

Table des Matières

Introduction	2
1 Généralités sur le traitement des images	6
1.1 Qu'est ce qu'une image numérique?	6
1.2 Matlab et les images	7
1.2.1 Exemple: visualisation d'une image	7
1.3 Dégradation d'images	8
2 Restauration d'images et régularisation de Tychonov	12
2.1 Position du problème	12
2.2 Régularisation de Tychonov	13
2.2.1 La condition d'optimalité	15
2.2.2 Résolution numérique	17
2.3 Résultats numériques	24
2.3.1 L'utilisation de l'indice ISNR	26
2.4 Conclusion	27
3 Restauration d'images via l'équation de la chaleur	28
3.1 Lien entre l'équation de la chaleur et la restauration d'images	29
3.2 Discrétisation du problème (3.1)	29
3.3 Résultats numériques	30
3.4 Conclusion	32

4	Restauration d'images par variation totale	33
4.1	Fonctions à variation bornée	33
4.1.1	Définition	33
4.1.2	Exemples:	34
4.1.3	Propriétés structurelles des fonctions BV	34
4.1.4	Etude de l'espace BV	37
4.1.5	Décomposition de la variation totale	40
4.1.6	Approximation-Compacité	41
4.2	Le modèle de Rudin-Osher et Fatemi	42
4.2.1	Théorème	42
4.2.2	Condition d'optimalité	43
4.3	Discrétisation du problème (4.2)	43
4.3.1	Théorème	45
4.3.2	Algorithme de projection de Chambolle	47
4.4	Résultats numériques	48
4.5	Conclusion	49
	Conclusion	50
5	Annexes	51
5.1	Annexe A: Quelques notions d'optimisation convexe	51
5.1.1	Définitions	51
5.1.2	La Gâteaux différentiabilité	52
5.1.3	Le sous différentiel	53
5.1.4	La transformation de Legendre-Fenchel	54
5.2	Annexe B: Codes Matlab	55

Notations

Ω : désigne un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n

$\Gamma = \partial\Omega$: frontière de Ω C^1 par morceaux

$C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$: l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n

$C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$: l'espace des fonctions continûment différentiables à support compact dans Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n .

supp : le support d'une fonction.

$L^1(\Omega)$: l'espace des fonctions intégrables sur Ω .

$L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions de carré intégrables sur Ω .

$\|\cdot\|_2$: la norme de $L^2(\Omega)$.

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1, n} \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega), f|_{\Gamma} = 0 \}$$

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|f\|_2 + \|\nabla f\|_2$$

∇f : le gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t = \nabla f$

Δf : le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f$

divu : la divergence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est $divu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

$A \otimes B$: le produit de Kronecker de $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ est défini par

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

Introduction

Le traitement d'images numériques désigne l'ensemble des techniques permettant de modifier une image numérique dans le but de l'améliorer ou d'en extraire des informations, plusieurs type d'actions peuvent être envisagées : détection des contours, filtrage, segmentation, restauration,...

Plusieurs applications sont tributaires de la qualité des images. Mais celle-ci n'est pas toujours satisfaisante, pour diverses raisons (défauts dans le capteur, le bruit naturel, des problèmes de transmission, etc.). Dans ce travail nous intéressons à quelques méthodes de la restauration d'images qui consistent à enlever ou diminuer les défauts de ces images.

Dans le chapitre 1 nous allons donner quelques généralités sur le traitement d'images concernant la définition d'une image numérique, Matlab et les images et la dégradation d'image par un opérateur de flou et un bruit additif.

Dans le chapitre 2 nous présentons le problème de la restauration d'image, malheureusement c'est un problème mal posé pour le résoudre nous introduisons la régularisation proposée par Tychonov. C'est un problème de minimisation d'une fonctionnelle à deux termes, le premier est le terme d'ajustement aux données et le deuxième est le terme de régularisation. Nous formulons le problème et nous proposons une discrétisation par les schémas aux différences finies ainsi qu'une implémentation numérique.

Dans le chapitre 3 nous allons donner une autre approche en utilisant une EDP de la chaleur. Nous proposons une discrétisation du problème et implémentons le résultat.

Dans le chapitre 4 nous introduisons une amélioration de la régularisation de Tychonov par le modèle de Rudin-Osher et Fatemi. Ils ont proposé la variation totale comme terme de régularisation. Nous présentons d'abord l'espace adapté à ce type de problème c'est l'espace des

fonctions à variation bornée et la formulation mathématique du problème avec ses conditions d'optimalités, ensuite nous résolvons numériquement le problème par l'algorithme de chambolle.

Chapitre 1

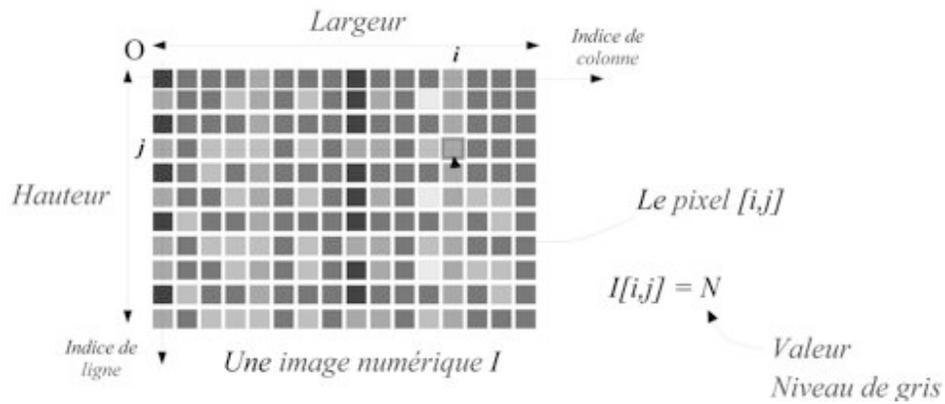
Généralités sur le traitement des images

1.1 Qu'est ce qu'une image numérique?

Une image numérique est une fonction notée u de deux ou trois variables spatiales. Elle est à valeurs dans \mathbb{R}^n , où n est égal à 1 pour des images en niveaux de gris et à 3 pour des images couleurs. L'ouvert de visualisation Ω sur lequel elle est définie et appelée l'écran en bidimensionnel et le volume visuel en tridimensionnel. Cet ouvert sera un rectangle (en bidimensionnel) ou un parallélépipède (en tridimensionnel).

En fait, dans la pratique, nous considérons que la fonction u qui caractérise l'image n'est pas définie en tous les points de l'ouvert Ω mais seulement aux points de contours d'une grille, centres de pavés appelés pixels en bidimensionnel, et voxels en tridimensionnel. A l'écran, ces pavés sont des petits carrés ou des petits cubes dans l'espace. Ceci est dû à un échantillonnage de l'image rendu nécessaire par les prises de vue numériques (on ne peut stocker qu'une quantité finie d'informations).

Dans le présent travail, nous nous limiterons aux images en niveaux de gris. Dans ce cas, les valeurs de la fonction image u appartiennent à $\{0, 1, 2, 3, \dots, 255\}$ où par convention la valeur 0 représente le noir et la valeur 255 le blanc (256 teintes de gris).



1.2 Matlab et les images

Une image en niveaux de gris Matlab est une matrice de valeurs entières. Les principales fonctions de traitement d'images sous Matlab se trouvent dans la boîte à outils (toolbox) image processing (traitement d'images). L'aide sur cette boîte à outils est obtenue en tapant `help images` en ligne de commande de Matlab. Ensuite, l'aide sur une commande particulière est obtenue en tapant `help` suivi du nom de la commande, par exemple `help edge`.

1.2.1 Exemple: visualisation d'une image

```

»I = imread('cameraman.tif');
  »figure, imshow(I )

```



1.3 Dégradation d'images

La dégradation ou le bruitage des images est le résultat de deux phénomènes le premier est le flou créer par un ajustement incorrect des lentilles ou par mouvements, le second phénomène est aléatoire et correspond au bruit venant de n'importe quel signal de transmission par exemple lors d'une mauvaise réception de données.

Exemple1 :

```
»I = imread('cameraman.tif ');
»I = double(I);
»s = 20; %écart standard du bruit Gaussien
»In = randn(size(I)) * s;
»%bruit blanc Gaussien
»Ib = I + In; %image bruité
»figure(1); imshow(uint8(I)), title('image originale')
```

image originale



```
»figure(2); imshow(uint8(Ib)), title('image bruitée')
```

image bruitée



Exemple2 :

```
»%bruitage de l'image par convolution  
»h = fspecial('disk',4);  
»%lecture de l'image et conversion à double pour FFT  
»cam = im2double(imread('cameraman.tif'));  
»hf = fft2(h, size(cam,1), size(cam,2));  
»cam_blur = real(ifft2(hf.*fft2(cam)));  
»figure(1)  
»imshow(cam_blur)  
»title('image floutée')
```

image floutée



```
»sigma_u = 10^(-40/20) * abs(1 - 0);  
»cam_blur_noise = cam_blur + sigma_u * randn(size(cam_blur));  
»figure(2)  
»imshow(cam_blur_noise)  
»title('image floutée et bruitée')
```

image floutée et bruitée



Le traitement d'images est une discipline des mathématiques appliquées qui étudie les images numériques et leurs transformations, dans le but d'améliorer leur qualité ou d'en extraire de l'information.

Plusieurs types d'action peuvent être envisagés : restauration, filtrage, segmentation, détection des contours,

Nous nous intéressons dans ce travail à certaines méthodes de restauration d'images. Dans le chapitre suivant nous donnons une formulation mathématique de ce type de problème.

Chapitre 2

Restauration d'images et régularisation de Tychonov

Un problème intéressant en traitement numérique d'image est la restauration d'images bruitées. Il arrive souvent lors de l'acquisition d'une image (par photographie notamment) que l'image obtenue soit différente de l'image espérée. Le principe de la restauration est d'enlever ou diminuer les effets des dégradations d'une image.

