



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCCEN**

# THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

**DOCTORAT**

Spécialité: Equations Différentielles

Par :

**M<sup>elle</sup> Hellal Meryem**

Sur le thème

---

***ÉTUDE D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLES  
D'ORDRE 1***

---

Soutenue publiquement le 19-01-2017 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr M. Yebdri	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M <sup>me</sup> N. Daoudi-Merzagui	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr S. M Bouguima	Professeur	Université de Tlemcen	Co-Directeur de thèse
Mr M. Benchohra	Professeur	Université de Sidi Bel Abbès	Examineur
Mr A. Lakmeche	Professeur	Université de Sidi Bel Abbès	Examineur
Mr A. Moussaoui	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur

*Laboratoire Système Dynamique (SDA)  
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

Département de Mathématiques  
Faculté des sciences  
BP 119 Tlemcen.

[meriem\\_tlm@yahoo.fr](mailto:meriem_tlm@yahoo.fr)

*A ma chère mère en témoignage de ma profonde  
gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour  
tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la  
confiance qu'elle m'accordent et tout l'amour dont elle  
m'entoure.*

*A mon cher père qui est le plus bon père dans ce  
monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son  
soutien moral et matériel et pour son amour infini en  
exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma  
passion.*

*A mes chères soeurs Hafédha, Khaoula et à mon frère  
Mohammed Yacine.*

*"Là où se trouve une volonté,  
il existe un chemin"  
Winston Churchill*

# Remerciements

Louanges à Dieu qui m'a donné la force afin de parfaire ce travail et le mener à terme.

Je tiens également à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse le Professeur **N. Daoudi-Merzagui** et mon co-encadreur le Professeur **S. M Bouguima**, qui m'ont dirigée et encadrée durant mon travail ainsi que de m'avoir proposé un sujet aussi passionnant qu'intéressant. Leurs disponibilités permanentes, leurs aides et leurs compétences m'ont été d'un grand secours et soutien.

- Je tiens aussi à remercier M. le Professeur "**M. Yebdri**", pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.
  
- J'adresse à M. le Professeur "**A. Moussaoui**", l'expression de mes sincères remerciements pour le temps qu'il m'a consacré et l'excellence de ses conseils et idées, ceci ne se mesurent pas. Je vous en suis très reconnaissante, Je vous remercie aussi pour faire partie du jury.
  
- Je remercie M. le Professeur "**M. Benchohra**", d'avoir accepté d'examiner ce manuscrit.
  
- A M. le Professeur "**A. Lakmeche**", j'adresse mes remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury.

- Je remercie tous les enseignants du département de Mathématiques qui m'ont donné une partie de leur savoir.
- Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Hellal Meryem

---

---

# Table des matières

0.1	Présentation . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1	Quelques notions de l'analyse fonctionnelle . . . . .	9
1.2	Théorèmes de point fixe . . . . .	10
1.2.1	Le théorème de Krasnoselskii . . . . .	11
1.3	Rappels sur les systèmes dynamiques . . . . .	12
1.3.1	Notions de stabilité dans $\mathbb{R}^2$ : . . . . .	12
1.4	Rappels sur la théorie spectrale . . . . .	13
1.5	Contrôle optimal . . . . .	14
1.6	Principe du maximum de Pontryaguine . . . . .	15
<b>I</b>	<b>Problème Impulsif</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Problème périodique avec impulsions</b>	<b>17</b>
2.1	Les conditions périodiques . . . . .	17
2.1.1	Introduction . . . . .	17
2.1.2	Résultats auxiliaires . . . . .	19
2.2	Etude de l'existence de solutions positives . . . . .	32
2.2.1	Exemple . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Problème avec des conditions intégrales</b>	<b>37</b>
3.1	Les conditions intégrales . . . . .	37
3.1.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Résultats auxiliaires . . . . .	39
3.3	Résultats d'existence . . . . .	47
3.3.1	Exemple . . . . .	50
3.4	Conclusion et Perspectives . . . . .	53
3.4.1	Conclusion . . . . .	53
3.4.2	Perspectives . . . . .	53
<b>II</b>	<b>Problème de contrôle Optimal</b>	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>L'exploitation optimale d'une pêcherie</b>	<b>56</b>

4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Le modèle de l'écosystème . . . . .	57
	4.2.1 Récolte optimale et conservation de l'écosystème . . . . .	58
4.3	Existence d'un contrôle optimal . . . . .	61
	4.3.1 Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	61
	4.3.2 Principe du maximum . . . . .	63
	4.3.3 Le contrôle singulier . . . . .	64
4.4	Le système Hamiltonien . . . . .	65
4.5	La récolte optimale . . . . .	72
4.6	Stabilité de la solution Optimale . . . . .	75
4.7	Simulations numériques . . . . .	76
4.8	Conclusion . . . . .	80
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

---

## Abbreviations

*EDO* : Equation différentielle ordinaire  
*EDP* : Equation aux dérivées partielles.  
*PMP* : Principe du maximum de Pontryagin.  
*MPA* : Marine Protected Area

---

## Notations

$\mathbb{R}$ :	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$ :	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ $n$ fois.
$\mathbb{R}^+$ :	Ensemble des nombres réels positifs.
$x' = \frac{dx}{dt}$ :	La dérivée de la variable $x$ par rapport au temps $t$ .
$\Omega$ :	Ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ .
$\partial\Omega$	Frontière de $\Omega$
max :	Maximum.
sup	borne supérieure
inf	borne inférieure
lim	limite.
p.p	Presque partout
$L^p(\Omega)$	$\left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable } \int_{\Omega}  u ^p < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre $k$ .
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle.
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$ .
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$ .

---

---

# Introduction Générale

---

---

*"On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres: mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison."*

Henri POINCARÉ

## 0.1 Présentation

Plusieurs phénomènes naturels sont modélisés par un système d'équations différentielles. A titre d'exemples, citons: l'évolution des populations, les tremblements de terre et les épidémies. L'évolution peut subir un changement d'état rapide et dont la durée est négligeable par rapport à la durée de l'évolution du processus. Ceci représente un saut dans l'état du système. Mathématiquement, cela se traduit par un *système dynamique impulsif*. Ce type d'équations a fait l'objet de plusieurs études et intervient dans différents domaines de la science: l'économie [33], la physique et la technologie chimique [102] ainsi que dans la médecine, (l'épidémiologie) [?], [94] et dans la dynamique des populations [93]. L'étude de la solvabilité est abordée par plusieurs auteurs en utilisant différentes méthodes: la méthode des sous et sur solutions [8], [54], les méthodes variationnelles [25], l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder, la théorie du degré topologique [84], le théorème du point fixe dans les cônes [107] et la théorie de bifurcation [61].

L'étude d'un processus en optimisant un critère, on obtient se ramène alors à un problème de contrôle optimal. La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat...). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin, formulé par L. S. Pontryagin en 1956, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales [89]. Nous nous sommes intéressés à la dynamique des populations, en particulier aux écosystèmes marins qui jouent un rôle important pour la société humaine à travers des biens et des services qu'ils leur fournissent, parmi lesquels se comptent: nourriture, emploi, tourisme et transport, [75], [78].

Cette thèse est composée de deux parties principales:

*Partie (I).* Problème impulsif.

*Partie (II).* Problème de contrôle Optimal.

La première partie, est consacrée à l'étude des problèmes aux limites, associés à des équations différentielles en présence d'impulsions. Nous déterminons des conditions suffisantes pour l'existence et la multiplicité des solutions positives dans le cas où la non linéarité change de signe. Notre approche est basée sur l'application d'une des variantes du théorème de point fixe de Krasnoselskii [39].

Le premier chapitre est une présentation de quelques outils d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans la suite de ce travail. Après un petit aperçu sur les théorèmes de point fixe, nous introduisons le théorème de Krasnoselskii. Et, concernant le problème de contrôle optimal, après un petit aperçu sur les systèmes dynamiques nous énonçons le Principe du maximum de Pontryagin.

Le chapitre 2 a pour objectif d'étudier la solvabilité du système différentiel périodique du premier ordre avec impulsions suivant:

$$\begin{cases} u_i'(t) + a_i(t)u_i(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t)), & t \in J', \\ u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), & k = 1, \dots, p, \quad i = 1, 2 \\ u_i(0) = u_i(1), \end{cases} \quad (1)$$

où  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$ ,  $t_{k+p+1} = t_k + 1$ , sont les moments où les impulsions se produisent,  $J' = [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_p\}$  et  $I_i^k, f_i, a_i$  sont des fonctions qui satisfont certaines conditions précisées par la suite.

Ces dernières années, les problèmes de type (1) sont étudiés d'une manière intensive, cela étant dû souvent à des applications dans différents domaines de la science: écologie, dynamique de populations, biologie [51], [79], [83] [103].

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'existence de solutions positives du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} u_i'(t) + a_i(t)u_i(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t)), & t \in J' \\ u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), & k = 1, \dots, p, \quad i = 1, 2 \\ \gamma u_i(0) - \delta u_i(1) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(s) u_i(s) ds, \end{cases} \quad (2)$$

où  $0 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$  et  $\gamma, \delta > 0$ ,  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$  sont les instants d'impulsions,  $J' = [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_p\}$  et  $I_i^k, f_i, a_i, g_i$  avec des conditions convenables.

Il est connu que les problèmes aux limites avec conditions intégrales modélisent des phénomènes thermiques de conduction [15], de semi-conduction [52], hydrodynamiques (Écoulement de l'eau souterraine), thermo-élasticité et physique des plasmas [11], [65] et [111].

La deuxième partie constituée du chapitre 4, qui a pour thème la gestion d'une pêcherie, en fait il s'agit d'étudier la maximisation d'un profit qui provient de la pêche, tout en conservant l'espèce.

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude d'un modèle spatialement bio-économique pour déterminer les bénéfices de la pêche. Nous utilisons le modèle de Leenheer [63]

comme modèle de base tout en tenant compte des courants marins,

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 u}{dx^2} = -\mu u - E(x)u + r - k \frac{du}{dx} \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

La quantité  $-D \frac{d^2 u}{dx^2}$  représente les changements de la concentration de la biomasse due aux mouvements de l'espèce, où  $D$  est le coefficient de diffusion. Après un simple changement de variables, le problème (3) est ramené au système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = v, \\ \frac{dv}{dx} = \mu u + Eu - r + kv, \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \end{cases}$$

A l'aide de la théorie du contrôle optimale, nous proposons une démarche permettant de déterminer une stratégie de la pêche pour maximiser le profit. Les résultats obtenus seront illustrés par des simulations numériques.

*"Certains auteurs, parlant de leurs ouvrages disent:  
Mon livre, mon commentaire, mon histoire, etc.  
(...) Ils feraient mieux de dire: Notre livre;  
notre commentaire, notre histoire, etc.,  
vu que d'ordinaire il y a plus en cela  
du bien d'autrui que du leur."  
Blaise Pascal  
Pensée 64*

---

## Préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler des résultats concernant les théorèmes de point fixe et de préparer le développement des autres chapitres.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Quelques notions de l'analyse fonctionnelle</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Théorèmes de point fixe</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1	Le théorème de Krasnoselskii . . . . .	11
<b>1.3</b>	<b>Rappels sur les systèmes dynamiques</b> . . . . .	<b>12</b>
1.3.1	Notions de stabilité dans $\mathbb{R}^2$ : . . . . .	12
<b>1.4</b>	<b>Rappels sur la théorie spectrale</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1.5</b>	<b>Contrôle optimal</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.6</b>	<b>Principe du maximum de Pontryaguine</b> . . . . .	<b>15</b>

---

Nous introduirons certaines notions d'analyse fonctionnelle nécessaires à la suite du travail. Nous commençons par présenter quelques résultats de l'analyse fonctionnelle.

### 1.1 Quelques notions de l'analyse fonctionnelle

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Nous notons par  $X$  un espace de Banach et  $C(I, X)$  l'espace de Banach des fonctions continues de  $I$  dans  $X$  muni de la norme,

$$\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|.$$

**Définition 1.1.1** Une partie  $A$  de  $C(I, X)$  est équicontinue ssi

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 / \forall f \in A, \forall y \in I : |x - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

**Définition 1.1.2** On dit qu'une partie  $A$  de  $C(I, X)$  est relativement compacte si sa fermeture  $\bar{A}$  est compacte.

**Lemme 1.1.1** (Lemme d'Ascoli-Arzelà)

Soit  $A$  une partie de  $C(I, X)$ ,  $A$  est relativement compacte si:

- i)  $A$  est équicontinue dans  $I$ .
- ii)  $A$  est uniformément bornée dans  $X$ .

**Définition 1.1.3** L'application  $f : X \rightarrow F$  est dite complètement continue si:

- i)  $f$  est continue sur  $X$ .
- ii)  $\forall B \subset X; B$  un borné implique que  $f(B)$  est relativement compacte dans  $F$ .

**Définition 1.1.4** [7] Soit  $\Omega$  un ouvert bornée de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $L^1$  Carathéodory si

- 1-  $t \rightarrow f(t, x)$  est mesurable pour tout  $x \in \Omega$ ;
- 2-  $x \rightarrow f(t, x)$  est continue pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 3- pour tout  $r > 0$ , il existe  $\varphi_r \in L^1(\mathbb{R})$  tel que

$$|f(t, x)| \leq \varphi_r(t) \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}, \text{ et pour } |x| \leq r.$$

**Définition 1.1.5** Soit  $X$  un espace de Banach réel, l'ensemble non vide  $K \subset X$  est appelé un cône de  $X$  si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (i)  $x \in K$  et  $\lambda \geq 0$  implique  $\lambda x \in K$ .
- (ii)  $x \in K$  et  $-x \in K$  implique  $x = 0$ .

## 1.2 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes du point fixe se révèlent être des outils très utiles dans le domaine de la résolution des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe. Très différent, le théorème du point fixe de Brouwer n'est pas constructif : il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle-même sans apporter de méthode générale pour le trouver. Les théorèmes du point fixe sont nombreux; en voici quelques-uns: Théorème du point fixe de Browder, Théorème du point fixe de Borel, Théorème du point fixe de Bourbaki-Kneser, sur les ensembles ordonnés, Théorème de Krasnoselskii, Théorème du point fixe de Caristi, Théorème du point fixe de Earle-Hamilton, Théorème du point fixe de Kakutani, Théorème du point fixe de Kleene etc.

Le théorème de Krasnoselskii étant l'outil de base dans les deux chapitres suivants, nous en donnons un petit aperçu.

### 1.2.1 Le théorème de Krasnoselskii

Le théorème du point fixe de Krasnoselskii [59] ou théorème de compression-expansion de Krasnoselskii représente est une approche topologique pour l'étude des problèmes nonlinéaires associés à des équations différentielles ordinaire où intégrales, et des équations aux dérivées partielles. Il est utilisé non seulement pour montrer l'existence de solutions, mais aussi pour localiser les solutions dans un anneau conique ou d'autres domaines de ce type. Une littérature riche a été produite sur le sujet en théorie et applications. Krasnoselskii lui-même dans [60] a appliqué son théorème pour l'étude des solutions périodiques pour un système d'équations différentielles ordinaires périodiques. Ce théorème a connu plusieurs développements, des variantes et des généralisations comme par exemple le théorème Leggett [64], théorème de Avery et Peterson [3]. Dans ce travail, nous utilisons une de ses variantes : "Théorème de point fixe dans double cônes". Son énoncé est le suivant:

#### Théorème de point fixe dans double cône [39]

Soient  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$  et  $K$  un cône de  $X$ . Pour tout  $a > 0$ , considérons les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} K_r &= \{x \in K : \|x\| < a\} \\ &\text{et} \\ \partial K_r &= \{x \in K : \|x\| = a\} \end{aligned}$$

Et, pour  $\theta : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante continue (i.e. continue et  $\theta(\lambda x) \leq \theta(x)$  pour  $\lambda \in (0, 1)$ ), nous définissons les ensembles,

$$K(b) = \{x \in K : \theta(x) < b\}, \quad \partial K(b) = \{x \in K : \theta(x) = b\},$$

et

$$K_a(b) = \{x \in K : a < \|x\|, \theta(x) < b\}.$$

**Théorème 1.2.1** *soit  $X$  un espace de Banach réel muni de la norme  $\|\cdot\|$  et  $K, K' \subset X$  deux cônes avec  $K' \subset K$ . Supposons  $T : K \rightarrow K$  et  $T^* : K' \rightarrow K'$  sont deux opérateurs complètement continus et  $\theta(x) : K' \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonctionnelle continue croissante vérifiant  $\theta(x) \leq \|x\| \leq \delta \theta(x)$  pour tout  $x \in K'$ , où  $\delta$  est une constante positive,  $\delta \geq 1$ . S'il existe deux constantes  $b > a > 0$  tel que*

- (C1)  $\|Tx\| < a$ , pour  $x \in \partial K_a$ ;
- (C2)  $\|T^*x\| < a$ , pour  $x \in \partial K'_a$  et  $\theta(T^*x) > b$  pour  $x \in \partial K'(b)$ ;
- (C3)  $Tx = T^*x$ , pour  $x \in K'_a(b) \cap \{u : T^*u = u\}$ .

*Alors,  $T$  a au moins deux points fixes  $y_1$  et  $y_2$  dans  $K$ , satisfaisant*

$$0 \leq \|y_1\| < a < \|y_2\|, \quad \theta(y_2) < b.$$

## 1.3 Rappels sur les systèmes dynamiques

Un système dynamique est défini par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO). Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [31].

Soient  $U$  un ouvert de  $I \times \Omega$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre sur  $U$  est une relation du type

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

notée

$$x' = f(t, x).$$

### 1.3.1 Notions de stabilité dans $\mathbb{R}^2$ :

La notion de stabilité permet de savoir le comportement des solutions lorsque le temps devient grand, la stabilité possède un large éventail de définitions voir [56]. considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions des variables  $x_1$  et  $x_2$ .

**Définition 1.3.1** *un point d'équilibre de (1.2) est une solution constante  $c = (x_1^*, x_2^*)$  qui vérifie :*

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1^*, x_2^*) = 0, \\ x'_2 = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0. \end{cases}$$

**Remarque 1.3.1** *Le plan  $(x_1, x_2)$  est appelé **plan de phase**, de plus la représentation des trajectoires dans ce plan de phase est appelée le **portrait de phase**.*

**Définition 1.3.2 (Linéarisation)** *Le linéarisé autour de l'équilibre  $(x_1^*, x_2^*)$  du système non linéaire (1.2) est défini par*

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

notée  $Y' = JY$

Où  $J(x_1^*, x_2^*)$  est appelée la matrice jacobienne calculée au point  $(x_1^*, x_2^*)$ , elle est notée par  $J^*$ .

$\det(J^*)$  et  $Tr(J^*)$  dénotent respectivement le déterminant et la trace de la matrice jacobienne.

**Théorème 1.3.1** Soit le système non-linéaire (1.2) admettant un point d'équilibre  $(x_1^*, x_2^*)$  hyperbolique et tel que  $\det(J^*) \neq 0$ . Alors, dans un voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système (1.2) et sa forme linéarisée sont qualitativement équivalents.

**Remarque 1.3.2**  $(x_1^*, x_2^*)$  est appelé un point fixe hyperbolique si toutes les valeurs propres de  $J(x_1^*, x_2^*)$  ont la partie réelle non nulle.

**Théorème 1.3.2** [87] On suppose pour le système (1.2) que

$$\begin{cases} \det(J^*) \neq 0, \\ \text{Tr}^2 - 4 \det(J^*) \geq 0. \end{cases}$$

on a les résultats suivants:

- 1- Si  $\det(J^*) < 0$  alors le point d'équilibre est un point-selle pour (1.2).
- 2- Si  $\det(J^*) > 0$  et  $\text{Tr} < 0$ , alors le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.
- 3- Si  $\det(J^*) > 0$  et  $\text{Tr} \geq 0$ , alors le point d'équilibre est instable.

## 1.4 Rappels sur la théorie spectrale

Soit  $X$  un espace de Banach réel associé à la norme notée par  $\|\cdot\|_X$  :

**Définition 1.4.1** Soit  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un opérateur linéaire. Un nombre  $\lambda$  complexe est une valeur propre de  $A$  s'il existe un vecteur  $u \in X$ ;  $u \neq 0$  tel que  $Au = \lambda u$ . Un tel vecteur est appelé vecteur propre de  $A$ .

**Définition 1.4.2** Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé dans  $X$ . L'ensemble résolvant de  $A$ , noté  $\rho(A)$  est

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et borné dans } X \right\}$$

i.e. l'ensemble des  $\lambda$  pour lesquels les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $(\lambda I - A)$  est injectif,
- (ii)  $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ ,
- (iii)  $(\lambda I - A)^{-1}$  est un opérateur borné.

On définit pour  $\lambda \in \rho(A)$ , la résolvante de  $A$  par

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Le spectre de  $A$  est l'ensemble  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .

On dit que  $\lambda$  est une valeur propre si  $\lambda \in \sigma(A)$ .

**Définition 1.4.3** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire. On dit que  $A$  est à résolvant compact si  $R(\lambda; A) : X \rightarrow X$  est une application compacte pour un  $\lambda \in \rho(A)$ .

