text{ alors,} \\ \nabla u_* &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

car$|u_*| = 1$ sur $\partial\Omega$ implique que $\frac{\partial u_*}{\partial \tau} = \frac{\partial g}{\partial \tau} = 0$ sur $\partial\Omega$, donc g est une fonction constante.

Preuve: La démonstration du théorème 2.3 se fait en 12 étapes.

Commençons par la $\mathbf{1}^{ère}$ **étape**

$$u_\varepsilon \rightarrow u_* \text{ dans } H^1(\Omega) \tag{1.9}$$

■

1^{er} pas : Il existe c> 0 telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c \tag{1.10}$$

En effet,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq E_\varepsilon\,(u_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq E_\varepsilon\,(u_*) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_*|^2$$

$2^{ème}$ pas : On considère u telle que $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$, $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$, pour une sous suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (car (u_{ε_n}) est bornée d'après le premier pas).

Donc
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n\rightarrow\infty} \int_\Omega |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_*|^2$$

$3^{ème}$ pas : On a

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_*|^2, \text{ d'où} \int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq 4C\varepsilon^2.$$

Donc

$$|u_\varepsilon| \to 1 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

d'où

$$|u_*| = 1 \tag{1.11}$$

car $H^1(\Omega)$ se prolonge compactement dans $L^4(\Omega)$.

$4^{ème}$ pas : On a u_* dans $H^1_g(\Omega, S^1)$ et $\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_*|^2$, par l'unicité de la solution du problème

$$\min_{H^1_g}\int_\Omega |\nabla u|^2$$

il résulte que $u = u_*$. De plus , à cause de l'unicité de la limite faible (on a obtenu que pour toute suite (u_{ε_n}) qui converge faiblement , on a $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_*$) on obtient

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_* \text{ dans } H^1(\Omega) \tag{1.12}$$

De $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_*|^2$, on déduit que : $u_\varepsilon \to u_*$ dans $H^1(\Omega)$.

- **$2^{ème}$ étape** :

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (|u_\varepsilon|^2-1)^2 \to 0 \tag{1.13}$$

quand $\varepsilon \to 0$

En effet,

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (|u_\varepsilon|^2-1)^2 = E_\varepsilon(u_\varepsilon) - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq E_\varepsilon(u_*) - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_*|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \to 0$$

- **$3^{ème}$ étape** :

Si u_ε est solution de

$$\begin{cases} -\triangle u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon\left(1-|u_\varepsilon|^2\right) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors

$$|u_\varepsilon| \leq 1\ . \tag{1.14}$$

Preuve: Posons $v = |u_\varepsilon|^2 - 1$

Il faut montrer que v ≤ 0 dans Ω. ■

On a

$$\triangle |u_\varepsilon|^2 = 2(u_\varepsilon\ \triangle u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)$$

donc

$$\begin{aligned}\triangle v &= 2|\nabla u_\varepsilon|^2 + 2\ u_\varepsilon \triangle u_\varepsilon \geq 2\ u_\varepsilon \triangle u_\varepsilon \\ &= 2u_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) \\ &\geq \frac{2}{\varepsilon^2} |u_\varepsilon|^2 (|u_\varepsilon|^2 - 1)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} -\ \triangle\ v\ + \frac{2|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\quad v\ \leq\ 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \qquad v = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par le principe du maximum, il résulte que

$$v \leq 0 \Rightarrow |u_\varepsilon|^2 \leq 1\ .$$

- **4ème étape** :

$$\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right|^2 = (\frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial n})^2 \ + (\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial n})^2 \tag{1.15}$$

Pour arriver à cette estimation, on va dériver une identité de Pohazaev .

Soit v $\in C^2$ $(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ telle que : v = n sur $\partial\Omega$. Par exemple, soit v telle que $\triangle v = 0$ dans Ω, v =n sur $\partial\Omega$.

Si on multiplie (S_ε) par $\sum_{j=1}^{2} v_j(x)\ \frac{\partial\ u}{\partial\ x_j}$ (en fait c'est un produit scalaire), et on intègre par partie, on obtient à gauche (ici , $u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$)

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\ u}{\partial\ n}(\ v.\nabla u\ ) + \int_\Omega \sum_{j\ ,\ k} u_{x_j}.(\ v_k\ u_{x_k})_{x_j} = -\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial\ u}{\partial\ n}\right|^2 + \int_\Omega \sum_{j\ ,\ k} v_k\ \ u_{x_j}\ .\ u_{x_j x_k} \ + \int_\Omega \sum_{j\ ,\ k} (v)_{x_j} u_{x_j} u_{x_k}$$

Notons que le dernier terme est $O\ (\|\nabla\ u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\ )$, le deuxième terme est égal à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_k\ v_k\ \partial_k\ |\nabla\ u|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} n\ .v|\nabla\ u|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}\ v\ (\ \nabla u\ ) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\ u}{\partial\ n}\right|^2 + \frac{1}{2}\ \int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\ u}{\partial\ \tau}\right|^2 + O(\ \|\nabla\ u\|^2_{L^2(\Omega)}\ ) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\ u}{\partial\ n}\right|^2 + C + O(\ \|\nabla\ u\|^2_{L^2(\Omega)}\ )\ .
\end{aligned}$$

Donc, on obtient à gauche

$$-\frac{1}{2}\ \int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\ u}{\partial\ n}\right|^2 + C + O(\ \|\nabla\ u\|^2_{L^2(\Omega)}\ ).$$

D'autre part, à droite,quand $u = u_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \sum_j\ v_j\ \partial_j\ (1-|u|^2\ )^2 &= -\frac{1}{4\varepsilon^2}\ \int_{\partial\Omega}\ v\ .n\ (1-|u|^2\ )^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \operatorname{div}\ v\ (1-|u|^2\ )^2 \\
&= \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \operatorname{div}\ v\ (1-|u|^2\ )^2 \\
&= O(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u|^2\ )^2 = O\ (1\ )
\end{aligned}$$

Car $\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u|^2)^2 = O\ (1\ )$.

On a déjà vu que pour $u = u_\varepsilon$, on a $\|\nabla\ u\|^2_{L^2(\ \Omega\ )} = O\ (1\ )$. En comparant les deux termes, on obtient

$$\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 = O\ (1\ )$$

- **5ème étape** :

  On a $\|\nabla\ u_\varepsilon\|_{L^\infty\ (\ \Omega\ )} \leq \frac{C}{\varepsilon}$ uniformément quand $\varepsilon \to 0$. On va utiliser le résultat suivant

Lemme 2.2 *(Inégalité de Gagliardo-Nirenberg(G-N))*

Il existe une constante $C = C(\ \Omega\ )$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^\infty\ (\ \Omega\ )}\ \leq\ C\ \ \|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\ \Omega\ )}\ \ \ \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\ \Omega\ )}\ ,$$

pour toute $u \in C^2 (\overline{\Omega})$ vérifiant,

$$\begin{cases} \triangle u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Supposons le lemme démontré. Soit $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w$ où

$$\begin{cases} \triangle w = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ w = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\triangle v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) \quad \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En appliquant le lemme à v_ε, on obtient

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \frac{1}{\varepsilon} \|v_\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)} .$$

Or , $|v_\varepsilon| \leq |u_\varepsilon| + |w| \leq 1 + |w| \leq \varepsilon$. En appliquant (G.N) et $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \frac{C'}{\varepsilon} + C'' \leq \frac{C}{\varepsilon} \text{ , pour tout } \varepsilon \text{ assez petit} \end{aligned} \tag{1.16}$$

- **$6^{ème}$ étape :**

On a $|u_\varepsilon| \to 1$ uniformément sur $\overline{\Omega}$ quand $\varepsilon \to 0$

Raisonons par l'absurde, et supposons qu'il existe (ε_n) tel que $\varepsilon_n \to 0$, $\delta > 0$ et $x_n \in \overline{\Omega}$ tels que $|u_{\varepsilon_n}(x_n)| < 1 - \delta$

Pour fixer les idées, supposons que $\delta = \frac{1}{2}$. En utilisant l'étape précédente, on peut écrire

$$|u_{\varepsilon_n}(y_n) - u_{\varepsilon_n}(x_n)| \leq \frac{C}{\varepsilon_n} |y - x_n| \leq C A \text{ , } \forall y \in B(x_n, A \varepsilon_n),$$

donc,

$$|u_{\varepsilon_n}(y_n)| \leq \frac{3}{4} \text{ , pour } A > 0 \text{ assez petit .}$$

D'autre part, on peut toujours supposer que $x_n \to x \in \overline{\Omega}$. Si $x \in \Omega$ alors, pour n assez grand, on a

$$B(x_n, A\,\varepsilon_n) \subset \Omega$$

et donc

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2}\int_\Omega (1-|u_{\varepsilon_n}|^2)^2 \ge \frac{1}{\varepsilon_n^2}\int_{B(x_n, A\,\varepsilon_n)} (1-|u_{\varepsilon_n}|^2)^2 \ge \frac{7}{16}\pi A^2 > 0\,.$$

Contradiction, car le membre de gauche tend vers 0 quand $\varepsilon_n \to 0$.

- **7ème étape** : On a

$$\| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)} \le C \text{ quand } \varepsilon \to 0 \tag{1.17}$$

Comme $|u_\varepsilon| \to 1$ uniformément sur $\overline{\Omega}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $|u_\varepsilon| \ge \frac{1}{2}$ dans $\overline{\Omega}$, pour chaque $\varepsilon \le \varepsilon_0$. On peut écrire

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon\, e^{i\varsigma} \text{ avec } \rho_\varepsilon = |u_\varepsilon| \text{ et } \zeta_\varepsilon \in H^1_\varphi(\Omega\,;\mathbb{R})$$

et on a si $u = \rho\, e^{i\varsigma}$, alors on a le lemme suivant

Lemme 2.3

$$|\nabla\, u|^2 = |\nabla\,\rho|^2 + \rho^2\,|\nabla\,\zeta|^2$$

donc

$$|\nabla\, u_\varepsilon|^2 = \nabla\rho_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon^2\,|\nabla\zeta_\varepsilon|^2\,.$$

On applique le lemme 2.3 dans l'inégalité $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \le E_\varepsilon(u_*)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla\rho_\varepsilon|^2 + |\rho_\varepsilon\nabla\rho_\varepsilon|^2) + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2 \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\rho|^2 \tag{1.18}$$

Soit $\psi_\varepsilon = \zeta_\varepsilon$ - φ qui satisfait tr $\psi_\varepsilon = 0$. En développant, on a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla\rho_\varepsilon|^2 + \rho_\varepsilon^2(|\nabla\psi_\varepsilon|^2 + 2\nabla\psi_\varepsilon.\nabla\varphi + |\nabla\,\varphi|^2) + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2 \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\,\varphi|^2\,. \tag{1.19}$$

Puisque, $\rho_\varepsilon = |u_\varepsilon| \ge \frac{1}{2}$, alors

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^2\,|\nabla\,\psi_\varepsilon|^2 \ge \frac{1}{8}\int_\Omega |\nabla\,\psi_\varepsilon|^2$$

En utilisant le fait que φ soit une fonction harmonique et ψ_ε =0 sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega \nabla\varphi\ \nabla\psi_\varepsilon\ = -\int_\Omega (\triangle\varphi)\psi_\varepsilon\ +\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}}\ \psi_\varepsilon\ = 0$$

Ainsi de (1.19), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\rho_\varepsilon|^2\ + \frac{1}{8}\int_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2\ + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2\ \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\ (1-\rho_\varepsilon^2) + \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\psi_\varepsilon(1-\rho_\varepsilon^2) \tag{1.20}$$

Notons H le deuxième terme du second membre de (1.20). On a

$$\begin{aligned} |\mathrm{H}| \ &\leq\ \|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} \big(\int (1-\rho_\varepsilon^2)^2\big)^{\frac{1}{2}}\ \big(\int |\nabla\psi_\varepsilon|^2\ \big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq\ 4\,\|\nabla\varphi\|^2_{\mathrm{L}^\infty}\ \int (1-\rho_\varepsilon^2)^2 + \frac{1}{16}\int |\nabla\psi_\varepsilon|^2 \end{aligned}$$

Ce calcul a été effectué en sortant d'abord $\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}$, ensuite en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et en fin l'inégalité : $\sqrt{\mathrm{a\ b}} \leq 4\mathrm{a} + \frac{1}{16}\ \mathrm{b}$. a,b> 0

Posons $\alpha = \|\nabla\varphi\|^2_{\mathrm{L}^\infty}$. En réinjectant l'inégalité obtenue dans (1.20), on a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\rho_\varepsilon|^2 + \frac{1}{8}\int_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2 \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2) + 4\alpha\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2 \frac{1}{16}\int_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2$$

d'où,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\ \rho_\varepsilon|^2 + \frac{1}{16}\int_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2 + (\frac{1}{4\varepsilon^2} - 4\alpha)\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2 \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)$$

alors,

$$(\frac{1}{4\varepsilon^2} - 4\alpha)\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2 \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)\ \leq \frac{\alpha\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{2}(\int_\Omega (1-\rho_\varepsilon^2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Pour ε assez petit tel que $0 \leq \frac{1}{4\varepsilon^2}\ -4\alpha \leq \frac{1}{2\varepsilon^2}$, on obtient

$$\left\|1-\rho_\varepsilon^2\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq C\varepsilon^2$$

En remarquant que

$$\|\triangle \mathrm{u}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2}\ = \left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\ \mathrm{u}_\varepsilon(1-\rho_\varepsilon^2)\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \mathrm{C},$$

et que

$$\|\triangle(\mathrm{u}_\varepsilon\text{- } \mathrm{u}_*)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\triangle \mathrm{u}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2} \ + \ \mathrm{C},$$

on obtient

$$\|\triangle(\mathrm{u}_\varepsilon\text{- } \mathrm{u}_*)\|_{\mathrm{L}^2} \ \leq \ \mathrm{C},$$

donc

$$\|\mathrm{u}_\varepsilon\text{- } \mathrm{u}_*\|_{\mathrm{H}^2} \ \leq \ \mathrm{C}.$$

Pour prouver que $(\mathrm{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans H^2, il suffit de voir que

$$\|\mathrm{u}_\varepsilon\|_{\mathrm{H}^2} \leq \| \ \mathrm{u}_*\|_{\mathrm{H}^2} + \|\mathrm{u}_\varepsilon\text{- } \mathrm{u}_*\|_{\mathrm{H}^2}$$

- **8ème étape** : on a

$$\|\triangle \mathrm{u}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty} \ \leq \ \mathrm{C} \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit .}$$

Soit $\psi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2)$

On a

$$\begin{aligned} -\triangle\psi_\varepsilon &= \frac{2}{\varepsilon^2}\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^2 - \frac{2}{\varepsilon^2}\,|\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,(1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2) \\ &= \frac{-2}{\varepsilon^2}\,|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 \ \psi_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2} \ |\nabla \ \mathrm{u}_\varepsilon|^2, \end{aligned}$$

d'où,

$$-\varepsilon^2 \ \triangle\psi_\varepsilon \ + 2\,|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 \ \psi_\varepsilon = 2\,|\nabla \ \mathrm{u}_\varepsilon|^2$$

pour ε assez petit à fin d'avoir $|\mathrm{u}_\varepsilon| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

on obtient

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \ \triangle\psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon \leq 2\,|\nabla \ \mathrm{u}_\varepsilon|^2 \quad \text{dans } \Omega \\ \psi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.21}$$

De l'étape précédente, on sait que : $\left\||\nabla \ \mathrm{u}_\varepsilon|^2\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \mathrm{C}_\mathrm{q}$, $1 \leq \mathrm{q} < \infty$

car (u_ε) est bornée dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$ et $\mathrm{H}^1 \hookrightarrow \mathrm{L}^\mathrm{q}$ pour $1 \leq \mathrm{q} < \infty$, si on multiplie (1.21) par ψ_ε^{q-1} (q$\geq$ 1) et on intègre, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi_\varepsilon^q \;+\; (q-1)\,\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2\,\psi_\varepsilon^{q-2} &\leq 2\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,\psi_\varepsilon^{q-1}\\
&\leq 2\Big(\int_\Omega |\nabla\, u_\varepsilon|^{2q}\Big)^{\frac{1}{q}}\,\Big(\int_\Omega \psi_\varepsilon^q\Big)^{\frac{q-1}{q}}\\
&\leq 2\,\|\psi_\varepsilon\|_{L^q}^{q-1}\;C_{2q}^2
\end{aligned}$$

donc

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^q} \;\leq 4C_{2q}^2 = \mathrm{const}(q)\ (\,1\leq q<\infty)$$

et on peut écrire : $-\;\triangle u_\varepsilon = u_\varepsilon\psi_\varepsilon$

ce qui donne

$$\|\triangle u_\varepsilon\|_{L^q} \;\leq\; \mathrm{const}(q)$$

et on peut appliquer les estimations elliptiques pour $1<q<\infty$, on obtient que (u_ε) est bornée dans $W^{2,q}(\Omega)$, $1<q<\infty$.

En particulier, pour $q>2$, on obtient par les injections de Sobolev que (∇u_ε) est bornée dans $C(\overline{\Omega})$.

Soit χ_ε la solution de

$$\begin{cases} -2\varepsilon^2\,\triangle\chi_\varepsilon \;+\;\chi_\varepsilon \;=4\,|\nabla\, u_\varepsilon|^2 \;\text{ dans } \Omega\\ \qquad\qquad\quad \chi_\varepsilon \;=0 \text{ sur } \partial\Omega\end{cases} \tag{X_ε}$$

On a $0\leq\psi_\varepsilon\leq$ (par le principe du maximum) $\leq\chi_\varepsilon$

D'autre part, $4\,\big\||\nabla\, u_\varepsilon|^2\big\|_{L^\infty}$ est une sursolution de (X_ε). On obtient

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty} \;=4\,\big\||\nabla\, u_\varepsilon|^2\big\|_{L^\infty}$$

Si on revient a l'équation de (S_ε), on déduit que

$$\|\triangle u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \;\leq\; C\,.$$

- **9ème étape** :

$$u_\varepsilon \rightarrow\; u_*\;\text{ dans } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\;\text{ quand } \varepsilon\rightarrow 0\;\text{ pour tout } 0<\varepsilon<1$$

On a : $\|\triangle u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, d'où

$$\|\triangle u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \ \leq \ C, \text{ pour tout } 1 < p < \infty$$

de plus, $u_{\varepsilon|\partial\Omega}$est fixée, et donc on peut appliquer les estimations elliptiques pour conclure

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)} \ \leq C'_p \ , 1 < p < \infty$$

Par les injections de Sobolev , on déduit que

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\Omega)} \ \leq \ C_\alpha \ \ , 0 < \alpha < 1$$

Donc, pour tout $0 < \alpha < 1$ et $\varepsilon_n \to 0$, il existe une suite (ε_{n_k}) telle que $(u_{\varepsilon_{n_k}})$ converge dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ (théorème d'Ascoli).

D'autre part,

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

d'où,

$$u_{\varepsilon_{n_k}} \to u_* \text{ dans } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

L'unicité de la limite entraine que

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

- **10ème étape** :

$$\|u_\varepsilon \text{ - } u_*\|_{L^\infty(\Omega)} \ \leq \ C\varepsilon^2 \tag{1.22}$$

et

$$\|\nabla u_\varepsilon \ - \ \nabla u_*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \ C\varepsilon \tag{1.23}$$

Cette étape nécessite une formulation équivalente de (S_ε) en (S'_ε), la traduction sous "forme polaire".

Pour ε assez petit, en posant $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i(\psi_\varepsilon+\varphi_0)}$, on a

$$\begin{cases} -\triangle\rho_\varepsilon \ + \rho_\varepsilon \left|\nabla(\varphi_0+\psi_\varepsilon)\right|^2 \ = \frac{1}{\varepsilon^2}\ \rho_\varepsilon\ (1-\rho_\varepsilon^2) \\ \mathrm{div}\ (\rho_\varepsilon^2\ \nabla(\varphi_0+\psi_\varepsilon)) \end{cases} \tag{S'$_\varepsilon$}$$

L'équivalence se démontre en explicitant $\triangle(\rho_\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_\varepsilon)}\ )$par

$$\left[\triangle\rho_\varepsilon \text{ - } \rho_\varepsilon \left|\nabla(\varphi_0+\psi_\varepsilon)\right|^2 \ + i\frac{1}{\rho_\varepsilon}\mathrm{div}(\rho_\varepsilon^2\ \nabla(\varphi_0+\psi_\varepsilon))\right] e^{i(\psi_\varepsilon+\varphi_0)} \tag{1.24}$$

Ensuite on multiplie (1.24) par $e^{-i(\psi_\varepsilon+\varphi_0)}$, et on identifie les parties réelles et les parties imaginaires.

En multipliant les parties imaginaires par ρ_ε, on obtient (S'$_\varepsilon$). On déduit de la deuxième ligne de (S'$_\varepsilon$),

$$\mathrm{div}(\rho_\varepsilon^2\nabla\psi_\varepsilon) = -\mathrm{div}(\rho_\varepsilon^2\nabla\varphi_0) = -\mathrm{div}((\rho_\varepsilon^2-1)\nabla\varphi_0)$$

On va utiliser un lemme d'estimation pour des opérateurs sous forme divergence afin d'obtenir le résultat

Lemme 2.4 *(De Giorgi-Nash-Moser)*

Soit Ω un ouvert régulier, borné de $\mathbb{R}^N$ et $L : u \longmapsto Lu = -\sum_{i,j} \partial_j(a_{i,j}\partial_i u)$ opérateur uniformément elliptique i.e $\exists\alpha > 0$ tel que $\forall\beta \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\beta_i\beta_j \geq \alpha\left|\beta\right|^2$ avec $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ et $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Si u vérifie

$$\begin{cases} Lu \ = f_0 + \ \sum_j \partial_j\ f_j \quad \text{dans } \Omega \\ u \ = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors

$$\|\ u\|_{L^\infty(\Omega)} \ \leq \ C(\ \|f_0\|_{L^p(\Omega)} \ + \ \sum_j \|f_j\|_{L^q(\Omega)}\ )$$

avec $p > \frac{N}{2}$, $q > N$, $C = C(\Omega, a_{i,j}, p, q)$.

On applique le lemme 2.4 à $Lu = \mathrm{div}(\rho_\varepsilon^2\ \nabla u) = \sum_{i,j=1}^{2} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u)$.