2.1 Position du problème

Soit u l'image originale décrivant une scène réelle (l'inconnue), et soit u_0 l'image observée (la donnée), ces deux fonctions seront supposées de carré intégrables. Supposons que $u_0 = Ru + \nu$ où $Ru = R * u$ représente la convolution de u par un noyau R , opérateur linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et ν un bruit additif, reconstruire u à partir de u_0 sachant que $u_0 = Ru + \nu$ est un problème inverse.

Si on suppose que le bruit additif ν est gaussien, par la méthode des moindres carrés on peut trouver une approximation de u en résolvant le problème de minimisation suivant:

$$\inf_u \|u_0 - Ru\|_2^2 \quad \text{où} \quad \|g\|_2^2 = \int_{\Omega} g(x)^2 dx$$

Ce type de problème est en général mal posé. Rappelons que selon la définition d'HADAMARD

un problème est bien posé lorsque ces trois conditions sont remplies :

1. il existe une solution.
2. la solution est unique.
3. la solution est une fonction continue des données, c'est à dire une faible perturbation des données conduit à une faible perturbation de la solution.

Or, l'opérateur R n'est pas nécessairement inversible et même lorsqu'il est inversible (c'est à dire la transformée de Fourier \widehat{R} de R ne s'annule pas), la restauration de u par déconvolution brutale $R^{-1}u_0$ est inefficace à cause du terme de bruit. En effet, dans le domaine de Fourier on a :

$$\widehat{R^{-1}u_0} = \widehat{u} + \frac{\widehat{v}}{\widehat{R}}$$

le deuxième terme $\frac{\widehat{v}}{\widehat{R}}$ « explose » aux points où \widehat{R} devient très petit, ce qui produit en général des oscillations démesurées qui noient le reste de l'image. Il s'agit d'un problème mal posé.

Pour le résoudre, introduisons un terme de régularisation et considérons le problème de minimisation suivant :

$$\inf_u \|u_0 - Ru\|_2^2 + L(u)$$

2.2 Régularisation de Tychonov

Dans tout ce qui suit nous considérons le cas où $R = I$ (l'opérateur identité).

Soit $V = H_0^1(\Omega)$, on considère le problème de minimisation original (ajustement aux données) :

$$(P) \min_{u \in V} \|u - u_d\|_2^2$$

où u_d est l'image observée (donnée). L'une des méthodes de régularisation utilisées pour résoudre ce type de problème mal posé est la régularisation de Tychonov introduite en 1963 qui consiste à minimiser le problème régularisé suivant :

pour tout $\alpha > 0$

$$(P_\alpha) \min_u \underbrace{\|u - u_d\|_2^2}_{\text{ajustement aux données}} + \underbrace{\alpha \|\nabla u\|_2^2}_{\text{terme de régularisation}}$$

Non seulement on veut ajuster u à la donnée u_d , mais on impose que le gradient soit « assez petit » (cela dépend du paramètre de régularisation α).

Remarque:

Il est facile de voir sur l'exemple suivant que la fonctionnelle $J(u) = \|u - u_d\|_2^2$ n'est pas coercive sur V :

$$\Omega =]0, 2[, \quad u_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in]0, 1[\\ (2-x)^n & \text{si } x \in [1, 2[\end{cases}, \quad u_d = 0$$

on voit que:

$$\|u_n\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \quad \text{et} \quad \|u'_n\|_2 = \sqrt{\frac{2n^2}{2n-1}},$$

on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_V = +\infty$$

et:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = 0$$

Il n'est même pas clair que le problème (P) admet une solution.

Proposition 1 : *Supposons (P) admet au moins une solution \tilde{u} . Le problème (P_α) admet une solution unique u_α . De la famille (u_α) on peut extraire une sous-suite qui converge (faiblement) dans V vers une solution u^* de (P) lorsque $\alpha \rightarrow 0$.*

Démonstration:

Le problème (P_α) admet une solution unique u_α car la fonctionnelle

$J_\alpha(u) = \|u - u_d\|_2^2 + \alpha \|\nabla u\|_2^2$ est coercive et strictement convexe, en effet,

$J_\alpha(u) \geq \|u\|_V^2$ donc $J_\alpha(u) \rightarrow +\infty$ quand $\|u\|_V \rightarrow +\infty$. et la stricte convexité de J est une conséquence de la stricte convexité de la norme $\|\cdot\|_2^2$.

En effet, pour $u \neq v$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \right\|_2^2 &= \frac{1}{4} \|u\|_2^2 + \frac{1}{4} \|v\|_2^2 + \frac{1}{2} \langle u, v \rangle \\ &\leq \frac{1}{4} \|u\|_2^2 + \frac{1}{4} \|v\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &< \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que (u_α) est bornée dans V . On pourra ainsi en extraire une sous-suite faiblement convergente dans V vers $u^* \in V$.

$$\forall u \in V \quad J_\alpha(u_\alpha) \leq J_\alpha(u)$$

en particulier pour \tilde{u} :

$$\underbrace{J(\tilde{u}) \leq J(u_\alpha)}_{\tilde{u} \text{ est solution de } (P)} \leq \underbrace{J_\alpha(u_\alpha) = J(u_\alpha) + \alpha \|\nabla u_\alpha\|_2^2}_{u_\alpha \text{ est solution de } (P_\alpha)} \leq J_\alpha(\tilde{u}) = J(\tilde{u}) + \alpha \|\nabla \tilde{u}\|_2^2$$

par conséquent, pour $\alpha \leq \alpha_0$, $J_\alpha(u_\alpha)$ est bornée indépendamment de α ceci entraîne que la famille $(u_\alpha)_{\alpha \leq \alpha_0}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, on a aussi:

$$\alpha \|\nabla u_\alpha\|_2^2 \leq J(\tilde{u}) + \alpha \|\nabla \tilde{u}\|_2^2 - J(u_\alpha) \leq J(\tilde{u}) + \alpha \|\nabla \tilde{u}\|_2^2 - J(\tilde{u}) = \alpha \|\nabla \tilde{u}\|_2^2$$

par conséquent la famille $(u_\alpha)_{\alpha \leq \alpha_0}$ est bornée dans V . On peut donc en extraire une sous-suite qui converge (faiblement) dans V vers u^* . D'autre part, on a:

$$J(\tilde{u}) \leq J_\alpha(u_\alpha) \leq J(\tilde{u}) + \alpha \|\nabla \tilde{u}\|_2^2 \implies \lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(u_\alpha) = J(\tilde{u}) = \inf (P)$$

par semi-continuité inférieure de J il vient

$$J(u^*) \leq \liminf_{\alpha \rightarrow 0} J(u_\alpha) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(u_\alpha) \leq \inf (P)$$

par conséquent u^* est solution de (P) .

2.2.1 La condition d'optimalité

Comme la fonctionnelle J_α est strictement convexe et on a une minimisation sans contrainte (minimisation sur tous l'espace V), une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est :

$$J'_\alpha(u_\alpha) = 0 \text{ l'équation d'Euler}$$

Proposition 2 : $J_\alpha(u)$ est de classe C^1 c'est à dire: elle est Fréchet différentiable et

$$J'_\alpha(u) = u - u_d - \alpha \Delta u.$$

Démonstration:

Calculons d'abord la dérivée de J_α au sens de Gâteaux (c'est à dire: la G-différentielle)

$$\begin{aligned} \langle J'_\alpha(u); v \rangle &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} (J_\alpha(u + \theta v) - J_\alpha(u)) \\ &= 2 \langle u, v \rangle_2 - 2 \langle u_d, v \rangle_2 + 2\alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle_2 \\ &= 2 \langle u - u_d, v \rangle_2 + 2\alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle_2 \\ &= 2 \int_{\Omega} (u - u_d) v dx + 2\alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (u - u_d) v dx - 2\alpha \int_{\Omega} \Delta u v dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (u - u_d - \alpha \Delta u) v dx \end{aligned}$$

$v \mapsto \langle J'_\alpha(u); v \rangle$ est linéaire continue, en effet,

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \langle J'_\alpha(u); av_1 + bv_2 \rangle = a \langle J'_\alpha(u); v_1 \rangle + b \langle J'_\alpha(u); v_2 \rangle$$

(à cause de la linéarité de l'intégrale)

de plus,

$$\begin{aligned} |\langle J'_\alpha(u); v \rangle| &= \left| 2 \int_{\Omega} (u - u_d - \alpha \Delta u) v dx \right| \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |u - u_d - \alpha \Delta u| |v| dx \\ &\leq 2 \|u - u_d - \alpha \Delta u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq 2 \|u - u_d - \alpha \Delta u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq C \|v\|_V \quad \text{où } C = 2 \|u - u_d - \alpha \Delta u\|_2 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $u \mapsto \langle J'_\alpha(u); v \rangle$ est continue sur $\vartheta(u_0)$ un voisinage de u_0

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1, \eta_2 > 0, \forall u \in \vartheta(u_0) \|u - u_0\|_2 \leq \eta_1$ et $\|\nabla(u - u_0)\|_2 \leq \eta_2 \implies |\langle J'_\alpha(u), v \rangle - \langle J'_\alpha(u_0), v \rangle| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|\langle J'_\alpha(u); v \rangle - \langle J'_\alpha(u_0); v \rangle| &= \left| 2 \int_{\Omega} (u - u_d - \alpha \Delta u) v dx - 2 \int_{\Omega} (u_0 - u_d - \alpha \Delta u_0) v dx \right| \\
&= \left| 2 \int_{\Omega} (u - u_0 - \alpha \Delta(u - u_0)) v dx \right| \\
&\leq 2(\|u - u_0 - \alpha \Delta(u - u_0)\|_2 \|v\|_2) \\
&\leq 2(\|u - u_0\|_2 + \alpha \|\Delta(u - u_0)\|_2) \|v\|_2 \\
&\leq 2(\eta_1 + \alpha \eta_2) \|v\|_V
\end{aligned}$$

$$\text{choisissons } \eta_1 + \alpha \eta_2 = \frac{\varepsilon}{2 \|v\|_V}$$

par conséquent, J est de classe C^1 (d'après le théorème 1 (voir Annexe A)), maintenant cherchons l'équation qui nous permette de trouver la solution u_α

$$\begin{aligned}
u_\alpha \text{ solution de } (P_\alpha) &\iff \langle J'_\alpha(u_\alpha), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
&\iff 2 \int_{\Omega} (u_\alpha - u_d - \alpha \Delta u_\alpha) v dx = 0 \quad \forall v \in V \\
&\iff u_\alpha - u_d - \alpha \Delta u_\alpha = 0 \quad \text{l'équation d'Euler qui fournit la solution } u_\alpha
\end{aligned}$$

On a le problème continu suivant:

trouver $u_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_\alpha + u_\alpha = u_d & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2.2 Résolution numérique

discrétisation du problème par différences finies:

La discrétisation par différences finies est largement utilisées dans le traitement d'image. Elle consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par les différences

divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets aux nœuds du maillage.