**Théorème 1.4.1 (de Krein-Rutman) [96]** Soit  $C$  un cône, avec intérieur  $\text{int}C \neq \emptyset$ . Si  $A$  est un opérateur compact strictement positif dans  $C$ , alors il existe  $u \in \text{int}C$  et il existe  $\lambda > 0$  tels que

$$Au = \lambda u$$

De plus,  $\lambda$  est l'unique valeur propre associée à un vecteur propre positif de  $A$  dans  $C$ .

## 1.5 Contrôle optimal

En mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique  $E(\cdot)$  appelé le contrôle. Ce système peut être modélisé par des équations différentielles, intégrales...etc.

Nous avons en général un système à  $n$  équations différentielles du premier ordre sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), E) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $f$  est un vecteur de  $n$  composantes  $f_i, i = 1, \dots, n$ .  $f$  pouvant être soit linéaire ou bien non linéaire.

Pour bien manipuler le système (1.3) il faut déterminer un contrôle  $E^*$  tout en maximisant la fonctionnelle  $J$  définie par

$$J(t, E) = \int_0^T G(t, x(t), E(t)) dt$$

où  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$  et le temps final  $T$  peut être fixé ou non. Donc le problème de contrôle optimal se pose sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \max J(t, E) \quad \text{sur } U_{ad}, \\ \text{sous les contraintes} \quad f(t, x(t), E(t)) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Notons par  $U_{ad}$  l'ensemble des valeurs de contrôle  $E$ ; tel que  $E \in U_{ad}$ .

**Remarque 1.5.1** Ces contrôles sont à valeur dans un ensemble  $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$  où  $m$  représente le nombre de composantes du contrôle  $E$ . Comme nous le verrons dans le chapitre 4, cet ensemble, peut être un domaine fermé ou ouvert de  $\mathbb{R}$ .

## 1.6 Principe du maximum de Pontryaguine

Avant d'énoncer le principe de Pontryaguine, introduisons quelques définitions et propriétés essentielles.

**Définition 1.6.1 (Hamiltonien)** *Considérons le système suivant*

$$x'(t) = f(t, x(t), E(t)), \quad (1.5)$$

où  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors le Hamiltonien  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par

$$H(x(t), \lambda(t), E(t)) = G(x(t), E(t)) + \lambda^T(t) \cdot f(x(t), E(t)).$$

**Théorème 1.6.1 (Principe du Maximum de Pontryagin) [104]** *Si  $E^*(t)$  est un contrôle optimal pour le problème (1.4), et  $x^*(t)$  sa réponse, alors il existe une fonction  $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint tel que pour tout  $t \in [0, T]$ , on a*

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), \lambda(t), E^*(t)), \quad (1.6)$$

et

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^*}(x^*(t), \lambda(t), E^*(t))$$

Ainsi on a la condition de maximisation pour  $t \in [0, T]$

$$H(x^*(t), \lambda(t), E^*(t)) = \max_{E \in U_{ad}} H(x^*(t), \lambda(t), E(t)).$$

**Remarque 1.6.1** *Si  $f$  ne dépend pas du temps  $t$ , c'est à dire le système considéré est autonome, alors le Hamiltonien  $H$  ne dépend pas de  $t$  et on a*

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{E \in U_{ad}} H(x^*(t), \lambda(t), E^*(t)) = \text{const}$$

**partie I**

**Problème Impulsif**

---

## Problème périodique avec impulsions

Le but de ce chapitre est d'étudier la solvabilité d'un système différentiel périodique du premier ordre soumis à des impulsions.

### Sommaire

---

<b>2.1 Les conditions périodiques</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1.1 Introduction . . . . .	17
2.1.2 Résultats auxiliaires . . . . .	19
<b>2.2 Etude de l'existence de solutions positives</b> . . . . .	<b>32</b>
2.2.1 Exemple . . . . .	35

---

Ce chapitre est le développement de l'article [\[26\]](#)

## 2.1 Les conditions périodiques

### 2.1.1 Introduction

Nous étudions la solvabilité d'un système différentiel périodique du premier ordre sous l'effet d'impulsions. Nous sommes particulièrement intéressées au problème suivant:

$$\begin{cases} u_i'(t) + a_i(t)u_i(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t)), & t \in J', \\ u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), & k = 1, \dots, p, \quad i = 1, 2 \\ u_i(0) = u_i(1), \end{cases} \quad (2.1)$$

$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$ ,  $t_{k+p+1} = t_k + 1$ , sont les cas où les impulsions se produisent,  $J' = [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_p\}$  et  $I_i^k$ ,  $f_i$ ,  $a_i$  sont des fonctions vérifiant certaines conditions spécifiées par la suite.

Certains cas spéciaux du problème impulsifs (2.1) ont été étudiés par différents auteurs [5], [49] et [67]. En 2002, Nieto [83, 84] a utilisé le théorème de Schaeffer [95] pour montrer l'existence de solutions pour le problème périodique suivant dans le cas où  $a(t) = 0$  et  $i = 1$ :

$$\begin{cases} u' + F(t, u(t)) = 0 \text{ p.p. } t \in [0, T], t \neq t_k \\ u(t_k^+) - u(t_k^-) = I^k(u(t_k)), k = 1, \dots, p, \\ u(0) = u(T) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , est une fonction de Carathéodory et  $I_k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

En 2007, Li, Nieto et Shen [67] ont étudié la solvabilité du problème suivant:

$$\begin{cases} u' + \lambda u = f(t, u), t \neq t_k, t \in [0, T] \\ u(t_k^+) - u(t_k^-) = I^k(u(t_k)), k = 1, \dots, p, \\ u(0) = u(T) \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\lambda \neq 0$  et  $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $I^k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , par le théorème de Schaefer, ils ont montré que (2.3) présente au moins une solution lorsque les conditions citées ci-dessous sont vérifiées,

1.  $|f(t, u)| \leq l|u|$ ,  $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ ,
2.  $|I^k(u)| \leq c_k$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,
3.  $\frac{l}{|\lambda|} < 1$ .

où  $l$  et  $c_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) sont des constantes non négatives.

En 2006, Li et Shen ont prouvé l'existence de solutions positives pour le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = f(t, u), t \neq t_k, t \in [0, T], \\ u(t_k^+) - u(t_k^-) = I^k(u(t_k)), k = 1, \dots, p, \\ u(0) = u(T). \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $a \in L^1([0, T], \mathbb{R})$  et  $f \in C([0, T], \mathbb{R})$  est une fonction  $T$ -périodique satisfaisant  $a(t)f(t, u) \geq 0$  et  $a(t)I^k(u) \geq 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^+$  et pour p.p  $t \in [0, 1]$ . Par le théorème du point fixe de Krasnoselskii, les auteurs ont montré l'existence de solutions pour le problème (2.4) sous des conditions suffisantes.

Dans [74], Y. Liu a établi l'existence d'au moins trois solutions positives pour (2.4) en utilisant le théorème du point fixe de Leggett-Williams, dans le cas où  $f$  et  $I^k$  sont des fonctions positives  $f(t, u) > 0$  pour p.p.  $t \in J$ ,  $u(t) \in [0, +\infty[$ , et  $I^k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) sont continues tel que  $I^k(u(t_k)) > 0$  pour tout  $u(t) \in [0, +\infty[$ .

En 2013, Yang [108] a étudié le système singulier du premier ordre de  $n$  dimensions suivant,

$$\begin{cases} u_i'(t) + a_i(t)u_i(t) = b_i(t) f_i(t, u_1, \dots, u_n) + \lambda e_i(t), t \in J', \\ u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = \lambda I_i^k(u_1(t_k), \dots, u_n(t_k)), k = 1, \dots, p, \\ u_i(0) = u_i(1) \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\lambda > 0$  est un paramètre,  $a_i, e_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $b_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$  sont des fonctions 1-périodiques pour  $i = 1, \dots, n$ , et les  $f_i$  sont continues sur  $J'$  et à valeurs positives avec  $f_i(t, u)$  est continue à gauche en  $t = t_k$ , la limite à droite  $f_i(t_k^+, u)$  existe, et

$I_i^k \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $k = 1, \dots, p$ ;  $i = 1, \dots, n$ . Par le théorème du point fixe de Krasnoselskii l'existence de solutions du problème (2.5) a été obtenue sous des conditions suffisantes.

Motivées par les travaux [108] et [112], nous étudions dans ce chapitre, l'existence et la multiplicité de solutions positives de (2.1) dans le cas où  $f$  change de signe en utilisant le théorème Krasnoselskii dans double cônes.

Les hypothèses considérées dans notre travail sur  $f$  et  $I_k$  sont:

- (H<sub>1</sub>) (i)  $a_i \in L^1(J', \mathbb{R})$ , telle que  $\int_0^1 a_i(t) dt > 0$  pour  $i = 1, 2$ .  
(ii)  $I_i^k \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , avec  $I_i^{k+p+1} = I_i^k$ , pour  $k = 1, \dots, p$ ,  $i = 1, 2$ .
- (H<sub>2</sub>) (i)  $f_i : J' \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory, et,  $f_i(t, u_1, u_2)$  est continue à gauche en  $t = t_k$ , et la limite à droite  $f_i(t_k^+, u_1, u_2)$  existe, pour  $i = 1, 2$ .  
(ii) pour tout  $t \in J'$ ,  $f_i(t, 0, 0) \geq (\neq 0)$ , pour  $i = 1, 2$ .

### 2.1.2 Résultats auxiliaires

Nous présentons quelques lemmes importants qui seront utilisés dans la preuve de notre résultat principal.

Tout d'abord, définissons l'espace  $E$  par,

$$PC := \left\{ \begin{array}{l} u : J' \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue en } t \neq t_k, \text{ continue à gauche en } t_k \\ \text{et la limite à droite } u(t_k^+) \text{ en } t = t_k \text{ existe, pour } k = 1, \dots, p. \end{array} \right\},$$

et l'espace de Banach  $X = PC \times PC$ , muni la norme,

$$\|(u_1, u_2)\| := \sum_{i=1}^2 \sup_{t \in [0,1]} |u_i(t)|.$$

Nous utilisons la notation  $\preceq$  pour l'ordre sur  $X$ , défini par

$$(u_1, u_2) \preceq (v_1, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) \leq v_1(t), \\ u_2(t) \leq v_2(t) \end{cases} \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

De plus, nous notons  $(\cdot)^+$  la partie positive, c.à.d pour tout  $B$  dans  $\mathbb{R}$

$$B^+ := \max(B, 0),$$

Le lemme suivant transforme (2.1) en une équation intégrale.

**Lemme 2.1.1**  $(u_1, u_2) \in X$  est une solution de (2.1) si et seulement si  $(u_1, u_2)$  est une solution du système suivant:

$$u_i(t) = \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad (2.6)$$

pour  $i = 1, 2$  et  $t \in [0, 1]$ , où

$$G_i(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{-\omega_i(t)+\omega_i(s)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{e^{-\omega_i(1)-\omega_i(t)+\omega_i(s)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}} & \text{si } 0 \leq t < s \leq 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $\omega_i(t) = \int_0^t a_i(s) ds$ .

**Preuve: Étape 1:** Montrons que, si  $u_i$  est une solution du PBVP (2.1) alors  $u_i$  satisfait (2.6). En effet;

Soit

$$y_i(t) = e^{\omega_i(t)} u_i(t), \quad t \in [0, 1] \quad (2.8)$$

où  $u_i(t)$  est une solution de (2.1).

En dérivant (2.8), nous obtenons pour  $t \in J'$

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= e^{\omega_i(t)} u_i'(t) + a_i(t) e^{\omega_i(t)} u_i(t) \\ &= e^{\omega_i(t)} [-a_i(t) u_i(t) + f_i(t, u_1(t), u_2(t))] + a_i(t) e^{\omega_i(t)} u_i(t). \end{aligned}$$

Par conséquent pour  $i = 1, 2$  on a

$$\begin{cases} y_i'(t) = e^{\omega_i(t)} f_i(t, u_1(t), u_2(t)), \\ \Delta y_i(t_k) = e^{\omega_i(t_k)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad k = 1, \dots, p, \\ y_i(0) = e^{-\omega_i(1)} y_i(1). \end{cases}$$

utilisant l'intégration de  $y_i'(t) = e^{\omega_i(t)} f_i(t, u_1, u_2)$  de 0 à  $t_1$  nous obtenons

$$y_i(t_1) = y_i(0) + \int_0^{t_1} e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds, \quad i = 1, 2,$$

et l'intégration de  $t_1$  à  $t$  avec  $t \in ]t_1, t_2]$ , donne

$$y_i(t) = y_i(t_1^+) + \int_{t_1}^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds, \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Depuis

$$\Delta y_i(t_k) = e^{\omega_i(t_k)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad k = 1, \dots, p, \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

nous pouvons écrire,

$$y_i(t_1^+) = y_i(t_1) + I_i^1(u_1(t_1), u_2(t_1)) e^{\omega_i(t_1)}, \quad i = 1, 2, \quad (2.11)$$

Par (2.9) et (2.11) nous obtenons,

$$y_i(t) = y_i(0) + \int_0^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds + e^{\omega_i(t_1)} I_i^1(u_1(t_1), u_2(t_1)), \quad i = 1, 2.$$

En répétant le même raisonnement pour les autres points  $t_k$ ,  $k = 2, \dots, p$ , nous trouvons pour tous  $t \in [0, 1]$

$$y_i(t) = y_i(0) + \int_0^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).$$

Ainsi, à partir de  $y_i(0) = u_i(0)$ ,  $i = 1, 2$  et de (2.8) nous avons l'égalité suivante

$$\begin{aligned} e^{\omega_i(t)} u_i(t) &= u_i(0) + \int_0^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \end{aligned}$$

qui s'écrit pour  $t = 1$ ,

$$\begin{aligned} e^{\omega_i(1)} u_i(1) &= u_i(0) + \int_0^1 e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \end{aligned}$$

La condition de périodicité  $u_i(0) = u_i(1)$ ,  $i = 1, 2$ , donne,

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\omega_i(1)}) u_i(0) &= \int_0^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} u_i(t) &= (1 - e^{-\omega_i(1)})^{-1} \left[ \int_t^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] \\ &\quad + \int_0^t e^{\omega_i(s) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \end{aligned}$$

$$+ \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned} u_i(t) = & (1 - e^{-\omega_i(1)})^{-1} \left[ \int_0^t e^{\omega_i(s) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right. \\ & + \sum_{0 \leq t_k < t} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\ & + \int_t^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ & \left. + \sum_{t < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right], \end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) &= \sum_{0 < t_k < 1} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\ &= \sum_{t \leq t_k < 1} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \end{aligned}$$

Il en résulte, pour  $i = 1, 2$ , et  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)). \end{aligned}$$

**Étape 2:** Montrons que, si  $(u_1, u_2)$  satisfait (2.6), alors  $(u_1, u_2)$  est une solution du problème (2.1).

Soit  $t \in J'$  alors

$$u_i'(t) = \left[ \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right]' + \left[ \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right]',$$

où

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right]' &= -a_i(t) \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\ &\quad + f_i(t, u_1(t), u_2(t)), \end{aligned}$$

et

$$\left[ \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right]' = -a_i(t) \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_i'(t) = & -a_i(t) \left( \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) \\ & + f_i(t, u_1(t), u_2(t)). \end{aligned}$$

D'où

$$u_i'(t) = -a_i(t) u_i(t) + f_i(t, u_1(t), u_2(t)).$$

Par conséquent

$$u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), k = 1, \dots, p, u_i(0) = u_i(1).$$

■

**Remarque 2.1.1** De la formule (2.7), nous déduisons que si  $\omega_i(1) > 0$  alors  $G_i(t, s) > 0, \forall t, s \in [0, 1]$ .

Comme extension du résultat précédent, nous présentons le lemme suivant qui est très utile pour la construction des cônes  $K$  et  $K'$  cités dans le Théorème 1.2.1.

**Lemme 2.1.2** Soit  $a_i$  satisfaisant  $(H_1)$ . Si pour tous  $(u_1, u_2) \in X$ ,

$$\int_0^1 f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \geq 0,$$

alors, la solution  $(u_1, u_2)$  de (2.1) vérifie  $u_i(t) \geq \sigma_i \|u_i\|$  où

$$\sigma_i = \frac{\mu_i}{\beta_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{avec } \mu_i := \frac{1}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \exp\left(-\int_0^1 a_i^+(\tau) d\tau\right), \quad \beta_i := \frac{1}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \exp\left(\int_0^1 a_i^-(\tau) d\tau\right).$$

**Remarque 2.1.2**  $\sigma_i = \frac{\mu_i}{\beta_i} = \exp\left(-\int_0^1 (a_i^+(\tau) + a_i^-(\tau)) d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^1 |a_i(\tau)| d\tau\right)$

**Preuve:** Soit  $a_i^+(t) = \max\{0, a_i(t)\}$  et  $a_i^-(t) = \max\{0, -a_i(t)\}$ , alors

$$|a_i(t)| = a_i^-(t) + a_i^+(t) \text{ et } a_i(t) = a_i^+(t) - a_i^-(t), \quad i = 1, 2,$$

pour  $(u_1, u_2)$  une solution du problème (2.1), nous avons par le Lemme 2.1.1, que

$$u_i(t) = \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad i = 1, 2.$$

Comme

$$\begin{aligned} G_i(t, s) &= \begin{cases} \frac{e^{-\omega_i(t)+\omega_i(s)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{e^{-\omega_i(1)-\omega_i(t)+\omega_i(s)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}}, & \text{si } 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \exp\left(-\int a_i(\tau) d\tau\right) \\ \frac{1}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \exp\left(-\left(\int_0^t a_i(\tau) d\tau + \int_s^1 a_i(\tau) d\tau\right)\right) \end{cases} \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \exp\left(\int_0^1 a_i^-(\tau) d\tau\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_i(t, s) &= \begin{cases} \frac{e^{-\omega_i(t)+\omega_i(s)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}}, & \text{if } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{e^{-\omega_i(1)-\omega_i(t)+\omega_i(s)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}}, & \text{if } 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-\int_0^t a_i(\tau) d\tau}}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \\ \frac{e^{-\left(\int_0^t a_i(\tau) d\tau + \int_s^1 a_i(\tau) d\tau\right)}}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \end{cases} \geq \frac{e^{-\int_0^1 a_i^+(\tau) d\tau}}{1 - e^{-\omega_i(1)}}, \end{aligned}$$

alors

$$\|u_i\| \leq \frac{e^{\int_0^1 a_i^-(\tau) d\tau}}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \int_0^1 f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad i = 1, 2,$$

et

$$u_i(t) \geq \frac{e^{-\int_0^1 a_i^+(\tau) d\tau}}{1 - e^{-\omega_i(1)}} \int_0^1 f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad i = 1, 2.$$

Il s'ensuit que

$$u_i(t) \geq \frac{e^{-\int_0^1 a_i^+(\tau) d\tau}}{e^{\int_0^1 a_i^-(\tau) d\tau}} \|u_i\| = \sigma_i \|u_i\|, \quad t \in [0, 1],$$

où

$$\sigma_i = \frac{\mu_i}{\beta_i} = e^{-\int_0^1 |a_i(\tau)| d\tau}, \quad i = 1, 2.$$

■

Dans la suite nous prouvons des résultats auxiliaires formulés sous forme de lemmes permettant de vérifier toutes les conditions du Théorème 1.2.1 et donc la possibilité de son application.

Soit  $X_0 \subset X$ , le sous-espace des fonctions 1-périodiques, i. e

$$X_0 = \{(u_1, u_2) \in X, u_1(0) = u_1(1), u_2(0) = u_2(1)\}.$$

Définissons les ensembles  $K$  et  $K'$  dans  $X$  par

$$K = \{(u_1, u_2) \in X, u_i(t) \geq 0, i = 1, 2, t \in [0, 1]\},$$

et

$$K' = \left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in X_0, u_i(t^+) > 0, u_i(t^-) > 0, t \in [0, 1], \\ \inf_{t \in [0, 1]} u_i(t) \geq \sigma \|u_i\|, i = 1, 2 \end{array} \right\}, \quad (2.12)$$

où  $\sigma = \min_{i=1,2} \{\sigma_i\}$ .

Il est clair que  $K', K$  sont deux cônes dans  $X$ , tels que  $K' \subset K$ .

De plus, nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.1.3** soit  $\theta : K' \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\theta(u_1, u_2) = \inf_{t \in [0, 1]} u_1(t) + \inf_{t \in [0, 1]} u_2(t), \quad (2.13)$$

alors,  $\theta$  est une fonction croissante continue satisfaisant

$$\theta(u_1, u_2) \leq \|(u_1, u_2)\| \leq \frac{1}{\sigma} \theta(u_1, u_2).$$

**Preuve:** Montrons que la fonction  $\theta$  est continue i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall U, U^0 \in K', \|U - U^0\| < \delta \Rightarrow |\theta(U) - \theta(U^0)| < \epsilon.$$

où  $\|U - U^0\| = \sum_{i=1}^2 \sup_{t \in J} |u_i(t) - u_i^0(t)|$ .