Avec

$$a_{i,j} = \delta_{i,j}\rho_\varepsilon^2(\delta \text{ de Kronecker})$$

pour

$$\mathrm{u} = \psi_\varepsilon, \alpha = \frac{1}{2}$$

et

$$f_\mathrm{j} = (\rho_\varepsilon^2 - 1)\ \partial_\mathrm{j}\varphi.\delta_{\mathrm{j},0},\ \mathrm{j} \in \{0;1;2\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} &\leq \mathrm{C_q} \left\|\rho_\varepsilon^2 - 1\right\|_{\mathrm{L^q}(\Omega)} \\ &\leq \mathrm{C} \left\|\rho_\varepsilon^2 - 1\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Et observons que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{u}_\varepsilon - \mathrm{u}_*\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} &\leq \|\rho_\varepsilon - 1\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|\psi_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \\ &\leq \left\|\rho_\varepsilon^2 - 1\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|\psi_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \\ &\leq \mathrm{C}\ \|\eta_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\|\eta_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \|1 - \rho_\varepsilon^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leq \mathrm{C}\varepsilon^2$. Pour cela on a besoin d'introduire le lemme suivant

Lemme 2.5 *Soit $a(x) \geq \alpha > 0$, $f \in L^p$, $2 \leq p \leq \infty$. Si $\eta \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ vérifie*

$$\begin{cases} -\triangle\eta + a(x)\,\eta = f \ \ dans\ \Omega \\ \eta = 0\ \ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

alors

$$\|\eta\|_{\mathrm{L^p}} \leq \frac{1}{\alpha}\ \|f\|_{\mathrm{L^p}}$$

On applique le lemme 2.5 avec, $\mathrm{a} = \frac{2}{\varepsilon^2}|\mathrm{u}_\varepsilon|^2$, $\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2}$ et $f = -2\ |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^2 \in \mathrm{L^p}$ et $\mathrm{p} = \infty$, finalement

$$\left\|1 - \rho_\varepsilon^2\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon^2$$

d'où (1.22).

On remarque que

$$\left\|1 - \rho_\varepsilon^2\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon^2,$$

ce qui implique que $\triangle \mathrm{u}_\varepsilon$ est borné indépendamment de ε. (1.23) réside juste dans l'application de (G.N) à u_ε - u_* qui est bien nulle sur $\partial\Omega$

- **$11^{\grave{e}me}$ étape** : Si on pose

$$\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_{C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{loc}}} \leq \mathrm{C} \tag{$\mathrm{A_k}$}$$

$$\left\|\frac{1 - \rho_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right\|_{C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{loc}}} \leq \mathrm{C} \tag{$\mathrm{B_k}$}$$

alors $(\mathrm{A_k})$ et $(\mathrm{B_k})$ vraies pour tout $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$.

La preuve se fait par récurrence sur k. On va utiliser l'estimation intérieure suivante pour le laplacien

$$\forall\ \mathrm{K}\ \Subset\ \omega\ \subset\ \Omega,\ \mathrm{p}\ \in\ ]1;\infty[\ ,\ \mathrm{k}\ \in\ \mathbb{N},\ \exists\mathrm{C} =\ \mathrm{C}(\mathrm{k},\mathrm{K},\omega,\mathrm{p})$$

tel que

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{W}^{\mathrm{k+2,p}}(\mathrm{K})} \leq\ \mathrm{C}(\|\ \triangle\mathrm{u}\|_{\mathrm{W}^{\mathrm{k,p}}(\omega)} +\ \|\ \mathrm{u}\|_{\mathrm{L^p}(\omega)}\ ,\ \forall\mathrm{u} \in \mathrm{W}^{\mathrm{k+2,p}}(\omega)$$

Initialisation : On sait déjà que

$$\begin{aligned}\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_{\mathrm{L^\infty_{loc}}} &\leq\ 2\,\|\nabla\mathrm{u}\|_{\mathrm{L^\infty_{loc}}}\\ &\leq\ \mathrm{C}\end{aligned}$$

et que

$$\left\|\frac{1 - \rho_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right\|_{\mathrm{L^\infty_{loc}}} \leq \mathrm{C}$$

Hérédité : Supposons $(\mathrm{A_k})$ et $(\mathrm{B_k})$ vraies pour un certain k. Posons $\mathrm{X}_\varepsilon = \frac{1 - \rho_\varepsilon}{\varepsilon^2}$.

On a alors par $(\mathrm{S'}_\varepsilon)$,

$$-\triangle\rho_\varepsilon\ = -\rho_\varepsilon\,|\nabla\zeta_\varepsilon|^2\ \ +\ \rho_\varepsilon\ (1 +\ \rho_\varepsilon)\mathrm{X}_\varepsilon$$

Par hypothèse de récurrence, $-\triangle\rho_\varepsilon$ est borné dans $C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{loc}}$, donc par injection continue et estimation intérieure,

$$\rho_\varepsilon \text{ est borné dans } \mathrm{W}^{\mathrm{k+2,p}}_{\mathrm{loc}} \quad \text{pour p } < \infty \tag{1.25}$$

Et par injection continue,

$$\nabla\rho_\varepsilon \text{ est borné dans } C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{loc}} \tag{1.26}$$

Toujours par (S'$_\varepsilon$),

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla\zeta_\varepsilon) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \rho_\varepsilon^2 \triangle\zeta_\varepsilon \ + 2\rho_\varepsilon\nabla\rho_\varepsilon.\nabla\zeta_\varepsilon \ = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{-}\triangle\zeta_\varepsilon \ = \ \frac{2\nabla\rho_\varepsilon.\nabla\varsigma_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \ . \end{aligned} \tag{1.27}$$

Finalement par (1.26) et (1.27) et ($\mathrm{A_k}$), -$\triangle\zeta_\varepsilon$ est borné dans $C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{loc}}$. Et donc par estimation intérieure, on a

$$\zeta_\varepsilon \text{ borné dans } \mathrm{W}^{\mathrm{k+2,p}}_{\mathrm{loc}} \text{ pour tout p } < \infty \tag{1.28}$$

En réutilisant (1.27) avec (1.25) et (1.28), on obtient que ζ_ε est borné dans $\mathrm{W}^{\mathrm{k+3,p}}_{\mathrm{loc}}$, et toujours grâce aux injections continues, $\nabla\zeta_\varepsilon$ est borné dans $\mathrm{C}^{\mathrm{k+1}}_{\mathrm{loc}}$, donc ($\mathrm{A_{k+1}}$) est vraie.

En réutilisant (S'$_\varepsilon$), on obtient

$$\varepsilon^2 \triangle \mathrm{X}_\varepsilon = -\rho_\varepsilon \left|\nabla\zeta_\varepsilon\right|^2 + \ \rho_\varepsilon(1+\rho_\varepsilon)\mathrm{X}_\varepsilon \tag{1.29}$$

On va se servir du lemme suivant

Lemme 2.6 *Soient Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $u \in C^2(\Omega)$ et $-\triangle u = f$, alors il existe C=C(N)tel que pour tous compact K$\Subset$ K' $\Subset \Omega$,*

$$\left\|\nabla u\right\|_{L^\infty(K)} \leq \ C(\left\|u\right\|_{L^\infty(K')} \left\|f\right\|_{L^\infty(K')} \ + \frac{1}{dist(K;\partial K')^2} \left\|u\right\|^2_{L^\infty(K')})$$

On applique le lemme 2.6 à $u = D^k X_\varepsilon$ et on a

$$\left\|D^{k+1}X_\varepsilon\right\|^2_{L^\infty(K)} \leq C \left\|D^k X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K')} \left[\left\|D^k X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K')} + \left\|D^k \triangle X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K')}\right] \tag{1.30}$$

avec C =C(N;K;K'). Par (B_k), on a

$$\left\|D^k X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K')} \leq C$$

Et avec (1.29), (B_k) et (A_k) on obtient

$$\left\|D^k \triangle X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K')} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}$$

On peut alors conclure par (1.30) que $\left\|D^{k+1}X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$ ce qui implique

$$\left\|\varepsilon D^{k+1}X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K)} \leq C \tag{1.31}$$

On réécrit alors (1.29) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \triangle X_\varepsilon &= -\rho_\varepsilon \left|\nabla\zeta_\varepsilon\right|^2 - (\varepsilon^2 X_\varepsilon - 1)(2 - \varepsilon^2 X_\varepsilon) X_\varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad - \varepsilon^2 \triangle X_\varepsilon + 2X_\varepsilon &= \rho_\varepsilon \left|\nabla\zeta_\varepsilon\right|^2 + 3\varepsilon^2 X_\varepsilon^2 - \varepsilon^4 X_\varepsilon^3 \end{aligned} \tag{1.32}$$

On notera par la suite $R_\varepsilon = \rho_\varepsilon \left|\nabla\zeta_\varepsilon\right|^2 + 3\varepsilon^2 X_\varepsilon^2$ - $\varepsilon^4 X_\varepsilon^3$. On remarque par (1.31) que $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans C^{k+1}_{loc}.

On différentie (1.32) à l'ordre k+1 pour obtenir

$$- \varepsilon^2 \triangle D^{k+1} X_\varepsilon + 2D^{k+1}X_\varepsilon = D^{k+1}R_\varepsilon \tag{1.33}$$

Par (1.31), on voit que

$$\forall \Omega' \Subset \Omega, \left\|D^{k+1}X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \frac{C}{\varepsilon} \text{ et } \left\|D^{k+1}R_\varepsilon\right\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C, \ C = C(\Omega') \tag{1.34}$$

Soit $B \Subset K \Subset K' \Subset \Omega$, , et $w_\pm$ solution de

$$\left\{ \begin{aligned} -\varepsilon^2 \triangle w_\pm &= \pm C \text{ dans } B \\ w_* = \pm \tfrac{C}{\varepsilon} &\text{ sur } \partial B \end{aligned} \right. \tag{$S_\pm$}$$

On considère w_+ comme l'unique solution du problème de minimisation associé à $(S_\pm)$ obtenu par minimisation directe (i.e fonctionnelle strictement convexe et coercive) et w_- son opposé. Nous remarquons que w_+ (resp w_-) sursolution (resp. soussolution) de (1.33) avec donnée au bord $tr_{\partial B}(D^{k+1}X_\varepsilon)$.

Par le principe du maximum, on a

$$w_+ \geq 0$$

alors

$$w_- \leq w_+$$

On peut donc conclure que

$$w_+ \geq D^{k+1}X_\varepsilon \geq w_-$$

Il n'est pas très difficile de montrer que si Ω' est une boule de rayon R centrée en x, alors

$$h_\varepsilon^\pm = \pm C(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2})\, e^{\frac{1}{e^{2\sqrt{2}\,\varepsilon R}}(r^2 - R^2)} \pm \frac{C}{2} \quad \text{avec } r = r(y) = dist(y;x)$$

h_ε^* est une soussolution (et 0 sursolution), sursolution (et 0 soussolution). Sinon, par la méthode de la monotonie et (1.34), ces deux fonctions encadrent $D^{k+1}X_\varepsilon$, donc

$$\left\|D^{k+1}X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(\overline{B})} \leq C(1 + \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{R}{2\sqrt{2}\varepsilon}}) .$$

Ainsi

$$\left\|D^{k+1}X_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K)} \leq C(1 + \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{d}{2\sqrt{2}\varepsilon}}) \leq C$$

quitte à recouvrir K par des boules de rayon R =dist(K;K'), d'où (B_{k+1}) est vraie.

- **12ème étape** : Preuve de (1.6) et (1.8)

En remarquant que $\triangle\varphi_0 = 0$, et d'après (1.27), on déduit que

$$-\triangle(\zeta_\varepsilon - \varphi_0) = \frac{2\nabla\rho_\varepsilon.\nabla\zeta_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = -2\varepsilon^2\frac{\nabla X_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}.\nabla\zeta_\varepsilon \quad \text{sur } \Omega$$

Ainsi par l'étape précédente, $-\triangle\left(\frac{\zeta_\varepsilon - \varphi_0}{\varepsilon^2}\right)$ est borné dans C^k_{loc} pour tout k.

Lors de l'étape 10, on a montré que $\frac{\zeta_\varepsilon - \varphi_0}{\varepsilon^2}$ est bornée dans L^∞, on conclut par estimation intérieure du laplacien que $\frac{\zeta_\varepsilon - \varphi_0}{\varepsilon^2}$ est bornée dans $W^{k+2,p}_{loc}$ pour tout k,p. Alors, à l'aide des injections de Sobolev

$$\frac{\zeta_\varepsilon \text{-} \varphi_0}{\varepsilon^2} \text{ est bornée dans } C^k_{loc} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \tag{1.35}$$

Par (1.35), l'étape 11 et $u_\varepsilon - u_* = (\rho_\varepsilon - 1)\, e^{i\zeta_\varepsilon} + (e^{i\zeta_\varepsilon} - e^{i\varphi_0})$, on conclut compte tenu des étapes précédentes le résultat.

Pour (1.8), il suffit de voir que

$$\frac{-\triangle u_\varepsilon}{u_\varepsilon} = \frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \tag{1.36}$$

et

$$\frac{\triangle u_*}{u_*} = \text{-}\ \nabla\, |u_*|^2 \tag{1.37}$$

Ainsi en sommant membre à membre (1.36) et (1.37), on obtient

$$\left\| \frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} - |\nabla u_*|^2 \right\|_{C^k(K)} = \left\| \frac{-\triangle u_\varepsilon}{u_\varepsilon} + \frac{\triangle u_*}{u_*} \right\|_{C^k(K} \tag{1.38}$$

$$\Leftrightarrow \left\| \frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} - |\nabla u_*|^2 \right\|_{C^k(K)} = \left\| \frac{-u_* \triangle u_\varepsilon + u_\varepsilon \triangle u_*}{u_\varepsilon \times u_*} \right\|_{C^k(K}$$

$$\Leftrightarrow \left\| \frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} - |\nabla u_*|^2 \right\|_{C^k(K)} = \left\| \frac{-\triangle(u_\varepsilon - u_*)u_* + \triangle u_*(u_\varepsilon - u_*)}{u_\varepsilon \times u_*} \right\|_{C^k(K} \tag{1.39}$$

De (1.39), on déduit (1.8) par inégalité triangulaire puisque

$$|u_\varepsilon \times u_*| \geq \frac{1}{2}$$

et $u_\varepsilon \times u_*$ est borné dans C^k_{loc}

2.1.3 Unicité du minimiseur

On sait jusqu'à ce moment qu'il y a l'unicité du minimiseur u_ε pour ε "grand" et pour ε "petit", mais il reste encore un problème ouvert qu'est de savoir qu'est ce qui se passe entre ces deux valeurs.

Soit $\lambda_1 = \lambda_1(-\triangle) > 0$ la première valeur propre de l'opérateur $(-\triangle)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On se propose de montrer d'abord que si $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, alors u_ε est unique.

En effet, considérons $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et u_ε un minimiseur de E_ε, on remarque que $H_g^1(\Omega;\mathbb{R}^2)=u_\varepsilon+H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$

Soit alors $v \in H_g^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$, en multipliant la première ligne de (S_ε) par v, on a

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \,.\nabla v = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega u_\varepsilon.v\ (1 - |u_\varepsilon|^2)$$

De plus, si $v \neq 0$

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_\varepsilon + v) - E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega 2\,|v|^2\,(1 - |u_\varepsilon|^2) + (2u_\varepsilon.v + |v|^2)^2 \\
&\geq \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega |v|^2) \quad \text{or } \varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \Leftrightarrow \lambda_1 > \frac{1}{\varepsilon^2} \\
&> \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla v|^2 - \lambda_1 \int_\Omega |v|^2) \geq 0
\end{aligned}$$

d'où $E_\varepsilon(u_\varepsilon+v)-E_\varepsilon(u_\varepsilon) > 0$. Alors u_ε est l'unique minimiseur de E_ε .

Prouvons maintenant que si $\varepsilon > 0$ est assez petit , alors on a aussi l'unicité du minimiseur.

La démonstration est due à Ye-Zou.

Théorème 2.4 *(Ye-Zhou)*

Il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(g,\Omega)$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors u_ε est l'unique solution du problème (P_ε) .

Preuve: On écrit u_ε sous sa forme polaire : $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\zeta_\varepsilon}$. Ceci est parfaitement possible dès que ε est assez petit afin qu'on ait $|u_\varepsilon| \geq \frac{1}{2}(\varepsilon \leq \varepsilon_1)$. ■

Soit à présent $v \in H_g^1(\Omega;\mathbb{C})$ tel que, $|v| \geq \frac{1}{2}$, ainsi, sous ces conditions, on a $\frac{v}{u_\varepsilon} \in H^1(\Omega;\mathbb{C})$, $\left|\frac{v}{u_\varepsilon}\right| \geq \frac{1}{2}$ dans Ω et $\frac{v}{u_\varepsilon} = 1$ sur $\partial\Omega$.

On peut alors de nouveau écrire $\frac{v}{u_\varepsilon}$ sous forme polaire i.e, $\frac{v}{u_\varepsilon} = \eta_\varepsilon e^{i\theta_\varepsilon}$ dans Ω ce qui est équivalent à $v= \rho_\varepsilon\eta_\varepsilon e^{i(\theta_\varepsilon+\zeta_\varepsilon)}$ dans Ω .

Nous avons besoin du lemme suivant dans le reste de la démonstration

Lemme 2.7 *Sous les notations précédentes, on a l'égalité suivante*

$$E_\varepsilon(v)-E_\varepsilon(u_\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^2\left|\nabla\eta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^2\eta_\varepsilon^2\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|^2+\int_\Omega \rho_\varepsilon^2(\eta_\varepsilon^2-1)\nabla\theta_\varepsilon.\nabla\zeta_\varepsilon+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^4(\eta_\varepsilon^2-1)^2 \tag{B.1}$$

Supposons le lemme 2.7 démontré. A fin de prouver l'unicité on va supposer que v soit aussi un minimiseur, et on va montrer que $\eta_\varepsilon=1$ et $\theta_\varepsilon=0$ i.e $u_\varepsilon=v$

On sait que

$$\left|u_\varepsilon\right|^2=\left|\nabla\rho_\varepsilon\right|^2+\rho_\varepsilon^2\left|\nabla\zeta_\varepsilon\right|^2\leq C$$

On en déduit que

$$\rho_\varepsilon^2\left|\nabla\zeta_\varepsilon\right|^2\leq C$$

On voit aussi que $\mathrm{tr}\eta=1$ et $\mathrm{tr}\theta=0$. Alors puisque $E_\varepsilon(v)-E_\varepsilon(u_\varepsilon)=0$, on a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^2\left|\nabla\eta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^2\eta_\varepsilon^2\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \rho_\varepsilon^4(\eta_\varepsilon^2-1)^2=\int_\Omega \rho_\varepsilon^2(1-\eta_\varepsilon^2)\nabla\theta_\varepsilon.\nabla\zeta_\varepsilon\leq C\int_\Omega(1-\eta_\varepsilon^2)\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|$$

Donc, en tenant compte du fait que $|\rho_\varepsilon|,\ |\eta_\varepsilon|\geq\frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{8}\int_\Omega\left|\nabla\eta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{32}\int_\Omega\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{64\varepsilon^2}\int_\Omega(\eta_\varepsilon^2-1)^2\leq C\int_\Omega(1-\eta_\varepsilon^2)\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|$$

Or, en utilisant $xy\leq Ax^2+\frac{1}{4A}y^2$ avec $A=16C$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_\Omega\left|\nabla\eta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{32}\int_\Omega\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{64\varepsilon^2}\int_\Omega(\eta_\varepsilon^2-1)^2 &\leq \int_\Omega 16C(1-\eta_\varepsilon^2)^2+\frac{1}{64}\int_\Omega\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|^2\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8}\int_\Omega\left|\nabla\eta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{32}\int_\Omega\left|\nabla\theta_\varepsilon\right|^2+\frac{1}{64\varepsilon^2}\int_\Omega(\eta_\varepsilon^2-1)^2\\ &\leq C\int_\Omega(1-\eta_\varepsilon^2)^2\end{aligned}$$

Donc il existe $\varepsilon_0>0$ tel que $\frac{1}{64\varepsilon^2}>C$, pour $\varepsilon<\varepsilon_0$. Ceci implique que $\eta_\varepsilon=1$ et $\theta_\varepsilon=$Const sur Ω. Comme $\theta_\varepsilon=0$ sur $\partial\Omega$, il résulte que $\eta_\varepsilon=1$ et $\theta_\varepsilon=0$ sur Ω

Preuve: (du lemme 2.7)

Oublions l'indexation par ε le temps de la preuve.

On a

$$|\nabla \mathrm{u}|^2 = |\nabla\rho|^2 + \rho^2 |\nabla\zeta|^2$$

et

$$|\nabla \mathrm{v}|^2 = |\eta\nabla\rho + \rho\nabla\eta|^2 + \rho^2\eta^2 |\nabla(\theta+\zeta)|^2$$

Par suite

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\mathrm{v}) - E_\varepsilon(\mathrm{u}_\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\rho|^2 + \rho^2 |\nabla\zeta|^2 - |\eta\nabla\rho|^2 - 2\rho\eta\nabla\eta.\nabla\rho \\ &\quad - |\rho\nabla\eta|^2 - \rho^2\eta^2 |\nabla(\theta+\zeta)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^4(\rho^4-1) \;-\frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \rho(\eta^2-1) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Par le fait que ρ et ζ vérifient $(\mathrm{S}'_\varepsilon)$ avec

$$\begin{cases} -\triangle\rho + \rho\,|\nabla\zeta|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho(1-\rho^2) \\ \mathrm{div}(\rho^2\,|\nabla\zeta|\,) = 0 \end{cases}$$

Alors,

$$(\text{-}\triangle\rho + \rho\,|\nabla\zeta|^2\,)\rho(\eta^2+1) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho^2(\eta^2-1)(1-\rho^2)\ (\,= 0 \text{ sur } \partial\Omega)$$

En multipliant par $\rho(\eta^2-1)$ dans la première équation et en utilisant le fait que $\eta = 1$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla\rho|^2 (\eta^2-1) + 2\int_\Omega \rho\eta\nabla\rho.\nabla\eta + \int_\Omega \rho^2 |\nabla\zeta|^2 (\eta^2-1) \\ = \; &\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^2(1-\rho^2)(\eta^2-1) \end{aligned}$$

Ainsi , on réécrit (B.2) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(\mathrm{v}) - E_\varepsilon(\mathrm{u}_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2 |\nabla\eta|^2 + \int_\Omega \rho\eta\nabla\rho.\nabla\eta + \frac{1}{2}\int_\Omega (\eta^2-1)|\nabla\rho|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2(\eta^2-1)|\nabla\zeta|^2 \\
&\quad + \int_\Omega \rho^2\eta^2\nabla\zeta.\nabla\theta + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2\eta^2.|\nabla\theta| + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^4(\rho^4-1) \; - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^2(\eta^2-1) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2 |\nabla\eta|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^4(\eta^2-1) + \int_\Omega \rho^2\eta^2\nabla\zeta.\nabla\theta + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2\eta^2.|\nabla\theta| \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^4(\rho^4-1) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2 |\nabla\eta|^2 \int_\Omega \rho^2(\eta^2-1)\nabla\zeta.\nabla\theta + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2\eta^2.|\nabla\theta| + \int_\Omega \rho^2\nabla\zeta.\nabla\theta \\
&\quad + + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \rho^4(\rho^4-1)
\end{aligned}$$

Pour finir la démonstration du lemme, il suffit de multiplier par ζ dans la deuxième équation du système et d'intégrer sur Ω. Ceci implique que

$$\int_\Omega \rho^2\nabla\zeta.\nabla\theta = 0$$

et alors le lemme est démontré. ■

2.1.4 Le cas d'une donnée au bord dépendante de ε

Dans l'étude du cas $\deg(g,\partial\Omega) \neq 0$, il serait utile d'avoir un analogue du théorème 2.3 dans le cas où g n'est plus fixée, mais dépend de ε de façon qu'elle tend (dans un sens qui sera précisé dans l'énoncé du théorème suivant) vers une fonction à valeurs dans S^1.