Construction du maillage: On a le problème continu (2.1) où $u_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (image en niveaux de gris définie sur un domaine Ω un ouvert, borné de \mathbb{R}^2). Dans ce cas Ω est un domaine rectangulaire, construisons une grille de discrétisation par quadrillage selon les deux directions d'axes, notons par Δx le pas de discrétisation selon x et Δy selon y , nous obtiendrons aux intersections des lignes du quadrillage les nœuds de coordonnées (x_i, y_j) où $x_i = i\Delta x$ et $y_j = j\Delta y$. Mais la structure d'une image numérique est un ensemble de pixels uniformément réparti, donc il est naturel d'associer à une image une grille uniforme c'est à dire: $\Delta x = \Delta y = h$, les positions (ih, jh) sont appelées sommets, nœuds ou pixels. On note par $u_{i,j}$ la valeur exacte de la solution u à l'emplacement (ih, jh) .

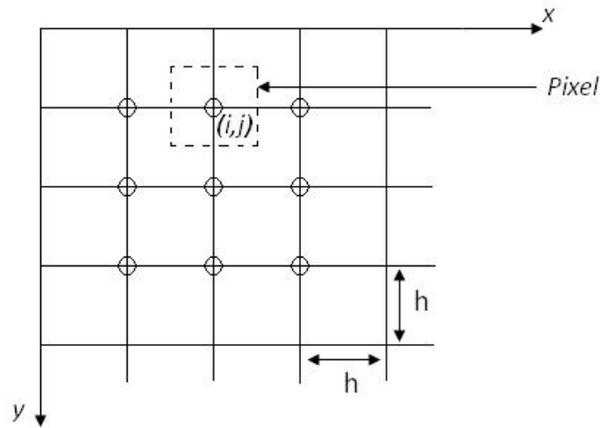


Schéma aux différences finies: Comme $u \in W^{1,2}(\Omega)$ alors $u \in C^\infty(\Omega)$, en utilisant la formule de Taylor dans les deux directions avec reste d'ordre 4 on trouve le développement de u au voisinage des nœuds $u_{i,j}$; $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq p$.

$$\begin{aligned}
u(x_{i-1}, y_j) &= u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) \\
&\text{avec } \xi_1 \in]x_{i-1}, x_i[\\
u(x_{i+1}, y_j) &= u(x_i, y_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j) \\
&\text{avec } \xi_2 \in]x_i, x_{i+1}[
\end{aligned}$$

en sommant les deux égalités, on trouve:

$$u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) = 2u(x_i, y_j) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j) \right)$$

d'où le résultat suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j) \right)$$

de même:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_4) \right) \\
&\text{avec } \xi_3 \in]y_{j-1}, y_j[\text{ et } \xi_4 \in]y_j, y_{j+1}[
\end{aligned}$$

ce qui implique que:

$$\begin{aligned}
\Delta u(x_i, y_j) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \\
&= u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) - 4u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) \\
&\quad - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_4) \right)
\end{aligned}$$

on note: $\tilde{u}_{i,j}$ l'approximation de $u(x_i, y_j)$ on a:

$$\Delta \tilde{u}_{i,j} = \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i-1,j} - 4\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i,j-1}$$

Estimation de l'erreur:

$$\begin{aligned} |\Delta u(x_i, y_j) - \Delta \tilde{u}_{i,j}| &= \left| \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_4) \right) \right| \\ &\leq \frac{h^2}{12} \max_{\Omega} \left| \frac{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j)}{2} + \frac{\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_4)}{2} \right| \end{aligned}$$

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaire, nous obtiendrons les résultats suivants:

$$\exists \mu_1 \in [\xi_1, \xi_2] \text{ tel que: } \frac{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j)}{2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\mu_1, y_j)$$

$$\exists \mu_2 \in [\xi_3, \xi_4] \text{ tel que: } \frac{\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_4)}{2} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \mu_2)$$

donc:

$$|\Delta u(x_i, y_j) - \Delta \tilde{u}_{i,j}| \leq \frac{h^2}{12} \max_{\Omega} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\mu_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \mu_2) \right|$$

Ainsi la discrétisation de $-\alpha \Delta u + u = u_d$ est:

$$(4\alpha + 1)\tilde{u}_{i,j} - \alpha(\tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i,j-1}) = w_{i,j}$$

où w est la discrétisation de u_d c'est à dire: $w_{i,j} = u_d(x_i, y_j)$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ ce qui nous donne le problème discret suivant:

$$\begin{cases} (4\alpha + 1)\tilde{u}_{i,j} - \alpha(\tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i,j-1}) = w_{i,j} & \text{si } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p \\ \tilde{u}_{i,j} = 0 & \text{si } i = 0, i = n + 1, j = 0 \text{ ou } j = p + 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) est un système linéaire de np équations avec np inconnus.

Remarque: Notons que dans de nombreux articles de la littérature de traitement d'image, le pas de discrétisation est égal à 1 ($h = 1$). Ce qui signifie que la taille du pixel est choisie comme unité de référence.

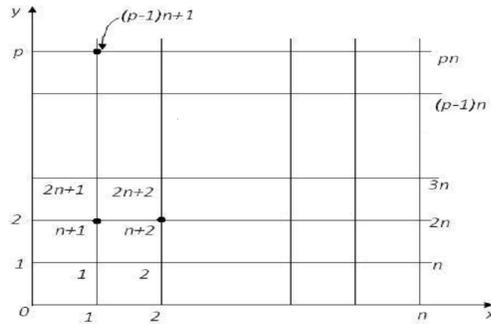
Forme matricielle: Construisons maintenant la matrice A_α dont les éléments représentent les coefficients des valeurs inconnus de \tilde{u} ($\tilde{u}_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$), le deuxième terme est

une matrice de dimension $n \times p$ dont les composantes représentent toutes les valeurs connues de w . Pour simplifier les calculs, adaptons une numérotation à un seul indice pour ranger les valeurs de w dans un vecteur W à np composantes.

Au lieu de considérer une matrice $\tilde{u}_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ de dimension $n \times p$, on construit un vecteur $U = (\tilde{u}_l)_{1 \leq l \leq np}$ où $\tilde{u}_l = \tilde{u}_{i,j}$ avec $l = (j-1)n + i$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ est la $l^{i\text{ème}}$ composante du vecteur U .

Si $N = np$, la matrice A_α serait une matrice carrée de dimension $N \times N$ et les vecteurs U, W seraient deux vecteurs de \mathbb{R}^N .

Nous adaptons la numérotation dans l'ordre lexicographique, Cette numérotation permet de parcourir le vecteur U et W de gauche à droite et de bas en haut sur le maillage.



Notons par $\Gamma_{1,1}$ (respectivement $\Omega_{1,1}$) la discrétisation de Γ (respectivement de Ω) avec un pas $\Delta x = \Delta y = 1$.

Commençons par le cas où l'on ne fait pas intervenir les nœuds situés sur la frontière $\Gamma_{1,1}$ c'est à dire: lorsque $1 < i < n, 1 < j < p$: $(4\alpha + 1)\tilde{u}_l - \alpha(\tilde{u}_{l+1} + \tilde{u}_{l-1} + \tilde{u}_{l+n} + \tilde{u}_{l-n}) = w_l$, où $\tilde{u}_{l+n}, \tilde{u}_{l-n}$ sont les valeurs de \tilde{u} correspondant aux positions respectives $l+n$ et $l-n$ en dessus et au dessous de l qui est la position de \tilde{u}_l sur le maillage $\Omega_{1,1}$ (lorsque $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ les 4 valeurs $\tilde{u}_{l+1}, \tilde{u}_{l-1}, \tilde{u}_{l+n}$ et \tilde{u}_{l-n} sont toutes inconnues en même temps, puisqu'elles se trouvent toutes sur le maillage $\Omega_{1,1}$ et non sur $\Gamma_{1,1}$).