Soient  $U, U^0 \in K'$

$$\begin{aligned} |\theta(U) - \theta(U^0)| &= \inf_{t \in [0,1]} u_1(t) + \inf_{t \in [0,1]} u_2(t) - \left( \inf_{t \in [0,1]} u_1^0(t) + \inf_{t \in [0,1]} u_2^0(t) \right) \\ &\leq u_1(t) + u_2(t) - \left( \inf_{t \in [0,1]} u_1^0(t) + \inf_{t \in [0,1]} u_2^0(t) \right) \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} u_1(t) + \sup_{t \in [0,1]} u_2(t) - \left( \inf_{t \in [0,1]} u_1^0(t) + \inf_{t \in [0,1]} u_2^0(t) \right) \\ &\leq \left( \sup_{t \in [0,1]} u_1(t) - \inf_{t \in [0,1]} u_1^0(t) \right) + \left( \sup_{t \in [0,1]} u_2(t) - \inf_{t \in [0,1]} u_2^0(t) \right) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |\theta(U) - \theta(U^0)| &\leq \left| \sup_{t \in [0,1]} (u_1(t) - u_1^0(t)) + \sup_{t \in [0,1]} (u_2(t) - u_2^0(t)) \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} (|u_1(t) - u_1^0(t)|) + \sup_{t \in [0,1]} (|u_2(t) - u_2^0(t)|) = \|U - U^0\| \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

alors il suffit de prendre  $\epsilon > \delta$ , donc  $\theta$  est une fonction continue.

et pour  $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$  telle que  $(u_1, u_2) \preceq (v_1, v_2)$ .

Par définition de  $\preceq$  sur  $X$ , on a

$$\begin{cases} u_1(t) \leq v_1(t) \\ u_2(t) \leq v_2(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 1],$$

alors

$$\begin{cases} \inf_{t \in [0,1]} u_1(t) \leq \inf_{t \in [0,1]} v_1(t) \\ \inf_{t \in [0,1]} u_2(t) \leq \inf_{t \in [0,1]} v_2(t) \end{cases},$$

par conséquent

$$\inf_{t \in [0,1]} u_1(t) + \inf_{t \in [0,1]} u_2(t) \leq \inf_{t \in [0,1]} v_1(t) + \inf_{t \in [0,1]} v_2(t),$$

et par (2.13) nous avons  $\theta(u_1, u_2) \leq \theta(v_1, v_2)$ , donc  $\theta$  est une fonction croissante. Pour  $(u_1, u_2) \in K'$ ,  $\theta$  vérifie,

$$\theta(u_1, u_2) \leq \|(u_1, u_2)\|,$$

et par la définition (2.12) on a  $\inf_{t \in [0,1]} u_i(t) \geq \sigma \|u_i\|$ , alors,

$$\inf_{t \in [0,1]} u_1(t) + \inf_{t \in [0,1]} u_2(t) \geq \sigma \|(u_1, u_2)\|,$$

donc,

$$\theta((u_1, u_2)) \geq \sigma \|(u_1, u_2)\|.$$

Par conséquent,

$$\theta(u_1, u_2) \leq \|(u_1, u_2)\| \leq \frac{1}{\sigma} \theta(u_1, u_2).$$

■

Définissons les opérateurs suivants  $T_i : K \rightarrow K$ ,  $T_i^* : K' \rightarrow K'$  et  $A_i : K \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2$ , telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$T_1(u_1, u_2)(t) = \left( \int_0^1 G_1(t, s) f_1(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right)^+,$$

$$T_2(u_1, u_2)(t) = \left( \int_0^1 G_2(t, s) f_2(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right)^+,$$

$$A_1(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f_1(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^k(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

$$A_2(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G_2(t, s) f_2(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^k(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

et,

$$T_1^*(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

$$T_2^*(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

soit

$$T(u_1, u_2)(t) = (T_1(u_1, u_2)(t), T_2(u_1, u_2)(t)),$$

$$A(u_1, u_2)(t) = (A_1(u_1, u_2)(t), A_2(u_1, u_2)(t)),$$

$$T^*(u_1, u_2)(t) = (T_1^*(u_1, u_2)(t), T_2^*(u_1, u_2)(t)),$$

Pour  $(u_1, u_2) \in X$ , nous définissons la fonction  $\Psi : X \rightarrow K$  telle que:

$$(\Psi(u_1, u_2))(t) = (\max\{u_1(t), 0\}, \max\{u_2(t), 0\}). \quad (2.14)$$

De (2.14), nous avons,

$$T = \Psi \circ A.$$

Nous présentons dans la suite des propriétés des opérateurs  $A$ ,  $T$  et  $T^*$ .

**Lemme 2.1.4** *Soit  $A : K \rightarrow X$  est complètement continue.*

**Preuve: Etape1:** Montrons que  $A$  est continue.

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite des éléments de  $K$  tel que  $U_n = (u_n^1, u_n^2)$ , où  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U$  tel que  $U = (u^1, u^2)$ , i.e:  $u_n^1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u^1$  et  $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u^2$  et montrons que

$$|A_i(U_n)(t) - A_i(U)(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \quad i = 1, 2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |A_i(U_n)(t) - A_i(U)(t)| &= \left| \int_0^1 G_i(t, s) [f_i(s, U_n) - f_i(s, U)] ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) (I_i^k(U_n(t_k)) - I_i^k(U(t_k))) \right| \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $f_i(s, U)$  et  $I_i^k(U)$ ,  $i = 1, 2$  sont continues par rapport à  $U$  alors

$$\begin{cases} |f_i(t, U_n) - f_i(t, U)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \\ |I_i^k(U_n(t_k)) - I_i^k(U(t_k))| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \end{cases} \quad i = 1, 2$$

D'où

$$\begin{aligned} |A_i(U_n)(t) - A_i(U)(t)| &\leq \int_0^1 G_i(t, s) |f_i(s, U_n) - f_i(s, U)| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) |I_i^k(U_n(t_k)) - I_i^k(U(t_k))| \\ &\leq \int_0^1 \beta_i |f_i(s, U_n) - f_i(s, U)| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \beta_i |I_i^k(U_n(t_k)) - I_i^k(U(t_k))|. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|A_i(U_n) - A_i(U)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \quad i = 1, 2.$$

Donc  $A$  est continue.

**Etape 2:** Montrons que l'image d'un borné par l'opérateur  $A$  est bornée.

Soit  $B \subset K$  une partie bornée, alors il existe  $r > 0$  tel que  $\forall U \in B$ , on a  $\|U\| \leq r$ . Comme les fonctions  $f_i(s, U)$  et  $I_i^k(U)$ ,  $i = 1, 2$  sont continues par rapport à  $U$  alors  $\exists c_r, c_{k,r} > 0$ . tels que  $\forall U \in B$

$$\begin{cases} |f_i(t, U)| \leq c_r; \\ |I_i^k(U)| \leq c_{k,r}. \end{cases} \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, p.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 |A_i(U)(t)| &= \left| \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, U) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(U(t_k)) \right| \\
 &\leq \int_0^1 G_i(t, s) |f_i(s, U)| ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) |I_i^k(U(t_k))| \\
 &\leq \beta_i \left[ c_r + \sum_{k=1}^p c_{k,r} \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi  $A(B)$  est bornée dans  $X$ .

**Etape3:** Montrons que  $A(B)$  est équicontinue

$A(B)$  est équicontinue si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_1, t_2 \in J, \forall V \in A(B), |t_1 - t_2| \leq \eta \Rightarrow |V(t_1) - V(t_2)| < \varepsilon$ .

Comme  $V \in A(B)$ , il existe  $U \in B$  tel que  $V = A(U)$ .

$$\begin{aligned}
 |V(t_1) - V(t_2)| &= |A(U)(t_1) - A(U)(t_2)| \\
 &= \left| \int_0^1 [G_i(t_1, s) - G_i(t_2, s)] f_i(s, U) ds \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^p [G_i(t_1, t_k) - G_i(t_2, t_k)] I_i^k(U(t_k)) \right| \\
 &\leq \int_0^1 |G_i(t_1, s) - G_i(t_2, s)| |f_i(s, U)| ds \\
 &\quad + \sum_{k=1}^p |G_i(t_1, t_k) - G_i(t_2, t_k)| |I_i^k(U(t_k))|
 \end{aligned}$$

La continuité de  $G$  nous donne que

$$|G_i(t_1, t) - G_i(t_2, t)| \xrightarrow{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} 0; \quad i = 1, 2, \forall t \in J.$$

Les fonctions  $f_i(s, U)$  et  $I_i^k(U)$ ,  $i = 1, 2$  sont bornées, alors

$$|V(t_1) - V(t_2)| = |A(U)(t_1) - A(U)(t_2)| \xrightarrow{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} 0.$$

Le théorème d'Ascoli-Arzelà implique que  $A$  est complètement continue. ■

**Lemme 2.1.5**  $T^* : K' \rightarrow K'$  est complètement continue.

**Preuve:** Soit  $U \in K'$ , avec  $U = (u_1, u_2)$ , pour tout  $t \in J'$ , alors

$$\begin{aligned}
 T_i^*(U(t)) &\geq \int_0^1 \mu_i [f_i^+(s, U)] ds + \mu_i \sum_{k=1}^p I_i^k(U(t_k)), \quad t \in [0, 1] \\
 &= \sigma_i \int_0^1 \beta_i [f_i^+(s, U)] ds + \sigma_i \sum_{k=1}^p \beta_i I_i^k(U(t_k)) \\
 &\geq \sigma_i \sup_{t \in [0, 1]} |T_i^*(U)|.
 \end{aligned}$$

alors,  $T^*(K') \subset K'$ , et  $(H_1), (H_2)$  implique que  $T^*$  est continue et on a  $T^*(K')$  est fermé alors il suffit de montrer que  $T^*(K')$  est borné.

Alors pour  $U \in B(0, r), U \in k', \sigma_i \sup_{t \in [0,1]} |T_i^*(U)| \leq T_i^*(U(t)) \leq \|T_i^*(U)\| < Const,$

alors  $T^*(K')$  est borné donc  $T^* : K' \rightarrow K'$  est complètement continue

■

**Lemme 2.1.6**  $(u_1, u_2)$  est une solution du problème impulsive (2.1) si et seulement si  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de l'opérateur  $A$ .

**Lemme 2.1.7** Si  $A : K \rightarrow X$  est complètement continue, alors  $\Psi \circ A : K \rightarrow K$  est complètement continue .

**Preuve:** L'opérateur  $A$  étant complètement continu alors  $A$  est continue et transforme tout ensemble borné de  $K$  en un ensemble relativement compacte dans  $X$ . Soit  $D \subset K$  une partie bornée,  $\forall \varepsilon > 0, \exists L_i = (x_i, y_i) \in X, i = 1, 2, \dots, m$ , telle que

$$AD \subset \cup_{i=1}^m B(L_i, \varepsilon),$$

où  $B(L_i, \varepsilon) := \{(u_1, u_2) \in K : \|u_1 - x_i\| + \|u_2 - y_i\| < \varepsilon\}$

Pour chaque  $(x^*, y^*) \in (\Psi \circ A)D$ , il existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in AD$ , de telle sorte que

$$(x^*, y^*) = (\max\{\bar{x}, 0\}, \max\{\bar{y}, 0\}).$$

Nous choisissons un  $\tilde{L}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ , tel que

$$\|\bar{x} - \tilde{x}_i\| + \|\bar{y} - \tilde{y}_i\| < \varepsilon.$$

De,

$$\|x^* - \tilde{x}_i\| + \|y^* - \tilde{y}_i\| \leq \|\bar{x} - \tilde{x}_i\| + \|\bar{y} - \tilde{y}_i\| < \varepsilon,$$

nous avons  $(x^*, y^*) \in B(\tilde{L}_i, \varepsilon)$  donc  $(\Psi \circ A)D$  est relativement compacte. Par la continuité de  $A$ , nous avons pour chaque  $\varepsilon > 0$ , l'existence d'un  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\|A(x_1, y_1) - A(x_2, y_2)\| < \varepsilon,$$

si  $\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| < \eta$ . Alors

$$\begin{aligned} & \|(\Psi \circ A)(x_1, y_1) - (\Psi \circ A)(x_2, y_2)\| \\ &= \|(\max\{A_1(x_1, y_1), 0\} - \max\{A_1(x_2, y_2), 0\}), \\ & \quad (\max\{A_2(x_1, y_1), 0\} - \max\{A_2(x_2, y_2), 0\})\| \\ &\leq \|A_1(x_1, y_1) - A_1(x_2, y_2), A_2(x_1, y_1) - A_2(x_2, y_2)\| \\ &= \|A(x_1, y_1) - A(x_2, y_2)\|, \end{aligned}$$

puisque  $A$  est continue dans  $K$  alors on a

$$\|(\Psi \circ A)(x_1, y_1) - (\Psi \circ A)(x_2, y_2)\| < \varepsilon,$$

pour  $\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| < \eta$ .

d'où,  $\Psi \circ A$  est continu dans  $K$  et  $\Psi \circ A$  est complètement continu. ■

**Lemme 2.1.1** *Si  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de  $T$ , alors  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de l'opérateur  $A$ .*

**Preuve:** Supposons que  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de  $T$ , alors il suffit de montrer que  $A_i(u_1, u_2) \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ , pour  $t \in J'$ .

Par absurde, s'il existe  $t^* \in J'$  et  $i = 1, 2$  tel que  $u_i(t^*) = T_i(u_1, u_2)(t^*) = 0$ , Mais à ce point, nous avons  $A_i(u_1, u_2)(t^*) < 0$ .

Par la continuité de  $A_i$ , il existe un voisinage de  $t^*$  où  $A_i(u_1, u_2)(t) < 0$ . soit  $(s_1, s_2)$  l'intervalle maximale contenant  $t^*$  telle que  $A_i(u_1, u_2)(t) < 0$  pour chaque  $t \in (s_1, s_2)$  et  $A_i(u_1, u_2)(s_i) = 0$ .

Par la définition de  $A_i$ , on a

$$(A_i(u_1, u_2))'(t) = -a(t)A_i(u_1, u_2)(t) + f_i(t, u_1, u_2), \quad \forall t \in J'.$$

Pour chaque  $t \in [s_1, s_2]$ ,

$$(A_i(u_1, u_2))'(t) = f_i(t, 0, 0). \tag{2.15}$$

Par  $(H_4)$ , nous obtenons

$$(A_i(u_1, u_2))'(t) \geq 0, \quad \forall t \in [s_1, s_2]. \tag{2.16}$$

**1<sup>ere</sup> cas** si  $s_2 < 1$  alors  $A_i(u_1, u_2)(s_2) = 0$ . ainsi  $(A_i(u_1, u_2))'(s_2) \geq 0$ , par (2.15) et  $(H_4)$  il s'ensuit que  $(A_i(u_1, u_2))'(t) \geq 0, \forall t \in [s_1, s_2]$ . Si nous supposons que  $s_1 = 0$ , alors

$(A_i(u_1, u_2))'(s_1) = (A_i(u_1, u_2))'(0) \geq 0$ . Depuis  $A_i$  est croissante sur  $[s_1, s_2]$  implique que  $A_i(u_1, u_2)(0) < A_i(u_1, u_2)(s_2) = 0$ . Contradiction avec  $A_i(u_1, u_2)(0) = u(0) \geq 0$ .

Si  $s_1 > 0$ , nous obtenons  $0 = A_i(u_1, u_2)(s_1) < A_i(u_1, u_2)(s_2) = 0$ , Ce qui est contradictoire.

**2<sup>ime</sup> cas:** Si  $s_1 > 0$  alors  $A_i(u_1, u_2)(s_1) = 0$  et  $A_i(u_1, u_2)(t) < 0, \forall t \in (s_1, s_2)$  implique que  $(A_i(u_1, u_2))'(s_1) \leq 0$  et par (2.16) nous obtenons  $(A_i(u_1, u_2))'(s_1) = 0$ . Donc, nous avons une contradiction avec le fait que  $A_i(u_1, u_2)(t) < 0 \quad \forall t \in (s_1, s_2)$ .

■

## 2.2 Etude de l'existence de solutions positives

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe dans double cônes, nous allons prouver l'existence de deux solutions positives du problème (2.1). notre résultat est formulé comme suit:

**Théorème 2.2.1** *Soit le problème (2.1) sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , si de plus il existe des constantes positives  $a, b, c, \lambda_i, i = 1, 2$  avec*

$$0 < \frac{c}{\sigma} < a < \sigma b < b, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1,$$

*telles que, pour  $i = 1, 2$ ,*

$$(H_3) \quad f_i(t, u_1, u_2) \geq 0, \text{ pour tout } t \in J', \|(u_1, u_2)\| \in [c, b].$$

$$(H_4) \quad \beta_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) < \lambda_i a,$$

$$(H_5) \quad f_i(t, u_1, u_2) \geq \frac{b}{\mu_i}, \text{ pour tout } t \in J', \|(u_1, u_2)\| \in [\sigma b, b];$$

*où*

$$m_{i,a} = \sup_{\|(u_1, u_2)\|=a} |f_i(\cdot, u_1, u_2)| \text{ et } M_{i,a} = \sup_{\|(u_1, u_2)\|=a} |I_i^k(\cdot, u_1, u_2)|, \quad k = 1, \dots, p.$$

*Alors, le problème (2.1) admet au moins deux solutions positives  $(u_1, u_2)$  et  $(u_1^*, u_2^*)$  satisfaisant,*

$$0 \leq \|(u_1, u_2)\| < a < \|(u_1^*, u_2^*)\|, \quad \theta((u_1^*, u_2^*)) < \sigma b.$$

**Preuve:** Pour  $(u_1, u_2) \in \partial K_a$ , par  $(H_4)$  nous avons

$$\begin{aligned} & \|T_i(u_1, u_2)\| \\ &= \max_{t \in [0,1]} \left( \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right)^+ \\ &= \max_{t \in [0,1]} \max \left\{ \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), 0 \right\} \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \left( \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) \\ &\leq \beta_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) \\ &< \lambda_i a. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|T(u_1, u_2)\| &= \|T_1(u_1, u_2)\| + \|T_2(u_1, u_2)\| \\ &< \lambda_1 a + \lambda_2 a \\ &\leq a. \end{aligned}$$

Donc,  $(C_1)$  du Théorème 1.2.1 est satisfaite.

Pour  $(u_1, u_2) \in \partial K'_a$ ; par  $(H_4)$  nous avons

$$\begin{aligned} & \|T_i^*(u_1, u_2)\| \\ &= \max_{t \in [0,1]} \left( \int_0^1 G_i(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^{+k}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) \\ &\leq \beta_i (m_{i,a} + pM_{i,a}) \\ &< \lambda_i a. \end{aligned}$$

Nous obtenons également

$$\begin{aligned} \|T^*(u_1, u_2)\| &= \|T_1^*(u_1, u_2)\| + \|T_2^*(u_1, u_2)\| \\ &< \lambda_1 a + \lambda_2 a \\ &\leq a. \end{aligned}$$

Pour  $(u_1, u_2) \in \partial K'(\sigma b)$ , ( i.e.  $\theta(u_1, u_2) = \sigma b$ ), nous avons par le Lemme 2.1.3

$$\sigma b \leq \|(u_1, u_2)\| \leq b.$$

D'autre part, pour  $(u_1, u_2) \in K'$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta(T^*(u_1, u_2)) &= \inf_{t \in [0,1]} \left[ \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] \\ &\quad + \inf_{t \in [0,1]} \left[ \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] \\ &\geq \sigma \left\| \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right\| \\ &\quad + \sigma \left\| \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right\| \\ &= \sigma \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right| \\ &\quad + \sigma \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right| \end{aligned}$$

La remarque 2.1.1 implique que

$$\begin{aligned} \theta(T^*(u_1, u_2)) &\geq \sigma \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\ &\quad + \sigma \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\ &\geq \sigma \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sigma \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds \end{aligned}$$

$$\geq \sigma \inf_{t \in [0,1]_0} \int_0^1 G_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sigma \inf_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds.$$

Par  $(H_5)$ , nous obtenons

$$\theta(T^*(u_1, u_2)) \geq \sigma \frac{b}{\mu_1} \inf_{t \in [0,1]_0} \int_0^1 G_1(t, s) ds + \sigma \frac{b}{\mu_2} \inf_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_2(t, s) ds,$$

puisque  $\inf_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_i(t, s) ds \geq \mu_i$ , nous avons

$$\begin{aligned} \theta(T^*(u_1, u_2)) &\geq \sigma b + \sigma b \\ &> \sigma b. \end{aligned}$$

Donc,  $(C_2)$  du Théorème 1.2.1 est satisfaite.

Soit  $(u_1, u_2) \in K'_a(\sigma b) \cap \{(u_1, u_2) : T^*(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\}$ , i.e.  $\theta(u_1, u_2) < \sigma b$  et  $\|(u_1, u_2)\| > a$ .

Par le Lemme 2.1.3, nous avons

$$\|(u_1, u_2)\| \leq \frac{1}{\sigma} \theta(u_1, u_2) < \frac{1}{\sigma} \sigma b = b,$$

c'est-à-dire

$$\|(u_1, u_2)\| < b,$$

et

$$\theta(u_1, u_2) > \sigma \|(u_1, u_2)\|, \text{ avec } \|(u_1, u_2)\| > a.$$

Puis, à partir de  $c < a < b$  nous avons

$$\theta(u_1, u_2) > \sigma a > c,$$

donc

$$\|(u_1, u_2)\| > \frac{1}{\sigma} c.$$

Alors, pour  $(u_1, u_2) \in K'_a(\sigma b) \cap \{(u_1, u_2) : T^*(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\}$  on a

$$c \leq \|(u_1, u_2)\| \leq \sigma b \leq b.$$

Par  $(H_3)$ , nous obtenons

$$f_i^+(s, u_1(s), u_2(s)) = f_i(s, u_1(s), u_2(s))$$

ceci implique que  $T(u_1, u_2) = T^*(u_1, u_2)$ . Donc,  $(C_3)$  du Théorème 1.2.1 est satisfaite.

