

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Processus stochastiques stationnaires du second ordre</b>	<b>7</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	7
1.2 Covariance d'un processus stationnaire . . . . .	9
1.3 Continuité des trajectoires . . . . .	11
1.4 Représentation spectrale de processus stationnaires . . . . .	13
<b>2 Séries de Fourier d'un Processus faiblement stationnaire</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 Comportement asymptotique des covariances des coefficients de Fourier . . . . .	18
2.3 Comportement asymptotique des coefficients de Fourier . . . . .	55
2.4 Modes de convergence de la série de Fourier du processus . . . . .	65
2.4.1 Convergence en moyenne quadratique . . . . .	65
2.4.2 Convergence absolue presque-sûre . . . . .	68
2.4.3 Convergence presque-partout . . . . .	69
2.5 Limite de la loi conjointe des coefficients de Fourier . . . . .	72
<b>3 Série de Fourier d'un Processus Faiblement Stationnaire périodique</b>	<b>83</b>
3.1 Introduction . . . . .	83
3.2 Comportement des coefficients de Fourier . . . . .	84
3.3 Convergence absolue de la série de Fourier . . . . .	91
3.4 Relation de Parseval d'un Processus faiblement stationnaire . . . . .	93

3.5	Séries de Fourier approximantes . . . . .	97
	<b>Annexe</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Remerciements

Cette thèse expose les résultats d'un travail élaboré dans une ambiance à la fois sereine et professionnelle. On dit de cette expérience qu'elle est la plus difficile et la plus risquée de toute une vie. C'est certes vrai mais c'est aussi l'expérience la plus enrichissante et la plus sûre pour le restant d'une vie.

Ce travail n'aurait pu être accompli sans l'aide de ma famille. Je remercie chaleureusement mon mari Othmane pour son encouragement continu, pour sa patience et j'avoue que sans lui je n'aurais pu achever ce mémoire aujourd'hui. Je remercie mes chères et adorables enfants Belhadj et Malak qui ont pu supporter mon absence durant ces quatre longs mois et qui ont fait preuve d'une maturité précoce. En souvenir de mon défunt père qui serait fier de moi que Dieu lui accorde sa bénédiction et à ma mère qui m'a accompagné par ses prières. Je remercie mon frère, ma belle-soeur, mes soeurs, mon beaufrère Dr. Abou El Kacem et ma belle-mère.

Mes plus vifs remerciements vont droit à mon Professeur T. Mourid qui m'a encadré. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à ce sujet, pour la confiance qu'il m'a accordé ainsi que pour les conseils qu'il a su me prodiguer. Son enthousiasme, son expérience et sa disponibilité ont été d'une aide considérable.

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à mon Professeur Mr. H.Dib pour sa disponibilité et ses conseils. Je tiens également à exprimer ma très profonde reconnaissance à Mr. F.Boukhari pour sa modestie et son soutien. Je remercie tous les membres de Jury d'avoir pris le temps de juger ce mémoire.

Un remerciement particulier à Mr. T.Khedim qui a cru en moi et qui m'a encouragé à finir mes études et sans oublier Mr. Djellouli Ghouti pour sa grande disponibilité, ses conseils et son soutien.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont accompagné pendant cette thèse: Ma meilleure amie Boukhiar Souad, Kada Kloucha Myriem, Bouaka Aicha, Belkheir Nawel et Azzouzi Badreddine.

Enfin, je n'oublie pas les personnes qui ont cru en moi pendant toutes ces années et en particulier ma chère cousine Sanâa et ma fidèle amie Zakia.

# Introduction

Les séries de Fourier de processus stochastiques ont un grand intérêt dans les sciences appliquées: Développement en série de Fourier de signaux déterministes ou aléatoires, bruit de fond ect.. ([9], [12]). En général dans les études d'analyse de Fourier sur les processus stochastiques, nous faisons l'hypothèse que les coefficients de Fourier pour deux indices différents sont non corrélés. Mais, cette condition implique que le processus a une fonction de corrélation constante et donc le processus est trivial (ie réduit à une v.a.) ([4]). D'où la nécessité de préciser le comportement des corrélations des coefficients de Fourier pour deux indices différents.

Dans ce mémoire nous présentons une étude sur les séries de Fourier des processus stochastiques faiblement stationnaires et le comportement des corrélations des coefficients de Fourier.

Nous développons les résultats des articles suivants:

1. Kawata T. " On the Fourier Series of Stationary Stochastic Process I". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6 pp. 224-245 (1966).([1])

2. Kawata T. " On the Fourier Series of Stationary Stochastic Process II". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 13 pp. 25-38 (1969).([2])

Dans le chapitre 1, nous rappelons des préliminaires sur les processus stochastiques utilisés par la suite.

Dans le chapitre 2, nous développons les résultats de Kawata T. (1966). Nous rappelons les résultats de Root W.L. et Pitcher T. S. sur les comportements asymptotiques des covariances des coefficients de Fourier de processus à valeurs complexes. Pour un processus réel  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  centré faiblement stationnaire, nous définissons sa série de Fourier sur un intervalle fini  $[0, T]$ . Nous donnons les comportements asymptotiques avec ordre de grandeur des covariances des coefficients de Fourier pour différents indices lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Par la suite nous donnons la

convergence de la série de Fourier du processus en différents modes de convergence (moyenne quadratique, presque-sûre en valeur absolue, presque-partout ). Nous terminons le chapitre par la loi limite d'un vecteur des coefficients de Fourier d'un processus moyenne mobile.

Dans le chapitre 3, nous développons les résultats de Kawata T.(1969). Nous reprenons la même étude du chapitre 2 mais cette fois pour un processus  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  complexe centré faiblement stationnaire et  $T$ -périodique. Dans ce cas nous définissons sa série de Fourier sur la période  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . Nous donnons les comportements asymptotiques avec ordre de grandeur des restes des séries des coefficients de Fourier. Par la suite sous des conditions sur la fonction spectrale du processus nous donnons la convergence absolue de la série des coefficients de Fourier du processus qui est la convergence absolue presque-sûre de la série de Fourier du processus. Nous donnons aussi la relation de Parseval en fonction de la corrélation d'un processus défini sur un intervalle. Nous terminons par l'approximation en moyenne-quadratique et convergence uniforme presque-sûre d'un processus centré faiblement stationnaire non-périodique par un processus centré faiblement stationnaire périodique.

Finallement, en Annexe nous présentons des résultats de simulation sur le comportement des séries de Fourier du processus du mouvement brownien et du processus d'Ornstein Uhlunbeck. Nous présentons aussi des résultats numériques sur la covariance des coefficients de Fourier du processus d'Ornstein Uhlunbeck.

# Chapitre 1

## Processus stochastiques stationnaires du second ordre

Nous présentons ce chapitre comme préambule du mémoire. Toutes les définitions, propriétés et remarques générales sur les processus stochastiques stationnaires sont extraites des références [2], [5], [11], [12], [15], [16], [18] et sans donner aucune démonstration des résultats cités.

### 1.1 Préliminaires

- Un processus stochastique réel ou complexe est une famille de variables aléatoires

$$X = (X(t), t \in T) = (X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\forall T$  un ensemble de paramètres. En général,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = (a, b)$  un intervalle fini ou infini.

- Les v.a  $X(t)$  sont:

1] Pour  $t$  fixé,  $X(t) = X(t, \omega), \omega \in \Omega$  est une v.a.

2] Pour  $\omega$  fixé,  $X(t) = X(t, \omega), t \in T$  est une fonction du temps appelée "une réalisation", "une trajectoire" ("sample path") du processus  $X$ .

- Un processus stochastique  $X$  est dit mesurable si presque toutes ses trajectoires sont

Lebesgue-mesurables.

- Un processus  $X = (X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega)$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est dit **séparable** si il existe un sous-ensemble  $T^* \subseteq T$  dénombrable et un évènement  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  avec  $P(\Omega_0) = 0$  tel que pour tout ensemble fermé  $F \subseteq \mathbb{R}$  nous avons:

$$\{\omega; X(t) \in F, \forall t \in T^*\} \setminus \{\omega; X(t) \in F, \forall t \in \mathbb{R}\} \subseteq \Omega_0$$

$T^*$  : est appelé "ensemble séparant" de  $(X(t), t \in T)$

**Remarque 1** Pour tout processus  $X = (X(t), t \in T)$ , il est toujours possible de trouver un processus  $Y = (Y(t), t \in T)$  qui est séparable et équivalent à  $X$  ( $P(X \neq Y) = 0$ )

- **Processus stochastique du second ordre**

Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  est dit processus du second ordre si

$$E(X^2(t)) < \infty \quad \forall t \in T$$

La classe de ces processus est notée par  $L_2$ .

**Exemple 2** Processus gaussiens, processus de Wiener-Levy ou Brownien, processus d'Ornstein-Uhlenbeck

- Pour tout  $X, Y \in L_2$  nous définissons la distance sur  $L_2$  par

$$\|X - Y\| = \left( E(X - Y)^2 \right)^{1/2}$$

- **Processus strictement stationnaire**

Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  est dit strictement stationnaire si pour tout  $n \in \mathbb{Z}_+$ , pour tous points  $t_1 < \dots < t_n$  dans  $T$  et pour tout  $h \in T$  nous avons

$$\mathcal{L}(X(t_1), \dots, X(t_n)) = \mathcal{L}(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h))$$

où  $\mathcal{L}(X) =$  loi de  $X$ .

- **Processus faiblement stationnaire(PFS):**

Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  est faiblement stationnaire s'il est du second ordre et vérifiant les conditions suivantes:

- 1]  $E[X(t)] = \mu$  (constante indépendante de  $t$ ),  $\forall t \in T$
- 2]  $K(t, s) = E[(X(t) - \mu)(X(s) - \mu)] = R(|s - t|)$  (ne dépend que de la différence  $(s - t)$ ),  $\forall s, t \in T$

**Remarque 3** 1) Dorénavant nous considèrerons  $X$  PFS centré alors  $E[X(t)] = 0$ ,  $var[X(t)] = E[X^2(t)] = \sigma^2$  et  $R(t, s) = E[X(t)X(s)] = R(|s - t|) = R(\tau)$  où  $\tau = |s - t|$ .

2) Si  $X$  PFS, mesurable alors la v.a.  $\int_a^b X^2(t)dt$  existe p.s. pour tous réels  $a, b$ .

En effet: posons  $I = \int_a^b X^2(t)dt$ ,  $I$  est une v.a alors  $E(I) = E(\int_a^b X^2(t)dt) = \int_a^b EX^2(t)dt = \sigma^2(b - a)$  où  $EX^2(t) = \sigma^2 < \infty$  et par suite  $I < \infty$  p.s.

- **Processus à accroissements indépendants:**

Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  est à accroissements indépendants si pour tout  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  dans  $T$  les v.a

$X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  sont indépendantes

- **Processus à accroissements orthogonaux:**

Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  est à accroissements orthogonaux si

- 1]  $E|X(t) - X(s)|^2 < \infty, \quad \forall t, s \in T$
- 2]  $E[X(t_2) - X(s_2)][\overline{X(t_1) - X(s_1)}] = 0, \quad \forall s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$

## 1.2 Covariance d'un processus stationnaire

- Soit  $X = (X(t), t \in T)$  un processus du second ordre. La fonction moyenne de  $X$  est définie par

$$m_X(t) := E(X(t)), t \in T$$

la fonction d'autocovariance de  $X$  est définie par

$$\begin{aligned} K_X(s, t) & : = \text{cov}(X(s), X(t)) = E [X(s) - m_X(s)] [X(t) - m_X(t)] \\ & = E [X(s)X(t)] - m_X(s)m_X(t) \quad \forall s, t \in T \end{aligned}$$

et la fonction d'autocorrélation de  $X$  est définie par

$$R_X(s, t) =: E [X(s)X(t)]$$

**Remarque 4** 1) Si le processus  $X = (X(t), t \in T)$  est centré i.e  $m_X(t) = 0$  alors  $K_X(s, t) = E [X(s)X(t)] = R_X(s, t)$

2) Si  $X = (X(t), t \in T)$  est un processus complexe alors  $R_X(s, t)$  et  $K_X(s, t)$  sont définies respectivement par

$$R_X(s, t) := E [X(s)\overline{X(t)}] \quad \text{et} \quad K_X(s, t) =: E [X(s) - m_X(s)] \overline{[X(t) - m_X(t)]}$$

- Supposons que  $X = (X(t), t \in T)$  est un PFS centré. Sa fonction d'autocovariance est définie par

$$R(\tau) = E [X(t)X(t + \tau)]$$

et possède les propriétés suivantes:

- 1]  $R(0) = EX^2(t) = \sigma^2$
- 2]  $|R(\tau)| \leq R(0), \forall \tau$
- 3]  $R(-\tau) = R(\tau)$  (Si  $X(t)$  processus à valeurs réelles)
- 4]  $R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$  (Si  $X(t)$  processus à valeurs complexes)
- 5] La fonction de covariance  $R$  est définie positive:

$$\forall t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C} \text{ on a } \sum_{m,n=1}^N R(t_m - t_n) \alpha_m \overline{\alpha_n} \geq 0$$

- Représentation spectrale de  $R(\tau)$  : Nous avons le théorème suivant:

**Théorème (Wiener – Khintchine) ([5]) :** Une condition nécessaire et suffisante pour que  $R$  soit la fonction de corrélation d'un processus stationnaire stochastiquement continu ( $X(t), t \in \mathbb{R}$ ) est qu'il existe une fonction  $F$  non-décroissante vérifiant  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$  telle que pour tout  $\tau, R(\tau)$  admet la forme suivante

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

$F$  est appelée distribution spectrale de  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ .

### 1.3 Continuité des trajectoires

- Un processus stochastique  $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est stochastiquement continu au point  $t_0 \in T$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  nous avons

$$P\{|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ quand } |t - t_0| \rightarrow 0$$

- Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  est un processus continu si presque toutes ses trajectoires sont continues sur  $T$ .
- Un processus stochastique  $X = (X(t), t \in T)$  du second ordre est continu en moyenne quadratique (m.q) en  $s \in T$  si

$$\lim_{t \rightarrow s} E |X(t) - X(s)|^2 = 0$$

**Théorème 5 ([15] p.152)** Un processus  $X = (X(t), t \in T)$  du second ordre est continu en m.q en  $t = \tau$  si et seulement si sa fonction de covariance  $K_X(s, t)$  est continue en  $s = t = \tau$

**Remarque 6 ([11] p.209)**

1) Si  $X$  est un PFS centré alors  $X$  est continu en m.q ssi sa fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  est continue au point  $\tau = 0$

2)  $X$  continu en m.q n'implique pas que les trajectoires de  $X$  sont continues.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un processus  $X$  soit équivalent à un processus  $Y$  ayant des trajectoires continues avec probabilité 1

**Théorème 7** (voir [15] p.149 ou [18] p.63)

Soit  $X = (X(t), t \in [0, 1])$  un processus stochastique. Supposons que pour tout  $t, t+h$  dans  $[0, 1]$

$$P\{|X(t+h) - X(t)| \geq g(h)\} \leq q(h)$$

ou  $g$  et  $q$  sont des fonctions paires de  $h$ , non-croissantes quand  $h \downarrow 0$ , et tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty$$

Alors il existe un processus stochastique  $Y = (Y(t), t \in [0, 1])$  équivalent à  $X$  p.s à trajectoires continues sur  $0 \leq t \leq 1$

**Remarque 8** 1) ([18] p.65) Avec les notations du théorème précédent si

$$E|X(t+h) - X(t)|^p \leq \frac{K|h|}{|\log|h||^{1+r}}$$

ou  $p < r$  et  $K$  sont des constantes positives, alors nous avons la même conclusion du théorème 7.

2) Si  $X$  est un processus séparable satisfaisant les conditions du théorème précédent alors  $X$  est p.s à trajectoires continues sur  $0 \leq t \leq 1$ .

**Théorème 9** ([1]) Si  $X$  est un PFS qui vérifie la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty \quad \text{pour } \alpha > 1 \tag{1.3.1}$$

où  $F$  la distribution spectrale du processus  $X$ , alors  $X$  est p.s à trajectoires continues.

**Remarque 10** ([1]) Si nous remplaçons la condition (1.3.1) par la condition plus faible

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^\beta dF(x) < \infty, \quad \text{pour } \beta > 1$$

alors nous avons la même conclusion du théorème 9.

**Théorème 11** ([2]) Soit  $X = (X(t), t \in T)$  un PFS, et il existe une fonction  $g$  paire, non-négative et non-décroissante pour  $x > 0$  et vérifiant les conditions suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/g(n) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) < \infty$$

où  $F$  est la distribution spectrale du processus  $X$ . Alors  $X$  est équivalent à un PFS p.s. à trajectoires continues .

**Corollaire** ([2]) Si  $X$  est un PFS satisfaisant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^{\beta} dF(x) < \infty, \quad \text{pour } \beta > 1$$

alors  $X$  est p.s. à trajectoires continues.

**Corollaire** ([2]) Si  $X$  est un PFS satisfaisant

$$\varphi(h) := E |X(t+h) - X(t)|^2 = O(h/|\log |h||^{\gamma}) \quad \text{pour } \gamma > 3 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

alors il est p.s à trajectoires continues.

## 1.4 Représentation spectrale de processus stationnaires

**Théorème 12** Tout processus  $X$  faiblement stationnaire, continu en probabilité admet la représentation spectrale

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it\lambda} dY(\lambda)$$

où  $Y(\lambda)$  un processus à accroissements orthogonaux, et

$$E |dY(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$$

**Définition 13** Un processus moyenne mobile est défini par

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda - t) d\xi(\lambda)$$

où  $c$  est une fonction Lebesgue-mesurable vérifiant  $\int_{-\infty}^{\infty} |c(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$  et  $\xi$  est un processus à accroissements orthogonaux, avec  $E |d\xi(\lambda)|^2 = d\lambda$ .

**Théorème 14** ( [5] p.532,533) *Un processus  $X$  faiblement stationnaire est un processus moyenne mobile si et seulement si sa distribution spectrale  $F$  est absolument continue.*

## Chapitre 2

# Séries de Fourier d'un Processus faiblement stationnaire

### 2.1 Introduction

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et  $X = (X(t) = X(t, \omega), t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega)$  un processus faiblement stationnaire à valeurs réelles, continu, défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et satisfaisant les conditions suivantes:

$$EX^2(t) < \infty \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1.1)$$

$$EX(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

$$EX(s)X(t) = \rho(s-t) \quad \text{pour} \quad t, s \in \mathbb{R} \quad (2.1.3)$$

où la fonction de corrélation  $\rho$  du processus est réelle, paire, continue et de la forme

$$\rho(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} dF(x) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(xu) dF(x) \quad (2.1.4)$$

où  $F$  la distribution spectrale du processus  $X$ , qui est non décroissante, bornée et vérifiant

$$F(x) = 1 - F(-x + 0) \quad \text{et} \quad \rho(0) = F(+\infty) - F(-\infty) = EX^2(t)$$

Si  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est un processus séparable et mesurable alors  $\int_a^b X^2(t)dt$  existe p.s. pour tous réels  $a, b$ .

Nous considérons maintenant les séries de Fourier du processus  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  sur un intervalle  $(0, T)$  où  $T$  est un nombre positif arbitraire. Pour  $\omega \in \Omega$ ,  $X(t, \omega)$  est une réalisation sur  $[0, T]$ . Le développement en série de Fourier de  $X(t, \omega)$  sur  $[0, T]$  donne

$$X(t, \omega) = X(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + B_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \quad (2.1.5)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par les formules :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T X(s) \cos \frac{2\pi ns}{T} ds \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.6)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T X(s) \sin \frac{2\pi ns}{T} ds \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.7)$$

Il est connu que quand  $T \uparrow +\infty$ , la covariance de deux coefficients de Fourier pour deux indices différents converge vers zéro. Mais dans la littérature appliquée, habituellement nous supposons souvent que pour tout  $T > 0$

$$EA_n A_m = EB_n B_m = 0 \quad \text{pour } n \neq m$$

$$EA_m B_n = 0 \quad \text{pour tout } m, n$$

Mais cette condition implique que le processus stationnaire se réduit au processus trivial où  $\rho(u) = cs^{te} \forall u$  ([4]). De cette remarque, il est intéressant d'étudier le comportement asymptotique et les vitesses de convergence des coefficients de Fourier quand ils tendent vers zéro.

W. L. Root et T. S. Pitcher([10]) ont obtenu les résultats suivants pour un PFS  $X$  à valeurs complexes tel que  $X(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi int/T}$  avec  $c_n$  ses coefficients de Fourier et  $\rho$  sa fonction de corrélation. Nous avons

**Théorème 15 ([13])**

1] Si  $\rho$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt \neq 0$

alors  $E(|c_n|^2) = O(1/T) > 0$  et  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E(c_n \overline{c_m})}{[E(|c_n|^2)E(|c_m|^2)]^{1/2}} = 0$  pour  $n \neq m$

2] Si  $\rho$  est de carré intégrable et  $r$  sa transformée de Fourier alors

$$E(c_n \bar{c}_m) = \frac{(-1)^{n+m}}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} r\left(\frac{u+n\pi}{2\pi T}\right) \frac{\sin^2 u}{u[u+(n-m)\pi]} du$$

3] Si  $\rho$  est de carré intégrable et sa transformée de Fourier s'annule presque partout dans  $(-\epsilon, \epsilon)$  pour un  $\epsilon > 0$  alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E(c_n \bar{c}_m)}{\left[E(|c_n|^2) E(|c_m|^2)\right]^{1/2}} = (-1)^{n-m} \quad \text{pour tout } n \text{ et } m$$

4] Pour  $n = aT$  et  $m = bT$  nous avons :

Si  $\rho$  est intégrable et de carré intégrable, si  $a$  est un nombre réel et  $p \neq q$  sont des entiers tel que  $r(a/2) > 0$  et  $r((q/p)(a/2)) > 0$  alors

$$\lim_{T_k \rightarrow \infty} \frac{E(c_{pk} \bar{c}_{qk})}{\left[E(|c_{pk}|^2) E(|c_{qk}|^2)\right]^{1/2}} = 0, \quad T_k = \frac{kp}{a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En fait l'expression ci dessus est  $O\left([(p-q)k]^{-\theta}\right)$  pour tout  $\theta < 1$

Enfin le dernier résultat

5] Si  $r$  est bornée et s'annule en dehors de l'intervalle  $(-A/2, A/2)$  pour un certain  $A$ , alors

$$\left[ \sum_{[AT]+1}^{\infty} E(|c_n|^2) + \sum_{-[AT]+1}^{-\infty} E(|c_n|^2) \right] / \sum_{-\infty}^{+\infty} E(|c_n|^2) = O\left(\frac{\log T}{T^2}\right)$$

où  $[AT]$  est la partie entière de  $AT$

Au paragraphe(2.2) nous présentons les résultats de T. Kawata [1] avec des estimations précises sur les vitesses de convergence des covariances des coefficients de Fourier d'un procesus  $X$  réel, sous certaines conditions sur la distribution spectrale  $F$  ou sur la densité spectrale  $f$ . Au paragraphe (2.3) nous donnons le comportement asymptotique des coefficients de Fourier pour un processus  $X$  à valeurs complexes. Les problèmes de convergences des séries de Fourier de  $X$  sont donnés dans les paragraphes (2.4) et (2.5). Nous avons que la série de Fourier (2.1.5) d'un processus stationnaire continu  $X$  est convergente en  $m.q$  vers  $X = (X(t), 0 < t < T)$ . Il

est naturel de savoir sous quelles conditions les séries de Fourier convergent vers  $X(t)$  presque-partout ou absolument dans  $(0, T)$  avec probabilité 1. Ces deux convergences sont analogues aux théorèmes de Kolmogorov-Seliverstov (**voir[14] p.252**) et de S.Bernstein ( **voir[14] p.135**) sur les séries de Fourier ordinaires.

Finallement, nous donnons au paragraphe (2.6) le comportement en loi des coefficients de Fourier (2.1.6) et (2.1.7).

## 2.2 Comportement asymptotique des covariances des coefficients de Fourier

Soit  $X$  un processus faiblement stationnaire, continu, à valeurs réelles défini comme dans l'introduction et  $F$  sa distribution spectrale.

Nous discutons le comportement asymptotique des covariances  $EA_m A_n$ ,  $EB_m B_n$  et  $EA_m B_n$ , des coefficients de Fourier (2.1.6) et (2.1.7) de  $X(t)$  dans  $(0, T)$  quand  $T \rightarrow \infty$  avec  $m$  et  $n$  fixés.