On se voit forcé de ne pas considérer n'importe quelle famille $(g_\varepsilon)_\varepsilon$, ainsi on impose quatre hypothèses fondamentales.

Hypothèses fondamentales :

$$\|g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)} \leq 1 \tag{H.1}$$

$$\|g_\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\partial\Omega)} \leq \mathrm{C} \tag{H.2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial\Omega} (1 - |g_\varepsilon|^2)^2 \leq \mathrm{C} \tag{H.3}$$

$$\exists g : \partial\Omega \to \mathbb{C} \text{ régulière telle que } g_\varepsilon \to g \text{ uniformément sur } \partial\Omega \text{ quand } \varepsilon \to 0 \qquad \text{(H.4)}$$

On suppose de plus, que $\deg(g;\partial\Omega) = 0$ (Il est évident que $|g| = 1$)

Soit u_ε une solution de

$$\min_{u \in H^1_{g_\varepsilon}(\Omega;\mathbb{C})} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \left(1 - |u|^2\right)^2$$

et u_* la solution de (P). Nous avons le théorème et la proposition suivants dont on fera usage ultérieurement

Théorème 2.5

$$u_\varepsilon \to u_* \textit{ dans } H^1(\Omega\ ;\mathbb{C}\ ) \tag{1.40}$$

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } L^\infty(\overline{\Omega}) \tag{1.41}$$

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } C^k_{\text{loc}}(\Omega) \text{ pour tout k} \tag{1.42}$$

$$\frac{1 - |u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \to |\nabla u_*|^2 \text{ dans } C^k_{\text{loc}}(\Omega) \text{ pour tout k} \tag{1.43}$$

Proposition 2.1 *Soit u_ε un minimiseur de E_ε dans $H^1_{g_\varepsilon}(\Omega;\mathbb{C})$. On suppose que les hypothèses (H.1),...,(H.4) sont vérifiées et qu'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ et $\delta > 0$ tels que*

$$g_\varepsilon = g \textit{ sur } B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$$

Alors,

$$u_\varepsilon \to u_* \text{ dans } C^{1,\alpha}(B_{2\delta}(x_0) \cap \overline{\Omega})$$

2.2 Cas où le degré de la donnée au bord est non nul

2.2.1 Quelques estimations fondamentales

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert régulier, borné et strictement étoilé en 0, i.e il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $\mathrm{x} \in \partial\Omega$, $\mathrm{x.n_x} \geq \alpha > 0$, où n est la normale extérieure au point x .Considérons $g : \partial\Omega \to \mathrm{S}^1$ régulière telle que $\deg(g, \partial\Omega) \neq 0$.

Dès maintenant, on va supposer $\mathrm{d} = \deg(g; \partial\Omega) > 0$, le cas $\mathrm{d} < 0$ s'obtient en passant à la fonction complexe conjuguée i.e : En considérant $\overline{\mathrm{g}}$ telle que

$$\deg(\overline{g}; \partial\Omega) = - \deg(g;\partial\Omega)$$

et en utilisant : $\mathrm{H}^1_{\overline{g}}(\Omega, \mathbb{C}) = \overline{\mathrm{H}^1_g}(\Omega, \mathbb{C})$et $E_\varepsilon(\overline{\mathrm{u}}) = E_\varepsilon(\mathrm{u})$.

Pour $\varepsilon > 0$, soit u_ε un minimiseur de

$$\min_{\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1_g(\Omega;\mathbb{C})} E_\varepsilon(\mathrm{u})$$

avec $E_\varepsilon(\mathrm{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \left(1 - |\mathrm{u}|^2\right)^2$.

On a déjà vu (en traitant le cas d = 0) que

1. $|\mathrm{u}_\varepsilon| \leq 1$

2. u_ε est une solution de l'équation d'Euler

$$\begin{cases} -\triangle \mathrm{u}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathrm{u}_\varepsilon \left(1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\right) & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{u}_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

3. $\|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{\mathrm{C}}{\varepsilon}$ avec $\mathrm{C} = \mathrm{C}(g, \Omega)$

Les estimations fondamentales pour les deux composantes de E_ε sont les suivantes

Estimation 1

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^2 \leq \pi \mathrm{d}\, |\log \varepsilon| + \mathrm{C}(\Omega, g).$$

- Pour cette estimation, on n'a pas besoin que Ω soit étoilé.

- Cette estimation est optimale, car on peut démontrer que si $\deg(g;\ \partial\Omega) \neq 0$ alors $H^1_g(\Omega\ ;\ S^1) = \emptyset$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \ - \ \pi d\,|\log\varepsilon|$$

reste bornée quand $\varepsilon \to 0$

Estimation 2

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq \ C \ \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

1. Même si pour obtenir cette estimation on va utiliser le fait que Ω soit étoilé, Struwe [11] a démontré le théorème sans utiliser cette hypothèse.

2. Contrairement au cas $d = 0$, l'intégrale ci-dessus ne converge pas vers 0. Plus précisément, on a

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1- \ |u_\varepsilon|^2)^2 \to \ 2\pi d$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (1- \ |u_\varepsilon|^2)^2 \rightharpoonup \ 2\pi\sum_1^d \delta_{a_j}$$

dans la topologie faible du $C(\Omega)$, ici $a_1,\ldots,a_d \in \Omega$ sont d points distincts .

Preuve: (De l'estimation 1) ■

Commençons par examiner un cas simple: $\Omega = B_R$, $g(z) = \frac{z}{|z|}$

Soit $I(\varepsilon,R) = E_\varepsilon(u_\varepsilon)$, on a la propriété suivante :

$$I(\varepsilon,R) = I(1,\frac{R}{\varepsilon}) \tag{2.1}$$

Preuve: (De la propriété (2.1)

Il suffit de voir que pour tout $u \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_R, \mathbb{C})$, on a

$$E_\varepsilon(u) = E_1(u(\varepsilon.))$$

et de passer ensuite à l'infimum. En effet

$$\left\{u(\varepsilon.)\ /\ u \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_R,\mathbb{C})\right\} = \ \left\{v\ /\ v \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_{\frac{R}{\varepsilon}},\mathbb{C})\right\}.$$

■

Or,

$$\begin{aligned} E_1(\mathrm{u}(\varepsilon.)) = & \quad \frac{1}{2}\int_{|\mathrm{x}|<\frac{\mathrm{R}}{\varepsilon}} \varepsilon^2 \left|(\nabla \mathrm{u})(\varepsilon \mathrm{x})\right|^2 \mathrm{dx} + \frac{1}{4}\int_{|\mathrm{x}|<\frac{\mathrm{R}}{\varepsilon}} (1-\left|\mathrm{u}(\varepsilon\mathrm{x})\right|^2\ )^2 \\ = & \quad \frac{1}{2}\int_{|\mathrm{y}|<\mathrm{R}} \left|\nabla \mathrm{u}(\mathrm{y})\right|^2 \mathrm{dy} + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{|\mathrm{y}|<\mathrm{R}} (1-\left|\mathrm{u}(\mathrm{y})\right|^2\ )^2 \mathrm{dy} = E_\varepsilon(\mathrm{u}) \end{aligned}$$

Compte tenu de cette homogénéité, on peut considérer

$$I(\mathrm{t}) = I(\mathrm{t},\ 1) = I(1,\frac{1}{\mathrm{t}}) \tag{2.2}$$

d'où

$$I(\varepsilon,\mathrm{R}) = I(\frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}) \tag{2.3}$$

On a besoin du lemme suivant

Lemme 2.8 *La fonction* $t \in\ ]0,+\infty[\ \longmapsto I(t) + \pi \log(t)$ *est croissante.*

Remarque 2.2 *Pour tout* $t \leq 1$*, on obtient*

$$I(t)\ \leq \pi\left|\log t\right| + I(\ 1) = \pi\left|\log t\right| + C$$

c'est-à-dire l'estimation 1 est vérifiée dans le cas particulier, $\Omega = \mathrm{B}_1$ et $g(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}$

Preuve: Du lemme 2.8

Soient $0 < \mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2$, u un minimiseur de E_1 sur $\mathrm{B}_{\frac{1}{\mathrm{t}_2}}$ (on va donc écrire $I(\mathrm{t}_2) = E_1(\mathrm{u})$)

On prolonge u à $\mathrm{B}_{\frac{1}{\mathrm{t}_1}}$ en prenant sur la couronne $\widetilde{\mathrm{u}}(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}$. Notons qu'on a obtenu une fonction continue et que $\widetilde{\mathrm{u}} \in C^\infty$ dans B_{1/t_2} et $\mathrm{B}_{1/t_1} \setminus \mathrm{B}_{1/t_2}$, donc, $\widetilde{\mathrm{u}} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{B}_{1/t_1})$ et de plus $\widetilde{\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}$ sur $\partial \mathrm{B}_{1/t_1}$.

On a

$$\begin{aligned} I(\mathrm{t}_1) = & \quad I(1,\frac{1}{\mathrm{t}_1}) \leq\ \mathrm{E}_1(\widetilde{\mathrm{u}}) \\ = & \quad E_1(\mathrm{u}) + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\mathrm{t}_2}<|\mathrm{z}|<\frac{1}{\mathrm{t}_1}} \left|\nabla(\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|})\right|^2 \\ = & \quad I(\mathrm{t}_2) + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\mathrm{t}_2}}^{\frac{1}{\mathrm{t}_1}} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ = & \quad I(\mathrm{t}_2) + \pi\ \log\frac{\mathrm{t}_2}{\mathrm{t}_1} \end{aligned}$$

et donc

$$I(t_1) + \pi \log t_1 \leq I(t_2) + \pi \log t_2 \qquad \text{c.q.f.d}$$

■

Pour achever la démonstration on se propose de construire une fonction test v_ε telle que

$$E_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \pi d \log\frac{1}{\varepsilon} + C \tag{2.4}$$

Preuve: On fixe $R > 0$ et $a_1,...,a_d \in \Omega$ des points distincts tels que

$$\begin{aligned} \overline{B(a_j, R)} &\subset \Omega \ \forall j = 1,...,d \\ \overline{B(a_i, R)} \cap \overline{B(a_j, R)} &= \emptyset \ \forall i = j \end{aligned}$$

et $\omega := \Omega \setminus \cup_{j=1}^{d} \overline{B(a_j, R)}$

$\deg(\overline{g}; \partial\omega) = \deg(g; \partial\Omega) - \sum_{j=1}^{d} \deg(\overline{g}; \partial B_j) = 0$

Il existe une application régulière $v_0 : \overline{\omega} \rightarrow S^1$ telle que $v_0 = g$ sur $\partial\omega$

On construit alors, pour $0 < \varepsilon < R$,

$$v_\varepsilon(z) = \begin{cases} v_0(z) \quad \text{dans } \omega \\ \frac{z - b_j}{|z - b_j|} \text{ si } \varepsilon < |z - b_j| < R \\ \frac{z - b_j}{\varepsilon} \text{ si } |z - b_j| < \varepsilon \end{cases}$$

On observe que $v_\varepsilon \in H_g^1(\Omega ;\mathbb{C})$ et

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (|v_\varepsilon|^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 = C$$

avec C qui ne dépend pas de ε.

En appliquant le lemme précédent dans notre situation avec $t_1 = \frac{\varepsilon}{R} < t_2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\leq E_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 + \sum_{j=1}^{d} I(\varepsilon, R) \leq \pi d \log\frac{1}{\varepsilon} + C \\ &\Rightarrow E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \pi d \log\frac{1}{\varepsilon} + C \end{aligned}$$

■

Preuve: (De l'estimation 2)

On va utiliser une méthode de Pohozaev, et c'est ici que le fait que Ω soit étoilé sera important.

On multiplie

$$\begin{cases} -\triangle u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\ u_\varepsilon \left(1 - |u_\varepsilon|^2\right) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par $\sum\limits_{j=1}^{2} x_j \partial_j u_\varepsilon$ et on intègre par partie.

À gauche on obtient (on écrit u à la place de u_ε)

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \triangle u\ (x.\nabla u) &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x.\nabla u) + \int_\Omega \nabla u.\nabla(x.\nabla u) \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x.\nabla u) + \int_\Omega (\,|\nabla u|^2 + \sum_{j,k=1}^{2} x_k \partial_j u\ \partial_j \partial_k u)\ . \end{aligned}$$

À droite on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega u\left(1 - |u|^2\right)(x.\nabla u) = - & \quad \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \sum_{j=1}^{2} x_j\ \partial_j (1 - |u|^2\,)^2 \\ &= \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{2} x_j n_j (1 - |u|^2\,)^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega \sum_{j=1}^{2} \partial_j x (1 - |u|^2\,)^2 \\ &= \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega (1 - |u|^2\,)^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x.\nabla u) + \int_\Omega (\,|\nabla u|^2 + \sum_{j,k=1}^{2} x_k \partial_j u\ \partial_j \partial_k u) = \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega (1 - |u|^2\,)^2$$

$$\Rightarrow \text{ - }\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x.\nabla u) + \int_{\Omega}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{2} x_k\partial_k(|\nabla u|^2)$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|u|^2)^2$$
$$\Rightarrow \text{ - }\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x.\nabla u) + \int_{\Omega}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{2} x_k n_k|\nabla u|^2 \text{ - }\int_{\Omega}|\nabla u|^2$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|u|^2)^2$$
$$\Rightarrow \text{ - }\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x.\nabla u) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x.n\,|\nabla u|^2$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|u|^2)^2.$$

Par ailleurs, on a

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \tau}\overrightarrow{\tau} + \frac{\partial u}{\partial n}\overrightarrow{n}$$
$$\Rightarrow |\nabla u|^2 = (\frac{\partial u}{\partial \tau})^2 + (\frac{\partial u}{\partial n})^2 .$$

Puisque $u = g$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial g}{\partial \tau}$$
$$\Rightarrow \text{ - }\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(\frac{\partial g}{\partial \tau}(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{\tau}) + \frac{\partial u}{\partial n}(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{n})) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{n})((\frac{\partial g}{\partial \tau})^2 + (\frac{\partial u}{\partial n})^2)$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|u|^2)^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\frac{\partial u}{\partial n})^2(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{n}) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|u|^2)^2$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(\frac{\partial g}{\partial \tau})^2(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{n}) \text{ - }\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial g}{\partial \tau}(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{\tau})$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|u|^2)^2 \leq C$$

■

Nous énonçons le théorème suivant qui va nous permettre de caractériser les disques

Théorème 2.6 *Il existe λ_0, μ_0 >0 (dépendantes de Ω et g) telles que, si u_ε vérifie l'équation d'Euler et satisfait*

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega\cap B_{2l}}(|u_\varepsilon|^2 - 1) \leq \mu_0$$

où B_{2l} est la boule de rayon 2l avec

$$\frac{l}{\varepsilon} \geq \lambda_0 \text{ et } l \leq 1$$

alors

$$|u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \Omega \cap B_l.$$

Preuve: La preuve se fait par l'absurde. Supposons qu'il existe, $x_0 \in \Omega\cap B_l$ tel que

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2},$$

alors, on a

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)| &\leq \frac{C}{\varepsilon}|x - x_0| \\
&\Rightarrow |u_\varepsilon(x)| \leq |u_\varepsilon(x_0)| + \frac{C}{\varepsilon}|x - x_0| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{C}{\varepsilon}\rho \text{ dans } \Omega \cap B_\rho(x_0).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$1 - |u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2} - \frac{C}{\varepsilon}\rho \text{ dans } \Omega \cap B_\rho(x_0)$$

On choisit $\rho = \frac{\varepsilon}{4C}$, donc

$$1 - |u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{4} \text{ dans } \Omega \cap B_{\frac{\varepsilon}{4C}}(x_0),$$

et on aura

$$(|u_\varepsilon(x)|^2 - 1)^2 \geq \frac{1}{16}.$$

D'un autre coté, $\exists\alpha > 0$(dépendante de Ω) telle que

$$\begin{aligned}
\text{mes}(\Omega \cap B_r) &\geq \alpha r^2 \quad \forall x \in \Omega, \nabla r \leq 1 \\
&\Rightarrow \int_{\Omega\cap B_{\frac{\varepsilon}{4C}}} (1 - |u_\varepsilon(x)|)^2 \geq \frac{\alpha\varepsilon^2}{(16C)^2}
\end{aligned}$$

à condition que $\frac{\varepsilon}{4C} < 1$

Notons que $B_{\frac{\varepsilon}{4C}}(x_0) \subset B_{2l}$ quand $\frac{\varepsilon}{4C} \leq l$ (puisque $x_0 \in B_l$), donc

$$\int_{\Omega \cap B_{2l}} (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \geq \frac{\alpha\varepsilon^2}{(16C)^2}$$

Si on prend $\lambda_0 = \frac{1}{4C}$ et $\mu_0 < \frac{\alpha}{(16C)^2}$, on aboutit à une contradiction.

Donc

$$|u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

■

Par la suite, pour des raisons techniques, on va considérer Ω' comme un ouvert simplement connexe tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega'$. On prendra Ω' pas trop éloigné de Ω de manière à ce que la projection sur $\partial\Omega$ de $x \in \Omega' \backslash \Omega$ soit bien définie.

On fixe $\widetilde{g}:\Omega'\backslash\Omega \to S^1$ régulière, telle que

$$\widetilde{g} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

À présent, à la place de $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\mathrm{tr}\ (u) = g,$$

on considèrera, avec la même notation, l'extension de u à Ω', $u:\Omega' \to \mathbb{C}$ telle que

$$\mathrm{tr}\ (u) = \widetilde{g} \text{ sur } \Omega'\backslash\Omega$$

Soit u_ε un minimiseur de E_ε dans H^1_g, nous allons maintenant utiliser un argument qui permet de localiser des régions où u_ε a un comportement singulier.

Considérons une famille de disques $B(x_i,\lambda_0\varepsilon)_{i\in I'}$, tel que $\lambda_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ et l$\leq$ 1est définie comme au théorème précédent, et

1. $x_i \in \Omega, \forall i \in I$

2. $B(x_i, \lambda_0\frac{\varepsilon}{4}) \cap B(x_j, \lambda_0\frac{\varepsilon}{4}) = \emptyset, \forall\ i \neq j$

3. $\Omega \subset \cup_{i\in I} B(x_i, \lambda_0\varepsilon)$

À cet effet, il suffit de considérer une famille qui satisfait (1) et (2).

On dit que $\mathrm{B}(\mathrm{x_i},\ \lambda_0\varepsilon)$ est un bon disque si

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{B}(\mathrm{x_i},2\lambda_0\varepsilon)}(|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2 < \mu_0$$

et $\mathrm{B}(\mathrm{x_i},\ \lambda_0\varepsilon)$ est un mauvais disque si

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathrm{B}(\mathrm{x_i},2\lambda_0\varepsilon)}(|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2 > \mu_0$$

où J est la collection des mauvais disques donnée par

$$\mathrm{J} = \{\mathrm{i},\mathrm{B}(\mathrm{x_i},\lambda_0\varepsilon) \text{ est un mauvais disque}\}$$

Le lemme suivant joue un rôle essentiel

Lemme 2.9 *Il existe N indépendamment de g et Ω tel que*

$$Card\ J \leq N$$

Remarque 2.3 *Proprement parler nous avons noté les points $(x_i)_{i\in I}$ par $(x_i^\varepsilon)_{i\in J_\varepsilon}$. Le contenu principal du lemme est que le card J reste borné indépendamment de ε*

Preuve: (Du lemme 2.9)

Il existe C telle que

$$\sum_{i\in I}\int_{\mathrm{B}(\mathrm{x_i},2\lambda_0\varepsilon)}(|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leq \mathrm{C}\int_\Omega(|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2$$

Puisque chaque point de Ω est majoré par C disques $\mathrm{B}(\mathrm{x_i},2\lambda_0\varepsilon)$, il est en résulte que

$$\mu_0 \mathrm{card\ J} \leq \frac{\mathrm{C}}{\varepsilon^2}\int_\Omega(|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2$$

et par l'estimation 2, on déduit que

$$\mathrm{Card\ J} \leq \mathrm{N}$$

■

On aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.10 *On a*

$$|u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Omega' \setminus \cup_{i\in J} B(x_i,\lambda_0\varepsilon)$$

Preuve: Soit $x \in \Omega' \setminus \cup_{i\in J} B(x_i,\lambda_0\varepsilon)$, par (3), $\exists$ j$\in I \setminus$J, tel que $B(x_i,\lambda_0\varepsilon)$ est un bon disque donc d'après le théorème des bon disques (théorème 2.6)

$$|u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2}$$

On peut alors montrer que pour tout ε, $J_\varepsilon \neq \emptyset$. En effet, supposons le contraire, ainsi,

$$|u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2} \text{ sur } \Omega'$$

■

Considérons $v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|}$. Il n'est pas difficile de montrer que

$$\nabla(|u_\varepsilon|) = \frac{u_\varepsilon.\nabla u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|} \in L^2(\Omega' ;\mathbb{R}^2) \text{ et } |\nabla v_\varepsilon| \leq 4(|\nabla u_\varepsilon| + |\nabla(|u_\varepsilon|)|)\ L^2(\Omega' ;\mathbb{R}^2)$$

Par suite, en remarquant que $|u_\varepsilon| = 1$ sur $\partial\Omega$, alors $v_\varepsilon \in H^1_g(\Omega ;S^1)$ ce qui est absurde. Ainsi, on voit que

$$\left\{x \in \Omega \text{ tel que } |u_\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}\right\} \subset \cup_{i\in J} B_{\lambda\varepsilon}(x_i)\ .$$

Ce qui n'améliore pas l'estimation faite sur la taille de $\left\{x \in \Omega \text{ tel que } |u_\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}\right\}$, mais permet de le localiser un peu mieux. A présent, on va voir, qu'il est possible, quitte à augmenter les rayons, d'éloigner plus les centres des mauvais disques. Ceci traduit en quelques sortes un phénomène d'accumulation des mauvais disques autour de quelques points de Ω. Ceci sera illustré par le théorème qui suit

Dès à présent, l'intégralité de nos raisonnements sera faite à partir d'une extraction $(\varepsilon_n)_n$ arbitraire.

Théorème 2.7 *(Théorème de séparation)*

On peut choisir un sous-ensemble J'$\subset$ J tel que, $\lambda \geq \lambda_0$ constante qui dépend que de g et Ω, on ait

$$|x_i - x_j| \geq 8\lambda\varepsilon, \forall i,j \in J', i \neq j \tag{2.5}$$

Et

$$\cup_{i\in J} B(x_i, \lambda_0\varepsilon) \subset \; B(x_i, \lambda\varepsilon) \tag{2.6}$$

Preuve: l'argument est par induction sur le card de J. Si J={1}, il n'y a rien à montrer, on prend $\lambda=\lambda_0$.

Sinon, supposons $|J| > 1$. Si (2.5) est vraie pour J '= J et $\lambda = \lambda'$, (2.6) est aussitôt vérifiée, donc le résultat est vrai.