Par le Théorème 2.2.1 et le Lemme 2.1.1, le problème (2.1) admet au moins deux solutions positives  $(u_1, u_2)$  et  $(u_1^*, u_2^*)$  telles que

$$0 \leq \|(u_1, u_2)\| < a < \|(u_1^*, u_2^*)\|, \quad \theta(u_1^*, u_2^*) < b.$$

Ce qui achève la preuve. ■

### 2.2.1 Exemple

Nous proposons l'exemple suivant, en considérant des valeurs spécifiques de  $a_i$ ,  $I_i^k$  et  $f_i$ . Précisément soit le système suivant,

$$\begin{cases} u_1'(t) + \left(\sin(2\pi t) + \frac{15}{16}\right) u_1(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)), & t \in J', \\ u_2'(t) + \left(\cos(2\pi t) + \frac{3}{4}\right) u_2(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)), & t \in J', \\ u_1\left(\frac{1}{2}^+\right) - u_1\left(\frac{1}{2}^-\right) = \cos\left(u_1\left(\frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ u_2\left(\frac{1}{2}^+\right) - u_2\left(\frac{1}{2}^-\right) = \sin\left(u_1\left(\frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ u_1(0) = u_1(1), u_2(0) = u_2(1). \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $J' = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ,  $p = 1$ ,

$$f_1(t, u_1, u_2) = g(t) \begin{cases} 2 - 32(u_1 + u_2)^2 & u_1 + u_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ -13 + 14(u_1 + u_2) & u_1 + u_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ 1 + \frac{1}{17} \ln(u_1 + u_2) & u_1 + u_2 \in [1, 6[ \\ 1 + \frac{\ln 6}{17} + 8((u_1 + u_2)^2 - 36) & u_1 + u_2 \in [6, 16[ \\ \frac{1}{17} \ln 6 + 1761 - ((u_1 + u_2) - 16)^3 & u_1 + u_2 \geq 16 \end{cases},$$

$$f_2(t, u_1, u_2) = g(t) \begin{cases} \sqrt{2} \left(1 - \sqrt{3} \sqrt{(u_1 + u_2)}\right) & u_1 + u_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{((u_1 + u_2) - \frac{1}{2})}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{60} \sqrt{(u_1 + u_2) - 1}} & u_1 + u_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{60} \sqrt{(u_1 + u_2) - 1} & u_1 + u_2 \in [1, 6[ \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{60} \sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{20}{2} ((u_1 + u_2)^2 - 36) & u_1 + u_2 \in [6, 16[ \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{60} \sqrt{5} + \frac{4401}{2} - 10((u_1 + u_2) - 16)^2 & u_1 + u_2 \geq 16 \end{cases},$$

et,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 1-périodique, défini sur  $[0, 1]$ , par

$$g(t) := \begin{cases} \left(4\left(t - \frac{1}{4}\right)\right)^2, & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2(\cos(\frac{1}{2})-1)} \left(\frac{\cos(t - \frac{1}{2}) - 1}{t - \frac{1}{2}}\right) & \text{si } t \in \left] \frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

D'après le Théorème 2.2.1 le problème (2.17) admet au moins deux solutions positives. En effet, pour

$$c = 1, \quad a = 6, \quad b = 16, \quad \lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3},$$

et par la définition de  $\mu_i, \beta_i$ , nous avons,

$$\mu_1 \simeq \frac{16}{25}, \quad \mu_2 \simeq \frac{11}{20}, \quad \beta_1 \simeq \frac{163}{100}, \quad \beta_2 \simeq \frac{116}{100}.$$

Alors  $\sigma = \frac{64}{163}$  et il est facile de voir que

$$\begin{aligned} m_{1,a} &= 1 + \frac{\ln 6}{17}, \quad m_{2,a} = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{60}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \\ M_{i,a} &= 1, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

et pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} f_i(t, u_1, u_2) &\geq 0, & t \in J' \text{ et } u_1 + u_2 \in [c, b], \\ \beta_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) &< \lambda_i a, \\ f_i(t, u_1, u_2) &\geq \frac{b}{\mu_i}, & t \in J' \text{ et } u_1 + u_2 \in [\sigma b, b], \end{aligned}$$

Donc, les conditions du Théorème 2.2.1 sont donc satisfaites. Alors le problème (2.17) admet au moins deux solutions positives.

---

---

## Problème avec des conditions intégrales

Le but de ce chapitre est l'étude de la solvabilité d'un système différentiel impulsif du premier ordre avec condition intégrale.

### Sommaire

---

<b>3.1 Les conditions intégrales</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1.1 Introduction . . . . .	38
<b>3.2 Résultats auxiliaires</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>3.3 Résultats d'existence</b> . . . . .	<b>47</b>
3.3.1 Exemple . . . . .	50
<b>3.4 Conclusion et Perspectives</b> . . . . .	<b>53</b>
3.4.1 Conclusion . . . . .	53
3.4.2 Perspectives . . . . .	53

---

### 3.1 Les conditions intégrales

Nous présentons dans la suite un résultat d'existence pour un problème différentiel impulsif du premier ordre avec condition intégrale, nous développons le travail [27].

### 3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons le système impulsif suivant,

$$\begin{cases} u'_i(t) + a_i(t)u_i(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t)), \text{ pour } t \in J', \\ \Delta u_i(t_k) = u_i(t_k^+) - u_i(t_k^-) = I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \text{ } k = 1, \dots, p, \\ \gamma u_i(0) - \delta u_i(1) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(s) u_i(s) ds, \end{cases}, i = 1, 2 \quad (3.1)$$

où  $0 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$ ,  $\gamma, \delta > 0$ ,  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$ , sont les instants où les impulsions se produisent,  $J' = [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_p\}$  and  $I_i^k, f_i, a_i$  sont des fonctions satisfaisant certaines conditions spécifiées par la suite.

Au cours des dernières années, le problème de l'existence et de la multiplicité de solutions pour (3.1) sous différentes conditions aux limites a reçu beaucoup d'attention voir [1], [67], [69], [70] et les références citées.

Dans [100], par le théorème de point fixe de Krasnosel'skii, les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution positive pour,

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = \lambda h(t) f(u(t)), \text{ } t \in J, \\ \Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-) = I^k(u(t_k)), \text{ } k = 1, \dots, p, \\ \gamma u(0) - \delta u(1) = \int_0^1 g(s) u(s) ds, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\lambda$  est un paramètre positive,  $h$  est une fonction positive intégrable et  $f, I^k$  sont des fonctions continues positives, pour  $k = 1, \dots, p$ .

Dans le but de généraliser [100], nous étudions dans ce chapitre, l'existence et la multiplicité de solutions positives de (3.1) dans le cas où  $f$  change de signe en utilisant le Théorème 1.2.1 où  $f$  et  $I^k$  satisfaisant les hypothèses suivantes:

(H1)  $a_i \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ ,  $I_i^k \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$  pour,  $k = 1, \dots, p$  et  $i = 1, 2$ .

(H2)  $g_i \in L^1[0, 1]$  non négative, pour  $i = 1, 2$  et

$$\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)} - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) e^{-\omega_i(r)} dr > 0,$$

$$\text{où } \omega_i(t) = \int_0^t a_i(s) ds, \text{ pour } i = 1, 2,$$

(H3) i)  $f_i : J' \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $L^1$ -Carathéodory et continue à gauche à  $t = t_k$ , et la limite à droite  $f_i(t_k^+, u_1, u_2)$  existe, pour  $i = 1, 2$ .

ii) Pour tous  $t \in J'$ ,  $f_i(t, 0, 0) \geq 0$  ( $\neq 0$ ), pour  $i = 1, 2$ .

## 3.2 Résultats auxilliaires

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes qui seront utilisés dans la preuve de notre résultat principal.

**Lemme 3.2.1** *Une solution du problème aux limites (3.1) satisfait,*

$$\begin{aligned}
 u_i(t) = & \frac{1}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \left[ \delta \int_0^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right. \\
 & \left. + e^{-\omega_i(t)} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr + \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] \\
 & + \int_0^t e^{\omega_i(s) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)),
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

pour  $i = 1, 2$  et  $t \in [0, 1]$ .

**Preuve:** Soit  $(u_1, u_2)$  une solution de (3.1), si  $t \in J'$ , nous avons

$$(e^{\omega_i(t)} u_i(t))' = e^{\omega_i(t)} f_i(t, u_1(t), u_2(t)), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, 1], \tag{3.4}$$

si  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, p-1$ ,

$$e^{\omega_i(t)} u_i(t) = e^{\omega_i(t_k^+)} u_i(t_k^+) + \int_{t_k}^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds, \quad i = 1, 2,$$

et si  $t \in ]t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,

$$e^{\omega_i(t_k)} u_i(t_k^-) = u_i(t_{k-1}^+) e^{\omega_i(t_{k-1})} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds, \quad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Ainsi, si  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, p$ , nous obtenons

$$e^{\omega_i(t)} u_i(t) = (u_i(t_k^-) + \Delta u_i(t_k)) e^{\omega_i(t_k)} + \int_{t_k}^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds$$

et de (3.5) nous avons,

$$\begin{aligned}
 e^{\omega_i(t)} u_i(t) &= u_i(t_k^-) e^{\omega_i(t_k)} + \Delta u_i(t_k) e^{\omega_i(t_k)} + \int_{t_k}^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &= u_i(t_{k-1}^+) e^{\omega_i(t_{k-1})} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &\quad + \int_{t_k}^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \Delta u_i(t_k) e^{\omega_i(t_k)} \\
 &= u_i(t_{k-1}^+) e^{\omega_i(t_{k-1})} + \int_{t_{k-1}}^t e^{\omega_i(s)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &\quad + I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) e^{\omega_i(t_k)}
 \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= e^{-\omega_i(t)} u_i(0) + \int_0^t e^{\omega_i(s) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &\quad + \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Maintenant, en utilisant la condition aux limites  $\gamma u_i(0) - \delta u_i(1) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \delta u_i(1) &= \delta e^{-\omega_i(1)} u_i(0) + \delta \int_0^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &\quad + \delta \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \gamma u_i(0) - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr &= \delta e^{-\omega_i(1)} u_i(0) + \delta \int_0^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &\quad + \delta \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k))
 \end{aligned}$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned}
 u_i(0) &= \frac{1}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr + \frac{\delta}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_0^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(1)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &\quad + \frac{\delta}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(1)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).
 \end{aligned}$$

Ainsi, par (3.6), il en résulte que

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr + \frac{\delta}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_0^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(t) - \omega_i(1)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \\
 &+ \frac{\delta}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \sum_{0 < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t) - \omega_i(1)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\
 &+ \int_0^t e^{\omega_i(s) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).
 \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons l'expression (3.3) et la preuve du Lemme 3.2.1 est terminée.

■

**Lemme 3.2.2** *L'équation (3.3) s'écrit, pour  $i = 1, 2$  et  $t \in [0, 1]$  dans le formulaire ci-dessous,*

$$u_i(t) = \int_0^1 H_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \quad (3.7)$$

où,

$$H_i(t, s) = G_i(t, s) + \frac{e^{-\omega_i(t)}}{\Gamma_i} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} G_i(r, s) g_i(r) dr, \quad (3.8)$$

et

$$G_i(t, s) = \begin{cases} \frac{\gamma e^{-\omega_i(t) + \omega_i(s)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{\delta e^{-\omega_i(1) - \omega_i(t) + \omega_i(s)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} & \text{si } 0 \leq t < s \leq 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

avec  $\Gamma_i = \gamma - \delta e^{-\omega_i(1)} - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\omega_i(r)} g_i(r) dr$ .

**Preuve:** Par (3.3), nous avons si  $0 \leq s \leq t \leq 1$  la solution (3.3) de (3.1) donnée par le Lemme 3.2.1 qui peut être écrit sous la forme,

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr + \frac{\gamma}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \left[ \int_0^t e^{\omega_i(s) - \omega_i(t)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right. \\
 &\left. + \sum_{0 < t_k < t} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right].
 \end{aligned}$$

Si  $0 \leq t < s \leq 1$  la solution (3.3) de (3.1) donnée par le Lemme 3.2.1 peut être

exprimée comme suit,

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr \\
 &+ \frac{\delta}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \left[ \int_t^1 e^{\omega_i(s) - \omega_i(t) - \omega_i(1)} f_i(s, u_1(s), u_2(s)) ds \right. \\
 &\left. + \sum_{t < t_k < 1} e^{\omega_i(t_k) - \omega_i(t) - \omega_i(1)} I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right].
 \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr + \int_0^1 G(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds \\
 &+ \sum_{k=1}^p G_i(r, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)).
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) u_i(r) dr &= \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) \left[ \frac{e^{-\omega_i(r)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(\tau) u_i(\tau) d\tau + \int_0^1 G_i(r, s) f_i(s, u_1, u_2) ds \right. \\
 &\left. + \sum_{k=1}^p G_i(r, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] dr \\
 &= \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{e^{-\omega_i(r)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} g_i(r) dr \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(\tau) u_i(\tau) d\tau \\
 &+ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_0^1 g_i(r) G_i(r, s) f_i(s, u_1, u_2) ds dr \\
 &+ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) \left( \sum_{k=1}^p G_i(r, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) dr \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\omega_i(r)} g_i(r) dr} \left[ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_0^1 g_i(r) G_i(r, s) f_i(s, u_1, u_2) ds dr \right. \\
 &\left. + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) \left( \sum_{k=1}^p G_i(r, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) dr \right].
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= \int_0^1 G_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p G_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\
 &+ \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\omega_i(r)} g_i(r) dr} \left[ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_0^1 g_i(r) G_i(r, s) f_i(s, u_1, u_2) ds dr \right. \\
 &\left. + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(r) \left( \sum_{k=1}^p G_i(r, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) dr \right]
 \end{aligned}$$

Si nous posons, par définition,

$$H_i(t, s) := G_i(t, s) + \frac{e^{-\omega_i(t)} \beta_i}{\Gamma_i \alpha_i} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} G_i(r, s) g_i(r) dr,$$

nous obtenons alors,

$$u_i(t) = \int_0^1 H_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), \text{ pour } i = 1, 2. \blacksquare$$

**Remarque 3.2.1** Par (3.8) et (3.9), il en résulte que  $H_i(t, s)$  et  $G_i(t, s)$  sont positifs sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Lemme 3.2.3** Supposons que (H2) est vérifié.  $\forall \eta \in (0, \frac{1}{2})$ , tel que pour tout  $t \in J_\eta = [\eta, 1 - \eta]$ , nous avons

$$G_i(t, s) \geq \sigma_i G_i(\rho, s). \quad (3.10)$$

et

$$H_i(t, s) \geq \sigma_i H_i(\rho, s), \quad (3.11)$$

pour chaque  $\rho, s \in [0, 1]$ , où  $\sigma_i = e^{-\omega_i(1-\eta)}$ .

**Preuve:** Soit  $t \in J_\eta$  et  $s \in [0, 1]$ . Nous distinguons deux cas:

Premier cas:  $\eta \leq t \leq s \leq 1$

i) Si  $\rho \leq s \leq 1$  nous avons

$$\begin{aligned}
 G_i(t, s) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{e^{-\omega_i(\rho)}} G_i(\rho, s) \geq e^{-\omega_i(t)} G_i(\rho, s) \\
 &\geq e^{-\omega_i(1-\eta)} G_i(\rho, s)
 \end{aligned}$$

avec

$$G_i(\rho, s) = \frac{\delta e^{-\omega_i(1)-\omega_i(\rho)+\omega_i(s)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}}$$

ii) Si  $s \leq \rho \leq 1$  nous avons

$$\begin{aligned} G_i(t, s) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{e^{-\omega_i(\rho)+\omega_i(1)}} G_i(\rho, s) \\ &\geq \frac{e^{-\omega_i(t)}}{e^{-\omega_i(\rho)+\omega_i(1)}} G_i(\rho, s) \geq \frac{e^{-\omega_i(t)}}{e^{\omega_i(1)}} G_i(\rho, s) \\ &\geq e^{-\omega_i(t)} G_i(\rho, s) \\ &\geq e^{-\omega_i(1-\eta)} G_i(\rho, s) \end{aligned}$$

avec

$$G_i(\rho, s) = \frac{\gamma e^{-\omega_i(\rho)+\omega_i(s)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}}$$

Deuxième cas:  $0 \leq s \leq t \leq 1 - \eta$

i) Si  $0 \leq \rho \leq s$  nous avons

$$\begin{aligned} G_i(t, s) &= \frac{e^{-\omega_i(t)+\omega_i(1)}}{e^{-\omega_i(\rho)}} G_i(\rho, s) \\ &\geq \frac{e^{-\omega_i(t)}}{e^{-\omega_i(\rho)}} G_i(\rho, s) \\ &\geq e^{-\omega_i(1-\eta)} G_i(\rho, s) \end{aligned}$$

avec

$$G_i(\rho, s) = \frac{\delta e^{-\omega_i(1)-\omega_i(\rho)+\omega_i(s)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}}$$

ii) si  $0 \leq s \leq \rho$  nous avons

$$\begin{aligned} G_i(t, s) &= \frac{e^{-\omega_i(t)}}{e^{-\omega_i(\rho)}} G_i(\rho, s) \\ &\geq e^{-\omega_i(t)} G_i(\rho, s) \\ &\geq e^{-\omega_i(1-\eta)} G_i(\rho, s) \end{aligned}$$

avec

$$G_i(\rho, s) = \frac{\gamma e^{-\omega_i(\rho)+\omega_i(s)}}{\gamma - \delta e^{-\omega_i(1)}}$$

Par (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}
 H_i(t, s) &= G_i(t, s) + \frac{e^{-\omega_i(t)} \beta_i}{\Gamma_i \alpha_i} \int G_i(r, s) g_i(r) dr \\
 &\geq e^{-\omega_i(1-\eta)} G_i(\rho, s) + \frac{e^{-\omega_i(t)-\omega_i(\rho)} \beta_i}{\Gamma_i \alpha_i} \int G_i(r, s) g_i(r) dr \\
 &\geq e^{-\omega_i(1-\eta)} G_i(\rho, s) + \frac{e^{-\omega_i(1-\eta)-\omega_i(\rho)} \beta_i}{\Gamma_i \alpha_i} \int G_i(r, s) g_i(r) dr \\
 &= e^{-\omega_i(1-\eta)} \left( G_i(\rho, s) + \frac{e^{-\omega_i(\rho)} \beta_i}{\Gamma_i \alpha_i} \int G_i(r, s) g_i(r) dr \right) \\
 &= \sigma_i H_i(\rho, s).
 \end{aligned}$$

■

À partir du résultat ci-dessus, nous avons le résultat suivant,

**Lemme 3.2.4** *Supposons que (H2) est vérifiée, alors une solution du problème aux limites (3.1) satisfait*

$$\inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} u_i(t) \geq \sigma \|u_i\| \text{ pour } i = 1, 2,$$

où  $\sigma = \min_{i=1,2} \{\sigma_i\}$ .

**Preuve:** En fait, à partir de (3.7) et (3.11), pour tout  $t \in [\eta, 1-\eta]$ ,  $\rho, s \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= |u_i(t)| = \left| \int_0^1 H_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right| \\
 &\geq \int_0^1 H_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\
 &\geq \int_0^1 \sigma_i H_i(\rho, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sigma_i \sum_{k=1}^p H_i(\rho, s) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\
 &\geq \sigma u_i(\rho).
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u_i(t) \geq \sigma \max_{0 \leq \rho \leq 1} |u_i(\rho)| = \sigma \|u_i\|.$$

Alors,  $\inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} u_i(t) \geq \sigma \|u_i\|$ . ■

Pour préparer l'application du Théorème 1.2.1, nous prouvons quelques résultats auxiliaires permettant de vérifier toutes les conditions du théorème 1.2.1. Soit  $X_0 \subset X$ , le sous-espace

$$X_0 = \left\{ (u_1, u_2) \in X, \gamma u_i(0) - \delta u_i(1) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g_i(s) u_i(s) ds, i = 1, 2 \right\}.$$

considérons

$$K = \{(u_1, u_2) \in X, u_i(t) \geq 0, i = 1, 2, t \in [0, 1]\},$$

et

$$K' = \left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in X_0, u_i(t^+) > 0, u_i(t^-) > 0, t \in [0, 1], \\ \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} u_i(t) \geq \sigma \|u_i\|, i = 1, 2 \end{array} \right\}, \quad (3.12)$$

Il est clair que  $K'$ ,  $K$  sont deux cônes dans  $X$ , tels que  $K' \subset K$ . Nous avons les résultats suivants.