Soit  $F$  la distribution spectrale de  $X$ . Nous établissons les lemmes préparatoires suivants:

**Lemme 1** *Nous avons*

$$EA_m A_n = J_1 + J_2 \tag{2.2.1}$$

où

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda T; m, n) \sin^2 \lambda T dF(\lambda) \tag{2.2.2}$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda T; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda) \tag{2.2.3}$$

et

$$\varphi(u; m, n) = \frac{4u^2}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \tag{2.2.4}$$

**Preuve:** A partir de la formule (2.1.6) nous avons

$$\begin{aligned}
EA_m A_n &= E\left(\frac{2}{T} \int_0^T X(u) \cos \frac{2\pi mu}{T} du\right) \left(\frac{2}{T} \int_0^T X(v) \cos \frac{2\pi nv}{T} dv\right) \\
&= E \frac{4}{T^2} \int_0^T X(u) \cos \frac{2\pi mu}{T} du \int_0^T X(v) \cos \frac{2\pi nv}{T} dv \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[X(u)X(v)] \cos \frac{2\pi mu}{T} \cos \frac{2\pi nv}{T} dudv \text{ (par Fubini)} \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho(u-v) \cos \frac{2\pi mu}{T} \cos \frac{2\pi nv}{T} dudv
\end{aligned}$$

En insérant la formule de  $\rho$  donnée par (2.1.4) nous avons

$$\begin{aligned}
EA_m A_n &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T 2 \int_0^{+\infty} \cos(u-v)\lambda dF(\lambda) \cos \frac{2\pi mu}{T} \cos \frac{2\pi nv}{T} dudv \\
&= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \int_0^T \int_0^T \cos(u-v)\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} \cos \frac{2\pi nv}{T} dudvdF(\lambda) \text{ (Fubini)}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule

$$\cos(u-v)\lambda = \cos u\lambda \cos v\lambda + \sin u\lambda \sin v\lambda$$

et en insérant dans la relation précédente nous pouvons représenter  $EA_m A_n$  par :

$$EA_m A_n = J_1 + J_2$$

où

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \cos u\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du \right] \left[ \int_0^T \cos v\lambda \cos \frac{2\pi nv}{T} dv \right] dF(\lambda) \\
\text{et } J_2 &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \sin u\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du \right] \left[ \int_0^T \sin v\lambda \cos \frac{2\pi nv}{T} dv \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

En utilisant les formules

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2} \text{ et } \sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} + \lambda\right) u + \cos\left(\frac{2\pi m}{T} - \lambda\right) u}{2} du \right] \\
&\quad \left[ \int_0^T \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{T} + \lambda\right) v + \cos\left(\frac{2\pi n}{T} - \lambda\right) v}{2} dv \right] dF(\lambda) \\
J_2 &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \frac{\sin\left(\lambda + \frac{2\pi m}{T}\right) u + \sin\left(\lambda - \frac{2\pi m}{T}\right) u}{2} du \right] \\
&\quad \left[ \int_0^T \frac{\sin\left(\lambda + \frac{2\pi n}{T}\right) v + \sin\left(\lambda - \frac{2\pi n}{T}\right) v}{2} dv \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

Après calcul d'intégrales nous arrivons à

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{T}{2\pi m + \lambda T} \sin(2\pi m + \lambda T) + \frac{T}{2\pi m - \lambda T} \sin(2\pi m - \lambda T) \right] \\
&\quad \left[ \frac{T}{2\pi n + \lambda T} \sin(2\pi n + \lambda T) + \frac{T}{2\pi n - \lambda T} \sin(2\pi n - \lambda T) \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi m} (\cos(\lambda T + 2\pi m) - 1) - \frac{T}{\lambda T - 2\pi m} (\cos(\lambda T - 2\pi m) - 1) \right] \\
&\quad \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi n} (\cos(\lambda T + 2\pi n) - 1) - \frac{T}{\lambda T - 2\pi n} (\cos(\lambda T - 2\pi n) - 1) \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

Comme les fonctions "sin" et "cos" sont  $2\pi$ -périodiques, impaires et paires respectivement nous avons donc :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{T}{2\pi m + \lambda T} \sin \lambda T - \frac{T}{2\pi m - \lambda T} \sin \lambda T \right] \\
&\quad \left[ \frac{T}{2\pi n + \lambda T} \sin \lambda T - \frac{T}{2\pi n - \lambda T} \sin \lambda T \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi m} (\cos \lambda T - 1) - \frac{T}{\lambda T - 2\pi m} (\cos \lambda T - 1) \right] \\
&\quad \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi n} (\cos \lambda T - 1) - \frac{T}{\lambda T - 2\pi n} (\cos \lambda T - 1) \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

Les intégrands de  $J_1$  et  $J_2$  sont paires par suite :

$$J_1 = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{T}{2\pi m + \lambda T} \sin \lambda T - \frac{T}{2\pi m - \lambda T} \sin \lambda T \right] \cdot \left[ \frac{T}{2\pi n + \lambda T} \sin \lambda T - \frac{T}{2\pi n - \lambda T} \sin \lambda T \right] dF(\lambda)$$

et

$$J_2 = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi m} (\cos \lambda T - 1) - \frac{T}{\lambda T - 2\pi m} (\cos \lambda T - 1) \right] \cdot \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi n} (\cos \lambda T - 1) - \frac{T}{\lambda T - 2\pi n} (\cos \lambda T - 1) \right] dF(\lambda)$$

Après calculs et en factorisant dans  $J_1$  par  $(\sin^2 \lambda T)$  et dans  $J_2$  par  $(1 - \cos \lambda T)^2$  nous déduisons que

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(2\pi m + \lambda T)(2\pi n + \lambda T)} - \frac{1}{(2\pi m + \lambda T)(2\pi n - \lambda T)} - \frac{1}{(2\pi n + \lambda T)(2\pi m - \lambda T)} + \frac{1}{(2\pi m - \lambda T)(2\pi n - \lambda T)} \right] \sin^2 \lambda T dF(\lambda)$$

et

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(\lambda T + 2\pi m)(\lambda T + 2\pi n)} + \frac{1}{(\lambda T + 2\pi m)(\lambda T - 2\pi n)} + \frac{1}{(\lambda T - 2\pi m)(\lambda T + 2\pi n)} + \frac{1}{(\lambda T - 2\pi m)(\lambda T - 2\pi n)} \right] (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda)$$

Enfin par réduction au même dénominateur et après simplifications nous obtenons le résultat final:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4(\lambda T)^2}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} \sin^2 \lambda T dF(\lambda)$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4(\lambda T)^2}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda)$$

et

$$\varphi(\lambda T; m, n) = \frac{4(\lambda T)^2}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]}$$

Par conséquent nous avons les formules (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4). D'où le Lemme. ■

**Lemme 2** *Nous avons*

$$EB_m B_n = K_1 + K_2 \quad (2.2.5)$$

où

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda T; m, n) \sin^2 \lambda T dF(\lambda) \quad (2.2.6)$$

$$K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda T; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda) \quad (2.2.7)$$

et

$$\psi(u; m, n) = \frac{16\pi^2 mn}{\left[ u^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ u^2 - (2\pi n)^2 \right]} \quad (2.2.8)$$

**Preuve:** Nous développons de la même façon que dans le lemme 1 mais en utilisant la formule (2.1.7). Nous avons

$$\begin{aligned} EB_m B_n &= E\left(\frac{2}{T} \int_0^T X(u) \sin \frac{2\pi mu}{T} du\right) \left(\frac{2}{T} \int_0^T X(v) \sin \frac{2\pi nv}{T} dv\right) \\ &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T EX(u)X(v) \sin \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudv \text{ (Fubini)} \\ &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho(u-v) \sin \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudv \end{aligned}$$

En insérant la formule (2.1.4) nous obtenons

$$\begin{aligned} EB_m B_n &= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T 2 \int_0^{+\infty} \cos(u-v)\lambda dF(\lambda) \sin \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudv \\ &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \int_0^T \int_0^T \cos(u-v)\lambda \sin \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudvdF(\lambda) \text{ (Fubini)} \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes formules trigonométriques ci dessus nous déduisons que

$$EB_m B_n = K_1 + K_2$$

où

$$K_1 = \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \sin u \lambda \sin \frac{2\pi m u}{T} du \right] \left[ \int_0^T \sin v \lambda \sin \frac{2\pi n v}{T} dv \right] dF(\lambda)$$

et

$$K_2 = \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \cos u \lambda \sin \frac{2\pi m u}{T} du \right] \left[ \int_0^T \cos v \lambda \sin \frac{2\pi n v}{T} dv \right] dF(\lambda)$$

En utilisant les formules suivantes:

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2} \quad \text{et} \quad \sin A \cos B = \frac{\sin(A + B) + \sin(A - B)}{2}$$

nous obtenons

$$K_1 = \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} - \lambda\right) u - \cos\left(\frac{2\pi m}{T} + \lambda\right) u}{2} du \right] \left[ \int_0^T \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{T} - \lambda\right) v - \cos\left(\frac{2\pi n}{T} + \lambda\right) v}{2} dv \right] dF(\lambda)$$

et

$$K_2 = \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^T \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} + \lambda\right) u + \sin\left(\frac{2\pi m}{T} - \lambda\right) u}{2} du \right] \left[ \int_0^T \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T} + \lambda\right) v + \sin\left(\frac{2\pi n}{T} - \lambda\right) v}{2} dv \right] dF(\lambda)$$

Après calcul d'intégrales nous obtenons

$$K_1 = \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{T}{2\pi m - \lambda T} \sin(2\pi m - \lambda T) - \frac{T}{2\pi m + \lambda T} \sin(2\pi m + \lambda T) \right] \left[ \frac{T}{2\pi n - \lambda T} \sin(2\pi n - \lambda T) - \frac{T}{2\pi n + \lambda T} \sin(2\pi n + \lambda T) \right] dF(\lambda)$$

et

$$K_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ -\frac{T}{2\pi m + \lambda T} (\cos(2\pi m + \lambda T) - 1) - \frac{T}{2\pi m - \lambda T} (\cos(2\pi m - \lambda T) - 1) \right] \left[ -\frac{T}{2\pi n + \lambda T} (\cos(2\pi n + \lambda T) - 1) - \frac{T}{2\pi n - \lambda T} (\cos(2\pi n - \lambda T) - 1) \right] dF(\lambda)$$

Les fonctions "sin" et "cos" sont  $2\pi$ -périodiques, impaires et paires respectivement, nous aboutissons à

$$K_1 = \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ -\frac{T}{2\pi m - \lambda T} - \frac{T}{2\pi m + \lambda T} \right] \left[ -\frac{T}{2\pi n - \lambda T} - \frac{T}{2\pi n + \lambda T} \right] \sin^2 \lambda T dF(\lambda)$$

$$\text{et } K_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi m} - \frac{T}{2\pi m - \lambda T} \right] \left[ -\frac{T}{\lambda T + 2\pi n} - \frac{T}{2\pi n - \lambda T} \right] (\cos \lambda T - 1)^2 dF(\lambda)$$

Après factorisations et simplifications nous arrivons à

$$K_1 = \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \frac{4\pi m T \cdot 4\pi n T}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} \sin^2 \lambda T dF(\lambda)$$

$$\text{et } K_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^{+\infty} \frac{4\pi m T \cdot 4\pi n T}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} (-\cos \lambda T + 1)^2 dF(\lambda)$$

Comme les intégrands de  $K_1$  et  $K_2$  sont pairs nous déduisons

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\pi m \cdot 4\pi n}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} \sin^2 \lambda T dF(\lambda)$$

$$\text{et } K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\pi m \cdot 4\pi n}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda)$$

Si nous posons

$$\psi(\lambda T; m, n) = \frac{16\pi^2 m n}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]}$$

nous obtenons les formules (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.8). D'où le lemme. ■

**Théorème 16** Soit  $X$  un PFS réel continu admettant une distribution spectrale  $F$  bornée, non-décroissante avec  $F(x) = 1 - F(-x + 0)$  alors

$$EA_m B_n = 0, \quad \text{pour tout } (m, n) \quad (2.2.9)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EA_m A_n = 0 \quad \text{si } m^2 + n^2 \neq 0 \quad (2.2.10)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EB_m B_n = 0 \quad \text{si } m, n = 1, 2, \dots \quad (2.2.11)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EA_0^2 = 4[F(0^+) - F(0^-)] \quad (2.2.12)$$

**Preuve:** 1] Des formules(2.1.4) , (2.1.6) et (2.1.7) nous avons

$$\begin{aligned}
EA_m B_n &= E \frac{4}{T^2} \int_0^T X(u) \cos \frac{2\pi mu}{T} du \int_0^T X(v) \sin \frac{2\pi nv}{T} dv \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T EX(u)X(v) \cos \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudv \text{(Fubini)} \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho(u-v) \cos \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudv \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T 2 \int_0^{+\infty} \cos(u-v)\lambda dF(\lambda) \cos \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudv \\
&= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \int_0^T \int_0^T \cos(u-v)\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudvdF(\lambda) \text{ (Fubini)} \\
&= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \int_0^T \int_0^T [\cos u\lambda \cos v\lambda + \sin u\lambda \sin v\lambda] \cos \frac{2\pi mu}{T} \sin \frac{2\pi nv}{T} dudvdF(\lambda) \\
&= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_0^T \cos u\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du}_{(1)} \underbrace{\int_0^T \cos v\lambda \sin \frac{2\pi nv}{T} dv}_{(2)} \right] dF(\lambda) \\
&\quad + \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_0^T \sin u\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du}_{(3)} \underbrace{\int_0^T \sin v\lambda \sin \frac{2\pi nv}{T} dv}_{(4)} \right] dF(\lambda)
\end{aligned}$$

Calculons les intégrales (1) , (2) , (3) et (4). Nous avons

$$(1) = \int_0^T \cos u\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du = \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left( \frac{\lambda T + 2\pi m}{T} \right) u du + \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left( \frac{\lambda T - 2\pi m}{T} \right) u du$$

par suite

$$\int_0^T \cos u\lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du = -\frac{\lambda T^2}{(2\pi m)^2 - (\lambda T)^2} \sin \lambda T$$

De même

$$(2) = \int_0^T \cos v\lambda \sin \frac{2\pi nv}{T} dv = \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left( \frac{2\pi n + \lambda T}{T} \right) v dv + \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left( \frac{2\pi n - \lambda T}{T} \right) v dv$$

par suite

$$\int_0^T \cos v\lambda \sin \frac{2\pi nv}{T} dv = -\frac{2\pi n T}{(2\pi n)^2 - (\lambda T)^2} [\cos \lambda T - 1]$$

De même nous avons

$$(3) = \int_0^T \sin u \lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du = \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left( \frac{\lambda T + 2\pi m}{T} \right) u du + \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left( \frac{\lambda T - 2\pi m}{T} \right) u du$$

par suite

$$\int_0^T \sin u \lambda \cos \frac{2\pi mu}{T} du = \frac{\lambda T^2}{(2\pi m)^2 - (\lambda T)^2} [\cos \lambda T - 1]$$

et enfin

$$(4) = \int_0^T \sin v \lambda \sin \frac{2\pi nv}{T} dv = \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left( \frac{\lambda T - 2\pi n}{T} \right) v dv - \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left( \frac{\lambda T + 2\pi n}{T} \right) v dv$$

par suite

$$\int_0^T \sin v \lambda \sin \frac{2\pi nv}{T} dv = -\frac{2\pi n T}{(2\pi n)^2 - (\lambda T)^2} \sin \lambda T$$

En remplaçant les intégrales (1), (2), (3) et (4) nous arrivons finalement à (2.2.9) par

$$\begin{aligned} EA_m B_n &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2\pi n \lambda T^3}{[(2\pi m)^2 - (\lambda T)^2][(2\pi n)^2 - (\lambda T)^2]} [\cos \lambda T - 1] \cdot \sin \lambda T \right] dF(\lambda) \\ &\quad - \frac{8}{T^2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2\pi n \lambda T^3}{[(2\pi m)^2 - (\lambda T)^2][(2\pi n)^2 - (\lambda T)^2]} [\cos \lambda T - 1] \cdot \sin \lambda T \right] dF(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2] D'après les formules (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4) du lemme 1 nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EA_m A_n = \lim_{T \rightarrow \infty} (J_1 + J_2)$$

où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda T; m, n) \sin^2 \lambda T dF(\lambda) \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} J_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda T; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda)$$

nous remarquons que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi(\lambda T; m, n) \sin^2 \lambda T &= 0 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi(\lambda T; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 = 0 \\ \text{avec } \varphi(u; m, n) &= \frac{4u^2}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \end{aligned}$$

Nous avons

$$|\varphi(u; m, n) \sin^2 u| \leq |\varphi(u; m, n)| = \left| \frac{4u^2}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \right| \sim \frac{1}{u^2} \in L^1 \text{ à l'infini.}$$

et

$$\left| \varphi(u; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 \right| \leq |\varphi(u; m, n)| = \left| \frac{4u^2}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \right| \sim \frac{1}{u^2} \in L^1 \text{ à l'infini.}$$

Donc en appliquant le théorème de la convergence dominée nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} J_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} EA_m A_n = 0 \text{ d'où (2.2.10)}$$

3] Des formules (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.8) du lemme 2 nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EB_m B_n = \lim_{T \rightarrow \infty} (K_1 + K_2)$$

où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda T; m, n) \sin^2 \lambda T dF(\lambda) \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda T; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda)$$

nous remarquons aussi que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(\lambda T; m, n) \sin^2 \lambda T &= 0 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(\lambda T; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 = 0 \\ \text{avec } \psi(u; m, n) &= \frac{16\pi^2 mn}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \end{aligned}$$

Nous avons

$$|\psi(u; m, n) \sin^2 u| \leq |\psi(u; m, n)| = \left| \frac{16\pi^2 mn}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \right| \sim \frac{1}{u^4} \in L^1 \text{ à l'infini.}$$

et

$$\left| \psi(u; m, n) (1 - \cos \lambda T)^2 \right| \leq |\psi(u; m, n)| = \left| \frac{16\pi^2 mn}{[u^2 - (2\pi m)^2][u^2 - (2\pi n)^2]} \right| \sim \frac{1}{u^4} \in L^1 \text{ à l'infini.}$$

à l'infini. Donc en appliquant le théorème de la convergence dominée nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} K_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} EB_m B_n = 0 \quad \text{d'où (2.2.11)}$$

4] D'après la formule (2.2.4) du lemme 1, si nous posons  $m = n = 0$  nous avons

$$\varphi(\lambda T; 0, 0) = \frac{4(\lambda T)^2}{[(\lambda T)^2][(\lambda T)^2]} = \frac{4}{(\lambda T)^2}$$

Ainsi les formules (2.2.2) et (2.2.3) deviennent respectivement

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(\lambda T)^2} \sin^2 \lambda T dF(\lambda) \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(\lambda T)^2} (1 - \cos \lambda T)^2 dF(\lambda)$$

Nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Comme  $\left| \frac{\sin^2 u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2} \in L^1$  à l'infini. Nous appliquons le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 4[F(0^+) - F(0^-)] & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Pour  $J_2$  nous avons:  $1 - \cos \lambda T = 2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2}$  donc

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(\lambda T)^2} \left( 2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2} \right)^2 dF(\lambda) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \left( \frac{\lambda T}{2} \right)}{\left( \frac{\lambda T}{2} \right)^2} dF(\lambda)$$

Comme le noyau  $\frac{\sin^4 \left( \frac{\lambda T}{2} \right)}{\lambda^2 T^2 / 4} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \forall \lambda$  et nous avons  $\left| \frac{\sin^4 u}{u^2 / 4} \right| \leq \frac{4}{u^2} \in L^1$  à l'infini, alors d'après Lebesgue nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_2 = 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \left( \frac{\lambda T}{2} \right)}{\lambda^2 T^2 / 4} dF(\lambda) = 0$$

Finalement nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EA_0^2 = 4[F(0^+) - F(0^-)]$$

et c'est la formule (2.2.12). Ainsi le théorème s'achève. ■

Dans ce qui suit le processus admet une densité spectrale continue au point 0 et nous verrons que la vitesse de convergence de ces quantités sera de l'ordre  $\frac{1}{T}$ . Nous avons le résultat fondamental suivant:

**Théorème 17** *Si  $\rho(u) \in L^1(\mathbb{R})$  alors*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot EA_m^2 = 4\pi f(0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2.13)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot EA_0^2 = 8\pi f(0) \quad m = 0 \quad (2.2.14)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot EB_m^2 = 4\pi f(0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2.15)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot EA_m A_n = 0, \quad m \neq n \quad (2.2.16)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot EB_m B_n = 0, \quad m \neq n \quad (2.2.17)$$

où  $f$  est la densité spectrale de  $X$  qui est continue en  $\lambda = 0$

**Remarque 18** ([12] p.219 et [10]) *La condition  $\rho(u) \in L^1(\mathbb{R})$  implique l'existence de la densité spectrale continue  $f$ .*

Pour prouver le théorème 17 nous avons besoin des lemmes préparatoires suivants:

**Lemme 3** Pour  $m \neq n \neq 0$  nous avons

$$EA_m A_n = J_1 + J_2$$

où

$$J_1 = 2(S_1 + S_2) \quad (2.2.18)$$

$$J_2 = 2(U_1 + U_2) \quad (2.2.19)$$

avec

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda, S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad (2.2.20)$$

$$U_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda, U_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad (2.2.21)$$

**Preuve:** De la formule (2.2.1) nous avons

$$EA_m A_n = J_1 + J_2$$

où  $J_1, J_2$  sont données par les formules (2.2.2) et (2.2.3) respectivement. La formule (2.2.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda T; m, n) &= \frac{4(\lambda T)^2}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} = \frac{2\lambda T}{(\lambda T)^2 - (2\pi m)^2} \cdot \frac{2\lambda T}{(\lambda T)^2 - (2\pi n)^2} \\ &= \left( \frac{1}{\lambda T + 2m\pi} + \frac{1}{\lambda T - 2m\pi} \right) \left( \frac{1}{\lambda T + 2n\pi} + \frac{1}{\lambda T - 2n\pi} \right) \end{aligned}$$

Par cette dernière expression de  $\varphi(\lambda T; m, n)$  alors  $J_1$  et  $J_2$  sont écrites comme somme de quatre intégrales. Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda \\ &= : S_1 + S_2 + S'_1 + S'_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda \\ &= : U_1 + U_2 + U'_1 + U'_2 \end{aligned}$$

respectivement.

Pour  $J_1$ , nous effectuons le changement de variable  $\lambda = -\mu$  dans  $S'_1, S'_2$  et nous utilisons le fait que  $f$  est paire. Nous avons alors

$$S'_1 = S_2 \text{ et } S'_2 = S_1 \quad \text{par suite} \quad J_1 = 2(S_1 + S_2) \quad \text{d'où} \quad (2.2.18)$$

avec

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ et } S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad \text{d'où} \quad (2.2.20)$$

Même chose pour  $J_2$ , nous effectuons le changement de variable  $\lambda = -\mu$  dans  $U'_1, U'_2$  et le fait que  $f$  est paire nous avons

$$U'_1 = U_2 \text{ et } U'_2 = U_1 \quad \text{par suite} \quad J_2 = 2(U_1 + U_2) \quad \text{d'où} \quad (2.2.19)$$

avec

$$U_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ et } U_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ d'où (2.2.21)}$$

D'où le lemme. ■

**Lemme 4** Pour  $m \neq n \neq 0$  nous avons

$$EB_m B_n = K_1 + K_2$$

où

$$K_1 = 2(V_1 - V_2) \quad (2.2.22)$$

$$K_2 = 2(W_1 - W_2) \quad (2.2.23)$$

avec

$$V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda, V_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad (2.2.24)$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda, W_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad (2.2.25)$$

**Preuve:** De la formule (2.2.5) nous avons

$$EB_m B_n = K_1 + K_2$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont données par les formules (2.2.6) et (2.2.7) respectivement. La formule (2.2.8) s'écrit

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda T; m, n) &= \frac{16\pi^2 mn}{\left[ (\lambda T)^2 - (2\pi m)^2 \right] \left[ (\lambda T)^2 - (2\pi n)^2 \right]} \\
&= \frac{4\pi m}{(\lambda T)^2 - (2\pi m)^2} \cdot \frac{4\pi n}{(\lambda T)^2 - (2\pi n)^2} \\
&= \left( \frac{1}{\lambda T + 2m\pi} - \frac{1}{\lambda T - 2m\pi} \right) \left( \frac{1}{\lambda T + 2n\pi} - \frac{1}{\lambda T - 2n\pi} \right)
\end{aligned}$$

Par cette dernière expression de  $\psi(\lambda T; m, n)$  alors  $K_1$  et  $K_2$  sont écrites comme somme de quatre intégrales. Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda - \\
&\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda \\
&: = V_1 - V_2 - V_1' + V_2'
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda - \\
&\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda)}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} d\lambda \\
&: = W_1 - W_2 - W_1' + W_2'
\end{aligned}$$

respectivement.