Sinon, il ya une paire, par exemple x_1, x_2 tels que

$$|x_1 - x_2| < \; 8\lambda_0\varepsilon$$

Nous prenons $\lambda = 9\lambda_0$ et J'=J\{1}, ce qui nous conduit au cas précédent. Après un nombre fini d'étapes (au plus N), on est conduit à la conclusion du théorème avec

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 9^{\text{card J}}$$

■

Grosso modo les points $(x_i)_{i\in J'} = (x_i^\varepsilon)_{i\in J'}$ correspondent aux points où u_ε a un comportement singulier.

2.2.2 Limite supérieure de l'énergie de u_ε loin des singularités

On suppose que

$$|J'_{\varepsilon_n}| \; = N_1$$

et

$$\text{pour } i \in \mathbb{N}_{N_1}, \, x_i^{\varepsilon n} \to y_i \in \overline{\Omega}$$

Il est possible que $y_i = y_j$ avec $i \neq j$, alors soit $M = |\{y_i;\, i \in \mathbb{N}_{N_1}\}|$. Considérons $\{a_j;\, j \in \mathbb{N}_M\}$, l'ensemble des limites deux à deux distinctes et on définit

$$\Lambda_j = \; \{i \in \mathbb{N}_{N_1} \text{ tel que } y_i = a_j\}\, ,\, j \in \mathbb{N}_M \; .$$

On verra par la suite le rôle important que ces points jouent.

On fixe $\eta > 0$ telle que

$$\eta < \text{ dist}(\Omega,\, \partial\Omega')$$

$$\eta < \frac{1}{2}\,|\mathrm{a_i} \text{ - } \mathrm{a_j}| \quad \forall \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

alors que les disques $\mathrm{B(a_j},\, \eta)$ sont disjoints et contenus dans Ω'.

De toute évidence, nous avons, pour n assez grand disons n$\geq$ N, l'inclusion suivante

$$\cup_{\mathrm{i}\in \mathrm{J}} \mathrm{B}(\mathrm{x_i^{\varepsilon n}}, \lambda\varepsilon_\mathrm{n}) \subset \ \cup_\mathrm{j}\ \mathrm{B}(\mathrm{a_j}, \frac{\eta}{4})\ .$$

Dans ce qui suit, nous écrivons $\mathrm{x_i}$ au lieu de $\mathrm{x_i^{\varepsilon_n}}$. Rappelons que,

$$|\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x})| \geq \frac{1}{2} \text{ for } \mathrm{x} \in \partial\mathrm{B}(\mathrm{a_j}, \frac{\eta}{2}),\ \mathrm{n} \geq \mathrm{N}(\eta)$$

et donc

$$\deg(\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}}, \partial\mathrm{B}(\mathrm{a_j}, \frac{\eta}{2}))$$

est bien défini et il reste borné (quand n$\to \infty$) d'après le lemme suivant

Lemme 2.11 *On a,* $\forall i\in J$,

$$|deg(u_\varepsilon, \partial B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon))| \leq C \tag{2.7}$$

Preuve: Posons $\mathrm{v}_\varepsilon = \frac{\mathrm{u}_\varepsilon}{|\mathrm{u}_\varepsilon|}$, pour ε assez petit. Alors par un résultat sur le degré topologique, on a

$$\left|\deg_{\partial\mathrm{B}(\mathrm{a_j}, \frac{\eta}{2})}(\mathrm{v})\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{v}\wedge \mathrm{v}_\tau\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mathrm{u}\wedge\mathrm{u}_\tau}{|\mathrm{u}|^2}\right| \leq \left|\lambda\varepsilon_\mathrm{n}\ \max(\frac{\mathrm{u}\wedge\mathrm{u}_\tau}{|\mathrm{u}|^2})\right| \leq \mathrm{C}$$

De plus, en remarquant que pour tout j$\in \mathbb{N}_\mathrm{M}$, $\mathrm{B}_{\lambda\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x_i}) \subset \mathrm{B}_{\frac{\eta}{4}}(\mathrm{a_j})$ pour i$\in \Lambda_\mathrm{j}$, on a

$$\mathrm{k_j} = \deg_{\partial\mathrm{B}_{\frac{\eta}{4}}(\mathrm{a_j})}(\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}}) = \sum_{\mathrm{i}\in\Lambda_\mathrm{j}} \deg_{\partial\mathrm{B}_{\lambda\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x_i})}(\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}})$$

ceci résulte du fait que $\mathrm{v}_{\varepsilon_\mathrm{n}}$ soit bien définie et que le module soit égal à 1 dans $\mathrm{B}_{\frac{\eta}{4}}(\mathrm{a_j})\backslash\cup_{\mathrm{i}\in\Lambda_\mathrm{j}}\mathrm{B}_{\lambda\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x_i})$. Ainsi,

$$0 = \int_{\mathrm{B}_{\frac{\eta}{4}}(\mathrm{a_j})\backslash\cup_{\mathrm{i}\in\Lambda_\mathrm{j}}\mathrm{B}_{\lambda\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x_i})} \det\ (\mathrm{Jac}\ \mathrm{v}_{\varepsilon_\mathrm{n}}) = \deg_{\partial\mathrm{B}_{\frac{\eta}{4}}(\mathrm{a_j})}(\mathrm{v}_{\varepsilon_\mathrm{n}}) \text{ - } \sum_{\mathrm{i}\in\Lambda_\mathrm{j}} \deg_{\partial\mathrm{B}_{\lambda\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{x_i})}(\mathrm{v}_{\varepsilon_\mathrm{n}})$$

On en déduit que

$$|k_j| \leq C \text{ avec C indépendant de n}$$

■

L'un des intérêts de ces disques est qu'ils concentrent l'énergie de u_ε. Le théorème suivant énonce qu'en dehors des disques, l'énergie de u_ε reste bornée.

Par la suite, on supposera que pour tout j, Λ_j est indépendant de n, et on notera $r_j = |\Lambda_j|$

Théorème 2.8 *Ils existent η_0, $C > 0$, dépendantes seulement de Ω et g, tels que, pour $0 < \eta < \eta_0$ on ait*

$$\int_{\Omega \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}_M} B_\eta(a_j)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq 2\pi d |\log \eta| + C \quad \forall n \geq N(\eta)$$

La preuve fait appel au lemme suivant

Lemme 2.12 *Soit $j \in \mathbb{N}_M$, $\emptyset \neq \Lambda \subset \Lambda_j$ (quitte à réarranger les x_i, on suppose $\Lambda = \mathbb{N}_r$, $r \geq 1$)*

On considère $(\lambda_n)_n$ une suite bornée dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que

$$\lambda\varepsilon_n \leq \lambda_n\varepsilon_n < \min(\mathrm{dist}(x_i^{\varepsilon_n}; \partial B_\eta(a_j)); \frac{1}{2}|x_i - x_k|, i \neq k \in \Lambda \subset \Lambda_j)$$

On note

$$\Omega_j^n((\lambda_n)_n) = \Omega^n = B_\eta(a_j) \setminus \cup_{i \in \Lambda} B_{\lambda_n\varepsilon_n}(x_i) \text{ et } d_i = \deg_{\partial B_{\lambda_n\varepsilon_n}(x_i)}(v_{\varepsilon_n})$$

Ainsi

$$v_{\varepsilon_n} : \Omega^n \to S^1 \text{ est régulière}$$

Alors quitte à extraire $(n_k)_k$, il existe $C = O(|d_1,...,d_r|^2)$ une constante dépendante de Ω, g (indépendante de n et (λ_n) telle que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^n} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \geq \pi F(d_1,...,d_r) \log(\frac{\eta}{\lambda_n\varepsilon_n}) - C$$

Avec

$$F(d_1,...,d_r) = \min_{A=(A_1,...,A_k) \in P(\mathbb{N}_r)} \sum_{j=1}^{k} (\sum_{i \in A_j} d_i)^2$$

et $P(\mathbb{N}_r)$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_r$.

Preuve: (Du théorème 2.8)

On suppose $r_j \neq r_j(n)$, et on applique le lemme précédent à $\lambda_n=\lambda$ et on obtient à une extraction prés que

$$\frac{1}{2}\int_{B_\eta(a_j)\setminus\cup_{i\in\mathbb{N}_M}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)}|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \geq \pi\ \log(\frac{\eta}{\lambda_n\varepsilon_n})F(d_1,...,d_r)\text{ - }C(d_i\ i\in\Lambda_j)$$

Par (2.7), les d_i sont bornés, donc on peut prendre $C(d_i\ i\in\Lambda_j) = C$, où C ne dépend pas de j et n.

En remarquant que $d_i \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i\in A_j}d_i)^2 \geq \sum_{j=1}^{k}\left|\sum_{i\in A_j}d_i\right| \geq \left|\sum_{i\in A_j}d_i\right| = |k_j|$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{2}\int_{B_\eta(a_j)\setminus\cup_{i\in\mathbb{N}_M}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)}|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 \geq \pi\ \log(\frac{\eta}{\varepsilon_n})\ |k_j|\text{ - }C$$

A présent, revenons à u_{ε_n}, en remarquant que $v_{\varepsilon_n}\partial_i v_{\varepsilon_n} = 0$ dans $B_\eta(a_j)\setminus\cup_{i\in\Lambda_j}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)$, on déduit de

$$\partial_i u_{\varepsilon_n} = \partial_i(|u_{\varepsilon_n}|)v_{\varepsilon_n} + |u_{\varepsilon_n}|\,\partial_i v_{\varepsilon_n}$$

que

$$|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 = |u_{\varepsilon_n}|^2\,|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 + |\nabla|u_{\varepsilon_n}||^2\ .$$

Et donc,

$$|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq |u_{\varepsilon_n}|^2\,|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 = |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 + (\ |u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)\ |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2\,.$$

Bornons $A_{\varepsilon_n} = \left\|(\,|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1)\,|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2\right\|_{L^1(B_\eta(a_j)\setminus\cup_{i\in\Lambda_j}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i))}$. Pour cela, on explicite $|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2$ par

$$\frac{|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2}{|u_{\varepsilon_n}|^2}\text{ - }\frac{|\nabla|u_{\varepsilon_n}||^2}{|u_{\varepsilon_n}|^2} \leq \frac{|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2}{|u_{\varepsilon_n}|^2} \leq 4\,|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \quad \text{dans } B_\eta(a_j)\setminus\cup_{i\in\Lambda_j}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i),$$

alors, pour borner A_{ε_n}, il suffit de borner

$$|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 (|u_{\varepsilon_n}|^2 - 1) \text{dans } L^1(B_\eta(a_j) \setminus \cup_{i\in\Lambda_j} B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i))$$

et comme $u_{\varepsilon_n} \equiv 1$ dans $\Omega' \setminus \Omega$, il suffit de borner

$$|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 (|u_{\varepsilon_n}|^2 \text{-}1) \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Pour cela on va utiliser une inégalité du type Gagliardo-Nirenberg donnée par le lemme suivant

Lemme 2.13 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un ouvert borné régulier, et $2 \leq p,q \leq \infty$. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $u_{|\partial\Omega} \equiv 0$, alors*

$$\|\nabla u\|_{L^r} \leq \ C(p,q,\Omega) \, \|u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} \, \|u\|_{W^{2,q}}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(G.N(p,q))}$$

■

Avec r la moyenne harmonique de p et q.

Considérons h_ε l'unique solution de

$$\begin{cases} -\triangle h_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \, u_\varepsilon \left(1 - |u_\varepsilon|^2\right) & \text{sur } \Omega \\ h_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On a déjà vu que $\|h_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq 2$, de plus, $\left\|\frac{1}{\varepsilon^2} \, u_\varepsilon \left(1 - |u_\varepsilon|^2\right)\right\|_{L^2} \leq \frac{C}{\varepsilon}$.

Ainsi, en appliquant G.N(∞,2) on aura

$$\|\nabla h_\varepsilon\|_{L^4} \leq C\varepsilon_n^{-\frac{1}{2}}$$

En remarquant que u_{ε_n}- h_{ε_n} est régulière et indépendante de n, on déduit que

$$\|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_{L^4} \leq C\varepsilon_n^{-\frac{1}{2}}$$

Ainsi, à l'aide de l'estimation 2 et l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à $|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2(|u_{\varepsilon_n}|^2-$

1), on borne A_{ε_n} de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'\backslash\backslash\cup_{j\in\mathbb{N}_M}B\eta(a_j)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 &\leq \int_{\Omega'} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 - \sum_{j=1}^{M} \int_{B_\eta(a_j)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \\
&\leq \int_{\Omega'} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 - \sum_{j=1}^{M} \int_{B_\eta(a_j)\backslash\cup_{i\in\Lambda_j}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \\
&\leq \int_{\Omega'} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 - \sum_{j=1}^{M} \int_{B_\eta(a_j)\backslash\cup_{i\in\Lambda_j}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 + C \\
&\leq 2\pi\,|\log\varepsilon_n|\,(d- \sum_{j=1}^{M}|k_j|\,) + 2\pi\,|\log\eta|\sum_{j=1}^{M}|k_j| + C
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Avant d'achever la démonstration, nous ferons les deux remarques suivantes

1. Pour ε_n assez petit, on a $B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i) \subset \Omega$, ainsi v_{ε_n} est bien définie, régulière et de module 1 dans $\Omega\backslash\cup_{i\in\mathbb{N}_{N_1}}B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)$. Par un raisonnement comme celui fait plus haut, on déduit que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_{N_1}} \deg_{\partial B_{\lambda\varepsilon_n}(x_i)}(v_{\varepsilon_n}) = \sum_{j\in\mathbb{N}_M} \deg_{\partial B_\eta(a_j)}(v_{\varepsilon_n}) = \sum_{j=1}^{M} k_j = d \tag{2.9}$$

2. Le terme de droite de (2.8) est positif, donc la limite (quand $n\to\infty$) l'est aussi, alors,

$$d - \sum_{j=1}^{M} |k_j| \geq 0 \tag{2.10}$$

Nous sommes à présent en mesure de conclure. (2.9) et (2.10) combinés forcent les k_j à être tous positifs. Ainsi, en revenant à (2.8) et en réutilisant (2.9), on déduit l'estimation désirée.

2.2.3 Etude asymptotique des minimiseurs de E_{ε_n}

Le résultat principal dans cette section est formulé par le théorème suivant

Théorème 2.9 *Soit u_* telle que, à une sous suite près,*

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \ \text{ faiblement dans } H^1_{loc}(\Omega\backslash\{a_1,...,a_M\} \ \text{ et } W^{1,p}(\Omega)$$

Alors

a

$$u_* \in C^\infty(\Omega \backslash \cup_{j=1}^{M} \{a_j\}; S^1)$$

b

$$-\triangle u_* = u_* |\nabla u_*|^2 \quad \text{dans } \Omega \backslash \cup_{j=1}^{M} \{a_j\}$$

c

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \text{ dans } C^{1,\alpha}_{loc}(\overline{\Omega} \backslash \cup_{j=1}^{M} \{a_j\}), 0<\alpha<1$$

d

$$u_{\varepsilon_n} \to u_*$$

et

$$\frac{1-|u_{\varepsilon_n}|^2}{\varepsilon^2} \to |\nabla u_*|^2 \quad \text{dans } C^k(K) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } K \text{ compact de } \Omega \backslash \cup_{j=1}^{M} \{a_j\}$$

De plus,

e

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_* \wedge \frac{\partial u_*}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u_* \wedge \frac{\partial u_*}{\partial y}) = 0 \quad \text{dans } D'(\Omega)$$

Preuve: **Etape 1 :** On démontre (e)

En remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \wedge \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u \wedge \frac{\partial u}{\partial y}) \ = \ u \wedge \triangle u, \text{ pour } u \in C^2$$

et que le système $\{\triangle u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}\}$ est ponctuellement $\mathbb{R}$ lié, on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{\varepsilon_n} \wedge \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u_{\varepsilon_n} \wedge \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial y}) \ = 0$$

au sens classique. Il suffit alors de pouvoir passer à la limite.

Pour assurer la véracité d'un passage à la limite faible d'un produit de deux suites, il suffit que l'une converge p.p en restant uniformément bornée par une certaine constante C dans L^∞, et que l'autre converge faiblement dans L^p, $p \geq 1$.

En effet, soit $(f_n)_n$ bornée dans L^∞, $f_n \to f$ p.p et soit $g_n \rightharpoonup g$ dans L^p, $p \geq 1$

Soit $\varphi \in L^{p'}$, alors

$$\begin{aligned}|< f_n g_n, \varphi > - < fg, \varphi >| &= |< g_n, f_n\varphi > - < g, f\varphi >| \\ &\leq |< g_n - g, f_n\varphi >| + |< g, (f_n - f)\varphi >| \\ &\leq C\,|< g_n - g, \varphi >| + |< g\varphi, (f_n - f) >|\end{aligned}$$

Le premier terme du dernier membre de droite tend vers 0 par convergence faible de g_n vers g. Le deuxième aussi en remarquant que $|g\varphi(f_n - f)|$ tend vers 0 p.p et est majorée, donc, par convergence dominée on a $|< g\varphi, (f_n - f) >| \to 0$

Il suffit d'utiliser la définition de $u \wedge v$ pour obtenir le résultat.

Etape 2 : (Démonstration du d)

Les résultats étant locaux, il suffit de trouver pour tout $x_0 \in \Omega\backslash\cup_{j=1}^{M}\{a_j\}$ une boule $B{=}B_R(x_0)\subset \Omega\backslash\cup_{j=1}^{M}\{a_j\}$ telle que les convergences désirées ont lieu sur B.

Soit $R_0 > 0$ tel que $B_{2R_0}(x_0) \subset \Omega\backslash\cup_{j=1}^{M}\{a_j\}$, on va trouver un $R\in\,]R_0,2R_0[$ tel que par le théorème 2.8, on déduit que

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq 2\pi d\,|\log\eta| + C$$

et par l'estimation 2, on conclut

$$\int_{\partial B_R(x_0)} (\,|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_n^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2\,)^2) \leq C \tag{2.11}$$

avec C indépendante de n .

Pour l'existence d'un tel R, notons que

$$\int_{B_{2R}(x_0)} (\,|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_n^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2\,)^2) = \int_0^{2R_0} (\int_{\partial B_R(x)} (\,|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_n^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2\,)^2)$$

On note

$$g_n(R) = \int_{\partial B_R(x)} (\,|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_n^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2\,)^2)$$

De plus $g_n \geq 0$. Alors, en appliquant le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{2R_0} \liminf_{n\to\infty}\; g_n(R)\; dR &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^{2R_0} g_n(R)\; dR \\ &\leq C\end{aligned}$$

En particulier, $\liminf_{n\to\infty} g_n(R)$ est finie pour presque tout R, et donc on obtient (2.11) à une sous-suite prés.

Posons $\omega = B_R(x_0)$. Alors ω est régulier et (2.11) montre que sur $\partial\omega$, (u_{ε_n}) est bornée dans H^1.

À une sous-suite prés, $g_n = u_{\varepsilon_n}$ sur $\partial\omega$. g_n vérifie les hypothèses (fondamentales) données avant le théorème 2.5 (cas de la donnée au bord dépendant de ε).

En effet, l'hypothèse (H.1) est claire, (2.11) assure les hypothèses (H.2) et (H.3). Il reste à montrer (H.4). Dans un premier temps, (H.2) implique la convergence de g_n vers g_0 (à une extraction prés) forte dans $L^\infty(\partial\omega)$ et faible dans $H^1(\partial\omega)$. Il suffit de montrer que $\deg_{\partial\omega}(g_0)= 0$ afin de retrouver l'intégralité des hypothèses fondamentales.

De plus, (2.11) montre que $|g_0| = 1$.

D'autre part, pour n assez grand $|g_n| \geq \frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned} \deg_{\partial\omega}(g_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\omega} (\frac{g_n}{|g_n|}) \wedge (\frac{g_n}{|g_n|})_\tau \\ &\to \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\omega} g_0 \wedge g_{0,\tau} \end{aligned}$$

car

$$\frac{g_n}{|g_n|} \to g_0 \quad \text{fortement dans } L^2$$

et

$$(\frac{g_n}{|g_n|})_\tau \to g_{0,\tau} \quad \text{faiblement dans } L^2$$

Donc,

$$\deg_{\partial\omega}(g_0) = 0$$

car pour n assez grand, on a

$$|u_{\varepsilon_n}| \geq \frac{1}{2} \quad \text{sur } B_R(x_0)$$

et donc, $\frac{g_n}{|g_n|}$ se prolonge sur ω à une fonction de H^1 à valeurs dans S^1 (le prolongement est $\frac{u_{\varepsilon_n}}{|u_{\varepsilon_n}|}$), ce qui implique le fait que son degré soit nul.

Finalement, u_{ε_n} sur ω est un minimiseur de E_{ε_n} dans $H^1_{g_n}(\omega;\mathbb{C})$. Supposons le contraire, il existe v $\in H^1_{g_n}(\omega;\mathbb{C})$ tel que

$$E_{\varepsilon_n}(v) < E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_{n|\omega}})$$

Alors, en prolongeant v dans Ω par

$$\widetilde{\mathrm{v}} = \begin{cases} \mathrm{v} \ \text{ dans } \omega \\ \mathrm{u}_{\varepsilon_n} \ \text{ dans } \Omega\backslash\omega \end{cases}$$

on obtient $\widetilde{\mathrm{v}} \in \mathrm{H}^1_g(\Omega;\mathbb{C})$ et

$$E_{\varepsilon_n}(\widetilde{\mathrm{v}}) < E_{\varepsilon_n}(\mathrm{u}_{\varepsilon_n}).$$

Ce qui contredit le fait que $\mathrm{u}_{\varepsilon_n}$ soit un minimiseur .

Donc on est dans les hypothèses du théorème 2.5 sur ω. Par conséquent, on a les convergences désirées dans tout compact de ω .

Etape 3 : a et b sont des conséquences du théorème 2.5

Etape 4 : Démonstration de c)

Par les résultats précédents, il suffit de démontrer la convergence dans $\mathrm{B_R}(\mathrm{x}_0)\cap\overline{\Omega}$ pour $\mathrm{x}_0 \in \partial\Omega\backslash\{\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a_M}\}$ et un certain $\mathrm{R} < \min|\mathrm{a_j} - \mathrm{x}_0|$.

Le but est de pouvoir appliquer la proposition 2.1.

Soit U un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^2$, V un voisinage ouvert de l'origine. Alors, par régularité de $\partial\Omega$, il existe $\psi : \overline{\mathrm{U}} \to \overline{\mathrm{V}}$ un $C^\infty-$difféomorphisme .

De plus, on peut prendre ψ tel que : $\psi(\mathrm{x}_0)= 0$, $\psi(\mathrm{U} \cap \partial\Omega)= \{(\mathrm{x},0) \in \mathrm{V}\} = \mathrm{V}_0$ (i.e ψ envoie $\mathrm{U} \cap \partial\Omega$ sur $\mathrm{V} \cap \{(\mathrm{x},0) /\mathrm{x}\in \mathbb{R}\}$) et $\psi(\mathrm{U} \cap \Omega)= \{(\mathrm{x,y}) \in\mathrm{V}, \mathrm{y}> 0\} =\mathrm{V}^+$ (i.e ψ envoie $\mathrm{U} \cap\Omega$ sur $\mathrm{V}\cap\{(\mathrm{x,y})/\mathrm{x}\in \mathbb{R}, \mathrm{y}> 0\}$)

Considérons V' un voisinage ouvert de l'origine dans V_0.