**Lemme 3.2.5** Soit  $\theta : K' \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\theta(u_1, u_2) = \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} u_1(t) + \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} u_2(t), \quad (3.13)$$

alors  $\theta$  est une fonction croissante continue satisfaisant,

$$\theta(u_1, u_2) \leq \|(u_1, u_2)\| \leq \frac{1}{\sigma} \theta(u_1, u_2).$$

Et nous définissons les opérateurs  $T_i : K \rightarrow K$ ,  $T_i^* : K' \rightarrow K'$  et  $A_i : K \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2$ , par

$$T_1(u_1, u_2)(t) = \left( \int_0^1 H_1(t, s) f_1(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_1(t, t_k) I_1^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right)^+,$$

$$T_2(u_1, u_2)(t) = \left( \int_0^1 H_2(t, s) f_2(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_2(t, t_k) I_2^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right)^+,$$

$$A_1(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 H_1(t, s) f_1(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_1(t, t_k) I_1^k(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

$$A_2(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 H_2(t, s) f_2(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_2(t, t_k) I_2^k(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

et,

$$T_1^*(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 H_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

$$T_2^*(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 H_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)),$$

où  $t \in [0, 1]$ .

Posons,

$$T(u_1, u_2)(t) := (T_1(u_1, u_2)(t), T_2(u_1, u_2)(t)),$$

$$A(u_1, u_2)(t) := (A_1(u_1, u_2)(t), A_2(u_1, u_2)(t)),$$

$$T^*(u_1, u_2)(t) := (T_1^*(u_1, u_2)(t), T_2^*(u_1, u_2)(t)),$$

Pour  $(u_1, u_2) \in X$ , nous définissons la fonction  $\Psi : X \rightarrow K$  par,

$$(\Psi(u_1, u_2))(t) = (u_1^+(t), u_2^+(t)), \quad (3.14)$$

De (3.14), nous avons

$$T = \Psi \circ A.$$

**Remarque 3.2.2** Par les Lemmes 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7 et 2.1.1 nous avons les résultats suivants

- 1  $T^* : K' \rightarrow K'$  est complètement continue.
- 2 Si  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de  $T$ , alors  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de l'opérateur  $A$ .
- 3 Si  $A : K \rightarrow X$  est complètement continue alors  $\Psi \circ A : K \rightarrow K$  est complètement continue.
- 4  $(u_1, u_2)$  est une solution du problème impulsive (3.1) si et seulement si  $(u_1, u_2)$  est un point fixe de l'opérateur  $A$ .

### 3.3 Résultats d'existence

A l'aide du théorème de point fixe 1.2.1, nous allons établir l'existence de deux solutions positives du problème impulsif (3.1).

Définissons, les constantes suivantes, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\widehat{\alpha}_i = \max_{t \in [0, 1]} H_i(t, s)$$

et

$$\widehat{\beta}_i = \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_i(t, s) ds.$$

**Théorème 3.3.1** *Si (H1) et (H3) sont vérifiées et s'il existe des nombres positifs  $\eta, \sigma, a, b, c, \lambda_i, i = 1, 2$  avec  $\eta \in (0, \frac{1}{2}), \sigma \in (0, 1)$  et  $0 < (\frac{1}{\sigma})c < a < \sigma b < b, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ , de telle sorte que, pour  $i = 1, 2$ ,*

(H4)  $f_i(t, u_1, u_2) \geq 0$ , pour tous  $t \in J, \|(u_1, u_2)\| \in [c, b]$ ,

(H5)  $\widehat{\alpha}_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) < \lambda_i a$ ,

(H6)  $f_i(t, u_1, u_2) \geq \frac{\sigma b}{\beta_i}, \|(u_1, u_2)\| \in [\sigma b, b]$ , pour tous  $t \in J' \cap [\eta, 1 - \eta]$ ,

où

$$m_{i,a} = \sup_{\|(u_1, u_2)\|=a} |f_i(\cdot, u_1, u_2)| \text{ et } M_{i,a} = \sup_{\|(u_1, u_2)\|=a} |I_i^k(\cdot, u_1, u_2)|, k = 1, \dots, p$$

Alors, le problème (3.1) a au moins deux solutions non négatives  $(u_1, u_2)$  et  $(u_1^*, u_2^*)$  satisfaisant,

$$0 \leq \|(u_1, u_2)\| < a < \|(u_1^*, u_2^*)\|, \theta((u_1^*, u_2^*)) < \sigma b.$$

**Preuve:** Pour  $(u_1, u_2) \in \partial K_a$ , de (H5) nous avons

$$\begin{aligned} & \|T_i(u_1, u_2)\| \\ &= \max_{t \in [0,1]} \left( \int_0^1 H_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right)^+ \\ &= \max_{t \in [0,1]} \max \left\{ \int_0^1 H_i(t, s) f_i(s, u_1, u_2) ds \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^k(u_1(t_k), u_2(t_k)), 0 \right\} \\ &\leq \widehat{\alpha}_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) < \lambda_i a. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|T(u_1, u_2)\| &= \|T_1(u_1, u_2)\| + \|T_2(u_1, u_2)\| \\ &< \lambda_1 a + \lambda_2 a \\ &\leq a. \end{aligned}$$

Alors, (C1) du Théorème 1.2.1 est satisfaite.

Pour  $(u_1, u_2) \in \partial K'_a$ ; de (H5) nous avons

$$\begin{aligned} & \|T_i^*(u_1, u_2)\| \\ &= \max_{t \in [0,1]} \left( \int_0^1 H_i(t, s) f_i^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_i(t, t_k) I_i^{+k}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right) \\ &\leq \widehat{\alpha}_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) < \lambda_i a. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|T^*(u_1, u_2)\| &= \|T_1^*(u_1, u_2)\| + \|T_2^*(u_1, u_2)\| \\ &< \lambda_1 a + \lambda_2 a \\ &\leq a. \end{aligned}$$

pour  $(u_1, u_2) \in \partial K'(\sigma b)$ , ( i.e.  $\theta(u_1, u_2) = \sigma b$ ), nous avons par le Lemme 3.2.5

$$\sigma b \leq \|(u_1, u_2)\| \leq b.$$

D'autre part, pour  $(u_1, u_2) \in K'$  nous avons,

$$\begin{aligned} \theta(T^*(u_1, u_2)) &= \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \left[ \int_0^1 H_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] \\ &\quad + \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \left[ \int_0^1 H_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \right] \\ &\geq \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_1(t, t_k) I_1^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\ &\quad + \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds + \sum_{k=1}^p H_2(t, t_k) I_2^{k+}(u_1(t_k), u_2(t_k)) \\ &\geq \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_1(t, s) f_1^+(s, u_1, u_2) ds + \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_2(t, s) f_2^+(s, u_1, u_2) ds. \end{aligned}$$

Par (H6),

$$\begin{aligned} \theta(T^*(u_1, u_2)) &\geq \sigma \frac{b}{\beta_i} \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_1(t, s) + \sigma \frac{b}{\beta_i} \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_2(t, s) \\ &= \sigma b + \sigma b > \sigma b \end{aligned}$$

Alors, (C2) du Théorème 1.2.1 est satisfaite.

Soit  $(u_1, u_2) \in K'_a(\sigma b) \cap \{(u_1, u_2) : T^*(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\}$ , i.e.  $\theta(u_1, u_2) < \sigma b$  et  $\|(u_1, u_2)\| > a$ .

Du Lemme 3.2.5, nous avons

$$\|(u_1, u_2)\| \leq \frac{1}{\sigma} \theta(u_1, u_2) < \frac{1}{\sigma} \sigma b,$$

donc,

$$\|(u_1, u_2)\| < b,$$

et

$$\theta(u_1, u_2) > \sigma \|(u_1, u_2)\|, \text{ avec } \|(u_1, u_2)\| > a.$$

et puisque  $c < a$  nous avons en déduisons,

$$\theta(u_1, u_2) > \sigma a > c,$$

ce qui permet d'écrire,

$$\|(u_1, u_2)\| > \frac{1}{\sigma}c.$$

Maintenant vue que  $(u_1, u_2) \in K'_a(\sigma b) \cap \{(u_1, u_2) : T^*(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\}$ , alors

$$c \leq \|(u_1, u_2)\| \leq \sigma b \leq b.$$

De (H4), nous avons

$$f_i^+(s, u_1(s), u_2(s)) = f_i(s, u_1(s), u_2(s))$$

cela implique que  $T(u_1, u_2) = T^*(u_1, u_2)$ . Alors (C3) du Théorème 1.2.1 est satisfaite.

Par conséquent du Théorème 3.3.1 et Lemme 2.1.1, le problème (3.1) a au moins deux solutions positives  $(u_1, u_2)$  et  $(u_1^*, u_2^*)$  telles que

$$0 \leq \|(u_1, u_2)\| < a < \|(u_1^*, u_2^*)\|, \theta(u_1^*, u_2^*) < b.$$

■

### 3.3.1 Exemple

L'exemple suivant nous permet d'appliquer le résultat principal(3.3.1) pour des valeurs spécifiques de  $a_i$ ,  $I_i^k$  et  $f_i$ . Considérons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) + t u_1(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J, \\ u_2'(t) + t^2 u_2(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)), \quad t \in J, \\ u_1\left(\frac{1}{2}^+\right) - u_1\left(\frac{1}{2}^-\right) = \cos\left(u_1\left(\frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ u_2\left(\frac{1}{2}^+\right) - u_2\left(\frac{1}{2}^-\right) = \sin\left(u_1\left(\frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ u_1(0) - \frac{1}{2}u_1(1) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} s u_1(s) ds; \\ u_2(0) - \frac{1}{2}u_2(1) = \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{5}} e^{\frac{s}{3}} u_2(s) ds; \end{array} \right. \quad (3.15)$$

où  $J = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ,  $p = 1$ ,

$$f_1(t, u_1, u_2) = k(t) \begin{cases} 1 - 16(u_1 + u_2)^2 & u_1 + u_2 \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -7 + 8(u_1 + u_2) & u_1 + u_2 \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ \frac{1}{4} + 2e^{-(u_1+u_2)} & u_1 + u_2 \in [1, 6[ \\ \frac{1+4e^{-6}}{4} + 8((u_1 + u_2)^2 - 36) & u_1 + u_2 \in [6, 16[ \\ \frac{1+4e^{-6}}{4} + 1760 - ((u_1 + u_2) - 16)^3 & u_1 + u_2 \geq 16 \end{cases},$$

$$f_2(t, u_1, u_2) = k(t) \begin{cases} \frac{1}{2} - (u_1 + u_2)^{\frac{1}{2}} & u_1 + u_2 \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2}((u_1 + u_2) - \frac{1}{2})^2 & u_1 + u_2 \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ \frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{(u_1 + u_2)} & u_1 + u_2 \in [1, 6[ \\ \frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{6} + \frac{20}{2}((u_1 + u_2)^2 - 36) & u_1 + u_2 \in [6, 16[ \\ \frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{6} + \frac{4400}{2} - 10((u_1 + u_2) - 16)^2 & u_1 + u_2 \geq 16 \end{cases},$$

et  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $[0,1]$ , par

$$k(t) := \begin{cases} (4(t - \frac{1}{4}))^2, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2(\cos(\frac{1}{2})-1)} \left( \frac{\cos(t - \frac{1}{2}) - 1}{t - \frac{1}{2}} \right) & \text{si } t \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

D'après le Théorème 2.2.1 le problème (3.15) a au moins deux solutions positives. En effet, pour

$$c = 1, a = 6, b = 16, \lambda_1 = \frac{2}{5}, \lambda_2 = \frac{3}{5},$$

et en prenant  $\eta = \frac{1}{4}$ , nous obtenons  $\sigma_1 = e^{-\int_0^{\frac{3}{4}} s ds}$ ,  $\sigma_2 = e^{-\int_0^{\frac{3}{4}} s^2 ds}$  et par suite,

$$\sigma = \min_{i=1,2} \{\sigma_i\} = e^{-\int_0^{\frac{3}{4}} s ds}.$$

D'autre part, nous avons,

$$\Gamma_1 = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr > 0 \text{ et } \Gamma_2 = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{5}} e^{\frac{r^3}{3}} e^{-\frac{r^3}{3}} dr > 0,$$

alors, (H2) est vérifiée.

Des calculs simples permettent l'écriture

$$\begin{aligned} m_{1,a} &= \frac{1 + 4e^{-6}}{4}, \quad m_{2,a} = \frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ M_{i,a} &= 1, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_1 &= \max_{t \in [0,1]} H_1(t, s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{12 \times \Gamma_1} \right), \\ \widehat{\alpha}_2 &= \max_{t \in [0,1]} H_2(t, s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}} \left( 1 + \frac{1}{20 \times \Gamma_2} \right), \\ \widehat{\beta}_1 &= \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_1(t, s) ds = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}} \left( 1 + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma_1} \right), \\ \widehat{\beta}_2 &= \inf_{t \in [\eta, 1-\eta]} \int_{\eta}^{1-\eta} H_2(t, s) ds = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}} \left( 1 + \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma_2} \right).\end{aligned}$$

Alors, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned}f_i(t, u_1, u_2) &\geq 0, & t \in J \text{ et } u_1 + u_2 \in [c, b], \\ \widehat{\alpha}_i(m_{i,a} + pM_{i,a}) &< \lambda_i a, \\ f_i(t, u_1, u_2) &\geq \frac{\sigma b}{\beta_i}, & t \in J \cap \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \text{ et } u_1 + u_2 \in [\sigma b, b],\end{aligned}$$

Donc, les conditions du Théorème 2.2.1 sont vérifiées. Alors le problème (3.15) admet au moins deux solutions positives l'une vérifiant  $\|(u_1, u_2)\| < a$ .

## 3.4 Conclusion et Perspectives

### 3.4.1 Conclusion

L'objectif initial de ce travail est d'appliquer une méthode topologique basée sur le théorème de Krasnoselskii dans double cônes à une classe de problèmes aux limites, associés à des équations différentielles non linéaires d'ordre 1 dans le cas où la non linéarité change de signe. Deux résultats d'existence de solutions positives ont été obtenus dans les cas : de conditions aux limites périodiques et de conditions intégrales.

### 3.4.2 Perspectives

Tout système étant appelé à évoluer dans le temps, des améliorations sont apportées à ce travail, des généralisations des résultats obtenus sont envisagées dans les cas suivants:

- Problèmes périodiques singuliers du premier ordre avec impulsions.
- Problèmes singuliers du premier ordre multipoints en présence d'impulsions.

**partie II**

**Problème de contrôle Optimal**

---

*"Il n'y a rien qui se passe dans le monde sans qu'on observe  
le sens du maximum ou du minimum."  
L. Euler.*

---

---

## L'exploitation optimale d'une pêcherie

Le but de ce dernier chapitre est d'étudier  
la maximisation d'un profit qui provient  
de la pêche avec conservation  
de l'espèce

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b>	<b>57</b>
<b>4.2 Le modèle de l'écosystème</b>	<b>57</b>
4.2.1 Récolte optimale et conservation de l'écosystème	58
<b>4.3 Existence d'un contrôle optimal</b>	<b>61</b>
4.3.1 Définitions et propriétés élémentaires	61
4.3.2 Principe du maximum	63
4.3.3 Le contrôle singulier	64
<b>4.4 Le système Hamiltonien</b>	<b>65</b>
<b>4.5 La récolte optimale</b>	<b>72</b>
<b>4.6 Stabilité de la solution Optimale</b>	<b>75</b>
<b>4.7 Simulations numériques</b>	<b>76</b>
<b>4.8 Conclusion</b>	<b>80</b>

---

Le résultat principal de ce chapitre est une généralisation des résultats obtenus dans [12].

## 4.1 Introduction

Les progrès de technologies de pêche permettent aux pêcheurs d'exploiter de vastes régions des océans et d'augmenter leurs revenus. Les écosystèmes marins sont de moins en moins en mesure de supporter la demande et la perte de la biodiversité est irréversible [86].

Une façon de protéger les espèces de poissons de l'extinction est de mettre en place des aires marines protégées (MPA: Marine Protected Area), où la pêche est contrôlée ou non autorisée, voir [75].

Ils protègent la biodiversité, l'habitat qui est fragile, et augmentent le niveau de la biomasse. Cependant, les pêcheurs refusent l'installation des MPA. Ils soutiennent que les réserves marines minimisent le rendement de la pêche et réduisent les possibilités d'emploi, voir [32]. Une des importantes causes de défaillance dans la gestion de la pêche et le déclin des stocks de poissons est l'absence de politiques adéquates dans ce conflit.

Un certain nombre d'études ont démontré les avantages des zones marines protégées, voir [2], [13], [16], [22], [40], [46], [75], [76] et les références qui sont citées dans ces papiers.

## 4.2 Le modèle de l'écosystème

Dans les modèles bio-économiques des MPA, le mouvement est modélisé soit par le laplacien qui décrit la diffusion où par l'immigration entre plusieurs sites "patches". Ce dernier est décrit par un système d'équations différentielles dit: "patching system". Mathématiquement, ils sont faciles à résoudre contrairement à la complexité des modèles de diffusions qui sont difficiles à traiter, vu qu'ils sont décrits par des EDP. La plupart des études basées sur les EDP ont eu recours à des simulations numériques.

Nous concentrons notre étude sur un cas unidimensionnel pour capturer les principales caractéristiques de la gestion des pêches. Ainsi, il est supposé que la population vit dans une région de longueur  $L > 0$ .

Soit  $u(x)$  la densité du stock à la position  $x$ .

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 u}{dx^2} = -\mu u - E(x)u + r - k \frac{du}{dx} \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases} \quad (M)$$

Le modèle (M) décrit l'état d'équilibre du système correspondant au système d'évolution.

La quantité  $-D \frac{d^2 u}{dx^2}$  représente les changements de la concentration due aux mouvements aléatoires de l'espèce, par exemple le déplacement pour la recherche de nourriture, où  $D$  est le coefficient de diffusion. Pour plus de détails sur le mouvement du poisson voir [43].

Dans le modèle,  $E$  représente l'effort de pêche. Ce paramètre est estimé par le nombre et la capacité des navires.

$\mu$  est le taux de mortalité,  $r$  est le taux de recrutement correspondant aux individus entrant dans le stock exploitable dans un système ouvert.

Ces recrues proviennent de l'immigration des juvéniles des régions avoisinantes.

La constante  $k$  est la vitesse des courants marins générée par le vent et les différences des densités de l'eau causées par la variation de la température et de la salinité. De nombreuses espèces utilisent sur les courants pour distribuer leurs larves.

Les conditions de Dirichlet signifient que le bord de l'habitat est inadapté et la population ne peut pas survivre dans cette région.

Dans une première approche, nous supposons que l'espace est homogène dans la direction parallèle à la côte. L'espace est réduit à un segment.

### 4.2.1 Récolte optimale et conservation de l'écosystème

Il y a une énorme littérature sur la pêche optimale avec des réserves marines qui sont généralement imposées dans les modèles étudiés. Jusqu'à présent quelques études ont une approche différente voir par exemple [55], [63], [80] et [92]. Notre objectif est d'exploiter de façon optimale les ressources en tenant compte de la conservation de l'écosystème.

La principale question est: quels sont les effets de la conservation de l'écosystème sur la récolte optimale?.

Pour résoudre ce problème, nous essayons de maximiser la fonctionnelle suivante:

$$J(E) = \int_0^L pE(x)u(x)dx + Q \int_0^L u(x)dx$$

soumise aux équations de population décrites par ( $M$ ) et les contraintes du contrôle  $0 \leq E \leq E_{\max}$  où  $E_{\max}$  est constant.

La fonctionnelle  $J$  se compose de deux termes, le premier exprime les revenus générés par la récolte où  $p$  est le prix par unité de biomasse.

Nous supposons que le prix est constant, ceci correspond à une demande élastique. Par exemple, ce cas se produit lorsque le prix est déterminé par le marché international, voir par exemple (Knowler et al., 2001), l'autre terme représente les avantages de la conservation provenant de la présence de certaines règles écologiques, des traditions sociales, le tourisme, la recherche scientifique (voir Roberts et al. (2003)).

La quantité  $\int_0^L u(x)dx$  est la population totale.

$Q$  est un paramètre positif qui équilibre les deux parties de la fonctionnelle objective.

Différents facteurs influencent l'efficacité des MPA, y compris la position et la gestion de la pêche autour de ces zones. On observe que les MPA ne sont pas efficaces économiquement et / ou écologiquement, si elles sont mal placées, par conséquent les modèles devraient aider à prendre des décisions pour bien choisir

l'emplacement de ces réserves marines qui dépendra de l'activité océanographiques, les caractéristiques écologiques et les données biologiques de l'espèce.

Nous demandons où et quand une MPA devrait être créé?. Dans la suite, la réserve marine correspond à l'effort de pêche  $E = 0$ .

Sans perte de généralité, nous supposons que  $D = 1$ . En général, l'application directe du Principe du maximum de Pontryagin conduit vers un problème aux limites qui ne peut être résolu de manière explicite. Par conséquent, pour le résoudre, il faut utiliser des méthodes numériques, voir par exemple [57].

En raison des difficultés techniques, certains modèles sont appliqués uniquement à l'équilibre. Dans ce travail, le but est de caractériser le contrôle optimal en utilisant une analyse qualitative des équations différentielles.

Ce travail est lié à celui de Neubert 2003 [80]. Il a étudié un modèle non linéaire où le terme  $r - \mu u$  est remplacé par  $ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$  avec  $K$  est une constante positive, son approche est basée sur des simulations numériques où seulement le rendement est maximisé.