Pour  $K_1$ , nous effectuons le changement de variable  $\lambda = -\mu$  dans  $V_1'$ ,  $V_2'$  et le fait que  $f$  est paire nous avons

$$V_1' = V_2 \text{ et } V_2' = V_1 \quad \text{par suite} \quad K_1 = 2(V_1 - V_2) \quad \text{d'où (2.2.22)}$$

avec

$$V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ et } V_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ d'où (2.2.24)}$$

Même chose pour  $K_2$ , nous effectuons le changement de variable  $\lambda = -\mu$  dans  $W'_1, W'_2$ , et  $f$  est paire, nous avons

$$W'_1 = W_2 \text{ et } W'_2 = W_1 \quad \text{par suite} \quad K_2 = 2(W_1 - W_2) \text{ d'où (2.2.23)}$$

avec

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ et } W_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ d'où (2.2.25)}$$

d'où le lemme ■

Maintenant montrons le théorème 17

**Preuve:** Nous utilisons un théorème sur la sommabilité ([21] et [22] p.28)

**Theoreme A:** Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}$ , continue au point  $c$  telle que  $f(x)/(1 + |x|) \in L_1(\mathbb{R})$ . Soit  $K \in L_1(\mathbb{R})$  satisfaisant  $xK(x) = O(1)$ , pour  $|x|$  grand, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(c + u + \xi_\lambda) K(\lambda u) du = f(c) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx$$

où  $\xi_\lambda$  est un nombre indépendant de  $u$  convergeant vers 0 quand  $\lambda \rightarrow \infty$

Dans la preuve du théorème 17 nous appliquons le théorème A. En effet:

1] Posons  $m = n \neq 0$  dans la formule (2.2.1) du lemme 1, nous avons

$$EA_m^2 = J_1 + J_2$$

et les formules (2.2.2) et (2.2.3) deviennent

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4(\lambda T)^2}{[(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2]^2} \sin^2 \lambda T f(\lambda) d\lambda \text{ et } J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4(\lambda T)^2}{[(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2]^2} (1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda) d\lambda$$

Nous décomposons  $J_1$  de la manière suivante:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{2\lambda T}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2m\pi)} \right]^2 \sin^2 \lambda T f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\lambda T + 2m\pi} + \frac{1}{\lambda T - 2m\pi} \right]^2 \sin^2 \lambda T f(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(\lambda T + 2m\pi)^2} + \frac{2}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2m\pi)} + \frac{1}{(\lambda T - 2m\pi)^2} \right] \sin^2 \lambda T f(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda \\ &= : J_{11} + J_{12} + J_{13} \end{aligned}$$

avec

$$J_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda, \quad J_{12} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda \text{ et } J_{13} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda$$

De la même façon nous décomposons  $J_2$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{4\lambda T}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} \right]^2 (1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda \\ &= : J_{21} + J_{22} + J_{23} \end{aligned}$$

avec

$$J_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda, \quad J_{22} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad J_{23} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda$$

Nous avons donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TEA_m^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} (TJ_{11} + TJ_{12} + TJ_{13} + TJ_{21} + TJ_{22} + TJ_{23}) \quad (*)$$

Pour  $TJ_{11}$  nous avons

$$TJ_{11} = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{T^2(\lambda + 2m\pi/T)^2} f(\lambda) d\lambda$$

En posant:  $\lambda + 2m\pi/T = \mu$ , nous avons

$$TJ_{11} = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\mu T - 2m\pi)}{T^2 \mu^2} f(\mu - \frac{2m\pi}{T}) d\mu = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \mu T}{T^2 \mu^2} f(\mu - \frac{2m\pi}{T}) d\mu \quad [\text{car } \sin^2(\mu T - 2m\pi) = \sin^2 \mu T]$$

et donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TJ_{11} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \mu T}{T^2 \mu^2} f(\mu - \frac{2m\pi}{T}) d\mu$$

Si nous posons  $K(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ ,  $c = 0$ ,  $\xi_T = -\frac{2m\pi}{T}$  et le fait que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et continue au point 0 nous avons

$$\int |f(x)| / (1 + |x|) \leq \int |f(x)| dx \leq \infty$$

$K$  est paire et  $|K(x)| = \left| \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \in L^1$  sur  $[1, +\infty[$  et que en 0  $\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$  par continuité alors nous avons  $K \in L_1(\mathbb{R})$ , et aussi pour  $|x|$  grand nous avons

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |xK(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin^2 x}{x} \right| \leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad \text{donc } xK(x) = o(1) = O(1)$$

Par suite les hypothèses du théorème  $A$  sont vérifiées et nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TJ_{11} = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = \pi f(0) \text{ du fait que } \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi \quad (1)$$

Même résultat pour  $TJ_{13}$  nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TJ_{13} = \pi f(0) \quad (2)$$

en effet

$$TJ_{13} = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{T^2(\lambda - 2m\pi/T)^2} f(\lambda) d\lambda$$

en posant  $\lambda - 2m\pi/T = \nu$  nous avons

$$TJ_{13} = T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \nu T}{\nu^2 T^2} f(\nu + 2m\pi/T) d\nu$$

En vérifiant les conditions du théorème  $A$  avec  $c = 0$ ;  $\xi_T = \frac{2m\pi}{T}$  et  $K(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$  nous avons le résultat.

Pour  $TJ_{12}$  nous avons

$$TJ_{12} = 2T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda$$

et nous appliquons le théorème  $A$  pour  $K(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - (2m\pi)^2}$ ,  $c = 0$  et  $\xi_T = 0$ . Nous avons  $K \in L^1$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} xK(x) = 0$ ,  $\forall m \neq 0$  donc  $xK(x) = o(1) = O(1)$  alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} TJ_{12} = 2f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 - (2m\pi)^2} dx = 0 \text{ du fait que } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 - (2m\pi)^2} dx = 0 \text{ pour } m \neq 0 \quad (3)$$

En utilisant:  $1 - \cos \lambda T = 2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2}$  nous pouvons écrire  $J_{21}$  de la forme

$$J_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2})^2}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda = \frac{4}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \frac{\lambda T}{2}}{(\lambda + \frac{2m\pi}{T})^2} f(\lambda) d\lambda$$

posons  $\lambda + \frac{2m\pi}{T} = 2\mu$  alors

$$J_{21} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 (\mu T - m\pi)}{T^2 \mu^2} f \left( 2\mu - \frac{2m\pi}{T} \right) d\mu = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 (\mu T)}{(T\mu)^2} f \left( 2\mu - \frac{2m\pi}{T} \right) d\mu$$

Même chose pour  $J_{23}$  nous l'écrivons sous la forme

$$J_{23} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2})^2}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda = \frac{4}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \frac{\lambda T}{2}}{(\lambda - \frac{2m\pi}{T})^2} f(\lambda) d\lambda$$

posons  $\lambda - \frac{2m\pi}{T} = 2\mu$  alors

$$J_{23} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 (\mu T + m\pi)}{T^2 \mu^2} f \left( 2\mu + \frac{2m\pi}{T} \right) d\mu = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 (\mu T)}{T^2 \mu^2} f \left( 2\mu + \frac{2m\pi}{T} \right) d\mu$$

Enfin pour  $J_{22}$  nous avons

$$J_{22} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sin^4 \frac{\lambda T}{2}}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda = 8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \frac{\lambda T}{2}}{(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda$$

En appliquant encore le théorème A nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T J_{21} = \lim_{T \rightarrow \infty} T J_{23} = \pi f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T J_{22} = 0 \quad (4)$$

du fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{(2x)^2 - (2m\pi)^2} dx = 0 \quad \text{pour } m \neq 0$$

En regroupant (1), (2), (3) et (4) dans (\*) nous avons (2.2.13).

Mêmes calculs pour obtenir la formule (2.2.15). En effet, d'après (2.2.5) du lemme 2 nous

posons  $m = n$  pour avoir

$$EB_m^2 = K_1 + K_2$$

avec

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\pi^2 m^2}{[(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2]^2} \sin^2 \lambda T f(\lambda) d\lambda \text{ et } K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\pi^2 m^2}{[(\lambda T)^2 - (2m\pi)^2]^2} (1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda) d\lambda$$

où encore

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\lambda T - 2m\pi} - \frac{1}{\lambda T + 2m\pi} \right)^2 \sin^2 \lambda T f(\lambda) d\lambda$$

et

$$K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\lambda T - 2m\pi} - \frac{1}{\lambda T + 2m\pi} \right)^2 (1 - \cos \lambda T)^2 f(\lambda) d\lambda$$

Pour  $K_1$  nous avons la décomposition suivante

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2m\pi)} f(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda$$

$$= : K_{11} + K_{12} + K_{13}$$

De même nous avons pour  $K_2$

$$K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T - 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T - 2m\pi)(\lambda T + 2m\pi)} f(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)^2} f(\lambda) d\lambda$$

$$= : K_{21} + K_{22} + K_{23}$$

Nous écrivons alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TEB_m^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} (TK_{11} + TK_{12} + TK_{13} + TK_{21} + TK_{22} + TK_{23}) \quad (*)$$

Même raisonnement qu'auparavant, nous appliquons le théorème A pour aboutir aux résultats

suivants:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TK_{11} &= \lim_{T \rightarrow \infty} TK_{13} = \lim_{T \rightarrow \infty} TK_{21} = \lim_{T \rightarrow \infty} TK_{23} = \pi f(0) \\ \text{et } \lim_{T \rightarrow \infty} TK_{12} &= \lim_{T \rightarrow \infty} TK_{22} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons la formule (2.2.15)

La preuve de (2.2.14) est contenue dans la preuve de (2.2.13) en posant  $m = 0$ . En effet nous avons

$$\begin{aligned} EA_0^2 &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2} f(\lambda) d\lambda + 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T)^2} f(\lambda) d\lambda \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2} f(\lambda) d\lambda + 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \frac{\lambda T}{2}}{\left(\frac{\lambda T}{2}\right)^2} f(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau le théorème A nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TEA_0^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 4T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T)^2} f(\lambda) d\lambda + \lim_{T \rightarrow \infty} 4T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \frac{\lambda T}{2}}{\left(\frac{\lambda T}{2}\right)^2} f(\lambda) d\lambda \\ &= 4f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + 4f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx \end{aligned}$$

en posant  $\frac{x}{2} = y$  nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TEA_0^2 = 4f(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx}_{=\pi} + 8f(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 y}{y^2} dy}_{=\frac{\pi}{2}} = 8\pi f(0)$$

d'où la formule (2.2.14).

Pour montrer (2.2.16) et (2.2.17) nous allons procéder de la même manière en utilisant les lemmes 3 et 4 respectivement.

D'après les formules (2.2.18), (2.2.19) nous obtenons

$$TEA_m A_n = T(J_1 + J_2) = 2(TS_1 + TS_2) + 2(TU_1 + TU_2)$$

et en appliquant le théorème A nous avons pour  $m \neq n \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TS_1 &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x + 2m\pi)(x + 2n\pi)} dx = 0 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} TS_2 = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x + 2m\pi)(x - 2n\pi)} dx = 0 \\ \lim_{T \rightarrow \infty} TU_1 &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{(x + m\pi)(x + n\pi)} dx = 0 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} TU_2 = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{(x + m\pi)(x - n\pi)} dx = 0 \end{aligned}$$

d'où la formule (2.2.16).

Même chose en utilisant les formules (2.2.22), (2.2.23) nous obtenons

$$TEB_m B_n = T(K_1 + K_2) = 2(TV_1 - TV_2) + 2(TW_1 - TW_2)$$

et en appliquant le théorème A nous avons pour  $m \neq n \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TV_1 &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x + 2m\pi)(x + 2n\pi)} dx = 0 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} TV_2 = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x + 2m\pi)(x - 2n\pi)} dx = 0 \\ \lim_{T \rightarrow \infty} TW_1 &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{(x + m\pi)(x + n\pi)} dx = 0 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} TW_2 = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{(x + m\pi)(x - n\pi)} dx = 0 \end{aligned}$$

d'où la formule (2.2.17) et la preuve du théorème 17 s'achève. ■

Dans le théorème précédent nous avons montré que la vitesse de convergence des covariances est de l'ordre  $\frac{1}{T}$  sous la condition que la densité spectrale est continue au point  $x = 0$ . Mais le théorème suivant montre qu'avec plus de régularité sur la densité spectrale  $f$ , la vitesse de convergence des quantités  $EA_m A_n$  et  $EB_m B_n$  pour  $m \neq n$  est de l'ordre  $\frac{1}{T^2}$ .

**Théorème 19** *Si la densité spectrale  $f$  admet une dérivée continue au voisinage de l'origine et*

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx \quad (2.2.26)$$

existe. Alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 EA_m A_n = 16 \int_{0^+}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda, m \neq n \quad (2.2.27)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 EB_m B_n = 0, m \neq n \quad (2.2.28)$$

**Remarque 20** Comme le processus  $X$  est à valeurs réelles, sa densité spectrale  $f$  est une fonction paire et donc sous la condition du théorème elle admet une dérivée  $f'$  qui est impaire au voisinage de 0. D'où  $f'(0) = 0$ .

**Preuve:** 1] D'après le lemme 3 nous rappelons que

$$EA_m A_n = J_1 + J_2 \quad \text{où} \quad J_1 = 2(S_1 + S_2) \quad \text{et} \quad J_2 = 2(U_1 + U_2)$$

avec

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda$$

$$U_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad U_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda$$

Nous commençons par traiter  $J_1$ . Comme nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n \quad (2.2.29)$$

nous pouvons écrire

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda$$

Prenons  $A$  assez grand tel que  $A > \sup(m, n)$  et fixé. Choisissons  $\delta$  assez petit et  $T$  assez grand de façon que  $\delta > A/T$  et  $f'(x)$  existe et est bornée dans  $[-\delta, \delta]$ . Décomposons  $S_1$  en trois

parties comme suit:

$$S_1 = \int_{|\lambda| < A/T} + \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} + \int_{|\lambda| \geq \delta} =: S_{11} + S_{12} + S_{13}$$

Comme l'intégrand de la formule (2.2.29) est borné par 1 et  $f'(0) = 0$  nous avons

$$\begin{aligned} |S_{11}| &= \left| \int_{|\lambda| < A/T} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \right| \\ &\leq \int_{|\lambda| < A/T} \underbrace{\left| \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} \right|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \right|}_{=o(1)} |\lambda| d\lambda \\ &\leq o(1) \int_{|\lambda| < A/T} |\lambda| d\lambda = 2o(1) \int_0^{A/T} \lambda d\lambda = 2o(1) \left[ \frac{1}{2} \lambda^2 \right]_0^{A/T} \end{aligned}$$

Donc

$$|S_{11}| = o(1) \frac{A^2}{T^2} = o\left(\frac{A^2}{T^2}\right)$$

d'où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S_{11} = 0 \quad (2.2.30)$$

Puis

$$\begin{aligned} S_{12} &= \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\ &= \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\sin^2 \lambda T [f(\lambda) - f(0)]}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda - \frac{1}{2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda \\ &= \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{(\sin^2 \lambda T - \frac{1}{2}) [f(\lambda) - f(0)]}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda \\ &=: S'_{12} + S''_{12} \end{aligned}$$

D'une part nous écrivons  $S''_{12}$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} S''_{12} &= \frac{1}{2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T)} d\lambda \end{aligned}$$

nous avons:  $(\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T) = \lambda^2 + 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2}$  alors nous écrivons

$$\begin{aligned} S''_{12} &= \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\left[ \lambda^2 + 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2} - 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} - 4mn\frac{\pi^2}{T^2} \right] [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \underbrace{\frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2}}_{\text{paire}} d\lambda - \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\left( 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2} \right) [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} d\lambda \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda - \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\left( 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2} \right) [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} d\lambda \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \left| S''_{12} - \frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \right| &= \left| -\frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\left( 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2} \right) [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} d\lambda \right| \\ &\leq \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2|\lambda|(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2}}{|\lambda + 2m\pi/T| |\lambda + 2n\pi/T|} |f(\lambda) - f(0)| \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2|\lambda|(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2}}{|\lambda| |1 + 2m\pi/\lambda T| |1 + 2n\pi/\lambda T|} \underbrace{\left| \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \right|}_{=o(1)} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{2T^2} o(1) \frac{1}{T} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{|\lambda T|}}{|1 + 2m\pi/\lambda T| |1 + 2n\pi/\lambda T|} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ &\leq \frac{1}{2T^3} o(1) \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{A}}{|1 + 2m\pi/\lambda T| |1 + 2n\pi/\lambda T|} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Nous posons:  $K = 2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{A} > 0$  et nous remarquons que  $\frac{1}{|1+2m\pi/\lambda T||1+2n\pi/\lambda T|} \leq 1$  nous avons donc

$$\begin{aligned}
\left| S''_{12} - \frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \right| &\leq \frac{1}{2T^3} o(1)K \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \underbrace{\frac{1}{\lambda^2}}_{\text{paire}} d\lambda \\
&= \frac{1}{T^3} o(1)K \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{T^3} o(1)K \left[ -\frac{1}{\lambda} \right]_{A/T}^{\delta} \\
&= \frac{1}{T^3} o(1)K \left[ -\frac{1}{\delta} + \frac{T}{A} \right] \\
&< \frac{2}{T^3} o(1)K \frac{T}{A} \left( \text{car } -\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\delta} < \frac{T}{A} \right) \\
&= \frac{1}{T^2} o(1)O(1) = o\left(\frac{1}{T^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$S''_{12} = \frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \quad (2.2.31)$$

En prenant  $\delta > 0$  suffisamment petit et comme  $\int_{0^+}^{\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx < \infty$  alors l'intégrale de la formule (2.2.31) est plus petite que  $\varepsilon$  où  $\varepsilon > 0$  est arbitraire. Ainsi nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S''_{12} = 0 \quad (2.2.32)$$

et d'autre part avec  $\sin^2 \lambda T - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2\lambda T$  alors nous écrivons  $S'_{12}$  de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
S'_{12} &= \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\sin^2 \lambda T - \frac{1}{2}}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\cos 2\lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda
\end{aligned}$$

avec un raisonnement similaire que pour  $S''_{12}$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
S'_{12} &= -\frac{1}{2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\lambda^2 \cos 2\lambda T}{\lambda^2 T^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= -\frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\left[ \lambda^2 + 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2} - 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} - 4mn\frac{\pi^2}{T^2} \right]}{\lambda^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} \\
&\quad \cos 2\lambda T [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= -\frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \underbrace{\cos 2\lambda T \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2}}_{\text{paire}} d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\left[ 2\lambda(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{T^2} \right] \cos 2\lambda T}{\lambda^2 (\lambda + 2m\pi/T) (\lambda + 2n\pi/T)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= -\frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{[f(\lambda) - f(0)] \cos 2\lambda T}{\lambda^2} d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\lambda \left[ 2(m+n)\frac{\pi}{T} + 4mn\frac{\pi^2}{\lambda T^2} \right] \cos 2\lambda T}{\lambda (1 + 2m\pi/\lambda T) (1 + 2n\pi/\lambda T)} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

par suite nous avons

$$\begin{aligned}
&\left| S'_{12} + \frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \right| \\
&\leq \frac{1}{2T^2} \cdot \frac{1}{T} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{|\lambda|T}}{|1 + 2m\pi/\lambda T| |1 + 2n\pi/\lambda T|} \left| \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \right| \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\
&\leq \frac{1}{2T^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot o(1) \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{A}}{|1 + 2m\pi/\lambda T| |1 + 2n\pi/\lambda T|} \frac{d\lambda}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

nous posons  $K = 2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{A} > 0$  et nous remarquons que  $\frac{1}{|1+2m\pi/\lambda T||1+2n\pi/\lambda T|} \leq 1$  alors nous avons

$$\left| S'_{12} + \frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \right| \leq \frac{1}{T^3} \cdot o(1) \cdot K \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda$$

d'où nous avons

$$S'_{12} = -\frac{1}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \quad (2.2.33)$$

Comme  $\frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda}$  est différentiable dans  $[A/T, \delta]$  et  $\frac{\cos 2\lambda T}{\lambda}$  est continue dans  $[A/T, \delta]$  alors nous appliquons le second théorème de la valeur moyenne. Par suite il existe  $\xi \in ]A/T, \delta[$  et nous avons

$$\int_{A/T}^{\delta} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda} \left[ \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \right] d\lambda = \frac{T}{A} [f(A/T) - f(0)] \int_{A/T}^{\xi} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{\delta} [f(\delta) - f(0)] \int_{\xi}^{\delta} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda} d\lambda$$

En posant  $\lambda T = v$  nous avons  $\int_{A/T}^{\xi} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda} d\lambda = \int_A^{T\xi} \frac{\cos 2v}{v} dv$  qui est bornée pour  $A > 0$  fixé. Même résultat pour  $\int_{\xi}^{\delta} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda} d\lambda = \int_{T\xi}^{T\delta} \frac{\cos 2v}{v} dv$ . En notant que  $f'(0) = 0$  alors nous pouvons trouver un  $\delta$  très petit que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\delta} \left| \int_{A/T}^{\delta} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \right| < \varepsilon \text{ où } \varepsilon > 0 \text{ est arbitraire.}$$

alors de la formule (2.2.33) nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S'_{12} = 0 \quad (2.2.34)$$

Ainsi par les formules (2.2.32) et (2.2.34) nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S'_{12} + \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S''_{12} = 0 \quad (2.2.35)$$

De la même manière que pour  $S_{12}$  nous traitons  $S_{13}$  et nous obtenons l'expression suivante:

$$S_{13} = \frac{1}{T^2} \int_{\lambda \geq \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda - \frac{1}{T^2} \int_{\lambda \geq \delta} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \text{ quand } T \rightarrow \infty$$

Comme  $\frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda^2}$  est intégrable pour  $\lambda > \delta$  d'après le lemme de Rieamann-Lebesgue nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\lambda \geq \delta} \frac{\cos 2\lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda = 0$$

et par suite nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S_{13} = \int_{\lambda \geq \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \quad (2.2.36)$$

En combinant (2.2.30), (2.2.35) et (2.2.36) nous obtenons pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\delta} \left| T^2 S_1 - \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \right| < \varepsilon$$

ainsi nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S_1 = \int_{0^+}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \quad (2.2.37)$$

Les mêmes arguments sont appliqués pour montrer que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 S_2 = \int_{0^+}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \quad (2.2.38)$$

En combinant (2.2.37) et (2.2.38) nous arrivons à

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 J_1 = 4 \int_{0^+}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \quad (2.2.39)$$

Maintenant, considérons  $J_2$ . Procédons similairement comme pour  $J_1$ . Décomposons  $U_1$  en

$$U_1 = \int_{|\lambda| < A/T} + \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} + \int_{|\lambda| \geq \delta} =: U_{11} + U_{12} + U_{13}$$

et en remarquant que pour  $m \neq n$  nous avons  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda = 0$ , par suite

$$\begin{aligned}
|T^2 U_{11}| &= \left| T^2 \int_{|\lambda| < A/T} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \right| \\
&\leq T^2 \int_{|\lambda| < A/T} \underbrace{\frac{1}{|\lambda T + 2m\pi| |\lambda T + 2n\pi|}}_{\leq 1} |f(\lambda) - f(0)| d\lambda \\
&\leq T^2 \int_{|\lambda| < A/T} \underbrace{\frac{|f(\lambda) - f(0)|}{|\lambda|}}_{=o(1)} |\lambda| d\lambda = o(1) T^2 \int_{|\lambda| < A/T} \underbrace{|\lambda|}_{\text{paire}} d\lambda \\
&= o(1) T^2 \frac{A^2}{T^2} = o(1)
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 U_{11} = 0 \tag{2.2.40}$$