Soit θ une courbe régulière incluse dans $\mathrm{V}^+\cup\mathrm{V}_0$ telle que θ intersecte $\{(\mathrm{x},0)/\mathrm{x}\in \mathbb{R}\}$ selon un segment et l'intérieur $\mathcal{L}$ de θ soit convexe .

On définit alors pour $\frac{1}{2} \leq \mathrm{t} \leq 1$

$$\theta_{\mathrm{t}} := \mathrm{t}.\theta$$

où $\mathrm{t.A} =\{ \mathrm{t} .\mathrm{a}/ \mathrm{a} \in\mathrm{A} \}$

$$\theta'_{\mathrm{t}} := \theta_{\mathrm{t}}\backslash \ \mathrm{V}_0$$

Par construction on a θ_{t} régulière pour tout t et $\theta'_{\mathrm{t}_1} \cap \theta'_{\mathrm{t}_2} = \emptyset$ dès que $\mathrm{t}_1 \neq \mathrm{t}_2$.

En définissant $\Gamma_{\mathrm{t}} = \psi^{-1}(\theta_{\mathrm{t}})$, la régularité se transmet i.e :Γ_{t} est une courbe de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$.

De plus, pour $\mathrm{t} \in [1;2]$, Γ_{t} contient un voisinage fixe $\mathrm{W} \subset \psi^{-1}(\frac{1}{2}.\mathrm{V}')$ (relatif à $\partial\Omega$) de x_0 .

Comme précédemment, on écrit Γ_t' pour $\psi^{-1}(\theta_t') = \Gamma_t \cap \Omega$, alors la propriété d'intersection vide pour $t_1 \neq t_2$ est vérifiée (i.e : $\Gamma_{t_1}' \cap \Gamma_{t_2}' = \emptyset$ si $t_1 \neq t_2$).

Supposons que l'on ait un certain $\frac{1}{2} < t < 1$ tel que l'énergie de u_{ε_n} soit bornée indépendamment de n sur Γ_t .

En posant $g_n = u_{\varepsilon_n}$ sur Γ_t et W l'intérieur de Γ_t, comme précédemment on retrouve les quatre hypothèses fondamentales.

De plus, en remarquant que $W \subset \Gamma_t$ et que sur W, $g_n = g$, on peut appliquer la proposition 2.1. Par suite, on obtient la convergence $C^{1,\alpha}$, pour tout $0 < \alpha < 1$ dans $B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \overline{\Omega}$ pour δ tel que

$$B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega \subset W \quad \text{et} \quad B_\delta(x_0) \quad \text{ne contient pas de singularités}$$

Il reste à déterminer ce fameux t. Pour cela, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_t} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 &= \int_{\Gamma_t'} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 + \int_{\Gamma_t \cap \partial\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \\
&\leq \int_{\Gamma_t'} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 + \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial \tau}\right|^2
\end{aligned}$$

On sait que la dernière intégrale est bornée. Posons

$$w_n = (|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 \circ \psi^{-1}$$

En utilisant le fait que ψ préserve une équivalence des intégrales et que l'on puisse prendre $\psi^{-1}(\mathcal{L})$ pas trop prés des singularités, le théorème 2.8 donne

$$\int_{\mathcal{L} \cap \omega_{\frac{1}{2}}} w_n = O(\int_{\frac{1}{2}}^{1} dt \int_{\theta_t} w_n(s)\, ds) = O(1)$$

où $\omega_{\frac{1}{2}}$ est le fermé convexe de frontière $\theta_{\frac{1}{2}}$.

En utilisant comme précédemment le lemme de Fatou sur $\int_{\theta_t} w_n(s)\, ds \geq 0$, quitte à extraire, on obtient $\frac{1}{2} \leq t \neq t(n) < 1$ tel qu'il existe C indépendante de n vérifiant

$$\int_{\theta_t} w_n(s) ds \leq C$$

Ainsi, on prend $\omega = \psi^{-1}(\mathcal{L}_t)$, $\mathcal{L}_t$ est l'intérieur (borné) de θ_t. On a alors $\partial\omega = \Gamma_t$, l'énergie de u_{ε_n} est bornée indépendamment de n sur Γ_t et donc on obtient le résultat à une extraction prés .

En remarquant que la limite est indépendante de l'extraction, on déduit le résultat par un raisonnement standard. ■

2.2.4 Quelques précisions sur les singularités

Le théorème qui suit va démontrer qu'il n'y a pas de singularités sur le bord de Ω. Ainsi, on va pouvoir définir le degré de u_* par rapport à a_j pour a_j une singularité. Cette définition est issue du fait que u_* soit à valeur dans S^1 dans tout ouvert de Ω ne contenant pas de singularités.

Théorème 2.10 *Les trois assertions suivantes sont vérifiées*

a $a_j \in \Omega$, j =1,...,M

b $\deg(u_*, a_j) = 1$, j =1,...,M

c $M = d$

Ici, $\deg(u_*, a_j)$ est défini de la façon suivante

Soit $R > 0$ tel que $\overline{B_R}(a_j) \subset \Omega$ et $a_k \notin \overline{B_R}(a_j)$ $j \neq k$, alors u_* est une fonction régulière de module 1 dans $B_R(a_j)\backslash\{a_j\}$. Par conséquent $\deg(u_*, \partial B_r(a_j))$, $r \in]0, R]$ est bien défini.

Si on regarde l'anneau $A_{r_1,r_2}(a_j)$, avec $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq R$, on voit que

$$\deg(u_*, \partial B_{r_1}(a_j)) = \deg(u_*, \partial B_{r_2}(a_j))$$

et donc le degré ne dépend pas du choix de r. Alors on peut définir $\deg(u_*, a_j)$ comme la valeur commune de ces degrés.

Preuve: 1ère étape: Démonstration de c

Supposons qu'on a démontré a) et b). Soit $R > 0$ assez petit afin d'avoir

$$\overline{B_R}(a_j) \subset \Omega$$

et

$$\overline{B_R}(a_j) \cap \overline{B_R}(a_k) = \emptyset, \ j \neq k$$

Alors d'après le théorème 2.9 on sait que u_* est régulière(au moins $C^{1,\alpha}$) sur $\overline{\omega}$, où $\omega = \Omega \backslash \cup_{j=1}^{M} \overline{B_R}(a_j)$.

De plus, $|u_*| = 1$, et donc

$$\deg(u_*,\partial\Omega) = \sum_{j=1}^{M} \deg(u_*,\partial B_R(a_j)) = \sum_{j=1}^{M} \deg(u_*,a_j) = M$$

$2^{\text{ème}}$ étape: Preuve de a) qui se fait en trois étapes

$1^{\text{ème}}$ étape : $k_j > 0$ si $a_j \in \Omega$ et $k_j = \deg(u_*,a_j)$

On a déjà vu que $k_j \geq 0$ pour tout j. Supposons par l'absurde qu'on a $k_j = 0$ pour $a_j \in \Omega$. On peut choisir $\eta > 0$ tel que

$$B_\eta(a_j) \cap (\partial\Omega \cup_{k\neq j} \{a_k\}) = \emptyset$$

et

$$\int_{\partial B_\eta(a_j)} (|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2) \leq \text{ const}$$

à une sous-suite prés(on procède comme dans le théorème 2.9). De plus, on a

$$\deg(\frac{u_{\varepsilon_n}}{|u_{\varepsilon_n}|},\partial B_\eta(a_j)) = 0$$

par la définition de k_j

On peut donc appliquer le théorème 2.3, on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\partial B_\eta(a_j)} (1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 \to 0 \tag{2.11}$$

Or, il existe des "mauvais points"

$$x_i^{\varepsilon_n} \to a_j$$

Par conséquent, $B_\eta(a_j)$ contient, pour n assez grand des "mauvais disques" $B_{2\alpha\varepsilon_n}(x_i^{\varepsilon_n})$, pour lesquels on a

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{B_{2\alpha\varepsilon_n}(x_i^{\varepsilon_n})} (1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 \geq \mu_0 \tag{2.12}$$

(2.11) et (2.12) sont contradictoires.

Pour démontrer l'égalité $k_j = \deg(u_*, a_j)$, on utilise le fait que

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \quad \text{dans } C^\infty(\partial B_\eta(a_j)).$$

Alors

$$k_j = \deg(\frac{u_{\varepsilon_n}}{|u_{\varepsilon_n}|}, \partial B_\eta(a_j)) \to \deg(u_*, \partial B_\eta(a_j)) = \deg(u_*, a_j)$$

compte tenu de la définition de ce dernier nombre.

$2^{\text{ème}}$ étape : $k_j > 0$ si $a_j \in \partial\Omega$

Supposons par l'absurde que $k_j = 0$. Comme dans la démonstration du théorème précédent, on peut trouver k_t, $t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \quad \text{dans } C^{1,\alpha}(\omega)$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_\omega (1 - |u_{\varepsilon_n}|^2)^2 \to 0 \tag{2.13}$$

De nouveau, il existe $x_i^{\varepsilon_n}$ des mauvais points tels que $\overline{B_{2\lambda\varepsilon_n}}(x_i^{\varepsilon_n}) \cap \overline{\Omega} \subset \overline{\omega}$ pour n assez grand, et l'inégalité (2.12) contredit (2.13) donc

$$k_j > 0 \text{ si } a_j \in \partial\Omega$$

$3^{\text{éme}}$ étape : $k_j = 1$, $j = 1, ..., M$

Soient Ω' un voisinage régulier de $\overline{\Omega}$, $\mu = \text{dist}(\partial\Omega', \Omega)$ et $\overline{g} : \Omega' \backslash \Omega \to S^1$ tels que

$$\overline{g} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

et $\overline{g}$ est régulière. On prolonge u_ε à u_* sur $\Omega' \backslash \Omega$ par $\overline{g}$. Notons que $\overline{g}$ est fixée, et donc les estimations trouvées pour u_ε et u_* se généralisent (à des constantes additives prés).

On va appliquer le lemme suivant ■

Lemme 2.14 *(I.Shaffrir)*

Soient Ω' un domaine dans $\mathbb{R}^2$ et $a_j \in \Omega'$, $1 \leq i \leq M$. On pose $\omega_j = B_\eta(a_j)$ et on suppose que

a dist $(a_j, \partial\Omega') \geq 2\mu > 0$, $0 < \eta < \mu$

b $|a_j - a_k| \geq 8\eta$, $j \neq k$

Si $u{:}\Omega' \backslash \cup_{j=1}^{M} \omega_j \rightarrow S^1$ est régulière et $d_j = \deg_{\partial\omega_j}(u)$, alors

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega' \backslash \cup_{j=1}^{M}\omega_j} |\nabla u|^2 \geq \pi(\log\frac{\mu}{\eta})\ F(k_1,...,k_M\ )\ - C(k_1,...,k_M\ )$$

Avec $F(k_1,...,k_M\ ) =_{A=(A_1,...,A_k)\in P(\{k_1,...,k_M\})} \sum_{i\,=\,1}^{k} (\sum_{j\in A_i} k_i)^2$ et $P(\{k_1,...,k_M\})$ est l'ensemble des parties de $\{k_1,...,k_M\}$, $C(k_1,...,k_M\ )$ est une constante qu'on peut fixer indépendamment de $\{k_1,...,k_M\}$ dès que les k_j prennent leurs valeurs dans un ensemble borné .

Compte tenu du fait qu'on a $k_j \geq 0$, on obtient

$$F(k_1,...,k_M\ ) = \sum_{j\,=\,1}^{M} k_j^2.$$

En appliquent le lemme, on aura

$$\int_{\Omega' \backslash \cup_{j=1}^{M} B_\eta(a_j\ )} |\nabla u_*|^2 \geq 2\pi \sum_{j\,=\,1}^{M} k_j^2(\log\frac{\mu}{\eta})\ \text{-}\ C \tag{2.14}$$

D'autre part (d'après le théorème 2.8), on a

$$\int_{\Omega' \backslash \cup_{j=1}^{M} B_\eta(a_j\ )} |\nabla u_*|^2 \leq 2\pi d\,|\log\eta| +\ \text{const} \tag{2.15}$$

Si on compare (2.14) et (2.15), on obtient

$$C' \geq 2\pi(\sum_{j\,=\,1}^{M} k_j^2 - k_j)\ \log\frac{1}{\eta}$$

En faisant tendre $\eta \rightarrow 0$, on déduit

$$\sum_{j\,=\,1}^{M} k_j^2 - k_j \leq 0.$$

Et comme un entier est plus petit que son carré, alors

$$\sum_{j\,=\,1}^{M} k_j^2 - k_j = 0.$$

Par suite $k_j \in \{0,1\}$. Or $k_j > 0$, d'où

$$k_j = 1, \ j = 1,...,M$$

3 étape : $a_j \in \Omega$, j =1,...,M

supposons par l'absurde que $a_j \in \partial\Omega$, le lemme suivant va intervenir dans la démonstration

Lemme 2.15 *Il existe* $\eta_0 > 0$, $\varepsilon \in \left]0,\frac{\pi}{6}\right[$ *tels que*

i $\eta_0 < d(\Omega,\partial\Omega')$, $\eta_0 < \frac{1}{2}|a_1 - a_j|$, j =2,...,n

ii La boule $B_{\eta_0}(a_1)$ se partitionne en deux secteurs S_1,S_2 telles que l'angle au centre de S_2 soit égal à $\pi - 2\varepsilon$ et $\Omega \cap B_{\eta_0}(a_1) \subset S^1$

Preuve: (De l'étape 5) ■

Soient $0 < \eta < \eta_0$ et A la couronne $A_{\eta,\eta_0}(a_j)$

On désigne par A^+ et A^- les intersections de A avec les secteurs S^1,S^2

Pour $r \in]\eta,\eta_0[$, on a

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1 = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)} u_* \wedge u_{*\tau}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)} |u_{*\tau}| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^2} |u_{*\tau}| + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |u_{*\tau}| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^2} |\overline{g}_\tau| + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |u_{*\tau}| \\
&\leq C_r + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |u_{*\tau}|
\end{aligned}$$

Car $\overline{g}$ est régulière, donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |u_{*\tau}| \geq 1 - C_r$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |u_{*\tau}| \leq \left(\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} 1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |\nabla u_*|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\left(\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |\nabla u_*|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{2\pi}{\sqrt{(\pi+2\varepsilon)r}}(1-C_r)$$

Maintenant on prend un η_0 plus petit afin d'avoir $C\eta_0 < \frac{1}{2}$. On a

$$\int_{\partial B_r(a_1)\cap S^1} |\nabla u_*|^2 \geq \frac{4\pi^2}{(\pi+2\varepsilon)r}(1-2C_r)$$

En intégrant cette inégalité par rapport à r , on aura

$$\int_A |\nabla u_*|^2 \geq \int_{A_{\eta,\eta_0}(a_j)\cap S^1} |\nabla u_*|^2 \geq \frac{4\pi^2}{\pi+2\varepsilon}\log(\frac{\eta_0}{\eta}) - C(\eta_0) \tag{2.16}$$

On a donc, si $\eta_0 > 0$ et tel que

$$B_{4\eta_0}(a_j) \cap B_{4\eta_0}(a_k) = \emptyset$$

et

$$B_{8\eta_0}(a_j) \subset \Omega',\ j = 1, ..., d$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'\setminus\cup_{j=1}^d B_\eta(a_j)} |\nabla u_*|^2 &\geq \sum_{j=2}^{d} \int_{B_{\eta_0}(a_j)\setminus B_\eta(a_j)} |\nabla u_*|^2 + \int_A |\nabla u_*|^2 \qquad (2.17)\\ &\geq 2\pi(d-1)\log\frac{\eta_0}{\eta} + \frac{4\pi^2}{\pi+2\varepsilon}\log\frac{\eta_0}{\eta} - C(\eta_0) \end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue à l'aide du lemme de Shaffrir appliqué à chaque terme.

D'autre part, on sait que

$$\int_{\Omega'\setminus\cup_{j=1}^d B_\eta(a_j)} |\nabla u_*|^2 \leq 2\pi d\,|\log\eta| + \text{const} \tag{2.18}$$

Si on compare (2.17) et (2.18) et on fait tendre η vers 0, on obtient

$$2\pi(d-1) + \frac{4\pi^2}{\pi+2\varepsilon} < 2\pi d$$

d'où

$$\pi + 2\varepsilon > \pi$$

Ce qui contredit notre choix de ε.

2.2.5 Quelques précisions sur u_*

Le théorème suivant donne un résultat important.La forme de u_* est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.11 *On a*

$$u_* = \frac{z - a_1}{|z - a_1|} \ldots \frac{z - a_d}{|z - a_d|} \; e^{i\varphi}$$

où φ est régulière sur $\overline{\Omega}$, de façon que:

$$\begin{cases} \triangle\varphi \;= 0 \;\; \text{dans } \Omega \\ \mathrm{u}_* \;= g \;\; \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.19}$$

φ est bien définie (modulo $2\pi\mathbb{Z}$).

Il faut voir que sur $\partial\Omega$, on peut écrire g sous la forme recuise. On doit avoir, sur $\partial\Omega$

$$e^{\mathrm{i}\varphi} \;=\; g \; \frac{|\mathrm{z} - \mathrm{a}_1|}{\mathrm{z} - \mathrm{a}_1} \ldots \frac{|\mathrm{z} - \mathrm{a}_\mathrm{d}|}{\mathrm{z} - \mathrm{a}_\mathrm{d}} \;=\; \mathrm{h}$$

Avec φ globalement définie, on sait que cela est possible ssi $\deg(\mathrm{h}, \partial\Omega) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} \deg\,(\mathrm{h},\partial\Omega) \;&=\; \deg(g,\partial\Omega) + \deg(\frac{|\mathrm{z} - \mathrm{a}_1|}{\mathrm{z} - \mathrm{a}_1},\partial\Omega) + \ldots + \deg(\frac{|\mathrm{z} - \mathrm{a}_\mathrm{d}|}{\mathrm{z} - \mathrm{a}_\mathrm{d}},\partial\Omega) \\ &=\; \mathrm{d} - \deg(\frac{|\mathrm{z} - \mathrm{a}_1|}{\mathrm{z} - \mathrm{a}_1},\partial\Omega) - \ldots - \deg(\frac{|\mathrm{z} - \mathrm{a}_\mathrm{d}|}{\mathrm{z} - \mathrm{a}_\mathrm{d}},\partial\Omega) \\ &=\; 0 \end{aligned}$$

Preuve: (Du théorème 2.11)

Rappelons que

a

$$\mathrm{u}_* \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathrm{S}^1), 1 \leq \mathrm{p} \; < 2$$

b

$$\mathrm{a}_\mathrm{j} \in \Omega,\; \deg(\mathrm{u}_*,\mathrm{a}_\mathrm{j}) = +1$$

c

$$-\triangle u_* = u_* \left|\nabla u_*\right|^2 \ \text{sur}\ \omega = \ \overline{\Omega} \backslash \cup \{a_j\}$$

d

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(u_* \wedge \frac{\partial u_*}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(u_* \wedge \frac{\partial u_*}{\partial x_2}) = 0 \ \text{dans D'}(\Omega)$$

On va caractériser les fonctions qui ont les propriétés a) - d). A la place de b), on va considérer, plus généralement, des degrés d_j tels que

$$d_1,...,d_d = d$$

On a déjà remarqué que, si $|u_*| = 1$ alors, localement c) est équivalente à $u_* = e^{i\psi}$ avec $\triangle\psi = 0$. Il suit que l'ensemble des fonctions de module 1 qui vérifient c) est fermé pour l'opération de multiplication (ou de division).

Soit

$$u_0 = (\frac{z - a_1}{|z - a_1|})^{d_1} ... (\frac{z - a_d}{|z - a_d|})^{d_d}$$

Un calcul simple montre que u_0 vérifie c) (car chaque facteur le vérifie), et aussi b).

Soit

$$v = \frac{u_*}{u_0}$$

Alors, v vérifie c) et b) avec $d_j = 0$. On peut donc écrire globalement

$$v = e^{i\varphi}, \text{sur}\ \omega$$

En effet, il suffit de voir que $\deg(v, \partial\omega_R) = 0$, pour tout ω de la forme $\Omega \backslash \cup B_R(a_j)$, avec $\overline{B}_R(a_j) \cap \overline{B}_R(a_k) = \emptyset$, $\overline{B}_R(a_j) \subset \Omega$.

Supposons qu'on a démontré cette assertion. On sait que sur ω_R, on peut écrire $v = e^{i\varphi}$, avec $\varphi = \varphi_R$.

D'autre part,

$$u_* = \frac{g}{u_0} \ \ \text{sur}\ \partial\Omega$$

et donc φ est définie sur $\partial\Omega$, modulo $2\pi\mathbb{Z}$. On peut donc choisir toujours la même valeur de φ_R sur $\partial\Omega$, ce qui donne

$$u_R = u_{R'} \quad \text{sur}\ \omega_R \cap \ \omega_{R'}$$

On peut faire tendre ensuite R vers 0. Or, l'égalité en question devient à

$$d = d_1 + ... + d_d$$

Pour a), on a

$$(\frac{z - a_j}{|z - a_j|})^{d_j} \in W^{1,p}(\Omega,S^1), 1 \leq p < 2$$

tout comme $(\frac{|z-a_j|}{z-a_j})^{d_j}$, car

$$\left|\nabla(\frac{z}{|z|})\right| = \frac{1}{|z|} \in L^p,\ 1 \leq p < 2$$

Donc, on a pour $1 \leq p < 2$,

$$\begin{aligned} u_* &\in W^{1,p} \Rightarrow e^{i\varphi} \in W^{1,p} \Rightarrow |\nabla\varphi| \in L^p, \\ &\Rightarrow \text{(voir Mazja)}\varphi \in W^{1,p},\ 1 \leq p < 2 \end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les fonctions qui vérifient a), b) et c) sont de la forme

$$u_* = (\frac{z - a_1}{|z - a_1|})^{d_1} ... (\frac{z - a_d}{|z - a_d|})^{d_d}\ e^{i\varphi} \tag{2.20}$$

avec $\varphi \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$, $1 \leq p < 2$

Pour d), soit $u,v \in W^{1,1}(\Omega,S^1)$ qui vérifie d). On va voir que uv vérifie d).

En effet, (compte tenu des règles de dérivation d'un produit)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(uv \wedge (uv)_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(uv \wedge (uv)_{x_2}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[(u_1 v_1 - u_2 v_1)(u_{1x_1} v_1 + u_1 v_{2x_1} + u_{2x_1} v_1 + u_2 v_{1x_1}) \\ &\quad -(u_1 v_2 + u_2 v_1)(u_{1x_1} v_1 + u_1 v_{1x_1} - u_{2x_1} v_2 - u_2 v_{2x_1})] \\ &\quad + \text{un terme analogue} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(u \wedge u_{x_1} + v \wedge v_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(u \wedge u_{x_2} + v \wedge v_{x2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maintenant on va voir que d) est vérifiée par chacun des facteurs $(\frac{z-a_j}{|z-a_j|})^{d_j}$. Compte tenu de la propriété qu'on vient de démontrer, il suffit de voir que $\frac{z-a_j}{|z-a_j|}$ vérifie d).