Maintenant, si l'un des nœuds est situé sur la frontière $\Gamma_{1,1}$ (c-à-d: $\tilde{u}_{l+1} \in \Gamma_{1,1}$ ou $\tilde{u}_{l-1} \in \Gamma_{1,1}$ ou $\tilde{u}_{l+n} \in \Gamma_{1,1}$ ou $\tilde{u}_{l-n} \in \Gamma_{1,1}$) on a:

pour $i = 1$ et $j = 1$ c'est à dire: $l = 1$

$$(4\alpha + 1)\tilde{u}_1 - \alpha(\tilde{u}_2 + \tilde{u}_{n+1}) = w_1 \text{ car } \tilde{u}_0 = \tilde{u}_{1-n} = 0 \quad (\tilde{u}_{1,0} = \tilde{u}_{0,1} = 0)$$

pour $i = 1$ et $j = p$ c'est à dire: $l = (p-1)n + 1$

$$(4\alpha + 1)\tilde{u}_{(p-1)n+1} - \alpha(\tilde{u}_{(p-1)n+2} + \tilde{u}_{(p-2)n+1}) = w_{(p-1)n+1} \text{ car } \tilde{u}_{(p-1)n} = \tilde{u}_{pn+1} = 0 \quad (\tilde{u}_{0,p} = \tilde{u}_{1,p+1} = 0)$$

pour $i = n$ et $j = 1$ c'est à dire: $l = n$

$$(4\alpha + 1)\tilde{u}_n - \alpha(\tilde{u}_{n-1} + \tilde{u}_{2n}) = w_n \text{ car } \tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_0 = 0 \quad (\tilde{u}_{n+1,1} = \tilde{u}_{n,0} = 0)$$

pour $i = n$ et $j = p$ c'est à dire: $l = np$

$$(4\alpha + 1)\tilde{u}_{np} - \alpha(\tilde{u}_{np-1} + \tilde{u}_{(p-1)n}) = w_{np} \text{ car } \tilde{u}_{np+1} = \tilde{u}_{n(p-1)} = 0 \quad (\tilde{u}_{n+1,p} = \tilde{u}_{n,p+1} = 0)$$

donc la matrice A_α prendra la forme suivante:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} B & -\alpha I_n & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha I_n & B & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B & -\alpha I_n \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha I_n & B \end{pmatrix} \text{ où } B = \begin{pmatrix} 4\alpha + 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 4\alpha + 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4\alpha + 1 & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 4\alpha + 1 \end{pmatrix}$$

matrice tridiagonale symétrique

de dimension $n \times n$ et I_n la matrice identité de dimension $n \times n$

ce qui nous donne le système linéaire de dimension $N = np$ suivant:

$$A_\alpha U = W$$

où A_α est une matrice creuse symétrique et tridiagonale par bloc définie positive, en effet, le système précédent se réécrit:

$$\tilde{A}_{\tilde{\alpha}} U = \tilde{W}$$

avec

$$\tilde{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{4\alpha+1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{4\alpha+1} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -\frac{\alpha}{4\alpha+1} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha}{4\alpha+1} & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A}_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_\alpha & -\frac{\alpha}{4\alpha+1} I & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{4\alpha+1} I & \tilde{B}_\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{B}_\alpha & -\frac{\alpha}{4\alpha+1} I \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha}{4\alpha+1} I & \tilde{B}_\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{W} = \frac{1}{4\alpha + 1} W$$

Comme $\frac{\alpha}{4\alpha+1} > 0$, d'après [2] la matrice $\tilde{A}_{\tilde{\alpha}}$ est définie positive.

Ces caractérisations nous incitent à résoudre le système précédent en utilisant une décomposition de cholesky.

La matrice A a une élégante représentation en utilisant le produit de Kronecker \otimes

$$A = a \otimes I_n + I_n \otimes a$$

où I_n est la matrice identité, a est la matrice triangulaire représentant l'approximation de la dérivée seconde de dimension 1. Le produit de Kronecker est accessible en Matlab via la commande `Kron`.

2.3 Résultats numériques

En utilisant le code "tychonov.m" (voir Annexe B) nous avons obtenues les résultats suivants pour différentes valeurs de α :

pour $\alpha = 0.3$



pour $\alpha = 0.6$

Image restauré par tychonov avec alpha=0.6



pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 5$

Image restauré par tychonov avec alpha=1





2.3.1 L'utilisation de l'indice ISNR

Afin de tester objectivement les différents algorithmes nous introduisons un critère évaluant les performances de ces algorithmes. Soit f l'image originale, g l'image modifiée et f' l'image restaurée.

L'indice the improvement in signal-to-noise ratio (ISNR) (Amélioration du rapport signal sur le bruit en français) est défini par:

$$ISNR = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (f(i, j) - g(i, j))^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (f(i, j) - f'(i, j))^2} \quad (2.3)$$

Si l'image corrigée est proche de l'image originale, alors le dénominateur va être proche de 0, et donc l'ISNR sera proche de l'infini (il faut noter qu'avec le logarithme en base 10, cette fonction augmente lentement).

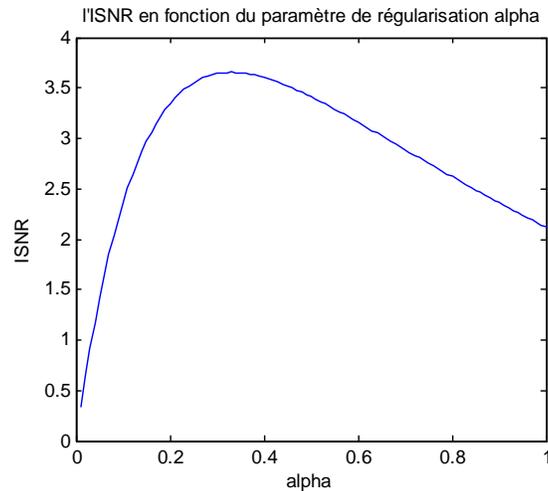
Si l'image corrigée est exactement identique à l'image bruitée, alors la fraction sera égale à 1, donc l'ISNR sera égale à 0. Enfin, si l'image restaurée est vraiment différente de l'image originale, le dénominateur sera assez important, l'ISNR tendra vers moins l'infini.

On peut résumer :

- Si l'ISNR est négatif, la restauration est mauvaise;
- Si l'ISNR est nulle, alors il n'y a pas eu de restauration (on reste proche de l'image bruitée);
- Si l'ISNR est positif, alors la restauration est de bonne qualité. À noter que l'ISNR évolue

lentement à cause du logarithme.

En utilisant le code "tychonovparam.m" (voir Annexe B) nous avons le résultat suivant:



Nous remarquons que l'ISNR pour la méthode de Tychonov avec $\alpha \in [0.1]$ est positive. Cependant l'algorithme n'est efficace que pour $\alpha \in [0.3, 0.6]$ au delà de $\alpha = 1$ nous obtenons une image floutée voir les figures pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 5$.

2.4 Conclusion

La régularisation par Tychonov impose que le gradient de l'image soit "assez petit" (cela depend du paramètre α). Une image dont le gradient est petit est lissée, estompée. Les bords sont érodés et la restauration donnera une image floutée.

Dans le chapitre suivant nous allons introduire une autre approche pour la restauration des images. Cette approche se base sur une EDP de la chaleur.

Chapitre 3

Restauration d'images via l'équation de la chaleur

Les équations aux dérivées partielles (EDP) ont été introduites pour la restauration d'images dès 1984 par les travaux de Koenderink [4], [9]. Dans cette approche, on considère une suite d'images $u(t, x, y)$ paramétrées par un paramètre extérieur t (le temps ou l'échelle), représentant des versions successives de $u(0, x, y)$. On définit alors une équation d'évolution en u en fonction du temps. L'avantage d'une formulation par EDP est que $u(t, x, y)$ peut être interprété comme une nouvelle image où les structures pour t grand, constituent des simplifications des structures correspondantes pour t petit.

Dans le traitement d'images, l'équation la plus étudiée est sans doute l'équation de la chaleur. De la même façon que, dans un matériau, la chaleur se diffuse de proche en proche et tend à se répartir uniformément au fur et à mesure que le temps s'écoule, on peut imaginer faire diffuser de proche en proche les niveaux de gris dans une image.

L'équation de la chaleur est une EDP parabolique linéaire et s'écrit:

trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x, y) = u_d(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Lien entre l'équation de la chaleur et la restauration d'images

L'image restaurée peut s'écrire comme le produit de convolution de l'image bruitée avec un opérateur de lissage.

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \int_{\Omega} G(t, x - \mu, y - \nu) u_0(\mu, \nu) d\mu d\nu \\ \text{où } G(t, x, y) &= \frac{1}{4\pi t} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Koenderink remarque que si G est un opérateur gaussien de variance $\sigma^2 = 2t$ alors (3.2) peut se mettre sous la forme (3.1) [4], [8].

3.2 Discrétisation du problème (3.1)

Considérons Δx et Δy le pas de discrétisation respectivement par rapport à x et y avec $\Delta x = \Delta y = 1$ et soit Δt le pas temporel. On a:

$$u((n+1)\Delta t, i, j) = u(n\Delta t, i, j) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, i, j) + O(\Delta t^2)$$

ce qui implique:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, i, j) = \frac{u((n+1)\Delta t, i, j) - u(n\Delta t, i, j)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On note: $u_{i,j}^n$ l'approximation de $u(n\Delta t, i, j)$ on a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, i, j) \simeq \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

donc:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)(n\Delta t, i, j) \simeq \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)$$

ce qui nous donne le schéma aux différences finis suivant:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$$

Le problème discret associé est le suivant:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = (1 - 4\Delta t)u_{i,j}^n + \Delta t(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) & 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p \\ u_{i,j}^n = 0 & \text{si } i = 0, i = n + 1, j = 0 \text{ ou } j = p + 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$U^{n+1} = AU^n$$

où

$$A = \begin{pmatrix} B & \Delta t I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta t I_n & B & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B & \Delta t I_n \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta t I_n & B \end{pmatrix} \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} 1 - 4\Delta t & \Delta t & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta t & 1 - 4\Delta t & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 - 4\Delta t & \Delta t \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta t & 1 - 4\Delta t \end{pmatrix}$$

matrice tridiagonale symétrique par bloc matrice tridiagonale symétrique

3.3 Résultats numériques

En utilisant le code "edpchaleur.m" (voir Annexe B) nous obtenons les résultats suivants:

pour $k = 1$



pour $k = 2$

restauration par equation de la chaleur ISNR=-0.31575



pour $k = 5$

restauration par equation de la chaleur ISNR=-3.0255



3.4 Conclusion

La restauration d'images par équation de la chaleur ne prend pas en compte la structure de l'image et engendre une disparition des contours et rend l'image de plus en plus floue.