Quand l'advection est ignorée, Leenheer en 2014 [63] a pu analyser complètement le modèle ( $M$ ) en utilisant des méthodes analytiques et le rendement est maximisé avec un terme de conservation.

Dans [21], l'auteur a fourni une étude systématique pour appliquer la théorie du contrôle optimal à la gestion de pêche.

Il n'y a pas de généralisation complète du Principe du maximum de Pontryagin aux EDP. Pour obtenir les conditions nécessaires d'optimalité, il faut calculer la dérivée de la fonctionnelle objective par rapport au contrôle et résoudre le système adjoint numériquement, voir par exemple [30], [53] et [55].

Ce chapitre est organisé comme suit: la section 2 étudie l'existence du contrôle optimal et sa caractérisation. Section 3 est consacrée à la stratégie optimale de la pêche. Dans la section 4, nous illustrons les résultats théoriques par des simulations numériques. Enfin, dans la section 5, nous donnons une discussion de notre résultat.

<i>Symbol</i>	<i>Description</i>	<i>Typical Units</i>
<b>Variables</b>		
$u$	Density of the species	Tonnes
$E$	Fishing effort	Vessels
$x$	Space	Kilometers
<b>Parameters</b>		
$r$	The rate of recruitment	/ Unit of time
$p$	The market price of stock	Dollars / Tonnes
$Q$	Balances the tradeoff between yield and conservation	/ Unit of time
$k$	Speed of ocean currents	Centimeters / Second
$\mu$	The rate of mortality	/ Unit of time
$L$	Length of the patch	Kilometers

**Table 1:** Variables and parameters used in the model.

## 4.3 Existence d'un contrôle optimal

Nous commençons par quelques définitions et notations utilisées dans la suite de cette section

### 4.3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Soit  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

On désigne par  $C_c(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$  à support compact, c'est-à-dire

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus k \text{ où } k \subset \Omega \text{ est un compacte}\}.$$

**Définition 4.3.1** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$  on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

**Définition 4.3.2** On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega.\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

**Définition 4.3.3** Soit  $f \in L^1(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On dit que  $g_i \in L^1(\Omega)$  est la dérivée partielle faible de  $f$  par rapport à  $x_i$  dans  $\Omega$  et que  $h_{i,j} \in L^1(\Omega)$  est la dérivée partielle faible seconde de  $f$  par rapport à  $(x_i, x_j)$  dans  $\Omega$  si

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

et

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx = - \int_{\Omega} h_{i,j} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^2(\Omega)$$

Nous écrirons alors, pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = h_{i,j}$$

**Définition 4.3.4** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ .

1- La fonction  $f$  appartient à l'espace

$$W^{1,p}(\Omega)$$

Si  $f \in L^p(\Omega)$  et si  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existe et appartient  $L^p(\Omega)$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

On note

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

2- La fonction  $f$  appartient à l'espace

$$W^{2,p}(\Omega)$$

Si  $f \in W^{1,p}(\Omega)$  et si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  existe et appartient  $L^p(\Omega)$  pour  $i, j = 1, \dots, n$ .

Maintenant, nous démontrons l'existence du contrôle optimal  $E^*(x)$  de la fonction objective  $J$ .

En effet, considérons l'ensemble du contrôle suivant:

$$F = \{E \in L_\infty(]0, L[) : 0 \leq E \leq E_{\max}\}$$

Dans la théorie des équations elliptiques standard, pour chaque  $E \in L_\infty$ , le problème (M) admet une unique solution positive  $u \in W^{2,p}(]0, L[)$ ,  $\forall p > 1$ . De plus, il existe une constante positive

$$M^* = M^*(L, r, k, \mu) > 0$$

telle que  $\|u\|_{W^{2,p}} \leq M^*$ , Voir [42] et [97].

**Théorème 4.3.1** Il existe un contrôle  $E^*$  dans  $F$  maximisant la fonctionnelle  $J$ .

**Preuve:** Puisque  $J(E) \leq C$ , avec  $C$  est une constante, On peut choisir une suite maximisante  $\{E_n\} \subset F$  tel que

$$J(E_n) \rightarrow \sup J(E)$$

Pour chaque  $E_n \in L_\infty$ , le problème (M) admet une unique solution positive  $u_n \in W^{2,p}(]0, L[)$ ,  $\forall p > 1$ . En utilisant  $u_n$  comme une fonction teste dans (M), On obtient

$$\|u_n\|_{H_0^1} \leq C$$

pour certains constante positive  $C$ . d'après l'injection compacte  $H_0^1(]0, L[) \subset L^2(]0, L[)$ , alors par passage à la sous suite, il existe  $u^*$  tel que  $u_n \rightarrow u^*$  fortement dans

$L^2(]0, L[)$ . Notons que  $\|u_n\|_{W^{2,p}} \leq M^*$  et d'après l'injection compacte  $W^{2,p}(]0, L[) \subset C^0([0, L])$  pour  $p$  assez grand, il en résulte que

$$\|u^*\|_\infty \leq M^*$$

De même, puisque  $E_n$  est uniformément borné dans  $L^2$ , alors il existe une sous suite qui converge faiblement

$$E_n \rightharpoonup E^*$$

Nous devons donc prouver que

$$J(E^*) = \sup J(E)$$

La quantité  $J(E_n)$  peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} J(E_n) &= \int_0^L pE_n(x)u_n(x)dx + Q \int_0^L u_n(x)dx \\ &= \int_0^L pE_n(x)u_n(x)dx - \int_0^L pE_n(x)u^*(x)dx \\ &\quad + \int_0^L pE_n(x)u^*(x)dx + Q \int_0^L u_n(x)dx \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|J(E_n) - J(E^*)| \leq (pE_{\max} + Q) \int_0^L |u_n - u^*| dx + M^* \int_0^L |E_n - E^*| dx$$

Il découle

$$J(E^*) = \sup J(E).$$

■

### 4.3.2 Principe du maximum

Les conditions nécessaires à l'optimalité sont données par le principe du maximum Pontryagin [104]. Selon ce principe, l'existence de variables adjointes qui satisfont un système différentiel de la forme Hamiltonien.

Soit

$$v = \frac{du}{dx}$$

Alors le problème (M) est équivalent au système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = v, \\ \frac{dv}{dx} = \mu u + Eu - r + kv, \\ u(0) = 0, u(L) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Définissons l'Hamiltonien comme suit

$$H = s(x)E + v\lambda_1(x) + (\mu u - r + kv)\lambda_2(x) + Qu$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les variables adjointes et  $s(x) = (p + \lambda_2)u$  est appelé fonction de transition voir Clark [21].

Le Hamiltonien  $H$  dépend linéairement de  $E$ . Par conséquent, le contrôle optimal sera une combinaison du contrôle extrême et singulier. Le contrôle optimal  $\hat{E}$  qui maximise  $H$  doit satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \hat{E} &= E_{\max}, \quad \text{où } s(x) > 0, \text{ i.e., } \lambda_2(x) > -p \\ \hat{E} &= 0, \quad \text{où } s(x) < 0, \text{ i.e., } \lambda_2(x) < -p \end{aligned}$$

$\lambda_2(x)$  est le prix virtuel [21] et  $-p$  est le revenu économique net par unité de pêche.

Lorsque  $s(x) = 0$ , i.e., lorsque le prix virtuel est égale au revenu économique net par unité de pêche, alors l'Hamiltonien  $H$  devient indépendant de  $E$ , i.e.,  $\partial H / \partial E = 0$ , et le taux de pêche est indéterminée.

Dans ce cas, trois solutions pour  $\hat{E}$  sont possibles: soit  $\hat{E} = 0$ ,  $\hat{E} = E_{\max}$  ou  $\hat{E} = E^*$ .

En appliquant le Principe du maximum de Pontryagin, les variables adjointes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  satisfont les conditions suivantes

i) Le système

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{d\lambda_2}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial v},$$

qui implique que

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dx} = -pE - \lambda_2(\mu + E) - Q, \\ \frac{d\lambda_2}{dx} = -k\lambda_2 - \lambda_1. \end{cases} \quad (S)$$

ii) La condition de transversalité

$$\lambda_2(0) = \lambda_2(L) = 0.$$

### 4.3.3 Le contrôle singulier

**Lemme 4.3.1** *Le contrôle singulier  $E^*$  n'existe pas.*

**Preuve:** Nous suivons les même étape que [63], par l'absurde, en supposant, qu'il existe un intervalle  $[a; b] \subset [0; L]$  tel que

$$\lambda_2(x) = -p \quad \text{sur } [a; b] \quad (4.2)$$

Ce qui implique

$$\frac{d\lambda_2}{dx} = 0$$

D'après la deuxième équation( $S$ ), nous obtenons:

$$-\lambda_1(x) + kp = 0$$

Ce qui entraîne que:

$$\lambda_1(x) = -kp \tag{4.3}$$

Alors

$$\frac{d\lambda_1(x)}{dx} = 0. \tag{4.4}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1(x)}{dx} = 0 & \text{sur } [a; b], \\ \frac{d\lambda_2(x)}{dx} = 0 & \text{sur } [a; b]. \end{cases}$$

Cela signifie que  $(\lambda_1, \lambda_2)$  est à l'équilibre  $(-kp, -p)$  sur  $[a; b]$ .

Par conséquent,

$$\lambda_2(x) = -p, \quad \text{pour tout } x \in [0; L],$$

Ceci produit une contradiction avec la condition de transversalité.

Finalement, nous déduisons que pour chaque  $x \in [0; L]$ ,  $\lambda_2(x) \neq -p$ . ■

Puisque le contrôle optimal n'est pas singulier, le contrôle optimal est:

- i) ou bien absence de la pêche,  $\hat{E} = 0$
- ii) ou bien la pêche est maximale,  $\hat{E} = E_{\max}$
- iii) ou bien une transition entre  $\hat{E} = 0$  et  $\hat{E} = E_{\max}$ .

D'après la condition de transversalité, il est clair que le contrôle optimal est maximal au voisinage du bord de l'habitat,  $x = 0$  et  $x = L$ . Ainsi, le cas *i*) ne peut pas se produire.

Afin de comprendre la stratégie optimale de la récolte, nous avons besoin d'étudier le système hamiltonien ( $S$ ).

## 4.4 Le système Hamiltonien

Puisque nous ne pouvons pas utiliser la symétrie des trajectoires par rapport à l'axe des ordonnées comme dans [63], nous complétons les arguments du plan des phases en prouvant d'autres propriétés des solutions.

Donc, deux cas se présentent

$E = E_{\max}$ , on a le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dx} = -pE_{\max} - Q - (\mu + E_{\max}) \lambda_2, \\ \frac{d\lambda_2}{dx} = -k\lambda_2 - \lambda_1. \end{cases} \quad (4.5)$$

En utilisant la première équation et la dérivée seconde de la deuxième équation du système (4.5), nous obtenons l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda_2}{dx^2} &= -k \frac{d\lambda_2}{dx} - \frac{d\lambda_1}{dx}, \\ &= -k \frac{d\lambda_2}{dx} + pE + Q + \lambda_2(\mu + E), \end{aligned}$$

ou encore,

$$\frac{d^2\lambda_2}{dx^2} + k \frac{d\lambda_2}{dx} - \lambda_2(\mu + E_{\max}) = pE_{\max} + Q. \quad (4.6)$$

Ainsi, l'équation caractéristique associée à (4.6) est de la forme suivante:

$$z^2 + kz - (\mu + E_{\max}) = 0,$$

elle admet deux racines réelles:

$$s_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4(\mu + E_{\max})}}{2} > 0,$$

et

$$s_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4(\mu + E_{\max})}}{2} < 0.$$

D'où la solution de l'équation homogène (4.6) est

$$\lambda_2(x) = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x}.$$

D'autre part, la solution particulière  $\lambda_p(x)$  est donnée par

$$\lambda_p(x) = - \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right).$$

La solution générale de l'équation (4.6) est donnée par

$$\lambda_2(x) = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x} - \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right).$$

Ainsi, (4.5) donne

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -pE - \lambda_2(\mu + E), \\ &= -pE - \left( c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} - \frac{pE}{\mu + E} \right) (\mu + E), \\ &= -(\mu + E) (c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lambda_1(x) = \lambda_1^0 - (\mu + E_{\max}) \left( \frac{c_1}{s_1} e^{s_1 x} + \frac{c_2}{s_2} e^{s_2 x} \right),$$

alors

$$\lambda_1(x) = \lambda_1(0) - (\mu + E_{\max}) \left( \frac{c_1}{s_1} e^{s_1 x} + \frac{c_2}{s_2} e^{s_2 x} - Qx \right) + (\mu + E_{\max}) \left( \frac{c_1}{s_1} + \frac{c_2}{s_2} \right),$$

avec  $c_1, c_2$  sont des constantes réelles.

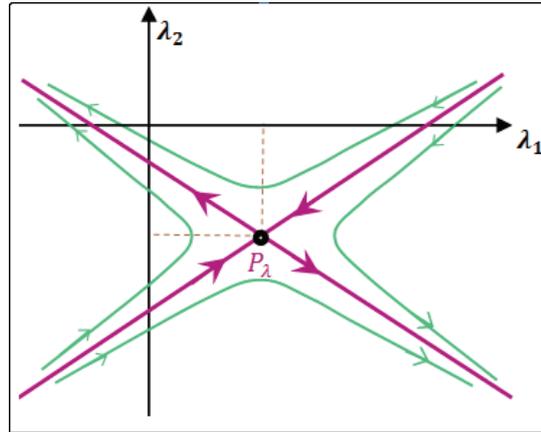
L'unique point d'équilibre  $P_\lambda$  de (4.5) est

$$P_\lambda = (\lambda_1^*, \lambda_2^*),$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right) k, \\ \lambda_2^* &= - \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right). \end{aligned}$$

**Remarque 4.4.1** On a  $s_1 < 0$  et  $s_2 > 0$  ce qui implique que  $P_\lambda$  est un point-selle.



*Le portrait de phase du système adjoint*

Le lemme suivant est très important pour les prochaines étapes.

**Lemme 4.4.1** *i) si  $E = E_{\max}$ , alors le système (S) admet une unique solution  $(\lambda_1, \lambda_2)$  satisfaisant*

$$\lambda_2(0) = \lambda_2(L) = 0$$

où

$$-s_2 \left( \frac{p + E_{\max}Q}{\mu + E_{\max}} \right) < \lambda_1(0) < -s_1 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)$$

ii) Pour tout  $x \in [0, L]$ ,  $\lambda_2(x) \geq \lambda_2^*$ . De plus, cette solution admet un unique minimum  $(\lambda_1^{\min}, \lambda_2^{\min})$ .

iii) La valeur minimale est donnée par

$$\lambda_2^{\min} = e^{s_2 x^*} \left( \frac{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{p + E_{\max} Q}{\mu + E_{\max}} \right)}{s_1} \right) - \left( \frac{p E_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)$$

avec

$$x^* = \frac{1}{(s_2 - s_1)} \ln \left( \frac{\lambda_1(0) + s_2 \left( \frac{p + E_{\max} Q}{\mu + E_{\max}} \right)}{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{p + E_{\max} Q}{\mu + E_{\max}} \right)} \times \frac{s_2}{s_1} \right)$$

**Preuve:** i) Les conditions de transversalités

$$\lambda_2(0) = \lambda_2(L) = 0$$

impliquent que

$$\lambda_2'(0) = -\lambda_1(0). \quad (4.7)$$

La condition  $\lambda_2(0) = 0$  implique

$$c_1 + c_2 = \frac{(pE + Q)}{(\mu + E)}$$

et d'autre part l'équation (4.7) implique que

$$s_1 c_1 + s_2 c_2 = -\lambda_1(0)$$

donc nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} s_1 c_1 + s_2 c_2 = -\lambda_1(0) \\ c_1 + c_2 = \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{\lambda_1(0) + s_2 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)}{s_1 - s_2} \\ c_2 = \frac{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)}{s_1 - s_2} \end{cases}$$

Donc la fonction

$$\lambda_2(x) = -\frac{\lambda_1(0) + s_2 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)}{s_1 - s_2} e^{s_1 x} + \frac{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)}{s_1 - s_2} e^{s_2 x} - \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)$$

satisfait

$$\lambda_2(0) = 0$$

D'autre part, la condition

$$\lambda_2(L) = 0$$

sera satisfaite si et seulement si

$$\lambda_1(0) = \lambda_1^0 := \frac{pE_{\max} + Q}{e^{s_2L} - e^{s_1L}} [s_1(1 - e^{s_2L}) + s_2(-1 + e^{s_1L})]$$

Notons que

$$\lambda_1(0) = -\frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} [\alpha s_1 + \beta s_2]$$

avec

$$0 < \alpha = \frac{(e^{s_2L} - 1)}{e^{s_2L} - e^{s_1L}} < 1 \text{ et } 0 < \beta = \frac{(1 - e^{s_1L})}{e^{s_2L} - e^{s_1L}} < 1$$

et

$$\alpha + \beta = 1$$

Par conséquent

$$-s_2 \left( \frac{p + E_{\max}Q}{\mu + E_{\max}} \right) < \lambda_1(0) < -s_1 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right).$$

Soit

$$\lambda_1(x) = \lambda_1^0 - (\mu + E_{\max}) \left( \frac{c_1}{s_1} e^{s_1x} + \frac{c_2}{s_2} e^{s_2x} - Qx \right) + (\mu + E_{\max}) \left( \frac{c_1}{s_1} + \frac{c_2}{s_2} \right).$$

alors  $(\lambda_1, \lambda_2)$  est la solution désirée.

ii) La variété stable est une ligne qui traverse  $P_\lambda$  avec la pente  $\frac{1}{s_2}$  et la variété instable est une ligne à travers  $P_\lambda$  avec la pente  $\frac{1}{s_1}$ . L'intersection de la variété stable avec l'axe  $\lambda_1$  est le point  $-s_1 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)$ .

L'intersection de la variété instable avec l'axe  $\lambda_1$  est le point  $-s_2 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right)$ .

La région qui se trouve au-dessus de la variété stable et instable est positivement invariante.

Le point le plus bas de cette région est le point d'équilibre  $P_\lambda$ . Il en résulte que lorsque

$$-s_2 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right) \leq \lambda_1(0) \leq -s_1 \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right),$$

alors

$$\lambda_2(x) \geq \lambda_2^*$$

pour tout  $x \in [0, L]$ .

Afin d'établir l'existence d'un minimum  $(\lambda_1^{\min}, \lambda_2^{\min})$ , nous écrivons  $\lambda_2$  comme une fonction en  $\lambda_1$ , tel que

$$\lambda_2 = f(\lambda_1) \tag{4.8}$$

Nous ne pouvons pas déterminer la fonction  $f$ , mais nous pouvons déduire sa variation en utilisant le système adjoint (S). L'étude de variation donne

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \frac{k\lambda_2 + \lambda_1}{pE_{\max} + Q + \lambda_2(\mu + E_{\max})},$$

elle s'annule sur la ligne

$$\lambda_2 = \frac{-1}{k}\lambda_1,$$

alors on a  $\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} > 0$  si

$$\lambda_2 > \frac{-1}{k}\lambda_1,$$

ainsi,  $\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} < 0$  si

$$\lambda_2 < \frac{-1}{k}\lambda_1.$$

De plus,

$$\frac{d^2\lambda_2}{d\lambda_1^2} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} k(k\lambda_2 + \lambda_1)(pE_{\max} + Q + \lambda_2(\mu + E_{\max})) + \\ (pE_{\max} + Q + \lambda_2(\mu + E_{\max}))^2 - (\mu + E_{\max})(k\lambda_2 + \lambda_1)^2 \end{array} \right\}}{(pE_{\max} + Q + \lambda_2(\mu + E_{\max}))^2},$$

où

$$k\lambda_2 + \lambda_1 = 0.$$

Alors

$$\frac{d^2\lambda_2}{d\lambda_1^2} = 1 > 0,$$

et la fonction est convexe au voisinage du minimum  $(\lambda_1^{\min}, \lambda_2^{\min})$ .

iii) D'après la relation

$$\lambda_2(x) = -\frac{\lambda_1(0) + s_2\left(\frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}}\right)}{s_1 - s_2}e^{s_1x} + \frac{\lambda_1(0) + s_1\left(\frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}}\right)}{s_1 - s_2}e^{s_2x} - \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\lambda_2(x)}{dx} = -\frac{\lambda_1(0) + s_2\left(\frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}}\right)}{s_1 - s_2}s_1e^{s_1x} + \frac{\lambda_1(0) + s_1\left(\frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}}\right)}{s_1 - s_2}s_2e^{s_2x}.$$

Le minimum est atteint lorsque

$$\frac{\lambda_2(x)}{dx} = 0.$$

Ceci implique que

$$e^{(s_2-s_1)x} = \left( \frac{\lambda_1(0) + s_2 \left( \frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}} \right)}{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}} \right)} \right) \frac{s_1}{s_2},$$

et

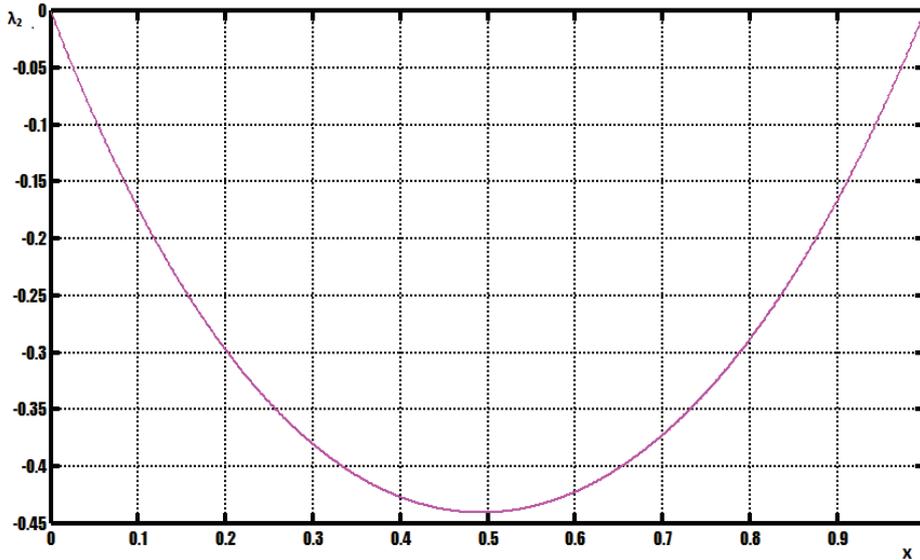
$$x^* = \frac{1}{(s_2 - s_1)} \ln \left( \frac{\lambda_1(0) + s_2 \left( \frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}} \right)}{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}} \right)} \times \frac{s_1}{s_2} \right)$$

et la valeur minimale est donné par

$$\lambda_2(x^*) = e^{s_2 x^*} \left( \frac{\lambda_1(0) + s_1 \left( \frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}} \right)}{s_1} \right) - \left( \frac{pE_{\max} + Q}{\mu + E_{\max}} \right).$$

■

La figure 1 en dessous représente le diagramme de la solution  $\lambda_2$  lorsque  $E(x) = E_{\max}$  pour certains paramètres.