De:  $(1 - \cos \lambda T)^2 = 1 - 2 \cos \lambda T + \cos^2 \lambda T$ , nous avons

$$\begin{aligned}
T^2 U_{12} &= T^2 \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= T^2 \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda \\
&\quad - 2T^2 \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\cos \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&\quad + T^2 \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\cos^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= 2T^2 \underbrace{\int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda}_{E_1} \\
&\quad - 2T^2 \underbrace{\int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\cos \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda}_{E_2} \\
&\quad - T^2 \underbrace{\int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda}_{E_3}
\end{aligned}$$

Nous remarquons que  $E_3 = S_{12}$ , donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 E_3 = 0$$

Pour  $E_1$  nous avons

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda = \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\lambda^2 [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2 T^2 (\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T)} d\lambda \\
&= \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \underbrace{\frac{[f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2}}_{\text{paire}} d\lambda - \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2\lambda(m+n)\pi/T + 4mn\pi^2/T^2}{\lambda^2(\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= \frac{2}{T^2} \underbrace{\int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{[f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2} d\lambda}_{\leq \varepsilon \text{ pour } \delta \text{ très petit}} + o\left(\frac{1}{T^2}\right)
\end{aligned}$$

ainsi nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 E_1 = 0$$

Pour  $E_2$  nous avons

$$\begin{aligned}
E_2 &= \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{\cos \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \underbrace{\frac{\cos \lambda T [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2}}_{\text{paire}} d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{[2\lambda(m+n)\pi/T + 4mn\pi^2/T^2] \cos \lambda T}{\lambda^2(\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= \frac{2}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{\cos \lambda T [f(\lambda) - f(0)]}{\lambda^2} d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{[2\lambda(m+n)\pi/T + 4mn\pi^2/T^2] \cos \lambda T}{\lambda^2(\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \left| E_2 - \frac{2}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{\cos \lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \right| \\
& \leq \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \left| \frac{2\lambda(m+n)\pi/T + 4mn\pi^2/T^2}{\lambda^2(\lambda + 2m\pi/T)(\lambda + 2n\pi/T)} \right| |f(\lambda) - f(0)| d\lambda \\
& \leq \frac{1}{T^2} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \left| \frac{2\lambda^2(m+n)\pi/T + 4\lambda mn\pi^2/T^2}{\lambda^2(1 + 2m\pi/\lambda T)(1 + 2n\pi/\lambda T)} \right| \underbrace{\frac{|(\lambda) - f(0)|}{|\lambda|}}_{o(1)} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda \\
& \leq \frac{1}{T^2} o(1) \frac{1}{T} \int_{\delta > |\lambda| \geq A/T} \frac{2(m+n)\pi + 4mn\pi^2/A}{|1 + 2m\pi/\lambda T| |1 + 2n\pi/\lambda T|} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda
\end{aligned}$$

Nous posons  $M = 2(m+n)\pi + 4mn\frac{\pi^2}{A} > 0$ , nous avons  $\frac{1}{|1+2m\pi/\lambda T||1+2n\pi/\lambda T|} \leq 1$  et nous majorons  $\frac{1}{\delta} < \frac{T}{A}$  d'où

$$E_2 = \frac{2}{T^2} \int_{\delta > \lambda \geq A/T} \frac{\cos \lambda T}{\lambda^2} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

Encore une fois comme  $\frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda}$  est différentiable dans  $[A/T, \delta]$  par le second théorème de la moyenne nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 E_2 = 0$$

Finalement

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 U_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 (E_1 - E_2 - E_3) = 0 \quad (2.2.41)$$

Maintenant pour  $U_{13}$  nous avons

$$\begin{aligned}
U_{13} &= \int_{|\lambda| > \delta} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= \int_{|\lambda| > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} d\lambda + \int_{|\lambda| > \delta} \frac{-2 \cos \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&\quad + \int_{|\lambda| > \delta} \frac{\cos^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} [f(\lambda) - f(0)] d\lambda \\
&= : U'_{13} + U''_{13} + U'''_{13}
\end{aligned}$$

Exactement par les mêmes procédures comme pour  $S_{13}$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
 U'_{13} &= \frac{2}{T^2} \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \\
 U''_{13} &= -\frac{4}{T^2} \underbrace{\int_{\lambda > \delta} \cos \lambda T \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda}_{=o(1)} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) = o\left(\frac{1}{T^2}\right) \\
 &\quad \text{(lemme de Rieamann-Lebesgue)} \\
 U'''_{13} &= \frac{1}{T^2} \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right)
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 U_{13} &= U'_{13} + U''_{13} + U'''_{13} = \frac{2}{T^2} \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{T^2} \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \\
 &= \frac{3}{T^2} \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda + o\left(\frac{1}{T^2}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\delta} \left| T^2 U_{13} - 3 \int_{\lambda > \delta} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \right| < \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 U_{13} = 3 \int_{0^+}^{+\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \tag{2.2.42}$$

En combinant (2.2.40), (2.2.41) et (2.2.42) nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 U_1 = 3 \int_{0^+}^{+\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \tag{2.2.43}$$

De la même manière que pour  $U_1$  nous obtenons pour  $U_2$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 U_2 = 3 \int_{0^+}^{+\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \tag{2.2.44}$$

D'autre part  $J_2 = 2(U_1 + U_2)$  et donc des formules (2.2.43) et (2.2.44) nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 J_2 = 12 \int_{0^+}^{+\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \quad (2.2.45)$$

Finalement des formules (2.2.39) et (2.2.45) nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EA_n A_m = \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 J_1 + \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 J_2 = 16 \int_{0^+}^{+\infty} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda^2} d\lambda \text{ qui est la formule (2.2.27)}$$

2] D'après le lemme 4 nous rappelons que pour  $m \neq n \neq 0$  nous avons

$$EB_m B_n = K_1 + K_2 \text{ avec } K_1 = 2(V_1 - V_2) \text{ et } K_2 = 2(W_1 - W_2)$$

où

$$V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ et } V_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda T}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T + 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda \text{ et } W_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \lambda T)^2}{(\lambda T + 2m\pi)(\lambda T - 2n\pi)} f(\lambda) d\lambda$$

Nous remarquons que

$$V_1 = S_1, V_2 = S_2, W_1 = U_1, W_2 = U_2$$

donc nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^2 K_1 = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 (V_1 - V_2) = 0 \quad (2.2.46)$$

$$\text{et } \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 K_2 = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 (W_1 - W_2) = 0 \quad (2.2.47)$$

par suite nous combinons (2.2.46) et (2.2.47) pour obtenir

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EB_m B_n = \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 K_1 + \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 K_2 = 0$$

et c'est la formule (2.2.28). Ainsi s'achève la preuve du théorème. ■

## 2.3 Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

Soit  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  un processus stationnaire vérifiant les mêmes conditions du paragraphe 2.1 sauf que  $X$  peut être à valeurs complexes.

La série de Fourier du processus  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  sur un intervalle  $(0, T)$  où  $T$  est un nombre positif fixé est

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi i n t / T}$$

où  $C_n$  sont les coefficients de Fourier de  $X$  définis par

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-2\pi i n t / T} dt =: \frac{1}{2} (A_n - i B_n)$$

où

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T X(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T X(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$

Nous avons  $EC_n = 0$  car  $EC_n = E \left( \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-2\pi i n t / T} dt \right) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T E[X(t)] e^{-2\pi i n t / T} dt = 0$

Pour étudier le comportement de  $C_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ , nous nous occuperons de la grandeur de  $\sum_{|n| \geq N} E|C_n|^2$  et pour cela nous avons besoin du lemme suivant:

**Lemme 5** *Nous avons*

$$E|C_n|^2 = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T / 2)}{(\lambda T - 2n\pi)^2} dF(\lambda) \quad (2.3.1)$$

où  $F$  est la distribution spectrale de  $X$

**Preuve:** Nous avons

$$\begin{aligned}
E |C_n|^2 &= EC_n \overline{C_n} = E \left[ \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-2\pi i n t / T} dt \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \overline{X(s)} e^{2\pi i n s / T} ds \right] \\
&= \frac{1}{T^2} E \int_0^T \int_0^T X(t) \overline{X(s)} e^{-2\pi i n t / T} e^{2\pi i n s / T} dt ds \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E \left[ X(t) \overline{X(s)} \right] e^{-2\pi i n (t-s) / T} dt ds \quad (\text{Fubini}) \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho(t-s) e^{-2\pi i n (t-s) / T} dt ds \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF(\lambda) \right] e^{-2\pi i n (t-s) / T} dt ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{T^2} \int_0^T e^{\frac{it}{T}(\lambda T - 2n\pi)} dt \int_0^T e^{\frac{-is}{T}(\lambda T - 2n\pi)} ds \right] dF(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda T - 2n\pi)^2} (e^{i\lambda T} - 1) (e^{-i\lambda T} - 1) dF(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(\lambda T - 2n\pi)^2} (1 - \cos \lambda T) dF(\lambda) \\
&= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T / 2)}{(\lambda T - 2n\pi)^2} dF(\lambda) \quad (\text{car } 1 - \cos \lambda T = 2 \sin^2 \frac{\lambda T}{2})
\end{aligned}$$

d'ou le lemme. ■

Nous allons commencer par le théorème suivant:

**Théorème 21** *Nous avons*

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O(N^{-1}) + O(F(\infty) - F(\pi N / T)) + O(F(-\pi N / T)) \quad (2.3.2)$$

**Preuve:** Nous écrivons

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = \sum_{n \geq N} E |C_n|^2 + \sum_{n \leq -N} E |C_n|^2 = I + J$$

D'après la formule (2.3.1) du lemme 5 nous avons

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n \geq N} E |C_n|^2 = 4 \sum_{n \geq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(\lambda T - 2n\pi)^2} dF(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \geq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} dF(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \geq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi \mu}{(n - \mu)^2} dF\left(\frac{2\pi \mu}{T}\right) \quad (\text{posons } \mu = \lambda T/2\pi) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi \mu}{(n - \mu)^2} dF\left(\frac{2\pi \mu}{T}\right) \quad \left(\text{fonctions } \geq 0, \text{ nous pouvons intervertir } \sum \text{ et } \int\right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi \mu}{(n - \mu)^2} dF\left(\frac{2\pi \mu}{T}\right) + \frac{1}{\pi^2} \int_{N/2}^{+\infty} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi \mu}{(n - \mu)^2} dF\left(\frac{2\pi \mu}{T}\right) \\ &= : I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Pour  $I_1$  nous avons

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi \mu}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{1}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \\
&\leq \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{1}{(n - N/2)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \quad (\text{car } \mu < N/2) \\
&= \sum_{m=N/2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{N/2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \quad (\text{posons } m = n - N/2) \\
&\leq \sum_{m=[N/2]}^{\infty} \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{N/2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \quad (\text{car } [N/2] \leq N/2) \\
&\leq \sum_{m=[N/2]}^{\infty} \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) = \sum_{m=[N/2]}^{\infty} \frac{1}{m^2} [F(+\infty) - F(-\infty)] = K \sum_{m=[N/2]}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\
&\leq K \int_{N/2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = K' \frac{1}{N} = O\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

Quant à  $I_2$  nous remarquons que  $\sin^2 \pi (n - \mu) = \sin^2 \pi \mu$  et que  $\sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} < \infty$  ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{N/2}^{+\infty} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right| \leq \int_{N/2}^{+\infty} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \\
&= \int_{N/2}^{+\infty} O(1) dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) = O(1) \int_{N/2}^{+\infty} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) = O(1) \int_{N\pi/T}^{+\infty} dF(x) \\
&= O(1) [F(+\infty) - F(\pi N/T)]
\end{aligned}$$

d'après  $I = I_1 + I_2$  nous avons

$$\sum_{n \geq N} E |C_n|^2 = O\left(\frac{1}{N}\right) + O(F(+\infty) - F(\pi N/T)) \quad (2.3.3)$$

Même chose pour  $J$  nous avons

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n \leq -N} E |C_n|^2 = \sum_{n=N}^{+\infty} E |C_{-n}|^2 \\ &= 4 \sum_{n=N}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(\lambda T + 2n\pi)^2} dF(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(\frac{\lambda T}{2\pi} + n)^2} dF(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sin^2(-\pi\mu)}{(n - \mu)^2} dF\left(-\frac{2\pi\mu}{T}\right) \quad (\text{posons } \mu = -\frac{\lambda T}{2\pi}) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sin^2(-\pi\mu)}{(n - \mu)^2} dF\left(-\frac{2\pi\mu}{T}\right) + \frac{1}{\pi^2} \int_{N/2}^{+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sin^2(-\pi\mu)}{(n - \mu)^2} dF\left(-\frac{2\pi\mu}{T}\right) \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Pour  $J_1$  nous avons

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sin^2(-\pi\mu)}{(n - \mu)^2} dF\left(-\frac{2\pi\mu}{T}\right) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{(n - \mu)^2} dF\left(-\frac{2\pi\mu}{T}\right) \\ &\leq \sum_{m=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{N/2} dF\left(-\frac{2\pi\mu}{T}\right) \quad (m = n - N/2) \\ &\leq K \int_{\frac{N}{2}}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt [F(+\infty) - F(-\infty)] = K' \frac{1}{N} = O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

et pour  $J_2$  nous avons

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \int_{N/2}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n>N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2}}_{< \infty} dF \left( -\frac{2\pi\mu}{T} \right) \\
&= O(1) \int_{N/2}^{+\infty} dF \left( -\frac{2\pi\mu}{T} \right) = O(1) \int_{N/2}^{+\infty} dF \left( -\frac{2\pi\mu}{T} \right) \\
&= O(1) \int_{-\infty}^{-N\pi/T} dF(x) = O(F(-N\pi/T))
\end{aligned}$$

Ainsi d'après  $J = J_1 + J_2$  nous avons

$$\sum_{n \leq -N} E |C_n|^2 = O(F(-N\pi/T)) + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (2.3.4)$$

Enfinement nous additionnons (2.3.3) et (2.3.4) et nous obtenons le résultat (2.3.2) et c'est le théorème. ■

**Théorème 22** Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2 \quad (2.3.5)$$

Alors

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \quad (2.3.6)$$

Si (2.3.5) est vérifiée pour  $\alpha = 2$ , alors

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (2.3.7)$$

**Preuve:** Nous avons pour  $0 \leq \alpha \leq 2$  et  $T$  fixé

$$F(\infty) - F(\pi N/T) = \int_{\pi N/T}^{\infty} dF(\lambda) \leq \left(\frac{T}{\pi N}\right)^\alpha \int_{\pi N/T}^{\infty} \lambda^\alpha dF(\lambda), \text{ car } \lambda \geq \pi N/T \quad (2.3.8)$$

et

$$F(-\pi N/T) = \int_{-\infty}^{-\pi N/T} dF(\lambda) \leq \left(\frac{T}{\pi N}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{-\pi N/T} |\lambda|^\alpha dF(\lambda), \text{ car } |\lambda| \geq -\lambda \geq \frac{\pi N}{T} \quad (2.3.9)$$

D'une part, si  $0 \leq \alpha < 1$  nous avons d'après (2.3.2)

$$\sum_{|n| \geq N} E|C_n|^2 = O(N^{-1}) + O(F(\infty) - F(\pi N/T)) + O(F(-\pi N/T))$$

Par suite

$$\begin{aligned} N^\alpha \sum_{|n| > N} E|C_n|^2 &= O(N^{\alpha-1}) + N^\alpha O(F(\infty) - F(\pi N/T)) + N^\alpha O(F(-\pi N/T)) \\ &= O(N^{\alpha-1}) + N^\alpha O\left(\left(\frac{T}{\pi N}\right)^\alpha \int_{\pi N/T}^{\infty} \lambda^\alpha dF(\lambda)\right) + N^\alpha O\left(\left(\frac{T}{\pi N}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{-\pi N/T} |\lambda|^\alpha dF(\lambda)\right) \\ &= O(N^{\alpha-1}) + O\left(\left(\frac{T}{\pi}\right)^\alpha \int_{\pi N/T}^{\infty} \lambda^\alpha dF(\lambda)\right) + O\left(\left(\frac{T}{\pi}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{-\pi N/T} |\lambda|^\alpha dF(\lambda)\right) \end{aligned}$$

du fait que nous avons  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty$ ,  $0 \leq \alpha < 2$ , alors pour  $T$  fixé et  $0 \leq \alpha < 1$  nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^\alpha \sum_{|n| \geq N} E|C_n|^2 = 0$$

Ainsi nous obtenons (2.3.6).

De l'autre part dans le but d'obtenir (2.3.6) pour  $1 \leq \alpha < 2$  et (2.3.7) pour  $\alpha = 2$  alors il est suffisant de montrer que  $I_1$  et  $J_1$  du théorème 21 sont  $o(1/N^\alpha)$  pour  $1 \leq \alpha < 2$  et  $O(1/N^\alpha)$  pour  $\alpha = 2$  respectivement.

En regroupant les deux cas nous allons montrer que

$$I_1 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi \mu}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) = O \left( \frac{1}{N^2} \right)$$

$$\text{et } J_1 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2(-\pi \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( -\frac{2\pi \mu}{T} \right) = O \left( \frac{1}{N^2} \right)$$

Pour  $I_1$  nous remarquons que  $\sin^2 \pi \mu = \sin^2 \pi (n - \mu)$

$$I_1 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right)$$

$$= : I_{11} + I_{12}$$

Pour  $I_{12}$  nous obtenons

$$I_{12} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} d \left( F(\infty) - F \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right)$$

et une intégration par partie donne

$$I_{12} = \left[ -\frac{1}{\pi^2} \left( F(\infty) - F \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right) \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} \right]_0^{N/2}$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^{N/2} \left[ F(\infty) - F \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right] d \left( \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} \right)$$

$$= \left[ -\frac{1}{\pi^2} \left( F(\infty) - F \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right) \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} \right]_0^{N/2}$$

$$+ \int_0^{N/2} \left[ F(\infty) - F \left( \frac{2\pi \mu}{T} \right) \right] \left[ -\frac{1}{\pi} \sum_{n \geq N} \frac{\sin 2(n - \mu) \pi}{(n - \mu)^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2(n - \mu) \pi}{(n - \mu)^3} \right] d\mu$$

alors

$$I_{12} = O\left(F(\infty) - F\left(\frac{\pi N}{T}\right)\right) \cdot O\left(\frac{1}{N}\right) + \int_0^{N/2} \left[F(\infty) - F\left(\frac{2\pi\mu}{T}\right)\right] \cdot O\left(\frac{1}{N^2}\right) d\mu \quad (2.3.10)$$

du fait que

$$\sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi(n - \mu)}{(n - \mu)^2} = O(1/N), \quad \sum_{n \geq N} \frac{\sin 2(n - \mu)\pi}{(n - \mu)^2} = O(1/N^2), \quad \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2(n - \mu)\pi}{(n - \mu)^3} = O(1/N^2)$$

En utilisant la relation (2.3.8), le premier terme du côté droit de la formule (2.3.10) s'écrit

$$O\left(F(\infty) - F\left(\frac{\pi N}{T}\right)\right) \cdot O\left(\frac{1}{N}\right) = o(1/N^\alpha) \cdot O(1/N) = o(1/N^2), \quad (1 \leq \alpha \leq 2)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[F(\infty) - F\left(\frac{2\pi\mu}{T}\right)\right] d\mu &= \frac{T}{2\pi} \int_0^\infty [F(\infty) - F(\lambda)] d\lambda \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_0^\infty \lambda dF(\lambda) \quad (\text{intégration par partie}) \\ &= O\left(\underbrace{\int_{-\infty}^\infty |\lambda|^\alpha dF(\lambda)}_{< \infty}\right) = O(1) \quad (1 \leq \alpha \leq 2) \end{aligned}$$

Ainsi de (2.3.10) nous avons

$$I_{12} = O(1/N^2) \quad (2.3.11)$$

Même chose pour  $I_{11}$ , par intégration par partie nous avons

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( \frac{2\pi\mu}{T} \right) \\
&= \frac{1}{\pi^2} F \left( \frac{2\pi\mu}{T} \right) \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} \Big|_{\mu=-\infty}^0 - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 F \left( \frac{2\pi\mu}{T} \right) d \left( \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} \right) \\
&= \underbrace{F \left( \frac{2\pi\mu}{T} \right) \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2} \Big|_{\mu=-\infty}^0}_{=0} \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 F \left( \frac{2\pi\mu}{T} \right) \left[ \underbrace{\frac{1}{\pi} \sum_{n \geq N} \frac{\sin 2\pi (n - \mu)}{(n - \mu)^2}}_{=O(1/N^2)} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 \pi (n - \mu)}{(n - \mu)^3} \right] d\mu
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$I_{11} = O(1/N^2) \tag{2.3.12}$$

Par suite de (2.3.11) et (2.3.12) nous avons

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = O(1/N^2)$$

Nous procédons de la même manière pour trouver

$$J_1 = J_{11} + J_{12} = O(1/N^2)$$

$$\text{avec } J_{11} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 (-\pi\mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( -\frac{2\pi\mu}{T} \right) \text{ et } J_{12} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{N/2} \sum_{n \geq N} \frac{\sin^2 (-\pi\mu)}{(n - \mu)^2} dF \left( -\frac{2\pi\mu}{T} \right)$$

Ainsi le théorème s'achève. ■

## 2.4 Modes de convergence de la série de Fourier du processus

### 2.4.1 Convergence en moyenne quadratique

Soit  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  un processus continu faiblement stationnaire à valeurs complexes. Soit  $S_n(t)$  la somme partielle des séries de Fourier de  $X(t)$  sur  $(0, T)$  où  $T$  fixé.

Nous avons le théorème suivant:

**Théorème 23** *Pour tout  $t$ ,  $0 < t < T$ ,*

$$E |S_n(t) - X(t)|^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (2.4.1)$$

**Preuve:** Soit

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{2\pi i n t / T} \text{ avec } C_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-2\pi i n t / T} dt$$

et soit  $S_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} C_k e^{2\pi i k t / T}$  la somme partielle de  $X(t)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} C_k e^{2\pi i k t / T} = \sum_{k=-n}^{k=n} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T X(u) e^{-2\pi i k u / T} du \right] e^{2\pi i k t / T} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T X(u) \left[ \sum_{k=-n}^{k=n} e^{-2\pi i k u / T} e^{2\pi i k t / T} \right] du = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) \sum_{k=-n}^{k=n} e^{-2\pi i k (u-t) / T} du \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T X(u) \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{k=n} \cos \frac{2\pi k (u-t)}{T} \right] du \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T X(u) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \cos \frac{2\pi k (u-t)}{T} \right] du \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T X(u) D_n(u-t) du \end{aligned}$$

où  $D_n$  est le noyau de Dirichlet définie pour  $n \geq 0$  par

$$D_n(u) =: \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \cos \frac{2k\pi u}{T} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi u}{T}}{2 \sin \frac{\pi u}{T}}$$

Nous savons que  $\frac{2}{T} \int_0^T D_n(u-t) du = 1$ , d'où nous avons

$$S_n(t) - X(t) = \frac{2}{T} \int_0^T [X(u) - X(t)] D_n(u-t) du$$

Par suite

$$\begin{aligned}
E |S_n(t) - X(t)|^2 &= E [S_n(t) - X(t)] \left[ \overline{S_n(t) - X(t)} \right] \\
&= E \left[ \frac{2}{T} \int_0^T [X(u) - X(t)] D_n(u-t) du \right] \cdot \left[ \frac{2}{T} \int_0^T [\overline{X(v) - X(t)}] D_n(v-t) dv \right] \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T E [X(u) - X(t)] [\overline{X(v) - X(t)}] \cdot D_n(u-t) D_n(v-t) dudv \quad (\text{par Fubini}) \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\rho(u-v) - \rho(u-t) - \rho(t-v) + \rho(0)] \cdot \\
&\quad D_n(u-t) D_n(v-t) dudv \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\lambda(u-v)} - e^{i\lambda(u-t)} - e^{-i\lambda(v-t)} + 1] dF(\lambda) \right] \cdot \\
&\quad D_n(u-t) D_n(v-t) dudv \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\lambda(u-t)} e^{-i\lambda(v-t)} - e^{i\lambda(u-t)} - e^{-i\lambda(v-t)} + 1] dF(\lambda) \right] \cdot \\
&\quad D_n(u-t) D_n(v-t) dudv \\
&= \frac{4}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^T (e^{i\lambda(u-t)} - 1) D_n(u-t) du \right] \cdot \\
&\quad \left[ \int_0^T \overline{(e^{i\lambda(v-t)} - 1) D_n(v-t) dv} \right] dF(\lambda) \\
&= \frac{4}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^T (e^{i\lambda(u-t)} - 1) D_n(u-t) du \right|^2 dF(\lambda)
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Dirichlet nous avons  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T (e^{i\lambda(u-t)} - 1) D_n(u-t) du = 0$  et par l'inégalité de Cauchy -Schwartz

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T (e^{i\lambda(u-t)} - 1) D_n(u-t) du \right|^2 &\leq \int_0^T |e^{i\lambda(u-t)} - 1|^2 du \int_0^T |D_n(u-t)|^2 du \\
&\leq K \text{ qui est } dF\text{-intégrable}
\end{aligned}$$

Finalement par le théorème de convergence dominée nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E |S_n(t) - X(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(\lambda) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{T} \int_0^T (e^{i\lambda(u-t)} - 1) D_n(u-t) du \right|^2 = 0$$

D'où le résultat (2.4.1). ■

## 2.4.2 Convergence absolue presque-sûre

Nous prouvons un théorème sur la convergence absolue p.s de la série de Fourier de  $X(t)$  sur  $[0, T]$  qui est analogue au théorème de **S.Bernstein** ( voir[14] p.135) que nous rappelons

**Théorème A(S.Bernstein):** Si  $f \in Lip(\alpha)$ , avec  $\alpha > \frac{1}{2}$  alors la série de Fourier de  $f$  converge absolument

**Théorème 24** Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty \quad (2.4.2)$$

pour un  $\alpha > 1$ , alors la série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi t/T}, \quad 0 < t < T \quad (2.4.3)$$

converge absolument avec probabilité 1

**Preuve:** Pour tout  $0 < t < T$ ,  $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi t/T}$ . Montrons que  $E \left( \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi t/T} \right| \right) < \infty$  (i.e)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} E |C_n| < \infty$ . Nous écrivons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E |C_n| = \sum_{n=-\infty}^0 E |C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} E |C_n| = E |C_0| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} E |C_n| \quad (\text{car } |C_n| = |C_{-n}|) \quad (2.4.4)$$

L'hypothèse (2.4.2) est vérifiée pour un  $\alpha > 1$ . La preuve est faite pour  $1 < \alpha < 2$ . Si  $\alpha > 2$  nous nous ramenons au cas  $1 < \alpha < 2$  car la preuve utilise la finitude des moments d'ordre compris entre un et deux.