Afin de préserver les contours la diffusion non linéaire a été introduite par Perona et Malik [4], [7]. L'idée première est de rendre la diffusion dépendante du contenu de l'image et en particulier des contours (la diffusion se réduit dans les zones à fort gradient).

En ce qui nous concerne, Afin de pallier au problème de lissage des contours obtenus par les méthodes étudiées précédemment, nous allons introduire dans le chapitre suivant la restauration d'images par variation totale.

Chapitre 4

Restauration d'images par variation totale

La restauration d'images par régularisation de Tychonov ainsi que par EDP de la chaleur introduisent une image "bruitée" trop lissée (en particulier, les bords sont érodés). Afin d'éviter ces lissages, une approche plus efficace proposée par Rudin-Osher et Fatemi en 1992 [8] consiste à minimiser la variation totale.

Cela conduit à une minimisation de fonctionnelles dans un espace de Banach particulier, mais bien adapté à notre problème c'est l'espace des fonctions à variation bornée que nous commençons par présenter.

4.1 Fonctions à variation bornée

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Lipschitz et $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions C^1 à support compact dans Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n .

4.1.1 Définition

Une fonction f de $L^1(\Omega)$ (à valeurs dans \mathbb{R}) est à variation bornée dans Ω si $J(f) < +\infty$ où

$$J(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) \, dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\}$$

on note:

$$BV(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega) \mid J(f) < +\infty\}.$$
 l'espace de telles fonctions.

4.1.2 Exemples:

Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ alors $\operatorname{div} \varphi(x) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x)$, en supposant $f \in C^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ après intégration par parties on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \varphi_1(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \varphi_2(x) \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \varphi(x) dx \end{aligned}$$

où \cdot désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^2 .

Si $\Omega = [0,1]$ les fonctions constantes par morceaux sont à variation bornée, et $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}$ avec $x_i \in \mathbb{R} \ i = 1 \dots n$, soit $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \varphi'(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x_i \varphi'(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi'(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\varphi\left(\frac{i}{n}\right) - \varphi\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{n}\right)(x_1 - x_2) + \varphi\left(\frac{2}{n}\right)(x_2 - x_3) + \dots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)(x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

alors:

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

4.1.3 Propriétés structurelles des fonctions BV

Théorème1:

Soit $f \in BV(\Omega)$ alors il existe une mesure de Radon positive μ sur Ω et une fonction μ -mesurable $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

- i. $|\sigma(x)| = 1$ μ -p.p
- ii. $\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) \sigma(x) d\mu$ pour toute fonction $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

La relation ii. est une formulation d'intégration par parties *faible*. Ce théorème indique que la dérivée faible (au sens des distributions) d'une fonction BV est une mesure de Radon.

Rappelons qu'une mesure de Radon est une mesure finie sur tout compact et que grâce au théorème de Riesz, toute forme \mathcal{L} linéaire continue sur $C_c^0(\Omega)$ (fonctions continues à support compact) est de la forme $\mathcal{L}(u) = \int_{\Omega} f(x) d\mu$, où μ est l'unique mesure de Radon associée à \mathcal{L} . Plus précisément

Théorème2: (Théorème de Riesz)

A toute forme linéaire bornée Φ sur $C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, c'est à dire:

$$\forall K \text{ compact de } \Omega \sup\{\Phi(\varphi) \mid \varphi \in C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega\} < +\infty$$

il correspond une unique mesure de radon positive μ sur Ω et une fonction μ - mesurable σ telle que:

- i. $|\sigma(x)| = 1$, μ p.p
- ii. $\phi(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \sigma(x) d\mu$ pour toute fonction $\varphi \in C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
- iii. De plus μ est la mesure de variation et vérifie

$$\mu(\Omega) = \sup\{\phi(\varphi) \mid \varphi \in C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega\}$$

Démonstration du théorème1:

Soit $f \in BV(\Omega)$. On considère la forme linéaire \mathcal{L} définie sur $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ par:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx.$$

comme $f \in BV(\Omega)$,

$$\sup\{\mathcal{L}(\varphi) \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\} = C_{\mathcal{L}} < +\infty \text{ pour toute fonction } \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

par conséquent

$$\forall \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \mathcal{L}(\varphi) \leq C_{\mathcal{L}} \|\varphi\|_{\infty}$$

Soit K un compact de Ω . Pour toute fonction $\varphi \in C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ à support compact dans K , on peut trouver (par densité) une suite de fonctions $\varphi_k \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ qui converge uniformément vers φ .

Posons alors $\bar{\mathcal{L}}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\varphi_k)$. grâce à $\forall \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \mathcal{L}(\varphi) \leq C_{\mathcal{L}} \|\varphi\|_{\infty}$ cette limite existe et elle est indépendante de la suite (φ_k) choisie. On peut donc ainsi étendre \mathcal{L} par densité en une forme linéaire $\bar{\mathcal{L}}$ sur $C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\sup\{\mathcal{L}(\varphi) \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \text{supp}\varphi \subset K\} < +\infty.$$

On conclut grâce au théorème 2 (théorème de Riesz) ii. du théorème 1

On a:

$$J(f) = \mu(\Omega) \geq 0 : \text{La variation totale de } f.$$

Théorème 3: (Semi- continuité inférieure de la variation totale)

L'application $f \mapsto J(f)$ de $BV(\Omega)$ dans \mathbb{R}^+ est semi-continue inférieurement (sci) pour la topologie séquentielle de $L^1(\Omega)$.

Plus précisément, si (f_k) est une suite de fonctions de $BV(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^1(\Omega)$ alors

$$J(f) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(f_k)$$

Démonstration:

Soit $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$. Alors

$$\int_{\Omega} f(x) \text{div}\varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k(x) \text{div}\varphi(x) dx$$

donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists k(\varphi, \varepsilon)$ tel que

$$\int_{\Omega} f(x) \text{div}\varphi(x) dx - \varepsilon \leq \int_{\Omega} f_k(x) \text{div}\varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) \text{div}\varphi(x) dx + \varepsilon$$

comme

$$\int_{\Omega} f_k(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \leq J(f_k)$$

il vient

$$\forall k \geq k(\varphi, \varepsilon) \quad \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx - \varepsilon \leq J(f_k)$$

donc

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(f_k)$$

4.1.4 Etude de l'espace BV

Proposition 1:

L'application

$$BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f \mapsto \|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + J(f) \text{ est une norme}$$

Démonstration:

Il faut vérifier les trois propriétés de la norme

i. Séparation: Montrons l'équivalence suivante:

$$f = 0 \iff \|f\|_{BV(\Omega)} = 0$$

$$f = 0 \implies \|f\|_{BV(\Omega)} = 0 \text{ évident}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{BV(\Omega)} = 0 &\implies \|f\|_{L^1(\Omega)} + J(f) = 0 \\ &\implies \|f\|_{L^1(\Omega)} = -J(f) \end{aligned}$$

or

$$J(f) \geq 0 \text{ donc } f = 0$$

ii. Homogénéité: Montrons que: $\|\lambda f\|_{BV(\Omega)} = |\lambda| \|f\|_{BV(\Omega)}$

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{BV(\Omega)} &= \|\lambda f\|_{L^1(\Omega)} + J(\lambda f) \\ &= |\lambda| \|f\|_{L^1(\Omega)} + J(\lambda f)\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}J(\lambda f) &= \sup\left\{\int_{\Omega} \lambda f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &= |\lambda| \sup\left\{\int_{\Omega} \operatorname{sign}(\lambda) f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &= |\lambda| \sup\left\{\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \psi(x) dx \mid \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\psi\|_{\infty} \leq 1\right\} \text{ avec } \psi = \varphi \operatorname{sign}(\lambda)\end{aligned}$$

donc

$$\|\lambda f\|_{BV(\Omega)} = |\lambda| \|f\|_{BV(\Omega)}$$

iii. Sous-additivité (inégalité triangulaire):

Montrons que: $\|f + g\|_{BV(\Omega)} \leq \|f\|_{BV(\Omega)} + \|g\|_{BV(\Omega)}$

$$\|f + g\|_{BV(\Omega)} = \|f + g\|_{L^1(\Omega)} + J(f + g)$$

on a

$$\|f + g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned}J(f + g) &= \sup\left\{\int_{\Omega} (f + g)(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &\quad + \sup\left\{\int_{\Omega} g(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &= J(f) + J(g)\end{aligned}$$

donc

$$\|f + g\|_{BV(\Omega)} \leq \|f\|_{BV(\Omega)} + \|g\|_{BV(\Omega)}$$

Proposition2:

Toute fonction de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est à variation bornée, en effet, Supposons que

$$f \in W^{1,1}(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega), Df \in L^1(\Omega)\};$$

où Df est la dérivée au sens des distributions. Soit $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.

Alors:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} Df(x) \cdot \varphi(x) dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\Omega} |Df| dx \\ &\leq \|Df\|_{L^1(\Omega)} < +\infty \end{aligned}$$

donc $f \in BV(\Omega)$. De plus

$$J(f) = \sup\left\{- \int_{\Omega} Df(x) \cdot \varphi(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\} = \|Df\|_{L^1(\Omega)}$$

et

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{Df}{|Df|}(x) & \text{si } Df \neq 0 \\ 0 & \text{si } Df = 0 \end{cases}$$

et comme Ω est borné

$$\forall 1 \leq p \leq +\infty \quad W^{1,p}(\Omega) \subset BV(\Omega)$$

Théorème4:

L'espace $BV(\Omega)$ muni de la norme $\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + J(f)$ est un espace de Banach.