The behavior of the function  $\lambda_2$  on  $[0, 1]$ . Parameter values  $p=1, E=5, Q=0.5, \mu=0.3, k=0.2, l=1$

Figure 1: La courbe  $\lambda_2$  lorsque  $E = E_{\max}$

## 4.5 La récolte optimale

Deux cas se présentent :

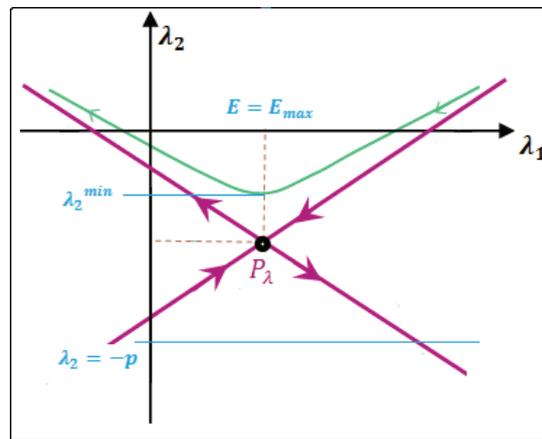
**1er Cas:**  $\lambda_2^{\min} \geq -p$

Dans ce cas il n'y a pas de transition, en effet, la relation  $\lambda_2^{\min} \geq -p$  implique que

$$\lambda_2(x) \geq -p \quad \forall x \in [0; L].$$

Il en résulte que la trajectoire se trouve au-dessus de la ligne de transition. Par conséquent

$$\hat{E} = E_{\max}, \quad \forall x \in [0; L]$$



La stratégie optimale de la récolte:  $\lambda_2^{\min} \geq -p$

**Corollaire 4.5.1** *Si  $p\mu \geq Q$ , la récolte optimale consiste à pêcher au taux maximal  $E_{\max}$  partout et l' MPA n'est pas nécessaire.*

**Preuve:** Puisque l'équilibre  $P_\lambda = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  est un point selle, alors  $\lambda_2^{\min} > \lambda_2^*$ .

on a  $\lambda_2^* = -\left(\frac{pE_{\max}+Q}{\mu+E_{\max}}\right)$  ce qui implique que  $\lambda_2^* \geq -p$ . Par conséquent  $\lambda_2^{\min} > -p$ .

■

**2ème Cas**  $\lambda_2^{\min} < -p$

Dans ce cas, le minimum  $(\lambda_1^{\min}, \lambda_2^{\min})$  de la fonction (4.8) est sous la ligne

$$\lambda_2(x) = -p.$$

Soit  $(\lambda_1^{E_{\max}}(x), \lambda_2^{E_{\max}}(x))$  la solution du système (S) avec  $E = E_{\max}$ , alors il existe un premier instant

$$x = L_1 > 0$$

tel que

$$\lambda_2^{E_{\max}}(L_1) = -p,$$

à cette position, le contrôle doit passer à  $E = 0$ .

Si la trajectoire ne coupe pas la ligne  $\lambda_2(x) = -p$ , il est impossible de satisfaire à la condition de transversalité  $\lambda_2(L) = 0$ . Afin de compléter la solution optimale, la trajectoire doit satisfaire  $\lambda_2(L) = 0$ .

La stratégie optimale consiste donc à pêcher au taux maximum  $E_{\max}$  jusqu'à la position  $x = L_1$ , puis nous réduisons le taux de pêche à  $E = 0$  jusqu'à la position  $x = L_2 > L_1$ . Finalement, nous revenons à un taux de pêche maximale  $E_{\max}$  de la position  $x = L_2$  à la position  $x = L$ .

Lorsque  $E = 0$  le système (S) devient

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dx} = -\mu\lambda_2 - Q, \\ \frac{d\lambda_2}{dx} = -k\lambda_2 - \lambda_1. \end{cases}$$

De manière similaire, la solution générale du système est donnée par

$$\begin{cases} \lambda_1^{E_0}(x) = \lambda_1^0 - \mu \left( \frac{c_1}{s_1} e^{s_1 x} + \frac{c_2}{s_2} e^{s_2 x} - Qx \right) + \mu \left( \frac{c_1}{s_1} + \frac{c_2}{s_2} \right) \\ \lambda_2^{E_0}(x) = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x} - \frac{Q}{\mu}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}, \\ s_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}. \end{cases}$$

L'équation

$$\lambda_2^{E_0}(L_1) = \lambda_2^{E_0}(L_2) = -p,$$

implique que

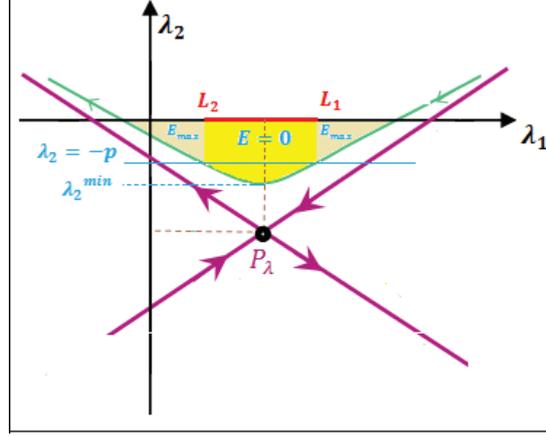
$$\begin{cases} c_1 = \frac{s_2 \left( \frac{Q}{\mu} - p \right) - (kp - \lambda_1(L_1))}{(s_2 - s_1) e^{s_1 L_1}}, \\ c_2 = \frac{(kp - \lambda_1(L_1)) - s_1 \left( \frac{Q}{\mu} - p \right)}{(s_2 - s_1) e^{s_2 L_1}}. \end{cases}$$

D'où la fonction

$$(\lambda_1(x), \lambda_2(x)) = \begin{cases} (\lambda_1^{E_{\max}}(x), \lambda_2^{E_{\max}}(x)) & x \in [0, L_1[ , \\ (\lambda_1^{E_0}(x), \lambda_2^{E_0}(x)) & x \in [L_1, L_2] , \\ (\lambda_1^{E_{\max}}(x), \lambda_2^{E_{\max}}(x)) & x \in ]L_2, L] , \end{cases}$$

verifie le système (S) avec  $E = E_{\max}$  et  $E = 0$  respectivement sur des intervalles  $[0, L_1[ \cup ]L_2, L]$  et  $[L_1, L_2]$ . En outre, elle satisfait les conditions de transversalité. D'où le contrôle optimal

$$\hat{E} = \begin{cases} E_{\max} & \text{sur } [0, L_1[ \cup ]L_2, L] \\ 0 & \text{sur } [L_1, L_2] \end{cases}$$



La stratégie optimale de la récolte:  $\lambda_2^{\min} < -p$

**Corollaire 4.5.2** Si  $Q > p\mu$ , alors il existe une réelle valeur  $L_{cri}$  telle que si  $L > L_{cri}$ , alors il existe un contrôle optimal  $\hat{E} = E_{\max}$  sur  $[0, L_1[ \cup ]L_2, L]$  et  $\hat{E} = 0$  sur  $[L_1, L_2]$ . La stratégie optimale nécessite l'installation d'un seul MPA au milieu de  $[0, L]$ .

**Preuve:** Soit  $(\lambda_1, \lambda_2)$  une solution de (S) satisfaisant

$$\lambda_2(0) = \lambda_2(L) = 0$$

et soit  $(\omega_1, \omega_2)$  une solution de (S) avec  $k = 0$ , et vérifiant

$$\omega_2(0) = \omega_2(L) = 0$$

Alors, nous avons

$$\frac{d\lambda_2}{dx} \leq \frac{d\omega_2}{dx}$$

Par le principe de comparaison, nous déduisons que

$$\lambda_2(x) \leq \omega_2(x) \text{ pour tout } x \in [0, L].$$

D'après le Théorème 5 dans [63], il en résulte qu'il existe une valeur réelle  $L_{cri}$  telle que si  $L > L_{cri}$ ,

$$\omega_2(x) \leq -p \text{ pour tout } x \in [0, L]$$

D'après le théorème 3 et l'inégalité 34, voir [63], il en résulte qu'il existe une valeur réelle  $L_{cri}$  telle que si  $L > L_{cri}$ , la solution correspondant à  $k = 0$  est sous la ligne  $\omega_2 = -p$  pour certains  $x \in [0, \frac{L}{2}]$ . Cela implique que  $\lambda_2^{\min} < -p$ . ■

**Remarque 4.5.1** *Si le prix est faible, ou l'effort de conservation sur la pêche est élevé, la stratégie optimale dépend de la longueur  $L$  du patch. Si le patch est assez grand, l' MPA est une partie de la solution optimale.*

## 4.6 Stabilité de la solution Optimale

Il est mathématiquement et biologiquement intéressant d'établir la stabilité de la solution optimale. Afin d'étudier cette question, nous considérons le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d^2 u}{dx^2} - \mu u - \hat{E}(x)u + r - k \frac{du}{dx} \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases}$$

La linéarisation de la solution optimale correspondant à la pêche optimale  $\hat{E}(x)$  est donnée par le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d^2 v}{dx^2} - \mu v - \hat{E}(x)v - k \frac{dv}{dx} \\ v(0) = 0, \quad v(L) = 0 \end{cases}$$

Les propriétés de stabilité de la solution optimale sont déterminées par la valeur propre du problème

$$\begin{cases} \lambda v = Av \\ v(0) = 0, \quad v(L) = 0 \end{cases}$$

où

$$Av = \frac{d^2 v}{dx^2} - \mu v - \hat{E}(x)v - k \frac{dv}{dx}.$$

Soit  $\lambda_1$  être la valeur propre principale de l'opérateur  $A$  avec des conditions aux limites de Dirichlet. Alors

$$\lambda_1 \int_0^L v^2 dx = - \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L (\mu + \hat{E}(x)) v^2 dx < 0.$$

Cela implique que  $\lambda_1 < 0$ , de plus, d'après le théorème de Krein Rutman (voir par exemple Th.6.1 dans [96]), nous obtenons que  $Re\lambda \leq \lambda_1$  pour toute valeur propre de l'opérateur  $A$ . Par conséquent, nous avons la stabilité locale de la solution optimale.

## 4.7 Simulations numériques

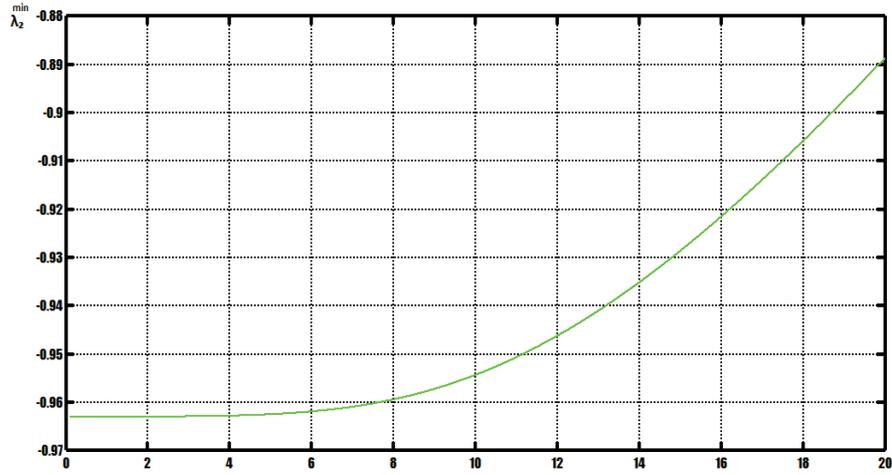
L'étude de la façon dont la récolte optimale dépend d'autres paramètres, peut se faire d'une manière similaire en utilisant la quantité  $\lambda_2^{\min}$ .

Les simulations suivantes sont données avec des valeurs de paramètres (voir Figure 3):

$$p = 1, E_{\max} = 5, Q = 0.5, \mu = 0.3, L = 10,$$

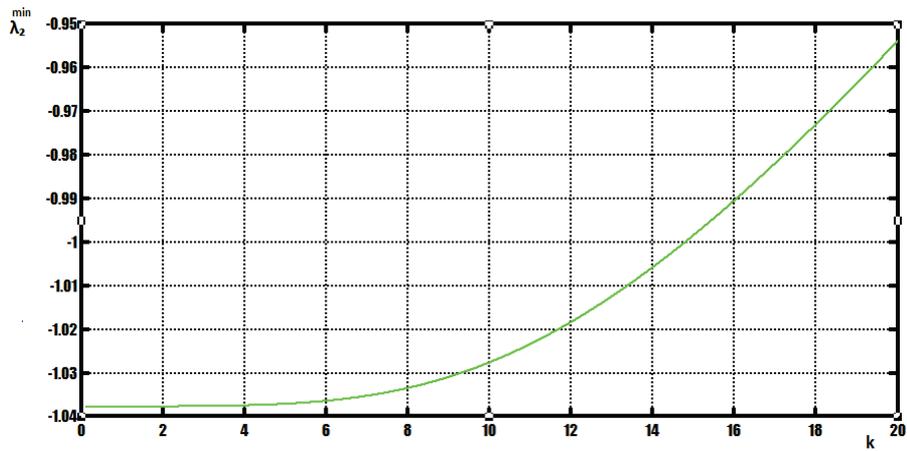
et (voir figure 2)

$$p = 1, E_{\max} = 5, Q = 0.2, \mu = 0.4, L = 10,$$



The figure shows the behavior of  $\lambda_2^{\min}$  when  $k$  varies, The parameter values are  $Q=0.2, p=1, \mu =0.4, E=5_{\max}$

Figure 2



The figure shows the behavior of  $\lambda_2^{\min}$  when  $k$  varies, The parameter values are  $Q=0.5, p=1, \mu =0.3, E=5_{\max}$

Figure 3

Le comportement de  $\lambda_2^{\min}$  comme une fonction de  $k$  est obtenue numériquement et illustre l'impact des courants océaniques sur la récolte optimale.

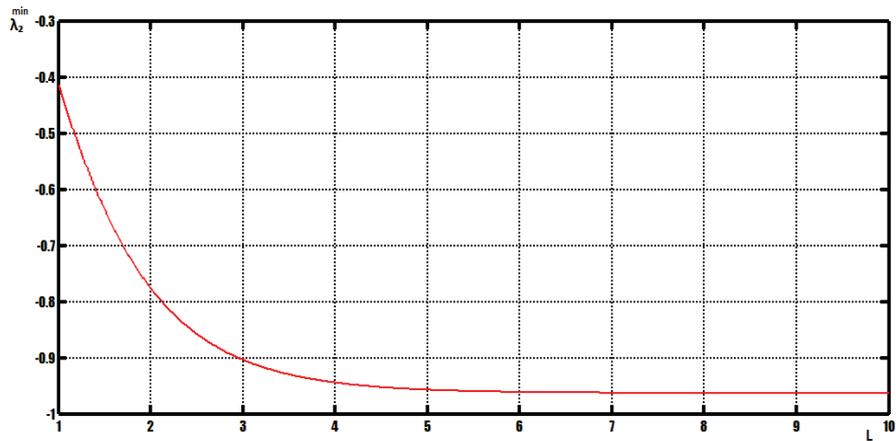
La figure 3, montre que si  $Q > p\mu$ , il existe  $k_{cri} \simeq 14.5$  tel que

- Si  $k \geq k_{cri}$ , alors la stratégie optimale est obtenue par la pêche au taux maximum  $\hat{E} = E_{\max}$ .
- Si  $k \leq k_{cri}$ , la solution optimale consiste à prendre une réserve marine à l'intérieur du patch.

La figure 2 montre que pour  $p\mu \geq Q$ , la stratégie optimale consiste à pêcher au taux maximum indépendamment de  $k$ .

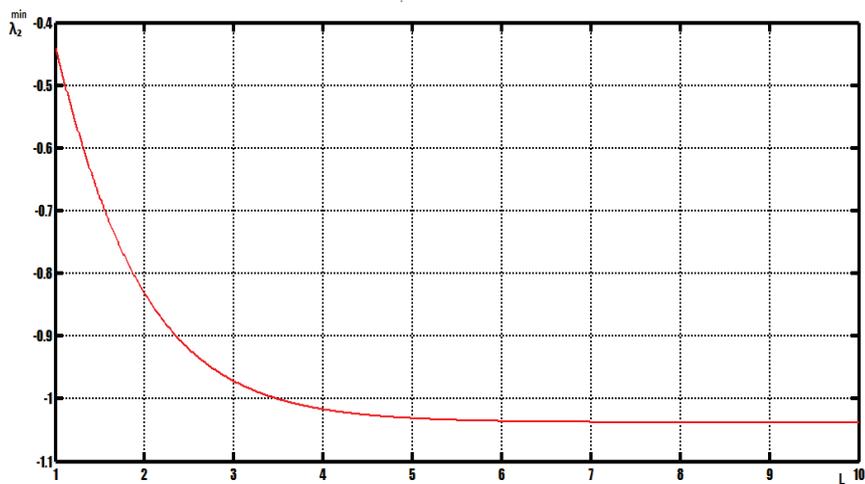
**Remarques 4.7.1** *Les figures 2 et 3 donnent quelques indications qualitatives. Si l'effort de conservation est élevé, alors la stratégie de la récolte optimale dépend de l'intensité des courants. Si le courant est fort, il est plus rentable de récolter avec un taux maximal. Si le courant est faible, il est avantageux de récolter dans les zones les plus proches du bord du patch. Si l'effort de conservation est faible, la stratégie optimale consiste à pêcher au taux maximum partout.*

La figures 4 et 5 illustrent les résultats obtenus dans les corollaires 4.5.1 et 4.5.2 respectivement. La pêche optimale dépend de la longueur  $L$ . Par exemple, lorsque  $Q > p\mu$  (fig.5) il existe une réelle valeur  $L_{cri} \simeq 3.5$  tel que si  $L > L_{cri}$  la pêche optimale nécessite la mise en place d'une MPA, car dans ce cas,  $\lambda_2^{\min} < -1$ .



The figure shows the behavior of  $\lambda_2^{\min}$  when L varies. The parameter values are  $k=0.2, Q=0.2, p=1, \mu =0.4, E_{\max}^5$

Figure 4



The figure shows the behavior of  $\lambda_2^{\min}$  when L varies. The parameter values are  $k=0.2, Q=0.5, p=1, \mu =0.3, E_{\max}^5$

Figure 5

## 4.8 Conclusion

Bien qu'il existe des complexités dans les systèmes marins, le modèle étudié dans ce chapitre est simple. Il renferme les caractéristiques principales d'une pêcherie et améliore notre compréhension de la façon de gérer les ressources halieutique. Ce modèle est conçu pour atteindre des objectifs économiques et pour la conservation de la biodiversité.

Le contrôle optimale est résolu analytiquement et analysé en termes de paramètres du modèle.

L'emplacement de l'MPA est déterminé explicitement. Nous soulignons les situations où les réserves marines apparaissent comme une partie de la solution optimale.

Cette solution dépend des paramètres économiques, par exemple, le prix de vente, la pression des écologistes, et des paramètres biologiques tels que la mortalité naturelle des espèces, les courants océaniques ainsi que la longueur de la région. L'identification de ces paramètres est importante pour la gestion des pêches.

Lorsque le prix de vente est élevé ou le taux de conservation est faible, alors il faut pêcher partout et avec un taux maximal. Si le prix est bas, ou que la pression des écologistes est élevée, la stratégie optimale de la pêche dépend de la longueur de la région: Si ce dernier est assez grand, l'aire marine protégée est une partie de la solution optimale.