D'une part nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} E|C_n| = E|C_1| + \sum_{n=2}^{\infty} E|C_n|$$

Ecrivons  $\sum_{n=2}^{\infty} E|C_n|$  sous la forme  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} E|C_n|$  pour tous  $\nu = 1, 2, \dots$

Par Cauchy Shwartz nous avons

$$\sum_{n=2}^{\infty} E|C_n| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} E|C_n| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} E|C_n|^2 \right)^{1/2} (2^{\nu} - 2^{\nu-1})^{1/2}$$

D'après (2.3.6) du théorème 22 nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} E|C_n| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(2^{-\alpha(\nu-1)/2}\right) O\left(2^{\nu/2}\right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(2^{-\nu(\alpha-1)/2}\right) = O(1) \text{ (série géométrique de raison } \left|2^{-\frac{\alpha-1}{2}}\right| < 1) \end{aligned}$$

Ainsi  $\sum_{n=2}^{\infty} E|C_n| < \infty$ ,  $E|C_1| \leq \frac{1}{T} E \int_0^T |X(t) e^{2\pi i t}| dt \leq \int_0^T E|X(t)| dt < \infty$  et  $E|C_0| < \infty$ . Par suite de (2.4.4) nous aboutissons à

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E|C_n| < \infty$$

D'où  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|$  converge avec probabilité 1 qui est le théorème. ■

### 2.4.3 Convergence presque-partout

Le théorème que nous allons démontrer est un résultat analogue au théorème de **Kolmogorov-Seliverstov** ([14] p.252) que nous rappelons

**Théorème (Kolmogorov-Seliverstov):** Si

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.4.5}$$

est la série de Fourier d'une fonction  $f$  de  $L_2(0, 2\pi)$  et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

alors la série de Fourier(2.4.5) converge presque partout vers  $f(x)$  dans  $(0, 2\pi)$

**Théorème 25** Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |\lambda| dF(\lambda) < \infty$$

alors la série de Fourier  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi i n t / T}$  du processus  $X(t)$ ,  $0 < t < T$ , converge presque partout pour tout  $t$  dans  $0 < t < T$  avec une probabilité 1.

Avant de prouver ce théorème nous avons besoin du lemme suivant:

**Lemme 6** Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |\lambda| dF(\lambda) < \infty \tag{2.4.6}$$

alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(|n| + 1) E|C_n|^2 < \infty \tag{2.4.7}$$

où  $C_n$  est le coefficient de Fourier du processus  $X$

**Preuve:** Remarquons que les deux séries  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \log(|n| + 1)$  et  $\sum_{n=2}^{\infty} |C_n|^2 \log n$  sont de même nature.

Nous avons

$$\begin{aligned}
I &= E \sum_{n=2}^{\infty} |C_n|^2 \log n = \sum_{n=2}^{\infty} E \left[ \log n |C_n|^2 \right] = \sum_{n=2}^{\infty} \log n E |C_n|^2 \\
&= 4 \sum_{n=2}^{\infty} \log n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(\lambda T - 2n\pi)^2} dF(\lambda) \quad (\text{d'après (2.3.1) du lemme 5}) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} \log n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} dF(\lambda) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \log n \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} dF(\lambda) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{2 \leq n < \lambda T/2\pi} \frac{\log n \sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} dF(\lambda) + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \geq \lambda T/2\pi} \frac{\log n \sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} dF(\lambda) \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Supposons que  $\lambda > 1$ . D'une part pour l'intégrand de  $I_1$  nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{2 \leq n < \lambda T/2\pi} \frac{\log n \sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} &= O \left( \sum_{2 \leq n \leq [\lambda T/2\pi]} \frac{\log n}{(n - \lambda T/2\pi)^2} \right) \\
&= O \left( \frac{\log [\lambda T/2\pi]}{([\lambda T/2\pi] - \lambda T/2\pi)^2} + \sum_{2 \leq n \leq [\lambda T/2\pi]-1} \frac{\log n}{(n - \lambda T/2\pi)^2} \right) \\
&= O(\log \lambda) + \sum_{1 \leq k \leq [\lambda T/2\pi]} \frac{O(\log k [\lambda T/2\pi])}{k^2} \\
&= O(\log \lambda) + O \left( \sum_{k \geq 1} \frac{\log k}{k^2} \right) + \sum_{k \geq 1} \frac{O(\log \lambda)}{k^2} = O(\log \lambda)
\end{aligned}$$

De même pour  $I_2$  nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq \lambda T/2\pi} \frac{\log n \sin^2(\lambda T/2)}{(n - \lambda T/2\pi)^2} &= O\left(\sum_{n \geq \lceil \lambda T/2\pi \rceil} \frac{\log n}{(n - \lambda T/2\pi)^2}\right) \\
&= O\left(\frac{\log \lceil \lambda T/2\pi \rceil}{(\lceil \lambda T/2\pi \rceil - \lambda T/2\pi)^2} + \sum_{n=\lceil \lambda T/2\pi \rceil+1}^{\infty} \frac{\log n}{(n - \lambda T/2\pi)^2}\right) \\
&= O(\log \lambda) + O\left(\sum_{k=+1}^{\infty} \frac{\log(k + \lambda T/2\pi)}{k^2}\right) \\
&= O(\log \lambda) + O\left(\sum_{k=+1}^{\infty} \frac{\log(k + \lceil \lambda T/2\pi \rceil + 1)}{k^2}\right) \\
&= O(\log \lambda) + O\left(\underbrace{\sum_{k=+1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}}_{< \infty}\right) + O\left(\sum_{k=+1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{\lceil \lambda T/2\pi \rceil + 1}{k}\right)}{k^2}\right) \\
&= O(\log \lambda) + O(1) + O\left(\sum_{k=+1}^{\infty} \frac{\log(2 + \lceil \lambda T/2\pi \rceil)}{k^2}\right) \text{ (pour } k \geq 1) \\
&= O(\log \lambda) + O(\log \lambda) \sum_{k=+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = O(\log \lambda)
\end{aligned}$$

Nous procédons de la même façon pour le cas  $\lambda < -1$  et nous obtenons le même résultat ainsi nous avons

$$I = O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |\lambda| dF(\lambda)\right) = O(1)$$

d'où le lemme. ■

**Preuve:** Le théorème 25 est une conséquence du théorème de **Kolmogorov-Seliverstov**. Si nous appliquons le lemme 6 alors sa conclusion implique que  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(|n| + 1) |C_n|^2 < \infty$  *p.s* qui à son tour implique la conclusion du théorème. ■

## 2.5 Limite de la loi conjointe des coefficients de Fourier

Dans ce paragraphe nous considérons que le processus stationnaire  $X$  est à valeurs réelles pris sous les mêmes conditions du paragraphe 2.1. Les coefficients de Fourier  $A_n$  et  $B_n$  de

$X = (X(t), 0 < t < T)$  sont donnés par les formules (2.1.6) et (2.1.7) respectivement.

Nous allons étudier la limite de la loi conjointe du vecteur aléatoire

$$\left( \frac{1}{2}A_0, A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \right) \text{ quand } T \rightarrow \infty \quad (2.5.1)$$

Nous supposons que  $X$  a une distribution spectrale  $F$  absolument continue. Dans ce cas le processus  $X$  admet la forme suivante (**voir paragraphe 1.4**)

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda - t) dY(\lambda), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.5.2)$$

où  $c$  est une fonction réelle de  $L_2(\mathbb{R})$  et  $Y$  est un processus stochastique à accroissements orthogonaux tel que

$$E |dY(\lambda)|^2 = d\lambda \quad (2.5.3)$$

La fonction de covariance de  $X$  est de la forme

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{c}(\lambda)|^2 e^{it\lambda} d\lambda \quad (2.5.4)$$

ou  $\hat{c}$  est la transformée de Fourier dans  $L_2$  de  $c$  :  $\hat{c}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t)e^{it\lambda} dt$

Nous avons le théorème suivant

**Théorème 26** *Soit  $X$  un processus stationnaire à valeurs réelles de la forme (2.5.2) avec  $c \in L_2(\mathbb{R})$ ,  $Y$  un processus à accroissements indépendants et satisfaisant les conditions (2.5.3) et  $E |dY(\lambda)|^3 = O(d\lambda)$ . Si  $c \in L_1 \cap L_3(\mathbb{R})$ , alors la loi conjointe des coefficients de Fourier de  $X = (X(t), 0 < t < T)$*

$$\left( \frac{1}{2}A_0T^{1/2}, A_1T^{1/2}, \dots, A_nT^{1/2}, B_1T^{1/2}, \dots, B_nT^{1/2} \right) \quad (2.5.5)$$

converge quand  $T \rightarrow \infty$  vers la loi

$$N\left(0, \frac{1}{2}c_1^2\right) * \prod^{2n^*} N(0, c_1^2)$$

où  $c_1 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} c(\mu) d\mu \right|$  et  $\prod^{2n^*}$  signifie  $2n$  fois le produit de convolution

Avant de prouver ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants:

**Lemme 7** (i) Soit  $X$  une v.a. réelle, telle que  $EX = 0$  et

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) dY_\alpha(\lambda) \quad (2.5.6)$$

où  $c \in L_2 \cap L_3(\mathbb{R})$  et  $Y_\alpha(\lambda)$  est un processus à accroissements indépendants avec

$$E|dY_\alpha(\lambda)|^2 = \alpha d\lambda, \quad EdY_\alpha(\lambda) = 0, \quad E|dY_\alpha(\lambda)|^3 = O(\alpha d\lambda) \quad \text{où } \alpha \text{ une constante } > 0 \quad (2.5.7)$$

alors la fonction caractéristique  $\varphi_\alpha$  de  $X$  est donnée par

$$\varphi_\alpha(u) = \exp\left(-\frac{\alpha u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda + O(\alpha u^3)\right) \quad \text{pour } u \text{ petit.} \quad (2.5.8)$$

(ii) La loi de la v.a.  $X/\alpha^{1/2}$  converge quand  $\alpha \rightarrow \infty$  vers la loi normale

$$N\left(0, \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda\right)$$

**Preuve:** (i) Pour  $c$  une fonction en escalier définie par

$$c(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < a_0 \\ c_j & \text{si } a_{j-1} \leq \lambda < a_j \\ 0 & \text{si } \lambda \geq a_n \end{cases} \quad (2.5.9)$$

où  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  sont des points réels. Nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) dY_\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^n c_j (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0)) \quad (2.5.10)$$

Pour une fonction  $c \in L_2(\mathbb{R})$  il existe une suite de fonctions étagées qui converge vers  $c$  dans  $L_2$  et son intégrale est définie comme la limite en  $L_2$  du membre droit de la formule (2.5.10). D'où pour une suite de fonctions étagées  $c_n$  de la forme (2.5.9) convergant vers  $c$  dans  $L_2$  nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) dY_\alpha(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0)) \quad (2.5.11)$$

Alors la fonction caractéristique de  $X$  est la limite des fonctions caractéristiques du côté droit de (2.5.11).

Notons  $\varphi_\alpha$  la fonction caractéristique de  $X$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(u) &= E(\exp(iuX)) = E\left(\exp\left(iu \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) dY_\alpha(\lambda)\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\exp\left[iu \sum_{j=1}^n c_j (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))\right]\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n E(\exp[iuc_j (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))]) \quad (Y_\alpha \text{ est à accroissements indépendants}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n E\left[1 + iuc_j (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0)) - \frac{u^2 c_j^2}{2} (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))^2\right. \\ &\quad \left.+ O\left(u^3 c_j^3 (Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))^3\right)\right] \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de (2.5.7) nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \left[ 1 + iuc_j \underbrace{E(Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))}_{=0} - \frac{u^2 c_j^2}{2} \underbrace{E(Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))^2}_{=\alpha(a_j - a_{j-1})} \right. \\
&\quad \left. + O\left( \underbrace{u^3 c_j^3 E(Y_\alpha(a_j - 0) - Y_\alpha(a_{j-1} + 0))^3}_{=O(\alpha(a_j - a_{j-1}))} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \left[ 1 - \frac{\alpha u^2 c_j^2}{2} (a_j - a_{j-1}) + O(\alpha u^3 c_j^3 (a_j - a_{j-1})) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[ -\frac{\alpha u^2}{2} \sum_{j=1}^n c_j^2 (a_j - a_{j-1}) + O(\alpha u^3) \right]
\end{aligned}$$

Remarquons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j^2 (a_j - a_{j-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda$  d'où la formule (2.5.8) qui est le résultat.

(ii) Posons  $Y = X/\alpha^{1/2}$  et soit  $g_\alpha(u)$  sa fonction caractéristique. Nous avons

$$\begin{aligned}
g_\alpha(u) &= E(e^{iuY}) = E\left(e^{iuX/\alpha^{1/2}}\right) \\
&= \varphi_\alpha\left(\frac{u}{\alpha^{1/2}}\right) \quad (\varphi_\alpha \text{ fonction caractéristique de } X) \\
&= \exp\left(-\frac{u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda + O\left(\frac{u^3}{\alpha^{1/2}}\right)\right) \quad (\text{d'après le point (i)})
\end{aligned}$$

En passant à la limite nous obtenons la fonction caractéristique d'une normale centrée et de variance  $\int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_\alpha(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda\right)$$

D'où

$$Y = X/\alpha^{1/2} \hookrightarrow N\left(0, \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\lambda) d\lambda\right)$$

D'où le lemme. ■

**Lemme 8** Soit  $\psi_\alpha$  une fonction de  $L_2(\mathbb{R})$  à valeurs réelles satisfaisant

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha(\lambda) - \psi(\lambda)|^2 d\lambda \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow \infty \quad (2.5.12)$$

où  $\psi \in L_2 \cap L_3(\mathbb{R})$ . Soit  $Z_\alpha$  un processus à accroissements indépendants, satisfaisant la condition(2.5.7). Alors la fonction caractéristique de la v.a.

$$Y_\alpha = \frac{1}{\alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha(\lambda) dZ_\alpha(\lambda) \quad (2.5.13)$$

converge uniformément dans tout intervalle fini quand  $\alpha \rightarrow \infty$  vers la fonction caractéristique de

$$N \left( 0, \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\lambda) d\lambda \right)$$

**Preuve:** Notons  $\varphi_{Y_\alpha}$  la fonction caractéristique de  $Y_\alpha$  définie par (2.5.13) et soit  $\varphi_Y$  la fonction caractéristique de  $Y$  telle que  $Y \hookrightarrow N \left( 0, \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\lambda) d\lambda \right)$ .

Montrons que  $\max_{u \in [a,b]} |\varphi_{Y_\alpha}(u) - \varphi_Y(u)| \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$  où  $[a,b]$  un intervalle fini.

Posons

$$X_\alpha = \frac{1}{\alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) dZ_\alpha(\lambda) \quad (2.5.14)$$

Alors  $E|X_\alpha| = E \left| \frac{1}{\alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) dZ_\alpha(\lambda) \right| \leq \frac{1}{\alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} E|\psi(\lambda)|^2 E|dZ_\alpha(\lambda)|^2 < \infty$  donc  $X_\alpha$  est finie p.s.

Soit  $\varphi_{X_\alpha}(u)$  la fonction caractéristique de  $X_\alpha$  définie par (2.5.14). Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{X_\alpha}(u) - \varphi_{Y_\alpha}(u) \right| &= \left| E(e^{iuX_\alpha}) - E(e^{iuY_\alpha}) \right| = \left| E \left[ e^{iu(X_\alpha - Y_\alpha)} e^{iuY_\alpha} - e^{iuY_\alpha} \right] \right| \\ &\leq E|e^{iuY_\alpha}| \left| e^{iu(X_\alpha - Y_\alpha)} - 1 \right| \leq E \left| e^{iu(X_\alpha - Y_\alpha)} - 1 \right| \\ &\leq E|iu(X_\alpha - Y_\alpha)| = |u| E|X_\alpha - Y_\alpha| \\ &\leq |u| \left( E|X_\alpha - Y_\alpha|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Par Cauchy-Schwartz}) \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Comme

$$\begin{aligned}
E |X_\alpha - Y_\alpha|^2 &= E \left| \frac{1}{\alpha^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(\lambda) - \psi_\alpha(\lambda)) dZ_\alpha(\lambda) \right|^2 \\
&= \frac{1}{\alpha} E \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(\lambda) - \psi_\alpha(\lambda)) dZ_\alpha(\lambda) \right|^2 \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda) - \psi_\alpha(\lambda)|^2 E |dZ_\alpha(\lambda)|^2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{formule pour les processus} \\ \text{\`a accroissements orthogonaux} \end{array} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha(\lambda) - \psi(\lambda)|^2 d\lambda \quad (\text{car } E |dZ_\alpha(\lambda)|^2 = \alpha d\lambda) \tag{2.5.16}
\end{aligned}$$

Par suite de (2.5.15), (2.5.16) et de l'hypothèse (2.5.12) nous avons

$$\left| \varphi_{X_\alpha}(u) - \varphi_{Y_\alpha}(u) \right| \leq |u| \left( E |X_\alpha - Y_\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq |u| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha(\lambda) - \psi(\lambda)|^2 d\lambda \rightarrow 0$$

D'autre part en appliquant le point (ii) du lemme 7 nous avons

$$\max_{u \in [a, b]} \left| \varphi_{X_\alpha}(u) - \varphi_Y(u) \right| \rightarrow 0$$

Par suite

$$\max_{u \in [a, b]} \left| \varphi_{Y_\alpha}(u) - \varphi_Y(u) \right| \leq \max_{u \in [a, b]} \left| \varphi_{Y_\alpha}(u) - \varphi_{X_\alpha}(u) \right| + \max_{u \in [a, b]} \left| \varphi_{X_\alpha}(u) - \varphi_Y(u) \right|$$

et en passant à la limite nous obtenons le résultat. D'où le lemme. ■

Maintenant nous donnons la preuve du théorème 26

**Preuve:** Posons  $u = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$  et  $U = (\frac{1}{2}A_0T^{1/2}, A_1T^{1/2}, \dots, A_nT^{1/2}, B_1T^{1/2}, \dots, B_nT^{1/2})$ .

Soit  $\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$  la fonction caractéristique de  $U$ . Nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n) &= E\left(e^{i\langle u, U \rangle}\right) \\ &= E\left(\exp iT^{1/2} \left[ \frac{1}{2}\sigma_0 A_0 + \sum_{j=1}^n \sigma_j A_j + \sum_{j=1}^n \tau_j B_j \right]\right)\end{aligned}$$

En remplaçant  $A_j$  et  $B_j$  par (2.1.6) et (2.1.7) respectivement nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n) &= E\left(\exp \left[ \frac{2i}{T^{1/2}} \int_0^T X(t) \left( \frac{1}{2}\sigma_0 + \sum_{j=1}^n \left( \sigma_j \cos \frac{2\pi jt}{T} + \tau_j \sin \frac{2\pi jt}{T} \right) \right) dt \right]\right) \\ &= E\left(\exp \left[ \frac{2i}{T^{1/2}} \int_0^T X(t) \varphi_n(t, T) dt \right]\right)\end{aligned}\quad (2.5.17)$$

où

$$\varphi_n(t, T) = \frac{1}{2}\sigma_0 + \sum_{j=1}^n \left( \sigma_j \cos \frac{2\pi jt}{T} + \tau_j \sin \frac{2\pi jt}{T} \right)$$

En remplaçant  $X(t)$  par (2.5.2) nous avons

$$\begin{aligned}G_T &= : \frac{2}{T^{1/2}} \int_0^T X(t) \varphi_n(t, T) dt = \frac{2}{T^{1/2}} \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} c(t-\lambda) dY(\lambda) \right] \varphi_n(t, T) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2}{T^{1/2}} \int_0^T c(t-\lambda) \varphi_n(t, T) dt \right] dY(\lambda)\end{aligned}$$

Posons  $\lambda = vT$  et le changement de variable  $t = uT$  donne

$$G_T = \frac{2}{T^{1/2}} \int_0^T X(t) \varphi_n(t, T) dt = 2T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^1 c(uT - vT) \varphi_n(uT, T) du \right] dY(vT) \quad (2.5.18)$$

où

$$\varphi_n(uT, T) = \frac{1}{2}\sigma_0 + \sum_{j=1}^n (\sigma_j \cos 2\pi ju + \tau_j \sin 2\pi ju) =: \begin{cases} \varphi_n(u), & 0 \leq u \leq 1 \text{ (indépendant de } T) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.5.19)$$

Remarquons que:  $\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$  est la fonction caractéristique de  $G_T$  au point 1

$$\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n) = E \left( \exp \left[ \frac{2i}{T^{1/2}} \int_0^T X(t) \varphi_n(t, T) dt \right] \right) = E [\exp [iG_T]] = \varphi_{G_T}(1) \quad (2.5.20)$$

Posons

$$Y_T(v) = \frac{1}{T} Y(Tv) \quad (2.5.21)$$

Par (2.5.21) Les conditions sur le processus  $Y$  nous donnent

$$dY_T(v) = dY(Tv), \quad E |dY_T(v)|^2 = E |dY(Tv)|^2 = Tdv \text{ et } E |dY_T(v)|^3 = E |dY(Tv)|^3 = O(Tdv)$$

les conditions sur le processus  $Y_T$  et de (2.5.18), (2.5.19) et (2.5.21) nous obtenons

$$\begin{aligned} G_T &= \frac{2}{T^{1/2}} \int_0^T X(t) \varphi_n(t, T) dt = \frac{1}{T^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2T \int_0^1 c(T(u-v)) \varphi_n(u) du \right] dY_T(v) \\ &= \frac{1}{T^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(v) dY_T(v) \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

où

$$\psi_T(v) = 2T \int_0^1 c(T(u-v)) \varphi_n(u) du \quad (2.5.23)$$

Remarquons que la v.a. (2.5.22) est de la forme (2.5.13) du lemme 8 avec  $\alpha = T$ . Pour cela, il est suffisant de montrer que la fonction caractéristique  $\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$  converge vers le produit de fonctions caractéristiques normales. A cet effet, posons

$$\psi(v) = \begin{cases} 2\varphi_n(v) \int_{-\infty}^{\infty} c(\mu) d\mu & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.24)$$

Montrons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (2.5.25)$$

Par le changement de variable  $T(u - v) = \mu$  dans (2.5.23) nous avons

$$\psi_T(v) = 2 \int_{-Tv}^{T(1-v)} c(\mu) \varphi_n\left(v + \frac{\mu}{T}\right) d\mu = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n\left(v + \frac{\mu}{T}\right) 1_{[-Tv, T(1-v)]} c(\mu) d\mu$$

Comme  $\varphi_n(u) = 0$  à l'extérieur de  $[0, 1]$ ,  $\varphi_n$  est continue, bornée et  $c \in L_1$  alors

$$\left| \varphi_n\left(v + \frac{\mu}{T}\right) 1_{[-Tv, T(1-v)]} c(\mu) \right| \leq K c(\mu) \in L_1 \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_n\left(v + \frac{\mu}{T}\right) 1_{[-Tv, T(1-v)]} c(\mu) = \varphi_n(v) c(\mu).$$

Par suite le théorème de la convergence dominée donne  $\psi_T(v) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \psi(v)$ . Donc pour montrer (2.5.25) il suffit de montrer que

$$\int_{|v|>A} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ pour un certain } A \quad (2.5.26)$$

Prenons  $A > 1$  arbitraire fixé. Nous avons

$$\int_{|v|>A} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{-A} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv + \int_A^{+\infty} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv$$

D'une part

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-A} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv &= \int_{-\infty}^{-A} |\psi_T(v)|^2 dv \leq K \int_{-\infty}^{-A} |\psi_T(v)| dv \quad (\psi_T(v) \text{ est uniformément bornée}) \\ &\leq K \int_{-\infty}^{-A} \int_0^1 |\varphi_n(u)| T |c(T(u-v))| dudv \quad (\text{nous utilisons (2.5.23)}) \\ &= K \int_0^1 |\varphi_n(u)| \int_{-\infty}^{-A} T |c(T(u-v))| dv du \quad (\text{Fubini}) \\ &= K \int_0^1 |\varphi_n(u)| \int_{A+Tu}^{\infty} |c(\mu)| d\mu du \quad (\text{par le changement de variable } \mu = T(u-v)) \end{aligned}$$

qui converge vers zéro quand  $T \rightarrow \infty$  car  $c \in L_1$ . De même

$$\int_A^{+\infty} |\psi_T(v) - \psi(v)|^2 dv \leq K \int_0^1 |\varphi_n(u)| \int_{-\infty}^{T(u-A)} |c(\mu)| d\mu du$$

qui converge vers zéro quand  $T \rightarrow \infty$ . D'où le résultat (2.5.26) par suite (2.5.25).