Démonstration:

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $BV(\Omega)$. C'est donc une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega)$: elle converge vers $f \in L^1(\Omega)$. D'autre part, elle est bornée dans $BV(\Omega)$ (toute suite de Cauchy

est bornée), donc

$$\exists M > 0, \forall n J(f_n) \leq M$$

d'après le théorème 3, on a:

$$J(f) \leq \liminf_n J(f_n) \leq M < +\infty$$

par conséquent $f \in BV(\Omega)$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que

$$\forall n, k \geq N \quad \|f_n - f_k\|_{BV(\Omega)} \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall n, k \geq N \quad J(f_n - f_k) \leq \varepsilon$$

et avec la semi-continuité de J en fixant n on obtient

$$\forall n \geq N \quad J(f_n - f) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(f_n - f_k) \leq \varepsilon$$

ceci prouve que

$$J(f_n - f) \rightarrow 0.$$

4.1.5 Décomposition de la variation totale

D'après le théorème de Radon-Nikodym de décomposition des mesures, pour toute fonction $f \in BV(\Omega)$, nous avons la décomposition suivante de Df (dérivée de f au sens des distributions):

$$Df = \nabla f dx + D^s f$$

où $\nabla f dx$ est la partie absolument continue de Df par rapport à la mesure de Lebesgue et $D^s f$ est la partie singulière.

Exemple:

Soit la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

alors $\int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x)dx = -2\varphi(0)$ et $J(f) = 2$, On peut remarquer que Df , la dérivée de f au sens des distributions, est égale à $2\delta_0$ où δ_0 est la mesure de Dirac au point 0. Donc nous avons

$$Df = 0dx + 2\delta_0.$$

4.1.6 Approximation-Compacité**Théorème5: (Approximation régulière)**

Pour toute fonction $f \in BV(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ telle que:

- i. $f_k \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$
- ii. $J(f_k) \longrightarrow J(f)$ dans \mathbb{R} .

Remarquons que le résultat ci-dessus n'est pas un résultat de densité de $BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dans $BV(\Omega)$ car on n'a pas $J(f_k - f) \longrightarrow 0$.

Théorème6: (Compacité)

L'espace $BV(\Omega)$ s'injecte dans $L^1(\Omega)$ de manière compacte. Plus précisément: Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $BV(\Omega)$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{BV(\Omega)} < +\infty$$

alors, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et une fonction $f \in BV(\Omega)$ telle que f_{n_k} converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$.

4.2 Le modèle de Rudin-Osher et Fatemi

Le modèle de Rudin-Osher et Fatemi consiste à décomposer l'image observée (donnée) en deux parties: $u_d = u + v$ où v est le bruit et u est la partie régulière. Donc on va chercher la solution du problème sous forme $u + v$ avec $u \in BV(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$ et ne faire porter la régularisation que sur la partie bruit. Ce qui nous conduit à chercher la solution du problème suivant:

$$\min\{J(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \|v\|_2^2 \mid u \in BV(\Omega), v \in L^2(\Omega), u_d = u + v\} \quad (4.1)$$

où $J(u)$ désigne la variation totale de u et $\varepsilon > 0$.

4.2.1 Théorème

Le problème (4.1) admet une solution unique.

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in BV(\Omega)$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ deux suites minimisantes telle que $u_n + v_n$ minimise (4.1). Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ on peut en extraire une sous-suite (notée de la même façon) faiblement convergente vers $v^* \in L^2(\Omega)$. Comme la norme de $L^2(\Omega)$ est convexe, sci, il vient

$$\|v^*\|_2^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_2^2.$$

De la même façon $u_n = u_d - v_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc dans $L^1(\Omega)$ puisque Ω est borné. Comme $J(u_n)$ est bornée, il s'ensuit que u_n est bornée dans $BV(\Omega)$. Grâce au résultat de compacité du théorème6 (dans la partie fonctions à variation bornée), u_n converge (à une sous-suite près) fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $u^* \in BV(\Omega)$. D'autre part

J est sci (théorème3 partie fonctions à variation bornée), donc

$$J(u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n)$$

par conséquent

$$J(u^*) + \frac{1}{2\varepsilon} \|v^*\|_2^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) + \frac{1}{2\varepsilon} \|v_n\|_2^2 = \inf(4.1)$$

Comme $u_n + v_n = u_d$ pour tout n , on a $u^* + v^* = u_d$. Par conséquent u^* est une solution du problème (4.1). Et puisque la fonctionnelle est strictement convexe par rapport au couple (u, v) et la contrainte est affine, alors la solution est unique.

Introduisons maintenant des conditions d'optimalités pour le calcul de la solution du modèle proposé. Toutefois les fonctionnelles considérées (en particulier J) ne sont pas en général Gâteaux-différentiable, nous utilisons des notions d'analyse non lisse.

4.2.2 Condition d'optimalité

Le problème (4.1) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} F(u) = J(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \|u - u_d\|_2^2 \quad (4.2)$$

La fonctionnelle $F(u)$ est convexe et en utilisant la remarque1 (voir Annexe A) on a:

$$\bar{u} \text{ solution de (4.2)} \iff 0 \in \partial F(\bar{u})$$

Utilisant la relation du corollaire1 (voir Annexe A)

$$0 \in \partial F(\bar{u}) \iff \bar{u} \in \partial F^*(0)$$

Mais cette relation n'est vraie que si l'espace est réflexif, ce n'est pas le cas de l'espace $BV(\Omega)$. Toutefois ce sera vrai après discrétisation. Utilisant le théorème3 (voir Annexe A) pour calculer $\partial F(u)$. L'application $u \mapsto \|u - u_d\|_2^2$ est continue sur $L^2(\Omega)$ et Gâteaux-différentiable et J est finie sur $BV(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le calcul du sous-différentiel peut se faire via la transformation de Fenchel dans le cas où l'espace est réflexif (voir Annexe A).

4.3 Discrétisation du problème (4.2)

Considérons maintenant des images discrètes. Une image discrète est une matrice de dimension $N \times N$ que nous pouvons l'identifier à un vecteur de taille N^2 (par exemple en la rangeant ligne par ligne). On note X l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N \times N}$ et $Y = X \times X$. On munit X du produit scalaire

usuel

$$(u, v)_X = \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_{i,j} v_{i,j},$$

et de la norme

$$\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X}$$

Nous allons donner une formulation discrète du problème (4.2), en particulier définir la variation totale discrète. Pour cela introduisons d'abord une version discrète de l'opérateur gradient. Si $u \in X$, le gradient ∇u est un vecteur de Y donné par

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2),$$

avec

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases}$$

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j-1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases}$$

La variation totale discrète est donnée par

$$J(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla u)_{i,j}|,$$

$$\text{où } |(\nabla u)_{i,j}| = \sqrt{|(\nabla u)_{i,j}^1|^2 + |(\nabla u)_{i,j}^2|^2}.$$

Introduisons maintenant la version discrète de l'opérateur de divergence. On le définit par analogie avec le cadre continu en posant

$$\text{div} = -\nabla^*$$

où ∇^* est l'opérateur adjoint de ∇ , c'est à dire:

$$\forall p \in Y, \forall u \in X \quad (-\text{div } p, u)_X = (p, \nabla u)_Y = (p^1, \nabla^1 u)_X + (p^2, \nabla^2 u)_X$$

et de plus on a :

$$(\operatorname{div} p)_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{si } 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & \text{si } i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{si } i = N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{si } 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & \text{si } j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{si } j = N \end{cases}$$

Nous utilisons aussi une version discrète du Laplacien définie par :

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$$

Nous remplaçons le problème (4.2) par le problème discret suivant :

$$\min_{u \in X} J(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \|u - u_d\|_X^2 \quad (4.3)$$

Cherchons la solution unique du problème (4.3). Rappelons que $|g_{i,j}| = \sqrt{(g_{i,j}^1)^2 + (g_{i,j}^2)^2}$ et que la version discrète de la variation totale est donnée par (de manière analogue au cas continu) par

$$J(u) = \sup_{\xi \in K} \langle u, \xi \rangle$$

où

$$K := \{\xi = \operatorname{div}(g) \mid g \in Y, |g_{i,j}| \leq 1, \forall i, j\}$$

est la version discrète de

$$\{\xi = \operatorname{div} \varphi \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$$

Donnons tout d'abord une caractérisation de la conjuguée de Fenchel de la variation totale J .