Une MPA devrait être mise en œuvre à l'intérieur de la région. L'étude fournit des informations incomplètes lorsque  $Q > p\mu$  et la longueur de la région est petite. Une réponse est obtenue par [63] lorsque  $k = 0$ . Pour les petites valeurs du prix de vente et des courants faibles, la stratégie optimale est de prendre une réserve marine à l'intérieur de la région. Des modèles bio-économiques similaires ont été développés dans J. M. Sanchiro et al. [92]. Ils étudient un système dynamique avec dispersion où l'espace est discret. Ils ont concentrés leurs études sur la maximisation du profit en tenant compte du coût de la pêche. Entre autres résultats, ils constatent que les réserves devraient être mises en œuvre lorsque la région a des coûts de pêche plus élevés. Pour tester les performances des aires protégées avec un coût quadratique, nous renvoyons le lecteur à [16]. Les auteurs considèrent un système proie-prédateur avec une zone protégée pour les proies. D'autres études de modélisation ont analysé l'hétérogénéité spatiale sous la forme de patch isolées, voir [13], [14], [105].

Malgré le fait que la technique a réduit le coût de la pêche, il serait intéressant de l'inclure dans la fonction objective, nous nous efforçons d'examiner cette question dans un autre travail. Les résultats semblent être similaires en dimensions supérieures (de  $N \geq 2$ ) mais des difficultés d'ordre mathématiques subsistent et cette question demeure ouverte.

---

---

## Bibliographie

- [1] R.P. AGARWAL and D. O'REGAN, *Infinite interval problems for differential, difference and integral equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrech, (2001).
- [2] D. AMI, P. CARTIGNY and A. RAPAPORT, *Can marine protected areas enhance both economic and biological situations?*, C. R. Biologies 328, (2005), 357 – 366.
- [3] R.I. AVERY and A.C PETERSON, *Three fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, Comput. Math. App., 42 (2001) , p. 313 – 322.
- [4] D.D BAINOV, P.S SIMEONOV, *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*, Longman Scientific and Technical, Harlow(1993).
- [5] D.D BAINOV, P.S SIMEONOV, *Systems with impulse effect: Stability theory and applications*, Horwood, Chichester(1989).
- [6] S.A. BELBAS, W.H. SCHMIDT, *Optimal control of impulsive Volterra equations with variable impulse times*, Appl. Math. Comput, 214, (2009), 353 – 369.
- [7] M. BENCHOHRA, J. HENDERSON and S.K. NTOUYAS, *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2, New York, 2006.
- [8] M. BENCHOHRA and A. BOUCHERIF, *Initial value problems for impulsive differential inclusions of first order*, Differential Equations and Dynamical Systems, 8 (1) , (2000), 51 – 66.
- [9] BENSENANE, M., MOUSSAOUI, A., & AUGER, P. (2013). On the optimal size of marine reserves. *Acta Biotheoretica*, 61(1), 109–118.
- [10] G.D. BIRKHOFF, *Dynamical systems*, AMS, New-York, (1927).
- [11] A. BOUCHERIF, *Second-order boundary value problems with integral boundary conditions*, *Nonlinear Anal*,(2008). doi:10.1016/j.na.2007.12.007.
- [12] S. M. BOUGUIMA, M. HELLAL, "*Marine Reserve Design with Ocean Currents and Multiple Objectives*". *Environ. Model. Assess* (Novembre 2016). DOI 10.1007/s10666-016-9543-1.

- 
- [13] T. BROCHIER, P. AUGER, N. THIAM, M. SOW, S. DIOUF, H. SLOTER-DIJK and P. BREHMER, *Implementation of artificial habitats: Inside or outside the marine protected areas? Insights from a mathematical approach*, Ecological Modelling, vol. 297, p. 98 – 106, 2015.
- [14] G.M. BROWN and J.ROUGHARDEN, *A metapopulation model with private property and a common pool*, Ecol.Econ.30, (1997) , 293 – 299.
- [15] J.R. CANNON, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math. 21 (2) (1963) 155 – 160.
- [16] K. CHAKRABORTY and T.K. KAR, *Economic perspective of marine reserves in fisheries: A bioeconomic model*, Math Biosci, 240, (2012), 212 – 222.
- [17] L. CHEN and J. SUN, *Nonlinear boundary value problem of first order impulsive functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl, 318, (2006), 726 – 741.
- [18] J. CHEN, C.C. TISDELL and R. YUAN, *On the solvability of periodic boundary value problems with impulse*, J. Math. Anal. Appl, 331, (2007), 902 – 912.
- [19] P. CHEN and X.H. TANG, *New existence and multiplicity of solutions for some Dirichlet problems with impulsive effects*, Math. Comput. Modelling, 55,(2012), 723 – 739.
- [20] M. CHOISY, J.F. GUEGAN and P. ROHANI, *Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination: teasing apart the embedded resonance effects*, Physica D, 223(1), (2006) , 26 – 35.
- [21] C.W. CLARK, *Mathematical bioeconomics: The optimal management of renewable resources*, Wiley- New York, (1976).
- [22] J. CLAUDET, *Marine protected areas: A multidisciplinary approach*, Cambridge UK, Cambridge University Press, (2011).
- [23] C. CORDUNEANU, *Integral equations and applications*, Cambridge: Cambridge University Press, (1991).
- [24] H. DANG-VU and C. DELCARTE, *Bifurcations et chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Eds Ellipses Marketing (1 juin 2000).
- [25] N. DAOUDI-MERZAGUI and A. BOUCHERIF, *Variational approach to impulsive differential equations with singular nonlinearities*, J. Appl. Math, Volume 2013(2013), Article ID 464393, 7 pages.
- [26] N. DAOUDI-MERZAGUI and M. HELLAL, *Existence of multiple positive solutions for nonlinear first-order periodic impulsive boundary-value systems with sign changing nonlinearities*, Lith. Math. J, 56(1), (January 2016, ), 32 – 48.

- 
- [27] N. DAOUDI-MERZAGUI and M. HELLAL, *Positive solutions to a system of first-order impulsive nonlocal boundary value problems with sign changing nonlinearities*, soumis.
- [28] N. DAOUDI-MERZAGUI and Y. TABET, *Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem with sign changing nonlinearities*, *Filomat*, 27 (3), (2013), 487 – 499.
- [29] W. DING, J. MI and M. HAN, *Periodic boundary value problems for first-order impulsive functional differential equations*, *Appl. Math. Comput*, 165, (2005), 433 – 446.
- [30] W. DING and S. LENHART, *Optimal harvesting of a spatially explicit fishery model*, *Natural Resource Modelling*, 22(2), (2009), 173 – 211.
- [31] R. D. DRIVER, *Ordinary and Delay Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 20, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [32] E.S. DUNLOP, M.L. BASKETT, M. HEINO and U. DIECKMAM, *Propensity of marine reserves to reduce the evolutionary effects of fishing in a migratory species*, *Evol Appl*, Aug-2(3), (2009), 371 – 393.
- [33] J. EASTHAM and K. HASTINGS, *Optimal impulse control of portfolios*. *Mathematics of Operations Research*, 4 :pp.588 605, 1988.
- [34] M. FENG, B. DU and W. GE, *Impulsive boundary value problems with integral boundary conditions and one-dimensional  $p$ -Laplacian*, *Nonlinear Anal.* 70, 3119 – 3126 (2009).
- [35] M. FRIGON and D. O'REGAN, *First order impulsive initial and periodic problems with variable moments*, *J Math Anal Appl*, 233, (1999), 730 – 739.
- [36] M. FRIGON and D. O'REGAN, *Existence results for first-order impulsive differential equations*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 193 (1), (1995), 96 – 113.
- [37] R.V. GAMKRELIDZE, *Discovery of the maximum principle*, *Journal of Dynamical and Control Systems*,5,(4), (1999), 437 – 451.
- [38] S. GAO, L. CHEN, J.J. NIETO and A. TORRES, *Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence*, *Vaccine*, 24, (35 – 36), (2006), 6037 – 6045.
- [39] W.G. GE and J.L. REN, *Fixed point theorems in double cones and their applications to nonlinear boundary value problem*, *Chinese Annals of Mathematics*,27, (2006), 155 – 168.
- [40] F. GELL and C. ROBERT, *Benefits beyond boundaries: The fishery effect of marine reserves*, *Trends in Ecology and Evolution*, 18, (2003), 448 – 455.

- 
- [41] R.K. GEORGE, A.K. NANDAKUMARAN and A. ARAPOSTATHIS, *A note on contrability of impulsive systems*, J. Math Anal Appl, 241, (2000), 276 – 283.
- [42] D. GILBARG and N. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations*, 2nd ed, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [43] A. GRUSS, *Modelling the impact of marine protected areas for mobile exploited fish populations and their fisheries: what we recently learnt and where we should be going*, Aquatic Living Resources, 12, (2014), 107 – 133.
- [44] D. GUO, *Multiple positive solutions for first order nonlinear impulsive integro-differential equations in a Banach space*, Appl. Math. Comput, 143, (2003), 233 – 249.
- [45] Y. GUO, Y. ZHU and J. QUI, *Multiple positive solutions for higher-order boundary value problems with sign changing nonlinearities*, Electron. Applied Mathematics Letters, 17, (2004), 329 – 336.
- [46] B.S. HALPERN, *Conservation: Making marine protected areas work*, Nature, 506, (2014), 167 – 168.
- [47] Z.Y. HE, Y.F. ZHANG, L.X. YANG and Y.H. SHI, *Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods*, International Joint Conference on Neural Networks, 1, (1999), 262 – 267.
- [48] Z. HE, J. YU, *Periodic boundary value problem for first-order impulsive functional differential equations*, J. Comput. Appl. Math, 138, (2002), 205 – 217.
- [49] S. HRISTOVA, D. BAINOV, *Monotone-iterative techniques of V. Lakshmikantham for a boundary value problem for systems of impulsive differential-difference equations*, J. Math. Anal. Appl, 197 : 1 – 13, 1996.
- [50] J. HUBBARD and B. WEST, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini (1999).
- [51] G. JIANG and Q. LU, *Impulsive state feedback control of a predator-prey model*, J. Comput. Appl. Math, 200, (2007), 193 – 207.
- [52] N.I. IONKIN, *Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions*, Diff. Equ. 13 (1977) 294 304.
- [53] H. JOSHI, G. HERRERA, S. LENHART and M. NEUBERT, *Optimal dynamics harvest of a mobile renewable resource*, Natural resource Modelling, 10(40), (2008), 322 – 343.
- [54] S. KAUL, V. LAKSHMIKANTHAM, S. LEELA, *Extremal solutions, comparison principle and stability criteria for impulsive differential equations with variable times*, Nonlinear Anal, 22, (1994), 1263 – 1270.

- 
- [55] M.R. KELLY, Y. XING and S. LENHART, *Optimal fish harvesting for a population modeled by a nonlinear parabolic partial differential equations*, Natural resource Modelling (2015).
- [56] H.K. KHALIL, *Nonlinear systems*, Macmillan, New York, 3e me – edition, (2002).
- [57] D.F. KIRK, *Optimal control theory*, Englewood Cliff, NJ: Printice-Hall, (1970).
- [58] D. KNOWLER, E.B. BARBIER and I. STRAND, *An open access-model of fisheries and nutrient enrichment in the black sea*, Marine Resource Economics., 16(3), (2001), 195 – 217.
- [59] M.A. KRASNOSEL'SKII, *Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators*, Soviet Mathematics, Doklady, 1, (1960), 1285 – 1288.
- [60] M.A. KRASNOSEL'SKII, *The operator of translation along the trajectories of differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, (1968).
- [61] A. Lakmeche, O. Arino, *Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 7(2000), 265 – 287.
- [62] V. LAKSHMIKANTHAM, D. BAINOV and P.S. SIMEONOV, *Theory of impulsive differential equations*, Series in Modern Applied Mathematics, World Scientific, New Jersey, 6,(1989).
- [63] P. DE LEENHEER, *Optimal placement of marine protected areas: a trade-off between fisheries goals and conservation efforts*, IEEE Transactions on Automatic Control, 59 (6), (June 2014).
- [64] R.W. LEGGETT, L.R. WILLIAMS, *Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J, 7, (2000), 133 – 154.
- [65] Y. LI, F. LI, *Sign-changing solutions to second-order integral boundary value problems*, Nonlinear Anal. 69 (2008) 1179 – 1187.
- [66] M. LI, H. LIU, *An existence result for second-order impulsive differential equations with nonlocal conditions*, Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society Volume 2010, (2010),
- [67] J.L. LI, J.J. NIETO, J.H. SHEN, *Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations*. J Math Anal Appl, 325, (2007), 226 – 236.
- [68] J. LI and J. SHEN, *Periodic boundary value problems for delay differential equations with impulses*, J. Comput. Appl. Math, 193, (2006), 563 – 573.

- [69] J. LI and J. SHEN, *Positive solutions for first-order difference equation with impulses*. Int J Difference Equations. 2, (2006), 225 – 239.
- [70] Y. LI and J. SHU, *Multiple positive solutions for first-order impulsive integral boundary value problems on time scales*, Boundary Value Problems 12, (2011).
- [71] X. LIN, D. JIANG, *Multiple positive solutions of Dirichlet boundary value problems for second order impulsive differential equations*, J. Math. Anal. Appl, 321, (2006), 501 – 514.
- [72] Y. LIU, *Further results on periodic boundary value problems for nonlinear first order impulsive functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl, 327, (2007), 435 – 452.
- [73] X. LIU, *Periodic boundary value problems for impulsive systems containing Hammerstein type integrals*, Dynam. Systems Appl. 6, (1997), 517 – 528.
- [74] Y. LIU, *Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations*, Nonlinear Anal. 70, (2009), 2106 – 2122.
- [75] J. LUBCHENCO, S.R. PALUMBI, S.D. GAINES and S. ANDELMAN, *Plugging a hole in the ocean: the emerging science of marine reserves*. Ecological Applications, 13(1), (2003), S3 – S7.
- [76] M. MANGEL, *No-take areas for sustainability of harvested species and conservation invariant for marine reserves*, Ecology Letters, 1, (1998), 90 – 97.
- [77] M.F. MEKHTIYEV, SH.I. DJABRAILOV, Y.A. SHARIFOV, *Necessary optimality conditions of second order in classical sense in optimal control problems of three-point conditions*, J. of Automation and Information Sciences, 42(3), (2010), 47 – 57.
- [78] Moussaoui, A., Bensenane, M., Auger, P., & Bah, A. (2015). On the optimal size and number of reserves in a multi-site fishery model. Journal of Biological Systems, 23(1), 1–17.
- [79] S. NENOV, *Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics*, Nonlinear Anal, 36, (1999), 881 – 890.
- [80] M.G. NEUBERT, *Marine reserves and optimal harvesting*, Ecology Letters, 6, (2003), 843 – 849.
- [81] I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, . TOME I/ Une édition numérique réalisée par Jean-Marc Simonet, Université de Paris XI-Orsay, (1687).
- [82] J.J NIETO, *Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order*. J Math Anal Appl, 205, (1997), 423 – 433.

- [83] J.J NIETO, *Impulsive resonance periodic problems of first order*, Appl. Math. Lett. 15, (2002), 489 – 493.
- [84] J.J NIETO, *Periodic boundary value problems for first-order impulsive ordinary differential equations*, Nonlinear. Anal. 51, (2002), 1223 – 1232.
- [85] J.J NIETO, R. RODRIGUEZ-LOPEZ, *Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 318, (2006), 593 – 610.
- [86] D. PAULY, V. CHRISTENSEN, S. GUENETTE, T.J. PITCHER, U.R. SUMAILA, C.J. WALTERS, R. WASTON and D. ZELLER, *Towards sustainability in world fisheries*. Nature 418, (2002), 689 – 95.
- [87] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, Springer 3<sup>rd</sup> Edition Verlag, New York.(2001) Universités -Mécanique,(2000).
- [88] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3, New York : Dover Publications, p 389. 1957.
- [89] L. PONTRYAGIN et al., *Mathematical theory of optimal processes*. Eds Mir Moscou, page 504, 1974.
- [90] C.M. ROBERTS et al, *Ecological criteria for evaluating candidate site for marine reserves*, Ecological Applications,13, (2003), 199 – 214.
- [91] A.M. SAMOILENKO and N.A. PERESTYUK, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
- [92] J. N. SANCHIRICO, U. MALVADKAR, A. HASTING and J.E. WILLEN, *When are no-take zones an economically optimal fishery management strategy?*, Ecological Applications, 16(5), (2006), 1643 – 1659.
- [93] R. SHI and L. CHEN, *An impulsive predator-prey model with disease in the prey for integrated pest management*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, (2009).
- [94] R. SHI, X. JIANG and L. CHEN, *The effect of impulsive vaccination on an sir epidemic model*, Applied Mathematics and Computation, 212, (2009), 305 – 311.
- [95] D.R. SMART, *Fixed point theorems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1980).
- [96] H.L. SMITH, *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, Mathematical Surveys and Monographs.AMS.Providence, 41, (1995).

- 
- [97] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction -diffusion equations*, 2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [98] E. D. SONTAGE, *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, Springer, New York, (1998).
- [99] S. TARA, *Brouwer's fixed point theorem: methods of proof and applications*, M.S. thesis, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada, (2003).
- [100] Y. TIAN, D. JI and W. GE, *Existence and nonexistence results of impulsive first-order problem with integral boundary condition*, Nonlinear Analysis, 71, (2009), 1250 – 1262.
- [101] Y. TIAN, W. GE, *Existence and uniqueness results for nonlinear first-order three-point boundary value problems on time scales*, Nonlinear Analysis, 69, (2008), 2833 – 2842.
- [102] Y. TIAN, W. GE, *Applications of variational methods to boundary value problem for impulsive differential equations*, Proc Edinb Math Soc, 51, (2008), 509 – 527.
- [103] C.C. TISDELL, *Existence of solutions to first-order periodic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl, 323, (2006), 1325 – 1332.
- [104] E. TRELAT, *Contrôle optimal: théorie et applications*, (2002).
- [105] G.N. TUCK and H.P. POSSINGHAM, *Marine protected areas for spatially structured exploited stocks*, Marine Ecology Progress Series, 192, (2000), 89 – 101.
- [106] S.U. XI, M. JIA and H. JI, *Multiple nonnegative solutions for second-order boundary-value problems with sign-changing nonlinearities*, Electron. J. Differential Equations, 2009 (66), (2009), 1 – 10.
- [107] F. XU, Z. CHEN and F. XU, *Multiple positive solutions for nonlinear second-order  $M$ -point boundary-value problems with sign changing nonlinearities*, Electron. J. Differential Equations, 2008 (45), (2008), 1 – 12.
- [108] B.X. YANG, *Existence and multiplicity of positive periodic solutions for first-order singular systems with impulse effects*, Electron. J. Differential Equations, 2013 (123), (2013), 1 – 9.
- [109] T. YANG, *Impulsive control theory*, Springer, 272, (2001).
- [110] Z. YANG, *Positive solutions to a system of second-order nonlocal boundary value problems*, Nonlinear Anal, 62, (2005), 1251 – 1265.
- [111] R.YU. CHEGIS, *Numerical solution of a heat conduction problem with an integral boundary condition*, Litovsk. Mat. Sb. 24 (1984) 209, 215.

- [112] X. ZHANG, X. LI, D. JIANG and K. WANG, *Multiplicity positive solutions to periodic problems for first-order impulsive differential equations*, Comput Math Appl.52, (2006), 953 – 966.
- [113] A. ZHAO and Z. BAI, *Existence of solutions to first-order impulsive periodic boundary value problems*, Nonlinear Anal,71, (2009), 1970 – 1977.

## Résumé

La thèse est composée de deux parties. La première, est consacrée à l'étude de l'existence de multiplicité de solutions positives pour des problèmes aux limites, associés à des équations différentielles d'ordre 1. La méthode est topologique : théorème de Krasnoselskii (Théorème de point fixe dans double cône).

La deuxième partie expose la gestion d'une pêcherie. Il s'agit d'étudier la maximisation d'un profit qui provient de la pêche, tout en conservant l'espèce. Pour cela, on fait appel au théorème de Pontryagin.

**Mots clés :** Solution positive, problème impulsif, théorème de point fixe de Krasnoselskii, control optimal, principe de Pontryagin.

---

## Abstract

This thesis consists of two parts: in the first one, we prove the existence and the multiplicity of positive solutions for boundary value problems associated to differential equations of order 1 for presence of pulses. The results' proof is based on Krasnoselskii fixed point theorem in double cones

The second part concerns the optimal management of a fishery with conservation of fishery resources.

**Keywords:** Positive solution, impulsive problem, Krasnoselskii fixed point theorem, optimal control, Pontryagin principle.

---

**ملخص** تتكون هذه الأطروحة من جزأين: الجزء الأول يتعلق بإثبات وجود و تعدد حلول موجبة لجملة معادلتين تفاضليتين من الدرجة 1 في ظل وجود نبضات وتعتمد هذه الطريقة المستخدمة على مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي.

الجزء الثاني فيتعلق بالإدارة المثلى للمصايد مع الحفاظ على الموارد السمكية.

**الكلمات المفتاحية :** حل موجب مسائل ذات نابض , مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي, التحكم الأمثل مبدأ بوترياغين.