Finalement  $\psi(v) = 2\varphi_n(v) \int_{-\infty}^{\infty} c(\mu) d\mu \in L_3(\mathbb{R})$  car  $c \in L_1 \cap L_3$ , d'où du lemme 8 la fonction caractéristique de  $G_T$  converge vers la fonction caractéristique de  $N\left(0, \int_0^1 \psi^2(\lambda) d\lambda\right)$ . Par suite de (2.5.20)  $\varphi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$  converge vers  $\exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2(\lambda) d\lambda\right)$  ainsi

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2(\lambda) d\lambda\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \left|2\varphi_n(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} c(\mu) d\mu\right|^2 d\lambda\right) \\
&= \exp\left(-2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} c(\mu) d\mu\right|^2 \int_0^1 (\varphi_n(\lambda))^2 d\lambda\right) \\
&= \exp\left(-\left|\int_{-\infty}^{\infty} c(\mu) d\mu\right|^2 \left(\frac{1}{4}\sigma_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_j^2 + \tau_j^2)\right)\right) \quad (\text{de (2.5.19)}) \\
&= e^{-\frac{1}{4}\sigma_0^2 c_1^2} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}\sigma_j^2 c_1^2} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}\tau_j^2 c_1^2}
\end{aligned}$$

où  $c_1 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} c(\mu) d\mu\right|$ . Ceci achève le théorème. ■

## Chapitre 3

# Série de Fourier d'un Processus Faiblement Stationnaire périodique

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les résultats de T. Kawata [2]. Nous reprenons la même étude du chapitre 2 mais cette fois pour un processus  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  complexe centré faiblement stationnaire et  $T$ -périodique. Le processus  $X$  vérifie les conditions suivantes:

Soit  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  un processus faiblement stationnaire avec  $EX(t) = 0, E|X(t)|^2 < \infty$  pour tout  $t$  et de fonction de covariance continue

$$\rho(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} dF(x)$$

où  $F$  est la distribution spectrale du processus  $X$ . Notons par  $C_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  les coefficients de Fourier de  $X$  sur  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  définis par

$$C_n = C_n(T) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} X(t) e^{-2n\pi it/T} dt \quad \text{où } T \text{ est un nombre positif quelconque.}$$

Dans le paragraphe 3.2 nous définissons le processus périodique et nous étudions le comportement des coefficients de Fourier du PFS  $X$   $T$ -périodique à travers l'ordre de grandeur de la quantité

$\sum_{|n|>N} E |C_n|^2$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Au paragraphe 3.3 nous donnons la convergence absolue de la série des coefficients de Fourier du processus qui est la convergence absolue presque-sûre de la série de Fourier du processus  $X$   $T$ -périodique. Par la suite au paragraphe 3.4 nous donnons la relation de Parseval qui généralise la formule (3.2.11) du lemme 10 donnée pour un processus  $T$ -périodique. Nous terminons ce chapitre par l'approximation en moyenne-quadratique et convergence uniforme presque-sûre d'un processus centré faiblement stationnaire non-périodique par un processus centré faiblement stationnaire périodique.

## 3.2 Comportement des coefficients de Fourier

**Définition 27** ([10],[19]) *Un processus faiblement stationnaire  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est périodique de période  $T$  si la fonction de covariance  $\rho(u)$  est une fonction continue et périodique de période  $T$*

**Remarque 28** *Si  $\rho(u)$  est périodique de période  $T$  alors  $E |X(t+T) - X(t)|^2 = 0 \forall t$  ce qui implique que  $X(t+T) = X(t)$  p.s pour tout  $t$ .*

Nous avons le théorème suivant:

**Théorème 29** (i) *Si  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  PFS tel que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty \text{ pour } 0 \leq \alpha < 1 \quad (3.2.1)$$

*alors*

$$\sum_{|n|>N} E |C_n|^2 = o(N^{-\alpha}) \text{ quand } N \rightarrow \infty \quad (3.2.2)$$

(ii) *Si de plus  $X$  est périodique de période  $T$  alors sous la condition (3.2.1) avec  $0 \leq \alpha < 2$ , (3.2.2) est vérifiée, et si  $\alpha = 2$ , alors*

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O(N^{-2}) \quad (3.2.3)$$

(iii) Si  $X$  est périodique de période  $T$  et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^\beta dF(x) < \infty, \quad \beta > 0 \quad (3.2.4)$$

alors

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O\left(1/(N \log^\beta N)\right) \quad (3.2.5)$$

Nous avons besoin des lemmes suivants

**Lemme 9** (i) Si pour  $0 \leq \alpha < 2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty \quad (3.2.6)$$

alors

$$\varphi(h) =: 2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h) = o(h^\alpha) \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \quad (3.2.7)$$

Si (3.2.6) est vérifiée pour  $\alpha = 2$  alors

$$\varphi(h) = O(h^2) \quad (3.2.8)$$

(ii) Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^\beta dF(x) < \infty, \quad \beta \geq 0 \quad (3.2.9)$$

alors

$$\varphi(h) = O\left(h/|\log |h||^\beta\right) \quad (3.2.10)$$

**Preuve:** (i) Nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(h) & : = 2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h) \\
& = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i0x} dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ihx} dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ihx} dF(x) \\
& = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos xh) dF(x) \\
& = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{2}hx\right) dF(x) \\
\text{et } \frac{\varphi(h)}{h^\alpha} & = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}hx\right)}{h^\alpha} dF(x)
\end{aligned}$$

Si  $0 \leq \alpha < 2$  nous avons  $\forall x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}hx}{h^\alpha} = 0$  et  $\left| \frac{\sin^2 \frac{1}{2}hx}{h^\alpha} \right| \leq \frac{|\sin \frac{1}{2}hx|^\alpha}{|h|^\alpha} \leq \frac{|\frac{1}{2}hx|^\alpha}{|h|^\alpha} \leq |x|^\alpha$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty$ . Nous appliquons le théorème de la convergence dominée et nous avons la formule(3.2.7).

Pour  $\alpha = 2$  nous avons

$$\left| \frac{\varphi(h)}{h^2} \right| \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin^2 \frac{1}{2}hx}{h^2} \right| dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 dF(x) < \infty$$

d'où (3.2.8).

(ii) Pour montrer ce point nous utilisons le résultat suivant:

*Lemme: (voir[18]p.181): Soit  $\psi(x)$  une fonction non-négative telle que  $\psi \uparrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$  et  $x^2\psi(x) \nearrow$ . Si*

$$\int_0^\infty \psi(x) dF(x) < \infty \text{ alors } \rho(h) = 1 - O\left(\frac{1}{\psi(h^{-1})}\right) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Par hypothèse nous avons  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^\beta dF(x) < \infty$  avec  $\beta \geq 0$  alors:

Si  $x \geq 0$  prenons  $\psi(x) = x (\log^+ x)^\beta$  et  $\psi$  vérifie les hypothèses (i.e)  $\psi(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ ,  $\psi \uparrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$  et  $x^2\psi(x) \nearrow$  par suite

$$\rho(h) = 1 - O\left(\frac{h}{(\log h)^\beta}\right) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= 2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h) \\ &= O\left(\frac{h}{(\log h)^\beta}\right) \quad (\text{car } \rho(0) = 1)\end{aligned}$$

Même chose si  $x \leq 0$  et  $\psi(x) = -x(\log^+(-x))^\beta$  et les hypothèses sur  $\psi$  sont vérifiées donc

$$\rho(h) = 1 - O\left(\frac{h}{-(\log(-h))^\beta}\right) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

d'où

$$\varphi(h) = O\left(\frac{h}{-(\log(-h))^\beta}\right)$$

En conclusion nous avons

$$\forall h \quad \varphi(h) = O\left(\frac{h}{|\log|h||^\beta}\right) \quad \text{avec } \beta \geq 0$$

d'où le résultat. ■

**Lemme 10** *Soit  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  un processus faiblement stationnaire périodique de période  $T$  et soit  $\rho$  sa fonction de covariance. Nous avons*

$$\varphi(h) = 2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h) = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} E|C_n|^2 \sin^2 \frac{n\pi h}{T} \quad (3.2.11)$$

**Preuve:**  $X$  est  $T$ -périodique sa série de Fourier est

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t / T}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
X\left(t + \frac{1}{2}h\right) - X\left(t - \frac{1}{2}h\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n(t + \frac{1}{2}h)/T} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n(t - \frac{1}{2}h)/T} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t/T} \left( e^{\pi i n h/T} - e^{-\pi i n h/T} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i C_n \sin\left(\frac{n\pi h}{2}\right) e^{2\pi i n t/T}
\end{aligned}$$

Par la relation de Parseval nous avons

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| X\left(t + \frac{1}{2}h\right) - X\left(t - \frac{1}{2}h\right) \right|^2 dt = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) < \infty$$

Donc

$$\begin{aligned}
4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} E |C_n|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) &= E \left[ 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) \right] \\
&= E \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| X\left(t + \frac{1}{2}h\right) - X\left(t - \frac{1}{2}h\right) \right|^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \left| X\left(t + \frac{1}{2}h\right) - X\left(t - \frac{1}{2}h\right) \right|^2 dt \text{ (Fubini)} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [E \left| X\left(t + \frac{1}{2}h\right) \right|^2 - EX\left(t + \frac{1}{2}h\right) \overline{X\left(t - \frac{1}{2}h\right)} \\
&\quad - EX\left(t - \frac{1}{2}h\right) \overline{X\left(t + \frac{1}{2}h\right)} + E \left| X\left(t - \frac{1}{2}h\right) \right|^2] dt \\
&= 2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h)
\end{aligned}$$

d'où la formule (3.2.11) du lemme ■

Maintenant nous prouvons le théorème 29

**Preuve:** (i) Pour  $0 \leq \alpha < 1$  et  $T$  fixé, nous avons par la formule (2.3.2) du chapitre 2 paragraphe (2.3)

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O(N^{-1}) + O(F(\infty) - F(\pi N/T)) + O(F(-\pi N/T))$$

Par suite

$$\begin{aligned}
N^\alpha \sum_{|n|>N} E |C_n|^2 &= O(N^{\alpha-1}) + N^\alpha O(F(\infty) - F(\pi N/T)) + N^\alpha O(F(-\pi N/T)) \\
&= O(N^{\alpha-1}) + N^\alpha O\left(\left(\frac{T}{\pi N}\right)^\alpha \int_{\pi N/T}^{\infty} \lambda^\alpha dF(\lambda)\right) + N^\alpha O\left(\left(\frac{T}{\pi N}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{-\pi N/T} |\lambda|^\alpha dF(\lambda)\right) \\
&= N^{\alpha-1} O(1) + O\left(\left(\frac{T}{\pi}\right)^\alpha \int_{\pi N/T}^{\infty} \lambda^\alpha dF(\lambda)\right) + O\left(\left(\frac{T}{\pi}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{-\pi N/T} |\lambda|^\alpha dF(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

En passant à la limite nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^\alpha \sum_{|n|>N} E |C_n|^2 = 0$$

d'où la formule (3.2.2).

(ii) et (iii) En intégrant les deux membres de la formule (3.2.11) du lemme 10 par rapport à  $h$  sur un intervalle  $(0, T/(2N))$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/(2N)} \varphi(h) dh &= 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} E |C_n|^2 \int_0^{T/(2N)} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{T}\right) dh \\
&\geq 4 \sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 \int_0^{T/(2N)} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{T}\right) dh
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/(2N)} \sin^2 \frac{\pi n h}{T} dh &\geq \frac{4n^2}{T^2} \int_0^{T/(2N)} h^2 dh \quad (\text{car } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi} x) \\
&\geq \frac{4N^2}{3T^2} \frac{T^3}{8N^3} \quad \text{pour tout } n \geq N \\
&\geq \frac{T}{8N}
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{T/(2N)} \varphi(h) dh \geq \frac{T}{2N} \sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 \Rightarrow \sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 \leq \frac{2N}{T} \int_0^{T/(2N)} \varphi(h) dh$$

\*) Si  $0 \leq \alpha < 2$  d'après le lemme 9 nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty \Rightarrow \varphi(h) = o(h^\alpha)$$

d'où

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 \leq \frac{2N}{T} \int_0^{T/(2N)} \varphi(h) dh = \frac{2N}{T} \int_0^{T/(2N)} o(h^\alpha) dh = o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

ce qui donne  $\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$  qui est (3.2.2)

\*) Si  $\alpha = 2$  nous avons d'après le lemme 9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 dF(x) < \infty \Rightarrow \varphi(h) = O(h^2)$$

$$\text{et } \sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 \leq \frac{2N}{T} \int_0^{T/(2N)} \varphi(h) dh = \frac{2N}{T} \int_0^{T/(2N)} O(h^2) dh = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

d'où  $\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$  qui est (3.2.3)

\*) Si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^\beta dF(x) < \infty \Rightarrow \varphi(h) = O\left(h/|\log |h||^\beta\right)$  (d'après (3.2.9) et (3.2.10) du lemme 9)

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 &\leq \frac{2N}{T} \int_0^{T/(2N)} \varphi(h) dh \leq \frac{2N}{T} K \int_0^{T/(2N)} \frac{h}{|\log h|^\beta} dh \\
&\leq \frac{2N}{T} K \int_{2N/T}^{+\infty} \frac{1}{x^3 |\log x|^\beta} dx \text{ (posons } \frac{1}{h} = x \text{)} \\
&\leq K \frac{1}{(\log N)^\beta} \int_{2N/T}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ ( } x \geq 2N/T \geq 1 \text{)} \\
&= K \frac{1}{(\log N)^\beta} \cdot \frac{T}{2N}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{|n| \geq N} E |C_n|^2 = O\left(\frac{1}{N (\log N)^\beta}\right)$$

et le théorème s'achève ■

### 3.3 Convergence absolue de la série de Fourier

Nous avons le théorème suivant

**Théorème 30** Soit  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  un processus faiblement stationnaire périodique de période  $T$

i) si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha dF(x) < \infty \text{ pour } \alpha > 1 \quad (3.3.1)$$

alors la série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|$  est presque-sûrement convergente.

ii) Plus généralement nous avons le résultat si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^\beta dF(x) < \infty \text{ pour } \beta > 2 \quad (3.3.2)$$

**Preuve:** La preuve de ce théorème utilise le théorème 29. Le point i) est analogue à la preuve du théorème 24 vu au paragraphe 2.4.2.

Pour ii) nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E|C_n| = \sum_{n=-\infty}^0 E|C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} E|C_n| = E|C_0| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} E|C_n| = E|C_0| + 2E|C_1| + 2 \sum_{n=2}^{\infty} E|C_n|$$

et

$$\sum_{n=2}^{\infty} E|C_n| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} E|C_n| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} E|C_n|^2 \right)^{1/2} (2^{\nu} - 2^{\nu-1})^{1/2}$$

Nous avons  $X$   $T$ -périodique et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| (\log^+ |x|)^{\beta} dF(x) < \infty$  pour  $\beta > 2$  alors d'après le théorème 29 nous avons  $\sum_{|n|>N} E|C_n|^2 = O(1/(N \log^{\beta} N))$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} E|C_n| &= \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{2^{(\nu-1)/2} (\log 2^{\nu-1})^{\beta/2}}\right) (2^{\nu} - 2^{\nu-1})^{1/2} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(\frac{2^{\nu/2}}{2^{\nu/2} (\nu-1)^{\beta/2}}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{m^{\beta/2}}\right) < \infty \quad (\beta/2 > 1) \end{aligned}$$

d'où  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} E|C_n| < \infty$  et c'est la convergence presque-sûre de  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|$ . D'où le théorème. ■

**Remarque 31** Nous avons mentionné dans le chapitre 1 que pour un PFS  $X$  si

$$\varphi(h) = O(h/|\log|h||^{\gamma}) \quad \text{pour } \gamma > 3 \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \quad (3.3.3)$$

alors le processus est p.s à trajectoires continues (il existe un processus  $X_0$  p.s continu et que  $P(X(t) = X_0(t)) = 1, \forall t$ ).

En relation avec cette remarque nous avons le résultat suivant:

**Théorème 32** Si un PFS  $X$  est périodique de période  $T$ , alors la condition (3.3.3) avec  $\gamma > 2$  est suffisante pour que le processus  $X$  admet une série de Fourier absolument convergente p.s et donc le processus est p.s à trajectoires continues.

**Remarque 33** D'après le deuxième corollaire du théorème 11 du paragraphe 1.3 ( chp 1), la périodicité du processus est une condition superflue pour la continuité des trajectoires.

### 3.4 Relation de Parseval d'un Processus faiblement stationnaire

Dans ce paragraphe nous allons donner une formule qui généralise (3.2.11) du lemme 10 . Pour le faire nous énonçons le théorème de Dirichlet comme lemme

**Lemme 11 (Théorème de Dirichlet):** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  par morceaux, périodique de période  $2\pi$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors la série de Fourier de  $f$  converge au point  $x_0$  et admet pour limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f(x_0)) = \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$$

où encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) D_n(t - x_0) dt = \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$$

où  $D_n$  est le noyau de Dirichlet défini pour  $n \geq 0$  par

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Nous avons la formule de Parseval de  $X$  suivante:

**Théorème 34** Si  $X$  est un processus faiblement stationnaire alors pour tout  $T > 0$  et pour  $0 \leq h \leq T$ , nous avons

$$4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} E |C_n|^2 \sin^2 \frac{\pi n h}{T} = \left(1 - \frac{h}{T}\right) [2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h)] + \frac{h}{T} [2\rho(0) - \rho(T-h) - \rho(-T+h)] \quad (3.4.1)$$

**Preuve:** Posons

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= 1 - |u|, & \text{pour } |u| \leq 1 \\ &= 0, & \text{pour } |u| > 1 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{-itu} du &= \int_{-1}^{+1} (1 - |u|) e^{-itu} du = \int_{-1}^0 (1 + u) e^{-itu} du + \int_0^{+1} (1 - u) e^{-itu} du \\ &= 2 \int_0^{+1} (1 - u) \cos tudu\end{aligned}$$

Si  $t = 0$

$$\int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{-itu} du = 2 \int_0^{+1} (1 - u) du = 1$$

Si  $t \neq 0$  par intégration par partie nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{-itu} du &= 2(1 - u) \frac{\sin tu}{t} \Big|_0^1 + \frac{2}{t} \int_0^{+1} \sin tudu \\ &= \frac{2}{t^2} [1 - \cos t] = \frac{4}{t^2} \sin^2(t/2) = \sin^2(t/2) / (t/2)^2\end{aligned}$$

Par suite

$$\int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{-itu} du = \begin{cases} \sin^2(t/2) / (t/2)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

De  $D_n(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{iku}$  nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^N \sin^2 n\lambda e^{-in\mu} &= \sum_{n=-N}^{n=N} \left( \frac{1 - \cos 2n\lambda}{2} \right) e^{-in\mu} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=-N}^{n=N} e^{-in\mu} - \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{2in\lambda - in\mu} - \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{-2in\lambda - in\mu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{-in\mu} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{-in(\mu - 2\lambda)} + \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{-in(\mu + 2\lambda)} \right] \\ &= D_N(-\mu) - \frac{1}{2} D_N(-(\mu - 2\lambda)) - \frac{1}{2} D_N(-(\mu + 2\lambda)) \\ &= D_N(\mu) - \frac{1}{2} D_N(\mu - 2\lambda) - \frac{1}{2} D_N(\mu + 2\lambda) \quad (D_N \text{ est pair})\end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\sum_{n=-N}^N \sin^2 n\lambda e^{-in\mu} = D_N(\mu) - \frac{1}{2} D_N(\mu - 2\lambda) - \frac{1}{2} D_N(\mu + 2\lambda) \quad (3.4.3)$$

Des formules (3.4.2) et (3.4.3) nous avons pour:  $2n\pi - xT \neq 0$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-N}^N \frac{\sin^2(n\pi - xT/2)}{(n\pi - xT/2)^2} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} \\
&= \sum_{n=-N}^N \int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{-i(2n\pi - xT)u} du \sin^2 \frac{\pi nh}{T} = \int_{-1}^{+1} \sum_{n=-N}^N e^{-i(2n\pi - xT)u} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} \Delta(u) du \\
&= \int_{-1}^{+1} e^{ixTu} \left[ \sum_{n=-N}^N e^{-2in\pi u} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} \right] \Delta(u) du \\
&= \int_{-1}^{+1} e^{ixTu} \left[ D_N(2\pi u) - \frac{1}{2} D_N\left(2\pi u - \frac{2\pi h}{T}\right) - \frac{1}{2} D_N\left(2\pi u + \frac{2\pi h}{T}\right) \right] \Delta(u) du \\
&= \int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{ixTu} D_N(2\pi u) du - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{ixTu} D_N\left(2\pi u - \frac{2\pi h}{T}\right) du \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{ixTu} D_N\left(2\pi u + \frac{2\pi h}{T}\right) du \\
&= : S_1 - \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{2} S_3 \tag{3.4.4}
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 11 de Dirichlet nous avons pour  $S_1$

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} S_1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{ixTu} D_N(2\pi u) du \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{-1}^0 \Delta(u) e^{ixTu} D_N(2\pi u) du + \int_0^1 \Delta(u) e^{ixTu} D_N(2\pi u) du \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \Delta(u) e^{-ixTu} D_N(2\pi u) du + \int_0^1 \Delta(u) e^{ixTu} D_N(2\pi u) du \right) \text{ (parité de } \Delta \text{ et } D_N) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) e^{-ixT\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)} D_N(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) e^{ixT\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)} D_N(\xi) d\xi \\
&= \frac{\frac{1}{2} (\Delta(0^+) + \Delta(0^-))}{2} + \frac{\frac{1}{2} (\Delta(0^+) + \Delta(0^-))}{2} \text{ (} D_N \text{ est } 2\pi\text{-périodique)} \\
&= \frac{1}{2} \Delta(0^+) = \frac{1}{2} \tag{3.4.5}
\end{aligned}$$