On peut supposer $a_j = 0$. On va vérifier d) (au sens des distributions) sur $\mathbb{R}^2$ entier.

Soit $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\mathrm{d} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} (\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|} \wedge \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}(\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}))\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{x}_1} + (\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|} \wedge \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}(\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}))\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{x}_2} = 0, \forall \eta \tag{2.21}$$

On va vérifier d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}(\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}) = \frac{\mathrm{i}\mathrm{x}_2}{\mathrm{z}\,|\mathrm{z}|}$$

au sens des distributions. Cela revient à

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}\frac{\partial \eta}{\mathrm{x}_1} = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{x}_1}{|\mathrm{z}|}\eta,\ \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}\frac{\partial \eta}{\mathrm{x}_1} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\int_{|\mathrm{x}|>\varepsilon} \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}\frac{\partial \eta}{\mathrm{x}_1}\ \mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2 \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int\int_{|\mathrm{x}|>\varepsilon} -\frac{\mathrm{i}\mathrm{x}_2}{\bar{\mathrm{z}}\,|\mathrm{z}|}\eta + \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} (\frac{\mathrm{x}_1}{|\mathrm{z}|})^2 \eta \right\} (\text{"flux divergence"}) \\
&= -\int_{|\mathrm{x}|>\varepsilon} -\frac{\mathrm{i}\mathrm{x}_2}{\bar{\mathrm{z}}\,|\mathrm{z}|}\eta + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \frac{\mathrm{x}_1^2}{|\mathrm{z}|^2}\eta\ \mathrm{ds}
\end{aligned}$$

La dernière limite vaut 0, car

$$\left| \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \frac{\mathrm{x}_1^2}{|\mathrm{z}|^2}\eta\ \mathrm{ds} \right| \leq 2\pi\varepsilon \max|\eta| \to 0$$

De façon analogue, on a $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}(\frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}) = \frac{\mathrm{i}\mathrm{x}_1}{\bar{\mathrm{z}}|\mathrm{z}|}$. Alors

$$\mathrm{d}) \Leftrightarrow\ I = \int_{\mathbb{R}^2} (-\frac{\mathrm{x}_2}{|\mathrm{z}|^2}\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\mathrm{x}_1}{|\mathrm{z}|^2}\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{x}_2}) = 0, \forall \eta$$

Or, on a

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\mathrm{x}|\geq\varepsilon}\Big(-\frac{\mathrm{x}_2}{|\mathrm{z}|^2}\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{x}_1}+\frac{\mathrm{x}_1}{|\mathrm{z}|^2}\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{x}_2}\Big)\\
&= \text{(en coordonnées polaires)}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\partial \mathrm{B_r}}\Big(-\frac{\mathrm{x}_2}{|\mathrm{z}|^2}\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{x}_1}+\frac{\mathrm{x}_1}{|\mathrm{z}|^2}\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{x}_2}\Big)\,\mathrm{ds\ dr}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{r}}\Big(\int_{\partial \mathrm{B_r}}\Big\{-\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{r}}\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{x}_1}+\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{r}}\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{x}_2}\Big\}\,\mathrm{ds}\Big)\,\mathrm{dr}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{r}}\Big(\int_{\partial \mathrm{B_r}}\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\mathrm{ds}\Big)\,\mathrm{dr}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Car

$$\int_{\partial \mathrm{B_r}}\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\mathrm{ds}=0$$

Il suffit que u_* vérifie a)-d)$\Longleftrightarrow$ u_* est de la forme (2.20) avec

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}(e^{\mathrm{i}\varphi}\wedge e^{\mathrm{i}\varphi}_{\mathrm{x}_1})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}(e^{\mathrm{i}\varphi}\wedge e^{\mathrm{i}\varphi}_{\mathrm{x}_2})=0$$

au sens des distributions. La démonstration du théorème sera achevée si on démontre que cette dernière égalité est équivalente à $\triangle\varphi=0$. Pour cela, on utilise la propriété d qui pour φ régulière est équivalente au fait que $-\triangle\varphi=0$. Sinon, soit $\varphi_{\mathrm{n}}\to\varphi$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega,\mathbb{R})$, telle que φ_{n} régulière.

Au sens classique,

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{u_n}\wedge\frac{\partial \mathrm{u_n}}{\partial \mathrm{x}})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{u_n}\wedge\frac{\partial \mathrm{u_n}}{\partial \mathrm{y}})=\triangle\varphi_{\mathrm{n}}$$

dé=ès que $\mathrm{u_n}=e^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{n}}}$; $\varphi_{\mathrm{n}}\in\mathrm{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Alors, soit $\eta \in \mathrm{D}(\Omega,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\partial_x(u_n \wedge \partial_x u_n) + \partial_y(u_n \wedge \partial_y u_n)).\eta &= -\int_\Omega \begin{pmatrix} u_n \wedge \partial_x u_n \\ u_n \wedge \partial_y u_n \end{pmatrix} \nabla\eta \\
&= -\int_\Omega \nabla\varphi_n . \nabla\eta \\
&\to -\int_\Omega \nabla\varphi . \nabla\eta \\
&= \int_\Omega \eta \,\triangle\varphi
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \begin{pmatrix} u_n \wedge \partial_x u_n \\ u_n \wedge \partial_y u_n \end{pmatrix} \nabla\eta &\to -\int_\Omega \begin{pmatrix} w \wedge \partial_x w \\ w \wedge \partial_y w \end{pmatrix} \nabla\eta \\
&= \int_\Omega \partial_x(w \wedge \partial_x w) + \partial_y(w \wedge \partial_y w).\eta
\end{aligned}$$

avec

$$w := u \times \left(\frac{z-a_1}{|z-a_1|}\right)^{d_1} \times \ldots \times \left(\frac{z-a_d}{|z-a_d|}\right)^{d_d}$$

Ce qui permet de conclure que

$$\triangle\varphi = 0$$

au sens des distributions ■

2.2.6 Non unicité du minimiseur pour ε assez petit

On va montrer à l'aide d'un exemple donné dans [2] que lorsque la donnée au bord a un degré non nul, généralement, on n'a pas unicité du minimiseur pour ε assez petit.

Considérons $d \geq 2$, $\Omega = B_1(0) = B_1$ et $g = e^{id\theta}$. On va montrer que dans cette situation, pour tout ε assez petit, il existe une infinité de minimiseurs de E_ε.

Dans un premier temps, remarquons que si on définit $R_\alpha(u) = e^{-id\alpha} u(e^{i\alpha} z)$ pour $\alpha \in S^1$, et que u un minimiseur, alors $R_\alpha(u)$ est toujours un minimiseur.

Dans un deuxième temps, supposons qu'il existe $\varepsilon_n \to 0$ tel que E_{ε_n} n'admette qu'un nombre fini de minimiseurs pour tout n. Ainsi pour tout n, l'ensemble des minimiseurs de E_{ε_n} est stable pour R_α avec $\alpha \in S^1$ arbitraire .

A l'aide d'un procédé diagonal, on peut supposer que chaque minimiseur converge vers une limite u_* (à qui on associe d singularités distinctes), deux limites peuvent être distinctes ou non.

Pour $\alpha \in S^1$ fixé, on voit que $R_\alpha : H^1(B_1;\mathbb{C}) \to H^1(B_1;\mathbb{C})$ est continu, ainsi, l'ensemble des limites est fermé pour R_α, $\alpha \in S^1$ arbitraire. Par suite l'ensemble des ensembles des d singularités de chacune des limites (pris sans ordre) est stable par rotation d'un ongle quelconque.

Cela est absurde puisque l'on a qu'un nombre au plus dénombrable d'ensembles de singularités et qu'au moins une des singularités de chacune des limites n'est pas 0 (elle sont distinctes et $d > 1$).

Par contre, pour $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, la preuve de la section précédente fonctionne toujours et montre alors que pour ε assez grand, on a unicité du minimiseur

2.3 L'énergie renormalisée $W(\Omega,g,b_1,...,b_d)$

On a vu que, étant donnée $g \in C^\infty(\partial\Omega,S^1)$ avec $d = \deg(g,\partial\Omega) > 0$ et une suite $\varepsilon_n \to 0$, on peut extraire une sous suite qu'on désigne toujours par ε_n, et $a_1,...,a_d \in \Omega$ tel que

$$u_{\varepsilon_n} \to u_*$$

dans diverses topologies.

Pour Ω, g et les degrés fixés comme ci dessus, on peut considérer l'énergie renormalisée associée à d points comme suit

$$W = -\pi \sum d_i d_j \, \log(a_i - a_j) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \varphi_0 (g \times g_\tau) - \pi \sum_{i=1}^{n} d_i R_0(a_i)$$

où

$$R_0(x) = \varphi_0(x) - \sum_{i=1}^{n} d_j \, \log|x - a_j|$$

et φ_0 solution de

$$\begin{cases} \triangle\varphi_0 = \sum_{i=1}^{n} 2\pi d_i \delta_{a_i} \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu} = g \times g_\tau \end{cases}$$

Théorème 2.12 *Si $a_1,...,a_d$ sont les singularités de u_*, alors*

$$W(a_1,...,a_d) \leq W(b_1,...,b_d) \tag{5.1}$$

pour tout $(b_1,...,b_d) \in \Omega^d$.

La démonstration se fonde sur les estimations qui figurent dans les lemmes suivants

Lemme 2.16 *Si $b_1,...,b_d \in \Omega$ sont d points distincts, alors il existe $\rho_0 > 0$ tel que*

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq d\, I(\varepsilon,\rho) + W(b_1,...,b_d) + \pi d\, log(\frac{1}{\rho}) + O(\rho) \tag{5.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $\rho < \rho_0$.

Ici, $O(\rho)$ signifie une quantité X telle que

$$|X| \leq C\rho,\ \rho < \rho_0$$

où C est indépendante de ε et $\rho < \rho_0$.

Lemme 2.17 *Il existe $\rho_1 > 0$ tel que, pour $\rho < \rho_1$, il existe $N=N(\rho)$ avec la propriété*

$$E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \geq d\, I(\varepsilon_n,\rho) + W(a_1,...,a_d) + \pi d\, log(\frac{1}{\rho}) + O(\rho)\ + \theta(1),\ n \geq N(\rho) \tag{5.3}$$

Ici $\theta(1)$ désigne une quantité X telle que, pour ρ fixé, tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Preuve: (Du théorème 2.12)

Soit $\rho < \min(\rho_0,\rho_1)$ fixé. Pour $n \geq N(\rho)$ on obtient, de (5.2) et (5.3) que

$$W(a_1,...,a_d) \leq W(b_1,...,b_d) + O(\rho)\ + \theta(1)$$

d'où, quand $n \to \infty$, on obtient

$$W(a_1,...,a_d) \leq W(b_1,...,b_d) + C\rho$$

Quand $\rho \to 0$, on a

$$W(a_1,...,a_d) \leq W(b_1,...,b_d)$$

■

Preuve: (du lemme 2.16)

On fixe, $b_1,...,b_d$, d points distincts dans Ω. Soit $\widehat{u}_\rho$ le minimiseur de

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla v|^2$$

On sait que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \widehat{u}_\rho|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\Omega_\rho} (1 - |\widehat{u}_\rho|^2)^2 &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \widehat{u}_\rho|^2 \\
&= \pi d \log(\frac{1}{\rho}) + W(b_1,...,b_d) + O(\rho) \\
\text{quand } \rho &\to 0
\end{aligned}$$

Pour i =1,...,n, soit $\alpha_i = \alpha_i(\rho) \in \mathbb{C}$, $|\alpha_i| = 1$, tel que

$$\widehat{u}_\rho = \alpha_i \frac{z - b_i}{|z - b_i|} \ \text{ sur } \partial B_\rho(b_i)$$

Rappelons que

$$I(\varepsilon,\rho) = \min_{u \in H^1_{\frac{z}{|z|}}(B_\rho)} E_\varepsilon(u) \tag{5.4}$$

Si v atteint le minimum de (5.4), alors

$$E_\varepsilon(\alpha_i v(z - b_i)) = I(\varepsilon,\rho) \tag{5.5}$$

On définit

$$w(z) = \begin{cases} \widehat{u}_\rho(z), \text{ dans } \Omega_\rho \\ \alpha_i v(z - b_i), \text{ dans } B_\rho(b_i) \end{cases}$$

Alors w est continue, d'où $w \in H^1_g(\Omega)$. On obtient (puisque u_ε est un minimiseur)

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(w) = \pi d \log(\frac{1}{\rho}) + W(b_1,...,b_d) + O(\rho) + d\ I(\varepsilon,\rho)$$

quand ρ est assez petit. ■

Preuve: (Du lemme 2.17)

Pour ρ_0 assez petit on a

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \ \text{ dans } C^{1,\alpha}(\Omega_\rho),\ \rho < \rho_0$$

et de plus

$$\frac{1-|u_{\varepsilon_n}|^2}{\varepsilon^2} \to |\nabla u_*|^2 \quad \text{dans } C^k(K) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } K \text{ compact de } \Omega \setminus \cup_{j=1}^{d} \{a_j\}$$

On a donc

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \to \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_*|^2 = \pi d \log(\frac{1}{\rho}) + W(a_1,...,a_d) + O(\rho^2) \quad \text{quand } \rho \to 0$$

on a donc, pour n assez petit,

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq \pi d \log(\frac{1}{\rho}) + W(a_1,...,a_d) + O(\rho^2)$$

Il suffit de démontrer, pour i=1,...,n que

$$\int_{B_\rho(a_i)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq I(\varepsilon_n,\rho) + O(\rho) \ + \theta(1) \quad \text{quand } n \to \infty \tag{5.6}$$

Rappelons que

$$I(t) = I(t,1) = I(1,\frac{1}{t})$$

a la propriété

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow I(t_1) \leq \pi \log(\frac{t_2}{t_1}) + I(t_2)$$

et on a l'inégalité suivante qu'on suppose démontrée

$$\int_{B_\rho(a_i)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \geq I(\varepsilon_n,\rho+\rho^2) + O(\rho) \ + \theta(1) \tag{5.7}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(a_i)} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 &\geq I(\varepsilon_n,\rho) + O(\rho) \ + \theta(1) + I(\varepsilon_n,\rho+\rho^2) - I(\varepsilon_n,\rho) \\
&\geq I(\varepsilon_n,\rho) + O(\rho) \ + \theta(1) + \pi \log(\tfrac{\rho+\rho^2}{\rho}) \\
&= I(\varepsilon_n,\rho) + O(\rho) \ + \theta(1) \quad \text{quand } \rho \to 0
\end{aligned}$$

Rappelons que

$$u_* = \frac{z-a_1}{|z-a_1|} ... \frac{z-a_d}{|z-a_d|} \ e^{i\psi}$$

où ψ est une fonction régulière sur $\overline{\Omega}$. On peut donc écrire, au voisinage de 0

$$\mathrm{u}_* = \frac{\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|}e^{\mathrm{i}\eta} = e^{\mathrm{i}(\theta+\eta)}$$

où η est une fonction régulière.

Pour n assez petit, on a donc sur $\partial\mathrm{B}_\rho$,

$$\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}} = g_\mathrm{n}e^{\mathrm{i}(\theta+\eta_\mathrm{n})}$$

où $g_\mathrm{n} \to 1$ et $\eta_\mathrm{n} \to \eta$ dans $C^\infty(\partial\mathrm{B}_\rho)$. De plus,

$$\frac{1-g_\mathrm{n}}{\varepsilon_\mathrm{n}^2} \to |\nabla \mathrm{u}_*|^2 \ \text{ sur } \partial\mathrm{B}_\rho$$

et donc

$$1 - g_\mathrm{n} \leq \mathrm{C}\varepsilon_\mathrm{n}^2$$

Soit

$$\mathrm{w}(\mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta}) = \begin{cases} \mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}} \text{ dans } \mathrm{B}_\rho \\ \frac{1-g_\mathrm{n}(\mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta})}{\rho^2}\mathrm{r} + (1 - \frac{1-g_\mathrm{n}(\mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta})}{\rho})\exp(\mathrm{i}\theta) + (-\frac{\eta_\mathrm{n}}{\rho^2}\mathrm{r} + \eta_\mathrm{n} + \frac{\eta_\mathrm{n}}{\rho}) \quad \text{dans } \mathrm{B}_{\rho+\rho^2}\backslash\mathrm{B}_\rho \end{cases}$$

En passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned} I(\varepsilon_\mathrm{n},\rho+\rho^2) &\geq E_{\varepsilon_\mathrm{n}}(\mathrm{w}) \\ &\geq E_\varepsilon(\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}},\mathrm{B}_\rho) + \frac{1}{4\varepsilon_\mathrm{n}^2}\int_{\partial\mathrm{B}_\rho}(1-g_\mathrm{n})^2 + 2(1+\rho)\int_{\partial\mathrm{B}_\rho}|\nabla g_\mathrm{n}|^2 \\ &\quad + \frac{2}{\rho}\int_{\partial\mathrm{B}_\rho}(1-g_\mathrm{n}^2)\,|\nabla\eta_\mathrm{n}|^2 + \rho(1+\rho)\int_{\partial\mathrm{B}_\rho}(1-g_\mathrm{n}^2)\frac{1}{\rho^2} \\ &= E_\varepsilon(\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{n}},\mathrm{B}_\rho) + O(\rho) \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

Chapitre 3

Sur l'énergie p-Ginzburg Landau

3.1 Cas où le degré de la donnée au bord est nul

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique de u_ε quand $\varepsilon \to 0$, pour p>2 sous l'hypothèse que la condition au bord g:$\partial\Omega \to S^1$ est topologiquement triviale c'est-à-dire deg(g,$\partial\Omega$)$= 0$. Avant de commencer l'étude de ce cas, on présentera brièvement l'opérateur différentiel pseudo laplacien.

3.1.1 Opérateur p-Laplacien

De nombreux travaux ont été consacrés ces dernières années, à l'étude des problèmes de type elliptique, parabolique, de Ginzburg Landau contenant l'opérateur p-laplacien, défini par

$$\triangle_p u := -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) \text{ où } 1 < p < \infty$$

Cet opérateur est fréquemment utilisé dans des équations aux dérivées partielles modélisant les phénomènes de la physique, la chimie, la biologie, ... etc.

Par exemple, la mécanique des fluides non Newtoniens correspond pour p>2 aux fluides dilatants, pour $1 <$p< 2 aux fluides pseudo-plastiques.

Lorsque p$= 2$, $\triangle_p$ est le laplacien usuel, ce qui correspond aux fluides Newtoniens de la mécanique des fluides.

L'opérateur p-laplacien est l'un des exemples d'opérateurs elliptiques dégénérés pour lesquels la théorie des solutions classiques ne s'applique pas. Par contre, il satisfait généralement au principe du maximum (voir Gilbarg Trudinger [10]).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, régulier et simplement connexe et $g{:}\partial\Omega \to \mathrm{S}^1$ une application régulière telle que : $\deg(g,\partial\Omega)= 0$

On considère le problème de minimisation suivant

$$\min_{\mathrm{u}\in \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathbb{R}^2)} E_\varepsilon(\mathrm{u}) \tag{1}$$

avec

$$E_\varepsilon(\mathrm{u}_\varepsilon) = \frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}} + \frac{1}{4\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega \left(1-|\mathrm{u}_\varepsilon|^2\right)^2 \mathrm{dx},\ \mathrm{p}>2$$

et $\mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}} :=\{\ \mathrm{u}\in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{u} = g$ sur $\partial\Omega\}$

Puisque $\mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}} \neq \emptyset$ donc le problème

$$\min_{\mathrm{u}_\varepsilon\in \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathbb{R}^2)} \int_\Omega \frac{1}{\mathrm{p}} |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}} \tag{2}$$

admet une solution unique. Elle vérifie l'équation d'Euler Lagrange

$$-\mathrm{div}(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\ \nabla \mathrm{u}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\mathrm{u}_\varepsilon(1-|\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,) \tag{3}$$

3.1.2 Existence et unicité du point critique

Soit $(\mathrm{u}_\mathrm{n}) \subset \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\, \mathrm{S}^1)$ une suite minimisante. Alors $|\mathrm{u}_\mathrm{n}| = 1$ dans Ω, $\mathrm{u}_\mathrm{n} = g$ sur $\partial\Omega$ et

$$\frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\mathrm{n}|^{\mathrm{p}} \to \min_{\mathrm{u}\in \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathbb{R}^2)} \frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}|^{\mathrm{p}}$$

Donc (u_n) est bornée dans $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\mathrm{u}_* \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathrm{u}_\mathrm{n} &\rightharpoonup \mathrm{u}_* \ \text{ dans } \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}} \\ \mathrm{u}_\mathrm{n} &\to \mathrm{u}_* \ \text{ dans } \mathrm{L}^{\mathrm{p}} \end{aligned}$$

En particulier, $|\mathrm{u}_*| = 1$ p.p sur Ω. De plus l'opérateur de trace est linéaire et continu. Donc

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n}|\partial\Omega} \longrightarrow \mathrm{u}_{*|\partial\Omega} \text{ dans } \mathrm{W}^{1-\frac{1}{\mathrm{p}},\mathrm{p}}(\partial\Omega)$$

et $\mathrm{u}_{\mathrm{n}|\partial\Omega} = g \Rightarrow \mathrm{u}_* = g$ sur $\partial\Omega$, donc $\mathrm{u}_* \in \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\, \mathrm{S}^1)$

De plus, par la semi-continuité inférieure par rapport à la topologie faible, on a

$$\frac{1}{\mathrm{p}}\int_{\Omega}|\nabla \mathrm{u}_*|^{\mathrm{p}} \leq \liminf_{n\to\infty}\ |\nabla \mathrm{u}_{\mathrm{n}}|^{\mathrm{p}}$$

Ce qui montre que u_* est solution du problème (2)

Unicité

Pour montrer l'unicité, on fixe un $\mathrm{u}_* \in \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\, \mathrm{S}^1)$ qui réalise le minimum de

$$\min_{\mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}} \frac{1}{\mathrm{p}}\int_{\Omega}|\nabla \mathrm{u}|^{\mathrm{p}}$$

Alors, il existe $\varphi \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{u}_* = e^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{sur } \Omega$$

Comme $\mathrm{u}_* = g$ sur $\partial\Omega$

$$\frac{\partial \mathrm{u}_*}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}} = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}}$$

donc $|\nabla \mathrm{u}_*| = |\nabla\varphi|$. Par conséquent, si le relèvement était possible, alors le problème de minimisation devient

$$\mathrm{Min}\left\{\int_{\Omega}|\nabla\varphi|^2\,;\varphi\in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}\left(\Omega;\,\mathbb{R}\right),\ \varphi = \arg\left(g\right)\ \text{ sur }\ \partial\Omega\right\}$$

et donc, le problème admet une solution unique

Considérons maintenant le problème

$$\min_{\mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathbb{R}^2)} \quad E_\varepsilon(\mathrm{u})$$

- E_ε est bien définie dans $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$. En effet, si $\mathrm{u}\in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$ alors (par les injections de Sobolev), $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}$, donc E_ε est bien définie

- On observe aussi que le problème (1) admet une solution. En effet, soit $(\mathrm{u}_{\mathrm{n}}) \subset \mathrm{W}_g^{1,\mathrm{p}}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ une suite minimisante. Alors $(\mathrm{u}_{\mathrm{n}})$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\begin{aligned} \mathrm{u_n} &\rightharpoonup \mathrm{u_*} \text{ dans } W^{1,p} \\ \mathrm{u_n} &\to \mathrm{u_*} \text{ dans } L^p \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'opérateur de trace de $W^{1,p}(\partial\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$

Il résulte que

$$\mathrm{u_n}_{|\partial\Omega} \longrightarrow \mathrm{u_*}_{|\partial\Omega} \text{ dans } W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

Mais $\mathrm{u_n} = g$ sur $\partial\Omega$, pour chaque n, donc $\mathrm{u}_\varepsilon = g$ sur $\partial\Omega$

Ensuite, en utilisant

$$\int_\Omega (|\mathrm{u_n}|^2 - 1)^2 \to \int_\Omega \int_\Omega (|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2$$

Et

$$\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \ |\nabla \mathrm{u_n}|^p$$

il résulte que u_ε est solution du problème (1).