4.3.1 Théorème

La transformée de Fenchel J^* de la fonctionnelle J approchée définie sur X est l'indicatrice de l'ensemble \bar{K} , où

$$K = \{\xi = \operatorname{div}(g) \mid g \in Y, |g_{i,j}| \leq 1, \forall i, j\}.$$

Démonstration:

Comme J est positivement homogène ($J(\lambda u) = \lambda J(u)$, $\lambda > 0$) la conjuguée J^* de J est l'indicatrice d'un ensemble convexe fermé \tilde{K} d'après la proposition 1 (voir Annexe A)

Montrons que $K \subset \tilde{K}$: soit $u \in K$. Par définition de J

$$J(u) = \sup_{\xi \in K} \langle u, \xi \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $BV(\Omega)$ et son dual. Par conséquent $\langle \xi, u \rangle - J(u) \leq 0$ pour tous $\xi \in K$ et $u \in BV(\Omega)$. On déduit donc pour tout $u^* \in K$

$$J^*(u^*) = \sup_{u \in K} \{ \langle u^*, u \rangle - J(u) \} \leq 0$$

Comme J^* ne prend qu'une seule valeur finie on a $J^*(u^*) = 0$, et donc $u^* \in \tilde{K}$. Par conséquent $K \subset \tilde{K}$ et comme \tilde{K} est fermé:

$$\bar{K} \subset \tilde{K}$$

En particulier

$$J(u) = \sup_{\xi \in K} \langle u, \xi \rangle \leq \sup_{\xi \in \tilde{K}} \langle u, \xi \rangle \leq \sup_{\xi \in \bar{K}} \langle u, \xi \rangle = \sup_{\xi \in \tilde{K}} \langle u, \xi \rangle - J^*(u^*) = J^{**}(u^*)$$

Comme $J^{**} = J$, il vient

$$J(u) = \sup_{\xi \in K} \langle u, \xi \rangle \leq \sup_{\xi \in \tilde{K}} \langle u, \xi \rangle \leq \sup_{\xi \in \bar{K}} \langle u, \xi \rangle = J(u)$$

et donc

$$\sup_{\xi \in K} \langle u, \xi \rangle = \sup_{\xi \in \tilde{K}} \langle u, \xi \rangle = \sup_{\xi \in \bar{K}} \langle u, \xi \rangle \tag{4.4}$$

Supposons maintenant qu'il existe $u^* \in \tilde{K}$ tel que $u^* \notin \bar{K}$. On peut alors séparer strictement u^* et le convexe fermé \bar{K} . Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et u_0 tels que

$$\langle u_0, u^* \rangle > \alpha \geq \sup_{v \in \bar{K}} \langle u_0, v \rangle$$

D'après (4.4) il vient

$$\sup_{\xi \in \tilde{K}} \langle u_0, \xi \rangle \geq \langle u_0, u^* \rangle > \alpha \geq \sup_{v \in \bar{K}} \langle u_0, v \rangle = \sup_{v \in \tilde{K}} \langle u_0, v \rangle.$$

On a donc une contradiction, donc

$$\tilde{K} = \bar{K}.$$

4.3.2 Algorithme de projection de Chambolle

Le résultat suivant donne la caractérisation attendue de la solution:

Théorème 1:

La solution de (4.3) est donnée par

$$u = u_d - P_{\varepsilon K}(u_d),$$

où P_K est le projecteur orthogonal sur K .

Démonstration:

D'après la définition du sous-différentiel (voir Annexe A), u est une solution de (4.3) est équivalent à

$$0 \in \partial(J(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \|u - u_d\|_X^2) = \frac{u - u_d}{\varepsilon} + \partial J(u).$$

Comme J est convexe, sci, propre on peut appliquer le corollaire 1 (voir Annexe A). Donc

$$\frac{u_d - u}{\varepsilon} \in \partial J(u) \iff u \in \partial J^*\left(\frac{u_d - u}{\varepsilon}\right) \iff 0 \in -u + \partial J^*\left(\frac{u_d - u}{\varepsilon}\right).$$

Ceci est équivalent à:

$$0 \in \frac{u_d - u}{\varepsilon} - \frac{u_d}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \partial J^*\left(\frac{u_d - u}{\varepsilon}\right).$$

On en déduit que $\omega = \frac{u_d - u}{\varepsilon}$ est un minimiseur de

$$\frac{\|\omega - \frac{u_d}{\varepsilon}\|^2}{2} + \frac{1}{\varepsilon} J^*(\omega).$$

Comme J^* est l'indicatrice de K , cela implique que $\frac{u_d - u}{\varepsilon}$ est la projection orthogonal de $\frac{u_d}{\varepsilon}$ sur K . Comme $P_K(\frac{u_d}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon} P_{\varepsilon K}(u_d)$, on peut conclure.

Maintenant tout revient à calculer

$$P_{\varepsilon K}(u_d) = \arg \min \{ \|\varepsilon \operatorname{div} p - u_d\|_X^2 \mid p_{i,j} \leq 1, i, j = 1, \dots, N \}.$$

On peut le résoudre par une méthode du point fixe semi-implicite:

$$p^0 = 0, \quad \rho > 0, \quad p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \rho (\nabla(\operatorname{div} p^n - \frac{u_d}{\varepsilon}))_{i,j}}{1 + \rho |(\nabla(\operatorname{div} p^n - \frac{u_d}{\varepsilon}))_{i,j}|}. \quad (4.5)$$

Chambolle a démontré le théorème de convergence suivant:

Théorème2: [1], [4], [9]

Si le paramètre ρ dans (4.5) vérifie $\rho \leq 1/8$, alors

$$\varepsilon \operatorname{div} p^n \longrightarrow P_{\varepsilon K}(u_d).$$

La solution du problème est donnée par

$$u = u_d - \varepsilon \operatorname{div} p^\infty \quad \text{où } p^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n.$$

4.4 Résultats numériques

En utilisant le code "chambolle.m" (voir Annexe B) nous obtenons les résultats suivants:

pour epsilon=10

rho=0.1

Restauration par algorithme de Chambolle ISNR=6.2938



epsilon=10

pour epsilon=30

rho=0.1

Restauration par algorithme de Chambolle ISNR=4.6218



epsilon=30

4.5 Conclusion

Nous avons donné un aperçu de différentes techniques de restauration d'images. D'après les résultats obtenus, le modèle de Rudin-Osher et Fatemi est le meilleur parmi les alternatives que nous avons étudiées. On a choisi l'algorithme de Chambolle pour la résolution numérique, c'est un algorithme rapide et simple à implémenter.

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à quelques méthodes pour la restauration d'images bruitée. La méthode de Tychonov élimine le bruit mais introduit le flou. La restauration par l'EDP de la chaleur ne prend pas en compte la structure de l'image et engendre une disparition des contours, cette méthode rend l'image de plus en plus floue. Le modèle de Rudin-Osher et Fatemi a été largement étudié c'est une méthode simple et efficace, Nous avons choisi l'algorithme de Chambolle pour la résolution numérique mais il existe d'autres algorithmes pour ce modèle de restauration.

Nous avons tout au long de ce travail essayé de présenter les bases théoriques et l'implémentation numérique de ces différentes méthodes.

Il serait intéressant de développer les méthodes étudiées pour un opérateur de flou différent de l'identité.

Aussi, il faut signaler que, vu l'importance du problème de restauration et ses diverses applications (médicale, télédétection,...) de nombreuses autres directions ont été empreintées dans le chemin du débruitage nous citons les ondelettes, l'approche stochastique, l'espace de Meyer pour les fonctions oscillantes,...

Une étude de comparatives de ces nombreuses méthodes semble indiquée.

Chapitre 5

Annexes

5.1 Annexe A: Quelques notions d'optimisation convexe

Soit V un espace de Banach réflexif et V' son dual topologique.

5.1.1 Définitions

- Une fonctionnelle J de V dans \mathbb{R} est convexe si: $\forall u, v \in V, \forall \theta \in [0, 1]$

$$J((1 - \theta)u + \theta v) \leq (1 - \theta)J(u) + \theta J(v).$$

- J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte $\forall \theta \in]0, 1[$.
- $U \subset V$ est convexe si $\forall u, v \in U$ et $\theta \in]0, 1[$ $\theta u + (1 - \theta)v \in U$.
- Une fonctionnelle J de V dans \mathbb{R} est semi-continue inférieurement (sci) en u si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \vartheta(u) \text{ tel que } J(v) \geq J(u) - \varepsilon \forall v \in \vartheta(u) \iff J(u) \leq \liminf_{v \rightarrow u} J(v).$$

- On appelle épigraphe de J le sous ensemble $V \times \mathbb{R}$ défini par:

$$epi(J) = \{(u, \alpha) \in V \times \mathbb{R} | J(u) \leq \alpha\}$$

$$(u, \alpha) \in epi(J) \iff u \in S_\alpha = \{v \in V | J(v) \leq \alpha\}$$

J semi-continue inférieurement $\iff epi(J)$ est fermé dans $V \times \mathbb{R}$.

J convexe $\iff epi(J)$ convexe.

J convexe $\implies S_\alpha$ convexe (ou éventuellement vide).

• Une fonctionnelle définie sur un espace normé V est dite coercive si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5.1.2 La Gâteaux différentiabilité

Définition:

Soit J une fonctionnelle de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que J est Gâteaux-différentiable en $u \in dom J$ si la dérivée directionnelle

$$J'(u; v) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} (J(u + \theta v) - J(u)),$$

existe dans toute direction $v \in V$ et si l'application $v \rightarrow J'(u; v)$ est linéaire continue. En général, on notera $\nabla J(u)$ la Gâteaux-différentielle de J en u . C'est un élément du dual V' .

Si V est un espace de Hilbert, avec le théorème de représentation de Riesz on identifie V à son dual; on note alors

$$J'(u; v) = \langle \nabla J(u), v \rangle$$

Théorème 1:

Si la G-différentielle $A'(u, \varphi)$ existe $\forall \varphi \in V$ et pour tout u appartenant à un voisinage $\vartheta(u_0)$ de u_0 . Si $u \in \vartheta(u_0)$ l'opérateur $\varphi \rightarrow A'(u, \varphi)$ est linéaire et continu, si $\forall \varphi \in V$ l'opérateur $\varphi \rightarrow A'(u, \varphi)$ est continu de $\vartheta(u_0)$ dans H , alors A est de classe C^1 .

5.1.3 Le sous différentiel

Définition:

Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $u \in \text{dom}f$ (i.e. $f(u) < +\infty$). Le sous différentiel de J en u est l'ensemble $\partial f(u)$ (éventuellement vide) des $u^* \in V'$ tels que:

$$\forall v \in V \quad f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle .$$

Les éléments u^* sont appelés sous-gradients.

Remarque1:

$f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ atteint son minimum en $u \in \text{dom}f$ si et seulement si $0 \in \partial f(u)$.