Pour  $S_2$

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} S_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{-1}^{+1} \Delta(u) e^{ixTu} D_N \left( 2\pi u - \frac{2\pi h}{T} \right) du \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{-1}^0 \Delta(u) e^{ixTu} D_N \left( 2\pi \left( u - \frac{h}{T} \right) \right) du + \int_0^1 \Delta(u) e^{ixTu} D_N \left( 2\pi \left( u - \frac{h}{T} \right) \right) du \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \Delta(u) e^{-ixTu} D_N \left( 2\pi \left( u + \frac{h}{T} \right) \right) du \\
&\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \Delta(u) e^{ixTu} D_N \left( 2\pi \left( u - \frac{h}{T} \right) \right) du \text{ (parité de } \Delta \text{ et } D_N) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \Delta \left( \frac{v + h/T}{2\pi} - h/T \right) e^{-ixT \left( \frac{v+h/T}{2\pi} - h/T \right)} D_N(v + h/T) dv + \\
&\quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \Delta \left( \frac{v - h/T}{2\pi} + h/T \right) e^{-ixT \left( \frac{v-h/T}{2\pi} + h/T \right)} D_N(v - h/T) dv \\
&= \frac{1}{2} \Delta(1 - h/T) e^{-ixT(1-h/T)} + \frac{1}{2} \Delta(h/T) e^{ixh} \\
&= \frac{1}{2} (h/T) e^{-ixT+ixh} + \frac{1}{2} (1 - h/T) e^{ixh} \tag{3.4.6}
\end{aligned}$$

De même nous avons pour  $S_3$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_3 = \frac{1}{2} (1 - h/T) e^{-ixh} + \frac{1}{2} (h/T) e^{ixT-ixh} \tag{3.4.7}$$

En utilisant (3.4.5), (3.4.6) et (3.4.7) nous avons de (3.4.4)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi - xT/2)}{(n\pi - xT/2)^2} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (1 - h/T) e^{ixh} + \frac{1}{2} (h/T) e^{-ixT+ixh} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (1 - h/T) e^{-ixh} + \frac{1}{2} (h/T) e^{ixT-ixh} \right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - h/T) (e^{ixh} + e^{-ixh}) - \frac{1}{4} (h/T) (e^{ixT-ixh} + e^{-ixT+ixh})
\end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés par  $dF(x)$ , intégrons sur  $(-\infty, \infty)$  et notons que

$$E |C_n|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(xT/2)}{(n\pi - xT/2)^2} dF(x) \quad (\text{d'après (2.3.1) du lemme 5})$$

D'une part nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi - xT/2)}{(n\pi - xT/2)^2} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} dF(x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(xT/2)}{(n\pi - xT/2)^2} dF(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} E |C_n|^2 \end{aligned}$$

et de l'autre part nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - h/T) (e^{ixh} + e^{-ixh}) - \frac{1}{4} (h/T) (e^{ixT-ixh} + e^{-ixT+ixh}) \right] dF(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) - \frac{1}{4} (1 - h/T) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixh} + e^{-ixh}) dF(x) - \frac{1}{4} (h/T) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixT-ixh} + e^{-ixT+ixh}) dF(x) \\ &= \frac{1}{2} \rho(0) - \frac{1}{4} (1 - h/T) [\rho(h) + \rho(-h)] - \frac{1}{4} (h/T) [\rho(T-h) + \rho(-T+h)] \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} E |C_n|^2 = \frac{1}{2} \rho(0) - \frac{1}{4} (1 - h/T) [\rho(h) + \rho(-h)] - \frac{1}{4} (h/T) [\rho(T-h) + \rho(-T+h)]$$

D'où

$$\begin{aligned} 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi nh}{T} E |C_n|^2 &= 2\rho(0) - (1 - h/T) [\rho(h) + \rho(-h)] - (h/T) [\rho(T-h) + \rho(-T+h)] \\ &= (1 - h/T) [2\rho(0) - \rho(h) - \rho(-h)] + (h/T) [2\rho(0) - \rho(T-h) - \rho(-T+h)] \end{aligned}$$

qui est (3.4.1) et la preuve s'achève. ■

### 3.5 Séries de Fourier approximantes

Soit  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  un processus faiblement stationnaire non-périodique. Il est connu que nous pouvons trouver un processus  $\hat{X} = (\hat{X}(t), t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$  faiblement stationnaire périodique de période  $T$  admettant des coefficients de Fourier non-correlés et  $\hat{X}(t) = X(t)$  pour  $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  (**voir**[19]**p.461**). Nous étudions la convergence absolue de la série de Fourier du processus  $\hat{X}$ .

Le processus  $X$  étant faiblement stationnaire admet la représentation suivante

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\xi(x) \quad (3.5.1)$$

où  $\xi$  est un processus à accroissements orthogonaux avec  $E d\xi(x) = 0$ ,  $E |d\xi(x)|^2 = dF(x)$  (l'intégrale est au sens  $L^2$ )

Nous définissons  $\xi_n$  par

$$\xi_n = \xi_n(T) = \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} d\xi(x), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

et  $\hat{X}$  par

$$\hat{X}(t) := \hat{X}(t, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it/T} \xi_n \quad (3.5.2)$$

Dans cette série de Fourier les coefficients de Fourier  $\xi_n$  sont non-corrélés et convergent dans  $L^2$  ( $\xi_n$  sont orthogonaux car  $\xi$  est un processus à accroissements orthogonaux) et

$$E |\xi_n|^2 = \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} dF(x)$$

Nous avons  $E \xi_n = E \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} d\xi(x) = \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} E d\xi(x) = 0$  et  $\hat{X}$  est un processus périodique faiblement stationnaire de covariance

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(u) &= : E \left( \hat{X}(t+u) \overline{\hat{X}(t)} \right) = E \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi i(t+u)/T} \xi_n e^{-2m\pi it/T} \overline{\xi_m} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E \xi_n \overline{\xi_m} e^{2n\pi iu/T} e^{2(n-m)\pi it/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E |\xi_n|^2 e^{2n\pi iu/T} \quad (\text{orthogonalité des } \xi_n) \end{aligned}$$

D'où

$$\hat{\rho}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi iu/T} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} dF(x)$$

$\hat{\rho}$  est  $T$ -périodique.

La distribution spectrale  $\hat{F}$  de  $\hat{X}$  est donnée par

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{2n\pi/T} dF(x), \quad \text{pour} \quad \frac{2(n-1)\pi}{T} < x \leq \frac{2n\pi}{T}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Lemme 12** Avec les notations précédentes nous avons

$$E \left| X(t) - \hat{X}(t) \right|^2 \leq 4 \sin^2 \frac{\pi t}{T} \rho(0), \quad T \geq 2|t|$$

D'où la convergence en moyenne quadratique quand  $T \rightarrow \infty$

**Preuve:** D'une part nous avons

$$E |X(t)|^2 = E \left| \hat{X}(t) \right|^2 = \rho(0)$$

En effet

$$\begin{aligned} E |X(t)|^2 &= E \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\xi(x) \right|^2 = E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\xi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity} d\overline{\xi(y)} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-ity} E d\xi(x) d\overline{\xi(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E |d\xi(x)|^2 \quad (\text{pour } x = y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = \rho(0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E \left| \hat{X}(t) \right|^2 &= E \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it/T} \xi_n \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it/T} e^{-2m\pi it/T} E \xi_n \overline{\xi_m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E |\xi_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = \rho(0) \end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} E \left[ X(t) \overline{\hat{X}(t)} \right] &= E \left[ X(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} \overline{\xi_n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} E \left[ X(t) \overline{\xi_n} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\xi(x) \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} d\overline{\xi(x)} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\xi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{[2n\pi/T, 2(n+1)\pi/T]} d\overline{\xi(x)} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} e^{itx} E |d\xi(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} e^{itx} dF(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E \left| X(t) - \hat{X}(t) \right|^2 &= E |X(t)|^2 - 2 \operatorname{Re} E \left[ X(t) \overline{\hat{X}(t)} \right] + E \left| \hat{X}(t) \right|^2 \\
&= 2\rho(0) - 2 \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi it/T} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} e^{itx} dF(x) \\
&= 2\rho(0) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} \cos t(x - 2n\pi/T) dF(x) \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} \cos t(x - 2n\pi/T) dF(x) \\
&= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} dF(x) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} \cos t(x - 2n\pi/T) dF(x) \\
&= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} [1 - \cos t(x - 2n\pi/T)] dF(x)
\end{aligned}$$

Comme  $1 - \cos t(x - 2n\pi/T) = 2 \sin^2 \frac{t(x - 2n\pi/T)}{2}$ ,  $2n\pi/T \leq x \leq 2(n+1)\pi/T$  et  $T > 2|t|$  ( $\sin$  est  $\nearrow$  sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  et périodique) nous avons

$$1 - \cos t(x - 2n\pi/T) = 2 \sin^2 \frac{t(x - 2n\pi/T)}{2} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi t}{T}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
E \left| X(t) - \hat{X}(t) \right|^2 &\leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} 2 \sin^2 \frac{\pi t}{T} dF(x) \\
&= 4 \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} dF(x) \\
&= 4 \sin^2 \frac{\pi t}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 4 \sin^2 \frac{\pi t}{T} \rho(0)
\end{aligned}$$

Enfin quand  $T \rightarrow \infty$  nous obtenons le résultat

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left| X(t) - \hat{X}(t) \right|^2 = 0$$

■

Nous avons le théorème suivant:

**Théorème 35** *Soit  $g$  une fonction paire, non-négative, non-décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/g(n) < \infty$$

*Soit  $X$  un processus faiblement stationnaire de distribution spectrale  $F$  satisfaisant*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) < \infty$$

*Alors la série de Fourier  $\hat{X}$  définissant  $X$  donnée par la formule (3.5.2) converge absolument presque-sûrement.*

**Remarque 36** *Si  $g(x) = |x| (\log^+ |x|)^\beta$ ,  $\beta > 2$  nous avons le résultat du théorème 29 de ce chapitre qui représente un cas particulier .*

**Preuve:** Pour montrer le théorème il suffit de montrer que  $E \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n| < \infty$

Pour tout  $x > 0$  nous avons  $g(x) \geq g(0) > 0$  par hypothèse et alors

$$\begin{aligned} E \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n| &= E \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} d\xi(x) \right| = E \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}(2n\pi/T)} \cdot g^{\frac{1}{2}}(2n\pi/T) \left| \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} d\xi(x) \right| \\ &\leq \left[ \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}(2n\pi/T)} \right|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| g^{\frac{1}{2}}(2n\pi/T) \right|^2 E \left| \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} d\xi(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right] \left( \text{Cauchy} \right) \\ &\quad \left( \text{Schwartz} \right) \\ &\leq \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(2n\pi/T)} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(2n\pi/T) \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} E |d\xi(x)|^2 \right)^{1/2} \left( \text{propriété} \right) \\ &\quad \left( \text{des accroissements} \right) \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(2n\pi/T)} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(2n\pi/T) \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} dF(x) \right)^{1/2} \quad (E |d\xi(x)|^2 = dF(x)) \\ &\leq \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(2n\pi/T)} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi/T}^{2(n+1)\pi/T} g(x) dF(x) \right)^{1/2} \quad (\text{car } g > 0 \text{ et } \nearrow) \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(2n\pi/T)} \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) \right)^{1/2} < \infty \quad (\text{par hypothèse}) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

Finalemment, nous avons le théorème suivant:

**Théorème 37** *Soit  $g$  une fonction paire, non-négative, non-décroissante pour  $x > 0$  et satisfait*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/g(n) < \infty$$

et  $X$  un PFS définie par (3.5.1) de distribution spectrale  $F$  satisfaisant

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) < \infty$$

Soit  $\hat{X}_k$  le processus de période  $T_k = 2^k$  défini par

$$\hat{X}_k(t) = \hat{X}(t, T_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it/T_k} \xi_{n,k}$$

où

$$\xi_{n,k} = \xi_{n,k}(T_k) = \int_{2n\pi/T_k}^{2(n+1)\pi/T_k} d\xi(x)$$

Alors  $\hat{X}_k$  est uniformément convergente presque-sûrement sur tout intervalle fini quand  $k \rightarrow \infty$

**Preuve:** Supposons que  $|t| \leq A$ , où  $A$  est un nombre positif. Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it/T_{k+1}} \xi_{n,k+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi it/T_k} \xi_{m,k} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it/2^{k+1}} \xi_{n,k+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi it/2^k} \xi_{m,k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( e^{2\pi i(2m)t/2^{k+1}} \xi_{2m,k+1} + e^{2\pi i(2m+1)t/2^{k+1}} \xi_{2m+1,k+1} - e^{2m\pi it/2^k} \xi_{m,k} \right) \end{aligned}$$

Comme  $\xi_{m,k} = \xi_{2m,k+1} + \xi_{2m+1,k+1}$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( e^{2\pi imt/2^k} \xi_{2m,k+1} - e^{2m\pi it/2^k} \xi_{m,k} + e^{2\pi i(2m+1)t/2^{k+1}} \xi_{2m+1,k+1} \right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( e^{\pi i(2m+1)t/2^k} - e^{2\pi imt/2^k} \right) \xi_{2m+1,k+1} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi imt/2^k} \left( e^{\pi it/2^k} - 1 \right) \xi_{2m+1,k+1}
\end{aligned}$$

Nous majorons par

$$\begin{aligned}
\left| \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right| &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| e^{\pi it/2^k} - 1 \right| |\xi_{2m+1,k+1}| \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi |t|}{2^k} |\xi_{2m+1,k+1}| \leq \frac{\pi A}{2^k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \int_{2\pi p/2^{k+1}}^{2\pi(p+1)/2^{k+1}} d\xi(x) \right| \quad (\text{posons } p = 2m + 1)
\end{aligned}$$

D'où

$$\max_{|t| \leq A} \left| \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right| \leq \frac{\pi A}{2^k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} d\xi(x) \right|$$

Nous choisissons une suite  $(\varepsilon_k)$  de nombres positifs décroissant vers zéro et nous avons

$$\begin{aligned}
Q_k &\equiv P\left(\max_{|t|\leq A} \left| \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right| \geq \varepsilon_k\right) \leq P\left(\frac{\pi A}{2^k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} d\xi(x) \right| \geq \varepsilon_k\right) \\
&\leq \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} E\left(\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} d\xi(x) \right|\right]^2\right) \quad (\text{inégalité de Markov}) \\
&\leq \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} E\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}(\pi p/2^k)} g^{\frac{1}{2}}(\pi p/2^k) \left| \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} d\xi(x) \right|\right]^2 \\
&\leq \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} E\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(\pi p/2^k)} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(\pi p/2^k) \cdot \left| \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} d\xi(x) \right|^2\right] \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \\
&= \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(\pi p/2^k)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(\pi p/2^k) \cdot E\left| \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} d\xi(x) \right|^2 \\
&= \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(\pi p/2^k)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(\pi p/2^k) \int_{\pi p/2^k}^{\pi(p+1)/2^k} dF(x) \\
&= \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(\pi p/2^k)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)
\end{aligned}$$

Du fait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g(an)} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{g(ax)} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{du}{g(u)} \leq \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g(n)} \quad \text{pour tout } a > 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
Q_k &\equiv P\left(\max_{|t|\leq A} \left| \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right| \geq \varepsilon_k\right) \\
&\leq \frac{\pi^2 A^2}{\varepsilon_k^2 2^{2k}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) \left[ \frac{1}{g(0)} + \frac{2^k}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g(p)} \right] \\
&= O\left(\varepsilon_k^{-2} 2^{-2k}\right) + O\left(\varepsilon_k^{-2} 2^{-k}\right) = O\left(\varepsilon_k^{-2} 2^{-k}\right)
\end{aligned}$$

Si nous choisissons  $(\varepsilon_k) / \sum \varepsilon_k < \infty$  et  $\sum \varepsilon_k^{-2} 2^{-k} < \infty$  alors nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{|t|\leq A} \left| \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right| \geq \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\varepsilon_k^{-2} 2^{-k}\right) < \infty$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli nous avons

$$\max_{|t| \leq A} \left| \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right| \leq \varepsilon_k \text{ p.s.}$$

par suite nous avons que p.s

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \hat{X}_{k+1}(t) - \hat{X}_k(t) \right)$$

est convergente uniformément sur  $|t| \leq A$  et ceci achève la démonstration. ■

# Annexe

## Simulation

Le mouvement Brownien:

Le mouvement Brownien est un processus stochastique modélisant:

- Les trajectoires de particules soumises à des chocs aléatoires (Einstein, 1905).
- l'évolution temporelle d'actifs boursiers (Bachelier, 1900).

Un mouvement Brownien  $B = (B(t), t \in [0, 1])$  est défini par :

- $B(0) = 0$ .
- Les accroissements sont indépendants et

$$B(t) - B(s) \hookrightarrow N(0, t - s)$$

- $\forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $E[B(t)] = 0$  et  $cov(B(t), B(s)) = \min(s, t)$ .

Pour simuler une trajectoire du MB sur  $[0, 1]$  nous discrétisons l'intervalle de temps  $[0, 1]$  en  $n$  points équidistants. Nous utilisons ensuite la propriété des accroissements gaussiens pour simuler chaque accroissement. La fonction "cumsum" calcule les sommes cumulées et permet de générer une trajectoire et puis nous calculons sa série de Fourier sur  $[0, 1]$ . Pour la simulation, les sommes infinies sont approximées par des sommes finies. Notons que la convergence en m.q est supposée assurée. La somme partielle de Fourier est définie par

$$S_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N [A_k \cos(2\pi kt) + B_k \sin(2\pi kt)]$$

avec

$$A_k = 2 \int_0^1 B(s) \cos 2\pi k s ds \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_k = 2 \int_0^1 B(s) \sin 2\pi k s ds \quad k = 1, 2, \dots$$

et les intégrales sont approximées par la méthode des rectangles à gauche. Nous avons

$$A_0 = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) ds = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) B(t_i)$$

$$A_k = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) \cos(2\pi k s) ds = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) B(t_i) \cos(2\pi k t_i)$$

$$B_k = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) \sin(2\pi k s) ds = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) B(t_i) \sin(2\pi k t_i)$$

Les graphes suivants présentent différentes trajectoires du  $MB$  sur  $[0, 1]$  avec leurs sommes partielles et erreurs quadratiques correspondantes pour différentes valeurs de  $N$  et  $n$  est fixé à 500. L'erreur quadratique est

$$eq = \int_0^1 (S_N(t) - B(t))^2 dt$$

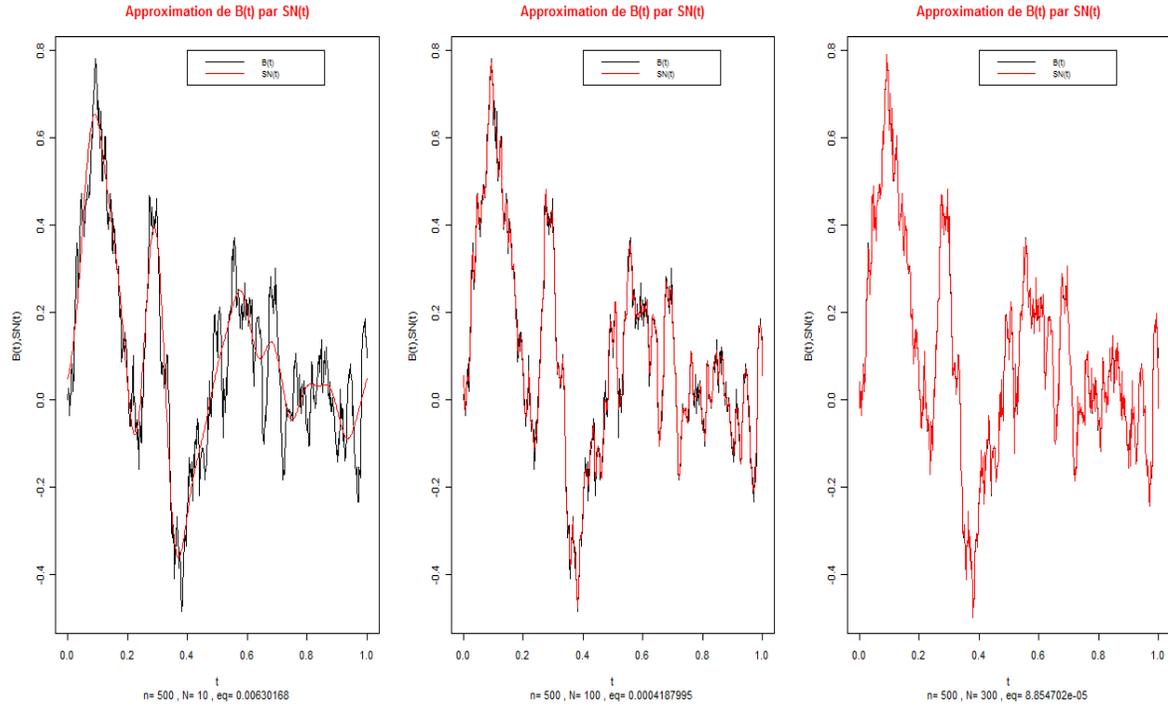


Fig. 1

### Processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $U$  est un processus stochastique décrivant la vitesse d'une particule dans un fluide. Il est défini par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dU(t) = -\alpha U(t)dt + \sigma dB(t), t \geq 0, U(0) = U_0$$

où  $B = (B(t), t \geq 0)$  est un mouvement brownien standard, avec  $U_0$  une variable aléatoire donnée et  $\alpha, \sigma$  des coefficients positives exprimant la dérive et le coefficient de diffusion respectivement. Le terme  $dB(t)$  traduit les chocs aléatoires sur la particule et le terme  $-U(t)dt$  représente la force de frottement sur la particule.

La formule d'Itô appliquée au processus  $e^{\alpha t}U(t)$  donne

$$d(e^{\alpha t}U(t)) = \alpha e^{\alpha t}U(t)dt + e^{\alpha t}(\sigma dB(t) - \alpha U(t)dt) = \sigma e^{\alpha t}dB(t)$$

ou sous forme intégrale :

$$U(t) = U_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB(s)$$

Par exemple, si  $U_0 \hookrightarrow N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ , la loi de  $U(t)$  est une loi gaussienne centrée et de variance  $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$ .

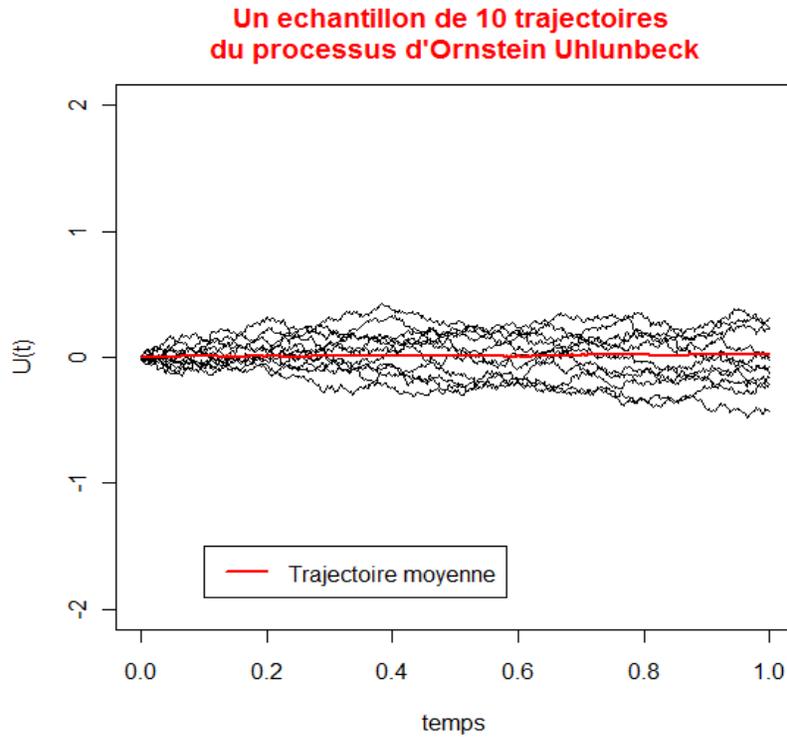


Fig. 2

Calculons la série de Fourier sur  $[0, 1]$  d'une trajectoire d'Ornstein-Uhlenbeck sur  $[0, 1]$  et sa série partielle correspondante. Les tableaux suivants représentent les erreurs quadratiques.