- De plus, chaque solution vérifie l'équation d'Euler Lagrange :

$$-\operatorname{div}(|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{p-2}\nabla \mathrm{u}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^p}\mathrm{u}_\varepsilon(1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2) \quad \text{sur } \Omega$$

En effet, pour $v \in C_c^1(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(t) = E_\varepsilon(\mathrm{u}_\varepsilon + tv)$$

On a

$$\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \frac{E_\varepsilon(\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv}) - E_\varepsilon(\mathrm{u}_\varepsilon)}{\mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{pt}}\int_\Omega (\,|\nabla(\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv})|^{\mathrm{p}} - |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}}\,) + \frac{1}{4\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega \frac{(\,|\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv}|^2 - 1)^2}{\mathrm{t}} \\
& - \frac{1}{4\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega \frac{(\,|\mathrm{u}_\varepsilon|^2 - 1)^2}{\mathrm{t}} \\
= \quad & \frac{1}{\mathrm{pt}}\int_\Omega (\,|\nabla(\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv})|^{\mathrm{p}} - |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}}\,) + \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega \mathrm{u}_\varepsilon(1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,).\mathrm{v} \\
= \quad & \frac{1}{\mathrm{pt}}\int_\Omega [\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}} + \mathrm{pt}\,|\nabla(\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv})|^{\mathrm{p}-2}\ \nabla \mathrm{u}_\varepsilon.\nabla \mathrm{v} + O(\mathrm{t})] - |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}} + \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega (1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,)\ \mathrm{u}_\varepsilon.\mathrm{v} \\
= \quad & \int_\Omega |\nabla(\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv})|^{\mathrm{p}-2}\ \nabla \mathrm{u}_\varepsilon.\nabla \mathrm{v} + O(\mathrm{t}) + \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega (1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,)\ \mathrm{u}_\varepsilon.\mathrm{v} \\
= \quad & -\int_\Omega \mathrm{div}(\,|\nabla(\mathrm{u}_\varepsilon + \mathrm{tv})|^{\mathrm{p}-2}\ \nabla \mathrm{u}_\varepsilon).\mathrm{v} + \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega (1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,)\ \mathrm{u}_\varepsilon.\mathrm{v} \\
= \quad & -\int_\Omega \mathrm{div}(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\ \nabla \mathrm{u}_\varepsilon).\mathrm{v} + \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega (1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,)\ \mathrm{u}_\varepsilon.\mathrm{v} \quad \text{quand t} \to 0
\end{aligned}$$

La condition $\varphi'(0) = 0$ implique que

$$-\mathrm{div}(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\ \nabla \mathrm{u}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}(1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,)\ \mathrm{u}_\varepsilon$$

D'où le résultat

Proposition 3.1 *Si $\{u_\varepsilon / \varepsilon > 0\}$ est la famille des minimiseurs du problème (1), alors on peut choisir une sous-suite $(\varepsilon_k) \to 0$ et le minimiseur u_* des p-applications harmoniques tels que*

$$u_{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_* \quad \textit{dans } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$$

Preuve: On prend un minimiseur w $\in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}_g(\Omega,\mathrm{S}^1)$ (c'est la seule fois dans la preuve où l'hypothèse $\deg(g,\partial\Omega) = 0$ est utilisée elle implique que $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}_g(\Omega,\mathrm{S}^1) \neq \emptyset$)

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}}\,\mathrm{dx} + \frac{1}{4\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega (1 - |\mathrm{u}_\varepsilon|^2\,)^2 \mathrm{dx} \quad \leq \quad & E_\varepsilon(\mathrm{w}) = \frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{w}|^{\mathrm{p}} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}}\,\mathrm{dx} \leq E_\varepsilon(\mathrm{w}) = \frac{1}{\mathrm{p}}\int_\Omega |\nabla \mathrm{w}|^{\mathrm{p}}
\end{aligned}$$

■

Donc, la famille (u_ε) est bornée dans $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ainsi, on peut trouver une sous-suite

$(\varepsilon_{n_k}) \to 0$ et $u_* \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\nabla u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nabla u_* \quad \text{dans } L^p(\Omega,\mathbb{R}^2) \tag{*}$$

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_* \quad \text{dans } L^p(\Omega,\mathbb{R}^2) \tag{**}$$

On a

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad &\leq \quad E_\varepsilon(w) \Rightarrow \frac{1}{4\varepsilon^p}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w|^p \\
&\Rightarrow \quad \int_\Omega (1-|u_{\varepsilon_k}|^2)^2 \leq C\varepsilon_k^p \to 0 \\
\int_\Omega (1-|u_{\varepsilon_k}|^2)^2 \quad &\to \quad \int_\Omega (1-|u_*|^2)^2 \\
&\Rightarrow \quad |u_*| = 1 \;\text{ p.p et } u_* \in W^{1,p}(\Omega, S^1)
\end{aligned}$$

De plus, par (*) et (**) on a

$$\int_\Omega |\nabla u_*|^p \leq \liminf \int_\Omega \left|\nabla u_{\varepsilon_{n_k}}\right|^p \leq \int_\Omega |\nabla w|^p$$

Donc

$$u_* \in W_g^{1,p}(\Omega,S^1)$$

$$\int_\Omega |\nabla w|^p = \int_\Omega |\nabla u_*|^p \Rightarrow u_* = w$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \left|\nabla u_{\varepsilon_{n_k}}\right|^p \quad &= \quad \int_\Omega |\nabla u_*|^p \\
&\Rightarrow \quad u_{\varepsilon_{n_k}} \to u_* \;\text{ dans } W^{1,p}
\end{aligned}$$

étant donné que $\varepsilon_n \to 0$, il existe (ε_{n_k}) tel que

$$\left.\begin{matrix}
\frac{1}{\varepsilon_{n_k}^p}\int_\Omega (1-\left|u_{\varepsilon_{n_k}}\right|^2)^2 \to 0 \\
u_{\varepsilon_{n_k}} \to u_*
\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \to 0$$

$$u_\varepsilon \quad \to \quad u_* \quad \text{dans } W^{1,p}$$

Le théorème suivant illustre le résultat principal de cette section

Théorème 3.1 *Soit* (u_{ε_k}) *la famille des minimiseurs du problème (1) qui converge vers* u_* *dans* $W^{1,p}$. *Alors* $\forall\alpha \in (0,1)$ *et* $K \subset \Omega$ *un compact, on a*

$$u_{\varepsilon_k} \to u_* \quad \textit{dans } C^{\alpha}(K).$$

Preuve: D'abord, nous démontrons en utilisant un principe du maximum que $|u| \leq 1$. Puis nous déduisons une inégalité de Caccioppoli (lemme 3.3) pour $w_\varepsilon := |\nabla u_\varepsilon|^2$. Enfin, nous montrons comment obtenir des estimations de type Caccioppoli avec des constantes indépendantes de ε. Cela permet la réalisation d'une procédure d'itération de Moser et l'application des théorèmes de Rellich-Kondrashov et de Sobolev pour conclure la preuve du théorème. ■

Lemme 3.1 *Si* $u \in W^{1,p}_g(\Omega,\mathbb{R}^2)$ *solution de*

$$-\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\ \nabla u^i\right) = \frac{1}{\varepsilon^p}(1-|u|^2)u^i\ ,\ i=1,2 \tag{I}$$

et $g : \partial\Omega \to S^1$. Alors

$$|u| \leq 1 \quad \text{p.p sur } \Omega$$

Preuve: Pour toute fonction non négative φ qui s'annule sur $\partial\Omega$ on multiplie (I) par (φu^i) et on intègre, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u^i.\nabla(\varphi u^i) = \frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega (1-|u|^2)\varphi(u^i)^2$$

■

On additionne pour i =1,2 et on intègre le terme $\int_\Omega \varphi\, |\nabla u|^2$, ce qui conduit à l'inégalité

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla(u^2-1).\nabla\varphi\ dx \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega |u|^2\,(1-|u|^2)\ \varphi\ dx.$$

Soit $a(x) = \frac{1}{2}\,|\nabla u|^{p-2}$ $b(x) = \frac{|u|^2}{\varepsilon^p}$ et $v = |u|^2 - 1$

Réécrivons la dernière inégalité avec ces notations, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)\nabla v.\nabla\varphi\ dx &\leq \int_\Omega b(x)v(x)\varphi(x)\ dx\\ &\Rightarrow \int_\Omega a(x)\nabla v.\nabla\varphi\ dx + \int_\Omega b(x)v(x)\varphi(x)\ dx \leq 0\end{aligned}$$

Prenons maintenant $\varphi = \min(\mathrm{k},\mathrm{v}_+)$ pour $\mathrm{k} \in \mathbb{R}^+$ fixé, et définissons

$$\mathrm{A_k} := \{\ \mathrm{x} \in \Omega\ /\mathrm{v}_+(\mathrm{x}) < \mathrm{k}\}$$

On obtient,

$$\int_{\mathrm{A_k}} \mathrm{a(x)}\, |\nabla \mathrm{v}_+|^2\ \mathrm{dx} + \int_{\mathrm{A_k}} \mathrm{b(x)}(\mathrm{v}_+(\mathrm{x}))^2\ \mathrm{dx} \leq 0$$

Le fait que a et b soient positives, implique que

$$\mathrm{v}_+ = 0 \quad \mathrm{p.p}$$

donc,

$$\mathrm{v} \leq 0 \Rightarrow |\mathrm{u}|^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow |\mathrm{u}|^2 \leq 1 \ \ \mathrm{p.p}$$

Le lemme suivant justifie la dérivation (au sens faible) du système (3) par rapport à x

Lemme 3.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'application $G_\varepsilon := |\nabla u_\varepsilon|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon$ est de classe $W^{1,2}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^4)$*

Lemme 3.3 *Si u_ε est solution de (3), $\beta \geq 0$ et $\omega_\varepsilon := |\nabla u_\varepsilon|^2$, alors pour tout $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2 \zeta^2\ dx \leq \frac{2(p+\beta)}{\varepsilon^p}\int_\Omega (1-|u_\varepsilon|^2)\ \omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\zeta^2\ dx + 9p^2\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\, |\nabla\zeta|^2\ dx$$

Preuve: Par le lemme 3.2, on peut dériver les deux membres de (3) par rapport à $\mathrm{x_j}$, on obtient

$$-\mathrm{div}[\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\, \nabla(\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{i}}_\varepsilon}{\partial \mathrm{x_j}}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\,)\nabla \mathrm{u}^{\mathrm{i}}_\varepsilon] = \frac{\partial \mathrm{f}_{\varepsilon,\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x_j}} \tag{4}$$

pour $\mathrm{i,j} = 1{,}2$ et $\mathrm{f}_{\varepsilon,\mathrm{i}} := \varepsilon^{-\mathrm{p}}\ \mathrm{u}^{\mathrm{i}}_\varepsilon(1-|\mathrm{u}_\varepsilon|^2)$

L'équation (4) montre que pour toute fonction test $\phi_{\mathrm{i,j}} \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$ à support compact, on a

$$\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\, \nabla(\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{i}}_\varepsilon}{\partial \mathrm{x_j}}).\nabla\phi_{\mathrm{i,j}} + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}-2}\,)\nabla \mathrm{u}^{\mathrm{i}}_\varepsilon.\nabla\phi_{\mathrm{i,j}} = \int_\Omega \frac{\partial \mathrm{f}_{\varepsilon,\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x_j}}.\phi_{\mathrm{i,j}}$$

On prend $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ une fonction régulière positive et on pose

$$\phi_{\mathrm{i,j}} = \zeta^2\, |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^\beta\, \frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{i}}_\varepsilon}{\partial \mathrm{x_j}},$$

donc, on aura

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}).\nabla(\zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^\beta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}) + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2})\nabla u_\varepsilon^i.\nabla(\zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^\beta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}) = \int_\Omega \frac{\partial f_{\varepsilon,i}}{\partial x_j}.\zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^\beta \frac{\partial u}{\partial x}$$

D'un coté

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}).\nabla(\zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^\beta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}) &= \sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})[2\zeta\nabla\zeta |\nabla u_\varepsilon|^\beta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j} + \\ &\quad \beta\zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1} \nabla(\nabla u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j} + \zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^\beta \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})]\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}).\zeta^2 |\nabla u_\varepsilon|^\beta \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})dx &= \sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2+\beta} \zeta^2 \left|\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})\right|^2 dx \\ &= \sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p-2+\beta}{2}} \zeta^2 \left|\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})\right|^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} .2\zeta\nabla\zeta |\nabla u_\varepsilon|^\beta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})dx &= \sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2+\beta}\ 2\zeta\nabla\zeta\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})dx \\ &= \sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2+\beta}\ \zeta\nabla\zeta(\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})^2)dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2+\beta}\ \zeta\nabla\zeta.\nabla |\nabla u_\varepsilon|^2 \\ &= \int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p-2+\beta}{2}} \nabla\omega_\varepsilon.\zeta.\nabla\zeta\ dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}).\zeta^2\beta |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1} \nabla(\nabla u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j} &= \beta\sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p+\beta-3} |\nabla\omega_\varepsilon| .\nabla(\nabla u_\varepsilon) \times \frac{|\nabla u_\varepsilon|}{|\nabla u_\varepsilon|} \\ &= \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p+\beta-4} |\nabla\omega_\varepsilon|\ [\nabla |\nabla u_\varepsilon| . |\nabla u_\varepsilon|].\zeta^2 \\ &= \frac{\beta}{4}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p+\beta-4} |\nabla\omega_\varepsilon|^2 .\zeta^2\end{aligned}$$

donc

$$(5) = \sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p-2+\beta}{2}} \zeta^2 \left|\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})\right|^2 dx + \int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p-2+\beta}{2}} \nabla\omega_\varepsilon.\zeta.\nabla\zeta\ dx + \frac{\beta}{4}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-4}{2}} |\nabla\omega_\varepsilon|^2 .\zeta^2$$

D'un autre coté

$$
\begin{aligned}
(6) \quad &= \sum_{1\leq i,j\leq 2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\,)\nabla u_\varepsilon^i.\nabla\phi_{i,j}\ dx = \sum_{1\leq i,j\leq 2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\,)\nabla u_\varepsilon^i.\nabla[2\zeta\nabla\zeta\,|\nabla u_\varepsilon|^{\beta}\,\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}+ \\
&\quad \beta\zeta^2\,|\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1}\,\nabla(\nabla u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}+\zeta^2\,|\nabla u_\varepsilon|^{\beta}\,\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})] \\
&= \frac{p-2}{4}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-4}{2}}\,|\nabla\omega_\varepsilon|^2.\zeta^2\ dx+\frac{(p-2)\beta}{4}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-6}{2}}.\zeta^2\sum_{1\leq i\leq 2}(\nabla u_\varepsilon^i\ .\nabla\omega_\varepsilon)^2+ \\
&\quad (p-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-4}{2}}\ \zeta\sum_{1\leq i\leq 2}(\nabla u_\varepsilon^i\ .\nabla\omega_\varepsilon)(\nabla u_\varepsilon^i\ .\nabla\zeta)\ dx
\end{aligned}
$$

Même chose pour le second membre, on obtient

$$
\begin{aligned}
(7) \quad &= \int_\Omega \frac{\partial f_{\varepsilon,i}}{\partial x_j}.\phi_{i,j}\ dx = \sum_{1\leq i,j\leq 2}\int_\Omega \frac{\partial f_{\varepsilon,i}}{\partial x_j}\ [\zeta^2\,|\nabla u_\varepsilon|^{\beta}\,\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}]\ dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega\sum_{1\leq i,j\leq 2}(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})^2\ (1-|u_\varepsilon|^2\,).\zeta^2\,|\nabla u_\varepsilon|^{\beta}-\frac{2}{\varepsilon^p}\int_\Omega\sum_{1\leq i,j,k\leq 2}\zeta^2\,|\nabla u_\varepsilon|^{\beta}\ u_\varepsilon^i.u_\varepsilon^k\ \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}.\frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_j} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\zeta^2(1-|u_\varepsilon|^2\,)\ dx-\frac{2}{\varepsilon^p}\int_\Omega\sum_{1\leq i,j,k\leq 2}\omega_\varepsilon^{\frac{\beta}{2}}\zeta^2\ u_\varepsilon^i.u_\varepsilon^k\ \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}.\frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_j} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\zeta^2(1-|u_\varepsilon|^2\,)\ dx
\end{aligned}
$$

On met, (5)-(7) ensemble, on obtient une inégalité de la forme :

$$
I_1+I_2+I_3\leq J_1+J_2+J_3 \tag{8}
$$

Avec

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{p+\beta-2}{4}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-4}{2}}\,|\nabla\omega_\varepsilon|^2.\zeta^2\ dx \\
I_2 &= \frac{(p-2)\beta}{4}\frac{(p-2)\beta}{4}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-6}{2}}.\zeta^2\sum_{1\leq i\leq 2}(\nabla u_\varepsilon^i\ .\nabla\omega_\varepsilon)^2\ dx \\
I_3 &= \sum_{1\leq i,j\leq 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p-2+\beta}{2}}\zeta^2\left|\nabla(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j})\right|^2 dx
\end{aligned} \tag{9}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\zeta^2(1-|\mathrm{u}_\varepsilon|^2)\ \mathrm{dx} \qquad (10)\\
J_2 &= \int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}-2+\beta}{2}}\,|\nabla\omega_\varepsilon|\,.\zeta.\nabla\zeta\ \mathrm{dx}\\
J_3 &= (\mathrm{p}-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{2}}\ \zeta\sum_{1\le \mathrm{i}\le 2}(\nabla \mathrm{u}_\varepsilon^{\mathrm{i}}\ .\nabla\omega_\varepsilon)(\nabla \mathrm{u}_\varepsilon^{\mathrm{i}}\ .\nabla\zeta)\ \mathrm{dx}\\
&= (\mathrm{p}-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{2}}\ \zeta(\left|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon^1\ .\nabla\omega_\varepsilon\right|\left|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon^1\ .\nabla\zeta\right| + \left|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon^2\ .\nabla\omega_\varepsilon\right|\left|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon^2\ .\nabla\zeta\right|
\end{aligned}
$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz donc, on aura

$$
\begin{aligned}
J_3 &\le (\mathrm{p}-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{2}}\ \zeta(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|\,|\nabla\omega_\varepsilon|\,)(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|\,|\nabla\zeta|\,)\\
&\le (\mathrm{p}-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{2}}\ \zeta(\,|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^2\,|\nabla\omega_\varepsilon|\ \ |\nabla\zeta|\,)\\
&\le (\mathrm{p}-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-2}{2}}\ |\nabla\omega_\varepsilon|\ \ |\nabla\zeta|\ \zeta\\
&\le (\mathrm{p}-2)\ J_2
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$J_3 \le (\mathrm{p}-2)\ J_2$$

Alors, on abandonne les termes positifs I_2 et I_3 sur le coté gauche de (8)

$$I_1 \le J_1 + (\mathrm{p}-1)J_2\ . \qquad (11)$$

Maintenant, on emploi l'inégalité

$$\mathrm{ab} \le \delta \mathrm{a}^2 + \frac{1}{4\delta^2}\mathrm{b}^2$$

pour a,b,δ positifs, on obtient

$$\begin{aligned}
(\mathrm{p}-2)\ J_2 &= (\mathrm{p}-1)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-2}{2}}\ |\nabla\omega_\varepsilon|\ \ |\nabla\zeta|\ \ \zeta \\
&= (\mathrm{p}-1)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{4}}\ |\nabla\omega_\varepsilon|\ \ \zeta\ \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta}{4}}\ \ |\nabla\zeta| \\
&\leq (\mathrm{p}-1)\ \{\delta\ (\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{4}}\ |\nabla\omega_\varepsilon|\ \ \zeta)^2 + \frac{1}{4\delta}\int_\Omega (\omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta}{4}}\ \ |\nabla\zeta|\ )^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta-4}{2}}\ |\nabla\omega_\varepsilon|^2\ \ \zeta^2 + \frac{2(\beta-1)^2}{\mathrm{p}+\beta-2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta}{2}}\ \ |\nabla\zeta|^2
\end{aligned}$$

Cette estimation et (11) conduisent à

$$\int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta}{4}})\right|^2 \zeta^2\ \mathrm{dx} \leq \frac{2(\mathrm{p}+\beta)}{\varepsilon^{\mathrm{p}}}\int_\Omega (1-|\mathrm{u}_\varepsilon|^2)\ \omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\zeta^2\ \mathrm{dx} + 9\mathrm{p}^2\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{\mathrm{p}+\beta}{2}}\ |\nabla\zeta|^2\ \ \mathrm{dx} \quad (12)$$

■

L'application des techniques de De-Giorgi-Stampacchia et l'itération de Moser d'une manière en imitant les arguments de DiBenedetto et Friedman et en utilisant (12), on peut obtenir le résultat suivant

Corollaire 3.1 *La fonction* $|\nabla u_\varepsilon|$ *est de classe* $L^q_{loc}(\Omega)$ $\forall q\in (1,\infty]$. *De plus si* $K\subset\Omega$ *est un compact. Alors*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_q \leq C(p,q,\varepsilon),\ dist(K,\partial\Omega),g)$$

En fait, une vérification montre que pour u_ε telle que $\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|^{\mathrm{p}} \leq$C, on a

$$|\nabla\mathrm{u}_\varepsilon| \leq \frac{\mathrm{C}}{\varepsilon}\ ,$$

pour tout compact K $\subset\Omega$ et C=C(p,K).