Remarque2:

Pour tout $\lambda > 0$ on a:

$$\partial f(\lambda u) = \lambda \partial f(u).$$

Lien avec la Gâteaux-différentiabilité

Théorème2: Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, si f est Gâteaux-différentiable en $u \in \text{dom}f$, elle est sous-différentiable et

$$\partial f(u) = \{f'(u)\}.$$

Réciproquement, si f est finie, continue en u et ne possède qu'un seul sous-gradient, alors f est Gâteaux-différentiable en u et

$$\partial f(u) = \{f'(u)\}.$$

Sous différentiel d'une somme de fonctions

Théorème3: Soient f, g deux fonctions convexes, sci à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose qu'il existe $u_0 \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$ tel que f soit continue en u_0 . Alors

$$\forall u \in V \quad \partial(f + g)(u) = \partial f(u) + \partial g(u).$$

5.1.4 La transformation de Legendre-Fenchel

Définition1:

Soit $f : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. La transformée de Legendre-fenchel ou la conjuguée de f est la fonction $f^* : V' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ définie par:

$$\forall u^* \in V' \quad f^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{\langle u^*, u \rangle - f(u)\}.$$

Définition2:

Soit $A \subset V$ un ensemble non vide. La fonction d'appui de l'ensemble A est la fonction $\sigma_A : V' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par $\sigma_A = (1_A)^*$ où 1_A désigne la fonction indicatrice de A

$$1_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus généralement,

Proposition1 :

Soit f une fonction positivement homogène (propre) de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sa conjuguée f^* est la fonction indicatrice d'un sous ensemble K convexe et fermé de V' .

Théorème4:

Soit f une fonction propre, convexe et sci de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $f^{**} = f$.

Lien avec le sous différentiel

Théorème5: Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f^* sa conjuguée, alors

$$u^* \in \partial f(u) \iff f(u) + f^*(u) = \langle u^*, u \rangle .$$

Corollaire1: Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe, propre et sci, alors

$$u^* \in \partial f(u) \iff u \in \partial f^*(u^*)$$

5.2 Annexe B: Codes Matlab

%tychonov.m

```
% Restauration par la méthode de tychonov
close all,clear all
alpha=input('introduire la valeur de alpha');
I=imread('cameraman.tif');
I=double(I);
stn_n=20; %ecart standard du bruit gaussien
In=randn(size(I))*stn_n;imshow(In)
%bruit blanc gaussien
Ib=I+In;%image bruitée
figure(1);imshow(uint8(I)),title('image originale')
figure(2);imshow(uint8(Ib)),title('image bruitée')
[n,p]=size(I);
% construction de la matrice tridiagonale approchant la dérivée seconde
% par différences centrées de dimension 1
e=ones(n,1);
a=spdiags([-alpha*e,0.5*(4*alpha+1)*e,-alpha*e],-1:1,n,n);
% approximation du laplacien
l=speye(n,n);
```

```

A1=kron(1,a);
A2=kron(a,1);
A=A1+A2;
v=Ib(1:n*p);
r=chol(A);
u=r\'\'(r\'\'v');
for k=1:p
U(1:n,k)=u((k-1)*n+1:(k-1)*n+n);
end
figure(3);imshow(uint8(U))
title(['Image restaurée par tychonov avec alpha=',num2str(alpha)])

```

%tychonovparam.m

```

% restauration par la méthode de tychonov
% Analyse de l'ISNR en fonction du paramètre de régularisation
close all,clear all
I=imread('cameraman.tif');
I=double(I);
stn_n=20; %ecart standard du bruit gaussien
In=randn(size(I))*stn_n;imshow(In)
%bruit blanc gaussien
Ib=I+In;%image bruitée
[n,p]=size(I);
% construction de la matrice tridiagonale approchant la dérivée seconde
% par différences centrées de dimension 1
e=ones(n,1);
for i=1:100
alpha=0.01*i;
a=spdiags([-alpha*e,0.5*(4*alpha+1)*e,-alpha*e],-1:1,n,n);
% approximation du laplacien

```

```

l=speye(n,n);
A1=kron(l,a);
A2=kron(a,l);
A=A1+A2;
v=Ib(1:n*p);
r=chol(A);
u=r\(r\'v');
for k=1:p
U(1:n,k)=u((k-1)*n+1:(k-1)*n+n);
end
ISNR(i)=10*log10(norm(Ib-I,'fro')^2/norm(U-I,'fro')^2);
end
plot(0.01*[1:100],ISNR)
title('l' ISNR en fonction du paramètre de régularisation alpha')
xlabel('alpha')
ylabel('ISNR')

```

%edpchaleur.m

```

% restauration par l'EDP de la chaleur
close all,clear all
t=input('introduire le nombre d'itérations');
I=imread('cameraman.tif');
I=double(I);
stn_n=20; %ecart standard du bruit gaussien
In=randn(size(I))*stn_n;imshow(In)
%bruit blanc gaussien
Ib=I+In;%image bruitée
figure(1);imshow(uint8(I)),title('image originale')
figure(2);imshow(uint8(Ib)),title('image bruitée')
[n,p]=size(I);

```

```

% construction de la matrice de discrétisation
% prise en compte des conditions de Dirichelet aux bords
e=ones(n,1);
a=spdiags([-e,0.5*5*e,-e],-1:1,n,n);
l=speye(n,n);
A1=kron(l,a);
A2=kron(a,l);
A=A1+A2;
v=Ib(1:n*p)';
[r,s]=lu(A);
% Résolution de l'équation t fois
for k=1:t
u=s\(r\v);
v=u;
end
% Représentation de l'image
for k=1:p
U(1:n,k)=u((k-1)*n+1:(k-1)*n+n);
end
ISNR=10*log10(norm(Ib-I,'fro')^2/norm(U-I,'fro')^2);
figure(3);imshow(uint8(U))
title(['restauration par equation de la chaleur ISNR=',num2str(ISNR)])

```

%chambolle.m

```

% Restauration par variation totale
% Algorithme de Chambolle
close all, clear all
epsilon=input('donner la valeur de epsilon')
rho=input('donner un rho<=0.125')
I=imread('cameraman.tif');

```

```

I=double(I);
stn_n=20; %ecart standard du bruit gaussien
In=randn(size(I))*stn_n;imshow(In)
%bruit blanc gaussien
Ib=I+In;%image bruitée
figure(1);imshow(uint8(I)),title('image originale')
figure(2);imshow(uint8(Ib)),title('image bruitée')
[n,p]=size(I);
%projection
rho=0.1;
p01=zeros(n);
p02=zeros(n);
u=Ib/epsilon;k=0;tol=1e-5;err=1;
while (err>tol)&(k<500)
d=div(p01,p02);
du=d-u;
[g1,g2]=grad(du);
for i=1:n
for j=1:n
G=1+rho*sqrt(g1(i,j)^2+g2(i,j)^2);
p1(i,j)=(p01(i,j)+rho*g1(i,j))/G;
p2(i,j)=(p02(i,j)+rho*g2(i,j))/G;
end
end
err=norm(p1-p01)+norm(p2-p02);
p01=p1;
p02=p2;
k=k+1;
end
% Calcul de la solution

```

```

proj=div(p01,p02);
U=Ib-epsilon*proj;
% Résultat graphique
ISNR=10*log10(norm(Ib-I,'fro')^2/norm(U-I,'fro')^2);
figure(3);imshow(uint8(U))
title(['Restauration par algorithme de Chambolle ISNR=',num2str(ISNR)])
gtext(['epsilon=',num2str(epsilon)])

```

Où les fonctions grad et div utilisés précédemment sont programmés de la manière suivante:

La fonction div

```

function v=div(p1,p2)
n=size(p1,1);
for i=2:n-1
div1(i,:)=p1(i,:)-p1(i-1,:);
div2(:,i)=p2(:,i)-p2(:,i-1);
end
div1(1,:)=p1(1,:);
div1(n,:)=p1(n-1,:);
div2(:,1)=p2(:,1);
div2(:,n)=p2(:,n-1);
v=div1+div2;

```

La fonction grad

```

function [v1,v2]=grad(u)
n=length(u);
v1=zeros(n);
v2=zeros(n);
for i=1:n-1
v1(i,:)=u(i+1,:)-u(i,:);
v2(:,i)=u(:,i+1)-u(:,i);
end

```

Références

- [1] A.Chambolle, **An algorithm for total variation minimization and applications**, Journal of mathematical imaging and vision 2004.
- [2] D. Euvrard, **Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur**, Masson, 1997.
- [3] E.Lunéville, **Discrétisation par différences finies du Laplacien**, MA261 Introduction au calcul scientifique, Août 2007.
- [4] G.Aubert et P.Kornprobst, **Mathematical Problems in image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations**, Edition Springer 2006.
- [5] H.Bresis, **Analyse Fonctionnelle (Théorie et applications)** Edition MAsson-Paris 1983.
- [6] H.Florent, **Techniques de débruitage d'images**, 23 Janvier 2008 <http://humbertflorent.developpez.com/algorithmique/traitement/debruitage/>
- [7] J-F.Aujol, **Traitement d'images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles**, Semestre d'enseignement UNESCO sur le traitement des images numériques TUNIS, ENIT du 11 au 16 Avril 2005.
- [8] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, **Nonlinear total variation based noise removal algorithms**, Physica D,60, 259-268, 1992.
- [9] M.Bergounioux, **Quelques méthodes mathématiques pour le traitement d'image**, Master2 2008-2009 <http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/97/751pdf/coursimage09.pdf>.
- [10] P.Favavro, **Introduction to inverse problems**, B39SI2 Digital signal processingII
- [11] P.Destuynder, **Analyse et traitement des images numériques**, Edition Lavoisier 2006.

[12] S.Imakhlef, **Cours sur l'espace des fonctions à variation bornée**, Université Abou-Bakr-Belkaid Tlemcen 2009-2010