Pour  $n = 500$  et  $\sigma = 2$  :

		$\alpha=1$	
N	10	100	300
eq	6.2884	0.4077	0.0844
		$\alpha=5$	
N	10	100	300
eq	1.2231	0.1204	0.0353
		$\alpha=10$	
N	10	100	300
eq	0.761	0.0644	0.0136

*Tableau. 1*

Pour  $n = 500$  et  $\sigma = \sqrt{2}$

		$\alpha=1$	
N	10	100	300
eq	3.1442	0.2039	0.0422
		$\alpha=5$	
N	10	100	300
eq	0.6116	0.0602	0.0177
		$\alpha=10$	
N	10	100	300
eq	0.3805	0.0322	0.0068

*Tableau. 2*

Pour  $n = 500$  et  $\sigma = 0.2$

		$\alpha=1$	
N	10	100	300
eq	6.29E-02	4.07E-03	8.40E-04
		$\alpha=5$	
N	10	100	300
eq	1.23E-02	1.25E-03	3.54E-03
		$\alpha=10$	
N	10	100	300
eq	6.29E-02	4.08E-03	8.44E-05

Tableau. 3

Les graphes suivants présentent les trajectoires  $U(t)$  sur  $[0, 1]$  et leurs séries de Fourier  $S_{10}(t)$  pour  $\sigma = 0.2$  et  $\alpha = 10$

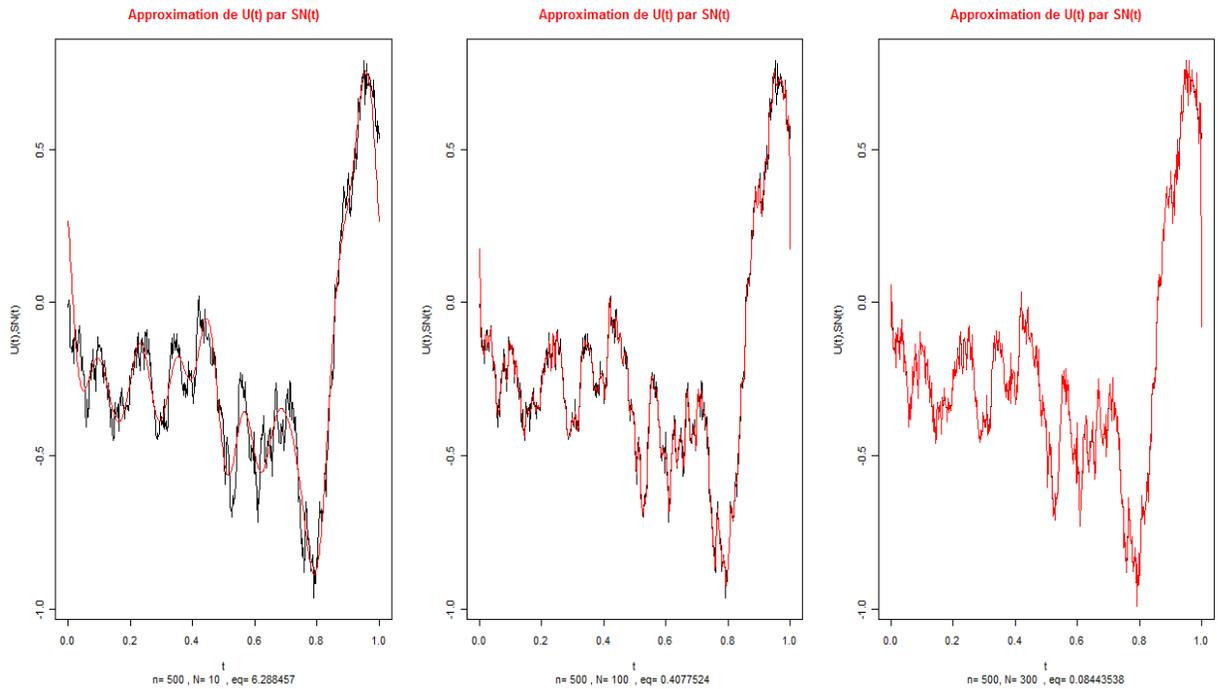
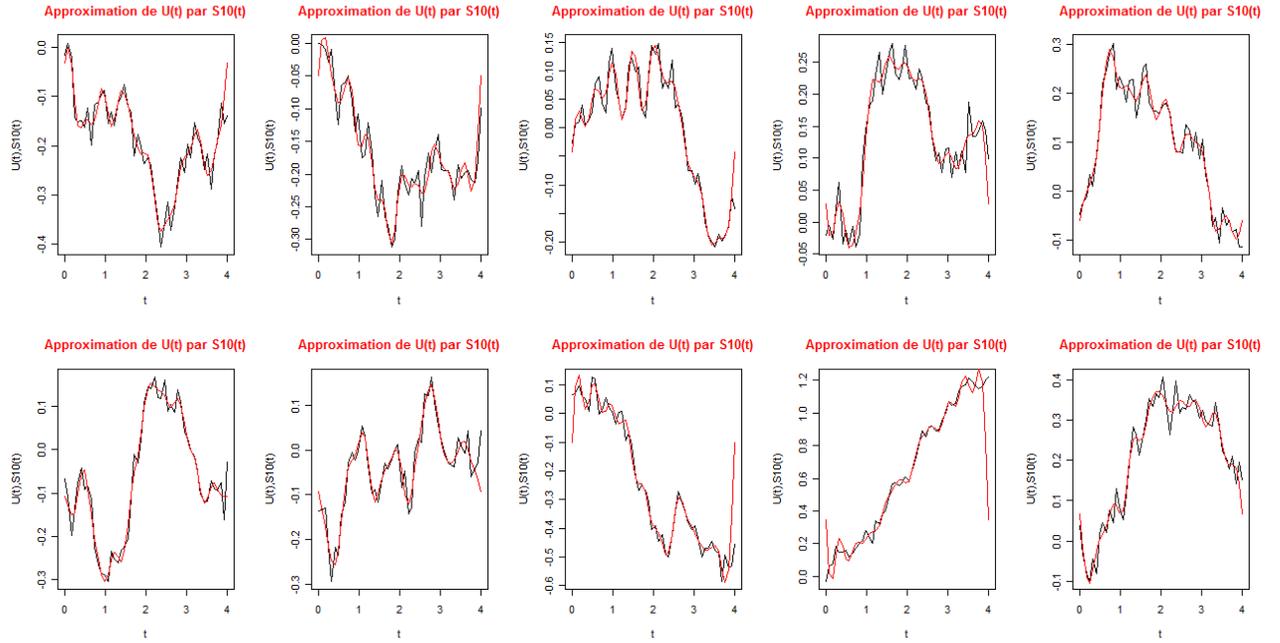


Fig.3

Dans les simulations du processus d'Ornstein Uhlunbeck sur  $[0, 1]$  pour  $\sigma = 0.2, \alpha = 10$  l'intervalle  $[0, 1]$  est divisé en  $n = 50$  points équidistants et leurs séries de Fourier sont tronquées à  $N = 10$

Les graphes suivants présentent 10 trajectoires de  $U$  et leurs séries de Fourier  $S_{10}$



Approximation des 10 trajectoires  $U(t)$  par leurs series de Fourier  $S_{10}(t)$  correspondantes .

Fig. 4

Les erreurs quadratiques correspondantes

#	eq
1	0.0053146539
2	0.0066192916
3	0.0026083783
4	0.0042958729
5	0.0016521376
6	0.0004801128
7	0.0002826731
8	0.0006878486
9	0.0003792391
10	0.0008933956

Les graphes suivants donnent la densité de la loi limite de chaque coefficient  $A_k, k = 0, \dots, 10$

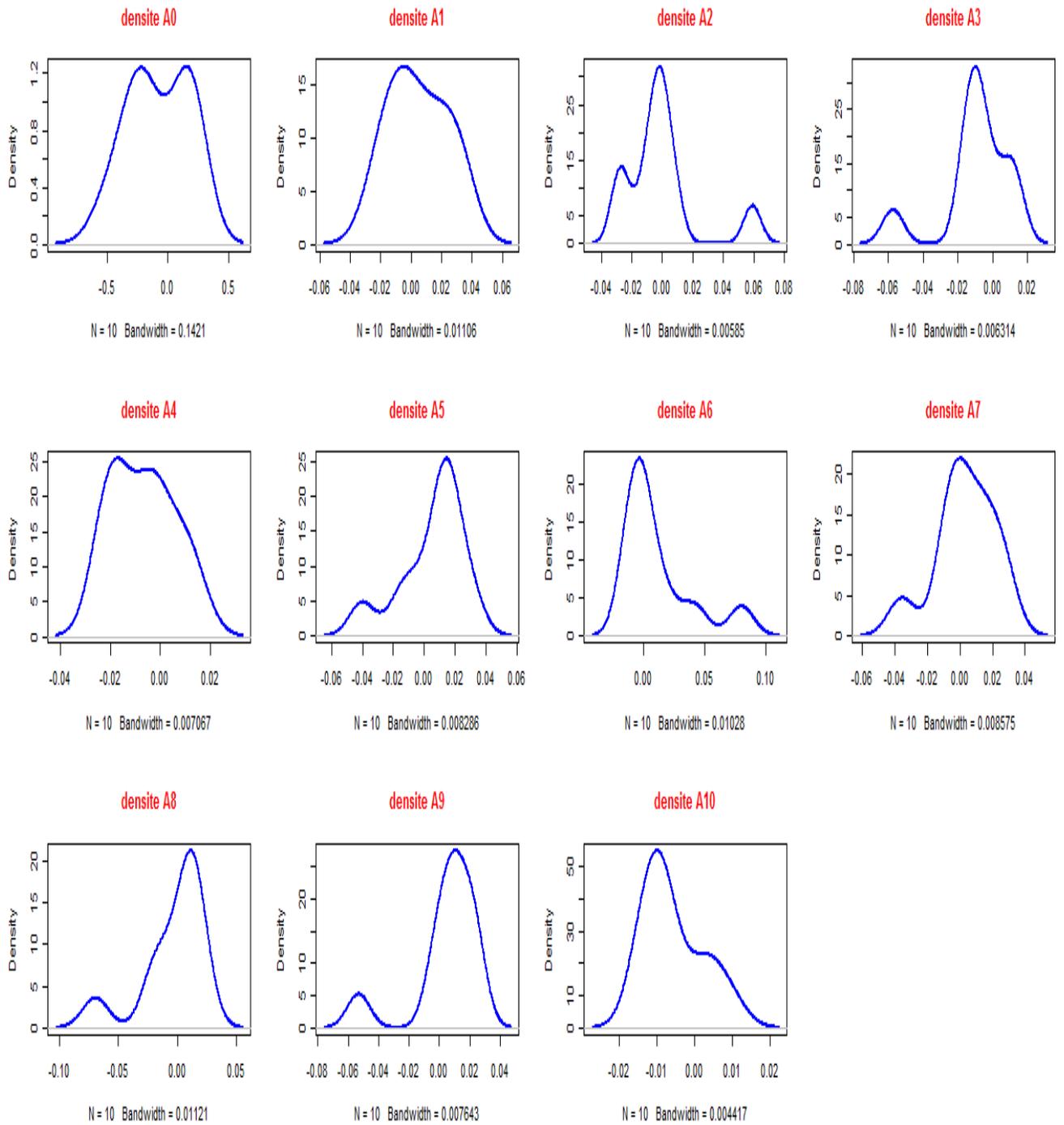


Fig. 5

Les graphes suivants donnent la densité de la loi limite de chaque coefficient  $B_k, k = 1, \dots, 10$

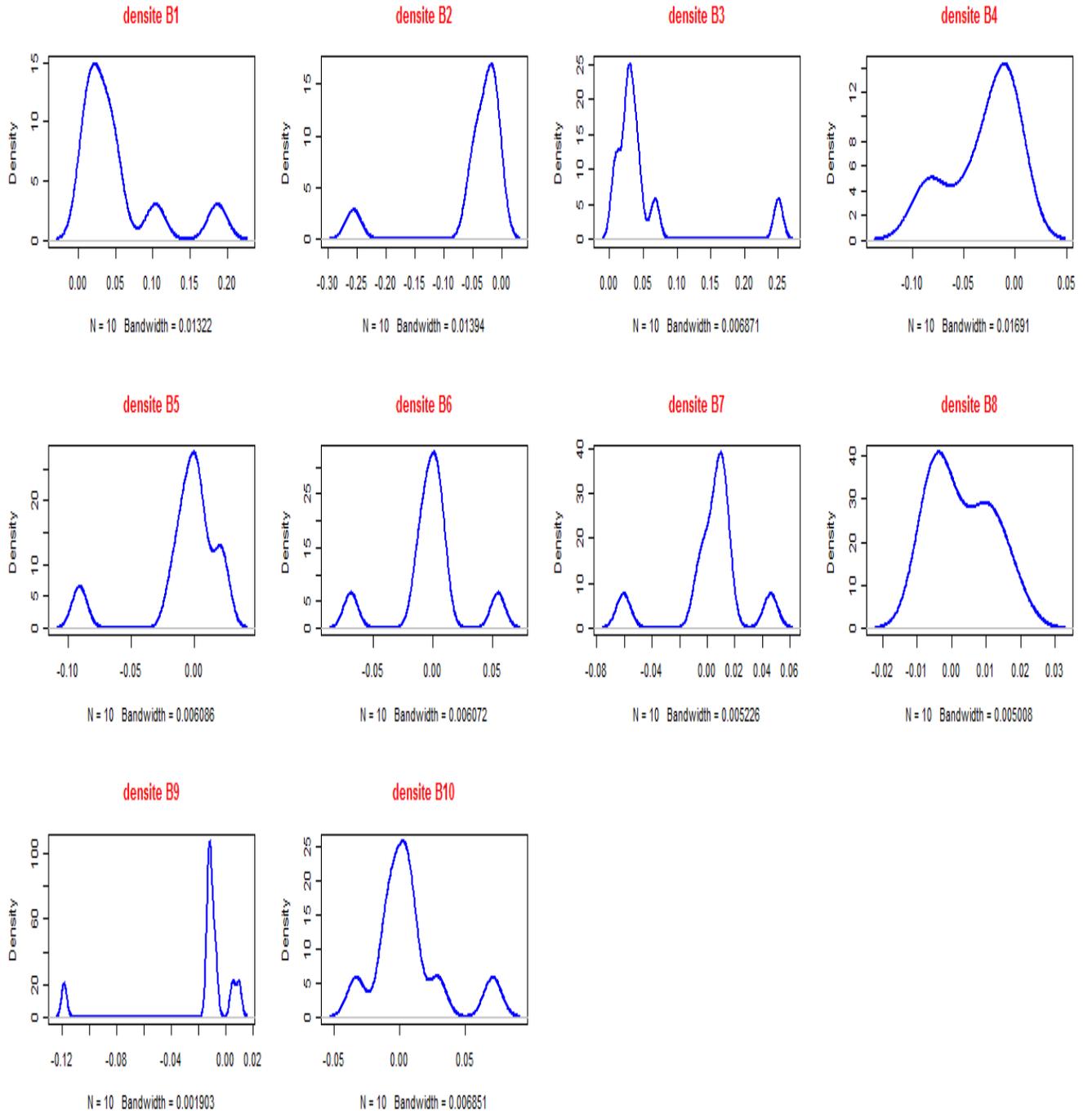


Fig. 6

## Etude des corrélations des coefficients de Fourier:

Dans la littérature appliquée le comportement asymptotique des corrélations entre les coefficients de Fourier est important. Comme nous l'avons souligné en introduction *chap.2* les corrélations entre les coefficients de Fourier sont prises nulles dans les applications. Mais en réalité ils ne le sont pas et il s'agit de vérifier ce comportement par simulation des quatites :  $E(A_0^2)$ ,  $E(A_n A_m)$  et  $E(B_n B_m)$ .

Nous avons  $E A_0^2 = 0.2793223$ . Pour  $(E A_i A_j)_{i,j=1,\dots,10}$  nous avons le tableau récapitulatif suivant:

#	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]
[1,]	$5.078183e - 03$	$-1.316898e - 03$	$1.065211e - 03$	$1.969791e - 04$	$-3.457483e - 04$
[2,]	$-1.316898e - 03$	$2.015808e - 03$	$2.882367e - 05$	$-1.602086e - 04$	$1.723320e - 04$
[3,]	$1.065211e - 03$	$2.882367e - 05$	$1.395486e - 03$	$4.444938e - 04$	$1.437872e - 04$
[4,]	$1.969791e - 04$	$-1.602086e - 04$	$4.444938e - 04$	$5.018605e - 04$	$1.322937e - 04$
[5,]	$-3.457483e - 04$	$1.723320e - 04$	$1.437872e - 04$	$1.322937e - 04$	$3.364026e - 04$
[6,]	$1.791622e - 04$	$1.638371e - 04$	$1.392465e - 04$	$7.926426e - 05$	$1.421345e - 04$
[7,]	$3.642803e - 04$	$-1.871708e - 04$	$2.335760e - 04$	$4.506047e - 05$	$7.910482e - 05$
[8,]	$1.387386e - 04$	$-1.128094e - 05$	$3.615495e - 04$	$1.359992e - 04$	$1.467318e - 04$
[9,]	$-3.405421e - 04$	$1.892131e - 04$	$2.075275e - 04$	$6.239991e - 05$	$1.081699e - 04$
[10,]	$1.274581e - 05$	$1.860538e - 04$	$1.712741e - 04$	$9.646801e - 05$	$9.917593e - 05$
#	[, 6]	[, 7]	[, 8]	[, 9]	[, 10]
[1,]	$1.791622e - 04$	$3.642803e - 04$	$1.387386e - 04$	$-3.405421e - 04$	$1.274581e - 05$
[2,]	$1.638371e - 04$	$-1.871708e - 04$	$-1.128094e - 05$	$1.892131e - 04$	$1.860538e - 04$
[3,]	$1.392465e - 04$	$2.335760e - 04$	$3.615495e - 04$	$2.075275e - 04$	$1.712741e - 04$
[4,]	$7.926426e - 05$	$4.506047e - 05$	$1.359992e - 04$	$6.239991e - 05$	$9.646801e - 05$
[5,]	$1.421345e - 04$	$7.910482e - 05$	$1.467318e - 04$	$1.081699e - 04$	$9.917593e - 05$
[6,]	$3.869311e - 04$	$2.790793e - 05$	$1.417250e - 04$	$3.595491e - 05$	$9.018390e - 05$
[7,]	$2.790793e - 05$	$1.011537e - 04$	$9.427420e - 05$	$3.650817e - 05$	$2.698926e - 05$
[8,]	$1.417250e - 04$	$9.427420e - 05$	$1.660873e - 04$	$9.885016e - 05$	$7.539026e - 05$
[9,]	$3.595491e - 05$	$3.650817e - 05$	$9.885016e - 05$	$1.858807e - 04$	$3.146865e - 05$
[10,]	$9.018390e - 05$	$2.698926e - 05$	$7.539026e - 05$	$3.146865e - 05$	$7.544654e - 05$

Finalement pour  $(EB_i B_j)_{i,j=1,\dots,10}$  nous avons le tableau récapitulatif suivant:

#	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]
[1, ]	0.025646092	0.0099344410	0.0054648205	0.0043908066	0.0036451190
[2, ]	0.009934441	0.0080268280	0.0028050937	0.0023920192	0.0015261518
[3, ]	0.005464821	0.0028050937	0.0020802923	0.0013157448	0.0007108022
[4, ]	0.004390807	0.0023920192	0.0013157448	0.0014079188	0.0007719348
[5, ]	0.003645119	0.0015261518	0.0007108022	0.0007719348	0.0007028814
[6, ]	0.003595782	0.0022871418	0.0009780909	0.0009308450	0.0006255634
[7, ]	0.002626554	0.0013430259	0.0006640329	0.0006290229	0.0003853966
[8, ]	0.002249531	0.0011731138	0.0005171360	0.0004795621	0.0003734739
[9, ]	0.001512390	0.0009719864	0.0005541898	0.0004333454	0.0002373717
[10, ]	0.001477693	0.0005472980	0.0003753744	0.0002912270	0.0002211866
#	[, 6]	[, 7]	[, 8]	[, 9]	[, 10]
[1, ]	0.0035957817	0.0026265536	0.0022495306	$1.512390e - 03$	$1.477693e - 03$
[2, ]	0.0022871418	0.0013430259	0.0011731138	$9.719864e - 04$	$5.472980e - 04$
[3, ]	0.0009780909	0.0006640329	0.0005171360	$5.541898e - 04$	$3.753744e - 04$
[4, ]	0.0009308450	0.0006290229	0.0004795621	$4.333454e - 04$	$2.912270e - 04$
[5, ]	0.0006255634	0.0003853966	0.0003734739	$2.373717e - 04$	$2.211866e - 04$
[6, ]	0.0008917330	0.0004921226	0.0003795670	$3.292370e - 04$	$2.054340e - 04$
[7, ]	0.0004921226	0.0004193316	0.0002702882	$2.134879e - 04$	$1.591280e - 04$
[8, ]	0.0003795670	0.0002702882	0.0002614147	$1.695565e - 04$	$1.430367e - 04$
[9, ]	0.0003292370	0.0002134879	0.0001695565	$1.793477e - 04$	$8.383607e - 05$
[10, ]	0.0002054340	0.0001591280	0.0001430367	$8.383607e - 05$	$1.505474e - 04$

Nous remarquons que les corrélations tendent vers zéro.

## Conclusion:

Nous avons vérifié par simulation qu'on peut très bien approximer le processus stochastique d'Ornstein Uhlenbeck qui est un processus gaussien, linéaire et à trajectoires continues par sa série de Fourier, et que ces coefficients de Fourier sont corrélés mais deviennent asymptotiquement non corrélés. Ainsi, nous avons étudié le comportement des corrélations des coefficients de

Fourier de processus stationnaire suivant les articles de Kawata T.

# Bibliographie

- [1] Kawata, T.: " On the Fourier Series of a Stationary Stochastic Process I ". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 224-245 (1966).
- [2] Kawata, T.: " On the Fourier Series of a Stationary Stochastic Process II ". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 224-245 (1969).
- [3] Kawata, T.: " The Fourier Series of some Stochastic Processes ". Japanese. J. Math. 29, 16-25 (1960).
- [4] Davis, R. C.: " On the Fourier Expansion of Stationary random processes". Proc Amer. Math. Soc. 24, 564-569 (1953).
- [5] Doob, J. L.: " Stochastic processes". New York: John Wiley 1953.
- [6] Delporte, J.: " Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé". Ann. Inst. Henri Poincaré, 1, 111-215 (1964).
- [7] M. Joseph Kampé de Fériet.: " Sur la Série de Fourier d'un Processus Stochastique Stationnaire". C. R. Acad. Sci, Paris. 260, 5453-5455 (1965).
- [8] Mann, H. B.: "Introduction to the Theory of Stochastic Process depending on a Continuous parameter". National Bureau of Standards. Appl. Math. Ser. 24, 1953.
- [9] Rice, S. O.: " Mathematical Analysis of Random noise". Bell. System techn. J. 23, 24, 1-162 (1944).
- [10] Root, W. L., and Pitcher, T. S.: " On the Fourier expansion of random functions". Ann. math. Statistics 26, 313-318 (1955).

- [11] Hwei, P. Hsu.: " Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes". Schaum's outline series. Mc Graw-Hill.
- [12] M. B. Priestley.: " Spectral Analysis and Time Series". Department of Mathematics, University of Manchester Institute of Science and Technolog . Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco (1981).
- [13] Robert B. Ash: " Topics in Stochastic Processes". Academic press, New York, San Francisco, London (1975).
- [14] Zygmund, A.: " Trigonometrical series". Monogr. Mat. V. Warsaw (1935).
- [15] D. Kannan.: " An Introduction to Stochastic Processes". North Holland series. New York. Oxford.
- [16] Peter J. Brockwell. Richard A. Davis.: " Time Series: Theory and Methods". Springer-Verlag. New York, Berlin, London, Paris, Tokyo.
- [17] Charles Suquet. " Intégration. Analyse de Fourier. Probabilité". Université des Sciences et Technologies de Lille. Licence de Mathématiques 2003-2004.
- [18] H. Cramér, M. R. Leadbetter.: " Stationary and Related Stochastic Processes". New York: Wiley 1967. Copyright renewed 1995 .
- [19] Papoulis, A.: " Probability, random variables and stochastic processes." New York: Mc Graw-Hill 1965.
- [20] D. Bernard.: " Techniques d'Analyse Mathématique." Masson et Cie, Paris 1968.
- [21] Bochner, S.: " Lectures on Fourier integral". Princeton: Univ. Press. 1953.
- [22] Titchmarsh, E. C.: "Introduction to the theory of Fourier integrals". Oxford: Univ. Press. 1937.