Commençons par démontrer le lemme suivant

Lemme 3.4 *On a* $|u_{\varepsilon_k}| \to 1, \varepsilon_k\ \to 0$

Preuve: Supposons par l'absurde que le résultat est faux. Alors $\exists\ \eta>0$ et K$\subset\ \Omega$ compact, on peut définir une suite de points $(\mathrm{x_j}\ )_{\mathrm{j}=1,2}\subset$K et $\varepsilon_{\mathrm{j}}\to 0$ tels que$\left|\mathrm{u}_{\varepsilon_{\mathrm{j}}}(\mathrm{x_j}\ )\right| \leq 1-\eta$

Soit 2δ =dist(K, $\partial\Omega$), puisque

$$\left|\nabla\mathrm{u}_{\varepsilon_{\mathrm{j}}}(\mathrm{x})\right| \leq \frac{\mathrm{C}}{\varepsilon_{\mathrm{j}}}\quad \forall\mathrm{x}\in\mathrm{F}$$

avec

$$F := \{\ x \in \Omega\ /\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)\ \geq \delta\}\ \supset K$$

on a

$$\left|u_{\varepsilon_j}(x\ )\right| \leq 1 - \frac{\eta}{2}$$

pour ε_j petit et $x \in B_j \equiv B(x_j\ ,\ \frac{\eta\varepsilon_j}{2C})$.

D'autre part, on peut toujours supposer que $x_j \to x \in K$ alors pour j assez grand, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_j^p}\int_\Omega (1 - \left|u_{\varepsilon_j}\right|^2)^2 \ &\geq\ \frac{1}{\varepsilon_j^p}\int_{B_j} (1 - \left|u_{\varepsilon_j}\right|^2)^2 \\
&\geq\ \omega(p)(\frac{\eta}{2})^{p+1}\frac{1}{C^2}\text{qui tend pas vers } 0 \ \text{ quand } j \to 0
\end{aligned}$$

Ce qui contredit

$$\frac{1}{\varepsilon^p}\int_\Omega (1 - |u_\varepsilon|^2)^2 \to 0$$

■

Notre principale préoccupation maintenant est de montrer que $|\nabla u_\varepsilon|$ est localement borné dans L^q, $1 < q < \infty$, par une constante qui ne dépend pas de ε.

On prend une fonction $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ dans $B(a, r)$, $\zeta \equiv 0$ à l'extérieur de $B(a,r)$ et $|\nabla\zeta| \leq \frac{2}{R-r}$

On peut supposer que

$$|u_\varepsilon(x)\ |^2 \geq \frac{1}{2}\ ,\ \forall x \in \mathrm{supp}\ \zeta \ \text{ et } \varepsilon \text{ petit} \tag{13}$$

Ainsi, le système (3) implique que

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\ \nabla u_\varepsilon^i) \ &=\ \frac{1}{\varepsilon^p}u_\varepsilon^i(1 - |u_\varepsilon|^2) \qquad /\times u_\varepsilon^i \\
&\Rightarrow\ -\mathrm{div}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\ \nabla u_\varepsilon^i)u_\varepsilon^i = \frac{1}{\varepsilon^p}\ (u_\varepsilon^i)^2\ (1 - |u_\varepsilon|^2) \\
&\Rightarrow\ -\sum_{1\leq i\leq 2} u_\varepsilon^i\ \mathrm{div}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\ \nabla u_\varepsilon^i) = \frac{1}{\varepsilon^p}\ |u_\varepsilon|^2\ (1 - |u_\varepsilon|^2) \qquad /\times \frac{1}{|u_\varepsilon|^2} \\
&\Rightarrow\ -\sum_{1\leq i\leq 2} \mathrm{div}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\ \nabla u_\varepsilon^i)\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2} = \frac{1}{\varepsilon^p}\ (1 - |u_\varepsilon|^2)
\end{aligned}$$

De cette estimation, on calcule la divergence et on intègre par partie le terme avec le laplacien $\triangle u_\varepsilon^k$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1-|u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^p}\,\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2\,dx &= -\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \mathrm{div}(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\;\nabla u_\varepsilon^i)\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\,\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2\\
&= -\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega [\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\,\mathrm{div}(\nabla u_\varepsilon^i)+\nabla(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2})\nabla u_\varepsilon^i]\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\,\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2\\
&= -\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\triangle u_\varepsilon^i\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\,\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2-\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \nabla(\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-2})\nabla u_\varepsilon^i\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\\
&\quad\;\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2\\
&= -\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}\triangle u_\varepsilon^i\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\,\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2-\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}})\nabla u_\varepsilon^i\frac{u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\,\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2\\
&= -\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\zeta^2\frac{u_\varepsilon^i\triangle u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\,dx-\int_\Omega\sum_{1\le i\le 2}\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}})\nabla u_\varepsilon^i\frac{\omega_\varepsilon^{\frac{\beta+2}{2}}\,\zeta^2u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}\\
&\le \int_\Omega\sum_{1\le i\le 2}\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\frac{\zeta^2u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}).\nabla u_\varepsilon^i\,dx\;+(p-2)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{(p+\beta-1)}{2}}\,\zeta^2\,|\nabla\omega_\varepsilon|
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité provient de (13)

On note

$$K_1=\int_\Omega\sum_{1\le i\le 2}\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\frac{\zeta^2u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}).\nabla u_\varepsilon^i\;\;dx$$

On décompose K_1 en 4 termes comme suit :

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= \sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\frac{\zeta^2}{|u_\varepsilon|^2}.\nabla u_\varepsilon^i\;.\nabla u_\varepsilon^i\,dx\\
K_{12} &= 2\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\frac{\zeta u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}(\nabla\zeta\;.\nabla u_\varepsilon^i)\,dx\\
K_{13} &= \frac{p+\beta}{2}\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-2}{2}}\frac{\zeta^2u_\varepsilon^i}{|u_\varepsilon|^2}(\nabla\omega_\varepsilon\;.\nabla u_\varepsilon^i)\,dx\\
K_{14} &= -2\sum_{1\le i,j\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\frac{\zeta^2}{|u_\varepsilon|^4}(u_\varepsilon^i.\nabla u_\varepsilon^i.u_\varepsilon^i.\nabla u_\varepsilon^i)\\
&\le 0
\end{aligned}
$$

De plus, par (13) et le lemme 3.1, on a

$$
\begin{aligned}
|K_{11}| &= \sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\frac{\zeta^2}{|u_\varepsilon|^2}\;\left|\nabla u_\varepsilon^i\right|^2\\
(13)\quad &\le 2\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\,\zeta^2\;|\nabla u_\varepsilon|^2\;=2\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{2}}\,\zeta^2\,dx \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|K_{12}| &= 2\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\ \frac{\zeta\left|u_\varepsilon^i\right|}{\left|u_\varepsilon\right|^2}.\left|\nabla\zeta\right|\ .\left|\nabla u_\varepsilon^i\right| \\
&\le 4\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\zeta\ .\left|\nabla\zeta\right|\ \sum_{i=1}^{2}\left|u_\varepsilon^i\right|\ .\left|\nabla u_\varepsilon^i\right| \\
&\le 4\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\zeta\ .\left|\nabla\zeta\right|\ (\sum_{i=1}^{2}\left|u_\varepsilon^i\right|^2)^{\frac{1}{2}}\ (\sum_{i=1}^{2}\left|\nabla u_\varepsilon^i\right|^2)^{\frac{1}{2}} \\
(14)\quad &\le 8\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\zeta\ .\left|\nabla\zeta\right|\ \left|\nabla u_\varepsilon\right|^2 = 8\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+1}{2}}\zeta\ .\left|\nabla\zeta\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|K_{13}| &= \frac{p+\beta}{2}\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-2}{2}}\frac{\zeta^2}{\left|u_\varepsilon\right|^2}\left|\nabla\omega_\varepsilon\right|.\left|u_\varepsilon^i\right|\ .\left|\nabla u_\varepsilon^i\right| \\
(15)\quad &\le 2(p+\beta)\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-1}{2}}\ \left|\nabla\omega_\varepsilon\right|\ \zeta^2\ dx
\end{aligned}
$$

Maintenant, combinons les inégalités (12)-(15) avec le lemme 3.3, on obtient l'estimation suivante

$$
\int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2\zeta^2\ dx \le C[\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{2}}\ \zeta^2\ dx + \int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-1}{2}}\ \left|\nabla\omega_\varepsilon\right|\ \zeta^2 + \int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}}\left|\nabla\zeta\right|^2\ dx] \tag{16}
$$

Ensuite, nous utilisons une astuce standard pour se débarrasser du terme contenant $\left|\nabla\omega_\varepsilon\right|$ dans le membre de droite.

On a

$$
C\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-1}{2}}\ \left|\nabla\omega_\varepsilon\right|\ \zeta^2\ dx = C\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-4}{4}}\ \left|\nabla\omega_\varepsilon\right|\ \zeta\ .\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{4}}\ \zeta
$$

On applique l'inégalité : ab$\le \delta a^2 + \frac{1}{4\delta^2}b^2$, avec

$$
\delta = \frac{(p+\beta)^2}{32C}
$$

on trouve,

$$
C\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-1}{2}}\ \left|\nabla\omega_\varepsilon\right|\ \zeta^2\ dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2\zeta^2\ dx + \frac{8C^2}{(p+\beta)^2}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{2}}\ \zeta^2\ \ dx
$$

car

$$
\left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2 = \frac{(p+\beta)^2}{16}\ \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta-4}{2}}\ \left|\nabla\omega_\varepsilon\right|^2
$$

De plus, on absorbe le terme $\left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2$ dans le coté gauche de (16), on obtient

$$\int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2 \ \zeta^2 \ dx \leq C(p,\beta) \ (\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{2}} \ \zeta^2 \ dx + \int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}} \ |\nabla\zeta|^2 \ dx \qquad (17)$$

et on peut prendre

$$C(p,\ \beta) = 2.10^3 \ p^2(p+\beta)^2$$

Pour faire face à la première intégrale sur le coté droit, soit q= 1 et son exposant conjugué $q^* = 2$, prenons $\alpha = \frac{p+\beta+2}{4}$, par le théorème de prolongement de Sobolev, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{2}} \ \zeta^2 \ dx \ &= \ \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_\varepsilon^\alpha \zeta)^2 \ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\omega_\varepsilon^\alpha \zeta)|^2 \\ &\leq \ C(p)\alpha^2(\int_{\mathbb{R}^2} \omega_\varepsilon^{\alpha-1} \, |\nabla\omega_\varepsilon|^p \ \zeta^p \ dx)^2 + C(p)(\int_{\mathbb{R}^2} \omega_\varepsilon^\alpha \zeta \, |\nabla\zeta|^2 \,)\end{aligned}$$

Afin de voir encore, les expressions qui figurent dans (17), notons

$$\alpha - 1 = \frac{p+\beta-2}{4}$$

On applique l'inégalité de HÖlder, pour estimer l'intégrale sur le coté droit, ce qui donne

$$\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta+2}{2}} \ \zeta^2 \ dx \leq C(p)(\int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{4}})\right|^2 \zeta^2 \ dx) \ .(\int_{\{\zeta\neq 0\}} \omega_\varepsilon \ dx) + C(p)(\int_\Omega \omega_\varepsilon^{\frac{p+\beta}{2}} \ |\nabla\zeta|^2 \ dx) \ .(\int_{\{\zeta\neq 0\}} \omega_\varepsilon \ dx) \qquad (18)$$

Soit,

$$S = \frac{(p+\beta)}{2}$$

et on définit

$$\begin{aligned}\phi(s,\varepsilon) \ &: \ = \int_\Omega \left|\nabla(\omega_\varepsilon^{\frac{S}{2}})\right|^2 \zeta^2 \ \ dx \\ \psi(s,\varepsilon) \ &: \ = \int_\Omega \omega_\varepsilon^S \ \ |\nabla\zeta|^2 \ dx \\ I(\varepsilon) \ &: \ = \int_{\{\zeta\neq 0\}} \omega_\varepsilon \ dx \ = \int_{B_R} |\nabla u_\varepsilon|^2\end{aligned}$$

On utilise ces notations et on rassemble (17) avec (18), on obtient

$$\phi(\mathrm{s},\varepsilon) \ \leq \mathrm{C_0 S^2}\phi(\mathrm{s},\varepsilon)\ I(\varepsilon) + \mathrm{C_0 S^2}\ (I(\varepsilon)+1)\psi(\mathrm{s},\varepsilon)$$

$\mathrm{C_0}$ ne dépend que de p.

Pour finir la démonstration, on a besoin d'introduire le lemme suivant

Lemme 3.5 *Pour tout $K \subset \Omega$ et $q \in (1,\infty)$, il existe une constante C qui dépend de p, q, K et g tel que*

$$\left\|\omega^q_{\varepsilon_k}\right\|_{W^{1,2}(k)} \leq C\ , \quad pour\ k = 1,2,...$$

Par le théorème de Morrey, $\mathrm{W^{1,2}}$ se prolonge dans $\mathrm{L^2}$, cependant, on utilise le lemme précédent et on prend une sous-suite (ε_k), tel que

$$\begin{aligned} |\nabla \mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}}|^{\frac{q}{2}} \ &\to \ |\nabla \mathrm{u}_*|^{\frac{q}{2}} \ \ \text{dans } \mathrm{L^2} \\ \nabla \mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} \ &\rightharpoonup \ \nabla \mathrm{u}_* \ \text{ dans } \mathrm{L^q}(\mathrm{K},\mathbb{R}^4) \end{aligned} \tag{19}$$

pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ et q= 2k, k= 3,4,....

On applique le théorème suivant pour conclure

Théorème 3.2 *Si $(f_k) \subset L^p$, $1 < p < \infty$ converge vers $f \in L^p$ et* $\lim \|f_k\|_p = \|f\|_p$. *Alors*

$$\|f_k - f\|_p \to 0 \quad quand\ k \to \infty$$

donc (19) implique que

$$\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} \to \mathrm{u}_* \quad \text{dans } \mathrm{W^{1,q}_{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^2) \quad \text{pour q} = 6,8,...$$

donc par le théorème de prolongement de Sobolev on conclut que

$$\|\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} - \mathrm{u}_*\|_{C^\alpha_{\mathrm{loc}}} \to 0$$

Résumons, nous avons prouvé que toute suite $\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} \to \mathrm{u}_*$ dans $\mathrm{W^{1,p}}$ contient une suite qui converge vers u_* dans C^α_{loc} $(\forall\alpha < 1)$, par conséquent, la suite $(\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}})$ converge vers u_* localement dans C^α ce qui termine la preuve du théorème.

Remarque 3.1 *L'hypothèse que u_ε soit un minimiseur de E_ε a été utilisée uniquement pour établir la convergence de*

$$u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_* \, dans \;\; W^{1,p}$$

Par conséquent, si nous savons que

$$-\mathrm{div}(\,|\nabla \mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}}|^{\mathrm{p}-2} \;\; \nabla \mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}}) = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{k}^\mathrm{p}} \mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} (1 - |\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}}|^2\,)$$

et qu' il existe une application v$\in$ $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$ telle que

$$\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} \rightarrow \mathrm{v} \;\; \text{dans } \mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$$

alors,

$$\mathrm{u}_{\varepsilon_\mathrm{k}} \rightarrow \mathrm{v} \;\; \text{dans } C^1_{\mathrm{loc}} \quad \forall \alpha < 1$$

Remarque 3.2 *Pour obtenir la convergence de u_{ε_k} dans $C^{1,\alpha}(K)$, K un compact de Ω, il faut savoir que*

$$\int_{B_R} \frac{1 - |u_{\varepsilon_k}|^2}{\varepsilon_k^p} \; dx \leq CR^{p-\delta}$$

pour une constante C indépendante de $\varepsilon_\mathrm{k}$et un certain δ $\in$(0,1)

Nous montrons ici un résultat (probablement bien connu) la bornitude locale de $|\nabla \mathrm{u}_\varepsilon|$

Lemme 3.6 *Si u_ε $\in W_g^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^2)$ est solution faible de (3). Alors pour tout $K \subset \Omega$, il existe une constante C(p,K) tel que*

$$|\nabla u_\varepsilon|^p \leq \frac{C(p,K)}{\varepsilon^p}(1 + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \quad dx) \quad pour \; x \in K$$

L'idée de la preuve est tirée de Brézis, Bethuel et Hélein [1,lemme A1]. L'estimation de l'opérateur de Laplace est remplacée par l'itération de Moser.

Preuve: On introduit une fonction auxiliaire v définie par la formule : v(x)=$\mathrm{u}_\varepsilon(\varepsilon \mathrm{x})$ (donc $|\nabla \mathrm{v}\,| = \varepsilon\,|\nabla\; \mathrm{u}_\varepsilon|$) pour tout x dans G:={ x \x=$\frac{\mathrm{y}}{\varepsilon}$, y$\in$ Ω}$\equiv$ Ω_ε

qui vérifie

$$-\mathrm{div}(\,|\nabla \mathrm{v}|^{\mathrm{p}-2} \;\; \nabla \mathrm{v}) = \mathrm{v}(1 - |\mathrm{v}|^2\,) \;\; \text{dans } \Omega$$

et

$$|\mathrm{v}| \leq 1$$

On écrit : $h = |\nabla v|^2$

On répète la preuve du lemme 3.3 et on met

$$S := \frac{(p+\beta)}{2}, \;\; S \geq 1$$

On obtient,

$$\int_\Omega \left|\nabla(h^{\frac{S}{2}})\right|^2 \zeta^2 \, dx \leq Cs \int_\Omega h^{S+1-\frac{p}{2}} \zeta^2 \, dx + C \int_\Omega h^S \, (1 + |\nabla\zeta|^2) \, dx$$

pour $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ qui satisfait : $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ dans la boule $B_r \subset \Omega$, $\zeta \equiv 0$ dans $\Omega \backslash B_R$ et $|\nabla\zeta| \leq \frac{2}{R-r}$.

Soit $\omega = \max(1,h)$. Supposons que

$$\frac{1}{2}R < r < R \leq 1$$

Puisque

$$\omega^s \geq \omega^{s+1-\frac{p}{2}} \geq h^{s+1-\frac{p}{2}}$$

et

$$\left|\nabla(\omega^{\frac{s}{2}})\right| \leq \left|\nabla(h^{\frac{s}{2}})\right|,$$

on a

$$\int_{B_r} \left|\nabla(\omega^{\frac{s}{2}})\right|^2 \, dx \leq \frac{Cs}{(R-r)^2} \int_{B_r} \omega^s dx$$

On applique l'itération de Moser, alors

$$\left(\int_{B_{\rho_j}} \omega^{s_j}\right)^{\frac{1}{s_j}} \leq C(p)\left(\int_{B_\rho} \omega^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}$$

où

$$\begin{aligned} s_j &= \left(\frac{p}{p-2}\right)^j . \frac{p}{2} \\ \rho_j &= \frac{\rho}{2}(1 + 2^{-j}) \\ \text{et } j &= 1,2,... \end{aligned}$$

quand j$\rightarrow \infty$, on conclut que

$$\text{ess}\max_{x\in B_{\frac{\rho}{2}}} \omega(x) \leq C(\int_{B_\rho} \omega^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{\rho}}$$

On fixe $K \subset \Omega$ et $K_\varepsilon = \{ x \backslash x = \frac{y}{\varepsilon},\ y \in \Omega\}$. Pour ε petit, supposons que $\rho = 1 <$dist $(K_\varepsilon, \partial\Omega) =$ dist $(K_\varepsilon, \partial\Omega)/2$.

Pour simplifier supposons que toutes les boules centrées en 0, passent de $x \in \Omega$ à $y = \varepsilon x \in \Omega$, on obtient

$$\text{ess}\max_{y\in B(0,\frac{\varepsilon}{2})} \varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon(y)|^2 \leq C(\int_{B(0,\frac{\varepsilon}{2})} \max(1,\varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}}$$

on applique l'inégalité

$$\max(a,b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$$

donc

$$\begin{aligned} \max(1,\varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}} &\leq 2^{\frac{p}{2}}(1 + \varepsilon^p |\nabla u_\varepsilon|^p \\ &\leq C(\frac{1}{\varepsilon^p} + |\nabla u_\varepsilon|^p) \end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \varepsilon^p |\nabla u_\varepsilon(y)|^p &\leq C\int_{B(0,\frac{\varepsilon}{2})} (\frac{1}{\varepsilon^p} + |\nabla u_\varepsilon|^p)dx \\ &\leq C(1 + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p dx) \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve du lemme ■

Conclusion

On a vu que le problème (P) traite grossièrement deux facettes. La première facette correspond au problème bien posé, lorsque le degré de la donnée au bord est nul. Dans ce cas on a une réponse directe au problème, il existe une solution unique notée u_* qui admet comme relèvement l'extension harmonique d'un relèvement de g.

La deuxième facette est nettement plus difficile, les hypothèses que l'on considère ne sont plus compatibles, on a donc remplacé la contrainte de module par un terme pénalisateur ayant pour paramètre ε (petit).

En outre, u_* est régulière, sauf en un nombre fini de points appelés singularités ou vortices ou tourbillons en physique.

Les singularités minimisent une énergie appelée énergie renormalisée et l'énergie de Ginzburg-Landau en ces points est infinie.

Dans le chapitre 3, on a vu que lorsque $p > 2$, et $d = 0$, le problème de minimisation (2) admet aussi une solution unique, et on a trouvé que le minimiseur de E_ε converge vers u_* dans plusieurs topologies. D'après cette étude, on peut conclure qu'il reste une question très importante qu'est d'étudier la convergence du minimiseur dans presque C^2.

Et reste le problème ouvert qu'est d'étudier le comportement asymptotique des minimiseurs de p-Ginzburg Landau dans le cas où le degré de la donnée au bord est non nul.

Bibliographie

Bibliographie

[1] F. Bethuel, H. Brézis et F. Helein, Asymptotic for the minimizing of a Ginzburg-Landau functional, Calcul of variations and PDE1(1993), 123-148.

[2] F. Bethuel, H. Brezis et F. Helein, Ginzburg-Landau vortices, Birkhauser, Boston, 1994.

[3] Pawel Strzelecki, Asymptotic for the minimization of a Ginzburg Landau energy in n-dimensions, Colloquium mathematicum, 1996, 272-289.

[4] Z. Han and Y .lei, Degenerate elliptic systems and applications to Ginzburg-Landau type equations, Part I, Calc. Var. PDE 4 (1996), 171-202

[5] Y. Lei, Asymptotic behavior of regularizable minimizers of a Ginzburg Landau functional in higher dimensions, J. Math. Anal. Appl. 334 (2001), 1341–1362

[6] Y. Lei, $W^{1,p}$ convergence of Ginzburg landau type minimizers, J. Math. Anal. Appl. 313(2006), 1-23

[7] Y. Lei, Singularity analysis of a p-Ginzburg Landau type minimizers, Bull. Sci. Math, 2008,1-19.

[8] L. Zuhan, Asymptotic behavior for minimizers of a Ginzburg Landau type functional in higher dimensions, Nonlinear Analysis, 46(2001), 153-167.

[9] D. Gilbarg and V. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren Math. Wiss 224, Springer, Berlin and New York, 1983.

[10] M. Dos Santos, Singularités des fonctions unimodulaires et concentration d'énergie, Mémoire de master, université Lyon 1, 2006-2007

[11] Struwe, une estimation asymptotique pour le modèle de Ginzburg Landau 317, 1993.